



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA


ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial
y Diseño Industrial

Aplicación numérica para cálculo de esfuerzos,
deformaciones y modelización de alas.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

AUTOR/A: Mehdioui el Bouzidi, Oussama

Tutor/a: Moreno Navarro, Pablo

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

APLICACIÓN NUMÉRICA PARA CÁLCULO ESFUERZOS, DEFORMACIONES Y DE MODELIZACIÓN DE ALAS

Autor

Oussama Mehdioui El Bouzidi

Director

Pablo Moreno Navarro

Universitat Politècnica de València

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial

Valencia - Julio de 2024

APLICACIÓN NUMÉRICA PARA CÁLCULO
ESFUERZOS, DEFORMACIONES
Y DE MODELIZACIÓN DE ALAS

Oussama Mehdioui

Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial

Julio de 2024

*A familia y en especial
a mi queridísima madre.*

Resumen

El objetivo de este proyecto es el cálculo de esfuerzos y deformaciones que sufre un ala sometida a esfuerzos aerodinámicos. Dada un ala con cierta geometría y dimensiones, compuesta por diferentes elementos y materiales metálicos, se analizará cómo se comporta ante condiciones de velocidad, ángulo de incidencia y densidad del aire. Una vez obtenidas las fuerzas sufridas, mediante teoría de vigas se calcularán solicitaciones, inercias y propiedades del material, para obtener deformaciones, desplazamientos y tensiones.

El software de uso principal será MATLAB, donde se integrarán todos los cálculos tanto aerodinámicos como estructurales, permitiendo recoger todo el proceso en una aplicación única con interfaz gráfica que facilite la parametrización y el cálculo mostrando en una pantalla final los resultados obtenidos. La validación de esta aplicación se hará con diferentes software comerciales, que compararán casos puntuales permitiendo corroborar la precisión y fiabilidad de los resultados obtenidos.

Índice general

Resumen	I
Índice general	II
Índice de figuras	IV
Índice de tablas	VIII
Lista de símbolos	X
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.1.1. Estado del arte	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Organización de la memoria	2
2. Fundamentos teóricos	4
2.1. Definiciones y propiedades	4
2.1.1. Propiedades de la viga y de la sección	4
2.1.2. Tensión	7
2.1.3. Flujo de cortante	11
2.1.4. Deformaciones	13
2.1.5. Solicitaciones	14
2.2. Ecuaciones de la viga	16
2.2.1. Ecuaciones constitutivas	16
2.2.2. Ecuaciones cinemáticas	17
2.2.3. Ecuaciones de equilibrio	18
2.3. Desplazamientos	20
2.3.1. Flexión	20
2.3.2. Giro	21
2.4. Fundamentos aerodinámicos	23
2.4.1. Generación de fuerzas	24
2.4.2. Alas tridimensionales	25
3. Estructura alar	26
3.1. Geometría externa	26
3.2. Estructura interna.	29
3.2.1. Revestimiento o piel	30
3.2.2. Largueros	31
3.2.3. Costillas	32
3.2.4. Elementos de refuerzo	33
3.2.5. Encastre del ala	34

4. Cálculo numérico e interfaz gráfica	36
4.1. Diseño del ala	36
4.2. Diseño interno del ala	39
4.3. Materiales	40
4.3.1. Método de Newton-Raphson	42
4.4. Refuerzos	43
4.4.1. Cálculo numérico de las inercias.	45
4.5. Aerodinámica	48
4.5.1. <i>Vortex Lattice Method</i>	49
4.5.2. Representación de cargas	52
4.6. Diagramas de solicitaciones	54
4.6.1. Cálculo numérico de solicitaciones.	54
4.7. Distribuciones de tensiones	56
4.7.1. Cálculo de las tensiones normales	57
4.7.2. Cálculo de las tensiones tangenciales	59
4.8. Desplazamientos y giros	63
5. Validación de resultados	65
5.1. Validación de los diagramas.	65
5.1.1. Caso 1: Ala recta sometida a sustentación	65
5.1.2. Casa 2: Fuerza puntual	66
5.1.3. Caso 3: Ala con diedro	66
5.2. Desplazamiento	67
5.3. Comprobación de las tensiones	68
5.3.1. Tensiones normales	68
5.3.2. Tensiones tangenciales.	69
6. Conclusiones finales	70
6.1. Conclusiones	70
6.2. Trabajos futuros	72
6.3. Presupuesto	73
A. Objetivos de desarrollo sostenible	74
B. Pliego de condiciones y planos	75
B.1. Planos	75
B.2. Pliego de condiciones	75
Bibliografía	77

Índice de figuras

2.1. Representación esquemática de una viga y de las direcciones principales. . .	4
2.2. Representación esquemática de una rebanada de viga y de las deformaciones exageradas.	5
2.3. Sección de viga sometida a su propio peso y discretizada en elementos diferenciales con diferenciales de peso.	5
2.4. Representación gráfica de las fuerzas internas y las tensiones surgidas	7
2.5. Tensiones surgidas de un diferencial de volumen. Convención de signos. . . .	8
2.6. Tensiones surgidas de un diferencial un sección.	9
2.7. Comparación entre modelo elastoplástico y de Ramberg-Osgood.	10
2.8. Centro de esfuerzos cortantes en diferentes secciones. (a) En el eje de simetría, (b) dentro de una sección cerrada, (c) en lado contrario a la abertura, (d) en la intersección de ambos ejes de simetría	13
2.9. Representación de las deformaciones tangenciales de una paralelepípedo. . .	13
2.10. Deformaciones tangenciales de una porción de sección de pared delgada. . .	14
2.11. Torsión generada por flujo de torsor.	16
2.12. Variación de la gráfica tensión-deformación con el factor m (izquierda). Variación del módulo de Poisson con el factor m desde el módulo de Poisson elástico hasta el plástico (derecha).	17
2.13. Corte trasversal a una viga para visualizar los pares de sollicitaciones internos. 18	
2.14. Movimiento relativo y entre secciones y deformación producidos por un giro infinitesimal.	22
2.15. Isolíneas de flujo alrededor de un perfil.	24
2.16. Ala tridimensional sometida a sustentación, resistencia y vórtices de punta de ala.	25
2.17. Ángulo de ataque efectivo.	25
3.1. Parámetros geométricos angulares en un ala trapezoidal.	27
3.2. Avión A350-900 de Vietnam Airlines [1]. Ala con flecha alta, diedro pequeño, estrechamiento moderado	27
3.3. Avión Eurofighter Typhoon [2]. Ala delta, con baja esbeltez, alto estrechamiento y perfil fino	28
3.4. Avión Piper PA28-181 [3]. Ala recta, sin flecha, perfil moderado o grueso y sin estrechamiento.	28
3.5. Estructura interna alar simple. Muestra de diferentes formas de costillas. . .	29
3.6. Cajón de torsión típico, limitado por largueros y piel.	30
3.7. Diferentes configuraciones de largueros: de alma llena (a), de canal doblado (b), de celosía (c), de alma mecanizada (d).	32
3.8. Perfil con larguerillos acoplados (a), o integrados (b).	33
3.9. Detalle de la estructura interna.	34
3.10. Ala con flecha y orientación del encastre.	35
4.1. Diseño del revestimiento del ala.	36
4.2. Diseño tridimensional del ala. Vista en planta y en perfil	38
4.3. Ventana de diseño de la estructura interna del ala.	39

ÍNDICE DE FIGURAS

4.4.	Diagrama de funcionamiento de la segunda pestaña de la aplicación	40
4.5.	Elección del material de cada uno de los componentes del ala.	41
4.6.	Diagrama de funcionamiento de la tercera pestaña de la aplicación	42
4.7.	Ventana de diseño de los larguerillos.	43
4.8.	Diferentes perfiles de larguerillos: perfil en 'Z', perfil de sombrero, perfil en 'J', perfil de doble 'T' y perfil en 'Y' respectivamente.	43
4.9.	Aumento de la inercia debido a la incorporación de larguerillos. Proporción anchura/altura = 1, proporción anchura/espesor = 10. A mayor número menor tamaño.	44
4.10.	Diseño de los cordones.	44
4.11.	Diagrama de funcionamiento de la cuarta pestaña del programa	45
4.12.	Disposición de los larguerillos en la sección.	46
4.13.	Pestaña para la introducción de datos para el cálculo aerodinámico.	48
4.14.	Variación de los parámetros atmosféricos con la altitud.	48
4.15.	Resultantes de las fuerzas con componente normal y otra tangencial y línea de torbellinos que cubren un panel.	49
4.16.	Mallado de un ala con diedro, flecha y estrechamiento	50
4.17.	(a) Determinación del punto de control y del vector normal al panel. (b) Efecto de la curvatura en la normal al panel.	51
4.18.	Representación de las distribuciones de sustentación, resistencia y presión	53
4.19.	Coste computacional de un ala dadas diferentes cantidades de paneles en envergadura y en cuerda	53
4.20.	Ventana del programa para mostrar los diagramas de solicitaciones del ala. Se puede distinguir la influencia del combustible y del motor en un ala sin flecha.	54
4.21.	Carga distribuida ejercida por un motor en un ala con flecha.	55
4.22.	Diagrama de funcionamiento de la pestaña de cálculo de diagramas.	56
4.23.	Distribuciones de tensiones con vista tridimensional del ala y la sección elegida.	56
4.24.	Diagrama que muestra el funcionamiento de la pestaña. Modificar la posición modifica el cuadro rojo de la figura 4.23.	57
4.25.	División del perfil en los diferentes segmentos que lo componen y dirección arbitraria de los flujos y flujos constantes.	58
4.26.	Sección sometida a tensiones que provocan deformaciones. Equivalencia de momentos entre el flector M y las tensiones normales.	58
4.27.	Número de iteraciones realizadas en cada una de las discretizaciones realizadas al ala para un margen de error del 1%.	59
4.28.	Proyección de la tensión normal en los tres ejes debido al estrechamiento y a la torsión	60
4.29.	Comparación entre el flujo abierto en la piel usando cualquiera del modelo elástico-lineal de la ec. (2.15) y el modelo Ramberg Osgood usando la ec. (2.14).	61
4.30.	Diagrama que muestra los pasos del cálculo de las diferentes tensiones.	63
4.31.	Ventana de muestra desplazamiento y giro del ala de forma tridimensional y bidimensional.	63

5.1. Comparación entre el momento flector M_y entre el programa y el <i>software</i> <i>Robot</i> [®]	65
5.2. Comparación del cortante Q_z entre el programa y el <i>software</i> <i>Robot</i> [®]	66
5.3. Comparación entre del axil N_x entre el programa y el <i>software</i> <i>Robot</i> [®]	67
5.4. Comparación entre los desplazamientos obtenidos por el programa y el <i>software</i> <i>Robot</i> [®]	67
5.5. Comparación entre las tensiones normales obtenidas por el método de iterativo, la Fórmula de Navier y el <i>software</i> <i>Robot</i> [®] a lo largo de la piel.	68
5.6. Comparación entre las tensiones tangenciales obtenidas por el programa y el <i>software</i> <i>Robot</i> [®] a lo largo de cada uno de los segmentos de la piel en sección abierta.	69

Índice de tablas

3.1. Rangos de espesores de la piel para algunas aeronaves típicas [4].	30
3.2. Materiales típicos de la piel para algunos aviones de combate [4].	31
4.1. Valores de los parámetros de la línea de curvatura en función de los coeficientes NACA de cinco cifras.	38
5.1. Datos implementados en el primer caso de estudio de validación del programa.	65
5.2. Datos extra de la implementación en el segundo caso de estudio de validación del programa.	66
5.3. Momentos aplicados para calcular la tensión normal.	68
5.4. Cortantes aplicados para calcular la tensión tangencial.	69
6.1. Desglose del presupuesto	73
A.1. Objetivos de desarrollo sostenible	74
B.1. Materiales implementados en el programa	75

Lista de Símbolos

Mayúsculas

A	— Área	m^2
\hat{A}	— Área encerrada	m^2
A_X	— Fuerza aerodinámica proyectada en el eje x	N
A_Y	— Fuerza aerodinámica proyectada en el eje y	N
A_Z	— Fuerza aerodinámica proyectada en el eje z	N
AR	— Esbeltez alar	—
E	— Módulo de Young o elástico	N/m^2
F	— Fuerza genérica	N
F_s	— Función de superficie	—
G	— Módulo de cortante o cizalladura	N/m^2
I	— Momento de inercia genérico	m^4
I_y	— Momento de inercia alrededor del eje y	m^4
I_z	— Momento de inercia alrededor del eje z	m^4
I_{yz}	— Producto de inercia de la sección	m^4
J	— Momento de polar de inercia	m^4
L	— Longitud de la viga	—
L	— Factor de forma del perfil	—
M	— Momento flector	N m
M	— Curvatura máxima del ala relativo a la cuerda	—
MA	— Momento de reacción del apoyo	N m
N	— Fuerza de axil	N
O	— Centro de gravedad	—
P	— Fuerza puntual	N
P	— Posición relativa a la cuerda de máximo espesor	—
Q	— Fuerza de cortante	N
Q	— Indicador de la propiedad <i>reflex</i> del perfil	—
R	— Fuerza de reacción del apoyo	N
T	— Momento torsor	N m
T	— Máximo espesor del ala relativo a la cuerda	—
U_∞	— Velocidad del fluido libre	m/s
V	— Velocidad del flujo	m/s
V_{comb}	— Volumen de combustible del ala	N
W	— Peso	N
X	— Fuerza en la dirección x	N
Y	— Fuerza en la dirección y	N
Z	— Fuerza en la dirección z	N

Minúsculas

a	— Área concentrada	m^2
b_w	— Envergadura alar	m

LISTA DE SÍMBOLOS

c_r	—	Longitud de la cuerda alar en el encastre	m
c_t	—	Longitud de la cuerda alar en la punta	m
d	—	Distancia a la línea neutra	m
k	—	Constante genérica	—
k_1	—	Factor de forma del perfil	—
k_2	—	Factor de forma del perfil	—
l	—	Longitud de un segmento	m
m	—	Factor de forma del material	—
m_p	—	Momento distribuido	N
m_y	—	Momento estático en la dirección y	m ³
m_z	—	Momento estático en la dirección z	m ³
p	—	Carga distribuida	N/m
p_l	—	Posición relativa a la cuerda del larguero	—
q	—	Flujo de cortante	N/m
r_P	—	Distancia del vórtice al punto referido	m
t	—	Espesor de la sección	m
u	—	Elongación de la viga en la dirección x	—
v	—	Elongación de la viga en la dirección y	—
v_t	—	Desplazamiento entre secciones producido por torsión	—
v_Γ	—	Velocidad inducida por los vórtices	m/s
w	—	Elongación de la viga en la dirección z	—
x	—	Componente longitudinal de los ejes espaciales	—
y	—	Componente transversal de los ejes espaciales	—
z	—	Componente vertical de los ejes espaciales	—

Letras griegas

α	—	Ángulo de ataque	—
α_{eff}	—	Ángulo de efectivo	—
α_i	—	Ángulo de inducido	—
Γ	—	Vorticidad de un torbellino	m ² /s
Γ_d	—	Diedro del ala	—
γ	—	Deformación angular/tangencial de la sección	—
ε	—	Deformación longitudinal de la sección	—
θ	—	Giro producido por torsión	—
κ	—	Curvatura de la viga	—
λ	—	Estrechamiento del ala	—
Λ	—	Ángulo de flecha del ala	—
ν	—	Coefficiente de Poisson	—
ν_e	—	Coefficiente de Poisson elástico	—
ν_p	—	Coefficiente de Poisson plástico	—
ρ	—	Radio de curvatura	m
ρ_g	—	Densidad	kg/m ³

ρ_g	—	Distancia ortogonal de un segmento a un punto de a sección	m
σ	—	Tensión normal a la sección	MPa
σ_I, σ_{II} y σ_{III}	—	Tensiones normales en direcciones principales	MPa
σ_n	—	Tensión de referencia	MPa
τ	—	Tensión tangente o cortante	MPa
τ_g	—	Torsión geométrica del ala	—
ϕ	—	Giro por unidad de longitud	—
ϕ_x	—	Giro de la viga/pendiente de la deformada	—
Φ	—	Función potencial del flujo	m ² /s
φ	—	Función potencial del flujo inducido	m ² /s
ω	—	Valor de la deformada de la viga en el eje z	m

Subíndices

f	—	Parte final del tramo
D	—	Generado por la resistencia
I, II, III	—	Malla concreta
j	—	Segmento/panel influenciado
k	—	Malla genérica
K	—	Panel influyente
L	—	Generado por la sustentación
m	—	Parte media del tramo
W	—	Generado por el peso
0	—	Inicio de un tramo
∞	—	En el infinito

1.1. Motivación

A lo largo del grado de ingeniería aeronáutica se ha tratado el ala como elemento central de estudio desde distintos puntos de vista y disciplinas. Entre ellas cabe destacar dos que son el eje central de este proyecto: estructural y de diseño.

Estos dos puntos están íntimamente relacionados y es que el diseño de una aeronave y en este caso concreto de un ala se basa, entre otras cosas, en su misión que condiciona sus requerimientos estructurales. El ala, en flujo libre y a ciertas condiciones se va a someter principalmente a diferentes cargas aerodinámicas que son las responsables del vuelo, pero que como contraparte esta ha de ser capaz de resistir para poder desempeñar correctamente su función.

Antes de la construcción de cualquier elemento de un avión se ha de calcular la estructura de este y posteriormente simularla para estudiar el funcionamiento de esta. Pero estos dos procesos en sí pueden llegar a ser bastante tediosos, ya que la simulación por elementos finitos, además del preprocesado y preparación del caso, puede resultar en un proceso bastante prolongado si se repite constantemente para cada caso que se desea probar.

Es por ello de la razón de este proyecto de una aplicación para el caso: Reducir el tiempo de prueba y estudio complementado con el diseño para un primer esbozo y análisis preliminar. Dadas ciertas condiciones geométricas, estructurales y aerodinámicas estudiar esfuerzos y deformaciones resultantes para ya más tarde empezar el cálculo con Métodos Finitos.

1.1.1. Estado del arte

A día de hoy el método por definición y más extendido del análisis estructural son los Métodos de Elementos Finitos o FEA, bastante pulidos a día de hoy y que proporcionan resultados muy precisos y correctos. Programas como *Abaqus*[®], *Patran*[®] o *Ansys*[®] o incluso programas de CAD como *NX*[®] o *Catia V5*[®] son el tope de gama en este sentido [5].

Por otra parte para el caso de cálculo aerodinámica se utiliza la Dinámica de Fluidos Computacional o CFD, *software* que permite utilizando la Mecánica de Fluidos y las ecuaciones de Navier-Stoke calcular el comportamiento de un objeto cual sea dentro de un fluido bajo ciertas condiciones complementando a los programas de FEA: del CFD se obtienen las cargas y de los Métodos Finitos los resultados.

Hay incluso programas de cálculo estructural más sencillos y especializados como lo son *Robot*[®] o *Autodesk Inventor*[®] que no necesitan un CAD previo para poder trabajar. Sin embargo existen muy pocos especializados en compaginar estas dos disciplinas para el

sector aeronáutico y es por eso la razón de este proyecto.

Se busca poder diseñar un ala de forma fácil y rápida y poder implementar y someterlo a condiciones aerodinámicas generando cargas que realmente experimentará el ala en la realidad y de ahí extraer su comportamiento y esfuerzos a los que estará sometido.

1.2. Objetivos

El objetivo final se basa en lo expuesto anteriormente. En base a ciertas características de diseño de un ala ya sean dimensionales, estructurales o de material, ver como este responde ante condiciones aerodinámicas diversas.

- En primer lugar, realizar un diseño preliminar del ala. Poder crear una interfaz capaz de representar un ala a medida que se vayan cambiando los parámetros de diseño respondiendo a criterios de estrechamiento, alargamiento, flecha, diedro y torsión.
- Organizar y estructurar los elementos internos del ala y someterlos a condiciones de ángulo de ataque y presión dinámica.
- Incluir modelos de materiales que permitan estudiar como afectan estos a la rigidez al desplazamiento y deformación del ala.
- Que el programa diseñado permita ver como afectan estos parámetros de diseño al desempeño general del ala.
- Diseñar una interfaz gráfica intuitiva y fácil de seguir a la vez que completa y dar facilidad a poder actualizarla para mejorar el diseño y funcionalidad de esta.
- Permitir una representación gráfica que sea fácil de seguir para realizar un análisis rápido y visual de los resultados mostrados.
- Profundizar en la realizad de la teoría de vigas sometida al cálculo numérico y poder ver como este condiciona la teoría hasta ahora aprendida y aplicada a una función real.
- Verificar la validez del programa y ver hasta que punto es funcional y se ajusta a la realidad.

1.3. Organización de la memoria

Este trabajo se estructura en varios capítulos, cada uno abordando diferentes aspectos del problema y la solución propuesta:

- **Capítulo 2:** Marco Teórico. Se presentan los conceptos fundamentales y la teoría necesaria para comprender el análisis y desarrollo del proyecto. Se abordan temas clave como la teoría de vigas, los materiales utilizados en estructuras aeronáuticas, y los principios de aerodinámica y aeroelasticidad.

- **Capítulo 3:** Metodología. Se detalla la metodología empleada en el desarrollo del proyecto. Esto incluye la descripción del software y herramientas utilizadas, el proceso de modelado y simulación, y los criterios de validación de los resultados obtenidos.
- **Capítulo 4:** Desarrollo del Proyecto. Este capítulo describe de manera detallada el proceso de diseño y análisis de las estructuras evaluadas. Se incluyen los parámetros de entrada, las condiciones de contorno, y los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas.
- **Capítulo 5:** Resultados y Discusión. Se presentan y analizan los resultados obtenidos en las simulaciones. Se discuten las implicaciones de los resultados en términos de comportamiento estructural y se comparan con estudios previos y datos experimentales disponibles.
- **Capítulo 6:** Conclusiones y Recomendaciones. Se resumen las conclusiones del trabajo y se proponen recomendaciones para futuras investigaciones o mejoras en el diseño y análisis de estructuras aeronáuticas.
- **Apéndices.** Se incluyen materiales adicionales que complementan el contenido del trabajo, como tablas de datos, códigos de simulación, y otros recursos relevantes.

2

Fundamentos teóricos

2.1. Definiciones y propiedades

2.1.1. Propiedades de la viga y de la sección

La viga es un elemento estructural unidimensional dispuesto, normalmente, de manera horizontal, diseñado para soportar cargas de flexión y de cortante. Esta viga al ser unidimensional se entiende que tiene una dirección preferencial sobre las otras dos.

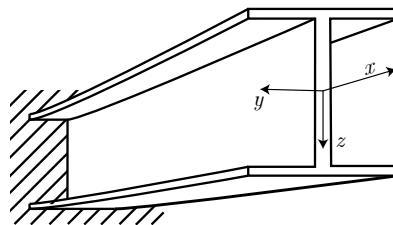


Figura 2.1 – Representación esquemática de una viga y de las direcciones principales.

Las vigas tratadas siguen la teoría de vigas de Euler-Bernoulli una modelización de estas estructuras por medio de la teoría elástica, donde las principales hipótesis que se siguen son:

- vigas muy alargadas,
- las secciones son planas,
- las secciones son perpendiculares al eje longitudinal incluso tras deformar la viga,
- los desplazamientos son pequeños,
- la linealidad de esfuerzos - deformaciones.

Las vigas de Euler-Bernoulli cumplen que el producto de la rigidez de la viga con la derivada cuarta de la deformada de esta es igual a la carga que sufre.

$$EI \frac{d^4 \omega(x)}{dx^4} = q(x) \quad (2.1)$$

Cuando una viga flexa hacia arriba se produce un acortamiento en la parte superior de la viga y un alargamiento en la parte inferior. Esto quiere decir que entremedias hay una parte donde la viga mantiene su longitud original; a esa altura se denomina línea neutra.

Una magnitud que ayuda a medir la deformación a lo largo de la viga es el radio de curvatura ρ y que cuanto menor sea este más curvada y deformada estará la viga y viceversa. Este radio de curvatura está referido más concretamente a la línea neutra, en la

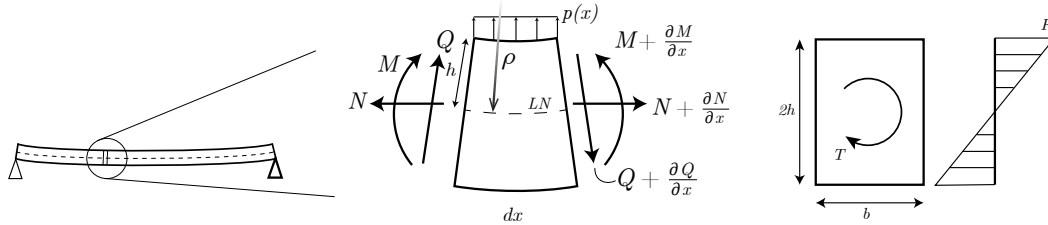


Figura 2.2 – Representación esquemática de una rebanada de viga y de las deformaciones exageradas.

figura 2.2, en la parte superior de la viga será menor y en la parte inferior será mayor. Se medirá la deformación de la curvatura como una relación entre la elongación de la viga y su longitud inicial:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + h)\theta_s - \rho\theta_s}{\rho\theta_s} = \frac{h}{\rho} = \kappa h$$

Se entiende la curvatura κ como la inversa del radio de curvatura ρ , se observa la conclusión a la que se había llegado anteriormente: a mayor ρ , menor deformación ya que ε tiende a cero y a mayor κ , mayor deformación ya que ε tiende a valores mayores.

Centro de gravedad de la sección

El centro de gravedad de una figura es el punto donde actúa la resultante de la gravedad. Para calcular su posición, suponer que una sección como la de la figura 2.3 donde se divide en n elementos pequeños sobre los cuales se ejerce una fuerza peso ΔW_i siendo la dirección de cada una paralela a los demás siendo la resultante W suma de todas y con la misma dirección.

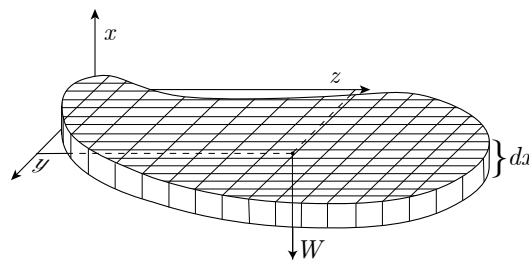


Figura 2.3 – Sección de viga sometida a su propio peso y discretizada en elementos diferenciales con diferenciales de peso.

