

Controlador cuadrático lineal con acción de control por adelanto y estabilidad robusta para hornos solares

Igor M. L. Pataro^{a,*}, Juan D. Gil^a, José L. Guzmán^a, João M. Lemos^b, Manuel Berenguel^a

^aCentro Mixto CIESOL, ceiA3, Universidad de Almería. Ctra. Sacramento s/n, Almería 04120, Spain.

^bINESC-ID, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Lisbon, Portugal.

To cite this article: Pataro, Igor M. L., Gil, Juan D., Guzmán, José L., Lemos, João M. and Berenguel, Manuel 2023. Optimal control based on a linear quadratic controller with feedforward action for solar furnace system. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 21, 306-317. <https://doi.org/10.4995/riai.2024.21179>

Resumen

La energía solar representa una fuente renovable, versátil y confiable que puede emplearse en experimentos de resistencia de materiales mediante el uso de hornos solares. En este artículo se examina la aplicación de controladores óptimos basados en seguimiento cuadrático lineal con acción de control por adelanto (LQT-FF, por sus siglas en inglés, *Linear Quadratic Tracking-FeedForward*) para el control de hornos solares utilizados en pruebas de estrés térmico de materiales. El controlador LQT-FF propuesto se fundamenta en estudios previos que ofrecen una solución analítica basada en un modelo lineal del horno solar, reduciendo en este caso el coste computacional del algoritmo de control óptimo. La contribución principal de este trabajo radica en la formulación incremental de este modelo, incorporando un integrador artificial a los estados originales. Además, se utiliza el análisis de estabilidad robusta para sintonizar el LQT-FF considerando el estimador de estados en lazo cerrado. El correcto funcionamiento del controlador propuesto se ha verificado sobre un modelo no lineal del horno solar SF60 de la Plataforma Solar de Almería. Los resultados obtenidos suponen un avance significativo en los controladores óptimos existentes en la literatura, ya que el controlador LQT-FF resulta en una ley de control óptima con rechazo de perturbaciones formulada mediante una forma incremental de las entradas, la cual elimina el error de seguimiento de referencia con una sintonía estable para todo el rango de operación de la planta. Por otro lado, esta ley de control se puede implementar eficientemente y con menor esfuerzo computacional, lo que resulta crucial para su implementación.

Palabras clave: Control de hornos solares, Control óptimo, LQT, Rechazo a perturbaciones, Filtro de Kalman.

Linear quadratic tracking-feedforward controller with robust stability for solar furnaces

Abstract

Solar energy represents a versatile renewable source that can be used in materials resistance experiments through solar furnaces. This article examines the application of optimal controllers based on linear quadratic tracking with feedforward control action (LQT-FF) to control solar furnaces used in material thermal stress tests. The proposed LQT-FF controller is based on previous studies that offer an analytical solution based on a linear model of the solar furnace, thereby reducing the computational cost of the optimal control algorithm. The main contribution of this work lies in the incremental formulation of this model, incorporating an artificial integrator to the original states. Additionally, robust stability analysis is used to tune the LQT-FF, considering the closed-loop state estimator. The proper functioning of the proposed controller has been verified on a nonlinear model of the SF60 solar furnace at the Plataforma Solar de Almería. The obtained results represent a significant advance in existing optimal controllers in the literature, as the LQT-FF controller results in an optimal control law with disturbance rejection formulated through an incremental form of inputs, which eliminates reference tracking error with stable tuning for the entire operating range of the plant. On the other hand, this control law can be efficiently implemented with lower computational effort, which is crucial for its implementation.

Keywords: Solar furnace control, Optimal control, LQT, Feedforward, Kalman filter.

* Autor en correspondencia: Igor M. L. Pataro, ilp428@inlumine.ual.es
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

1. Introducción

Las fuentes de energía renovable se han convertido en una de las principales prioridades en todo el mundo para mitigar los efectos del cambio climático y reducir la dependencia de los combustibles fósiles. En los últimos años se ha impulsado la exploración de tecnologías y fuentes de energía alternativas, produciendo avances significativos en el campo (Martín, 2022). Una de las fuentes de energía renovable más importantes es la energía solar. Esta energía es abundante y tiene el potencial de satisfacer una parte importante de la demanda mundial de electricidad en el futuro. Además, la radiación solar también se puede utilizar para otras aplicaciones, como la desalación de agua del mar (Gil et al., 2020) y para pruebas de estrés térmico y resistencia de materiales en hornos solares (Müller-Trefzer et al., 2021).

Los hornos solares utilizan una clase particular de captadores solares conocidos como helióstatos. Estos dispositivos reflejan la radiación solar hacia un segundo captador parabólico estático, el cual concentra una gran cantidad de energía solar en su punto focal, donde se sitúa la muestra de material a ensayar. El flujo de energía se controla mediante la regulación de una persiana ubicada entre el reflector y el helióstato (ver Figura 1). Por lo general, estos sistemas son operados manualmente, teniendo en cuenta distintos perfiles de temperatura, muestras de materiales y condiciones ambientales. En consecuencia, el éxito del experimento depende en gran medida de la experiencia y destreza del operador durante la prueba. Sobre la base de esta problemática, la ingeniería de control puede desempeñar un papel fundamental en este campo, ya que las estrategias de control automático pueden mejorar la eficiencia y la fiabilidad de los ensayos en hornos solares (Camacho et al., 2012).

En los últimos años, se han presentado diferentes trabajos que abordan el control de hornos solares. En Berenguel et al. (1999) se proponen varios controladores del tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) basados en una estrategia de ajuste de ganancias y un enfoque de autoajuste de parámetros. Por otra parte, Costa et al. (2008) y Costa y Lemos (2009) presentan una estrategia de control adaptativo de temperatura basada en la linealización por realimentación exacta, la cual se usa para el desarrollo de un controlador PI con control por adelanto. Costa et al. (2011) proponen un controlador PI adaptativo que forma parte de una arquitectura de control en cascada que trata las no linealidades del sistema. Adicionalmente, Beschi et al. (2013b) introducen dos propuestas de controladores, una basada en el controlador predictivo generalizado (GPC, por sus siglas en inglés, *Generalized Predictive Control*), cuya respuesta libre es calculada con un modelo no lineal del horno solar, y otra basada en un controlador que emplea un problema de optimización que incorpora la relación inversa de entrada-salida del modelo no lineal. Ambas formulaciones permitieron a los autores imponer restricciones tanto en las entradas como en las salidas del sistema, las cuales se relacionan con los límites de operación de este. Además, con respecto al problema de no linealidad del proceso, Beschi et al. (2013c) introducen un controlador PID con un generador de referencia asociado a un bloque de linealización por realimentación. La solución lineal resultante considera la transformación de las restricciones del

sistema en la limitación de la señal de controlador virtual del PID, asegurando así el cumplimiento de las restricciones asociadas a la apertura de la persiana. Además, se tienen en cuenta los efectos de las perturbaciones incluidas en el modelo no lineal en la linealización por realimentación. Posteriormente, ese resultado fue extendido incluyendo un controlador GPC en lugar del controlador PID para generación de la señal de control virtual (Beschi et al., 2013a). Del mismo modo, Beschi et al. (2016) proponen una técnica de amortiguación generalizada con una solución adaptativa de ajuste de ganancias para tratar las no linealidades del sistema que dependen de las condiciones de temperatura de operación de la muestra. Finalmente, el estudio realizado por Costa y Lemos (2016) es la principal fuente en el ámbito del control óptimo aplicado a hornos solares. En dicho estudio, los autores propusieron un problema de control óptimo formulado en tiempo continuo, suponiendo un tiempo terminal fijo, estado terminal libre y restricciones en la señal de control. La solución del problema de control óptimo se aproximó mediante un algoritmo iterativo en el que las ecuaciones de estado y coestado se integran usando un método de Runge-Kutta. El algoritmo iterativo tiene cinco pasos que incluyen la selección de coestados iniciales, el cálculo de la señal de control aplicando el principio de Pontryagin, la resolución de la ecuación de estado y coestado hacia delante y hacia atrás en el tiempo, respectivamente, y la repetición hasta que se alcance la convergencia. Para la aplicación en tiempo real, se ejecuta el algoritmo iterativo anterior en cada instante de tiempo discreto y se implementa una estrategia de horizonte deslizante. Sin embargo, dicho algoritmo presenta deficiencias, como un error en el seguimiento de la referencia y una alta carga computacional, que requiere ajustes tanto en el horizonte de predicción como en la ponderación de parámetros.

