



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA


ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial
y Diseño Industrial

Diseño preliminar de una misión a Europa: aproximación
de trayectoria y propagador orbital utilizando
Wolfram Mathematica

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

AUTOR/A: Hernández Amador, Alba

Tutor/a: Moll López, Santiago Emmanuel

Cotutor/a: Carreño Sánchez, Amanda María

Cotutor/a: Herrero Debón, Alicia

Cotutor/a externo: Alventosa Corts, María

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



**Diseño Preliminar de una Misión a Europa:
Aproximación de Trayectoria y Propagador
Orbital Utilizando Wolfram Mathematica**

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Trabajo de Fin de Grado

Autor:

Alba Hernández Amador

Tutores:

Santiago Emmanuel Moll López

Amanda María Carreño Sánchez

Alicia Herrero Debón

María Alventosa Corts

Resumen

Júpiter y sus lunas presentan un gran interés científico debido a sus características únicas y al potencial de descubrimientos sobre la formación y evolución del sistema solar. Europa, una de las lunas de Júpiter, es especialmente interesante debido a la posibilidad de un océano subterráneo bajo su superficie helada, lo que podría albergar condiciones propicias para la vida.

En este proyecto se realiza el diseño preliminar de una misión a Europa. Para ello, se ha llevado a cabo una aproximación inicial de la trayectoria utilizando la herramienta Wolfram Mathematica. El objetivo principal ha sido implementar un propagador que resuelve la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos, teniendo en cuenta las perturbaciones más importantes mediante el método de Cowell, lo que permite alcanzar un mayor nivel de precisión. La validez del propagador se estudia aplicando los resultados a órbitas de satélites conocidos.

Abstract

Jupiter and its moons present great scientific interest due to their unique characteristics and the potential for discoveries about the formation and evolution of the solar system. Europa, one of Jupiter's moons, is especially interesting due to the possibility of a subsurface ocean beneath its icy surface, which could harbor conditions suitable for life.

In this project, a preliminary design for a mission to Europa is carried out. For this, an initial approach to the trajectory has been made using the Wolfram Mathematica tool. The main objective has been to implement a propagator that solves the relative motion equation of two bodies, taking into account the most important perturbations using the Cowell method, which allows for a higher level of precision. The validity of the propagator is studied by applying the results to known satellite orbits.

Resum

Júpiter i les seves llunes presenten un gran interès científic a causa de les seves característiques úniques i el potencial per a descobriments sobre la formació i evolució del sistema solar. Europa, una de les llunes de Júpiter, és especialment interessant a causa de la possibilitat d'un oceà subterrani sota la seva superfície glaçada, que podria albergar condicions propícies per a la vida.

En aquest projecte es realitza el disseny preliminar d'una missió a Europa. Per això, s'ha dut a terme una aproximació inicial de la trajectòria utilitzant l'eina Wolfram Mathematica. L'objectiu principal ha estat implementar un propagador que resolgui l'equació del moviment relatiu de dos cossos, tenint en compte les pertorbacions més importants mitjançant el mètode de Cowell, la qual cosa permet assolir un major nivell de precisió. La validesa del propagador s'estudia aplicant els resultats a òrbites de satèl·lits coneguts.

ÍNDICE

1. Introducción	1
1.1. Inicios de la exploración espacial	1
1.2. Justificación de la misión a Europa.....	2
2. Marco teórico	4
2.1. El problema de los dos cuerpos	4
2.1.1. Marco de referencia inercial.....	4
2.1.2. Ecuaciones del movimiento relativo	6
2.2. Perturbaciones. Método de Cowell.....	7
2.2.1. Perturbación debida a los armónicos zonales.....	8
2.2.2. Efectos relativistas	13
2.2.3. Perturbación por la gravedad lunar	13
2.3. Transferencia de Hohmann	15
2.4. Ventanas de lanzamiento	17
3. Validación	19
3.1. NAVSTAR-68.....	19
3.1.1. Propagador sin perturbaciones	20
3.1.2. Propagador con armónicos zonales o J 's	22
3.1.3. Propagador con J 's y gravedad lunar.	25
3.1.4. Propagador con J 's, gravedad lunar y efectos relativistas	27
3.1.5. Comparación	29
3.2. LAGEOS-2.....	30
3.2.1. Propagador sin perturbaciones	30
3.2.2. Propagador con J 's.....	32
3.2.3. Propagador con J 's y gravedad lunar	34
3.2.4. Propagador con J 's, gravedad lunar y efectos relativistas	36
3.2.5. Comparación	38

3.3. Conclusión validación	40
4. Misión a europa. Propagador y trayectorias	41
4.1. Introducción	41
4.2. Trayectoria desde la órbita de <i>parking</i> a la esfera de influencia	41
4.2.1. Condiciones iniciales	41
4.2.2. Perturbaciones necesarias	42
4.2.3. Propagación y resultados	43
4.3. Trayectoria desde esfera de influencia hasta Júpiter	47
4.3.1. Condiciones iniciales	47
4.3.2. Perturbaciones necesarias	48
4.3.3. Propagación y resultados	49
4.4. Trayectoria hasta Europa	50
4.4.1. Condiciones iniciales	50
4.4.2. Perturbaciones necesarias	51
4.4.3. Propagación y resultados	52
5. Conclusiones y continuación del proyecto	55
6. Pliego de condiciones	56
6.1. Condiciones técnicas	56
6.1.1. Hardware	56
6.1.2. Software	56
6.2. Condiciones del puesto de trabajo	56
7. Objetivos de Desarrollo Sostenible	58
8. Presupuesto	58
8.1. Costes del personal	58
8.2. Costes de hardware	58
8.3. Costes de software	59
8.4. Costes energéticos	59
8.5. Presupuesto total	59

Bibliografia	60
--------------------	----

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1: Polinomio de Legendre	11
Gráfica 2: Error coordenada x sin perturbaciones para NAVSTAR-68	21
Gráfica 3: Error coordenada y sin perturbaciones para NAVSTAR-68	21
Gráfica 4: Error coordenada z sin perturbaciones para NAVSTAR-68.....	22
Gráfica 5: Error coordenada x con J_2 para NAVSTAR-68	23
Gráfica 6: Error coordenada y con J_2 para NAVSTAR-68.....	23
Gráfica 7: Error coordenada z con J_2 para NAVSTAR-68	24
Gráfica 8: Error coordenada x con J_2 y gravedad lunar para NAVSTAR-68	25
Gráfica 9: Error coordenada y con J_2 y gravedad lunar para NAVSTAR-68	26
Gráfica 10: Error coordenada z con J_2 y gravedad lunar para NAVSTAR-68	26
Gráfica 11: Error coordenada x con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para NAVSTAR-68	27
Gráfica 12: Error coordenada y con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para NAVSTAR-68	28
Gráfica 13: Error coordenada z con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para NAVSTAR-68	28
Gráfica 14: Comparación del error sin y con perturbaciones para la coordenada x del NAVSTAR-68.....	29
Gráfica 15: Comparación error con J_s y error con todas las perturbaciones para la coordenada x del NAVSTAR-68.....	30
Gráfica 16: Error en la coordenada x sin perturbaciones para LAGEOS-2.....	31
Gráfica 17: Error en la coordenada y sin perturbaciones para LAGEOS-2.....	31
Gráfica 18: Error en la coordenada z sin perturbaciones para LAGEOS-2.....	32
Gráfica 19: Error en la coordenada x con J_2 para LAGEOS-2.....	33
Gráfica 20: Error en la coordenada y con J_2 para LAGEOS-2.....	33
Gráfica 21: Error en la coordenada z con J_2 para LAGEOS-2.....	34
Gráfica 22: Error en la coordenada x con J_2 y gravedad lunar para LAGEOS-2.....	35
Gráfica 23: Error en la coordenada y con J_2 y gravedad lunar para LAGEOS-2.....	35
Gráfica 24: Error en la coordenada z con J_2 y gravedad lunar para LAGEOS-2.....	36
Gráfica 25: Error en la coordenada x con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para LAGEOS-2.....	37
Gráfica 26: Error en la coordenada y con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para LAGEOS-2.....	37

Gráfica 27: Error en la coordenada z con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para LAGEOS-2.....	38
Gráfica 28: Comparación del error sin y con perturbaciones para la coordenada x del LAGEOS-2.....	39
Gráfica 29: Comparación del error sin y con perturbaciones para la coordenada y del LAGEOS-2.....	39
Gráfica 30: Comparación del error sin y con perturbaciones para la coordenada z del LAGEOS-2.....	40
Gráfica 31: Trayectoria del satélite hasta el límite de la esfera de influencia	44
Gráfica 32: Maniobra de Hohmann hasta límite de la esfera de influencia	44
Gráfica 33: Comparación trayectoria original y maniobra de Hohmann	45
Gráfica 34: Comparación diferentes impulsos para llegar al límite de la esfera de influencia. ..	46
Gráfica 35: Comparación diferentes empujes para llegar al límite de la esfera de influencia. ...	47
Gráfica 36: Trayectoria hasta Júpiter.....	49
Gráfica 37: Maniobra de Hohmann para llegar a Júpiter	50
Gráfica 38: Trayectoria a Europa desde Rsoi/10 hasta Europa mediante una maniobra de Hohmann.....	53

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Resumen sobre las lunas galileanas.....	51
Tabla 2: Comparación del momento angular, la velocidad y el tiempo de integración para diferentes distancias	53
Tabla 3: Costes del personal.....	58
Tabla 4: Costes de hardware.....	59
Tabla 5: Costes de software.....	59
Tabla 6: Costes energéticos	59
Tabla 7: Presupuesto total	59

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Foto de Europa [2]	2
Figura 2: Marco de referencia inercial (fijo respecto a las estrellas) [5]	5
Figura 3: Sistema en coordenadas esféricas [5]	8
Figura 4: Perturbación de la Luna sobre una nave que orbita la Tierra [5]	14
Figura 5: Maniobra de Hohmann [4]	16
Figura 6: Salida y encuentro con un planeta [5]	18
Figura 7: Órbita del satélite NAVSTAR-68	20

1. Introducción

1.1. Inicios de la exploración espacial

La exploración espacial representa uno de los logros más ambiciosos y fascinantes de la humanidad. Impulsada por la curiosidad innata del ser humano y la búsqueda de conocimiento, esta disciplina no solo nos ha permitido expandir nuestras fronteras físicas más allá del planeta Tierra, sino también entender mejor nuestro lugar en el universo. Desde la era de los primeros vehículos espaciales hasta las misiones interplanetarias contemporáneas, la exploración espacial ha evolucionado a través de hitos científicos y tecnológicos que han redefinido los límites de lo posible.