Para obtener su posición se debe aplicar una equivalencia de momentos siendo el ejercido por W igual a todos los ejercidos por los diferenciales ΔW_i . Se calculan dos equivalencias de momentos, uno en z y otro en y .

$$W \cdot \bar{y} = \Delta W_1 \cdot y_1 + \Delta W_2 \cdot y_2 + \Delta W_3 \cdot y_3 + \dots + \Delta W_n \cdot y_n$$

$$W \cdot \bar{z} = \Delta W_1 \cdot z_1 + \Delta W_2 \cdot z_2 + \Delta W_3 \cdot z_3 + \dots + \Delta W_n \cdot z_n$$

El peso es un producto entre el área, la densidad y el espesor, $\Delta W = \Delta A \cdot \rho_d \cdot dx$, siendo estas dos últimas constantes en todas las porciones por lo que se pueden simplificar [6].

$$\bar{y} = \frac{\sum \Delta A \cdot y_i}{A}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum \Delta A \cdot z_i}{A}$$
(2.2)

En secciones donde se cuenta con un plano de simetría el centro de gravedad se encontrará sobre este y si posee dos planos de simetría, se encontrará en la intersección de ambos.

Momentos de área

Una vez obtenido el centro de gravedad, una propiedad muy importante a tener en cuenta es como se distribuye el área de una sección alrededor de esta. Para estudiarlo suponemos una sección uniforme rectangular sometida a flexión pura como la de la figura 2.2, donde existe un fuerzas de compresión y fuerzas de tracción, que varían linealmente con la coordenada z , siendo $dF = kz dA$; si se integra la resultante de fuerzas:

$$F = \int_{-h}^{z_1} dF = k \int_{-h}^{z_1} z dA = k \cdot m_y(z_1)$$
(2.3)

La integral resultante se conoce como primer momento de área o momento estático e indica el producto entre cierto área y la distancia entre el centro de gravedad de ese área y el centro de gravedad total de la sección. Si se incluye el área total de la sección ($z_1 = h$) los centros de gravedad serán coincidentes por lo que el momento de área será nulo y la fuerza resultante F nula, es decir que la viga está en equilibrio. Por otra parte, el momento ejercido por las fuerzas internas de la sección es el producto de la fuerza por la distancia al eje de referencia $dM = dF \cdot z = kz^2 dA$

$$M = \int_{-h}^h dF \cdot z = k \int_{-h}^h z^2 dA = k \cdot I_y$$
(2.4)

La integral final resultante se conoce como segundo momento de área o momento de inercia y es el producto entre el área de una sección y la distancia cuadrática al centro de gravedad. Es una medida de distribución de área alrededor de un eje, cuanto mayor sea el área y cuanto más distanciada esté mayor será el momento de inercia. Para indicar la simetría de una sección respecto a unos ejes determinados se hace uso del producto de inercia que es nula cuando la sección es simétrica o se encuentra en ejes principales de inercia [6].

$$I_{yz} = \int yz \, dA$$

Otra medida significativa es como se distribuye el área alrededor de un punto determinado en lugar de un eje. Al igual que en los casos anteriores a mayor distancia del punto y a

mayor área referida, mayor tiene que ser esta magnitud.

$$J = \int r^2 dA = \int (y^2 + z^2) dA = \int y^2 dA + \int z^2 dA = I_z + I_y \quad (2.5)$$

Esta magnitud es el momento polar de inercia y se demuestra que es resultado de la suma de los momentos de inercia. El momento polar es útil para resolver problemas de torsión y formará parte en la rigidez al momento torsor.

2.1.2. Tensión

La teoría fundamental sobre la que se basa este proyecto es la teoría de la elasticidad, que estudia todos aquellos esfuerzos sufridos por un material sometidos a diferentes cargas resultando en una deformación del cuerpo. La resistencia a la deformación se manifiesta en los esfuerzos y estos vienen condicionados por la geometría y el material de la viga [7].

El esfuerzo o tensión es la parte fundamental de esta teoría. Como se ha mencionado es una manifestación de la resistencia a la deformación inducida por una carga. Al aplicar cargas en un objeto cual sea, este reacciona mediante esfuerzos internos que pretenden mantener un equilibrio de fuerzas transmitidas por el interior del objeto. Un diferencial de carga aplicada en un diferencial de área genera una tensión.

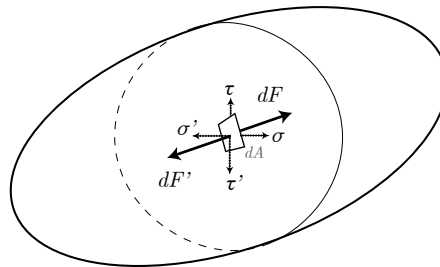


Figura 2.4 – Representación gráfica de las fuerzas internas y las tensiones surgidas

La tensión obtenida se puede dividir en una normal al diferencial de área, y otra tangencial siendo la tensión total suma cuadrática de ambas.

$$\sigma = \frac{\partial F_n}{\partial A} \quad \tau = \frac{\partial F_s}{\partial A} \quad (2.6)$$

En un elemento cualquiera las tensiones estudiadas se descomponen en diferentes componentes referidas a cada una de las direcciones de referencia. Haciendo uso de un sistema ortogonal se cuenta con un sistema $Oxyz$ siendo el punto O el centro de gravedad del elemento. Estas componentes deben seguir un criterio de signos, tal que las tensiones tangenciales son positivas si actúan en un plano donde la tensión normal sigue la dirección del eje al que hace referencia. Las tensiones siempre actúan en pares, a ambos lados del diferencial de volumen, por lo que las tangenciales, a un lado serán positivas y al otro negativas

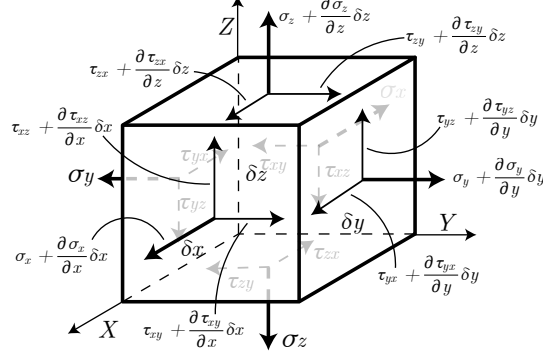


Figura 2.5 – Tensiones surgidas de un diferencial de volumen. Convención de signos.

Al sufrir una carga las tensiones internas del elemento, normalmente, varían a lo largo de este, pero aún así se debe conservar un equilibrio interno de fuerzas y momentos. Se supondrá un elemento volumétrico diferencial como el de la figura 2.5 en el que dado que la variación es pequeña en un volumen diferencial se puede describir esta como el primer elemento de la serie de Taylor. A este volumen se le aplicará los dos equilibrios para obtener las relaciones de tensiones que se han de guardar. Suponiendo equilibrio de momentos alrededor del eje x :

$$\tau_{yz}\delta x\delta z\frac{\delta y}{2} + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z\frac{\delta y}{2} - \tau_{zy}\delta x\delta y\frac{\delta z}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y\frac{\delta z}{2} = 0$$

que se puede desarrollar y simplificar de tal forma que:

$$\tau_{yz}\delta x\delta z\delta y + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\delta x\delta z\frac{\delta y^2}{2} - \tau_{zy}\delta x\delta y\delta z - \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta x\delta y\frac{\delta z^2}{2} = 0$$

Despreciando los términos de cuarto orden y aplicando lo mismo en los otros ejes:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Esto demuestra que las tensiones tangenciales son complementarias entre sí y de igual magnitud, actuando en un plano perpendicular pero en dirección contraria. Aplicando ahora equilibrio de fuerzas en el eje x :

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z - \sigma_x\delta y\delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\delta y\right)\delta y\delta z - \tau_{yx}\delta y\delta z + \dots \\ &\dots + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y - \tau_{zx}\delta x\delta y + X\delta x\delta y\delta z = 0 \end{aligned}$$

que simplificando como anteriormente:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Aplicando lo mismo en los tres ejes da como resultado la eq. (2.8) que son las ecuaciones de equilibrio que debe satisfacer cualquier cuerpo deformable en todos sus puntos [8].

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

La viga, que es el elemento principal de estudio en este proyecto, en el ámbito aeronáutico suele caracterizarse con ser de pared delgada. Esta viga se trata como una sucesión de secciones en una dirección preferencial y de mayor orden que las otras dos, que en este caso será la dirección x . Como la viga es de pared delgada la sección de esta se caracteriza por tener una forma unidimensional con un espesor determinado, por lo que son figuras que se tratan con coordenadas longitudinales en vez de cartesianas.

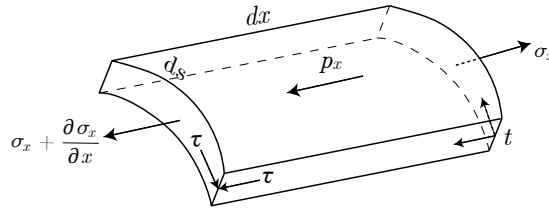


Figura 2.6 – Tensiones surgidas de un diferencial un sección.

Se supone una porción de sección como la de la figura 2.6 de dimensiones $\delta s \times \delta x \times t$, siendo p_x una carga aplicada. El espesor t , cuya variación a lo largo de s es tan pequeña, se supondrá constante. Se propone un equilibrio de fuerzas en la dirección x como el anterior y simplificando resultando en la ec. (2.9).

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial s} + p_x = 0 \quad (2.9)$$

Estas ecuación de equilibrio indican que la variación de tensión cortante en la dirección s esta acoplada a la variación de la tensión normal en la dirección x . En ausencia de tensiones normales y cargas, no existe variación de las de cortante a lo largo de s . Las tensiones de cortante también son iguales en módulo a sus complementarias en los planos perpendiculares [9].

Tensión normal en el modelo elástico-lineal

Los materiales normalmente siguen una relación entre la tensión y la deformación (sección 2.1.4) descrita por diferentes modelos.

Aunque en este proyecto se usará el modelo Ramberg-Osgood [10], que se explicará posteriormente, estos materiales cuentan con una relación lineal entre estas dos magnitudes (por medio del módulo de rigidez o módulo de Young) a deformaciones bajas, siguiendo la ley de Hooke para materiales elásticos. Si un material está sometido a una tensión se deformará proporcionalmente a esta y una vez que deje de estarlo volverá a su estado inicial. Llegada una tensión de fluencia este entra en un fase de plastificación donde una vez dejado de sufrir la tensión sufre una deformación permanente.

Es por ello que se describe un modelo elastoplástico perfecto que es lineal hasta la tensión de fluencia donde pasa a ser constante.

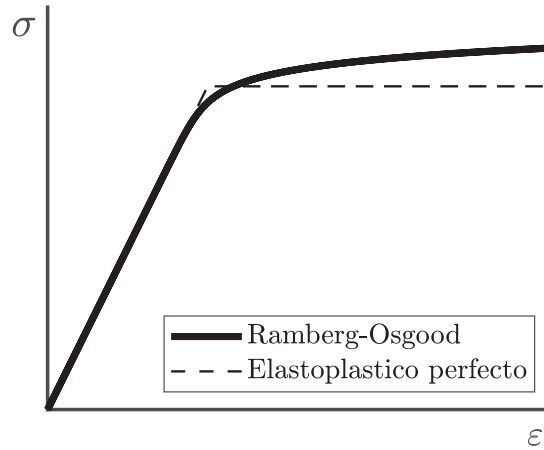


Figura 2.7 – Comparación entre modelo elastoplástico y de Ramberg-Osgood.

Esta linealidad permite describir la tensión de con una expresión simple respecto a la deformación que está se relaciona con la curvatura que sufre la sección al estar sometida a una carga.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot (\kappa_z \cdot y + \kappa_y \cdot z) \quad (2.10)$$

Según lo visto en la ec. (2.4) el conjunto de tensiones de una sección genera un momento alrededor de la línea neutra (donde las deformaciones son nulas), llamado flector.

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma_x z \, dA = \int_A E \cdot (\kappa_z y + \kappa_y z) z \, dA = E \kappa_z \int_A y z \, dA + E \kappa_y \int_A z^2 \, dA = \dots \\ &\dots = E \kappa_z I_{yz} + E \kappa_y I_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A \sigma_x y \, dA = \int_A E \cdot (\kappa_z y + \kappa_y z) y \, dA = E \kappa_z \int_A y^2 \, dA + E \kappa_y \int_A y z \, dA = \dots \\ &\dots = E \kappa_z I_y + E \kappa_y I_{yz} \end{aligned}$$

Si se despejan de ambas expresiones anteriores las curvaturas se tiene que:

$$\kappa_y = \frac{M_y \cdot I_z + M_z \cdot I_{yz}}{E \cdot (I_y I_z - I_{yz}^2)}$$

$$\kappa_z = \frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot I_{yz}}{E \cdot (I_y I_z - I_{yz}^2)}$$

y haciendo uso de la ec. (2.10) se obtiene la ecuación de Navier. Se ha de considerar la contribución del axil, que es una distribución constante de tensiones en toda la sección tal que $\sigma_{x,N} = N/A$.

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_d} \cdot z + \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_d} \cdot y \quad (2.11)$$

Se define $I_d = I_y I_z - I_{yz}^2$ como el determinante de la matriz de inercia. De la ec. (2.11) se observa que existe una contribución de ambos momentos, siendo significativo M_y en la coordenada z y M_z a lo largo de la coordenada y ya que el producto de inercia es mucho menor al de cualquier momento de inercia. La línea neutra venía definida como la zona de la sección donde no había deformaciones, pero dado que éstas son proporcionales en la zona elástica (figura 2.7) a las tensiones, en esta zona $\sigma_x = 0$.

2.1.3. Flujo de cortante

Para tratar las tensiones tangenciales se hace uso de un fenómeno denominado flujo, que representa la fuerza de cortante por unidad de longitud.

$$q = \tau \cdot t \quad (2.12)$$

Este concepto es ampliamente utilizado en secciones de pared delgada puesto que permite ver como se distribuyen estas fuerzas a lo largo de la sección independientemente del espesor. Se reformula la ec. (2.9) sin incluir la carga aplicada.

$$t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (2.13)$$

De la ec. (2.13), despejando el flujo de la ecuación se puede obtener la expresión de este en base a la tensión normal. Para ello, se ha de contar con la distribución de tensiones a lo largo de la viga o una expresión que permita calcularla.

$$q = q_0 + t \int_0^s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ds \quad (2.14)$$

Este flujo incluye una parte variable con la sección atribuido a la variación de tensión, es decir al cortante y otra constante, asignada al torsor suponiendo espesor constante. Si se supone un material elástico-lineal se puede hacer uso de la ec. (2.11), la de Navier

generalizada, en la ec. (2.14) para desarrollar una expresión del flujo. En este caso se hacen uso de ecuaciones de compatibilidad que se explicarán en la sección 2.2.3.

$$\begin{aligned}
 q &= q_0 + t \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{N}{A} + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot z + \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot y \right] ds = \dots \\
 &\dots = q_0 + t \int_0^s \frac{1}{I_d} \left[\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} I_z + \frac{\partial M_z}{\partial x} I_{yz} \right) \cdot z + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} I_y + \frac{\partial M_y}{\partial x} I_{yz} \right) \cdot y \right] ds = \dots \\
 &\dots = q_0 + \frac{1}{I_d} \left[(Q_z I_z - Q_y I_{yz}) \cdot t \int_0^s z ds - (Q_y I_y - Q_z I_{yz}) \cdot t \int_0^s y ds \right] \\
 &\dots = q_0 + \frac{1}{I_d} [(Q_z I_z - Q_y I_{yz}) \cdot m_y(s) - (Q_y I_y - Q_z I_{yz}) \cdot m_z(s)] \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

La ec. (2.15) indica que el flujo viene generado por los cortantes y es proporcional al momento estático siendo nulo en los bordes abiertos. Análogamente a la ecuación de Navier, el cortante Q_z tiene más importancia en la dirección z y Q_y en la dirección y . Es una magnitud que respeta el principio de superposición por lo que se puede estudiar (y en algunas situaciones es necesario) independientemente el flujo generado por Q_z y el generado por Q_y .

En la expresión de flujo se distinguen dos partes una parte constante q_0 y otra variable dependiente del momento estático. El flujo tiene una magnitud y una dirección a lo largo de la sección, este es conservativo y funciona de forma similar a los circuitos eléctricos; existen algunas secciones que tienen nodos donde convergen tres o más tramos y se tiene que cumplir que el flujo saliente del nodo es de igual magnitud que el flujo entrante. Esto se tiene en cuenta con la parte constante: si a la entrada de un nodo el flujo es $q(s_1) = q_1$, el flujo saliente del nodo, al inicio del nuevo tramo, $q(0) = q_1$. También, como se verá más adelante, en el flujo total en secciones multicelulares la parte de q_0 es el flujo asignado a la celda tras el cálculo del flujo abierto, aunque esto ya se tratará en la sección 4.7.2.

Como se ha mencionado antes el flujo de cortante tiene una parte achacada al cortante y otra al torsor. El flujo de cortante debido a torsor es debido a la existencia de un momento torsor producido porque la carga aplicada tiene un brazo de palanca alrededor del cual genera el momento o por torsor aplicado. Esto significará que existirá un punto donde al aplicar la carga no produce la torsión representado en la figura 2.8.

Este punto se denomina *centro de esfuerzos cortantes* o *cec* y su posición en principio no es intuitiva, y depende de la geometría de la sección. Algunas de las certezas que existen en su posición es que si la sección contiene un plano de simetría el *cec* se encontrará en este (si contiene dos, se encontrará en la intersección de ambos coincidiendo con el centro de gravedad); si la sección tiene antisimetría o simetría puntual, se encontrará en el punto de simetría (coincidirá también con el centro de gravedad); si la sección es cerrada se encontrará en el interior de esta; y si la sección es abierta, se encontrará en la parte opuesta a la apertura como se observa en la figura 2.8.

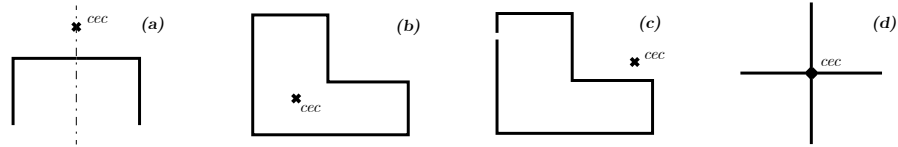


Figura 2.8 – Centro de esfuerzos cortantes en diferentes secciones. (a) En el eje de simetría, (b) dentro de una sección cerrada, (c) en lado contrario a la abertura, (d) en la intersección de ambos ejes de simetría

2.1.4. Deformaciones

Las fuerzas y cargas sufridas por una viga causan movimientos internos en la viga a los que se le denominan deformaciones. Estas deformaciones pueden ser longitudinales, ε , y suelen estar asociadas a la tensión normal o tangenciales/angularares, γ , asociadas a la tensión de cortante.

Suponiendo una longitud característica L , se define una deformación longitudinal como la relación infinitesimal entre la elongación de la longitud y la propia longitud.

$$\varepsilon = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{L} \quad (2.16)$$

Estas deformaciones se pueden dar en los tres ejes, siendo u , v y w las elongaciones de la viga en las respectivas direcciones, pudiendo definir las deformaciones longitudinales como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.17)$$

Estas ecuaciones parten de la premisa de que las variaciones de longitud son pequeñas y al igual que en el caso de las tensiones, se trunca el primer termino de la serie de Taylor que describe esta variación. Las alas de los aviones no sufren grandes deformaciones fuera de fenómenos no lineales como el flameo o la flexión en alas de alta esbeltez, por lo cual se puede dar por válida esta hipótesis.

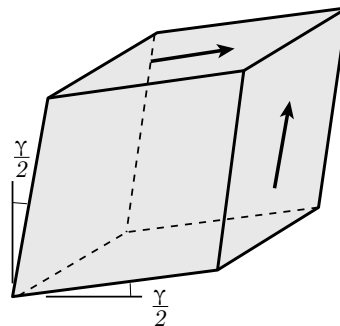


Figura 2.9 – Representación de las deformaciones tangenciales de una paralelepípedo.

Por otra parte, las deformaciones tangenciales son las variaciones del ángulo de dos líneas perpendiculares en un punto. tal como indica la figura 2.9. En base a la definición dada, las deformaciones tangenciales se definen como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.18)$$

En secciones de pared delgada, de igual manera, tensiones normales σ producen deformaciones longitudinales ε y tensiones de cortante τ producen deformaciones tangenciales γ .

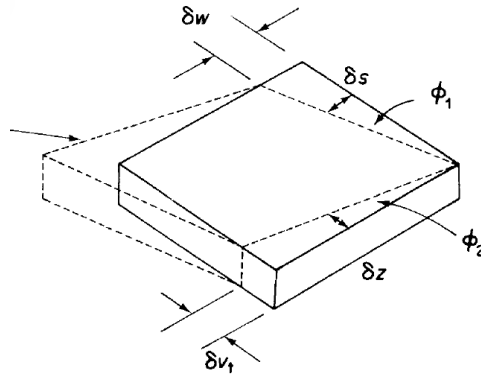


Figura 2.10 – Deformaciones tangenciales de una porción de sección de pared delgada.

En la porción rectangular como la de la figura 2.10, la deformación γ viene definida por los desplazamientos u y v_t por lo que la deformación viene dada por una suma de ambos ángulos ϕ quedando la expresión como [8]:

$$\gamma = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} \quad (2.19)$$

2.1.5. Solicitaciones

Las sollicitaciones son los esfuerzos internos que sufre una viga inducidos por las cargas. Se generan para mantener en equilibrio de fuerzas y momentos la viga y son una manifestación de los esfuerzos internos antes estudiados. Existen de varios tipos tales como los axiales o los flectores y resultan de una determinada distribución de tensiones u otra (Figura 2.2).

- **Axiales.** Son resultado, principalmente, de las tensiones normales que siendo transversales si son uniformes a la sección pueden generar compresiones o tracciones en todo el área resultando en un axil. Es decir, si σ es constante a lo largo de una sección de área A se genera una fuerza resultante $N = \sigma \cdot A$. Si esas fuerzas estiran la viga se produce una tracción, pero si por lo contrario la comprimen, se produce tracción.
- **Transversales.** Son fuerzas internas paralelas a la sección fruto del deslizamiento entre las propias secciones cuando la viga se deforma. Se manifiestan en forma de tensiones tangenciales cuya componente vertical se recoge en un cortante Q_z y cuya componente horizontal se recoge en un cortante Q_y .

- **Flectores.** Si una carga deforma la viga causando una curvatura en la misma se generan momentos M_z y M_y . Esta deformación crea una distribución de tensiones normales no uniformes, casi siempre lineales, que da lugar un momento alrededor de la línea neutra que se puede descomponer uno atribuido al eje y en el plano $x - z$ y otro al eje z en el eje $x - y$.
- **Torsores.** Son momentos recogidos en el plano de la sección. Se generan cuando una carga no está aplicada en el *cec* generando un giro de esta. La torsión también viene generada por las tensiones tangenciales que generan un momento alrededor del *cec*. Ante un torsor determinado un mayor momento polar y módulo de cortante el giro de la sección es menor.

Se pueden dar combinaciones de estas sollicitaciones como el caso de la flexo-torsión o la torsión mixta.

Diagramas

Para una viga determinada es necesario obtener los cortantes y flectores y su variación producidos por todas las cargas. Estas vigas suelen estar apoyadas, apoyos los cuales generan reacciones para mantener la viga en equilibrio respecto a estas fuerzas externas.

$$\sum F = 0 \qquad \sum M = 0 \qquad (2.20)$$

El sumatorio de todas las fuerzas ejercidas y las reacciones deben hacer un total de cero en todas las direcciones y los momentos respecto a cualquier punto también han de ser nulos. El número de reacciones depende del tipo de apoyo y de qué movimientos se restrinjan, en este proyecto las alas se tratarán como vigas en voladizo, por lo que se modelarán como empotradas restringiendo movimientos horizontales, verticales y giros generando fuerzas horizontales, verticales y momentos de reacción.

Una vez generadas las reacciones para equilibrar las fuerzas externas se producen sollicitaciones internas que mantienen el equilibrio interno de la viga. La evolución de estas sollicitaciones es lo que dictamina la forma del diagrama de cortantes y flectores (sección 2.2.3).

Torsión

La torsión es diferente para secciones abiertas y secciones cerradas, pero dado que en este proyecto se tratará únicamente las segundas, no se presentará la teoría de secciones abiertas. Suponiendo sección unicelular se somete únicamente a torsión, sin cargas axiales ni flectores en la ec. (2.13) se reduce a que el flujo no varía a lo largo del recorrido, $\partial q / \partial s = 0$. Para que esto se cumpla la sección ha de ser cerrada ya que en secciones abiertas el flujo sería nulo. Si además el espesor es constante la tensión tangencial también lo será.

La torsión generada es un momento por lo que el producto de cada diferencial de flujo con el recorrido que abarca (resulta en una fuerza) multiplicado por la distancia perpendicular genera un diferencial de torsor.

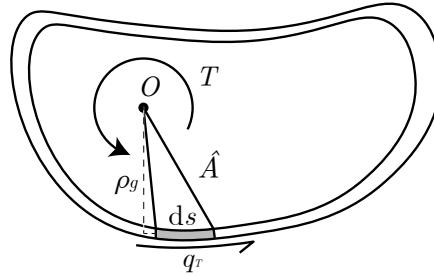


Figura 2.11 – Torsión generada por flujo de torsor.

En la figura 2.11 se observa que el producto del recorrido abarcado ds y la distancia ortogonal o brazo de palanca ρ_g resulta en el doble del área triangular encerrada. Si se integra en toda la sección y la deducción anterior se lleva a todo el recorrido el resultado es el doble del área encerrada multiplicada por el flujo. El flujo puede salir de la integral dado que antes se ha concluido que es constante.

$$T = \oint \rho_g q \, ds = 2\hat{A}q \quad (2.21)$$

La sección puede ser tan complicada como se quiera y puede dar lugar a que el punto de referencia O se encuentre fuera de la sección dando lugar a áreas negativas o a diferenciales de momentos en sentido antihorarios. La dirección de s sobre la que se calcula el área encerrada es arbitraria y si resulta que el torsor resultante es negativo será que la dirección elegida es la incorrecta [8].