En base a lo anterior, este artículo introduce un controlador LQT-FF (*Linear Quadratic Tracking-FeedForward* por sus siglas en inglés) para el control de hornos solares, que persigue mejorar el estudio presentado por Costa y Lemos (2016) de dos maneras: i) se presenta la propuesta de un controlador óptimo fundamentado en una solución analítica obtenida a partir del modelo linealizado del horno solar, que tiene como objetivo mitigar la carga computacional que representa una limitación en el estudio de Costa y Lemos (2016); ii) además, se emplea un modelo en espacio de estados con formulación incremental de las entradas, lo que posibilita la inclusión de un estado integrador artificial en los estados originales del sistema y la eliminación del error en estado estacionario en los diferentes puntos de operación del sistema no lineal. En el análisis realizado por Costa y Lemos (2016), se evidenció que el controlador óptimo propuesto generaba un error en estado estacionario, cuya eliminación requería una sintonía demasiado agresiva, la cual puede resultar imposible de implementar en hornos solares.

Adicionalmente, con el propósito de lograr un controlador LQT-FF robusto que abarque todos los puntos de operación del sistema, este trabajo realiza un estudio de estabilidad robusta considerando la sintonía del LQT-FF y la implementación del estimador de estados en su formulación. El controlador propuesto ha sido evaluado en un entorno de simulación, utilizando un modelo no lineal validado del horno solar SF60 de la Plataforma Solar de Almería (PSA), con el fin de demostrar sus ca-

pacidades y respaldar los resultados del control. Estos aportes convierten al LQT-FF en una solución prometedora y adecuada para hornos solares, especialmente debido a que las pruebas de resistencia de materiales se llevan a cabo en entornos que demandan un estricto control de la temperatura.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: la Sección 2 detalla el modelo de horno solar utilizado como caso de estudio. En la Sección 3 se formula el algoritmo LQT-FF y se presenta el análisis de robustez a partir de la formulación del estimador de estados en lazo cerrado. Los resultados del controlador aplicado se presentan en la Sección 4. Finalmente, las principales conclusiones del trabajo se resumen en la Sección 5.

2. Descripción y modelado del horno solar

En esta sección se proporciona una breve descripción del horno solar SF60 y se detalla el modelo no lineal y la validación realizada utilizando datos de la instalación real. También se resume la linealización del modelo no lineal en torno a un punto de operación válido para la formulación del controlador LQT-FF.

2.1. Descripción del sistema

La Figura 1 presenta el horno solar SF60 de la PSA. Este sistema consta de un heliostato con una reflectividad del 90 % y un captador parabólico secundario de 108 m² de superficie reflectante y una reflectividad media del 92 %. El captador refleja la radiación sobre un foco con un diámetro de 22 cm, lo que corresponde a un área de 0,038 m². El área de ensayo está situada en una torre de 4 m de altura para recibir la radiación concentrada del colector y consta de un soporte móvil donde se pueden acoplar dispositivos auxiliares según el tipo de ensayo. Para el estudio propuesto en este trabajo, se usa como referencia una muestra de Carburo de Silicio con dimensiones de 50,4 × 50,3 × 5,7 mm³. La persiana con la que se regula la radiación incidente está formada por una serie de lamas cuyo grado de apertura puede variar entre 0 y 100 %.



Figura 1: Horno solar SF60 (cortesía de PSA).

2.2. Modelo basado en primeros principios

El modelo de sistema propuesto se obtiene a partir del balance de energía simplificado propuesto por Berenguel et al. (1999).

La ecuación no lineal viene dada por la siguiente expresión:

$$m_s \cdot c_s \cdot \frac{dT(t)}{dt} = \frac{\rho_c \cdot \rho_h \cdot S_c}{S_{f90} \cdot \text{sen}(\alpha_o)} \cdot S_p \cdot \alpha_a \cdot I(t) \cdot \left(\text{sen}(\alpha_o) - \text{sen} \left[\left(1 - \frac{u(t)}{100} \right) \alpha_o \right] \right) - \alpha_e \cdot \sigma \cdot S_p \cdot (T^4(t) - T_a^4(t)) - \alpha_c \cdot S_p \cdot (T(t) - T_a(t)), \quad (1)$$

donde las variables $T(t)$ [K] y $u(t)$ [%] son la temperatura de la muestra y la apertura de la persiana, representando la salida y entrada del sistema, respectivamente. Las variables de perturbación son la radiación directa $I(t)$ [W/m²] y la temperatura ambiente $T_a(t)$ [K]. La descripción de los parámetros del modelo obtenidos y sus respectivos valores se presentan en la Tabla 1. El modelo no lineal propuesto depende de los parámetros α_a , α_c y α_e , que son la capacidad de absorción de la muestra, el coeficiente de pérdidas por convección y la emisividad de la muestra, respectivamente. Dado que los parámetros mencionados pueden variar dependiendo de las especificaciones del ensayo y las condiciones ambientales, su valor no se conoce con exactitud, de modo que son las principales fuentes de incertidumbres en la caracterización del modelo. Se define por tanto un procedimiento de identificación de los parámetros α_a , α_c y α_e del modelo que permita representar adecuadamente la dinámica del sistema. Se formula entonces un problema de optimización

$$\min_{\alpha_a, \alpha_c, \alpha_e} J = \min_{\alpha_a, \alpha_c, \alpha_e} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (\hat{T}(i) - T(i))^2 \quad (2)$$

donde $\hat{T}(i)$ es la temperatura del modelo y $T(i)$ son los datos reales del sistema, obtenidos (también para calibración) durante una campaña experimental en el horno SF60 realizada en mayo de 2022 provocando cambios en escalón en la apertura de la persiana para alcanzar diferentes rangos de temperatura de la muestra de material, en los que un escenario de día soleado proporcionaba una variación suave de la irradiancia solar.

Tabla 1: Parámetros del modelo (* parámetros identificados).

Parámetro	Descripción	Valores y unidades
c_s	Calor específico	1142 J/kgK
m_s	Masa de la muestra	0,025 kg
S_c	Superficie del captador	108 m ²
S_{f90}	Superficie del foco 90 %	0,038 m ²
S_p	Superficie de la muestra	0,0025 m ²
α_a^*	Coefficiente de absorción de la muestra	0,46
α_c^*	Coefficiente de película	33,94 W/(m ² K)
α_e^*	Emisividad de la muestra	0,54
α_o	Ángulo de cierre	50,8°
ρ_c	Reflectividad del captador	0,9199
ρ_h	Reflectividad del heliostato	0,9018
σ	Constante de Stephan–Boltzmann	5,67 × 10 ⁻⁸ W/(m ² K)

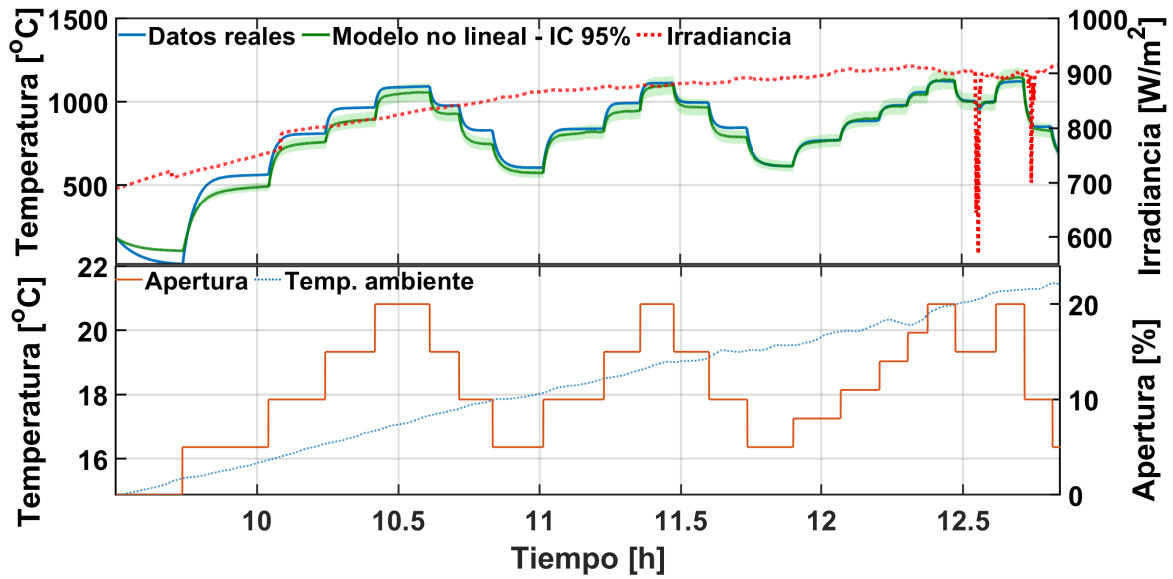


Figura 2: Resultados de la validación del modelo de horno solar SF60 con un intervalo de confianza de 95 %.

A continuación, usando el algoritmo de optimización *Genetic Algorithms* (GA) de MATLAB MathWorks, se identifica el valor de los parámetros α_a , α_c y α_e que minimiza la Ec. (2). Posteriormente, se realizaron ensayos similares para obtener datos nuevos para la validación del modelo utilizando los parámetros obtenidos previamente en el proceso de calibración.