El inicio de la era de la exploración espacial tuvo lugar durante el desarrollo de la Guerra Fría (1947-1991), donde Estados Unidos y la Unión Soviética compitieron para demostrar su superioridad tecnológica. Esta etapa espacial comenzó oficialmente en 1957, cuando la Unión Soviética lanzó el Sputnik 1, el primer satélite artificial. Como respuesta a este logro, Estados Unidos creó la NASA en 1958. En 1961, el cosmonauta soviético Yuri Gagarin se convirtió en el primer humano en orbitar la Tierra. Este mismo año, en 1961, y como consecuencia de los avances de los soviéticos, el presidente John F. Kennedy anunció el ambicioso objetivo de llevar al hombre a la Luna antes del final de la década. Este objetivo se alcanzó el 20 de julio de 1969, cuando los astronautas estadounidenses Neil Armstrong y Buzz Aldrin pisaron la superficie lunar durante la misión Apollo 11.

Las misiones tripuladas no fueron el único avance significativo de esta época. El desarrollo tecnológico también se reflejó en las sondas espaciales Mariner y Viking, que capturaron las primeras imágenes detalladas de Marte y otros planetas del sistema solar. Además, la misión Voyager envió sondas para explorar los planetas exteriores, ampliando enormemente nuestro conocimiento del cosmos.

En 1998 se construyó la Estación Espacial Internacional (ISS) como un símbolo de cooperación internacional. Se trata de un laboratorio en órbita donde se llevan a cabo experimentos científicos y tecnológicos. Su importancia no radica solo en los avances científicos que posibilita, sino en su papel como ejemplo de lo que la humanidad puede llegar a lograr mediante la cooperación y el esfuerzo.

En las últimas décadas, la exploración espacial ha experimentado una transformación significativa con los avances tecnológicos y la aparición de nuevas empresas privadas. El futuro se prevé prometedor, con planes ambiciosos como el regreso a la Luna a través del programa Artemis o la idea de una misión tripulada a Marte. Estas misiones y muchas más permitirán expandir nuestro conocimiento científico, inspirar nuevas tecnologías y abordar preguntas sobre la vida y la habitabilidad de otros planetas.

1.2. Justificación de la misión a Europa

Júpiter es el planeta más grande de nuestro sistema solar. Se considera un pequeño sistema planetario por sus dimensiones colosales y con más de 90 lunas confirmadas según el registro de la NASA.

Entre los satélites naturales de Júpiter, se estudiará una de las cuatro lunas galileanas: Europa. Este satélite es de gran interés debido a sus condiciones geológicas únicas y a la posibilidad de que debajo de su capa de hielo superficial exista un océano de agua líquida, lo cual podría ofrecer las condiciones necesarias para la existencia de vida. Los colores que se observan de Europa en la Figura 1 representan la composición de la superficie y los granos de hielo, siendo las áreas de color marrón rojizo sustancias diferentes a hielo y las áreas blancas las zonas de hielo [1].

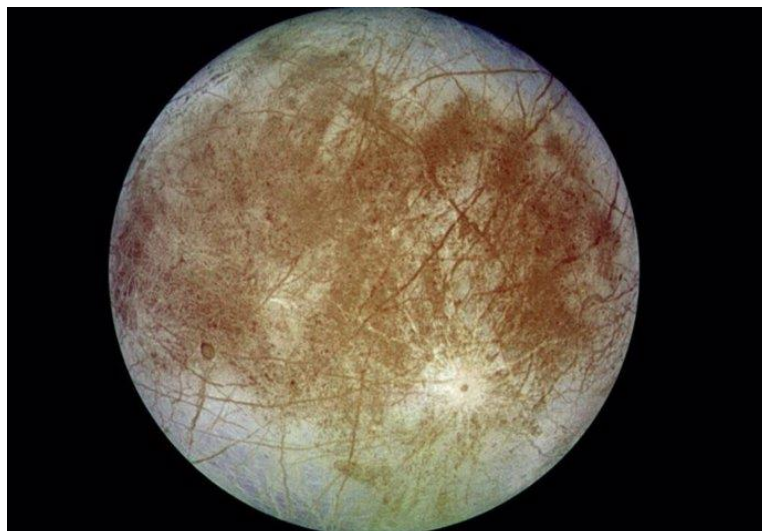


Figura 1: Foto de Europa [2]

Los científicos han observado una serie de eyecciones de agua que emergen de la superficie. Puede que se deban a volcanes de hielo, géiseres o grietas en las que el agua subterránea sube. El estudio de estos fenómenos y del resto de la luna podría indicarnos indicios de habitabilidad o de una fuente de recursos para misiones espaciales. Por ello, hoy en día, hay diversas misiones con el objetivo de desvelar estas incógnitas. Entre las más destacadas están:

- Jupiter Icy Moons Explorer (JUICE) [3]: se trata de una misión de exploración de Júpiter y sus lunas heladas: Ganímedes, Calisto y Europa. Se lanzó en 2023 y llegará a Júpiter en el año 2030.
- Europa Clipper [4]: consiste en una sonda espacial desarrollada por la NASA que tendrá como objetivo estudiar Europa mediante una serie de sobrevuelos. Se lanzará a finales de 2024.

2. Marco teórico

2.1. El problema de los dos cuerpos

2.1.1. Marco de referencia inercial

Consideramos dos masas puntuales localizadas en el centro de masas de cada cuerpo, denominadas m_1 y m_2 . Sobre estas masas afecta solamente la fuerza de atracción. La posición de su centro de masas en un sistema de coordenadas inercial viene dada por los vectores \vec{R}_1 y \vec{R}_2 , que se observan en la Figura 2. Por tanto, el vector que indica la posición entre las masas es:

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \quad (1)$$

La fuerza en cada masa es la atracción gravitatoria que ejerce la otra masa, es decir, la fuerza con la que m_2 atrae m_1 , que viene determinada por:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (2)$$

Dónde $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ y $G = 6.6742 \times 10^{-11} \text{ km}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Por otro lado, r representa el módulo de la posición del vector:

$$r = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \quad (3)$$

Debido a la tercera ley de Newton, la fuerza con la que m_1 atrae m_2 será $-\vec{F}_{12}$:

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (4)$$

Aplicando la segunda ley de Newton sabemos que $\vec{F}_{12} = m_1 \cdot \ddot{\vec{R}}_1$, donde $\ddot{\vec{R}}_1$ es la aceleración absoluta de m_1 . Por lo que igualando con la ecuación (2) obtenemos:

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{R}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (5)$$

De igual forma, para $\vec{F}_{21} = m_2 \cdot \ddot{\vec{R}}_2$:

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{R}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (6)$$

Si se dividen ambas ecuaciones entre sus respectivas masas se obtienen las ecuaciones que modelizan el movimiento de cada masa respecto al sistema de referencia inercial:

$$\ddot{\vec{R}}_1 = G \frac{m_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (7)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 = -G \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_r \quad (8)$$

El movimiento del centro de masas viene dado por la ecuación (9). La velocidad y la aceleración absoluta del centro de masas respecto a un sistema de referencia inercial se muestran en las ecuaciones (10) y (11):

$$\vec{R}_G = \frac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{R}}_G = \frac{m_1 \dot{\vec{R}}_1 + m_2 \dot{\vec{R}}_2}{m_1 + m_2} \quad (10)$$

$$\vec{a}_G = \ddot{\vec{R}}_G = \frac{m_1 \ddot{\vec{R}}_1 + m_2 \ddot{\vec{R}}_2}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

Si se suman las ecuaciones (7) y (8) y se multiplican por sus respectivas masas se tiene $m_1 \ddot{\vec{R}}_1 + m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = \vec{0}$, lo que nos indica que la ecuación de la aceleración absoluta del centro de masas va a ser nula y por tanto el centro de masas tendrá velocidad constante y el vector posición será $\vec{R}_G = \vec{R}_{G_0} + \vec{v}_G t$, donde \vec{R}_{G_0} es la posición inicial del vector.

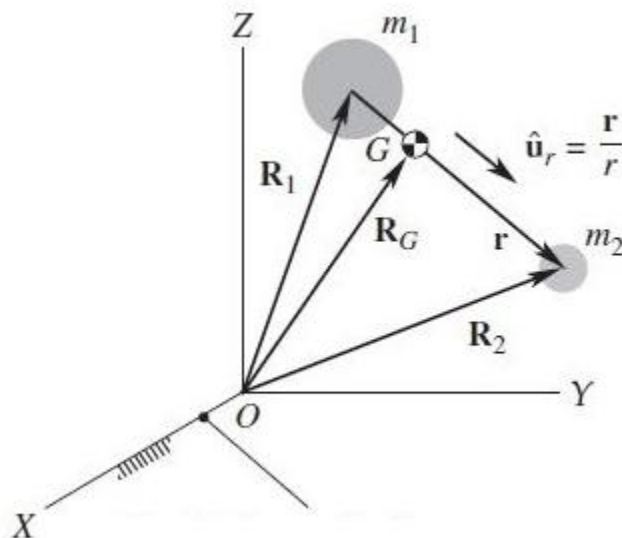


Figura 2: Marco de referencia inercial (fijo respecto a las estrellas) [5]

2.1.2. Ecuaciones del movimiento relativo

En este apartado se va a obtener la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos. Sin embargo, en vez de trabajar con el sistema de referencia inercial se va a obtener la ecuación del movimiento de un cuerpo respecto a otro. Se parte de la ecuación (1) del vector posición que se ha obtenido en el apartado anterior y se deriva dos veces respecto al tiempo, obteniendo:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1 \quad (12)$$

Sustituyendo $\ddot{\vec{R}}_1$ y $\ddot{\vec{R}}_2$ por los valores obtenidos la expresión de la aceleración relativa es:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (13)$$

Se define a continuación el parámetro gravitacional $\mu = G(m_1 + m_2)$ que tiene como unidades km^3/s^2 . Así, con este parámetro, la expresión anterior se transforma en:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (14)$$

Esta es la ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos. Es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que expresa el movimiento del cuerpo 2 respecto del cuerpo 1, aunque se observa que este movimiento será el mismo que el del cuerpo 1 respecto al cuerpo 2.