2.2. Ecuaciones de la viga

2.2.1. Ecuaciones constitutivas

Se entienden por ecuaciones constitutivas en teoría de elasticidad aquellas que relacionan tensión sufrida con deformación ejercida. Los materiales que cumplen con la Ley de Hooke, es decir son materiales elástico-lineales, tienen una relación proporcional entre estas dos magnitudes; también se ha de cumplir que los materiales han de ser isotrópicos, es decir, que sus propiedades no varíen dependiendo de la dirección.

La magnitud que relaciona, de manera lineal, una magnitud de tensión y otra de deformación es el módulo elástico. La tensión normal y la deformación lineal se relacionan con el módulo de Young, y la tensión de cortante y la deformación angular es el módulo de cortante.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.22)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.23)$$

En estas ecuaciones el termino ν es la que relaciona deformación lateral y longitudinal ante una carga. Indica el estrechamiento que sufre una sección lateralmente cuando se estira longitudinalmente.

En este proyecto sólo se usarán la deformación ε_x , que en el modelo Ramberg-Osgood su ecuación constitutiva es:

$$\frac{\varepsilon E}{\sigma_n} = \frac{\sigma}{\sigma_n} + \frac{1}{m} \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^m \quad (2.24)$$

donde σ_n es la tensión a la que la tangente de la curva tensión-deformación tiene la mitad de la pendiente que el tramo elástico, y m un factor de forma de la curva. Son valores propios de cada material, al igual que el módulo elastico y dictaminan la forma de la curva. Este modelo da también una fórmula para el coeficiente de Poisson:

$$\nu = \frac{\nu_e + \nu_p \frac{1}{m} \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^{m-1}}{1 + \frac{1}{m} \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)} \quad (2.25)$$

En esta ecuación ν_e es el módulo de Poisson elástico de cada material y ν_p el plástico al que suelen tender los materiales cuando plastifican, que se asumirá 0,5 en todos los casos (figura 2.12). Estas ecuaciones son implícitas, es decir, no tienen solución directa y se tienen que resolver por métodos iterativos.

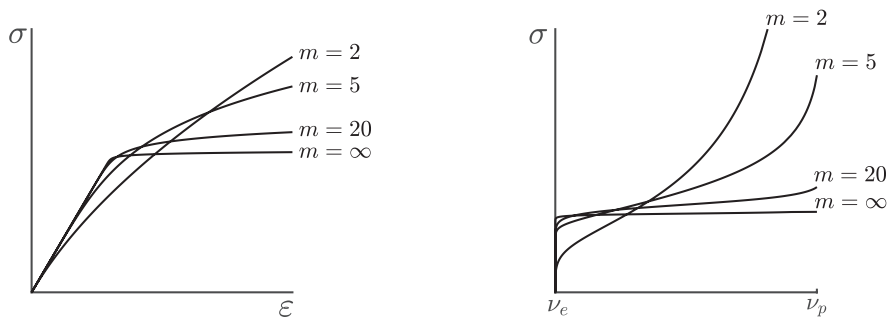


Figura 2.12 – Variación de la gráfica tensión-deformación con el factor m (izquierda). Variación del módulo de Poisson con el factor m desde el módulo de Poisson elástico hasta el plástico (derecha).

2.2.2. Ecuaciones cinemáticas

Una vez relacionados esfuerzos internos y deformaciones, las ecuaciones cinemáticas son aquellas que relacionan esas deformaciones con gradientes de desplazamiento. En un modelo elástico-lineal basta con unir la ecuación generalizada de Navier (2.11) con la constitutiva

(2.22). En el caso de que, por ejemplo, la sección fuese rectangular simétrica de dimensiones $2h \times b$, y únicamente con un momento M_y aplicado, la ecuación cinemática quedaría así:

$$\varepsilon_x = \frac{M_y}{E I_y} z$$

Esta variación es lineal por lo que se puede suponer una tensión máxima o deformación máxima en $z = h$ lo cual permite reformular la ecuación anterior en:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{x,max}}{h} z \qquad \varepsilon_{x,max} = \frac{M_y h}{E I_y}$$

No existe una relación directa en modelos no lineales por eso se deben acudir a métodos iterativos que permitan calcular la distribución de deformación. Esto se explicará más adelante en la sección 4.7.1.

2.2.3. Ecuaciones de equilibrio

Existen dos tipos de ecuaciones de equilibrio, las de la viga y las diferenciales. Las ecuaciones de equilibrio de vigas relacionan las sollicitaciones con las cargas externas y las diferenciales relacionan las sollicitaciones entre sí.

Ecuaciones de equilibrio de viga

Las ecuaciones de vigas (2.20) establecen el equilibrio de fuerzas y momentos, que dan lugar a los diagramas. Estos equilibrios se han de completar no solo de forma externa (reacciones de los apoyos), sino también internamente.

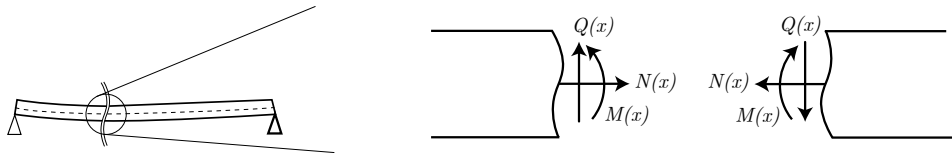


Figura 2.13 – Corte trasversal a una viga para visualizar los pares de sollicitaciones internos.

Las sollicitaciones internas de la viga van a pares ya que en base a la figura 2.13 se ha de mantener el equilibrio interno en la viga por medio de acción reacción aunque estos pares de fuerzas no siempre son iguales. Como se ha visto antes y en la figura 2.2 existe una pequeña variación expresada en el primer término de la serie de Taylor que indica una gradualidad de las sollicitaciones. Haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio (2.20)

cuando se esta evaluando el interior de una viga:

$$\sum F = \sum R_i + \sum P_i + \sum (p_i(x) \cdot d_{q,i}) + \sum Q(x) = 0$$

$$\sum M_A = \sum (R_i \cdot l_{R,i-A}) + \sum MA_i + \sum (P_i \cdot l_{P,i-A}) \dots$$

$$\dots + \sum (p_i(x) \cdot d_{q,i} \cdot l_{q,i-A}) + \sum M_i + \sum m_p(x) + \sum M(x) = 0$$

La suma de fuerzas equivale a la suma de reacciones, de fuerzas puntuales, de cargas repartidas y de solicitaciones de cortante. Por su parte los momentos totales en un punto A son la suma del momento generado por las reacciones de fuerzas, las reacciones de momento, el momento generado por las fuerzas puntuales, el momento generado por las cargas repartidas, los momentos puntuales, las distribuciones de momentos y las solicitaciones de momentos.

Normalmente, las incógnitas suelen ser las solicitaciones internas por lo que valdría con despejarlas una vez obtenidas las reacciones. Las solicitaciones de momentos se pueden obtener a partir de las de vigas con las ecuaciones de equilibrio diferenciales.

Ecuaciones de equilibrio diferenciales

Suponer una rebanada de viga como la de la figura 2.2 y se aplican equilibrio de momentos en el extremo izquierdo de la porción estableciendo positivo el momento antihorario.

$$\left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dx + p \cdot \frac{dx^2}{2} - M = 0,$$

reagrupando:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x} - Q \right) dx - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{p}{2} \right) dx^2 = 0$$

Si se desprecian términos de segundo orden se llega a la conclusión de que la variación del momento a lo largo del eje longitudinal resulta en el cortante. Ajustando signos en las direcciones z e y resulta en:

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} = -Q_y \qquad \frac{\partial M_y}{\partial x} = Q_z \qquad (2.26)$$

De igual manera se puede encontrar otra equivalencia si se supone un equilibrio de fuerzas, positivas "hacia arriba":

$$Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) + p dx = 0,$$

reagrupando:

$$\left(p - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx = 0,$$

Se llega a la conclusión de que la variación del cortante a lo largo de la viga resulta en la expresión de la carga. Ajustando en las direcciones z e y resulta en:

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} = -p_z \qquad \frac{\partial Q_y}{\partial x} = p_y \qquad (2.27)$$

Como se había adelantado antes, una vez encontrada la expresión de la variación del cortante a lo largo de la viga y con el momento de reacción de la viga empotrada se puede obtener la expresión de la variación de momento a lo largo de la viga usando la ec. (2.26)[8].

2.3. Desplazamientos

Tras obtener solicitaciones, esfuerzos y posteriormente deformaciones de la viga, se debe determinar cómo se mueve. En condiciones de flujo libre el ala, principalmente, flecta y gira debido a la sustentación y la resistencia.

La flexión se produce debido a que está sometida a una diferencia de presiones que genera fuerzas en la dirección vertical y transversal, lo que hace que la flexión sea resultado de dos fuerzas. La fuerza en la dirección y será menor puesto que la resistencia es de menor orden que la sustentación y rigidez es mayor, debido a la inercia de los perfiles aerodinámicos. Además el hecho de que esas fuerzas no estén aplicadas en el *cec* genera una torsión en el ala.

La viga está empotrada por lo que en el apoyo tanto la flexión como el desplazamiento serán nulos, y en el extremo el momento será nulo por tratarse de un borde libre. Esto dará como resultado que se produzca un desplazamiento presumiblemente mayor a medida que se recorra la envergadura. La variación de la geometría alar condicionará las fuerzas aerodinámicas que tendrían que ser recalculadas produciendo nuevas deformaciones lo que entraría en un proceso iterativo hasta converger y en el terreno de la aeroelasticidad dinámica. Para este proyecto, se considerará que los desplazamientos infligidos serán pequeños, por lo que esta variación no será relevante.

2.3.1. Flexión

La forma de obtener los desplazamientos depende de la teoría de materiales que se use. Para modelos elasticolineales, constantes y homogéneos se puede usar la ecuación de la viga de Euler-Bernoulli, ec. (2.1), que relaciona la flecha o deformación de la viga con las cargas aplicadas. Se ha de integrar esa ecuación imponiendo condiciones de contorno tales que la derivada tercera de la flecha es el cortante, la derivada segunda el momento y la derivada el giro. Por lo que se ha de aplicar las condiciones de contorno del empotramiento tanto las reacciones como los desplazamientos nulos que se producen ahí y en borde libre

los momentos y cortantes son nulos.

$$\begin{aligned}
 EI \frac{d^3\omega}{dx^3} \Big|_{x=0} &= R_A & EI \frac{d^2\omega}{dx^2} \Big|_{x=0} &= MA_A & \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=0} &= 0 \\
 \omega \Big|_{x=0} &= 0 & EI \frac{d^3\omega}{dx^3} \Big|_{x=L} &= 0 & EI \frac{d^2\omega}{dx^2} \Big|_{x=L} &= 0
 \end{aligned}$$

Para un modelo no lineal, en la sección 2.2.2 se calculaba la distribución de tensiones y deformaciones y para ello se ha de usar una curvatura. A cada sección de la viga le corresponde una curvatura que es la derivada segunda de la flecha. Una vez obtenida la distribución de curvatura se ha de integrar utilizando las últimas dos condiciones de contorno anteriores (ver sección 4.8).

2.3.2. Giro

El giro de una sección viene determinado por el momento torsor sufrido, la geometría de la sección y el material de esta. En primer lugar, partiendo de la ecuación constitutiva (2.23) para x se puede expresar la tensión tangencial en base a la ec. (2.12) y la deformación angular en base a la ec. (2.19).

$$q(s) = Gt \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} \right) \quad (2.28)$$

Este flujo (debido a torsor) será constante en una sección cerrada unicelular de espesor invariante y constante por cada malla en una sección multicelular. Suponiendo torsión pura en una viga de sección constante y homogénea no variará a lo largo de la envergadura

$$\frac{\partial q(s)}{\partial x} = Gt \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2} \right) = 0,$$

sin embargo ni el espesor, ni módulo de cortante serán nulos por lo que el término entre paréntesis se anulara, pero, además de que es torsión pura, no hay deformación longitudinal ($\partial u / \partial x = 0$):

$$\frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2} = 0 \quad (2.29)$$

Quedará por establecer el valor de v_t . En la figura 2.14 se observa que existe un desplazamiento inducido por el torsor puro descrito como $p\phi$ y otro desplazamiento inducido por las deformaciones en las direcciones z e y , quedando la expresión de v_t como:

$$v_t = \rho_g \phi + v \cos \psi + w \sin \psi$$

Si se sustituye esta última expresión en la ec. (2.29) se tiene que la variación tanto del giro, como de las deformaciones en ambas direcciones son lineales:

$$\frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2} = \rho_g \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dx^2} \cos \psi + \frac{d^2 w}{dx^2} \sin \psi = 0$$

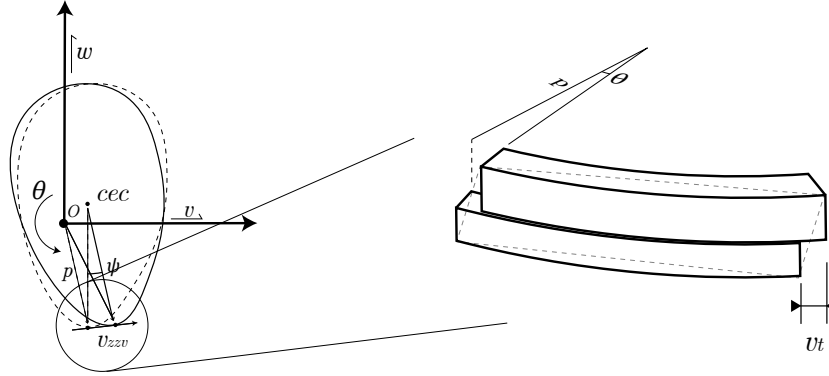


Figura 2.14 – Movimiento relativo y entre secciones y deformación producidos por un giro infinitesimal.

De esa expresión cada una de las componentes se ha de anular.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0$$

Volviendo a la ec. (2.28) se sustituye la expresión de v_t y se integra a lo largo de s :

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{q(s)}{Gt} ds &= \int_0^s \frac{\partial u}{\partial s} ds + \int_0^s \rho_g \frac{d\phi}{dx} ds + \int_0^s \frac{dv}{dx} \cos \psi ds + \int_0^s \frac{dw}{dx} \sin \psi ds = \dots \\ &= \int_0^s \frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{d\phi}{dx} \int_0^s \rho_g ds + \frac{dv}{dx} \int_0^s \cos \psi ds + \frac{dw}{dx} \int_0^s \sin \psi ds = \dots \\ &= \int_0^s \frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{d\phi}{dx} \int_0^s \rho_g ds + \frac{dv}{dx} \int_0^s dy + \frac{dw}{dx} \int_0^s dz = \dots \\ &= (u_s - u_0) + \frac{d\phi}{dx} 2\hat{A} + \frac{dv}{dx} (x_s - x_0) + \frac{dw}{dx} (z_s - z_0) \end{aligned}$$

Si se contempla la sección entera, es decir que la integral es una integral cerrada se tiene que [9]:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{q}{2\hat{A}} \oint \frac{1}{Gt} ds = \frac{T}{4\hat{A}^2} \oint \frac{1}{Gt} ds \quad (2.30)$$

Otra manera de abordar este problema es usando el *Principio de los Trabajos Virtuales* donde se iguala el trabajo real ejercido por torsor unitario al trabajo real ejercido por la tensión de cortante. Se hace uso de la ec. (2.23) y la ec. (2.12) para definir la deformación real que produce un giro por unidad de longitud $d\phi$.

$$\gamma = \frac{q}{Gt} \leftrightarrow d\phi$$

En el sistema virtual un par virtual unitario ($\bar{T} = 1$) produce el giro $d\phi$. Haciendo uso de las ecs. (2.12) y (2.21) se puede expresar la tensión tangencial en función del torsor. De

igual manera la deformación angular se puede expresar en función del torsor.

$$\bar{T} = 1 \quad \leftrightarrow \quad \tau = \frac{\bar{T}}{2\hat{A}Gt} \quad \leftrightarrow \quad \gamma = \frac{T}{2\hat{A}t}$$

El trabajo virtual es el producto del torsor con el ángulo producido y el real es la integral de volumen del producto del esfuerzo cortante con la deformación producida. Estos dos trabajos deben ser iguales y se supondrán las propiedades invariantes con x . El diferencial de volumen es $dV = t ds dx$:

$$1 \cdot d\phi = \int_V \tau \cdot \gamma dV = \int_0^C \left[\int_x^{x+dx} \frac{1}{2\hat{A}Gt} \frac{T}{2\hat{A}t} t dx \right] ds = \frac{T dx}{4\hat{A}^2} \int_0^C \frac{1}{Gt} ds$$
$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4\hat{A}^2} \oint \frac{1}{Gt} ds$$

El giro obtenido es el mismo que en la ec. (2.30). En vigas con sección variable los elementos no deben salir de la integral teniendo en cuenta que el torsor y el área cerrada sí que es constante en la sección [11].

2.4. Fundamentos aerodinámicos

Para el cálculo de vigas son necesarias que se apliquen cargas que estresen y se deformen. En un ala estos esfuerzos vienen provocados porque el ala está en flujo libre y se generen fuerzas aerodinámicas, para ello se asumen una serie de hipótesis:

- **El ala vuela en flujo libre.** El flujo al que será sometido el ala será uniforme e invariable en todo su recorrido hasta el borde de ataque. Se considerará una condición de crucero.
- **Flujo simétrico.** El flujo no tendrá incidencia ni componente lateral, contará únicamente con ángulo de ataque.
- **Incompresible.** El número de Mach no podrá superar $M = 0,3$ para evitar consideraciones de compresibilidad.
- **Atmósfera ISA.** A la hora de calcular la densidad y número de Mach se considerará la atmósfera internacional ya sea estableciendo la altitud de vuelo o ajustando los demás parámetros en base a una densidad manual.
- **Aerodinámica lineal.** Posteriormente se explicará el método numérico VLM que se utilizará, pero el ámbito de este método es la aerodinámica lineal donde la relación entre el ángulo de ataque y las fuerzas es lineal.
- **Flujo potencial.** El flujo potencial se caracteriza por ser incompresible, no viscoso e irrotacional lo que implica que la velocidad del flujo deriva de un potencial.

2.4.1. Generación de fuerzas

La aerodinámica estudia la interacción de fluidos gaseosos con cuerpos sólidos en un movimiento relativo entre ambos. Uno de los objetivos de esta y el principal de esta sección es cuantificar las fuerzas originadas de esta interacción. Para estudiar esta interacción se considerará en primer lugar un perfil bidimensional posteriormente extrapolarlo a un ala tridimensional.



Figura 2.15 – Isolíneas de flujo alrededor de un perfil.

El perfil aerodinámico es alargado en dirección del flujo para que la transición de este cuando se encuentre el flujo sea más suave; el borde de ataque es más redondeado y el borde fuga más agudo. La parte inferior del perfil se denomina intradós, y la superior extradós hacia donde el perfil puede contar con cierta curvatura para generar más sustentación o ser simétrico.

La curvatura del perfil hace que cuando el perfil se someta a un flujo este tenga que adherirse por Efecto Coanda a la parte posterior del extradós, acelerando la velocidad del fluido y disminuyendo la presión por el principio de Bernoulli. Algo que no sucede en la parte inferior donde el flujo va más lento en relación a la parte superior siendo mayor la presión. Si el perfil es simétrico esto no ocurre ya que el flujo se encuentra lo mismo tanto en el extradós como en el intradós lo que imposibilita que se genera una diferencia de presiones.

Un perfil con curvatura o sin curvatura puede enfrentar al fluido con una actitud diferente a la paralela incrementando el ángulo de ataque relativo entre la línea de sustentación nula y la dirección del flujo (positivo si el ángulo de ataque va "hacia arriba"). El ángulo de ataque hace que el flujo tenga que readherirse al perfil por Efecto Coanda y disminuyendo la presión en el extradós.

La diferencia de presiones sobre una superficie genera una fuerza sustentación en dirección perpendicular al flujo. Esta fuerza es proporcional a la densidad del fluido al ángulo de ataque y al cuadrado de la velocidad. La forma del perfil condicionará la influencia del ángulo de ataque por medio de un coeficiente proporcional.

Además de la sustentación existe una resistencia al avance del ala por presión del fluido con el perfil y por fricción con la superficie. Además en el caso tridimensional se producirá una resistencia inducida por la propia sustentación.

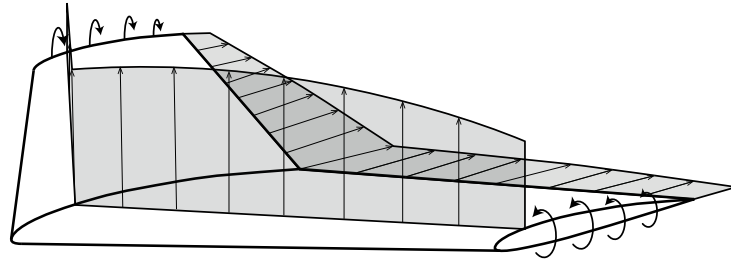


Figura 2.16 – Ala tridimensional sometida a sustentación, resistencia y vórtices de punta de ala.

2.4.2. Alas tridimensionales

El ala tridimensional es una sucesión de perfiles bidimensionales haciendo que el cálculo de fuerzas sea similar. La fuerza de sustentación es resultado del producto de la presión dinámica por el coeficiente sustentación dependiente de la forma del perfil y de la actitud angular del ala frente al flujo de aire. Sin embargo, no se puede analizar el ala como una sucesión en sí perfiles independientes, ya que estos interactúan entre sí y estas interacciones no se pueden desacoplar.

Se generan fenómenos tridimensionales en un ala entre los que destacan los vórtices de punta de ala. El aire como tiende a ir de mayor presión (intradós) al menor presión (extradós), en la punta de ala dibuja un vórtice tratando de hacer este recorrido recorrido (figura 2.16), añadiendo una componente de flujo a la ya existente lo que resulta en un ángulo de ataque efectivo menor como se muestra en la figura 2.17 ya que la velocidad resultante tiene una dirección diferente.

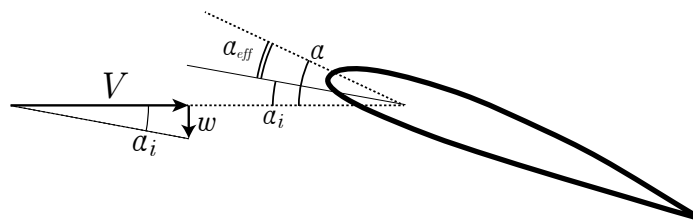


Figura 2.17 – Ángulo de ataque efectivo.

Este efecto es notorio en los extremos y menor en el centro del ala debido a la distancia a las puntas. Esto resulta en una distribución de sustentación, normalmente, máxima en el centro aunque esto también depende del estrechamiento del ala (sección 4.5).

3

Estructura alar

Una vez presentados los fundamentos teóricos que se van a seguir y a falta de explicar como se implantarán, en este apartado se explicará la estructura alar que se usará. Este ala constará de tres componentes diferenciando: piel, costillas y largueros. Cada uno de ellos tiene sus funciones que se describirán a lo largo del capítulo y se comprobarán cuando se implemente el programa.

3.1. Geometría externa

El diseño de un ala se debe exclusivamente a su función, que dependiendo de esta el ala tendrá una forma u otra. El diseño de alas normalmente se hace por secciones a lo largo de la envergadura variando la cuerda y las propiedades del ala. El ala puede tener otras formas poco convencionales como la forma cónica o las aeronaves llamadas de fuselaje integrado.

En este proyecto se trabajará con alas trapezoidales ya que permiten modelizar y simular la mayor parte de alas existentes además de que son dimensionables de forma sencilla. El ala trapezoidal es un ala cuya cuerda alar varía linealmente a lo largo de la dirección transversal al fuselaje quedando en una forma en planta de trapecio con bordes de ataque y salida lineales. Para definir el ala se usan diferentes parámetros adimensionales:

- **Esbeltez (AR).** Se describe como el cociente o la relación entre el cuadrado de la envergadura con la superficie alar. Indica lo alargada que es una ala, Cuanto mayor sea este parámetro mayor será la envergadura en proporción al área por lo cual la cuerda será menor y eso hace ver que el ala sea más delgada/esbelta.
- **Estrechamiento (λ).** Es el parámetro que indica la tasa de variación de la cuerda del ala y se entiende como la relación entre la cuerda en la raíz (c_r) del ala y la cuerda en la punta (c_t). Este tiene que ser menor o igual a la unidad resultando siempre un una cuerda c_t menor o igual que c_r .
- **Flecha (Γ).** Es el ángulo formado por la línea transversal al fuselaje del avión con algún lugar geométrico del ala. Normalmente se toma el borde de ataque del ala como línea de referencia para medir la flecha (Λ_{LE}). La función de otorgar más o menos flecha tiene que ver con las velocidades que alcanza el avión: en velocidades altas se requiere que el flujo que va normal al borde de ataque sea lo menor posible para retrasar los efectos de compresibilidad y resistencia por divergencia.
- **Diedro (Γ_d).** Es el ángulo que forma el ala con un plano horizontal. No suele ser muy elevado rondando los $\pm 5^\circ$ y ayuda en la estabilidad lateral de la aeronave si este sufre una perturbación en su dinámica lateral ya que genera un momento que hace estable el ala permitiéndolo volver a su posición de equilibrio.
- **Torsión geométrica (τ_g).** Como se ha mencionado en la sección 2.4.2 el ala tridimensional se entiende como una sucesión de perfiles aerodinámicos, pero estos perfiles

no tienen que estar orientados de manera uniforme respecto al flujo si no que esta orientación puede variar, normalmente linealmente alrededor de $\pm 10^\circ$. Esto se usa principalmente para impedir que las puntas alares, donde se ubican los alerones, entren en pérdida a la misma vez que el resto del ala permitiendo una ventana para poder restaurar el control de la aeronave.

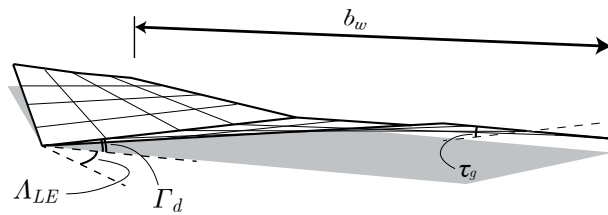


Figura 3.1 – Parámetros geométricos angulares en un ala trapezoidal.