La Figura 2 incluye la comparativa entre la salida del modelo y la temperatura de la muestra en uno de estos experimentos reales, utilizando datos experimentales de entrada (apertura de la persiana, irradiancia y temperatura ambiente) y considerando el primer dato de temperatura de la muestra como la condición inicial. Los datos de apertura e irradiancia se muestran en los ejes de la derecha de la figura. Como métrica para evaluar la validez del modelo se emplea el índice R^2 y el error cuadrático medio normalizado (nRMSE, por sus siglas en inglés, *normalized Root Mean Square Error*), obteniendo, respectivamente, 0,9702 y 0,0592, lo cual demuestra un resultado aceptable para los valores obtenidos de α_a , α_c y α_e .

Es importante señalar que el modelo dinámico calibrado puede representar satisfactoriamente la evolución de la temperatura de la muestra, obteniendo un valor de R^2 mayor de 0,95. Obviamente, la temperatura del modelo se desvía ligeramente de la temperatura real, especialmente cuando hay bajo nivel de irradiancia. Esto se debe a que los datos utilizados para la calibración se recopilaron generalmente alrededor del mediodía solar, cuando los niveles de irradiancia son más elevados y tiene más sentido operar el horno solar. Además, el método de identificación considera que el modelo posee parámetros fijos para todo el rango de irradiancia y temperatura. Esta desviación al principio del ensayo sugiere que los parámetros identificados pueden cambiar según las condiciones de funcionamiento del sistema y por tanto el hecho de usar parámetros constantes puede afectar al ajuste del modelo. Sin embargo, cabe destacar que las diferencias entre el modelo y el sistema real son mínimas, no comprometiendo el desarrollo de estrategias basadas en modelo, como el LQT-FF propuesto en este trabajo.

2.3. Modelo linealizado del sistema

En este trabajo, el controlador LQT-FF propuesto se formula sobre un modelo lineal del sistema. Por lo tanto, la ecuación diferencial no lineal presentada en Ec. (1) debe aproximarse a un modelo linealizado representativo de un punto de operación dado, definido por $(\bar{u}, \bar{I}, \bar{T}_a, \bar{T})$. Así, utilizando la serie de Taylor truncada en el primer término, y considerando las variables de desviación $\tilde{I}(t) = I(t) - \bar{I}$, $\tilde{T}(t) = T(t) - \bar{T}$, $\tilde{T}_a(t) = T_a(t) - \bar{T}_a$, $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}$, se puede obtener el siguiente modelo linealizado de la Ec. (1):

$$m_s \cdot c_s \cdot \frac{d\tilde{T}(t)}{dt} + (P3 + P2 \cdot 4 \cdot \bar{T}^3) \cdot \tilde{T}(t) = \left(\sin \alpha_o - \sin \left[\left(1 - \frac{\bar{u}}{100} \right) \alpha_o \right] \right) \cdot P1 \cdot \tilde{I}(t) + P1 \cdot \frac{\alpha_o}{100} \cdot \bar{I} \cdot \cos \left[\left(\left(1 - \frac{\bar{u}}{100} \right) \alpha_o \right) \right] \cdot \tilde{u}(t) + (P3 + P2 \cdot 4 \cdot \bar{T}_a^3) \cdot \tilde{T}_a(t), \quad (3)$$

donde los parámetros $P1$, $P2$, y $P3$ son $P1 = \frac{\rho_c \cdot \rho_f \cdot S_c}{S_{f90} \cdot \sin \alpha_o} \cdot S_s \cdot \alpha_a$, $P2 = \alpha_e \cdot \sigma \cdot S_s$, y $P3 = \alpha_c S_s$. El modelo lineal de primer orden presentado anteriormente se puede utilizar para formular controladores aplicando la transformada de Laplace, lo cual conduce a la siguiente ecuación en el dominio de Laplace:

$$\tilde{T}(s) = \frac{K_I}{(\tau s + 1)} \cdot \tilde{I}(s) + \frac{K_{T_a}}{(\tau s + 1)} \tilde{T}_a(s) + \frac{K_u}{(\tau s + 1)} \tilde{u}(s), \quad (4)$$

donde los parámetros del modelo lineal de primer orden se definen como:

$$K_I = \frac{\left(\sin \alpha_o - \sin \left[\left(1 - \frac{\bar{u}}{100} \right) \alpha_o \right] \right) \cdot P1}{(P3 + P2 \cdot 4 \cdot \bar{T}^3)}, \quad K_{T_a} = \frac{(P3 + P2 \cdot 4 \cdot \bar{T}_a^3)}{(P3 + P2 \cdot 4 \cdot \bar{T}^3)},$$

$$K_u = \frac{P1 \cdot \frac{\alpha_o}{100} \cdot \bar{I} \cdot \cos \left[\left(\left(1 - \frac{\bar{u}}{100} \right) \alpha_o \right) \right]}{(P3 + P2 \cdot 4 \cdot \bar{T}^3)}, \quad \tau = \frac{m_s \cdot c_s}{(P3 + P2 \cdot 4 \cdot \bar{T}^3)}. \quad (5)$$

La formulación del modelo en forma de función de transferencia es fundamental para desarrollar el modelo de espacio de estados en tiempo discreto propuesto en este estudio. Esta construcción se basa en transformar el modelo lineal de la Ec. (4) a la forma en el espacio de estados mediante la aplicación del modelo orientado a la predicción de salida, conocido como OPOM (por sus siglas en inglés *Output Prediction-Oriented Model*). Este modelo se deriva de una formulación lineal que se origina a partir de la función de transferencia y de la respuesta del sistema a entradas en forma de escalón. Es importante destacar que esta propuesta es específica para este trabajo. Sin embargo, se pueden implementar otras metodologías para eliminar errores en el régimen estacionario y tener en cuenta los efectos de las perturbaciones.

Para entender esta formulación, considere una función de transferencia genérica de múltiples entradas (nu), múltiples salidas (ny) y múltiples perturbaciones (nd), donde $G_{i,j}(s)$ está constituida por el par (y_i salida, u_j entrada) y $Gd_{i,g}(s)$ por el par (y_i salida, d_g perturbación medible). Las funciones de transferencia en el dominio s de Laplace se representan:

$$G_{i,j}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)} = \frac{b_{i,j,0} + b_{i,j,1}s + \dots + b_{i,j,nb}s^{nb}}{(s - r_{i,j,0}^{st}) \dots (s - r_{i,j,na}^{st})}, \quad (6)$$

$$Gd_{i,g}(s) = \frac{y_i(s)}{d_g(s)} = \frac{b_{i,g,0} + b_{i,g,1}s + \dots + b_{i,g,nc}s^{nc}}{(s - r_{i,g,0}^{st,d}) \dots (s - r_{i,g,np}^{st,d})},$$

donde $na > nb$ y $np > nc$, siendo na y np el número de polos y nb y nc el número de ceros de las funciones de transferencia $G_{i,j}(s)$ y $Gd_{i,g}(s)$, respectivamente. Además, $r_{i,j}^{st}$ y $r_{i,g}^{st,d}$ son los polos estables del sistema relacionados con las entradas y las perturbaciones medibles, respectivamente. Las constantes $b_{i,j,nb}$ y $b_{i,g,nc}$ representan los coeficientes de los polinomios referentes a los ceros de la entrada y de la perturbación medible en relación a la salida, respectivamente. La respuesta a escalón en las entradas y las perturbaciones se puede expresar de la siguiente manera (se suponen polos reales distintos en la descomposición en fracciones simples sin pérdida de generalidad):

$$S_{i,j}(s) = \frac{h_{i,j}^{0,u}}{s} + \sum_{l=1}^{na} \frac{h_{i,j,l}^u}{s - r_{i,j,l}^{st}}; \quad S_{i,g}(s) = \frac{h_{i,g}^{0,d}}{s} + \sum_{f=1}^{np} \frac{h_{i,g,f}^d}{s - r_{i,g,f}^{st,d}}, \quad (7)$$

donde $S_{i,j}(s)$ y $S_{i,g}(s)$ son las respuestas a escalón del sistema en relación a las entradas y las perturbaciones en el dominio s obtenidas con las funciones de transferencia representadas en la Ec. (6). Además, los términos $h_{i,j}^{0,u}$, $h_{i,j,l}^u$, $h_{i,g}^{0,d}$ y $h_{i,g,f}^d$ son los coeficientes (residuos) obtenidos a partir de la descomposición en fracciones simples. Estas expresiones permiten obtener la respuesta temporal a escalón mediante el uso de la antitransformada de Laplace. Si se considera una implementación en tiempo discreto k con un periodo de muestreo T_s y la presencia de un mantenedor de orden cero en las entradas manipulables, se pueden obtener las expresiones de la respuesta a escalón en tiempo discreto como sigue:

$$S_{i,j}(k) = h_{i,j}^{0,u} + \sum_{l=1}^{na} h_{i,j,l}^u e^{r_{i,j,l}^{st}(kT_s)}; \quad S_{i,g}(k) = h_{i,g}^{0,d} + \sum_{f=1}^{np} h_{i,g,f}^d e^{r_{i,g,f}^{st,d}(kT_s)}. \quad (8)$$