La posición relativa estaba definida inicialmente en un sistema de referencia inercial, no obstante, es más adecuado trabajar en un sistema referencia unido al cuerpo.

La aceleración absoluta de un cuerpo está relacionada con su aceleración relativa mediante la siguiente ecuación:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{rel} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{rel} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{rel}) + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}_{rel} \quad (15)$$

en la cual $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular y $\dot{\vec{\Omega}}$ es la aceleración angular, ambas respecto al sistema de referencia en movimiento. Si $\vec{\Omega}$ y $\dot{\vec{\Omega}}$ son 0 la aceleración absoluta sería igual a la aceleración relativa, lo que nos indica que si el sistema no gira se puede usar la aceleración relativa para el primer término de la ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos.

Si se separa la ecuación en sus componentes se obtienen las expresiones que forman el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3} x \quad \ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3} y \quad \ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3} z \quad (16)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2.2. Perturbaciones. Método de Cowell.

El método de Cowell es un método sencillo de cálculo de perturbaciones que consiste en integrar directamente las ecuaciones de movimiento en presencia de fuerzas perturbadoras. Partiendo de la ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos (14), y sabiendo que las perturbaciones se consideran como fuerzas adicionales, la ecuación generalizada es:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + F_p \quad (17)$$

donde F_p representa las fuerzas perturbadoras por unidad de masa.

Por tanto, una vez se definen todas las perturbaciones a tener en cuenta, se integra la ecuación (17) a lo largo del tiempo utilizando métodos numéricos.

Este método permite incorporar una amplia gama de fuerzas perturbadoras y aplicarse a diversos tipos de órbitas. Sin embargo, las integraciones numéricas pueden acumular errores con el tiempo, y si las fuerzas perturbadoras son complejas, el proceso puede volverse computacionalmente exigente.

2.2.1. Perturbación debida a los armónicos zonales

La Tierra, al igual que otros objetos del universo, no es una esfera perfecta debido a su distribución desigual de masa. Al tratarse de un elipsoide achatado, las fuerzas centrífugas producen un abultamiento en el ecuador que afecta al campo gravitacional, haciendo que este varíe con el radio y con la latitud.

En la Figura 3 se observa el sistema de referencia en ejes cartesianos con el que se va a trabajar en este apartado. Tiene el origen en el centro de masas del cuerpo, el eje Z es el eje de giro del elipsoide, el eje X se definirá apuntando al punto vernal y el eje Y formará el triedro con los otros dos ejes. El ángulo ϕ es el ángulo polar, que es el ángulo desde el eje Z hasta el vector r (distancia del origen al punto P) y se define como:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \quad (18)$$

Por otro lado, θ es el ángulo azimutal, que está definido desde el eje X positivo hasta la proyección del vector r sobre el plano del ecuador.

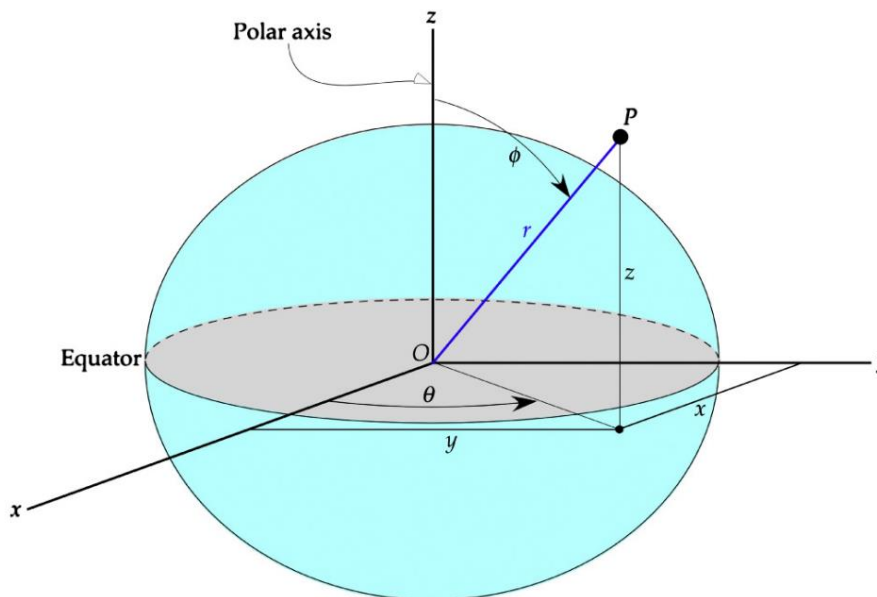


Figura 3: Sistema en coordenadas esféricas [5]

El potencial gravitacional por unidad de masa viene dado por:

$$V = -\frac{\mu}{r} \quad (19)$$

En la ecuación (19) r es la magnitud del vector \vec{r} y $\mu = GM$, donde G es la constante de gravitación universal y M es la masa de la esfera.

Un aspecto importante a que tener en cuenta es que se va a asumir que el campo gravitatorio es simétrico y por tanto no dependerá del ángulo azimutal θ . Por lo que el potencial gravitacional seguirá la expresión de la ecuación (17).

$$V(r, \phi) = -\frac{\mu}{r} + \Phi(r, \phi) \quad (20)$$

El término $\Phi(r, \phi)$ es la perturbación del potencial debido al achatamiento del planeta y se define mediante series infinitas [6] como:

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r}\right)^k P_k(\cos \phi) \quad (21)$$

donde J_k son los armónicos zonales del planeta, R es el radio ecuatorial y P_k son los polinomios de Legendre.

Los armónicos zonales son una serie de coeficientes adimensionales que se utilizan para describir las desviaciones del campo gravitatorio de un planeta respecto al campo gravitatorio de un planeta puramente esférico. Se obtienen de forma empírica a partir de experimentos y observaciones. Cada J_k corresponde con una característica particular de la distribución de masa del planeta. El J_2 es el coeficiente más significativo y representa el achatamiento del planeta debido a su rotación. El resto son correcciones más pequeñas y no tienen tanta influencia.

Para la Tierra los armónicos más importantes son [7]:

$$\begin{aligned} J_2 &= 0.00108263 \\ J_3 &= -2.33936 \times 10^{-3} J_2 \\ J_4 &= -1.49601 \times 10^{-3} J_2 \\ J_5 &= -0.20995 \times 10^{-3} J_2 \end{aligned}$$

$$J_6 = 0.49941 \times 10^{-3} J_2$$

$$J_7 = 0.32547 \times 10^{-3} J_2$$

El coeficiente J_1 no aparece debido a que el origen del sistema de referencia utilizado corresponde al centro de masas del cuerpo, por lo que el primer armónico es cero. Por otro lado, el valor de J_2 es el más significativo, ya que el resto de los coeficientes son tres órdenes de magnitud menores. Esto se refleja en el sumatorio de la ecuación (21), donde la influencia de los demás armónicos es prácticamente insignificante. Por lo tanto, el análisis presente se puede realizar considerando únicamente J_2 .

Los polinomios de Legendre son una serie de polinomios ortogonales que son soluciones de la ecuación diferencial de Legendre:

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (22)$$

Donde $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre de grado n.

Este polinomio se puede expresar mediante la Fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad (23)$$

Usando la ecuación (23) se calculan los primeros polinomios que afectan a la perturbación $\Phi(r, \phi)$:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

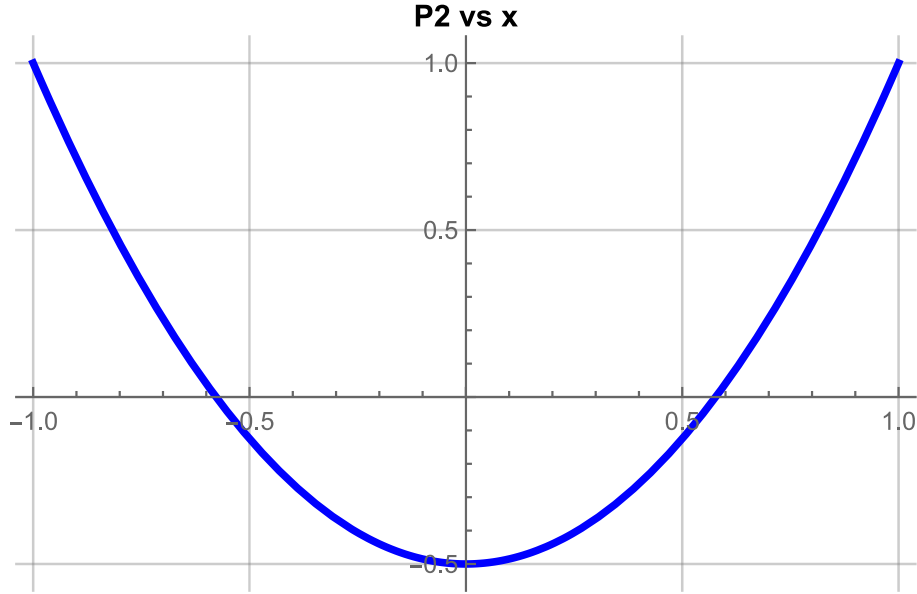
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \quad P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$

Como se ha indicado, se va a utilizar únicamente el armónico J_2 ya que es el más significativo. Su representación se observa en la Gráfica 1.