Los parámetros anteriores son adimensionales, por lo que permiten dar una forma al ala pero no determinar sus dimensiones. Es por ello que se ha de elegir una medida que permita dotar de unidades al ala y que las demás medidas dimensionales dependan de esta. Principalmente suele ser la envergadura (b_w) o la cuerda. En este caso particular se usará la cuerda en la raíz y de ella se derivarán las demás dimensiones con el uso de los parámetros adimensionales.

$$c_t = \lambda \cdot c_r \quad b_w = \frac{AR}{2}(1 + \lambda)c_r \quad S_w = \frac{AR}{4}(1 + \lambda)^2 c_r^2$$

Otro aspecto a definir es el perfil utilizado, que afectará al diseño de la caja de torsión, al tamaño de los largueros y las fuerzas soportadas (sección 2.4.1). Puede ser más o menos ancho o con mayor o menor curvatura, lo que deflectará el flujo de una manera u otra.

Los gran mayoría de tipos de aeronaves que existen a día de hoy se pueden describir con combinaciones de estos parámetros descritos dado que el ala trapezoidal se ajusta bastante bien este todo tipo de aeronaves.



Figura 3.2 – Avión A350-900 de Vietnam Airlines [1]. Ala con flecha alta, diedro pequeño, estrechamiento moderado

Las aeronaves comerciales tienen alas con estrechamiento moderado o alto, gran flecha y perfiles con espesor medio supercríticos. Esto se debe a que vuelan a velocidades al mach crítico del perfil pudiendo generar una gran resistencia que generaría un consumo de combustible alto, algo contrario a los objetivos de este sector. También cuentan con cierto diedro para hacer frente a turbulencias laterales y cierta torsión en la punta para hacer frente a las pérdidas (figura 3.2).



Figura 3.3 – Avión Eurofighter Typhoon [2]. Ala delta, con baja esbeltez, alto estrechamiento y perfil fino

En aeronaves de combate es importante la velocidad, la maniobrabilidad y en algunos casos la furtividad. En el caso del Eurofighter de la figura 3.3 tiene un estrechamiento de casi 0, lo que da lugar a un ala delta. Este tipo de alas proporciona la maniobrabilidad necesaria a este caza de combate ya que permite alcanzar altos ángulos de ataque y dada su alta flecha de borde de ataque y perfil de bajo espesor permite reducir la resistencia a altas velocidades.



Figura 3.4 – Avión Piper PA28-181 [3]. Ala recta, sin flecha, perfil moderado o grueso y sin estrechamiento.

El Piper PA28-181 (figura 3.4) tiene unas alas rectangulares (o semi-rectangulares), que aparte de la facilidad de manufacturación, son más predecibles en situaciones de críticas como la pérdida adecuado para pilotos de poca experiencia y reducen la resistencia inducida. El diedro ayuda en la estabilidad lateral al igual que en las aeronaves convencionales y con un perfil aerodinámico adecuado en términos de sustentación y resistencia [12].

3.2. Estructura interna.

Una vez definida la forma del ala queda por ver aquellas de su estructura semimonocasco, que le proporcionan la mayor parte de la rigidez ante los esfuerzos ejercidos. Las alas modernas son muy complejas y a medida que avanza la modernización en el sector y se optimiza el rendimiento de estas se van añadiendo capas de complejidad estructural a estos dispositivos de sustentación. Aún así la estructura en términos generales es invariante ya que tiene que soportar principalmente los mismos esfuerzos de flexión y torsión:

- **Revestimiento o piel.** Su función principal es, aerodinámicamente, dar la forma al ala y, estructuralmente, repartir la carga entre todos los elementos rigidizadores. Es, junto a los largueros el principal elemento que actúa a cortante y que forman el cajón de torsión y ayuda en parte a soportar la flexión.
- **Largueros.** Son los principales elementos estructurales a flexión. Dado que la sustentación es la fuerza más significativa en este caso y va en dirección vertical, son elementos que tienen en esa dirección un momento de inercia mayor. La configuración más convencional de alas suele contar con dos de estos para formar un cajón de torsión.
- **Costillas.** Son elementos de refuerzo. Dispuestos de manera más o menos equidistante a lo largo del ala, dan la forma aerodinámica a este, además de distribuir las cargas aplicadas en el mismo ala y reducir la longitud efectiva de los larguerillos haciéndolos más resistentes a compresión y por ende al pandeo.
- **Refuerzos.** Son los larguerillos y los cordones. Su función principal es por un lado incrementar el momento de inercia de la estructura, haciéndola más resistente a flectores y por otro, ayudar en el pandeo de los paneles de la piel [9].

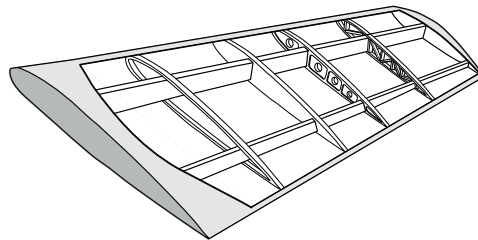


Figura 3.5 – Estructura interna alar simple. Muestra de diferentes formas de costillas.

Existen más elementos, como los elementos hipersustendadores, elementos de control, winglets, carenados, tanques de combustible... pero como tales los elementos estructurales *per se* son los antes enumerados. Cada uno de estos elementos se puede disponer de cierta manera dependiendo de la forma del ala y de los esfuerzos que se prevee soportar.

3.2.1. Revestimiento o piel

La gran mayoría de los aviones de hoy tienen estructura semimonocasco, es decir, que tienen la piel que envuelve y cubre la aeronave y elementos rigidizadores internos. Esta piel transmite esfuerzos de cortante principalmente a lo largo de todo el ala además de ser lo más suave posible para un mejor desempeño aerodinámico.

Recopilando el revestimiento tiene tres funciones principales: la más importante es transportar las cargas de cortante, soportar la torsión siendo parte del cajón de torsión y también sufre y resiste de las cargas generadas por flexión. La resistencia que proporcione este revestimiento dependerá principalmente del espesor, del material y de la forma del perfil.

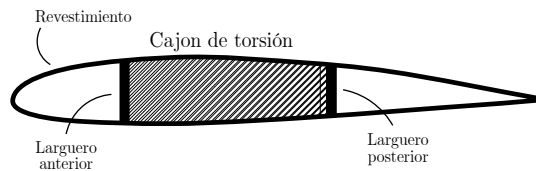


Figura 3.6 – Cajón de torsión típico, limitado por largueros y piel.

En la realidad la parte superior e inferior del cajón de torsión está compuesta por paneles reforzados que soportan las tracciones y compresiones generadas por las cargas normales a flexión. Este proyecto no se centrará en teoría de placas, por lo que el estudio de esta parte no se incluirá [4].

El parámetro geométrico de diseño principal de la piel es el espesor. Determinar la cantidad de espesor necesario es crítico ya que demasiado podría suponer un sobrepeso y un déficit podría suponer poca rigidez. Aún así son valores considerablemente pequeños en aeronaves comerciales, llegando casi a ni alcanzar un milímetro de espesor. Esto se debe a que los materiales con los que está hecho tienen módulos de rigidez muy altos, suficientes para soportar las cargas que genera la aerodinámica del avión. Algunos de estos valores típicos son [13] [14] [15]:

	Espesor piel
Boeing 747	1.80 mm - 2.20 mm
Airbus A320	0.90 mm - 1.10 mm
Douglas DC-8	0.12 mm - 0.13 mm
Grumman F-14	12.7 mm - 19.1 mm
MD F-15	12.7 mm - 25.4 mm
Aeronaves ligeras	0.38 mm - 0.64mm

Tabla 3.1 – Rangos de espesores de la piel para algunas aeronaves típicas [4].

La piel suele estar hecha de aleaciones metálicas, aleaciones que son muy precisas en sus composiciones y que pretenden cumplir estándares de rigidez y ligereza. Estas aleaciones suelen ser de aluminio ya que es ligero, resistente a la corrosión, económico y muy fácil de trabajar. También se usan algunas veces aleaciones de titanio para el borde de ataque debido a su alta resistencia aunque su uso suele estar más restringido a zonas de altas temperatura. Los aviones más modernos incorporan en su gran mayoría materiales compuestos.

Los aviones de combate si que necesitan espesores mayores como se observa en la tabla 3.1 dado que al maniobrar tienen que soportar cargas mayores y al tener un cociente empuje/peso muy superior al de otros tipos de aeronaves el problema del peso no es tan crítico. En cuanto a materiales se pueden observar en la tabla 3.2 son aleaciones de aluminio principalmente con zinc (Al 7xxx) y cobre (Al 2xxx), aunque existe el uso de titanio combinado con aluminio y el vanadio.

	Parte superior de la piel	Parte inferior de la piel
F-4	Al 7075-T651	Al 7075-T651
F-5E	Al 7075-T651	Al 7075-T7351
F-8	Al 7079-T6	Al 7075-T6
F-14	Ti-6Al-4V	Ti-6Al-4V
F-15	Al 2124-T851	Ti-6Al-4V
F-16	Al 2024-T851	Al 7475-T7351
F-18	Al 7050-T76	Al 7475-T7351

Tabla 3.2 – Materiales típicos de la piel para algunos aviones de combate [4].

3.2.2. Largueros

El larguero es el principal elemento a flexión del ala debido a su alta inercia en la dirección de la sustentación (mayor componente de carga ejercida). Suelen colocarse dos largueros que limitan el cajón de torsión donde además se almacena el combustible, aunque en algunas configuraciones estructurales existen alas multi-larguero.

El objetivo principal de los largueros es reducir la curvatura lo máximo posible al sufrir cargas de flexión. Las cargas aerodinámicas actúa sobre el revestimiento, que las transmite a las costillas y estas a su vez a las almas de los largueros en forma de cortante y distribuyéndola proporcionalmente a la rigidez mediante el módulo de Young o rigidez [4].

Los largueros pueden tener diferentes diseños, al igual que siempre dependerá de los requerimientos de rigidez, ligereza, almacenamiento de combustible... pudiendo ser desde largueros simples y de alma llena, celosías o reforzados (figura 3.7). El larguero no debe pandear por lo que debe haber un cierto margen desde las tensiones a las que estará preparado para soportar y las tensiones a las que se produciría el pandeo.

Los refuerzos en el alma del larguero no son muy usados en el sector dado que añaden demasiado peso. Si se llegasen a incluir, se diseñan con la rigidez suficiente para evitar el

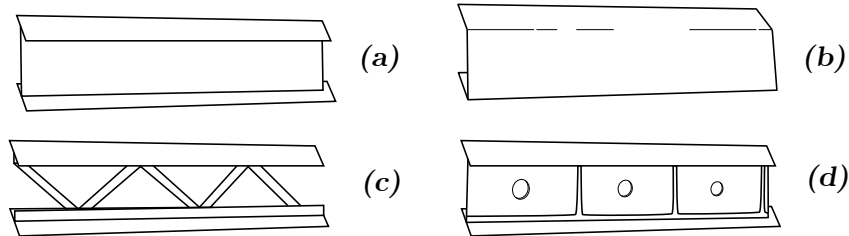


Figura 3.7 – Diferentes configuraciones de largueros: de alma llena (a), de canal doblado (b), de celosía (c), de alma mecanizada (d).

pandeo del alma y la resistencia suficiente para aguantar toda la resistencia de fallo del alma [4].

En este proyecto se trabajaran con dos largueros cuyos parámetros de diseño serán su posición respecto a la cuerda, su espesor y el material de composición. Los materiales suelen ser los mismo que los de la piel, tanto aleaciones de aluminio o titanio, materiales compuestos, aceros o incluso madera en el aeromodelismo y modelos antiguos [16]; sin embargo, requieren de una rigidez mayor ya que soportan más cargas de flexión.

La forma de determinar la posición de los largueros es relativa a la cuerda. Esto quiere decir que siguen la dirección de la flecha y el estrechamiento, empequeñeciéndose con el ala y orientado a la dirección de la flecha. Normalmente el larguero anterior o delantero se coloca a un 12% - 17% de la cuerda y el posterior o trasero a un 55% - 60% para alojar los elementos de control e hipersustentadores [4]; en configuraciones multilarguero son perpendiculares al eje longitudinal de la aeronave pudiendo no ocupar toda la envergadura.

El espesor de este y su longitud determinará la inercia y por ende su resistencia a flexión que cuanto mayor sea menor serán las tensiones soportadas, como se puede intuir de la ec. (2.11). Además su posición determinará la resistencia a torsión que tenga el ala ya que condiciona el momento polar de inercia incluido como parte de la ec. (2.30).

3.2.3. Costillas

Las costillas otorgan la forma al ala y transmiten las cargas de la piel a los largueros. Estas tienen diferentes formas similar a lo que sucedía en el caso de los largueros (figura 3.5). La más común es la costilla de nervadura de cortante, de alma llena o mecanizada similar a la de la figura 3.7.d (la tercera en la figura 3.5) debido a que permite almacenar el combustible entre las propias costillas limitando su movimiento dentro de diferentes secciones. Por su parte se usan de tipo celosía para poder posicionar correctamente elementos de control puesto que proporcionan más espacio.

La cantidad de costillas y el espaciado entre ellos se debe a cuestiones de peso y su distribución. A mayor cantidad de costillas la rigidez aumenta por lo se requiere menor

espesor de la piel, sin embargo si se prescinde de las costillas, se debe compensar con mayor espesor de la piel lo cual implicará más peso pero reduce problemas de fatiga [4].

Para este proyecto se supondrá una costilla de espesor equivalente que aumenta la rigidez en ciertos lugares puntuales del ala. En cantidades pequeñas no es significativo para el comportamiento estructural y aerodinámico del ala ya que aumenta la inercia en ciertas partes del ala y alivia parte del cortante.

3.2.4. Elementos de refuerzo

Los elementos de refuerzo son principalmente dos: los larguerillos y los cordones de los largueros. Estos elementos permiten aumentar la inercia de las secciones y recoger parte de las tensiones. En cierta manera son elementos que no son imprescindibles, pero a día de hoy están lo suficientemente extendidos dada sus ventajas en cuanto al ahorro de peso.

Larguerillos

Los larguerillos son elementos de refuerzo que permiten ahorrar peso disminuyendo el espesor del revestimiento y manteniendo la rigidez. Además debido a su colocación, en el extradós y/o intradós, permiten prevenir el pandeo por la compresión venida de la flexión. También pueden ser usados para optimizar la resistencia a la fatiga del ala. Al reducir el espesor del revestimiento y distribuir las cargas de manera más uniforme, se minimizan las concentraciones de tensiones que pueden provocar fallas por fatiga.

Los larguerillos suelen estar asociados a los paneles, precisamente porque son rigidizadores ante el pandeo aumentando la resistencia de estos y reduciendo la anchura efectiva. Sin embargo, como se ha mencionado previamente no se hará uso de la teoría de placas en este proyecto por lo que ese estudio no compete.

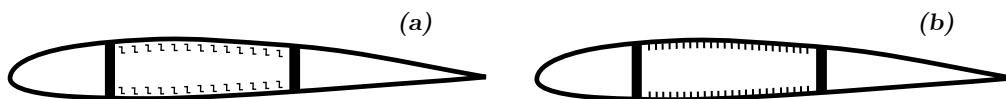


Figura 3.8 – Perfil con larguerillos acoplados (a), o integrados (b).

Los larguerillos pueden ser acoplados o integrados (figura 3.8). Los primeros son adecuados en temas de mantenimiento y reparación, puesto que van por separado y permiten ser analizados de manera independiente, abriendo la puerta a modificaciones o facilitando el uso de diferentes materiales prolongando su vida útil. Por otra parte el tener que acoplarlos a la piel supone un peso mayor en remaches que son puntos donde se puede producir corrosión o ser concentradores de tensiones.

Los integrados son antagónicos a los anteriores, permitiendo ahorrar peso, distribuyendo mejor las tensiones y reduciendo los puntos donde se puede producir la corrosión. Requieren una sección menor y con ellos soportan cargas mayores. Por otra parte, son más difíciles de reparar y mantener y menos susceptibles a modificaciones.

Cordones

Los cordones o *spar caps* son elementos de refuerzo que se colocan en los extremos de los largueros para acoplarlos a la piel. Son elementos muy extendidos en el diseño de alas dado que son muy sencillos de fabricar y pueden soportar bastante bien los esfuerzos de flexión. Es lo que se conoce como material resistente a flexión o *bending material*; si se concentra gran parte de este en los extremos del cajón de torsión se puede despreciar el resto de la sección en términos de flexión.

Es un refuerzo muy extendido en la aviación general, en aviones comerciales principalmente, debido a la ya mencionada simplicidad de construcción y que se puede diseñar de tal manera que la falla de pandeo ocurra alrededor de la tensión última del material permitiendo soportar cargas mayores.

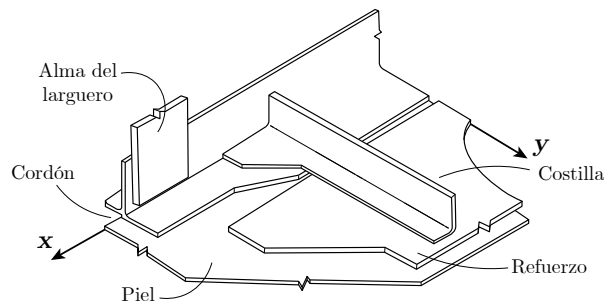


Figura 3.9 – Detalle de la estructura interna.

Tiene por otra parte sus desventajas: dado que el material resistente a flexión se concentra en los *spar caps* el aparte del revestimiento es insignificante. Es por lo tanto material no utilizado lo que lo lleva a pandear a bajas cargas y a fallas por fatiga debido al esfuerzo de flexión local en la lámina pandeada [4].

3.2.5. Encastre del ala

El encastre es la parte donde se produce la unión del ala con el fuselaje. Es una sección crítica debido a que es la zona que más sufre en todo el ala, donde mayores momentos y tensiones se producen y donde los daños por fatiga están más presentes. También al estar enganchado al fuselaje transmite cargas y tensiones del ala al fuselaje por lo que es importante su diseño a la hora de considerar esta transmisión de esfuerzos.

SECCIÓN 3.2. Estructura interna.

No se profundizará mucho en esta parte pero sí que hay que tener en cuenta una consideración importante: la dirección del encastre. El hecho de añadir ángulos de flecha y diedro a la viga hace que esta no sea perpendicular al plano del encastre. Sin embargo, existe el concepto de encastre efectivo que, según la figura 3.10, es realmente la orientación de la sección que actúa como encastre, quedándose como un ala sin flecha. Sucede lo mismo con el diedro [17].

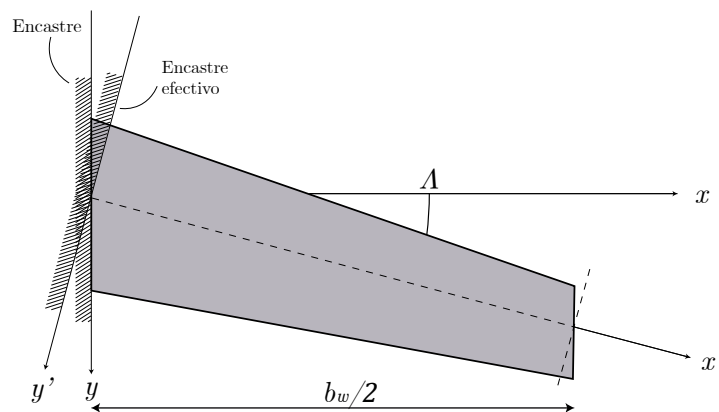


Figura 3.10 – Ala con flecha y orientación del encastre.

En el caso de las costillas existen dos posibilidades: que estén orientadas paralelas al flujo y al encastre real o perpendiculares a la línea de ángulo de flecha y paralelas al encastre efectivo. Para el cumplimiento de las hipótesis de las vigas de Euler-Bernoulli de la sección 2.1.1, se trabajará solo con costillas paralelas al encastre efectivo.

El ala cuenta con una parte en el interior del fuselaje del avión, el cajón central. A la hora de parametrizar el ala no se tendrá en cuenta en, por ejemplo, los datos de la envergadura. Otro dato reseñable es que el cajón central, si el encastre es un apoyo de tipo empotrado (como es el caso) los momentos entre los dos apoyos son nulos, pero si el apoyo es de tipo rótula, son constantes de un apoyo a otro¹.

¹Esto solo se cumple en cargas simétricas en ambas semialas, que es el caso de estudio.

4

Cálculo numérico e interfaz gráfica

Este capítulo se estudiará como se ha implementado todo lo visto anteriormente en una aplicación numérica y los distintos casos que esta puede abarcar. Se presentarán de nuevo las ecuaciones anteriores y se adaptarán a los casos de estudio. El capítulo se dividirá en función de las pestañas que comprende la aplicación y como se entrelazan las unas con las otras.

4.1. Diseño del ala

Esta parte comprende el diseño exterior del ala, concretamente del revestimiento, que es lo visto en la sección 3.1. Se introducen los datos geométricos adimensionales como la esbeltez, el estrechamiento, la flecha, el diedro y la torsión. Esto determinará la forma de un ala de perfil plano, como el de la figura 3.1.

DISEÑO DEL ALA

Datos adimensionales	Esbeltez	<input type="text" value="8.00"/>
	Estrechamiento	<input type="text" value="0.53"/>
	Flecha LE	<input type="text" value="25.00°"/>
	Diedro	<input type="text" value="3.00°"/>
	Torsión geométrica	<input type="text" value="10.00°"/>
Datos dimensionales	Cuerda raíz (m)	<input type="text" value="5.73"/>
	Espesor piel (mm)	<input type="text" value="4.00"/>
Datos del perfil	Perfil NACA	
	<input type="radio"/> Cuatro cifras <input type="text" value="2412"/>	
	<input checked="" type="radio"/> Cinco cifras <input type="text" value="24012"/>	



Representación tridimensional



Representación del perfil

Figura 4.1 – Diseño del revestimiento del ala.

Con el dato de la cuerda en la raíz se puede determinar por completo el tamaño del ala como se vio en en la sección 3.1. Para añadir volumen se ha de elegir un perfil que siga el formato NACA de 4 ó 5 cifras. Al ser perfiles NACA siguen una serie de ecuaciones para la línea de curvatura y otra para el espesor. Estas ecuaciones serán diferentes dependiendo del formato NACA que sea introducido, es por ello que se permiten los dos formatos, de cuatro y cinco cifras.

Para cuatro cifras, la primera (M) es la máxima curvatura porcentual que va a tener el perfil respecto a la cuerda, la segunda (P) la posición respecto al perfil donde se encontrará la máxima curvatura, y las dos últimas (T) el espesor máximo que tendrá el perfil en porcentaje de cuerda. Se diferenciarán dos zonas, aquella previa a la posición de máximo espesor y aquella posterior a la zona de máximo donde la ecuación que rige la línea de

SECCIÓN 4.1. *Diseño del ala*

curvatura variará pero manteniendo una suavidad en la trazada en ese punto gracias a que las derivadas de las ecuaciones serán iguales.

$$\text{Si } 0 \leq x < P$$

$$z_c = \frac{M}{P^2}(2Py - y^2)$$

$$\text{Si } P \leq x \leq 1$$

$$y_c = \frac{M}{(1-P)^2}(1-2P+2Py-y^2)$$

El espesor por su parte

$$z_t = \frac{T}{0,2}(0,2969y^{0,5} - 0,126y - 0,3516y^2 + 0,2843y^3 - 0,1036y^4)$$

Esta ecuación del espesor indica la distancia de la línea de curvatura a cada una de las superficies superior e inferior del perfil por lo que el espesor real es doble del indicado. Estos valores tienen límites establecidos ya sea arbitrario o por el propio formato del perfil: los valores de M y P van desde 0 % hasta 9 % y deben ser números naturales y T no ha de superar el 40 % del valor de la cuerda.

Los perfiles NACA de cinco cifras funcionan de manera diferente. La primera cifra (L) está relacionada con el coeficiente de sustentación de diseño siendo $L = 3 \cdot c_l/20$ pudiendo variar de 0 hasta 6 y controla la curvatura del perfil. El segundo dígito (P) es la posición de máxima curvatura dividida por 20. El tercer dígito (Q) puede ser 0 ó 1 indicando si el perfil tiene forma normal o forma refleja o *reflex*¹. Los últimos dos dígitos (T) indican también el máximo espesor. Si el perfil no es *reflex*:

$$\text{Si } 0 \leq x < P$$

$$z_c = \frac{k_1}{6}(y^3 - 3ry^2 + r^2(3-r)y)$$

$$\text{Si } P \leq x \leq 1$$

$$y_c = \frac{k_1 r^3}{6}(1-y)$$

Si el perfil es *reflex*:

$$\text{Si } 0 \leq x < P$$

$$z_c = \frac{k_1}{6}((y-r)^3 - k_2(1-r)^3y - r^3y + r^3)$$

$$\text{Si } P \leq x \leq 1$$

$$y_c = \frac{k_1}{6}(k_2(y-r)^3 - k_2(1-r)^3y - r^3y + r^3)$$

Los parámetros r , k_1 y k_2 dependen de la línea de posición de máximo espesor y del indicador del coeficiente de perfil de diseño, viendo reflejado su valor en la tabla 4.1. Finalmente, la ecuación que indica su espesor es la misma que en el caso de los perfiles de cuatro cifras [18].

Los valores que puede comprender L van de 0 a 6 ya que se supone que el c_l máximo de diseño es 0,9. Por otra parte el parámetro P dependerá de Q, si Q es 0, P va de 1 a 5 y si Q es 1, P va de 2 a 5, es decir, que la posición máxima donde el se puede colocar la

¹Es una configuración de línea de curvatura que tiene ciertas características aerodinámicas diferentes por curvarse hacia arriba cerca del borde de fuga

Q	P	r	k_1	k_2
0	1	0,0580	$180,70 \cdot L$	0
0	2	0,1260	$25,820 \cdot L$	0
0	3	0,2025	$7,9785 \cdot L$	0
0	4	0,2900	$3,3215 \cdot L$	0
0	5	0,3910	$1,6150 \cdot L$	0
1	2	0,1300	$25,995 \cdot L$	0,000764
1	3	0,2170	$7,8965 \cdot L$	0,006770
1	4	0,3180	$3,2600 \cdot L$	0,030300
1	5	0,4410	$1,1955 \cdot L$	0,135500

Tabla 4.1 – Valores de los parámetros de la línea de curvatura en función de los coeficientes NACA de cinco cifras.

máxima curvatura es al 50% del perfil. En el caso del espesor se restringe hasta un 30% en este tipo de perfiles.