La solución analítica de la respuesta al escalón de la Ec. (8) puede ser obtenida como modelo orientado a la predicción de la

salida en formato de espacio de estados, creándose la siguiente formulación

$$y_i(k) = x_i^s(k) + \sum_{j=1}^{nu} \sum_{l=1}^{na} x_{i,j,l}^u(k) + \sum_{g=1}^{nd} \sum_{f=1}^{np} x_{i,g,f}^d(k). \quad (9)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, ny$, donde

$$x_i^s(k+1) = x_i^s(k) + \sum_{j=1}^{nu} h_{i,j}^{0,u} \Delta u_j(k) + \sum_{g=1}^{nd} h_{i,g}^{0,d} \Delta d_g(k), \quad (10)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, ny$,

$$x_{i,j,l}^u(k+1) = e^{r_{i,j,l}^{st}(kT_s)} x_{i,j,l}^u(k) + h_{i,j,l}^u e^{r_{i,j,l}^{st}(kT_s)} \Delta u_j(k),$$

$\forall i = 1, 2, \dots, ny, \forall j = 1, 2, \dots, nu; \forall l = 1, 2, \dots, na$, (11)

$$x_{i,g,f}^d(k+1) = e^{r_{i,g,f}^{st,d}(kT_s)} x_{i,g,f}^d(k) + h_{i,g,f}^d e^{r_{i,g,f}^{st,d}(kT_s)} \Delta d_g(k),$$

$\forall i = 1, 2, \dots, ny, \forall g = 1, 2, \dots, nd; \forall f = 1, 2, \dots, np$. (12)

En esa formulación, $x^s(k) \in \mathbb{R}^{ny}$ es el vector que contiene como elementos los estados artificiales integradores, relacionados con el valor de la predicción de la salida del sistema en régimen estacionario, $x^u \in \mathbb{R}^{ny \times nu \times na}$ contiene los estados relacionados con los modos dinámicos de las entradas, definidos por los polos estables del par salida-entrada (i, j), y $x^d \in \mathbb{R}^{ny \times nd \times np}$ contiene los estados relacionados con los modos dinámicos de las perturbaciones definidos por el par salida-perturbación (i, g). Nótese que como la formulación es válida para sistemas estables, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_i(k) = x_i^s(k)$. A partir de lo anterior, se puede formular la representación en espacio de estados de la siguiente manera:

$$y(k) = Ix^s(k) + \Psi_u x^u(k) + \Psi_d x^d(k), \quad (13)$$

donde $y \in \mathbb{R}^{ny}$, I es la matriz identidad de orden ny y

$$\Psi_u = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}^{nu-na} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{nu-na} \\ \vdots & \vdots \\ \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{nu-na} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}^{nu-na} \end{bmatrix}, \quad \Psi_u \in \mathbb{R}^{ny \times ny \times nu \times na} \quad (14)$$

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}^{nd-np} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{nd-np} \\ \vdots & \vdots \\ \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{nd-np} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}^{nd-np} \end{bmatrix}, \quad \Psi_d \in \mathbb{R}^{ny \times ny \times nd \times np} \quad (15)$$

Las ecuaciones de estado vienen dadas por:

$$\begin{aligned} x^s(k+1) &= Ix^s(k) + H_{0,u} \Delta u(k) + H_{0,d} \Delta d(k), \\ x^u(k+1) &= D_u x^u(k) + H_u D_u N_u \Delta u(k), \\ x^d(k+1) &= D_d x^d(k) + H_d D_d N_d \Delta d(k), \end{aligned} \quad (16)$$

donde $\Delta u \in \mathbb{R}^{nu}$, $\Delta d \in \mathbb{R}^{nd}$ y

$$H_{0,u} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^{0,u} & \dots & h_{1,nu}^{0,u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{ny,1}^{0,u} & \dots & h_{ny,nu}^{0,u} \end{bmatrix}, \quad H_{0,u} \in \mathbb{R}^{ny \times nu}, \quad (17)$$

$$H_{0,d} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^{0,d} & \cdots & h_{1,nd}^{0,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{ny,1}^{0,d} & \cdots & h_{ny,nd}^{0,d} \end{bmatrix}, \quad H_{0,d} \in \mathbb{R}^{ny \times nd}, \quad (18)$$

$$D_u = \text{diag} \left(e^{r_{1,1,1}^{st}(kT_s)} \cdots e^{r_{1,1,na}^{st}(kT_s)} \cdots e^{r_{ny,nu,1}^{st}(kT_s)} \cdots e^{r_{ny,nu,na}^{st}(kT_s)} \right), \\ D_u \in \mathbb{R}^{ny \cdot nu \cdot na \times ny \cdot nu \cdot na}, \quad (19)$$

$$D_d = \text{diag} \left(e^{r_{1,1,1}^{sd}(kT_s)} \cdots e^{r_{1,1,np}^{sd}(kT_s)} \cdots e^{r_{ny,nd,1}^{sd}(kT_s)} \cdots e^{r_{ny,nd,np}^{sd}(kT_s)} \right), \\ D_d \in \mathbb{R}^{ny \cdot nd \cdot np \times ny \cdot nd \cdot np}, \quad (20)$$

$$H_u = \text{diag} \left(h_{1,1,1}^u \cdots h_{1,1,na}^u \cdots h_{ny,nu,1}^u \cdots h_{ny,nu,na}^u \right), \\ H_u \in \mathbb{R}^{ny \cdot nu \cdot na \times ny \cdot nu \cdot na}, \quad (21)$$

$$H_d = \text{diag} \left(h_{1,1,1}^d \cdots h_{1,1,np}^d \cdots h_{ny,nd,1}^d \cdots h_{ny,nd,np}^d \right), \\ H_d \in \mathbb{R}^{ny \cdot nd \cdot np \times ny \cdot nd \cdot np}, \quad (22)$$

$$N_u = \begin{bmatrix} N_{u_1} \\ N_{u_2} \\ \vdots \\ N_{u_{ny}} \end{bmatrix}, \quad N_d = \begin{bmatrix} N_{d_1} \\ N_{d_2} \\ \vdots \\ N_{d_{ny}} \end{bmatrix}, \quad N_u \in \mathbb{R}^{ny \cdot nu \cdot na \times nu}, \quad N_d \in \mathbb{R}^{ny \cdot nd \cdot np \times nd} \quad (23)$$

Las matrices N_u y N_d son matrices auxiliares de selección de los términos relacionados con el orden de polos del sistema en relación a la entrada y la perturbación, respectivamente, y su construcción se explica en Martins y Odloak (2016) y Pataro et al. (2022) (no se incluye aquí por limitación de espacio). Finalmente, la representación en espacio de estados se puede expresar en la forma habitual:

$$x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k) + B_d\Delta d(k) \\ y(k) = Cx(k), \quad (24)$$

$$x = \begin{bmatrix} x^s \\ x^u \\ x^d \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & D_u & 0 \\ 0 & 0 & D_d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} H_{0,u} \\ H_u D_u N_u \\ 0 \end{bmatrix} \\ B_d = \begin{bmatrix} H_{0,d} \\ 0 \\ H_d D_d N_d \end{bmatrix}, \quad C = [I \quad \Psi_u \quad \Psi_d], \quad (25) \\ x^s = [x_1^s, \dots, x_{ny}^s]^T, \\ x^u = [x_{1,1,1}^u, \dots, x_{1,nu,1}^u, \dots, x_{1,nu,na}^u, \dots, x_{ny,nu,na}^u]^T, \\ x^d = [x_{1,1,1}^d, \dots, x_{1,nd,1}^d, \dots, x_{1,nd,np}^d, \dots, x_{ny,nd,np}^d]^T.$$

Este enfoque de representación resulta idóneo para el problema LQT-FF debido a que incorpora de forma intrínseca las perturbaciones y a que tiene una naturaleza incremental de las entradas, es decir, incluye un integrador en el modelo de espacio de estados para compensar los errores de estado estacionario.

Para el caso del horno solar se obtiene $x \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ como el vector de estados relacionados con el integrador $x^s \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ debido a la formulación en forma incremental y los tres polos estables ligados a la entrada manipulable y las dos perturbaciones ($x^u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, $x^d \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$). Además, se obtiene $\Delta u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ como

la variación de apertura de la persiana, $y \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ como la temperatura de la muestra y $\Delta d \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ como la variación de la temperatura ambiente y la irradiancia. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ y $B_d \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ son las matrices de espacio de estados. Obsérvese que, en esta formulación, las perturbaciones son $\tilde{I}(k)$ y $\tilde{T}_a(k)$, la entrada es $\tilde{u}(k)$, la salida es $\tilde{T}(k)$, y los estados son los coeficientes de respuesta a escalón de la formulación OPOM, los cuales están relacionados con $\tilde{u}(k)$, $\tilde{I}(k)$ y $\tilde{T}_a(k)$, además del estado integrador originado por la forma incremental de las entradas.