Gráfica 1: Polinomio de Legendre

Teniendo en cuenta las simplificaciones, la ecuación (21) se queda como la ecuación (24).

$$\Phi(r, \phi) = \frac{J_2 \mu}{2 r} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) \quad (24)$$

La aceleración perturbadora debida a J_2 se expresa como el gradiente negativo de la perturbación del potencial gravitatorio:

$$\vec{p} = -\nabla\Phi(r, \phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} \hat{k} \quad (25)$$

Mediante la regla de la cadena obtenemos las ecuaciones (26),(27) y (28) . Las derivadas de la perturbación respecto r y Φ corresponden con las ecuaciones (29) y (30).

$$\frac{\partial\Phi(r, \phi)}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (26)$$

$$\frac{\partial\Phi(r, \phi)}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (27)$$

$$\frac{\partial\Phi(r, \phi)}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial r} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial \phi} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 (\sin \phi \cdot \cos \phi) \quad (30)$$

Por otro lado, las derivadas parciales de ϕ respecto a sus componentes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{xz}{r^3 \sin \phi} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{yz}{r^3 \sin \phi} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\sin \phi}{r} \quad (31)$$

Sustituyendo las ecuaciones (29), (30) y (31) en la ecuación (25) y sabiendo que $\cos \phi = z/r$ se obtienen las siguientes expresiones:

$$p_{J_2, x} = -\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial x} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{x}{r} \left(5 \left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1\right) \quad (32)$$

$$p_{J_2, y} = -\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial y} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{y}{r} \left(5 \left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1\right) \quad (33)$$

$$p_{J_2, z} = -\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial z} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{z}{r} \left(5 \left(\frac{z}{r}\right)^2 - 3\right) \quad (34)$$

Las expresiones (32), (33) y (34) serán las componentes de la perturbación debido a J_2 .

Estas componentes de la perturbación serán las que se añadan a la ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos para añadir precisión al cálculo. Como se ha comentado, se va a tener en cuenta solamente la perturbación debida a J_2 . Si se tuvieran en cuenta todos los términos la precisión aumentaría. Sin embargo, se ha comprobado que añadir estos términos no mejora notablemente la precisión, sobre todo para casos como el presente, en el que se tiene una órbita que se aleja significativamente de la Tierra.

2.2.2. Efectos relativistas

La teoría de la relatividad general introduce correcciones significativas en las ecuaciones del movimiento que no pueden ser ignoradas, especialmente en misiones que requieren de alta precisión, como los sistemas de navegación por satélite (GPS) y las misiones interplanetarias.

La relatividad general establece que el tiempo y el espacio están intrínsecamente relacionados y que las medidas del tiempo varían dependiendo del campo gravitatorio y la velocidad del observador. Estos efectos son importantes porque ni la Tierra ni el satélite son sistemas de referencia inerciales, ya que están en movimiento continuo relativo entre sí.

La contribución de los efectos relativistas a la aceleración del satélite, según la corrección de Schwarzschild [8], viene dada por la ecuación (35) y su separación en componentes se corresponde con las ecuaciones (36), (37) y (38) donde u, v y w son las derivadas temporales de las componentes de la posición.

$$p_{rel} = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left(\left(4 \frac{\mu}{r} - \vec{v} \cdot \vec{v} \right) \vec{r} + 4(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right) \quad (35)$$

$$p_{rel,x} = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left(\left(4 \frac{\mu}{r} - \vec{v} \cdot \vec{v} \right) x + 4(x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w)u \right) \quad (36)$$

$$p_{rel,y} = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left(\left(4 \frac{\mu}{r} - \vec{v} \cdot \vec{v} \right) y + 4(x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w)v \right) \quad (37)$$

$$p_{rel,z} = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left(\left(4 \frac{\mu}{r} - \vec{v} \cdot \vec{v} \right) z + 4(x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w)w \right) \quad (38)$$

2.2.3. Perturbación por la gravedad lunar

Considerar las perturbaciones gravitatorias de los cuerpos del sistema solar es crucial para entender y predecir con precisión la dinámica de un cuerpo en el espacio. Estas perturbaciones afectan significativamente la trayectoria, velocidad y aceleración de un

cuerpo, lo que influye en su órbita y comportamiento a largo plazo. En esta sección se derivará la fórmula que describe la aceleración perturbadora causada por la Luna.

Para el desarrollo de este problema es necesario el estudio matemático del problema de los tres cuerpos. Este caso se representa en la Figura 4 donde el origen está de nuevo en el centro de masas del cuerpo. El vector \vec{r} representa la posición del satélite respecto a la Tierra, el vector $\vec{r}_{m/s}$ es la posición de la luna respecto al satélite y el vector \vec{r}_m es la posición de la Luna respecto a la Tierra.

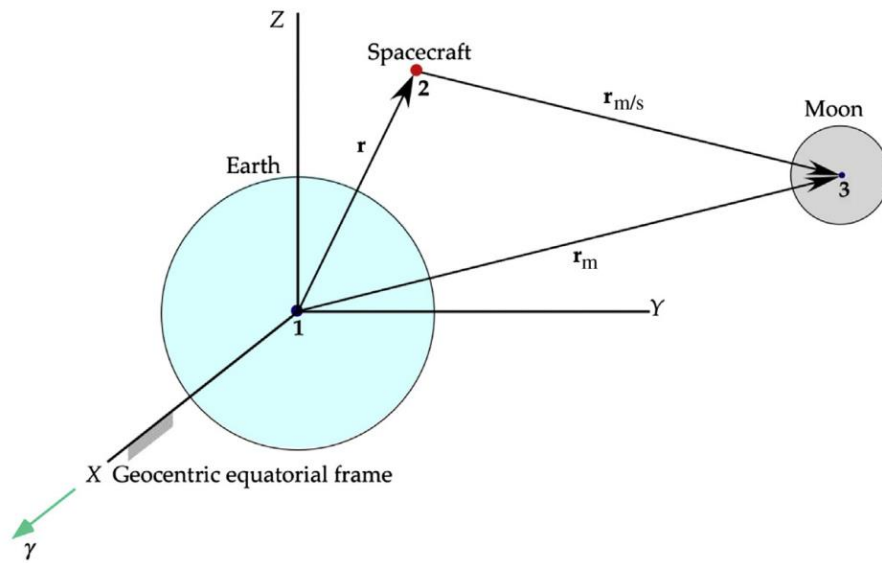


Figura 4: Perturbación de la Luna sobre una nave que orbita la Tierra [5]

La aceleración del satélite respecto a la Tierra teniendo en cuenta el tercer cuerpo, en este caso la luna, se expresa según la ecuación (39):

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \left(-Gm_1 \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_{m/s}}{r_{m/s}^3} \right) - \left(Gm_2 \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_{moon}}{r_{moon}^3} \right) \quad (39)$$

Definiendo $\mu_{moon} = Gm_3$ y $\mu = G(m_1 + m_2)$ la ecuación (39) se queda como:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{moon} \left(\frac{\vec{r}_{m/s}}{r_{m/s}^3} - \frac{\vec{r}_{moon}}{r_{moon}^3} \right) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p}_{moon} \quad (40)$$

El segundo término de la ecuación es el correspondiente a la aceleración perturbadora debida a la Luna. Como se observa, es el término que se añadirá a la ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos, la ecuación (17). Para añadirlo, será necesario considerar que $\mu_{moon} = 4902.800066 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Para determinar la posición de la Luna se obtendrán los datos de la página web Horizons entre dos fechas seleccionadas y se calculará un polinomio interpolador para cada componente. Por otro lado, el vector $\vec{r}_{m/s}$ vendrá dado por la ecuación (41).

$$r_{m/s,x} = r_{moon,x} - x \quad r_{m/s,y} = r_{moon,y} - y \quad r_{m/s,z} = r_{moon,z} - z \quad (41)$$

Por tanto, las aceleraciones perturbadoras debido a la gravedad lunar para cada componente se expresan en las ecuaciones (42),(43) y (44):

$$p_{moon,x} = \mu_{moon} \left(\frac{r_{m/s,x}}{r_{m/s}^3} - \frac{r_{moon,x}}{r_{moon}^3} \right) \quad (42)$$

$$p_{moon,y} = \mu_{moon} \left(\frac{r_{m/s,y}}{r_{m/s}^3} - \frac{r_{moon,y}}{r_{moon}^3} \right) \quad (43)$$

$$p_{moon,z} = \mu_{moon} \left(\frac{r_{m/s,z}}{r_{m/s}^3} - \frac{r_{moon,z}}{r_{moon}^3} \right) \quad (44)$$

2.3. Transferencia de Hohmann

La transferencia de Hohmann es una maniobra utilizada en mecánica orbital para transferir una nave entre dos órbitas circulares coplanarias alrededor de un cuerpo central. Esta aproximación es la más eficiente en términos de consumo de combustible.

En la Figura 5 se observa la definición del periapsis y el apoapsis que son: el punto más cercano y el punto más alejado al cuerpo alrededor del cual está orbitando, es decir, en este caso, los radios del círculo interno y externo, respectivamente.

La definición de la energía de una órbita depende solamente de su semieje mayor. En el caso de una elipse, la energía específica es negativa $\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$, por lo que un aumento de energía requiere hacer ε menos negativo. Por tanto, cuanto mayor sea el semieje, la órbita tendrá más energía.