Una vez obtenido los puntos del perfil de cuerda y representarlo en la interfaz gráfica se ha de representar también tridimensionalmente el ala. Es una operación relativamente sencilla dado que el ala es trapezoidal basta con tener la sección de la raíz y la de las dos puntas y realizar una operación de elevación lineal entre estas.

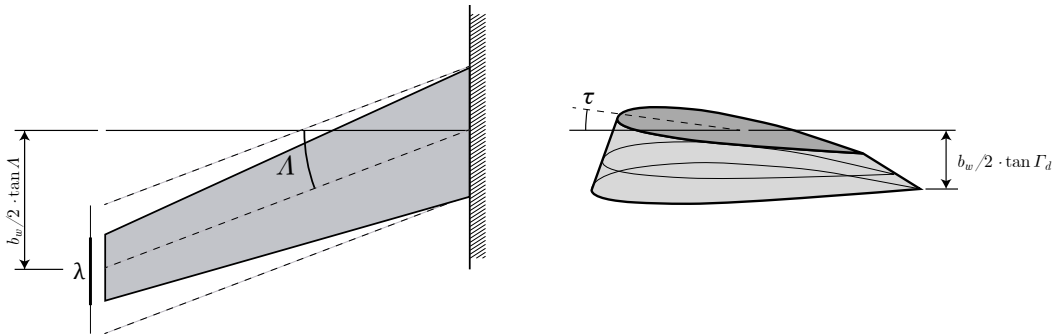


Figura 4.2 – Diseño tridimensional del ala. Vista en planta y en perfil

Para posicionar las secciones de las puntas se las coloca en la posición $x = \pm b_w/2$, se les aplica el estrechamiento, luego la torsión, se las desplaza en la dirección y tanto como indique la flecha y en la dirección z tanto como indique el diedro. Posteriormente se verá que el punto sobre el cual se realiza el estrechamiento y la torsión es el centro de gravedad.

Todas estas variables son recogidas en una variable de tipo *struct* llamada *data* que se exporta al directorio donde está alojada la aplicación. Una vez se pulsa el botón de *Siguiente*, se guarda y exporta la variable, se abre la ventana siguiente y se cierra la actual.

4.2. Diseño interno del ala

De forma análoga a la sección del diseño del exterior del ala, esta es equivalente a la sección 3.2. Una vez decidido como va a ser el revestimiento queda colocar las costillas y los largueros dentro del ala. Además se permite colocar un motor y combustible. El diseño en

DISEÑO INTERNO DEL ALA

Datos de las costillas	Número de costillas	<input type="text" value="9"/>
	Espesor costillas (mm)	<input type="text" value="4"/>
Datos de los largueros	Posición 1º larguero (%c)	<input type="text" value="15%"/>
	Posición 2º larguero (%c)	<input type="text" value="60%"/>
	Espesor 1º larguero (mm)	<input type="text" value="3"/>
	Espesor 2º larguero (mm)	<input type="text" value="4"/>
Datos del motor	Posición del motor (%bw)	<input type="text" value="30%"/>
	Peso del motor (kg)	<input type="text" value="1200"/>
	Porcentaje de combustible	<input type="text" value="21%"/>
	Volumen de combustible	<input type="text" value="7707 L"/>

Representación de la estructura

Representación del perfil

Figura 4.3 – Ventana de diseño de la estructura interna del ala.

esta sección se divide en tres partes: costillas, largueros y combustible. En la figura 4.3 el diseño de costillas se limita al espesor y del número de estas repartidas equidistantemente a lo largo del ala.

En cuanto a largueros, sólo se podrán elegir dos largueros como en el caso de la mayoría de aeronaves y se determinará su posición relativa a la cuerda y su espesor ya que se considerarán de alma llena. En cuanto a motor, se podrá elegir el porcentaje de combustible que llevará el ala, lo cual supone una carga distribuida; y el peso y posición del motor lo cual supone una carga en principio puntual pero que dependiendo de la flecha de la aeronave puede ser distribuida.

En la figura 4.3, en la ventana de representación de la estructura se puede observar que las costillas tiene una orientación paralela al encastre efectivo (sección 3.2.5), estando este posicionado donde la primera costilla. La cantidad de costillas y su espesor afectará sobre todo a la deformada del ala, ya que aunque sus posiciones sean puntuales, la inercia que acarrearán variará la curvatura puntualmente y al integrarla modificará en mayor o menor medida el desplazamiento.

Los largueros se posicionan relativamente a la cuerda, es decir, a un porcentaje de la cuerda del ala adaptando su longitud al espesor del perfil en esa posición. En cuanto a su propio espesor es arbitrario pudiendo ser desde 1 a 100 mm. Estos dos parámetros influirán en el desempeño del ala a flexión ya que largueros con poca anchura y en posiciones de poco espesor del perfil mitigan menos las deformaciones y sufren más las tensiones.

En cuanto al combustible representa un peso distribuido a lo largo de la envergadura que afectará al diagrama de cortantes, flectores y torsores. Lo mismo sucede con el peso del motor, si el ala no tiene flecha será una fuerza puntual, en cambio, dado que el eje longitudinal con el que se calculará será perpendicular a las secciones, si hay flecha será una carga distribuida (figura 4.21). Como dato informativo se proporciona el volumen de combustible introducido haciendo una integral entre el encastre y un posición c al área encerrada entre los dos largueros y multiplicada por el estrechamiento:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{comb}} &= \int_0^c A(x)dx = \int_0^c A_0 \cdot \lambda(x)^2 dx = \int_0^c A_0 \left(\frac{c(x)}{c_r} \right)^2 dx = \dots \\
 &\dots = 2A_0 \sum_0^c \left(\frac{\lambda - 1}{b_w/2} x + 1 \right) \Delta x \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

La figura 4.4 recoge como se distribuye en la aplicación lo explicado anteriormente. Al cambiar cualquiera de los parámetros de estructura interna, se invoca la función que monitoriza la representación de la estructura alar y reajusta cada uno de los elementos en favor de los nuevos datos introducidos. Posteriormente se hace lo mismo con la representación de la sección y se hace uso de la ec. (4.1) para el cálculo del volumen de combustible y representarlo.

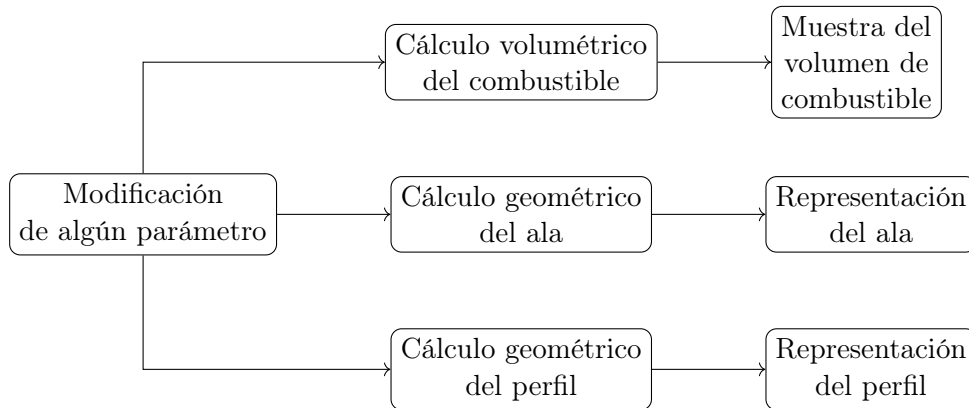


Figura 4.4 – Diagrama de funcionamiento de la segunda pestaña de la aplicación

4.3. Materiales

La siguiente sección es la que asigna los materiales a cualquiera de los 3 componentes fundamentales del ala. Estos materiales determinarán el las tensiones que soportarán cada uno de estos aunque esto se verá en la sección 4.7.1.

El modelo utilizado de materiales es el Ramberg-Osgood, ya introducido al final de la sección 2.1.2 y en la 2.2.1. Este modelo fue inventado en los años 40 donde eran necesarias únicamente tres características del material para describirlo: el módulo de Young, una

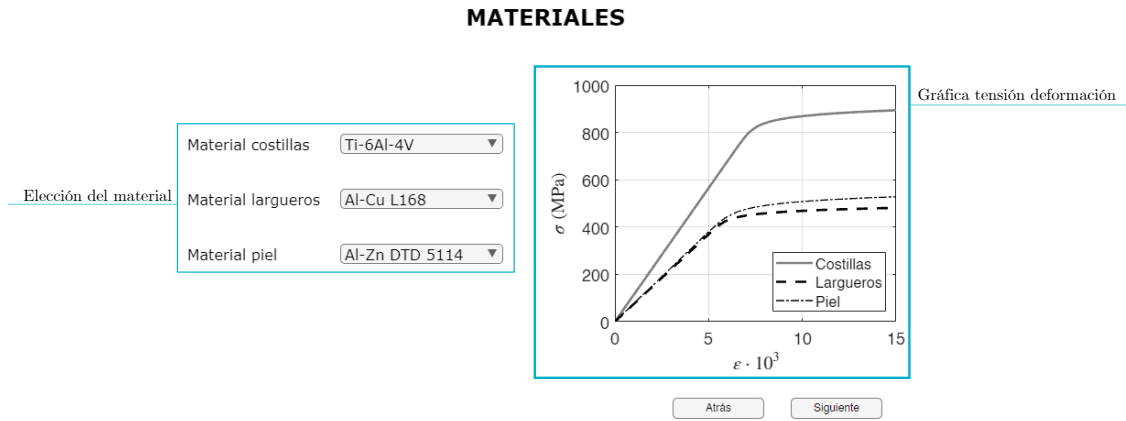


Figura 4.5 – Elección del material de cada uno de los componentes del ala.

tensión arbitraria y un factor de forma [19]. La deformación estaba considerada como una suma de la parte elástica y otra plástica. La relación entre la deformación elástica y la tensión era lineal y la relación entre la deformación plástica y la tensión era doble logarítmica tal que:

$$\log \varepsilon_P = k\sigma^m = \log k + m \log \sigma$$

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_P = \frac{\sigma}{E} + k\sigma^m$$

Es una ecuación de la que no se conocen los parámetros k y m . Estos se obtienen experimentalmente mediante dos puntos de la curva real $\sigma - \varepsilon$. El primero será aquel que haga que el módulo tangente la mitad del valor del módulo de Young. Se denotará con σ_n a la tensión de referencia². El módulo tangente es la derivada de la curva $\sigma - \varepsilon$ por lo cual es la inversa de la derivada de la expresión anterior:

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{E} + km\sigma^{m-1} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_t = \frac{E\sigma}{\sigma + kmE\sigma^m}$$

El valor de E_t debe ser la mitad de E y $\sigma = \sigma_n$:

$$\frac{E\sigma_n}{\sigma_n + kmE\sigma_n^m} = \frac{1}{E} \quad \longrightarrow \quad k = \frac{\sigma_n^{1-m}}{mE}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{m} \frac{\sigma_n}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^m \quad \longrightarrow \quad \frac{\varepsilon E}{\sigma_n} = \frac{\sigma}{\sigma_n} + \frac{1}{m} \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^m$$

Llegando así de nuevo a la ec. (2.24). El factor m es de forma y se obtiene de manera experimental de una prueba de tracción real. En el programa se guarda una base de datos con los materiales y aleaciones usadas normalmente en la industria. De ella se extraen el módulo elástico, la tensión σ_n y el parámetro m y de ahí los datos para representar las

²Tensión a la cual el módulo tangente es la mitad del módulo de Young

curvas $\sigma - \varepsilon$ de la figura. Existen materiales muy diversos principalmente aluminios, aleaciones de acero o de titanio ³.

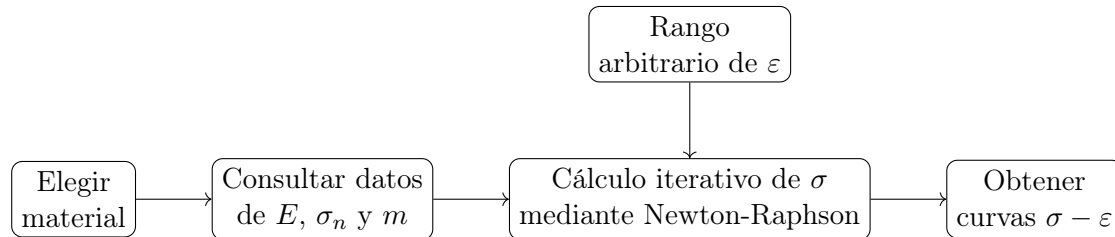


Figura 4.6 – Diagrama de funcionamiento de la tercera pestaña de la aplicación

4.3.1. Método de Newton-Raphson

Si el input para calcular la curva $\sigma - \varepsilon$ son las deformaciones, la ec. (2.24) quedaría como una ecuación implícita resoluble iterativamente. El método de cálculo es el de Newton-Raphson, un algoritmo con el que se hallan los ceros de una función. Se supone el desarrollo en series de Taylor de un función alrededor de un punto x_n :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \dots$$

Se ha de truncar la serie en el elemento de primer orden y evaluarla en el punto x_{n+1} suponiendo que es una raíz, es decir, que el valor de la función en ese punto es nula:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

que despejando la expresión,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.2)$$

El calculo de un punto posterior se hace mediante el punto actual y la función y derivada en ese punto. Dado que la función es implícita se buscará anularla.

$$f(\sigma) = \frac{\varepsilon E}{\sigma_n} - \frac{\sigma}{\sigma_n} - \frac{1}{m} \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^m$$

$$f'(\sigma) = -\frac{1}{\sigma_n} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^{m-1} \right)$$

En primer lugar se establece una aproximación inicial $\sigma(\varepsilon)$ y a partir de ahí se hace uso de la ec. (4.2) en aquellos puntos donde la diferencia con la iteración anterior (error) se encuentre por debajo de una cierta tolerancia arbitraria. Se puede multiplicar el cociente de la ec. (4.2) para acelerar o decelerar la convergencia del método en función de que es más necesario [20].

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)}$$

³Ver anexo B.2

4.4. Refuerzos

El último elemento de diseño es la elección de los refuerzos. Tanto los cordones como los larguerillos antes mencionados pudiendo diseñar y personalizar distintos aspectos de estos refuerzos.

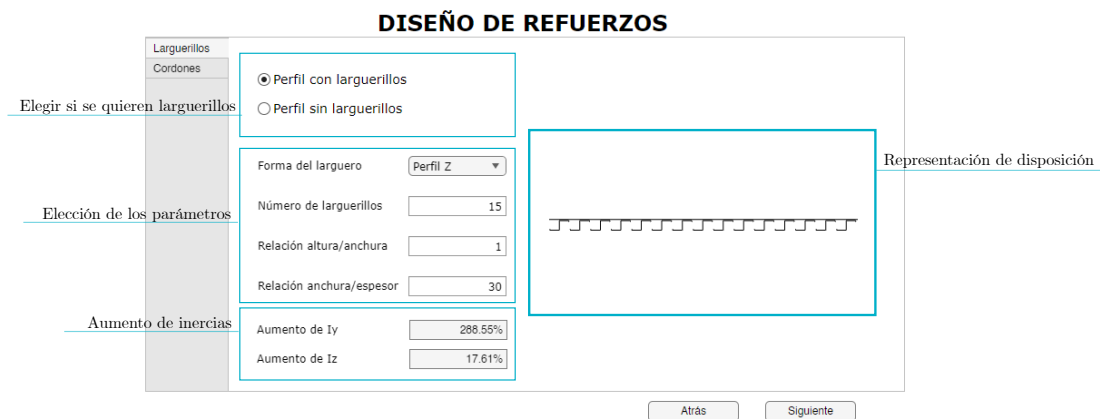


Figura 4.7 – Ventana de diseño de los larguerillos.

El panel de la izquierda proporciona una gran variedad atributos de los larguerillos que se puede variar, tanto dimensionales como de forma. En este caso se permiten cinco de los perfiles más comunes, los de la figura 4.8. Fuera de otras razones, como la corrosión y el mantenimiento, la elección de cada uno estos no hace una gran variación en el resultado final fuera de ligeras variaciones en la inercia.

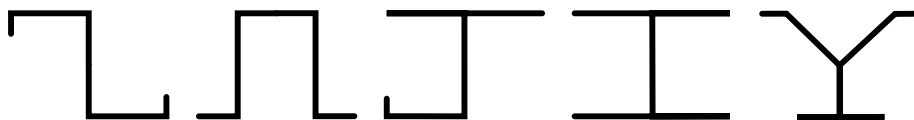


Figura 4.8 – Diferentes perfiles de larguerillos: perfil en 'Z', perfil de sombrero, perfil en 'J', perfil de doble 'T' y perfil en 'Y' respectivamente.

También se puede modificar la relación entre anchura y altura del perfil, la relación entre espesor y anchura, y el número de larguerillos. Los larguerillos se disponen en la parte superior e inferior del cajón de torsión (figura 3.8) por lo que determinar el número de larguerillos determina el valor de la anchura como el cociente entre la distancia entre los dos largueros y el número de larguerillos.

Una vez elegidos los parámetros se produce un aumento de inercia que se muestra en un cuadro de texto. El aumento del momento de inercia I_y es mayor dado que de por sí es

pequeño, llegando a aumentarlo en varios factores. En cambio el momento de inercia I_z es *per se* alto y la inclusión de larguerillos no aumenta significativamente la inercia a pesar de su disposición alrededor del eje z .

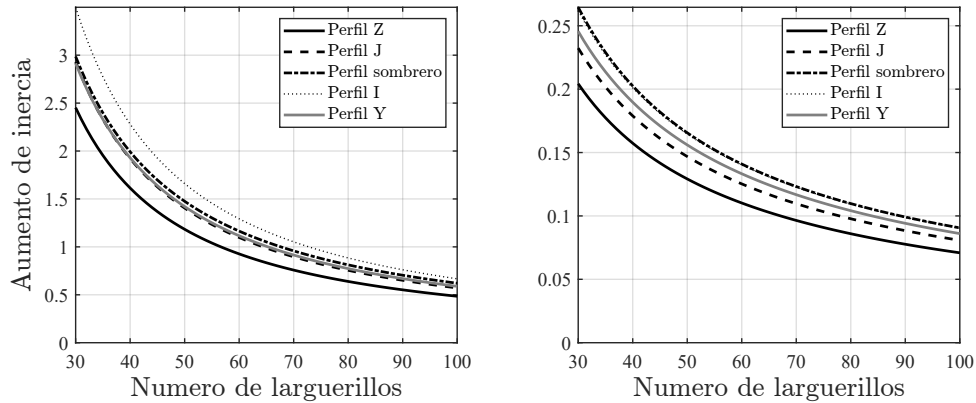


Figura 4.9 – Aumento de la inercia debido a la incorporación de larguerillos. Proporción anchura/altura = 1, proporción anchura/espesor = 10. A mayor número menor tamaño.

En el eje y la inercia llega a multiplicarse a cuatro veces su valor inicial debido a la rigidización que se proporciona al revestimiento. En cambio en el eje z representa una menor proporción, inferior al 25 %, debido a lo mencionado anteriormente. También se puede observar no hay una diferencia significativa entre los perfiles de estos, aunque destacan los perfil 'I' (o doble 'T') y sombrero dado a que su alta inercia local.

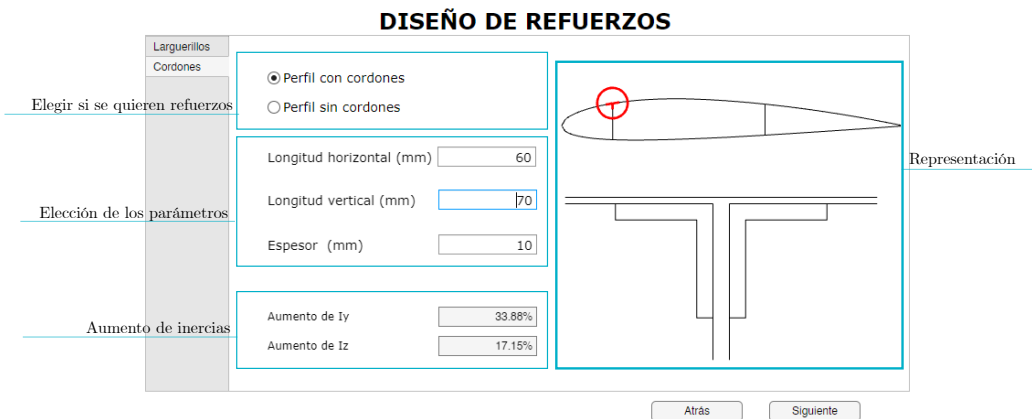


Figura 4.10 – Diseño de los cordones.

La forma de modelizar los cordones es mediante áreas concentradas. Una vez se diseñen estos refuerzos (*spar caps*) el programa los integra como áreas concentradas en los extremos de los largueros. Estos elementos aumentan mucho la inercia por lo cual se dispone también de un cuadro de texto que indica cuánto aumenta la inercia con la incorporación

de estos elementos.

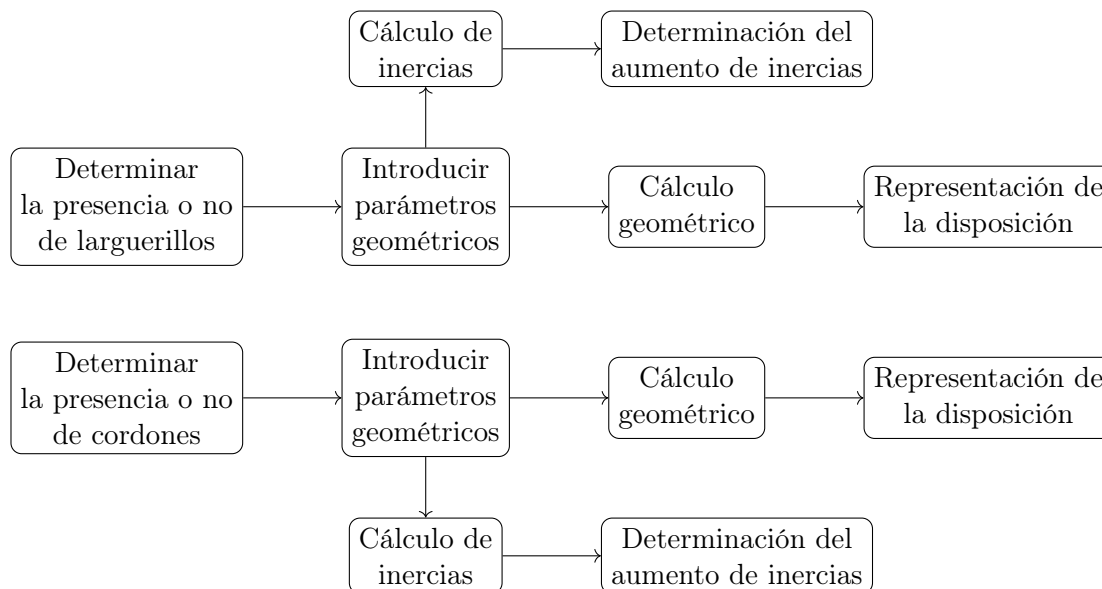


Figura 4.11 – Diagrama de funcionamiento de la cuarta pestaña del programa

La figura 4.11 representa cómo funciona esta cuarta pestaña del programa y donde al contrario que en casos anteriores, al tratar con dos elementos diferentes el funcionamiento es independiente y paralelo en ambos casos.

4.4.1. Cálculo numérico de las inercias.

Las inercias se han introducido ya al final de la sección 2.1.1 donde se han definido de manera formal, queda ver cómo se implanta este cálculo en el programa ya que hay que implementarlo manera numérica. El cálculo se divide en los cuatro tipos de componentes estudiados en el capítulo 3, hallando de manera independiente cada una de esas inercias e incluyéndolas en la inercia total.

El primer paso es calcular el sistema de referencia sobre el cual se va a calcular estas inercias y cuyo origen es el centro de gravedad. El cálculo del *cdg* de una sección se ha explicado en la sección 2.1.1 y se han de aplicar las ecs. (2.2) sin simplificar las densidades. Primero se han de determinar las áreas y las posiciones de cada elemento; en el caso del revestimiento, costillas y largueros es sencillo puesto que viene dado de antes, en cambio, los *spar caps* y los larguerillos se han de calcular en base a los datos introducidos en la ventana.

Las áreas concentradas son sencillas de calcular: su posición son los extremos de los largueros y las áreas son en base a los parámetros de espesor, longitud vertical y horizontal introducidos en la ventana de la figura 4.10. En el caso de los larguerillos, una vez elegida la forma de cualquiera de las introducidas se calcula el área de manera sencilla puesto que

son una sucesión de pequeños segmentos rectangulares. En cuanto a la posición se ha de determinar la distancia entre largueros y dividirlo entre el número de largueros obteniendo así el espacio entre larguerillos. Siendo $y_{\text{larg},i}$ el centro de gravedad local de un larguerillo⁴:

$$\bar{y}_{\text{larg},i} = y_{\text{larg},i} + \frac{c_r |p_{l2} - p_{l1}|}{N_{\text{larg}}} \cdot n$$

La posición vertical de los larguerillos se determinará como la media entre los extremos de los largueros quedando así algo similar a la figura 4.12. En cuanto a las áreas dado que son secciones formadas por tramos rectangulares con espesor constante es bastante trivial obtener el área de cada uno de ellas. Con todo ello se calcula el centro de gravedad de la sección.

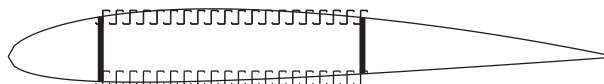


Figura 4.12 – Disposición de los larguerillos en la sección.