3. Formulación del LQT-FF para el horno solar

El controlador LQT-FF presentado en este estudio se caracteriza como un controlador óptimo diseñado para sistemas lineales. Este controlador aborda el problema de optimización al minimizar una función de coste cuadrática en un horizonte de tiempo infinito (Lemos y Pinto, 2012). La solución analítica del controlador LQT-FF en tiempo discreto se logra al minimizar, para cada instancia k , la función de coste definida como:

$$\min_{\Delta u(k)} J_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left[(y(k+j) - y_{sp}(k))^2 + \lambda \Delta u^2(k+j) \right], \quad (26)$$

donde $\lambda > 0$ es el peso de ponderación de la acción de control y y_{sp} es la referencia. Asumiendo que todos los estados y perturbaciones son medibles, aplicando las condiciones necesarias para Optimalidad y el Principio del Máximo de Pontryagin, el problema de optimización cuadrático planteado en la Ec. (26) considerando la dinámica del sistema descrita en la Ec. (24) se puede resolver analíticamente, resultando en la siguiente ley de control:

$$\Delta u(k) = -K_{LQ}x(k) + K_{g,d}(k), \quad (27)$$

en la cual:

$$K_{LQ} = -(\lambda + B^T P B)^{-1} (B^T) P A, \\ K_{g,d}(k) = (\lambda + B^T P B)^{-1} (B^T) [g(k) - P B_d \Delta d(k)]. \quad (28)$$

Particularizando el desarrollo para el horno solar, se tiene que $K_{LQ} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$, $K_{g,d} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, la matriz $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es la solución de la ecuación discreta de Ricatti:

$$P = (A^T P) \left[I + \frac{1}{\lambda} (B B^T) P \right]^{-1} A + C^T C, \quad (29)$$

y $g(k) \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ es la solución de la expresión algebraica:

$$\Gamma g(k) = - (A^T P) \left[I + \frac{1}{\lambda} (B B^T) P \right]^{-1} B_d \Delta d(k) + C^T y_{sp}(k), \quad (30)$$

siendo la matriz $\Gamma \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$:

$$\Gamma = I + (A^T P) \left[I + \frac{1}{\lambda} (B B^T) P \right]^{-1} \frac{1}{\lambda} B B^T - A^T. \quad (31)$$

Por lo tanto, la solución presentada en la Ec. (27) constituye una ley de control por realimentación lineal del vector de estados con la ganancia K_{LQ} a la que se añade el término de corrección $K_{g,d}(k)$, que tiene en cuenta el cambio de referencia de la salida y el efecto de las perturbaciones en el horno solar. Esta propuesta representa un avance respecto a la solución de control óptimo previamente propuesta por Costa y Lemos (2016). En

primer lugar, la ley de control definida en la Ec. (27) es lineal y se puede calcular de forma analítica, lo que facilita un cálculo rápido de las acciones de control, a diferencia de las aproximaciones y soluciones numéricas propuestas por Costa y Lemos (2016). En segundo lugar, esta formulación permite abordar los cambios de referencia y los efectos de las perturbaciones en el término $K_{g,d}(k)$, utilizando un modelo que incorpora un integrador artificial. Esto garantiza la eliminación de errores en estado estacionario con referencias en forma de escalón, sin necesidad de ajustes de sintonía adicionales, como se requirió en el enfoque de Costa y Lemos (2016).

3.1. Análisis de estabilidad robusta

En esta sección se deriva la formulación del criterio de estabilidad robusta, que se particulariza en la siguiente sección en base a valores numéricos.

La formulación lineal propuesta del LQT-FF asume un modelo lineal nominal para desarrollar la ley de control de realimentación de estados. Esta solución presenta dos problemas significativos de implementación que deben considerarse previamente. En primer lugar, el modelo de espacio de estados obtenido a través de la formulación OPOM genera tres estados relacionados con la evolución de la salida con respecto a la respuesta a escalón en las entradas (apertura de la persiana, radiación solar directa y temperatura ambiente). Estos estados no son medibles directamente, por lo que, para formular la ley de control del LQT-FF es necesario aplicar un estimador de estados (Castillo et al., 2022). En segundo lugar, la representación del modelo propuesto en la Ec. (4) captura la dinámica lineal del sistema en el punto de operación especificado, definido por las entradas del sistema en una condición casi-estacionaria. Sin embargo, la operación del horno solar y las condiciones meteorológicas cambian a lo largo del experimento, lo que genera dinámicas diferentes a las elegidas para la formulación del LQT-FF que pueden comprometer la estabilidad robusta. Por este motivo, se propone una sintonía fundamentada en criterios de estabilidad robusta considerando el estimador de estados y los escenarios de incertidumbre de modelado originados por la linealización del modelo no lineal del horno solar.

Considere una función de transferencia $G_m(s)$ que representa el modelo del proceso usado para el diseño del controlador, $G(s)$ el modelo real del proceso y $C(s)$ el controlador, de modo que $L(s) = C(s)G(s)$ es la función de transferencia de lazo o función de transferencia de lazo abierto del proceso, mientras que $L_m(s) = C(s)G_m(s)$ representa la función de transferencia en lazo abierto nominal utilizada para el diseño del controlador. Los criterios de estabilidad robusta se definen como la condición para la cual, la ley de control nominalmente estable, también estabiliza la planta real para cualquier frecuencia (Anderson y Moore, 1990). En otras palabras, considerando las condiciones de estabilidad de Nyquist, y analizando los denominadores de lazo cerrado ($1 + L_m(s)$ y $1 + L(s)$), la diferencia entre la función de transferencia nominal de lazo abierto y la función de transferencia de lazo abierto del proceso nunca debe alcanzar el punto $-1 + 0j$ para cualquier frecuencia ω (Franklin et al., 2006). Esta afirmación puede interpretarse matemáticamente como:

$$|L_m(j\omega) - L(j\omega)| < |1 + L_m(j\omega)|. \quad (32)$$

Este análisis se puede extender al controlador LQT-FF para garantizar que el controlador nominal diseñado sea estable en la planta real, considerando la sintonía adecuada del factor λ , la cual afecta directamente al controlador. Trabajos previos han considerado esta cuestión para la teoría del regulador lineal-cuadrático (*Linear-Quadratic Regulator*, LQR) (Lemos et al., 2014; Pataro et al., 2023). No obstante, la actual propuesta considera tanto los aspectos no lineales del modelo, como el filtro del estimador de estados propuesto para el sistema del horno solar. Siguiendo el trabajo presentado por Doyle y Stein (1979), y considerando la formulación presentada en la Sección 3, el diagrama esquemático de lazo cerrado del LQT-FF puede representarse en tiempo discreto como se detalla en la Figura 3.

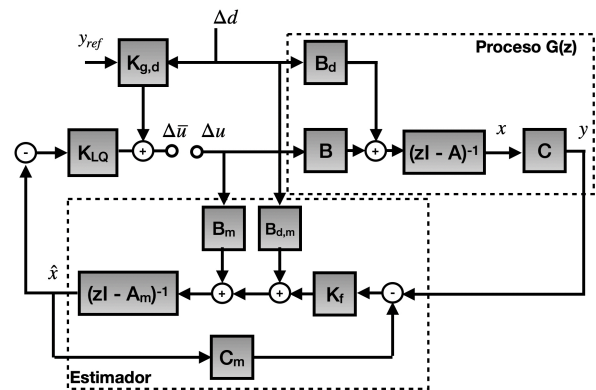


Figura 3: Diagrama de bloques del LQT-FF con estimador de estados.

En esta representación, las matrices A_m , B_m , C_m y $B_{d,m}$ corresponden al modelo nominal para un punto de operación estacionario específico, utilizado en la linealización del modelo no lineal para la formulación del LQT-FF. Por otro lado, A , B , C y B_d representan las versiones lineales del sistema no lineal en la Ec. (1). Dado que el sistema lineal cambia según \bar{u} , \bar{I} , \bar{T}_a y \bar{T} , las matrices A , B , C y B_d también varían en función de estos puntos de operación. Sin embargo, por simplicidad de lectura, en este análisis se omite la notación $A(\bar{u}, \bar{I}, \bar{T}_a, \bar{T})$, $B(\bar{u}, \bar{I}, \bar{T}_a, \bar{T})$, $C(\bar{u}, \bar{I}, \bar{T}_a, \bar{T})$ y $B_d(\bar{u}, \bar{I}, \bar{T}_a, \bar{T})$. El análisis de todo el conjunto de modelos lineales ofrece una solución aproximada para estudiar el efecto del controlador lineal aplicado al sistema no lineal del horno solar. K_f se define como la ganancia del estimador de estado, la cual en este análisis se obtiene como la solución óptima de la Estimación Cuadrática Lineal (*Linear Quadratic Estimator*, LQE), conocida como filtro de Kalman.