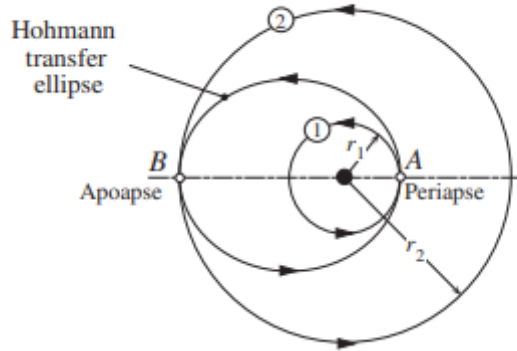


Figura 5: Maniobra de Hohmann [4]

La transferencia de Hohmann se realiza en dos impulsos principales:

- El primer impulso se ejecuta en la órbita inicial en el punto más cercano al cuerpo central. La nave realiza el impulso en el punto A, tangencial y de magnitud:

$$\Delta v_A = \frac{h_H}{R_1} - \frac{h_1}{R_1} \quad (45)$$

- El segundo se realiza cuando la nave llega al apogeo de la órbita elíptica de transferencia, en el punto B. Este impulso tangencial hará pasar la nave a otra órbita circular y valdrá:

$$\Delta v_B = \frac{h_2}{R_2} - \frac{h_H}{R_2} \quad (46)$$

En la definición de los impulsos el término h es el momento angular específico. Por lo que h_1 y h_2 son los momentos de la primera y segunda órbita respectivamente y h_H es el momento angular de la órbita de elíptica de transferencia. Estos momentos vienen dados por las siguientes ecuaciones:

$$h_1 = \sqrt{\mu R_1} \quad (47)$$

$$h_2 = \sqrt{\mu R_2} \quad (48)$$

$$h_H = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (49)$$

Por lo que los impulsos se pueden expresar como:

$$\Delta v_A = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \left[\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right] \quad (50)$$

$$\Delta v_B = \sqrt{\frac{\mu}{R_2}} \left[1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}} \right] \quad (51)$$

Por otro lado, el tiempo que tarda la nave en recorrer la órbita de transferencia viene dada por:

$$t_{AB} = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}} \quad (52)$$

donde a_H es el semieje mayor de la órbita de transferencia.

2.4. Ventanas de lanzamiento

Para realizar viajes interplanetarios es necesario conocer el período específico durante el cual la nave espacial debe ser lanzada para alcanzar con éxito su destino. Fuera de esta ventana, el lanzamiento puede no ser posible o puede requerir más combustible.

El cálculo de las ventanas de lanzamiento es un proceso complejo que depende de diversos factores. Mediante una transferencia de Hohmann, el objetivo es conseguir que la posición del planeta 2 en el instante que sale la nave desde el planeta 1 sea tal que tanto la nave como el planeta 2 se encuentren en el ápside (punto A) de la órbita de transferencia elíptica como se observa en la Figura 6.

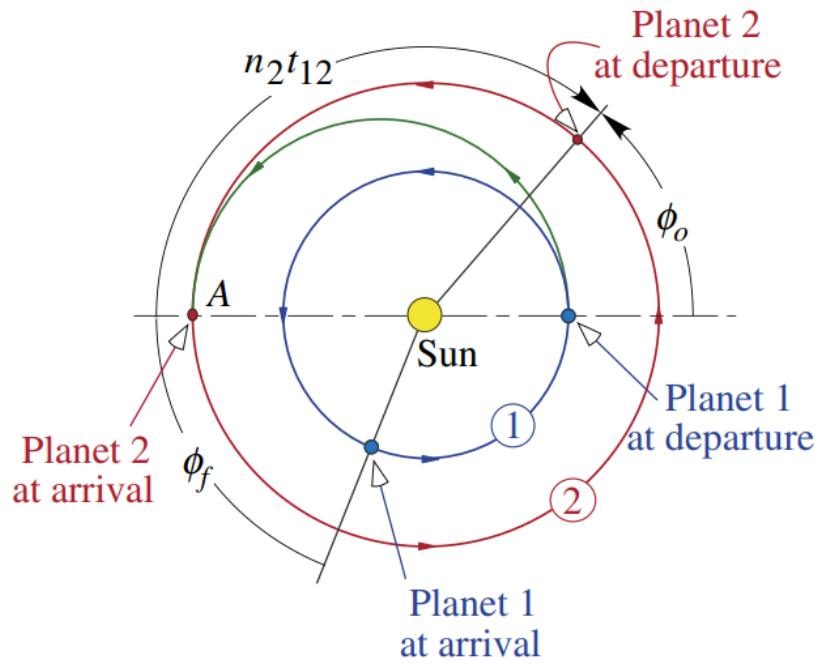


Figura 6: Salida y encuentro con un planeta [5]

Este encuentro se puede conseguir si se conoce el ángulo de fase inicial (ϕ_0) que forman los planetas antes del lanzamiento. Este ángulo se puede obtener como:

$$\phi_0 = \pi - n_2 t_{12} \quad (53)$$

El término n_2 es el movimiento medio del planeta 2, que es una medida de la velocidad con la que este planeta órbita alrededor del Sol. Se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (54)$$

donde T es el período orbital del planeta, el tiempo que tarda este en completar una órbita alrededor del Sol.

Por otra parte, el tiempo t_{12} de la ecuación (53) es el tiempo necesario para la transferencia y corresponde con la mitad del período de la órbita. Sabiendo que el periodo

de una órbita elíptica sigue la ecuación (55), la mitad del periodo de la órbita teniendo en cuenta la definición del semieje mayor para este caso, se tiene que el t_{12} viene dado por la ecuación (56):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} \quad (55)$$

$$t_{12} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_{sun}}} \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (56)$$

3. Validación

Una vez presentado el problema de los dos cuerpos, el propósito de la presente sección es continuar con el análisis mediante la incorporación de cada una de las perturbaciones explicadas anteriormente. Para ello, se va a realizar el estudio de dos satélites orbitando la Tierra: NAVSTAR-68 y LAGEOS-2. El objetivo será apreciar la evolución y mejora de resultados con la adición de cada perturbación, donde se analizarán los gráficos del error del vector estado para cada caso.

El estudio se ha realizado en coordenadas geocéntricas durante dos meses, desde el 16/04/2023 hasta el 16/06/2023.

3.1. NAVSTAR-68

El NAVSTAR-68 es un satélite que pertenece al Sistema de Posicionamiento Global (GPS) de los Estados Unidos. Fue lanzado el 15 de mayo de 2013 por la Fuerza Aérea de los Estados Unidos. Tiene un peso de aproximadamente 1630 kg y se encuentra a una altitud por encima de los 20000 km, por lo que está en una Órbita Media de la Tierra (MEO). Además, tiene una inclinación de 55 grados.

Su función principal es proporcionar señales de navegación para el sistema GPS. Cabe destacar que incorpora mejoras tecnológicas con respecto a generaciones anteriores, como relojes atómicos de rubidio y cesio, así como una mayor robustez frente a interferencias.

Ha sido seleccionado porque, al igual que otros satélites GPS, desempeña un papel crucial en una amplia gama de aplicaciones que requieren una navegación precisa y una sincronización temporal exacta.

3.1.1. Propagador sin perturbaciones

Una vez obtenidos los datos de Horizons System [9] para dos meses del satélite estudiado, se puede representar la órbita del satélite alrededor de la Tierra, como se muestra en la Figura 7, donde se observa que tiene una órbita con una inclinación elevada.

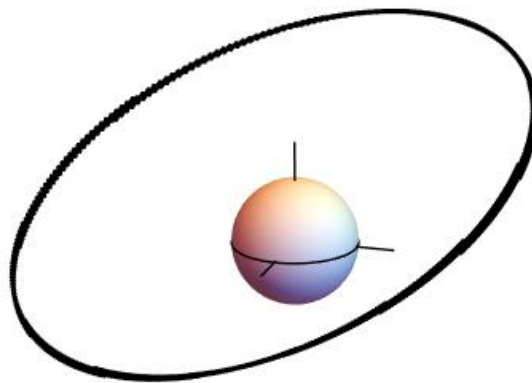
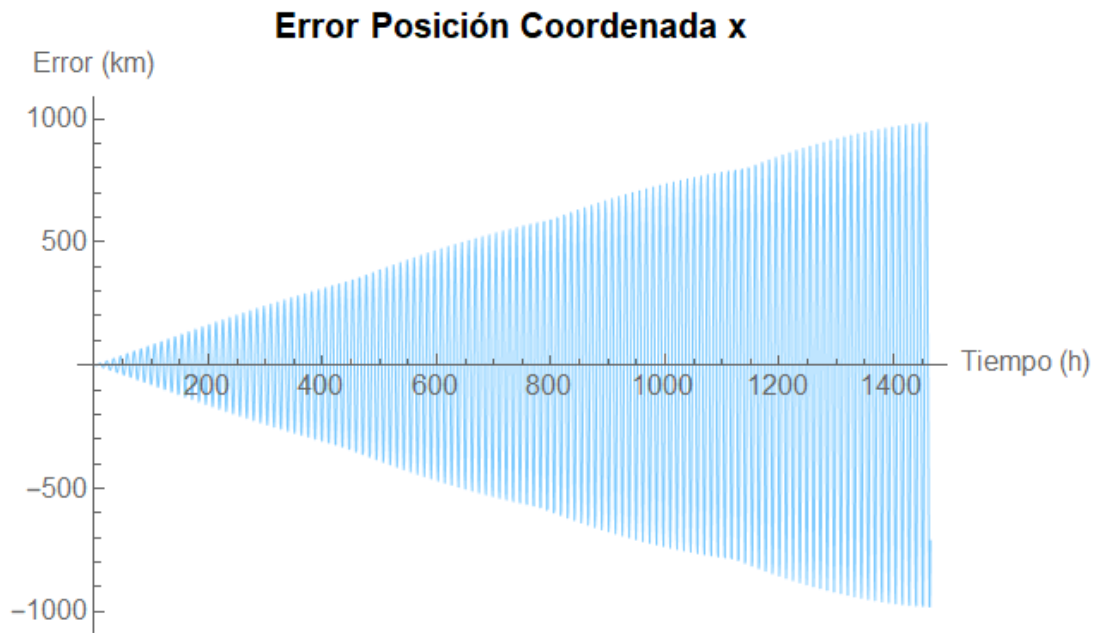
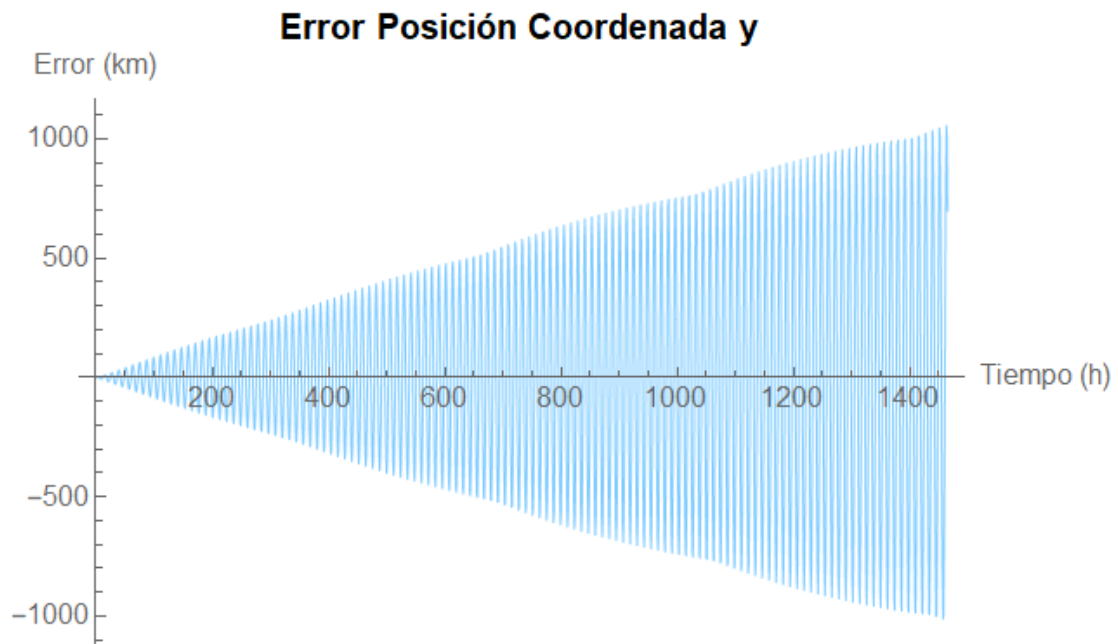