El estrechamiento y la torsión se realizan alrededor del eje x que pasa por los centros de gravedad de las secciones de la viga. Incluso en las secciones con costilla este no varía puesto que incluir costillas es añadir espesor al revestimiento y en la ec. (2.2) se observa que se puede extraer el espesor como factor común y simplificar sin variar la centro de gravedad.

$$I_y = \iint z^2 dA = t \int z^2 ds \quad (4.3)$$

$$I_z = \iint y^2 dA = t \int y^2 ds \quad (4.4)$$

$$I_{yz} = \iint yz dA = t \int yz ds \quad (4.5)$$

Las inercias se calculan mediante la ecuación formal pero adaptada al cálculo numérico. El perfil está dividido en pequeños segmentos rectos, cuyas coordenadas pueden ser expresadas como una función lineal del tipo $z_1(s) = z_0 + (z_1 - z_0)s/l$, siendo l la longitud del segmento. La función lineal se eleva al cuadrado y posteriormente se integra resultando en una expresión cúbica. Esto lleva a buscar métodos precisos de integración más allá de la integral de Riemann o el método del trapecio.

El método de Simpson es un método de integración numérica que se utiliza para obtener una aproximación cuadrática de la integral. Una función $f(x)$ interpolada por una función $P(x)$ en los puntos x_0 , x_m y x_f :

$$P(x) = f(x_0) \frac{(x - x_m)(x - x_f)}{(x_0 - x_m)(x_0 - x_f)} + f(x_m) \frac{(x - x_0)(x - x_f)}{(x_m - x_0)(x_m - x_f)} + f(x_f) \frac{(x - x_0)(x - x_m)}{(x_f - x_0)(x_f - x_m)}$$

⁴Por ejemplo para una sección en 'Z', al tener antisimetría ese centro de gravedad local está en el (0, 0).

que si se integra entre los puntos x_0 y x_f :

$$\int_{x_0}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_f} P(x)dx = \frac{x_f - x_0}{6}(f(x_0) + 4f(x_m) + f(x_f))$$

aplicando el método de Simpson al cálculo de inercias para j segmentos:

$$I_y \approx \sum_j \frac{l}{6} (z_i^2 + 4z_m^2 + z_f^2)$$

$$I_z \approx \sum_j \frac{l}{6} (y_i^2 + 4y_m^2 + y_f^2)$$

$$I_{yz} \approx \sum_j \frac{l}{6} (y_i z_i + 4y_m z_m + y_f z_f)$$

Estas fórmulas se pueden aplicar para el revestimiento, los largueros y las costillas. En el caso de los *spar caps* se puede reducir la ecuación al producto del área concentrada por la distancia al centro de gravedad al cuadrado.

$$I_y = \sum_j a_j z_j^2 \quad I_z = \sum_j a_j y_j^2$$

En el caso de los larguerillos en primer lugar se debe calcular la inercia local de cada uno de ellos y se añade el término de Steiner para tener en cuenta la distancia al centro de gravedad global. La inercia global alrededor del eje y para un larguero i con j segmentos es:

$$I_{y,i} = \underbrace{\sum_j \left[\frac{l_j^3 t_j}{12} + l_j t_j (z_j - \bar{z}_i)^2 \right]}_{\text{inercia local}} + A_i \cdot \bar{z}_i^2$$

El primer término del sumatorio es la inercia de cada uno de los segmentos del larguerillo, teniendo cuenta, en el caso de I_y , los verticales y los diagonales multiplicando estos por un factor $\cos(\alpha)$. A medida que se calcula la inercia a lo largo de la envergadura hay que tener en cuenta que la sección se va reduciendo por el estrechamiento y rotando por la torsión. De la expresión se puede extraer un el estrechamiento de cada una de las magnitudes que expresan distancias y se obtiene que $I_{y,i}(x) = \lambda(x)^3 I_{y,i}$. En cambio para la torsión se puede aplicar las siguientes expresiones:

$$I_y(\tau_g) = I_{y,i} \cos(\tau_g)^2 + I_z \sin(\tau_g)^2 + I_{yz} \sin(\tau_g) \cos(\tau_g)$$

$$I_z(\tau_g) = I_{z,i} \cos(\tau_g)^2 + I_y \sin(\tau_g)^2 + I_{yz} \sin(\tau_g) \cos(\tau_g)$$

$$I_{yz}(\tau_g) = (I_{y,i} - I_z) \cos(\tau_g) \sin(\tau_g) + I_{yz}(\cos(\tau_g)^2 - \sin(\tau_g)^2)$$

El estrechamiento y la torsión hay que tenerlas en cuenta también en los otros elementos, pero basta con modificar las coordenadas y con ello recalculer las inercias. Obtenidos estos datos, se suman y se tiene la inercia total de la sección.

4.5. Aerodinámica

En esta sección es donde se determinan las cargas a aplicar en el ala, como se ha explicado en la sección 2.4. Determinar las condiciones de vuelo y su interacción con la geometría es importante para posteriormente calcular diagramas, tensiones y deformaciones.

PARÁMETROS AERODINÁMICOS

Velocidad y ángulo de ataque

Velocidad (m/s)

Ángulo de ataque

Cálculo de la densidad

Altitud (m)

Densidad (kg/m³)

Temperatura (°C)

Cantidad de paneles

Paneles en enverg.

Paneles en cuerda

Datos atmosféricos

Densidad

Temperatura

Presión

Mach

Figura 4.13 – Pestaña para la introducción de datos para el cálculo aerodinámico.

El funcionamiento de la pestaña es muy simple: se introducen y eligen los datos que representen las condiciones de vuelo. Estas han de ser simétricas, es decir sin componente de vuelo transversal (a lo largo del eje x). El método que se va a utilizar en el cálculo, el método *Vortex Lattice Method* requiere que el flujo sea incompresible, por ello se limitará el Mach a 0,3. Por otra parte se da la opción de introducir la densidad directamente con la temperatura para limitar el Mach o en función de la altura haciendo uso de la atmósfera ISA.

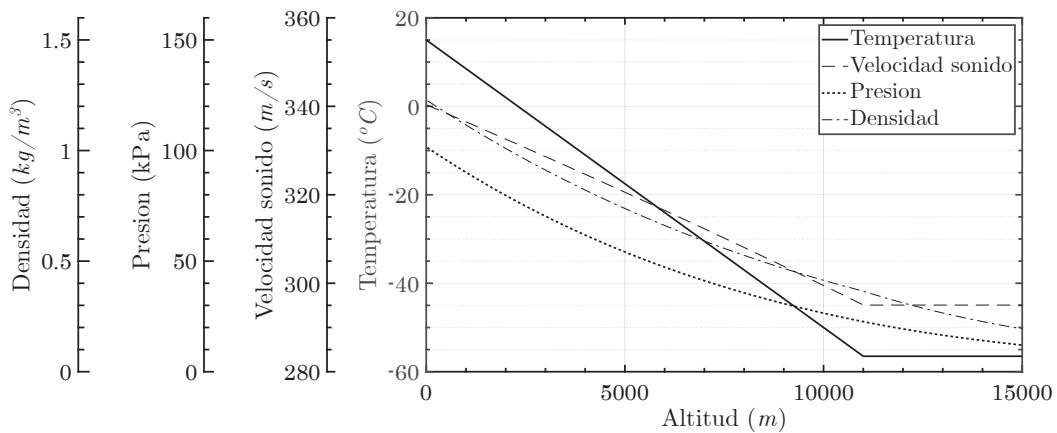


Figura 4.14 – Variación de los parámetros atmosféricos con la altitud.

4.5.1. *Vortex Lattice Method*

Existen multitud de métodos para obtener la distribución de presiones alrededor de un ala, muchos de ellos analíticos pero muchos otros y los usados en su gran mayoría numéricos. En este proyecto se ha optado por el método VLM, o *Vortex Lattice Method*, dado que es más fácilmente implementable, muy eficiente a la hora de calcular y tiene la ventaja de que se puede personalizar bastante el ala.

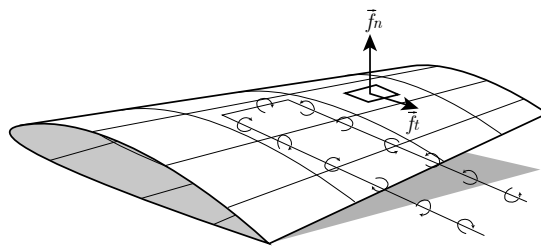


Figura 4.15 – Resultantes de las fuerzas con componente normal y otra tangencial y línea de torbellinos que cubren un panel.

El método VLM consiste en dividir el ala en diferentes paneles a los que se asigna un torbellino o vórtice y con ello calcular la fuerza resultante en cada panel. Esa fuerza resultante tendrá una componente normal y otra tangencial que al integrarla se obtendrá la sustentación y resistencia respectivamente [21].

El flujo donde está el ala debe cumplir ciertas condiciones para poder desarrollar el cálculo, pero que son limitantes del método:

- La aerodinámica ha de ser lineal, es decir que las fuerzas resultantes tengan una relación de proporcionalidad con el ángulo de ataque del ala, Esto se consigue a números de Mach bajos y ángulos de ataque no superiores a $10^\circ - 12^\circ$.
- El flujo ha de ser potencial. Descrito un campo escalar en el espacio la velocidad del flujo ha de ser derivable del campo escalar tal que $V(x, y, z) = \nabla\Phi(x, y, z)$.
- También ha de ser irrotacional, es decir, que los elementos fluidos adoptan un movimiento de traslación puro, con una deformación media nula [22].
- El fluido es no viscoso, es decir, que se supondrá que las fuerzas viscosas son despreciables frente a las inerciales.
- Como se ha mencionado antes, este flujo ha de ser incompresible, de densidad constante en todo el espacio.

Una vez asegurado esto, se deben discretizar el ala dada la geometría y el número de paneles elegido en la ventana anterior del programa.

Ley de Biot-Savard

Para el cálculo se ha de introducir primero la Ley de Biot-Savard que permite calcular el campo de velocidades debidas a filamentos de torbellinos. Estos torbellinos inducen velocidades perpendiculares al radio de los mismos definidas por la ecuación:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (4.6)$$

Se tiene una curva C infinita con diferenciales de arco dl que generan vórtices de intensidad Γ que influirán a un punto P a una posición $r_P(s)$ de cada vórtice. Si se desea conocer la velocidad inducida se integra a lo largo del filamento:

$$V = \int_C \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times r_P(s)}{\|r_P(s)\|^3} \quad (4.7)$$

En este método el filamento utilizado es de tipo herradura, como el de la figura 4.15. Es un filamento proveniente del infinito que recorre el panel en su línea de cuarto de cuerda del panel y regresa al infinito. Se puede descomponer en dos filamentos semi-infinitos y un segmento filamentosos que los une [23].

Mallado

Discretizar la geometría es el primer paso para el cálculo de las cargas. Es una operación geométrica que dado el número de paneles en cada dirección se ha de determinar la posición de cada uno de estos en base a la geometría del ala. Al final, al tratarse de un ala trapezoidal las posiciones de cada uno de los extremos de los paneles se derivarán de posiciones lineales de posición. Si no se cuenta con torsión geométrica la red de mallado será coplanaria y bidimensional.

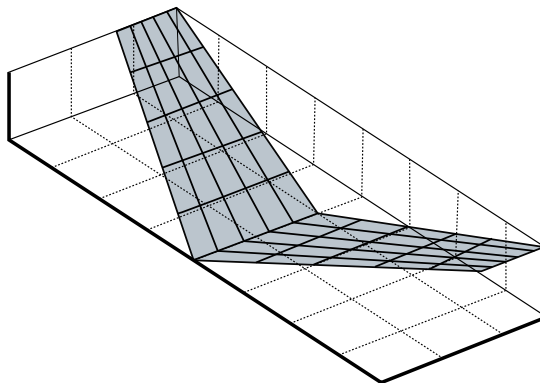


Figura 4.16 – Mallado de un ala con diedro, flecha y estrechamiento

Añadir la torsión implica que el ángulo de ataque varíe con la envergadura y haciéndolo que el ala deje de ser bidimensional. Los paneles entre sí también dejan de ser paralelos y

las líneas de herradura que salen de estos deja de ser paralela también [21].

En cada uno de esos paneles hay que colocar el segmento finito de la herradura a $1/4$ del frente del panel y el punto de control a la mitad de la línea de $3/4$ del frente del panel. Una vez que el filamento de la herradura pase por el panel regresa al infinito en una dirección paralela al flujo libre.

Otro aspecto importante es el vector normal al panel que servirá para determinar las condiciones de contorno y que se define como el producto vectorial de los vectores \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{BC} . En caso de que el perfil no sea una placa plana o simétrico y tenga curvatura, la normal al panel debe ser perpendicular a la línea de curvatura.

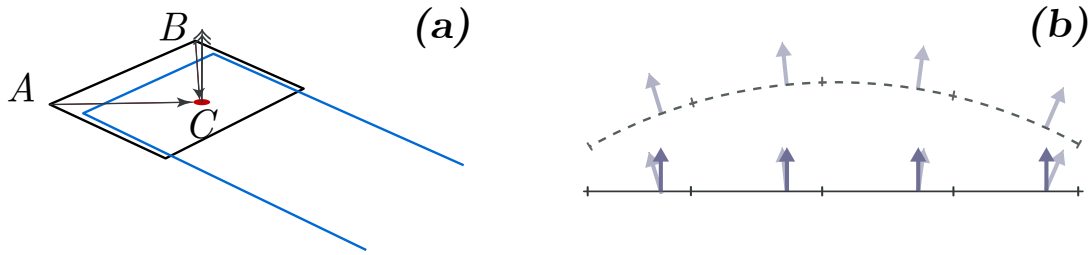


Figura 4.17 – (a) Determinación del punto de control y del vector normal al panel. (b) Efecto de la curvatura en la normal al panel.

La dirección de la velocidad del flujo ha de ser tangente a la superficie o en su defecto perpendicular a la normal de esta. Para expresar esto se hace uso de la ecuación $F_s(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ que describe la superficie del ala y de dos puntos D y E recogidos en la superficie tal que sean infinitesimalmente cercanos: (x_D, y_D, z_D) y $(x_E, y_E, z_E) = (x_D + dx, y_D + dy, z_D + dz)$. Es por ello que el vector $dt = (dx, dy, dz)$ es tangente a la superficie. Expandiendo en series de Taylors:

$$F_s(x_E, y_E, z_E) = F_s(x_D + dx, y_D + dy, z_D + dz) = F_s(x_D, y_D, z_D) + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

y dado que se encuentran en la superficie queda que $F_s(x_E, y_E, z_E)$ es nulo lo que lleva a

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \nabla F_s(x_D, y_D, z_D) \cdot dt = 0$$

y eso indica que el término $\nabla F_s(x_D, y_D, z_D)$ o en términos generales $\nabla F_s(x, y, z)$ es perpendicular a la superficie o lo que es lo mismo, el vector normal [23].

Sistema de ecuaciones

La velocidad tendrá dos componentes: la del flujo libre que es en dirección al eje y negativo siendo $V_\infty = -U_\infty j$ y la inducida por los torbellinos $v_\Gamma = \nabla \varphi$. Esta velocidad ha

de ser perpendicular $\nabla F_s(x, y, z)$. La comprobación se ha de hacer sobre el punto C de un panel cualquiera j .

$$V_{C_j} \cdot \nabla F_s(x_{C_j}) = (V_\infty + \nabla \varphi_{C_j}) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} \right) = 0$$

En este caso las incógnitas son las intensidades de los torbellinos recogidas en la velocidad inducida. Estas dependen de varios factores de forma, geométricos y la propia intensidad del torbellino, pero guardando una relación de proporcionalidad. La velocidad inducida en un panel j por N paneles es:

$$\nabla \varphi_{C_j} = \sum_K^N V(n_\infty, \dots, \Gamma_K) = \sum_j^N V(n_\infty, \dots, 1) \Gamma_K = \sum_K^N \nu_{jk} \Gamma_K$$

que aplicando la condición de contorno de perpendicularidad:

$$\begin{aligned} (V_\infty + \nabla \varphi_{C_j}) \cdot \nabla F_s(x_{C_j}) &= V_\infty \cdot \nabla F_s(x_{C_j}) + \sum_K^N [\nu_{jk} \cdot \nabla F_s(x_{C_j})] \Gamma_K = \dots \\ &\dots = V_\infty \cdot \nabla F_s(x_{C_j}) + \sum_K^N H_{jk} \Gamma_K = 0 \end{aligned}$$

Queda entonces un sistema de ecuaciones matricial de tipo $Ax = b$. La matriz de coeficientes en ese caso esta compuesta por los elementos H_{jk} , coeficientes de influencia aerodinámicos, indican como influencia cada torbellino Γ_K a cada panel j [23].

$$H\Gamma = U_\infty a \quad ; \quad a_j = \frac{V_\infty}{U_\infty} \cdot \nabla F_s(x) \quad (4.8)$$

Distribuciones de presiones y fuerzas

Una vez obtenidas las circulaciones se han de traducir a términos de fuerzas y presiones. Para ello se hace uso del teorema de Kutta-Joukovsky para obtener la fuerza ejercida en el panel:

$$F_j = \rho_\infty V \times \Gamma_j n_{ABj} \quad (4.9)$$

Se entiende n_{ABj} como el vector unitario que une los puntos A y B de cada panel (ver figura 4.17). El término F_j tiene unidades de fuerza distribuida, por lo que para obtenerlo en unidades de fuerza se ha de multiplicar por la longitud del segmento Δs y a partir de ahí si se desean unidades de presión se puede dividir por la superficie el panel S_j [24].

$$L_j = F_j \Delta s \quad ; \quad \Delta p_j = \frac{L_j}{S_j} \quad (4.10)$$

4.5.2. Representación de cargas

Una vez calculados las cargas y las distribuciones de presiones se han de representar para poder tener una idea de qué partes se verán más afectadas del ala. En el figura 4.18

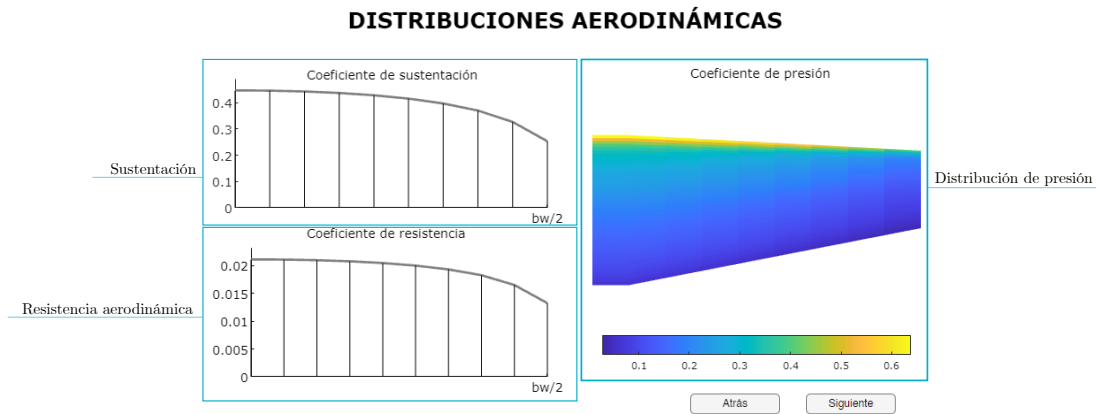


Figura 4.18 – Representación de las distribuciones de sustentación, resistencia y presión

se distinguen las dos distribuciones de fuerza y la de presión. En general la sustentación es mucho más alta que la resistencia esto hará se verá reflejado en el valor de las solicitaciones, en las orientación de la línea neutra y en la dirección de la deformada.

El número de paneles elegidos influye mucho en el tiempo de cálculo y es que a más paneles el tiempo de cálculo aumenta considerablemente siendo coste computacional de ligeramente inferior a N^2 . En la figura 4.19 la línea que estima la capacidad computacional

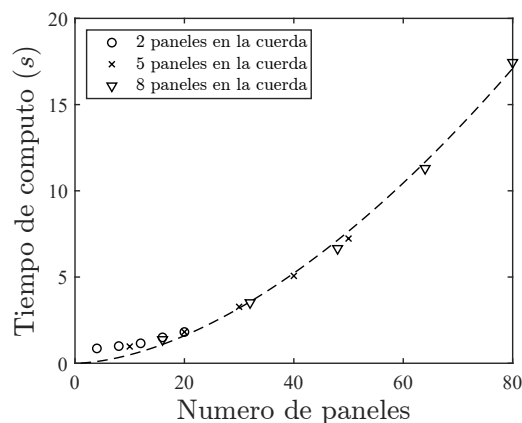


Figura 4.19 – Coste computacional de un ala dadas diferentes cantidades de paneles en envergadura y en cuerda

es del orden es de $N^{1,71}$ que es una estimación bastante correcta a lo que se había predicho. Se considerará que un número de paneles adecuado alrededor de 50 ya que a partir de ahí los datos de carga no se ven altamente modificados. Una vez obtenidos estos, basta con interpolar en todos los puntos de la envergadura para obtener una resolución adecuada.

4.6. Diagramas de solicitaciones

Los diagramas de solicitaciones son una representación de las solicitaciones internas a lo largo de la dirección x de la viga. Estos diagramas sirven también para indicar que secciones están más cargadas de una viga. Para representarlos hay que tener en cuenta todos los esfuerzos soportados por la viga incluyendo las reacciones producidas por los apoyos para equilibrar las cargas.

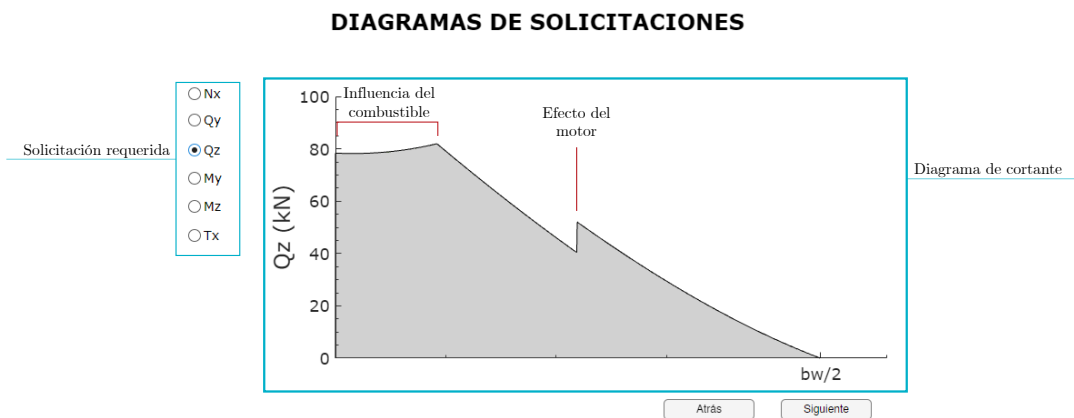


Figura 4.20 – Ventana del programa para mostrar los de diagramas de solicitaciones del ala. Se puede distinguir la influencia del combustible y del motor en un ala sin flecha.

En el programa se cuenta a la izquierda con una selección de solicitaciones para elegir, todas ellas explicadas en la sección 2.1.5. Y a la derecha, el diagrama, en el caso de la figura 4.20, es el del cortante Q_z . En este cortante se puede observar la influencia del combustible en el primer tramo y en ese momento se produce una discontinuidad de la pendiente; posteriormente, a mitad del semiala se ha colocado el motor lo que hace que se produzca otra discontinuidad en el valor del cortante.

4.6.1. Cálculo numérico de solicitaciones.

El primer paso para el cálculo de solicitaciones es calcular las reacciones del apoyo, pero para ello hay que tener claro las cargas aplicadas. Dada la flecha y el diedro, las cargas no están orientadas en los ejes de la viga, sino que, por ejemplo, parte de la carga ejercida por el motor puede ir al cortante Q_z pero parte puede estar soportada por el axil dado un diedro.

En el caso de las fuerzas aerodinámicas, estas están expresadas en ejes viento, por lo que hay que hacer una conversión para pasarlas a ejes cuerpo y posteriormente rotarlas en la dirección de la flecha y el diedro. Esto se puede hacer de manera más directa mediante el uso de matrices de rotación pre-multiplicando un vector de las fuerzas por la matriz de

rotación de la flecha y posteriormente del diedro.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -D \\ -L \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \Gamma_d & 0 & \sin \Gamma_d \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Gamma_d & 0 & \cos \Gamma_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Lambda & -\sin \Lambda & 0 \\ \sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{Bmatrix} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_{\text{eng}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_f \cdot l_f \end{Bmatrix} \right) \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Una vez obtenidas las fuerzas aplicadas ya se pueden calcular las reacciones de fuerzas y momentos haciendo uso de la ec. (2.20), la de momento referida al empotramiento. Una cosa a tener en cuenta que ya se mencionó en la sección 4.2 es que el motor, dependiendo de la flecha puede actuar como carga distribuida o como carga puntual. Bastaría con calcular la distancias desde la cuerda del encastre efectivo hasta la intersección del borde de ataque y el borde de salida con el motor y ver si son coincidentes o no. El momento flector que

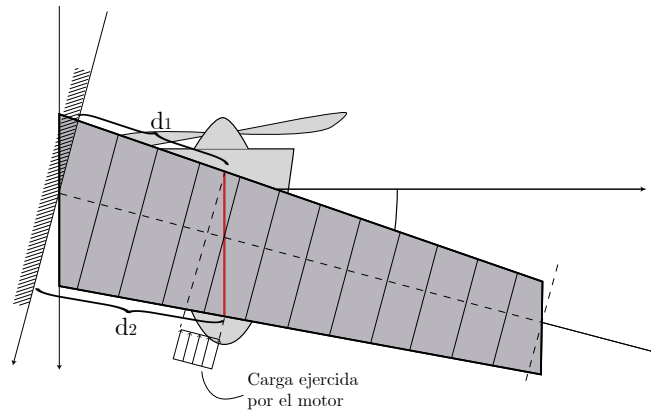


Figura 4.21 – Carga distribuida ejercida por un motor en un ala con flecha.

ejercen las cargas distribuidas depende de su centro de gravedad y en cargas no lineales, como puede ser la sustentación este se ha de obtener utilizando la forma integral de las ecs. (2.2). En el caso del momento ejercido por una carga p cualquiera es:

$$M_p = \int_0^L p \, dx \frac{\int_0^L px \, dx}{\int_0^L x \, dx} \approx \sum (p \cdot dx) \frac{\sum (p \cdot x)}{\sum x} \quad (4.12)$$

Finalmente, para el cálculo de los diagramas se hace uso de las ecs. (2.26) y (2.27). Para el axil y el torsor (este último una vez obtenido el *cec*), se integran las cargas en dirección x y los momentos M_x respectivamente. Otra manera de obtener los torsores es

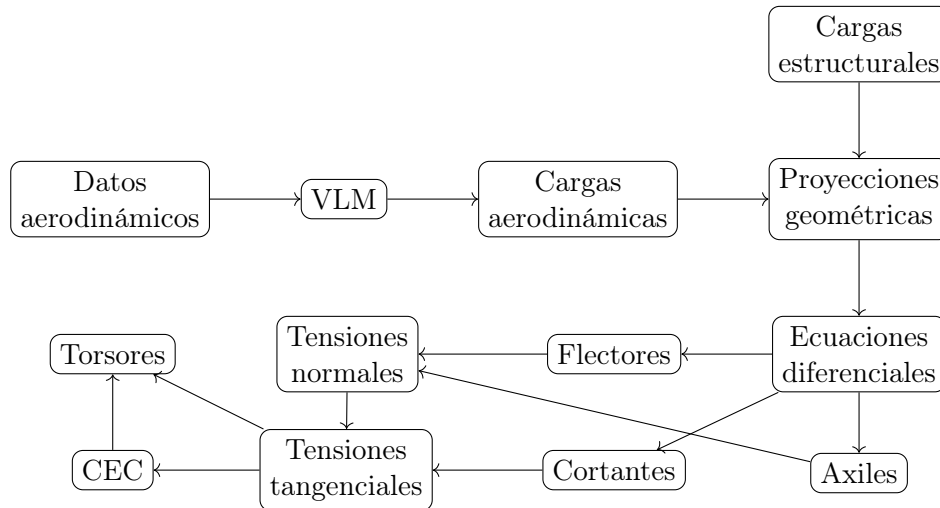


Figura 4.22 – Diagrama de funcionamiento de la penstaña de cálculo de diagramas.

mediante el flujo de torsor mediante la ecuación (2.21). Según la figura 4.22 el torsor se puede obtener de ambas maneras, aún así es más efectivo el cálculo mediante el flujo de torsor y posteriormente haciendo uso del momento polar y el módulo de cortante hallar el giro.