En este estudio, el análisis de estabilidad robusta se obtiene a partir de la formulación en tiempo discreto del sistema en lazo abierto. Partiendo del modelo OPOM de la Ec. (24) y utilizando la estimación de estados en el dominio discreto (ver Anderson y Moore (1990)), se considera que el estado dado por el modelo se puede corregir aplicando la ganancia K_f , a partir del error entre la salida del modelo y la salida medida del proceso. El estado estimado corregido viene dado por:

$$\hat{x}(k+1) = A_m \hat{x}(k) + B_m \Delta u(k) + B_{d,m} \Delta d(k) + K_f (y(k) - C_m \hat{x}(k)), \quad (33)$$

Pudiéndose expresar en el dominio z como

$$\hat{x}(z) = (zI - A_m + K_f C_m)^{-1} (B_m \Delta u(z) + B_{d_m} \Delta d(z) + K_f y(z)), \quad (34)$$

donde

$$y(z) = C (zI - A)^{-1} (B \Delta u(z) + B_d \Delta d(z)). \quad (35)$$

Sustituyendo la Ec. (35) en la Ec. (34), considerando solo el caso de realimentación de salida y descartando el análisis de robustez para rechazo de perturbaciones ($\Delta d = 0$), se obtiene

$$\hat{x}(z) = (zI - A_m + K_f C_m)^{-1} [K_f C (zI - A)^{-1} B + B_m] \Delta u(z). \quad (36)$$

En análisis clásico de robustez con estimadores de estado, para obtener la ganancia del lazo $L(z)$, es necesario obtener la relación de la acción de control $\Delta \bar{u}$ y la acción implementada Δu , tal como se presenta en Doyle y Stein (1979). Considerando que la acción de control óptima es expresa como

$$\Delta \bar{u}(z) = -K_{LQ} \hat{x}(z), \quad (37)$$

y siguiendo el diagrama de bloques en la Figura 3, la ganancia de lazo abierto se obtiene finalmente como

$$L(z) = K_{LQ} H \Phi, \quad (38)$$

donde

$$H = (zI - A_m + K_f C_m)^{-1}, \quad (39)$$

y

$$\Phi = [K_f C (zI - A)^{-1} B + B_m]. \quad (40)$$

Se puede observar que, en el caso donde no se utilice un estimador de estados y los estados de la planta sean medidos directamente, el esquema representado en la Figura 3 se debería modificar. En este caso, se usarían los estados proporcionados por la planta como realimentación, donde, no habiendo error entre los estados de la planta y los nominales del modelo (caso ideal), la ganancia en bucle abierto resulta en $L(z) = K_{LQ} (zI - A_m)^{-1} B_m$ (Doyle y Stein, 1979; Franklin et al., 2006).

La discrepancia entre el modelo nominal y el comportamiento real del proceso ($|L_m(z) - L(z)|$) depende del diseño del filtro de Kalman y del controlador LQT-FF. En otras palabras, el análisis de estabilidad robusta debe considerar el ajuste del LQT-FF, las incertidumbres del modelo y el diseño del estimador de estado.

3.2. Sintonía del LQT-FF basada en estabilidad robusta

En esta sección se estudia tanto el efecto de la sintonía del parámetro λ (al considerar un diseño del controlador basado en el modelo nominal descrito por las matrices A_m , B_m , C_m , y B_{d_m}) como el efecto del ajuste de la ganancia del filtro de Kalman K_f , con el objetivo de garantizar la estabilidad en lazo cerrado del controlador LQT-FF en todos los puntos de operación del horno solar. Se lleva a cabo el análisis de estabilidad robusta (ver Sección 3.1) para el horno solar, abordando tres aspectos principales: el diseño del filtro de Kalman, la incertidumbre de modelado asociada a la linealización del modelo no lineal y la sintonía del controlador LQT-FF.

Es importante destacar que en este análisis no se considera el rechazo de perturbaciones, como se ha detallado en la Sección

3.1. El ajuste de K_f depende de las covarianzas de los ruidos de los estados y salidas, y K_{LQ} del parámetro λ . Para simplificar el análisis, la configuración del filtro de Kalman se mantiene fija, siendo determinada a priori a través de pruebas en simulación. Por lo tanto, el análisis de robustez se basa únicamente en el parámetro λ de la ganancia K_{LQ} .

El análisis de la condición de estabilidad robusta sobre $L(z)$ se realiza en el Diagrama de Bode, considerando $z = e^{j\omega T_s}$ como aproximación para las variaciones de la frecuencia en la mitad superior del círculo unitario. Además, la variación de la frecuencia ω debe respetar los límites $0 \leq \omega \leq \omega_N = \frac{\pi}{T_s}$, donde T_s es el tiempo de muestreo y ω_N es la frecuencia de Nyquist.

Para llevar a cabo la sintonía para el horno solar, se obtiene en primer lugar un modelo nominal para un punto de operación específico $\bar{u} = 10$ [%], $\bar{I} = 793,92$ [W/m²], $\bar{T}_a = 289,13$ [K], y $\bar{T} = 1005,9$ [K], para un tiempo de muestreo $T_s = 1$ s. Este punto de operación nominal considera valores promedio de las condiciones meteorológicas para la operación adecuada del horno solar SF60 en la PSA. Para el análisis de estabilidad, se utiliza el modelo OPOM descrito anteriormente, proporcionando las siguientes matrices en espacio de estados:

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9864 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9864 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9864 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 43,3581 \\ -42,7666 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{d_m} = \begin{bmatrix} 0,5207 & 5,6112 \\ 0 & 0 \\ -0,5136 & 0 \\ 0 & -5,5347 \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T. \quad (41)$$

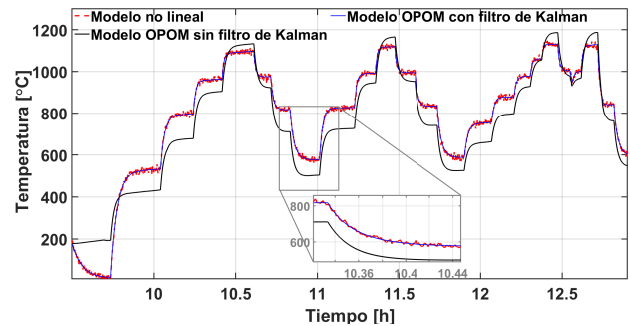


Figura 4: Validación del modelo OPOM y de la sintonía del filtro Kalman.

En segundo lugar, el filtro de Kalman se diseña considerando las matrices de covarianza para el ruido en las entradas y el ruido de salida como $Q_K = 0,1 \cdot I_{4 \times 4}$ y $R_K = 20$, respectivamente. El diseño de K_f en base a los valores de los ruidos y sus matrices de covarianzas Q_K y R_K se discute ampliamente en Lewis et al. (2012). Los valores fueron elegidos tras múltiples ensayos en simulación incorporando ruidos en la entrada y la salida del sistema tratando que el modelo OPOM representase fielmente el modelo no lineal validado desarrollado en la Sección 2. Los resultados de validación del modelo OPOM con el filtro de Kalman y la comparativa con el caso sin filtro de Kalman se presentan en la Figura 4, usando los mismos datos experimentales que

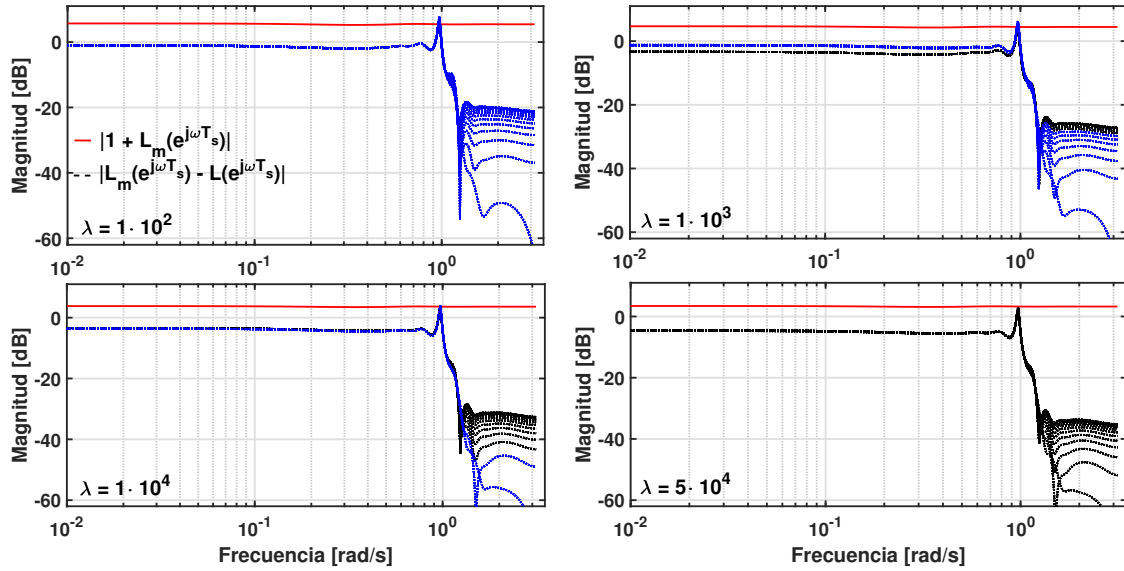


Figura 5: Análisis de robustez de la sintonía de LQT-FF para el horno solar. Las líneas azules representan los casos en los que el controlador LQT-FF, diseñado para el modelo nominal, inestabilizaría la planta real en un determinado punto de operación.