Figura 7: Órbita del satélite NAVSTAR-68

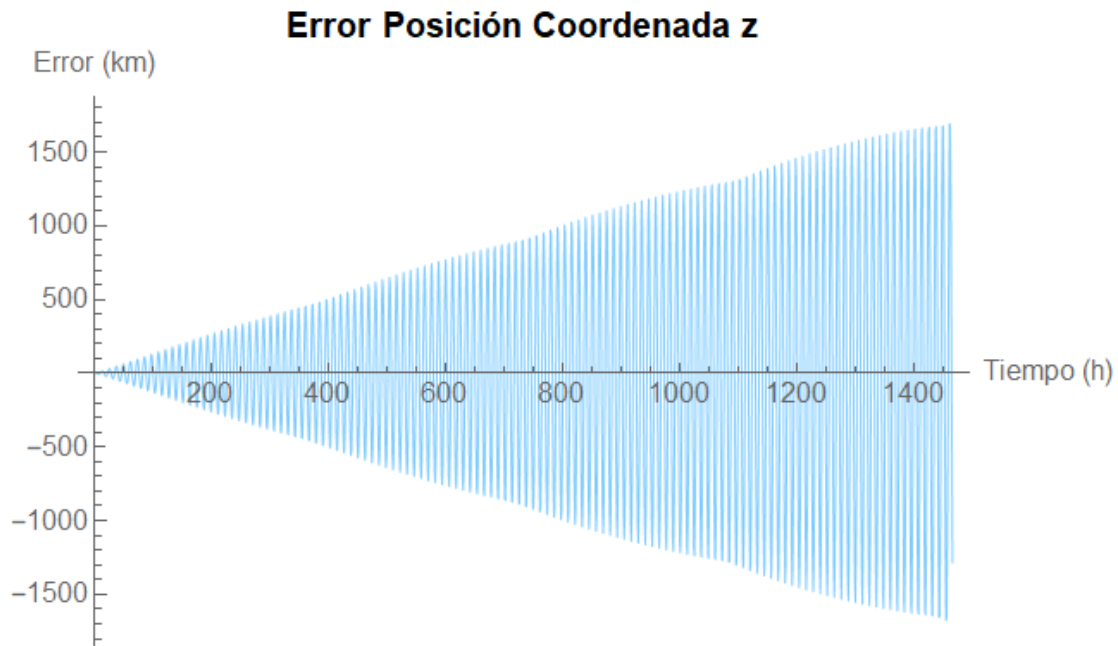
Para la integración ha sido necesario establecer unas condiciones iniciales de los vectores posición y velocidad. Resolviendo la ecuación de movimiento para estas condiciones obtenemos las coordenadas del satélite en función del tiempo. Para representar el error se ha comparado los valores obtenidos en Horizons System con los resultados de la integración. A continuación, se muestran las tres gráficas del error de la posición para dos meses.



Gráfica 2: Error coordenada x sin perturbaciones para NAVSTAR-68



Gráfica 3: Error coordenada y sin perturbaciones para NAVSTAR-68

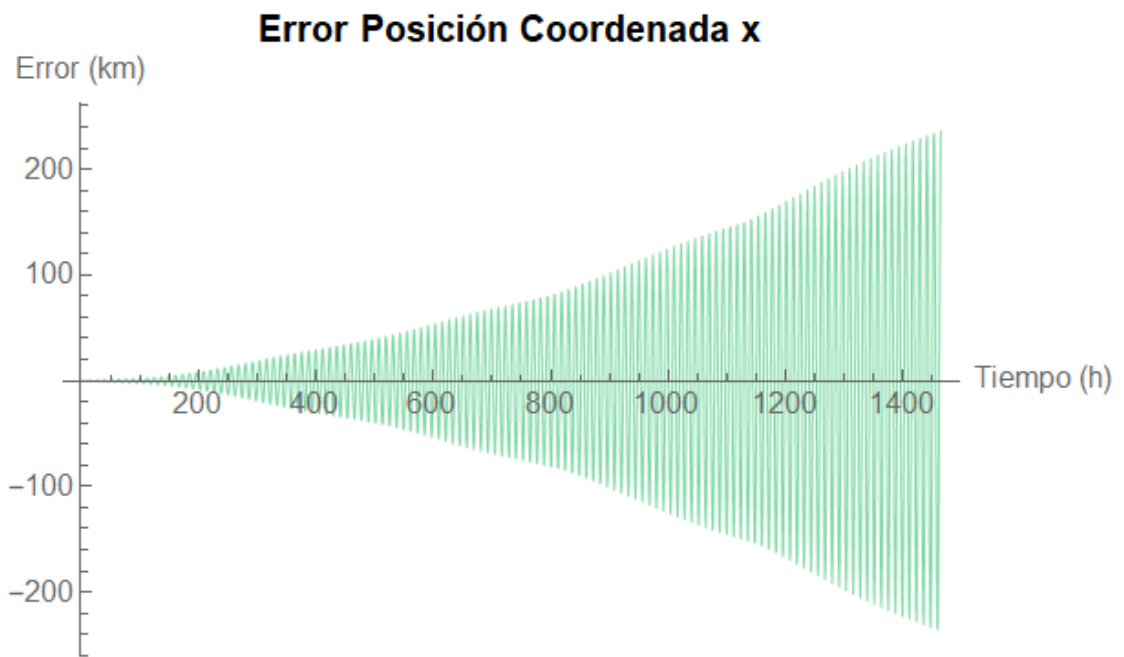


Gráfica 4: Error coordenada z sin perturbaciones para NAVSTAR-68

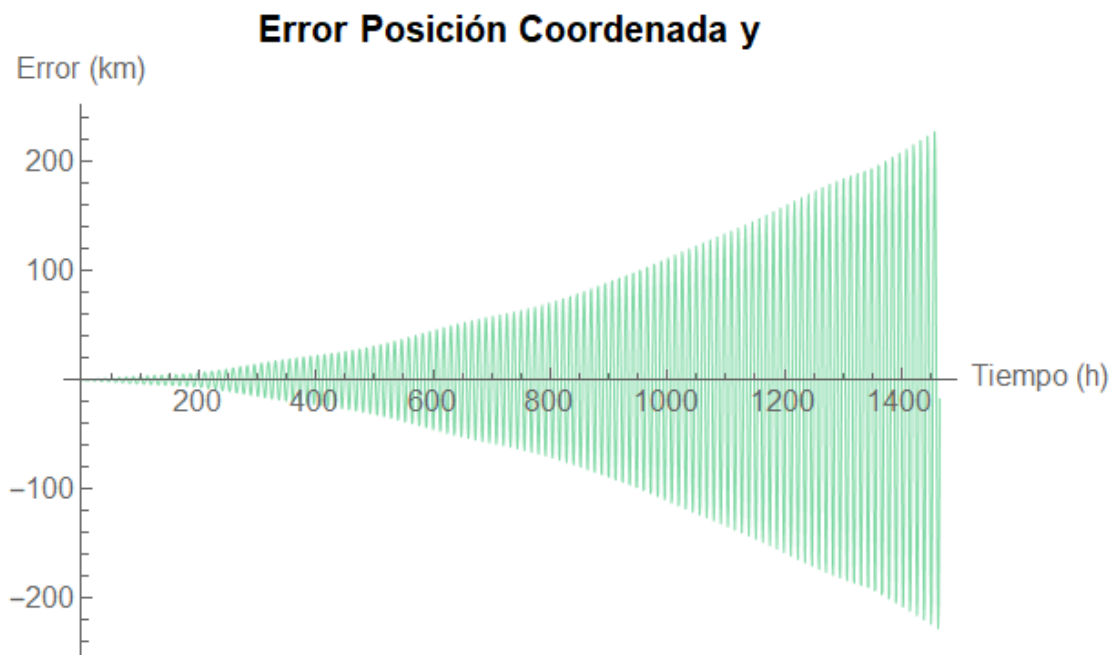
En la *Gráfica 2*, *Gráfica 3* y *Gráfica 4*, el error aumenta con el paso del tiempo dando lugar a una representación en forma de cono, lo cual tiene lógica, ya que el error se va acumulando hasta llegar a valores de 1000 km en el caso de la coordenada x e y , o valores de 1500 en el caso de la coordenada z . Para disminuir este error va a ser necesario mejorar el propagador teniendo en cuenta las perturbaciones.