4.7. Distribuciones de tensiones

Las distribuciones de tensiones son uno de los elementos más representativos del programa y de los más útiles ya que permiten ver qué secciones están más cargadas de la aeronave y debido a qué sollicitación. Para ello como se ha explicado en la sección 2.1 se distinguen dos tipos de tensiones: normales y tangenciales.

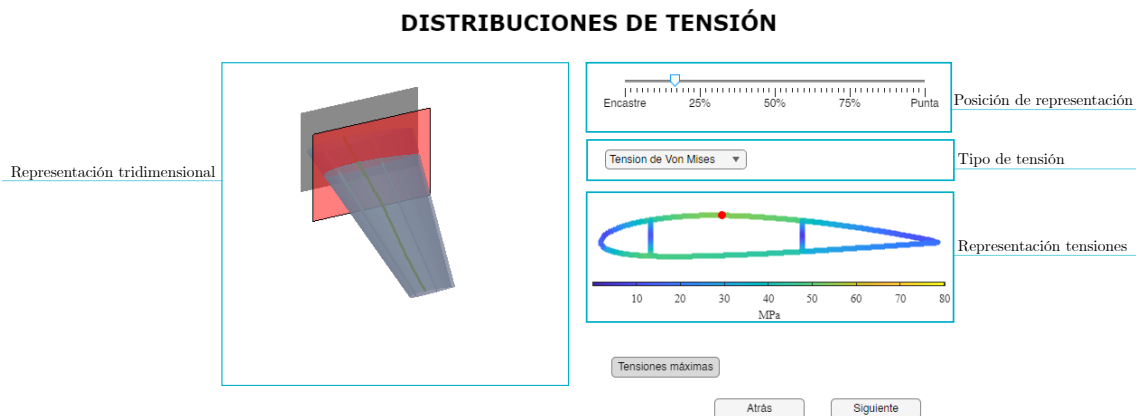


Figura 4.23 – Distribuciones de tensiones con vista tridimensional del ala y la sección elegida.

Una vez calculadas ambas tensiones se guardan en matrices de datos y una vez elegida una posición del ala para representar se busca en esas matrices de datos y se representan dependiendo de que tipo de tensiones se buscan representar en el desplegable de la figura 4.23.

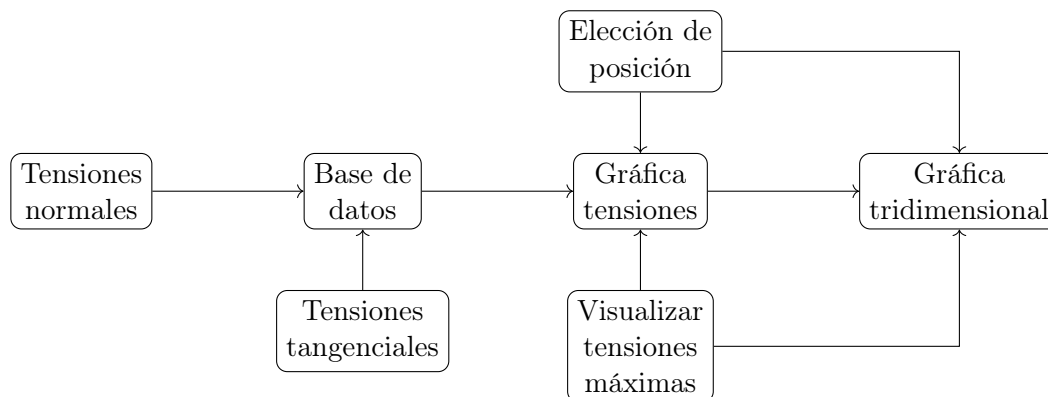


Figura 4.24 – Diagrama que muestra el funcionamiento de la pestaña. Modificar la posición modifica el cuadro rojo de la figura 4.23.

También se puede mostrar las tensiones máximas de cada sección para ver las zonas que más suelen estar cargadas. En este caso suele ser el intradós por compresión: debido a al diedro y la flecha, el axil mueve la línea neutra hacia arriba haciendo que las fuerzas de compresión sean mayores.

4.7.1. Cálculo de las tensiones normales

El método para calcular las tensiones normales puede ser tan simple como aplicar la ec. (2.11) de Navier a los distintos puntos de la sección y obtener un valor de tensión para cada punto en base a los flectores, las inercias y el axil. Pero esto solo es válido en materiales elástico-lineales y como se ha visto en la sección 4.3 el modelo utilizado es el de Ramberg-Osgood. Es por ello que se va a recurrir a usar la ecuación de equivalencia del momento con las tensiones de la que se deduce la Fórmula de Navier:

$$M_y = \int_A \sigma_x z \, dA \quad M_z = \int_A \sigma_x y \, dA \quad N = \int_A \sigma_x \, dA \quad (4.13)$$

Esto lleva a que el proceso de cálculo ha de ser iterativo: dada unas distribuciones de tensiones probar si son válidas las tres condiciones y si no es el caso modificar la distribución y volver a probar. Para realizar el cálculo hay que tener en cuenta diferentes propiedades de las deformaciones y es que la deformación en una viga de Euler-Bernoulli sometida a flexión es lineal partiendo de la línea neutra y la pendiente de la deformación es la es curvatura de la viga en ese punto [7]. La ec. (2.10) se puede traducir a:

$$\varepsilon = \kappa \cdot d \quad (4.14)$$

siendo d la distancia del punto a la línea neutra.

Para realizar estos cálculos hay que discretizar el ala en n particiones correspondientes a las secciones y cada sección en m segmentos rectos. Cuanto mayor sean m y n , mayor resolución tendrá el resultado obtenido, pero mayor tiempo de cálculo requerirá. En el programa se implementará 1000 discretizaciones y cada sección se dividirá en 200 segmentos.

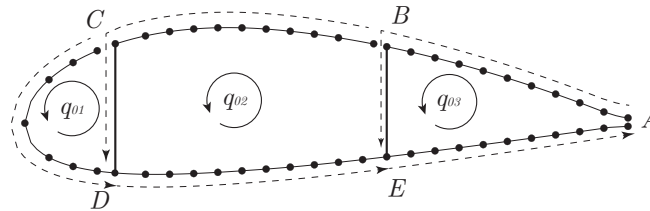


Figura 4.25 – División del perfil en los diferentes segmentos que lo componen y dirección arbitraria de los flujos y flujos constantes.

La línea neutra, tanto su orientación, como su posición inicial pueden ser determinadas con la Fórmula de Navier puesto que se encuentra en el tramo elástico, e incluso con la misma fórmula determinar una primera aproximación de κ mediante $\kappa = \sigma / (E \cdot d)$. Una vez aproximada se calculan las deformaciones de cada punto mediante la ec. (4.14). Esto

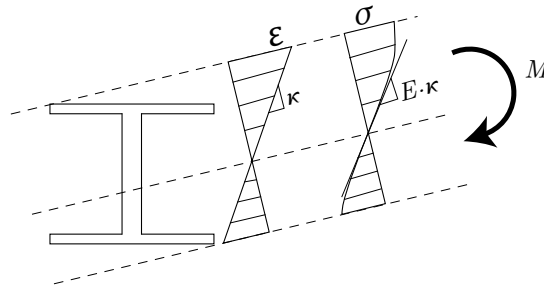


Figura 4.26 – Sección sometida a tensiones que provocan deformaciones. Equivalencia de momentos entre el flector M y las tensiones normales.

llevará a que se pueda usar la ec. (2.24) para obtener las tensiones. Una forma de reducir el tiempo de cálculo es disponer de un vector de ε y otros con sus respectivos σ e interpolar en función de las deformaciones que sufre la sección teniendo en cuenta que la sección está hecha de diferentes materiales.

$$\sigma_i = f_{RO}(\kappa \cdot d_i)$$

Una vez obtenida la distribución de tensiones se ha realizar la equivalencia de momentos, modificando κ en caso de no obtener el resultado adecuado. En el caso del axil si no se da la equivalencia de fuerzas se ha de mover la línea neutra manteniendo la orientación para que existan más fuerzas de tracción o compresión según se necesite.

$$M = \sum_i \sigma_i \cdot l_i \cdot t_i \cdot d_i \quad N = \sum_i \sigma_i \cdot l_i \cdot t_i$$

Esta iteración se puede llevar a cabo mediante el método de Newton-Raphson (ver sección 4.3.1). Dado que no se cuenta con una función concreta para calcular los momentos, basta con calcular las tensiones con κ y volver a calcularlas con $\kappa + \Delta\kappa$ y hallar la derivada del momento mediante ecuaciones en diferencias: $M' = (M_{\kappa+\Delta\kappa} - M_{\kappa})/\Delta\kappa$. En el caso del axil y suponiendo que la línea neutra se puede expresar con la ecuación de una recta $ay + b$ se puede iterar el parámetro b mediante el mismo método:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n - \frac{M}{M'} \quad b_{n+1} = b_n - \frac{N}{N'}$$

Con este método el resultado obtenido nunca será exacto, es decir, hay que verificar que el momento generado por las tensiones debe ser igual al momento en esa sección por el diagrama de flectores, pero ya que es un cálculo numérico en la gran mayoría de caso nunca será idéntico por lo cual se ha de asumir un margen de error. Esto puede suponer

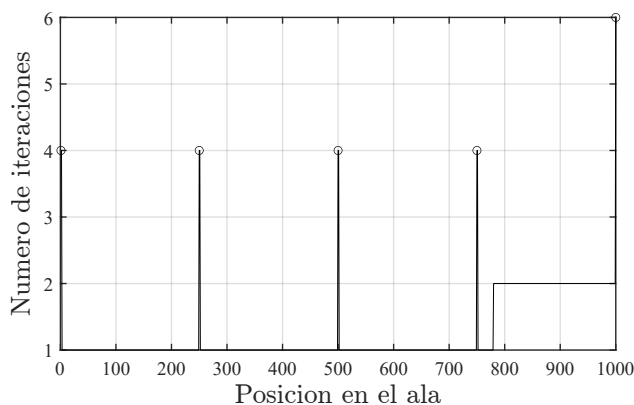


Figura 4.27 – Número de iteraciones realizadas en cada una de las discretizaciones realizadas al ala para un margen de error del 1 %.

que se requieran muchas iteraciones y el tiempo de computo aumente demasiado, pero optimizando el código y metiendo los incrementos de curvatura y posición de la línea neutra adecuados se observa en la figura 4.27 que las iteraciones son más bien pocas y el código funciona muy eficientemente. Aún así depende de la intensidad de las cargas, si estas son muy altas requerirá más iteraciones puesto que la variación de κ y b será mayor.

4.7.2. Cálculo de las tensiones tangenciales

. Al igual que en el caso de las tensiones normales, estas se pueden calcular mediante la ec. (2.15), pero esta también deriva de la Formula de Navier que es para modelos elástico-lineales. Es por ello que se hace uso de la definición formal de flujo de la ec. (2.14).

$$q = q_0 + t \int_0^s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ds$$

En primer lugar, se ha de derivar la tensión respecto de la envergadura. Sin embargo debido al estrechamiento y a la torsión está no esta no recorre directamente el ala en la dirección x , sino que tiene una componente en y y en z . Estas dos últimas generarán torsión

al rededor del *cec* y tendrán que tenerse en cuenta en el cálculo de momentos.

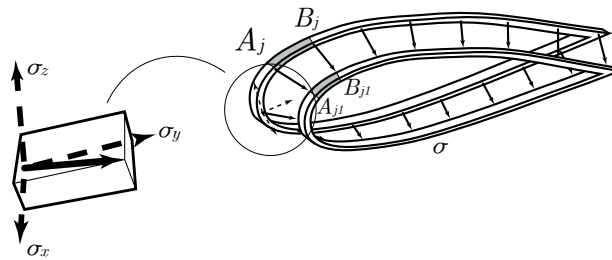


Figura 4.28 – Proyección de la tensión normal en los tres ejes debido al estrechamiento y a la torsión

Se considera un segmento j , cuyos extremos son A_j y B_j , y el mismo segmento $j1$ en la sección posterior cuyos extremos son A_{j1} y B_{j1} . La distancia entre estos dos segmentos es Δl , y la distancia entre dos discretizaciones es Δx , por lo tanto:

$$\sigma_x = \sigma \frac{\Delta x}{\Delta l}$$

Si se poseen las coordenadas de ambos segmentos se puede obtener Δy y Δz para obtener las proyecciones de la tensión en los dos ejes. Obtenida σ_x se puede derivar la tensión de forma numérica, mediante una ecuación en diferencias. Aún así el estrechamiento y la torsión son muy graduales y la tensión σ_x supondrá prácticamente la totalidad de la tensión [9].

Una vez derivada se ha de integrar a lo largo del recorrido del segmento. La tensión y su derivada a lo largo de un segmento es lineal, eso se debe a que depende únicamente de la distancia a la línea neutra (al menos en el tramo elástico), y esta es lineal, por lo que la integral será la de una función lineal. Dado que se ha de realizar de forma numérica basta con tener la tensión en ambos extremos del segmento y aplicar una fórmula de integral numérica, por ejemplo, para un segmento j de longitud l_j :

$$q_{j2} = \frac{(\sigma'_{j1} + \sigma'_{j2})l_j}{2} + q_{j1}$$

En este caso se ha usado la regla del trapecio. Esta es totalmente efectiva en el tramo elástico, pero una vez se llegue al tramo plástico se deba usar una integral más precisa, como la de Simpson (ver sección 4.4.1) obteniendo un valor de flujo al inicio del segmento, en la parte intermedia y al final.

Para calcular el flujo hay que elegir un punto de la sección donde se conozca el valor de este, pero *a priori* eso no es posible, ya que la sección no tiene ninguna característica especial como pudiera ser un eje de simetría. Para resolver esto, se elige un punto arbitrario por malla para abrir la sección, y en ese punto el flujo será nulo. Estos tres puntos (por cada malla) son el borde de fuga y la parte superior del ambos largueros. También se ha de

elegir la dirección sobre la cual se va a integrar y en este caso será antihoraria (ver figura 4.25). En los puntos *D* y *E* de la figura 4.25 confluyen dos flujos, por lo que para calcular el inicio del flujo de los tramos siguientes se han de sumar los dos anteriores.

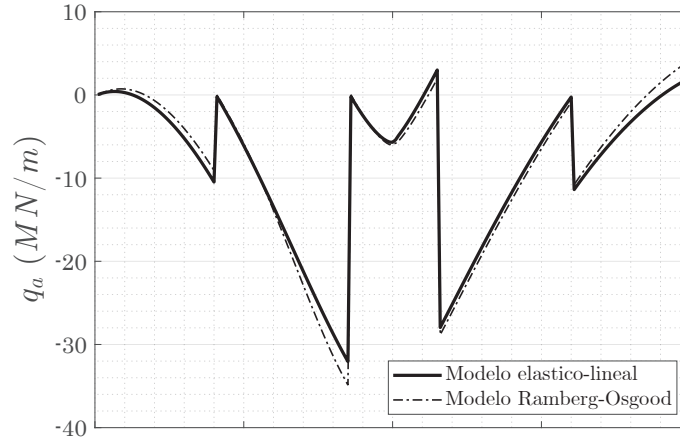


Figura 4.29 – Comparación entre el flujo abierto en la piel usando cualquiera del modelo elástico-lineal de la ec. (2.15) y el modelo Ramberg Osgood usando la ec. (2.14).

En los casos en los que haya área concentrada, se puede hacer uso de la ec. (2.15) sabiendo que el momento estático no es más que el producto del área concentrada por la distancia al centro de gravedad. En el cálculo del flujo esto se verá reflejado en un salto del valor del flujo en esos extremos, pero la conservación del flujo se ha de mantener.

$$q_A = \frac{Q_y I_{yz} - Q_z I_z}{I_d} A \cdot z_A^2 + \frac{Q_z I_{yz} - Q_y I_y}{I_d} A \cdot y_A^2$$

Una vez calculado el flujo abierto se le ha de añadir una parte constante para enmendar el corte en la sección antes producido. Para obtenerlo se ha de saber que el flujo genera un giro alrededor del centro de esfuerzos cortantes, este giro ha de ser el mismo al momento torsor total que experimenta la sección.

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 2 \sum_k \hat{A}_k q_{ok} + \sum_j F_j \rho_{gj} = \dots \\ &\dots = M_L + M_D + M_W + \sum \sigma_{y,j} A_j \frac{\Delta y_j}{\Delta l_j} \rho_{gy} + \sum \sigma_{z,j} A_j \frac{\Delta z_j}{\Delta l_j} \rho_{gz} \end{aligned} \quad (4.15)$$

El momento producido por el flujo es la suma del momento producido por el flujo constante de una malla *k* mediante la ec. (2.21) y el producido por el flujo abierto. Para obtener este, se integra el flujo a lo largo de cada segmento y se obtiene la fuerza equivalente a ese flujo y se multiplica por el brazo de palanca. Los momentos se pueden calcular respecto a cualquier punto ya que se ha de cumplir que debe haber equivalencia de momentos en cualquiera de estos.

Al otro lado de la igualdad se ha de equiparar el momento de los flujos al producido por las fuerzas externas (sustentación, pesos,...) y al producido por las componentes en los ejes y y z de las tensiones normales. En este último caso hay que multiplicar la tensión de cada segmento por el área de este para obtener las fuerzas equivalentes.

Sin embargo siguen haciendo falta 2 ecuaciones más para resolver el sistema de ecuaciones. Para ello se hará uso de la ec. (2.30) renombrando θ como el giro total y ϕ el giro por unidad de longitud.

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{2\hat{A}G} \int_0^s \frac{q(s)}{Gt} ds = \frac{1}{2\hat{A}G} \sum \left(\frac{F_j + q_{ok}l_j}{t_j} \right) \quad (4.16)$$

Este giro corresponderá a cada malla. Se ha de usar la propiedad de que el giro es el mismo en cada malla por lo que, por ejemplo, se puede usar $\theta_I = \theta_{II}$ y que $\theta_{II} = \theta_{III}$ dando como resultado 3 ecuaciones con los giros constantes como incógnitas.

El flujo total que se obtiene de aquí es el debido a la suma de cortante y torsor. Pero si se hace la suposición de que no se induce ningún giro debido a que no existe torsor se puede aislar el flujo de cortante producido por cortante por separado suponiendo que $\theta_I = \theta_{II} = \theta_{III} = 0$. La diferencia entre estos dos flujos es el flujo debido únicamente a torsor. Con este último se puede calcular el torsor total por sección.

$$T = T_I + T_{II} + T_{III} = 2\hat{A}_I q_{o,I} + 2\hat{A}_{II} q_{o,II} + 2\hat{A}_{III} q_{o,III} \quad (4.17)$$

Finalmente, para obtener la tensión tangencial basta con dividir cada tipo de flujo por el espesor del segmento.

Tensión de Von Mises

No es posible poder comparar tensiones tangenciales y normales directamente puesto que estas están en diferentes planos como se vio en la sección 2.1.2. Para ello se hace uso de la tensión de Von Mises [25]:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (4.18)$$

donde σ_1 , σ_2 y σ_3 son las tensiones en las direcciones principales de inercia. Para una viga estas tres tensiones valen:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}}{2} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}}{2}$$

lo que deja la tensión de Von Mises en

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \quad (4.19)$$

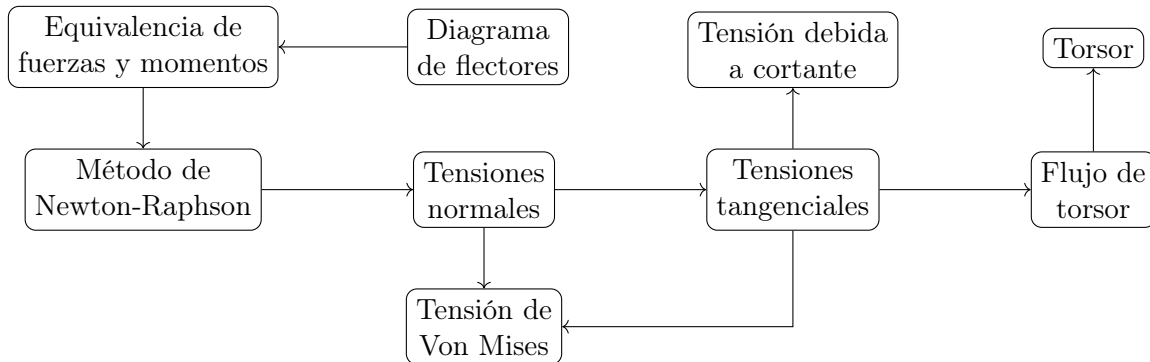


Figura 4.30 – Diagrama que muestra el los pasos del cálculo de las diferentes tensiones.

4.8. Desplazamientos y giros

La última pestaña de la aplicación consiste en mostrar que desplazamiento sufre el ala debido a las cargas. El desplazamiento viene originado por las cargas que al deformar la viga esta obligada moverse de su posición inicial.

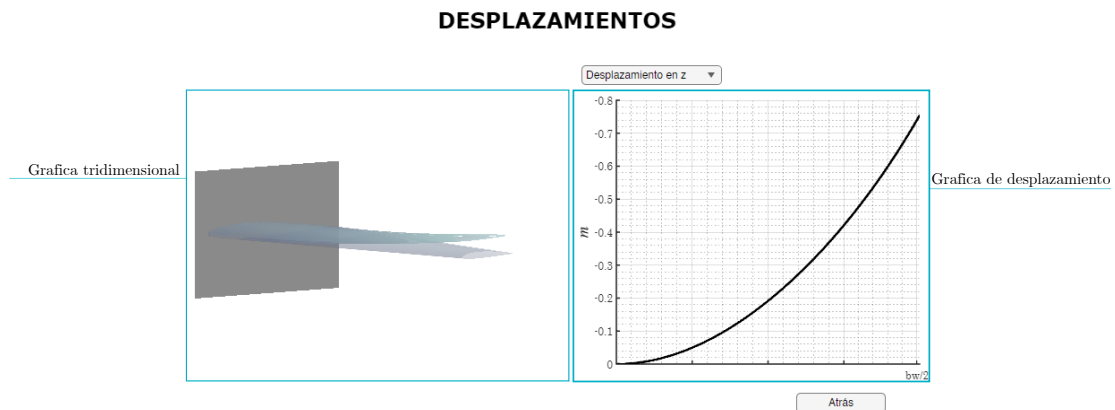


Figura 4.31 – Ventana de muestra desplazamiento y giro del ala de forma tridimensional y bidimensional.

El cálculo de las tensiones normales se ha hecho por medio de la curvatura, calculándola en cada discretización del ala, llegando a obtener una función de $\kappa = \kappa(x)$. La curvatura es la segunda derivada del desplazamiento por lo que para obtener el desplazamiento basta con integrar esta dos veces a lo largo de la envergadura.

$$\omega(x) = \int_0^x \phi_x dx = \int_0^x \int_0^x \kappa dx^2 \quad (4.20)$$

Si se integra una vez se obtiene el giro entendido como la pendiente de la viga. Este ha de ser nulo en el empotramiento al igual que el desplazamiento. Se ha de integrar la curva-

tura κ_y y κ_z por se parado para obtener el desplazamiento en ambos ejes. Otro forma de recoger esto es mediante una sola κ y la orientación a la que se produce el desplazamiento como $\chi = \arctan(M_y/M_z)$.

En el caso del giro este es el resultado de dividir el torsor por la rigidez a torsión que se corresponde al producto del módulo de cortante y el momento polar de inercia que puede ser calculado como la suma de los momentos de inercia $J = I_y + I_z$.

$$T = \int_A \tau dA \quad r = \int_A (Gr\theta)r \, dA = G\theta \int_A r^2 \, dA = G\theta J \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{T}{GJ} \quad (4.21)$$

En el caso del módulo de cortante se ha de obtener el módulo de Poisson haciendo uso de la ec. (2.25). Esta ecuación modifica el módulo de Poisson dependiendo de la tensión que sufra la sección en ese momento evolucionando desde un módulo elástico a uno plástico de 0,5.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.22)$$

A cada segmento de la sección le corresponde un valor de ν ya que la tensión varía en función del punto y dado que la sección está hecha de diferentes materiales estos tendrán un módulo de Poisson diferente también para obtener un módulo de cortante genérico para toda la sección se ponderará el módulo de cortante local por el área del segmento respecto al área total.