en la Figura 2 pero incluyendo los ruidos con covarianza Q_K y R_K . Se puede observar que el filtro de Kalman puede estimar satisfactoriamente los estados del modelo OPOM generando una salida muy similar a la del modelo no lineal, sin producir errores en estacionario ni sobreajustar los posibles ruidos del proceso. Utilizando el modelo nominal presentado previamente, se obtiene la ganancia del filtro de Kalman como

$$K_f = [1,1557 \ 0,0001 \ -0,0085 \ -0,9884]^T. \quad (42)$$

A continuación, en relación con el modelo no lineal de la planta, se obtienen las matrices lineales A , B y C para un rango de condiciones de operación reales del horno solar SF60. Como se detalla en la Sección 2.3, las matrices del modelo lineal dependen de las tres entradas que definen el punto de operación. Dado que la temperatura ambiente varía en una escala de tiempo considerablemente más lenta que todas las demás variables, esta entrada se descarta del análisis. Los intervalos de operación reales utilizados en el estudio son: $\bar{u} = [0, 25] \%$, $\bar{I} = [50, 1000] \text{ W/m}^2$, $\bar{T}_a = 289,13 \text{ K}$ y $\bar{T} = [300, 1200] \text{ K}$. La correspondiente variación de las condiciones de operación da origen a los modelos linealizados que representan la planta real, es decir, A , B , C y B_d , que se utilizan para calcular $L(z)$. El análisis de la estabilidad robusta también tiene en cuenta el cálculo de $L_m(z)$, utilizando K_f y las matrices A_m , B_m , B_{d_m} y C_m definidas en la Ec. (41), que representan el modelo nominal usado por el controlador LQT-FF para calcular la ganancia K_{LQ} .

Para ajustar el parámetro λ garantizando estabilidad robusta, la Ec. (32) se representa en el diagrama de Bode para un λ específico, considerando todas las combinaciones de los modelos de la planta. Se utiliza el tiempo de muestreo de 1 s, por lo que la frecuencia límite de análisis es π . La Figura 5 muestra los diagramas obtenidos para cuatro ajustes diferentes de λ . Como se puede observar, cuando se utilizan valores pequeños de λ , existen más casos de potencial inestabilidad del lazo cerrado. Por el contrario, al aumentar el valor de este parámetro, el controlador es menos agresivo, siendo posible lograr un comportamiento estable incluso con altas incertidumbres de modelado. A par-

tir de la combinación propuesta presentada en la Figura 5, se puede obtener un ajuste estable para todas las frecuencias con $\lambda = 5 \cdot 10^4$, en el cual se cumple la desigualdad dada en Ec. (32). Basándose en esta sintonía, se obtiene la ganancia del LQT-FF:

$$K_{LQ} = [0,0043 \ 0,0030 \ 0,0030 \ 0,0030]. \quad (43)$$

Como es de esperar, una sintonía agresiva del LQT-FF puede provocar un comportamiento inestable en lazo cerrado debido a la diferencia entre el modelo nominal utilizado para formular la ley de control y la dinámica real del sistema. Así, dado que esta discrepancia siempre ocurrirá en la operación real, son preferibles valores altos de λ para garantizar la estabilidad en todos los puntos de operación del sistema. Además, el filtro de Kalman puede afectar al comportamiento en lazo cerrado. En este trabajo, la sintonía del filtro de Kalman se ha fijado a priori. Si se conoce la covariancia de los ruidos que afectan la salida y las entradas, es posible definir de una forma más precisa las matrices Q_K y R_K para mejorar el diseño del filtro de Kalman del LQT-FF. Finalmente, es importante destacar que el análisis propuesto se fundamenta en el diseño del modelo y del controlador en tiempo discreto. Por lo tanto, el tiempo de muestreo utilizado afecta directamente tanto el rendimiento del controlador como el análisis de la estabilidad robusta. Este criterio debe ser meticulosamente diseñado antes de la implementación, ya que un tiempo de muestreo mal diseñado puede generar inestabilidad del sistema en lazo cerrado. Como se muestra en la siguiente sección, las sintonías propuestas permiten controlar adecuadamente el horno solar en sus diferentes rangos de operación, perfiles de referencia de temperatura y perturbaciones en la radiación solar.

4. Resultados

En esta sección, el controlador LQT-FF propuesto en la Sección 3 es evaluado en un entorno de simulación que usa el modelo validado en la Sección 2 y datos reales de la PSA que representan las condiciones reales de operación del horno solar SF60. Se

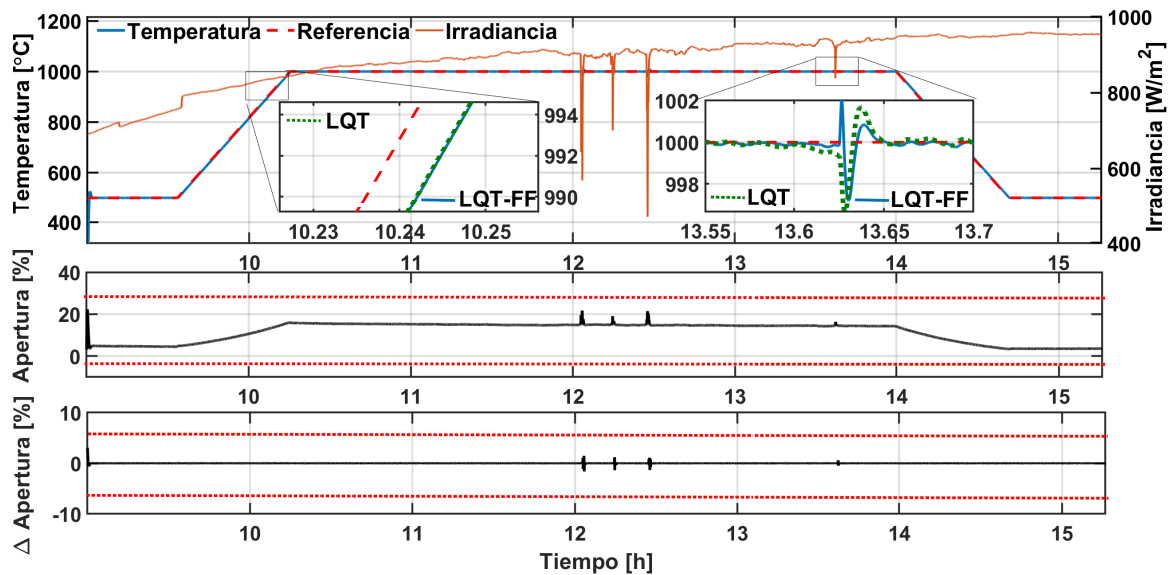


Figura 8: LQT-FF con cambios en la referencia tipo rampa para el modelo simulado del horno solar SF60. Las líneas rojas punteadas son los límites de la entrada.

Aparentemente, se puede observar que el LQT-FF y el LQT obtienen un rendimiento idéntico para seguimiento de referencia. No obstante, cuando la irradiancia varía debido a un intervalo de nubes, el LQT-FF tiene una acción de control por adelantado inmediata, rechazando la perturbación. El comportamiento se observa en el cuadro derecho remarcado de la Figura 8 donde se observa que el LQT-FF regula la temperatura más rápido que el LQT. Además, nótese que el seguimiento de referencia en forma de rampa genera variaciones suaves de la apertura de la persiana, lo cual es de esperar ya que se necesita un gradiente de temperatura suave para la prueba adecuada de la muestra de material. Una vez más, la sintonía del LQT-FF mantiene las variaciones de entrada dentro de los límites operativos y físicos. Además, se puede observar que el escenario de seguimiento de referencia es adecuado, y ambos controladores pueden seguir la referencia en forma de rampa. Sin embargo, como el controlador solo dispone de un integrador, se produce un error de velocidad, con una diferencia constante de 4 °C entre la temperatura de la muestra y la referencia durante la etapa creciente y decreciente del cambio. Con el objetivo de demostrar los beneficios de considerar una acción FF en el controlador óptimo, se calcula la Integral Absoluta de los Errores (IAE) tanto del LQT-FF como del LQT en el período del escenario de regulación del ensayo, entre las 10.25 h y 14 h. En ambos casos, el tiempo de muestreo de 1 segundo contribuye a una rápida compensación de perturbaciones, sin embargo, el LQT-FF se comporta mejor, presentando un índice IAE de 4378,5 °C mientras que el controlador LQT obtuvo 4565,2 °C.