3.1.2. Propagador con armónicos zonales o J 's

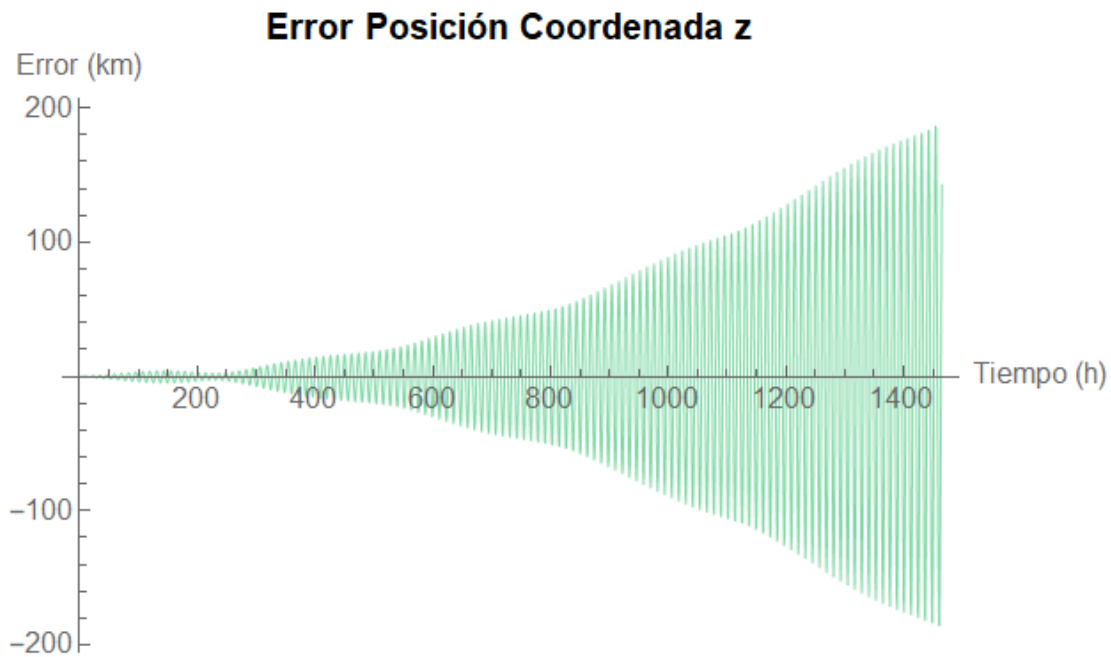
En esta sección se han añadido las perturbaciones debidas a los armónicos zonales desde J_2 a J_6 . Siguiendo el método de Cowell, las perturbaciones se han añadido a la ecuación diferencial de movimiento como una suma. Como se ha comentado anteriormente, la perturbación debida a J_2 es la más importante y la que más efecto tendrá en los resultados. De hecho, con esta perturbación se produce una disminución del error notoria en la mayoría de los casos, lo cual tiene lógica porque se está trabajando con satélites dentro de la órbita de influencia de la Tierra.



Gráfica 5: Error coordenada x con J_2 para NAVSTAR-68



Gráfica 6: Error coordenada y con J_2 para NAVSTAR-68

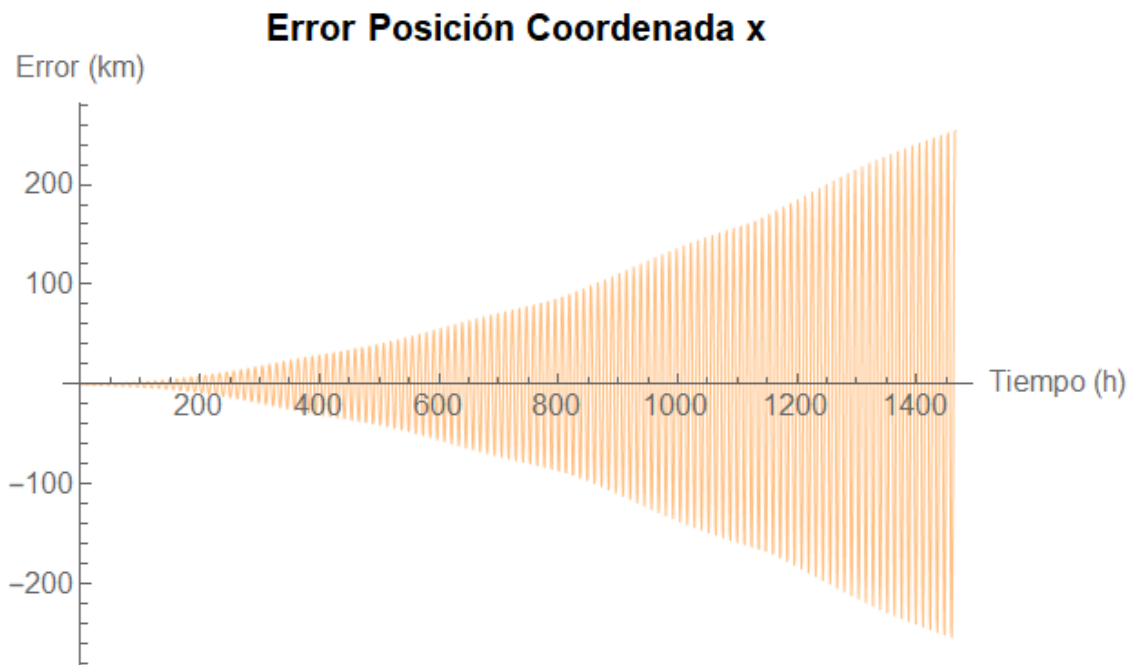


Gráfica 7: Error coordenada z con J_2 para NAVSTAR-68

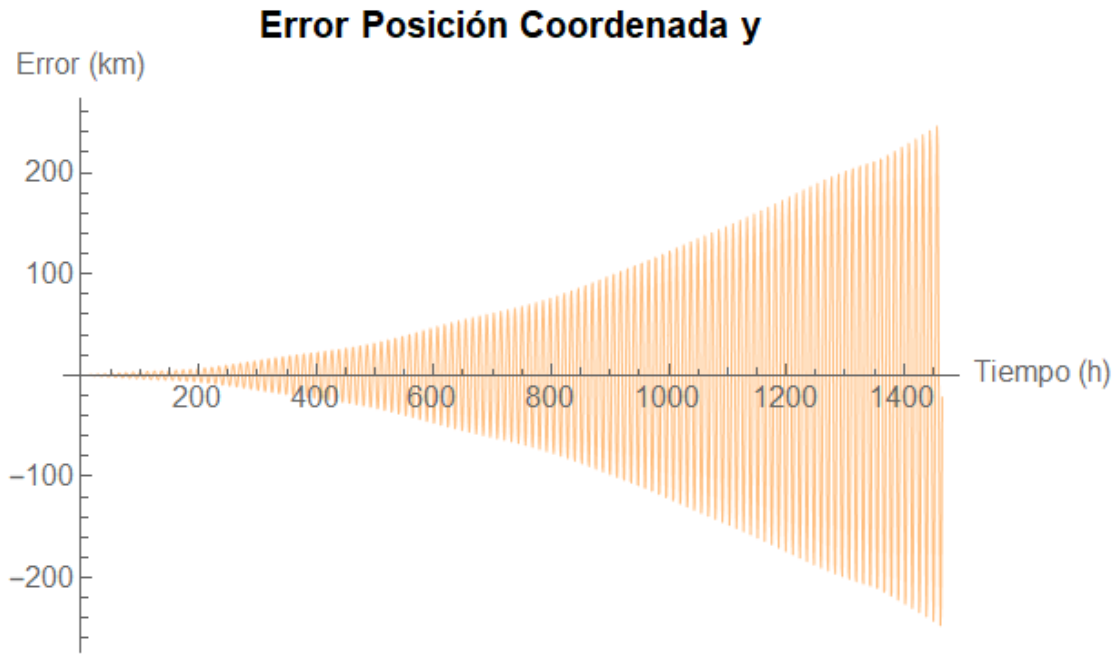
Como se puede observar hay una disminución del error importante. Para los tres casos el error se reduce hasta valores cerca de los 200 km. A diferencia del caso sin perturbaciones, en el presente caso los valores iniciales tienen un error muy pequeño, hasta las 200h aproximadamente. A partir de ahí los valores aumentan progresivamente. Para el caso de las coordenadas x e y , se reduce el error alrededor de 800 km y para la coordenada z el error disminuye cerca de 1300 km. Es una reducción muy notable y, como se ha comentado, es debida a la importancia del armónico J_2 en este tipo de órbitas. Además, como el satélite NAVSTAR-68 tiene una inclinación elevada y el achatamiento terrestre se produce en los polos, estos valores se hacen más notorios.