En estos caso el módulo de cortante tiene un orden de $\sim 10^8$, el torsor de $\sim 10^5$ y el momento polar de $\sim 10^{-1}$ por lo que el giro será alrededor del orden de $\theta \sim 10^{-4}$ rad lo cual es inapreciable debido a la alta rigidez.

5

Validación de resultados

Una vez presentado todo el programa se ha de comprobar si este funciona correctamente comparándolo con datos que se puedan a firmar que son totalmente ciertos. Es aquí donde comienza el proceso de validación, que permitirá ver que tan útil, práctica y correcta es la aplicación implementada.

5.1. Validación de los diagramas.

Una de las verificaciones más inmediatas que se pueden hacer es la de los diagramas de flectores y cortantes ya que existen numerosos *software* comerciales que permiten el análisis de estos. El que se va a utilizar en esta ocasión es *Robot*[®] donde se puede definir una viga sometida a diferentes tipos de cargas y ver como responde a cada uno de ellos. Se visualizarán 3 casos, cada uno más complejo que el anterior y se contrastarán las similitudes y se explicarán las diferencias si las hay.

5.1.1. Caso 1: Ala recta sometida a sustentación

El primer caso será el más sencillo de todos, una ala recta con una sección determinada sometida únicamente a una fuerza de sustentación. Las condiciones de vuelo y diseño del ala son:

Perfil aerodinámico	c_r	$b_w/2$	Velocidad	α	Densidad
NACA 11005	2m	4m	80m/s	3°	1.225 kg/m ³

Tabla 5.1 – Datos implementados en el primer caso de estudio de validación del programa.

Dadas las características aerodinámicas presentadas, la fuerza de resistencia es despreciable comparada a la de la sustentación por lo que está será la única a tener en cuenta, además se comprobará únicamente el momento flector M_y ya que deriva del cortante por

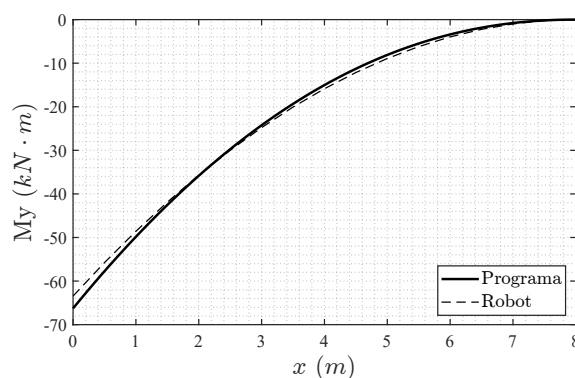


Figura 5.1 – Comparación entre el momento flector M_y entre el programa y el *software Robot*[®]

lo cual si este es correcto el cortante también lo será. En la figura 5.1 se observa como tanto la tendencia como la reacción en $x = 0$ se pueden dar por válida.

5.1.2. Casa 2: Fuerza puntual

El siguiente caso es la presencia de una fuerza puntual, en este caso la del motor, a mitad del ala. Las características serán las mismas que en el caso anterior, sumadas a las del motor con una fuerza puntual en el centro de la nave.

Peso del motor	Posición del motor
1200 kg	50 %

Tabla 5.2 – Datos extra de la implementación en el segundo caso de estudio de validación del programa.

Para este caso se representará el cortante Q_z donde será más apreciable el efecto que tiene el motor en las sollicitaciones internas. En la figura 5.2 se observa el salto producido por

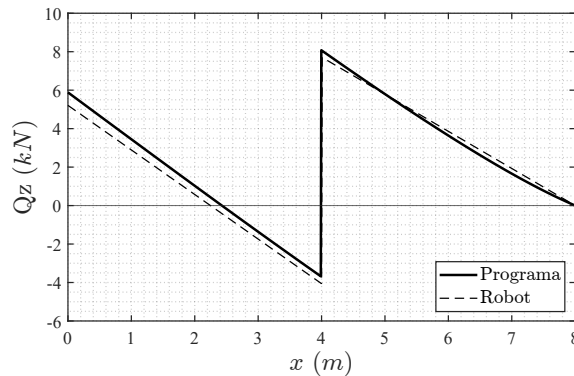


Figura 5.2 – Comparación del cortante Q_z entre el programa y el *software Robot*[®]

la presencia de la fuerza puntual. De nuevo las reacciones están calculadas correctamente ya que en $x = 0$ las dos gráficas son casi coincidentes, el efecto de la fuerza puntual es similar y ambos tiene el cortante nulo en el borde libre.

5.1.3. Caso 3: Ala con diedro

El ala con diedro tiene la particularidad de que las fuerzas se proyectan en otras direcciones, en concreto, la fuerza vertical se proyecta en la dirección del axil. Tanto la sustentación como el peso se ven proyectos en ambas direcciones. En este caso se probará con diedro de 5° que al ser tan bajo el axil resultante será bastante bajo, pero aún así apreciable.

Se observa otra vez en la figura 5.5 que los resultados son válidos exceptuando algunas discrepancias en el cálculo de la reacción y a lo largo de la viga.

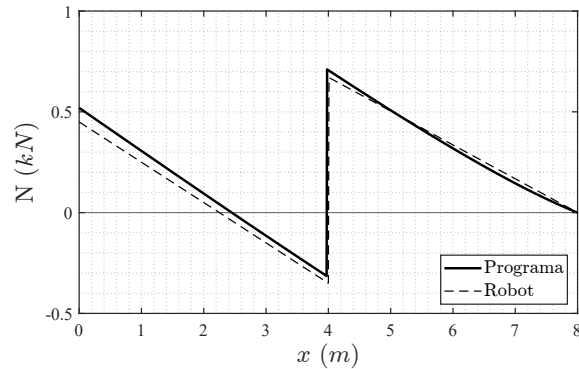


Figura 5.3 – Comparación entre del axil N_x entre el programa y el *software Robot*®

5.2. Desplazamiento

Queda por comprobar la parte más complicada de todas que es el desplazamiento de la barra. Este desplazamiento depende en gran medida del material utilizado, de la sección y su inercia, y sobre todo de las cargas. Por lo que representando el desplazamiento y haciendo uso de un material con Acero A37.

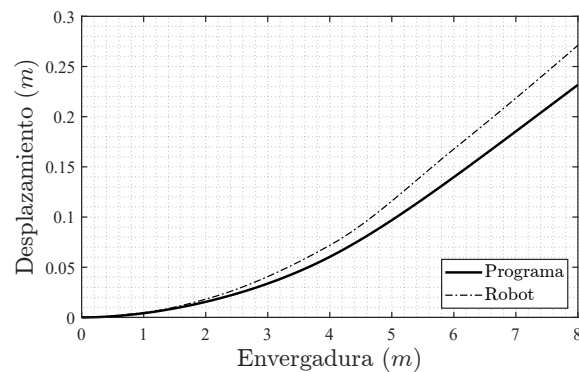


Figura 5.4 – Comparación entre los desplazamientos obtenidos por el programa y el *software Robot*®.

En la figura 5.4 se puede observar que los desplazamiento son similares, a pesar de que ha habido un error por un déficit en la estimación de alrededor del 14% sigue siendo una aproximación bastante buena para lo que es el objetivo final del programa. En ambos casos se cumple la condición de giro y desplazamiento nulo en el encastre y el trazado de la flecha es más o menos parabólico puesto que la carga es en cierta manera constante. No es muy notable pero existe cierto cambio de tendencia en el centro debido a la presencia de la carga puntual.

5.3. Comprobación de las tensiones

El siguiente paso a comprobar son las tensiones, tanto las tangenciales como las normales. *Robot*[®] posee una función de análisis de tensiones y bastaría con analizar varias secciones aleatorias para comprobar si el código implementado es correcto.

5.3.1. Tensiones normales

El caso de las tensiones normales dado que no se especifica el material se trabajará en el rango elástico pudiendo obtener el mismo resultado tanto con la Fórmula de Navier como con el método iterativo visto en la sección 4.7.1, ambos resultado deben arrojar valores similares.

My	Mz
1992,00 kN m	-9,95 kN m

Tabla 5.3 – Momentos aplicadas para calcular la tensión normal.

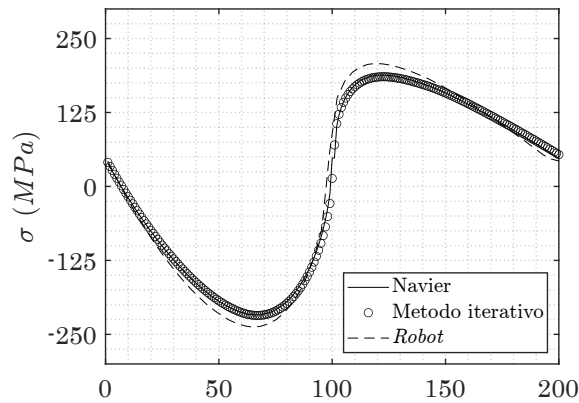


Figura 5.5 – Comparación entre las tensiones normales obtenidas por el método de iterativo, la Fórmula de Navier y el *software Robot*[®] a lo largo de la piel.

Los resultados son prácticamente similares y prácticamente coincidentes en el caso de las tensiones calculadas por medio del programa. Es un cálculo sencillo que depende únicamente de la distancia a la línea neutra excepto cuando las cargas son muy altas y el ala empieza a sufrir deformaciones permanentes.

5.3.2. Tensiones tangenciales.

El caso de las tensiones tangenciales es algo más complejo, pero como se ha visto en la figura 4.29. Primero se compara el flujo abierto con las aperturas mostradas en la figura 4.25. Los datos utilizados en este caso son:

Q_z	Q_y
154,72 kN	0,86 kN

Tabla 5.4 – Cortantes aplicados para calcular la tensión tangencial.

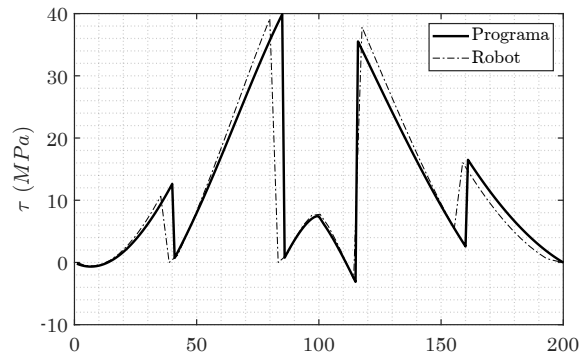


Figura 5.6 – Comparación entre las tensiones tangenciales obtenidas por el programa y el *software Robot*® a lo largo de cada uno de los segmentos de la piel en sección abierta.

Son resultados bastante válidos ya que tanto la forma como los órdenes de magnitud son muy similares. Los flujos constantes por su parte son para el programa $q_{o,I} = 2683N/m$, $q_{o,II} = 77949N/m$ y $q_{o,III} = 24571N/m$; y en el caso del *software* comercial $q_{o,I} = 2423N/m$, $q_{o,II} = 75009N/m$ y $q_{o,III} = 22442N/m$. Otra vez los valores son bastante parecidos o al menos del mismo orden.

6.1. Conclusiones

El objetivo inicial de este Trabajo Fin de Grado, era el diseño de un programa numérico para el cálculo estructural de un ala sometido a condiciones de crucero basándose en la teoría elemental de vigas y adaptándola al hecho que se presentaba. Es un trabajo multidisciplinar que recopila todo lo aprendido en teoría estructural de vigas, parte de aerodinámica, diseño de aeronaves y mecánica de los materiales, para ver el comportamiento una viga no común dada la complejidad de la sección y la variación de esta a lo largo de la envergadura. Para validar todo ello se ha hecho uso del *software* comercial *Robot*[®] ya que proveía de las características y las funciones necesarias para poder verificar el funcionamiento correcto de la aplicación a pesar de no ser tan meticuloso.

De todo el trabajo realizado, los cálculos, resultados y comprobaciones se puede concluir:

- La teoría de vigas es bastante potente y precisa para el cálculo estructural bajo ciertas condiciones. Esta teoría tiene unas premisas fundamentales que se han de cumplir y en base a ellas y otras hipótesis se puede construir un modelo de cálculo de vigas que es bastante preciso. Sin embargo fuera de esas hipótesis la teoría no vale y los resultados obtenidos se pueden distanciar de la realidad.
- El diseño preliminar de aeronaves es sumamente importante. En general el diseño de aeronaves y en concreto de alas, que tienen que cumplir condiciones cada vez más estrictas, es muy costoso y meticuloso pero también bastante creativo y flexible. Y es esto último lo que lo hace tan complicado, dado que existen multitud de caminos a seguir y no se pueden trazar todos a la vez, se ha de limitar en la fase preliminar que se desea antes de seguir profundizando en alguno en específico y es ese el objetivo de la aplicación.
- El poder introducir las cargas de manera automática en base a la aerodinámica de la aeronave es bastante útil y cómodo, dado que no se necesita, como podría ser el caso de un CAD, hacerlo de manera manual y con la necesidad de repetir una y otra vez el proceso ya que este es muy costoso.
- De manera más específica, los métodos de cálculo de tensión dados diferentes materiales, sección variable y con modelos de fluencia proporcionan una manera de ver el funcionamiento real de las vigas totalmente diferente. El cálculo se hace de manera formal viendo cómo las tensiones que sufre el material debido a las cargas aplicadas son las que en sí deforman el material y provocan las solicitaciones y no al contrario como la Fórmula de Navier daba a entender.
- Con el cálculo de tensiones tangenciales sucede algo similar. Con la fórmula para el modelo elástico-lineal se daba a entender que estas derivaban del cortante pero en sí, tal como dice su definición formal son de la derivación de esfuerzos normales.

Realmente es una manifestación de lo mismo, las tensiones normales se relacionan con los momentos y derivar las tensiones de alguna manera es derivar los momentos que resultan en los cortantes.

- Los cálculos de desplazamiento se han hecho hasta ahora con la ecuación de la viga o en el caso de vigas hiperestáticas con el Segundo Teorema de Castigliano [11], pero en este caso dada la no linealidad del problema presentado se ha hecho uso de la relación que tienen los momentos y la flecha de desplazamiento, que es la curvatura. Definir la curvatura en cada punto y derivarla dos veces imponiendo condiciones de contorno realmente es lo mismo que se hace en los otros dos métodos pero no de manera tan representativa.
- La implementación de un modelo aerodinámico adecuado ha sido también muy importante a la hora poder implementar el modelo de cargas. El hecho de decantarse por el VLM es por las razones ya expuestas, su rapidez de cálculo y su precisión. En este caso se ha adaptado uno ya existente[24] a las características de este proyecto.
- Programar es una tarea muy repetitiva, que implica revisar constantemente el por qué del fallo y probar todas las situaciones posibles para revisar constantes fallos y problemas que pueda dar la aplicación y en este caso no ha sido diferente. Ha sido un trabajo de creatividad a la hora de crear funciones y de integrar de manera eficaz todos los conocimientos adquiridos en una infinidad de líneas de código y que estas se relacionen entre sí de manera que el programa entero tenga sentido como uno solo.

6.2. Trabajos futuros

El propósito final de este proyecto es que sea de utilizado por las personas para sus proyectos y por ello se dejará a acceso libre. A pesar de eso y del trabajo logrado queda mucho por profundizar ya que no se han explorado todas las vertientes que se pueden tratar y que se dejan para futuras actualizaciones:

- Incluir más modelos de perfil. Se han utilizado perfiles NACA de cuatro y cinco cifras puesto que son fáciles de representar y de trazar con una simple función pero existen multitud de perfiles diferentes que pueden ser incluidos.
- La posibilidad de incluir una variación del perfil a lo largo de la viga y que esta no sea lineal.
- Incluir más modelos de materiales, la cantidad de materiales que existen en el sector aeronáutico es inmensa incluso aquellos no metálicos.
- Incluir otros modelos de materiales que relacionen tensión y deformación ya que no solo existen los que se han tratado en este proyecto.
- Trabajar con materiales no isótropos como materiales compuestos.
- Incluir más geometrías, al final se ha limitado el ala a una forma trapezoidal ya que se ha considerado una forma bastante representativa, sin embargo existen muchos otros tipos de alas y estas se diseñan por sectores y no como un conjunto.
- Incluir otras condiciones de vuelo como el derrape, como vuelo no estacionario, actuaciones de un despegue, un aterrizaje, una maniobra, o incluso condiciones de crucero no estacionarias, lo que implicaría incluir teoría de Aeroelasticidad.
- Incluir dispositivos hipersustentadores y de control. La teoría VLM soporta este tipo de dispositivos y a nivel práctico sería únicamente modificar las cargas puesto que la teoría de vigas no se vería afectada.
- Poder explorar la posibilidad de tener secciones paralelas al flujo trabajando con otros modelos de viga.
- Estudiar el pandeo de placas. Al final en algún momento se ha llegado mencionar anterior mente, pero las cargas de compresión debido la flexión actúan en las placas del cajón de torsión e incluir la teoría de placas para futuras actualizaciones pudiera ser bastante útil.
- Estudiar la interacción con otros elementos. El ala esta encastrada con el fuselaje y las cargas se transfieren a una estructura totalmente diferente, lo cual requeriría un trabajo aparte de análisis. También la posibilidad de incluir una cola y ver como se modifica el flujo por *downwash* y como afecta al rendimiento del estabilizador.

6.3. Presupuesto

La ingeniería es una disciplina que trata de hacer más eficiente el diseño, desarrollo y los procesos, pero conlleva una parte fundamental consigo que es el tema de los costes y el presupuesto de desarrollar estas tareas. Para el presente proyecto he aquí un desglose de los presupuestos:

Categoría	Cantidad	Precio por ud.	Coste total
Horas de trabajo	360	35,00€/h	12.600€
Documentación	50		
Programación	170		
Formación en los programas	20		
Validación	10		
Redacción	110		
Licencias	3		5.437,48€
Licencia <i>MatLab</i> [®] estándar	1	900,00€/año	
Licencia <i>Robot</i> [®] estándar	1	4102,00€/año	
Licencia <i>Illustrator</i> [®] estándar	1	435,48€/año	
Material utilizado			
Ordenador Asus TUF F15	1	999,00€/ud.	999,0€
Coste total			19.036,48€

Tabla 6.1 – Desglose del presupuesto

A

Objetivos de desarrollo sostenible

En 2015, la Asamblea General de las Naciones Unidas adoptó la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible, que incluye 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). Estos objetivos buscan abordar desafíos globales como la pobreza, la desigualdad, el cambio climático, la degradación ambiental, la paz y la justicia. Para este proyecto se han logrado los siguientes:

Objetivos de Desarrollo Sostenibles	Alto	Medio	Bajo	No Procede
ODS 1 Fin de la pobreza.				×
ODS 2 Hambre cero.				×
ODS 3 Salud y bienestar.				×
ODS 4 Educación de calidad.		×		
ODS 5 Igualdad de género.				×
ODS 6 Agua limpia y saneamiento.				×
ODS 7 Energía asequible y no contaminante.				×
ODS 8 Trabajo decente y crecimiento económico.				×
ODS 9 Industria, innovación e infraestructuras.	×			
ODS 10 Reducción de las desigualdades.				×
ODS 11 Ciudades y comunidades sostenibles.				×
ODS 12 Producción y consumo responsables.				×
ODS 13 Acción por el clima.				×
ODS 14 Vida submarina.				×
ODS 15 Vida de ecosistemas terrestres.				×
ODS 16 Paz, justicia e instituciones sólidas.				×
ODS 17 Alianzas para lograr objetivos.			×	

Tabla A.1 – Objetivos de desarrollo sostenible

B

Pliego de condiciones y planos

B.1. Planos

No se han utilizado planos para este proyecto.

B.2. Pliego de condiciones

Objeto

El proyecto tiene como objetivo principal el desarrollo de una herramienta numérica utilizando *MatLab*[®] para calcular y modelar esfuerzos y deformaciones en estructuras alares sometidas a cargas aerodinámicas.

Condiciones de los materiales

Los materiales utilizados son ampliamente utilizados en el sector aeronáutico. Aleaciones de acero, aluminio y titanio que se caracterizan por su alta rigidez, su ligereza, su resistencia a la corrosión y en algunos casos su resistencia térmica. Esta tabla recoge los materiales utilizados por el programa en base a la nomenclatura británica [10].

Especificación del material	E (GPa)	σ_n (MPa)	m	Fluencia (MPa)
Aleaciones de aluminio y cobre				
DTD 5070B	74	301	16.6	328
3L 72	68	179	6.02	205
L164	68	179	6.02	200
L165	68	304	15.5	329
L166	68	226	11.3	252
L167	68	342	18.5	367
Aleaciones de aluminio y zinc				
DTD 5114	76	454	22.6	482
DTD 5044	76	444	22.2	474
2L 95	73	423	15.5	451
2L 88	68	416	14.2	441
Aceros resistentes a corrosión				
S524	173	301	4.64	372
S532	199	648	14.6	718
Titanios				
Ti-6Al-4V	113	815	39.7	851

Tabla B.1 – Materiales implementados en el programa

Controles de calidad de los materiales

Los materiales utilizados son ampliamente conocidos en el sector aeronáutico, y los proveedores que los proporcionan suelen trabajar con altos estándares de calidad requeridos, siguiendo estándares de EASA y la FAA.

Condiciones de ejecución

La implementación numérica del programa ha consistido en hacer uso de la interfaz de diseño de aplicaciones de *MatLab*[®]. Se estructurará cada ventana de la aplicación en función de la parte del diseño y análisis necesaria guardando siempre de que sea lo más cómoda de usar posible. Se podrá utilizar en prácticamente todos los ámbitos donde se trabaje con alas trapezoidales bilargueros.

Control de calidad de la ejecución

De forma periódica se va a revisar y actualizar el programa intentando que este mantenga de forma constante mejoras de funcionalidades y añadir otras nuevas. En el apartado Trabajos Futuros se han especificado algunas de las ideas que se pretenden implementar para este proyecto. Todo ello validado con *software* comerciales y teoría de vigas validada con la ventaja de que el diseño se realiza de forma inmediata y el cálculo también. De todas formas se puede revisar periódicamente los avances en este enlace:

<https://github.com/omehelb/WingCalculator>

Pruebas y ajustes finales

Se han probado diferentes situaciones comparando siempre con un *software* comercial y viendo en que falla y en que se puede mejorar. Aún así la variedad de alas a poder implementar son muchísimas dada la alta personalización y que posteriormente se añadirán más actualizaciones, sin embargo en la gran mayoría de casos esto es remediable ya que la teoría es válida en la gran mayoría de alas y en todo caso serán errores de programación.

Bibliografía

- [1] AviationSource News. Vietnam airlines granted boldest move award by skyteam. <https://aviationsourcenews.com/airline/vietnam-airlines-granted-boldest-move-award-by-skyteam/>. Accessed: 08-07-2024.
- [2] Luis García. Eurofighter typhoon in madrid (spain) 01. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eurofighter_Typhoon_in_Madrid_%28Spain%29_01.jpg, 2008. Accessed: 08-07-2024.
- [3] Alan Wilson. Piper pa28-181 archer ii 'g-bxex' (44034123880). https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Piper_PA28-181_Archer_II_%E2%80%9998G-BXEX%E2%80%99, 2018. Accessed: 2024-07-09.
- [4] Michael Chung-Yung Niu. *Airframe structural design: practical design information and data on aircraft structures*. Conmlit Press, Hong Kong, 2nd ed. edition, 1999.
- [5] Hichem Djadoudi. The top 6 best finite element analysis (fea) software 2024, 2023. Accessed: 2024-07-25.
- [6] E.R. Johnston F.P. Beer. *Mécanica vectorial para ingenieros: estática*. McGrawHil, 8th edition, 2007.
- [7] R.C Hibbeler and Kai Beng Yap. *Mechanics of materials*. Pearson, Harlow, United Kingdom, tenth edition in si units edition, 2018.
- [8] T. H. G. Megson. *Introduction to aircraft structural analysis*. Butterworth-Heinemann, Amsterdam;, 2010.
- [9] Enrique de la Fuente Tremps. *Introducción al análisis de las estructuras aeronáuticas*. Garceta, Madrid, 2014.
- [10] ESDU International plc. Esdu 76016. generalisation of smooth continuous stress-strain curves for metallic materials, 1991.
- [11] Jose Luis Perez Aparicio and Mario Lazaro. *Teoria de vigas en ingenieria aeroespacial*. Editorial Universitat Politecnica de Valencia, Valencia, 2019.
- [12] Peter Garrison. Rectangular wings. *FLYING Magazine*, 2024. Accessed: 09/07/2024.
- [13] Flight Safety Foundation. Enhancing safety through data sharing. *Aviation Safety World*, pages 18–20, October 2011.
- [14] Smithsonian National Air and Space Museum. How thick is the aluminum covering on the wings of a commercial airliner?, n.d. Accessed: 2024-07-10.
- [15] Key to Metals. Aircraft materials. 2010. Accessed: 2024-07-10.
- [16] LibreTexts Español. Cargas, 2024. Accessed: 2024-07-11.
- [17] Max Opgenoord, Mark Drela, and Karen Willcox. Influence of transonic flutter on the conceptual design of next-generation transport aircraft. 01 2018.

- [18] Airfoil Tools. Airfoil tools, 2024. Accessed: 2024-07-17.
- [19] Walter Ramberg and William R Osgood. *Description of stress-strain curves by three parameters*. Legacy CDMS, 1943.
- [20] J.E. Vargas Cantero. Método de newton-raphson. Accedido: 21 de julio de 2024.
- [21] Tomas Melin. A vortex lattice matlab implementation for linear aerodynamic wing applications. Master's thesis, Royal Institute of Technology (KTH), Department of Aeronautics, Stockholm, Sweden, December 2000.
- [22] P.M. Quintero Igeño. *Aerodinámica I. Movimiento potencial bidimensional*. Centro de Motores Térmicos, 2023.
- [23] Mario Lázaro. Aeroelasticidad y aerodinámica numérica: Método de la malla de torbellinos, 2024. Tema 7, Aerodinámica de Superficies de Sustentación 3D.
- [24] Miguel Crespo. Vortex lattice. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/67608-vortex-lattice>, 2024. Recuperado 22 julio, 2024.
- [25] M.G. Ford. *Advanced Mechanics of Materials*. Longmans, London, 1963.