Por último, se evalúa una última contribución del controlador LQT-FF propuesto. Como se detalla en el trabajo de Costa y Lemos (2016), una de las principales dificultades del controlador óptimo propuesto en ese trabajo es el tiempo de cómputo, ya que se requiere una cantidad de tiempo considerablemente alta para calcular las ecuaciones diferenciales del modelo y resolver el problema de optimización. En el caso del algoritmo propuesto en este trabajo, el LQT-FF también presenta una ley de control óptima, incluyendo el rechazo de perturbaciones, pero con

una solución analítica del problema de optimización, requiriendo únicamente el cálculo algebraico de las matrices producidas, lo que proporciona respuestas más rápidas de la ley de control. En los escenarios de simulación presentados, los controladores fueron implementados con $T_s = 1$ s. Sin embargo, los cálculos del controlador presentaron un tiempo de procesamiento de solo 54,5 ms, lo que evidentemente permite la implementación práctica del algoritmo.

5. Conclusiones y consideraciones finales

Este trabajo presenta un controlador LQT-FF para un horno solar. En primer lugar, se pone de manifiesto que el modelo en espacio de estados propuesto requiere un estimador de estados para calcular los estados del modelo requeridos en la ley de control de realimentación del LQT-FF. Además, se debe considerar la sintonía del controlador para mantener variaciones suaves de la apertura de la persiana que respeten las restricciones de amplitud y velocidad asociadas. Así, los resultados de este artículo contribuyen al estado de arte de los controladores óptimos propuestos hasta el momento en la literatura, presentando una ley de control óptimo con rechazo de perturbaciones formulada con una forma incremental de las entradas para la eliminación del error de seguimiento de referencia.

Es importante resaltar que el estudio del diseño del controlador LQT-FF junto con el estimador de estado resulta fundamental para asegurar la estabilidad en el sistema en lazo cerrado. Tras realizar un análisis exhaustivo de estabilidad robusta, se logró mantener la estabilidad del controlador LQT-FF en un amplio rango de operación, como se demostró en los ensayos de simulación. Además, es importante destacar que el método propuesto para el análisis de robustez no invalida ni excluye otros métodos mencionados en la literatura que incluso permitan llevar a cabo un diseño robusto. Estos pueden ser implementados de manera análoga o adicional al método presentado.

Basándose en los resultados prometedores obtenidos en simulación en este artículo, se pretende como objetivo futuro im-

plementar el controlador LQT-FF en el horno solar SF60 de la PSA. Además, en trabajos posteriores, se requerirá realizar más investigaciones sobre la ley de control óptimo con respecto a las restricciones tanto en la salida como en la entrada del proceso, así como abordar la corrección del error de velocidad en el seguimiento de referencia. Teniendo en cuenta varias restricciones impuestas al LQT-FF, se debe contemplar la aplicación de un controlador predictivo no lineal para dicho sistema. Por otro lado, el error de velocidad en el seguimiento de la rampa de referencia puede resolverse aplicando integradores artificiales en el modelo.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer el apoyo del personal de la Plataforma Solar de Almería en el desarrollo de esta línea de investigación, en especial a Lidia Roca, Inmaculada Cañadas y José Rodríguez. Igor M. L. Pataro agradece el soporte económico del Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (CNPq, Brasil) que ha financiado parte de este trabajo bajo la beca con código 201143/2019-4. El trabajo de J. M. Lemos fue financiado por Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal), proyecto UIDB/50021/2020. Además, este trabajo ha sido desarrollado el marco del proyecto PID2021-122560OB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER Una manera de hacer Europa.

Referencias

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B., 1990. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Prentice-Hall, Inc., USA.
- Berenguel, M., Camacho, E., García-Martin, F., Rubio, F., 1999. Temperature control of a solar furnace. *IEEE Control Systems Magazine* 19 (1), 8–24. DOI: 10.1109/37.745762
- Beschi, M., Berenguel, M., Visioli, A., Guzmán, J. L., Yebra, L. J., 2013a. Implementation of feedback linearization GPC control for a solar furnace. *Journal of Process Control* 23 (10), 1545–1554. DOI: 10.1016/j.jprocont.2013.02.002
- Beschi, M., Berenguel, M., Visioli, A., Yebra, L., 2013b. Constrained control strategies for disturbance rejection in a solar furnaces. *Control Engineering Practice* 21 (10), 1410–1421. DOI: 10.1016/j.conengprac.2013.06.011
- Beschi, M., Padula, F., Visioli, A., 2016. Fractional robust PID control of a solar furnace. *Control Engineering Practice* 56, 190–199. DOI: 10.1016/j.conengprac.2016.04.005
- Beschi, M., Visioli, A., Berenguel, M., Roca, L., 2013c. A feedback linearization-based two-degree-of-freedom constrained controller strategy for a solar furnace. In: *IECON 2013 - 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. pp. 3228–3233. DOI: 10.1109/IECON.2013.6699645
- Camacho, E. F., Berenguel, M., Rubio, F. R., Martínez, D., 2012. *Control of Solar Energy Systems*. Springer, London, England. DOI: 10.1007/978-0-85729-916-1
- Castillo, A., García, P., Albertos, P., 2022. Reguladores basados en observadores de perturbaciones: principios de funcionamiento y métodos de diseño. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 19 (4), 343–355. DOI: 10.4995/riai.2022.16856
- Costa, B. A., Lemos, J. M., 2009. An adaptive temperature control law for a solar furnace. *Control Engineering Practice* 17 (10), 1157–1173. DOI: 10.1016/j.conengprac.2009.05.001
- Costa, B. A., Lemos, J. M., 2016. Optimal control of the temperature in a solar furnace. *Optimal Control Applications and Methods* 37 (3), 466–478. DOI: 10.1002/oca.2113
- Costa, B. A., Lemos, J. M., Guillot, E., Olalde, G., Rosa, L., Fernandes, J. C., 2008. An adaptive temperature control law for a solar furnace. In: *2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*. pp. 1054–1059. DOI: 10.1109/MED.2008.4602113
- Costa, B. A., Lemos, J. M., Rosa, L. G., 2011. Temperature control of a solar furnace for material testing. *International Journal of Systems Science* 42 (8), 1253–1264. DOI: 10.1080/00207721.2011.588894
- Doyle, J., Stein, G., 1979. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 24 (4), 607–611. DOI: 10.1109/TAC.1979.1102095
- Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A., 2006. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Boston, MA, USA.
- Gil, J. D., Roca, L., Berenguel, M., sep. 2020. Modelado y control automático en destilación por membranas solar: fundamentos y propuestas para su desarrollo tecnológico. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 17 (4), 329–343. DOI: 10.4995/riai.2020.13122
- Lemos, J. M., Neves-Silva, R., Igreja, J., 2014. *Adaptive Control of Solar Energy Collector Systems*. Springer, London, England. DOI: 10.1007/978-3-319-06853-4
- Lemos, J. M., Pinto, L. F., 2012. Distributed linear-quadratic control of serially chained systems: Application to a water delivery canal. *IEEE Control Systems Magazine* 32 (6), 26–38. DOI: 10.1109/MCS.2012.2214126
- Lewis, F. K., Vrabie, D., Syrmos, V. L., 2012. *Optimal Control*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey. DOI: 10.1002/9781118122631
- Martins, M. A., Odloak, D., 2016. A robustly stabilizing model predictive control strategy of stable and unstable processes. *Automatica* 67, 132–143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.01.046>
- Martín, M., 2022. Challenges and opportunities of solar thermal energy towards a sustainable chemical industry. *Computers & Chemical Engineering* 165, 107926. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2022.107926
- Müller-Trefzer, F., Niedermeier, K., Fellmoser, F., Flesch, J., Pacio, J., Wetzel, T., 2021. Experimental results from a high heat flux solar furnace with a molten metal-cooled receiver summer. *Solar Energy* 221, 176–184. DOI: 10.1016/j.solener.2021.03.066
- Pataro, I. M. L., Gil, J. D., Americano da Costa, M. V., Guzmán, J. L., Berenguel, M., 2022. A stabilizing predictive controller with implicit feedforward compensation for stable and time-delayed systems. *Journal of Process Control* 115, 12–26. DOI: 10.1016/j.jprocont.2022.04.017
- Pataro, I. M. L., Gil, J. D., Guzmán, J. L., Berenguel, M., Lemos, J. M., 2023. Optimal control of solar collector fields based on linear quadratic controller with accessible disturbance. In: *2023 European Control Conference (ECC)*. pp. 1–6. DOI: 10.23919/ECC57647.2023.10178132