3.1.3. Propagador con J's y gravedad lunar.

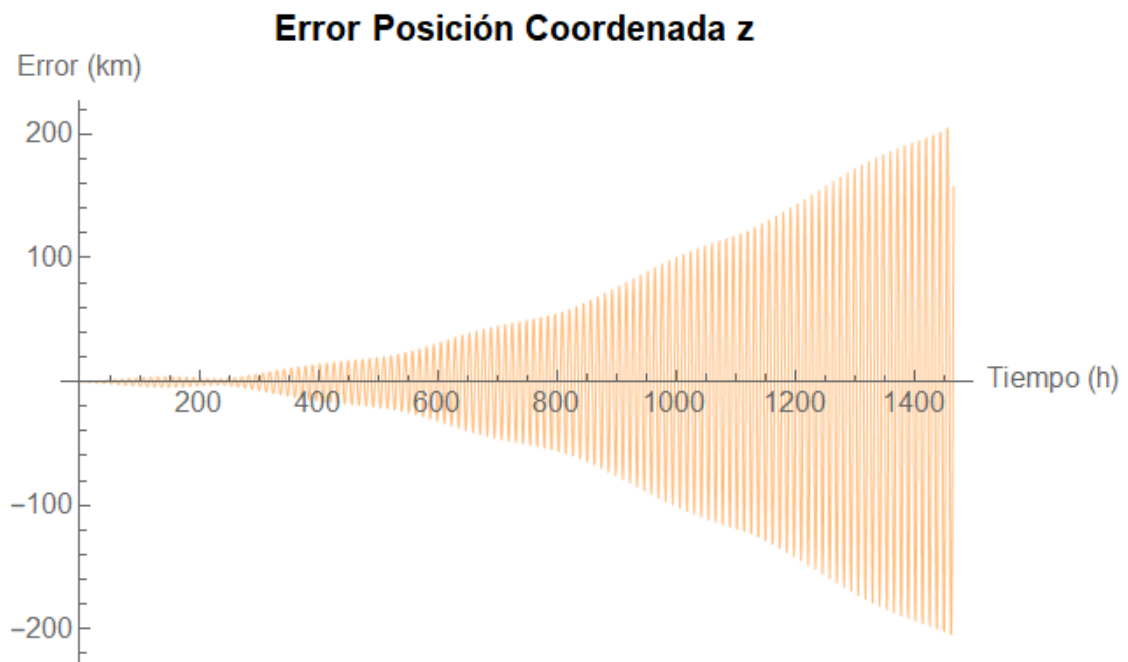
Para los satélites que orbitan la Tierra, es lógico tener en cuenta la influencia gravitatoria de la Luna. Siguiendo el método de Cowell, se ha añadido a la ecuación del movimiento la perturbación lunar. La perturbación para cada coordenada se ha obtenido según las ecuaciones (42), (43) y (44). Para poder aplicar estas ecuaciones es necesario conocer el vector posición de la luna en función del tiempo. Por tanto, se han sacado las efemérides de la luna para las fechas comentadas y con estos datos se ha realizado un polinomio interpolador. Las representaciones del error se observan a continuación:



Gráfica 8: Error coordenada x con J_2 y gravedad lunar para NAVSTAR-68



Gráfica 9: Error coordenada y con J_2 y gravedad lunar para NAVSTAR-68



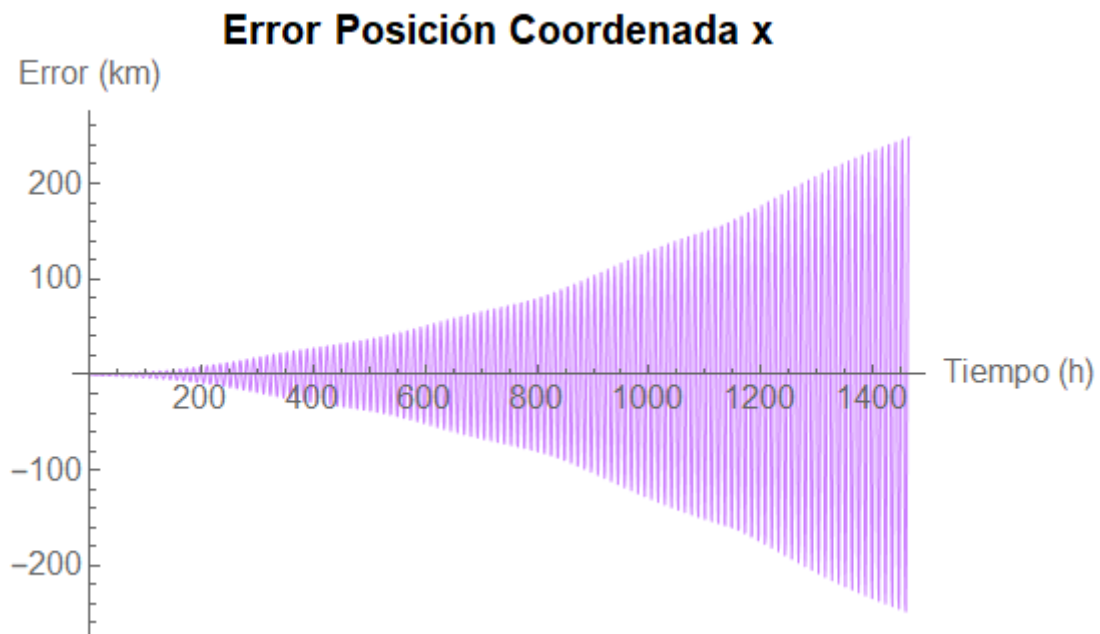
Gráfica 10: Error coordenada z con J_2 y gravedad lunar para NAVSTAR-68

No se notan cambios apreciables, ya que la perturbación de la luna tiene entre uno y dos órdenes de magnitud menos que las perturbaciones debidas a J_2 , por lo que su efecto no

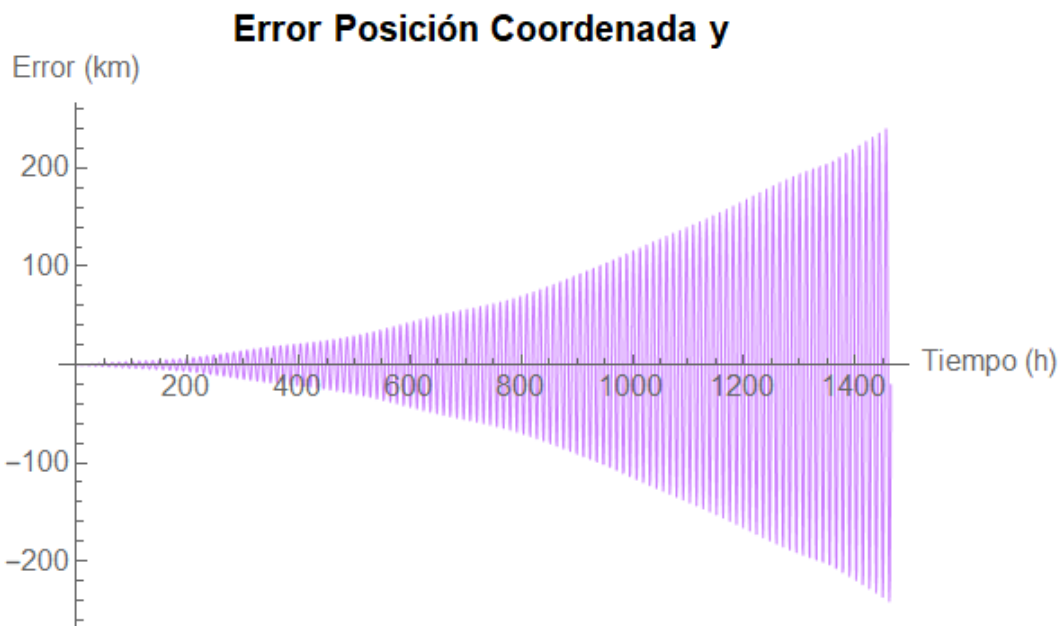
se ve reflejado en las gráficas. Sin embargo, si se trabaja con cálculos precisos, es necesario incluir esta perturbación.

3.1.4. Propagador con J_2 's, gravedad lunar y efectos relativistas

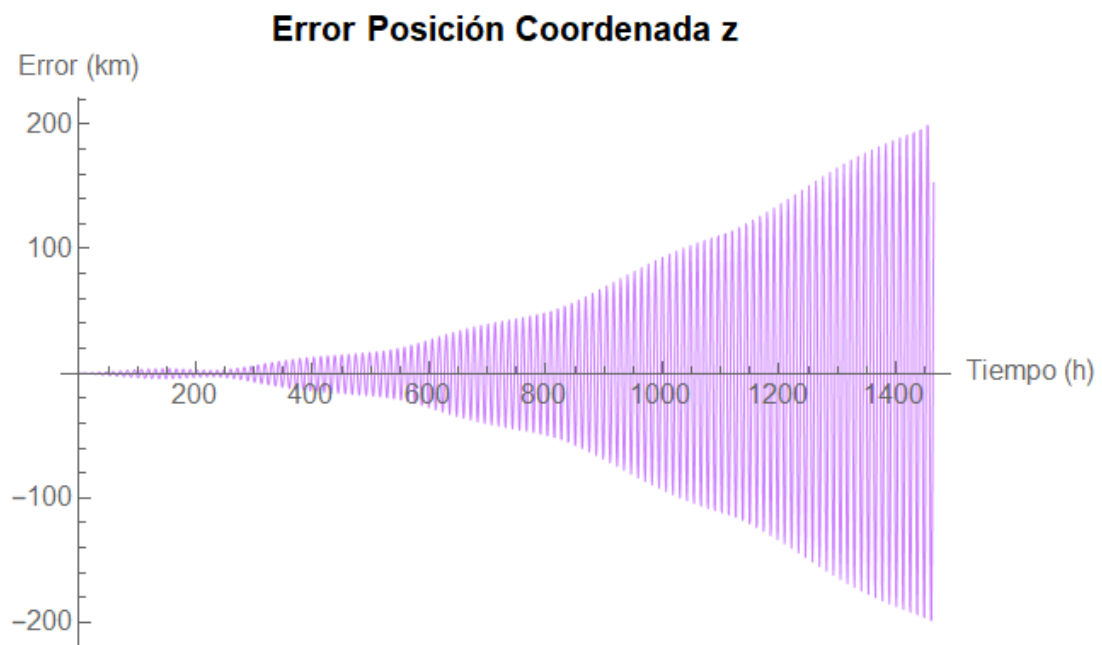
En este apartado se añade la perturbación debida a los efectos relativistas. Para ello se aplican las ecuaciones (36), (37) y (38) a la ecuación del movimiento relativo entre dos cuerpos.



Gráfica 11: Error coordenada x con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para NAVSTAR-68



Gráfica 12: Error coordenada y con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para NAVSTAR-68

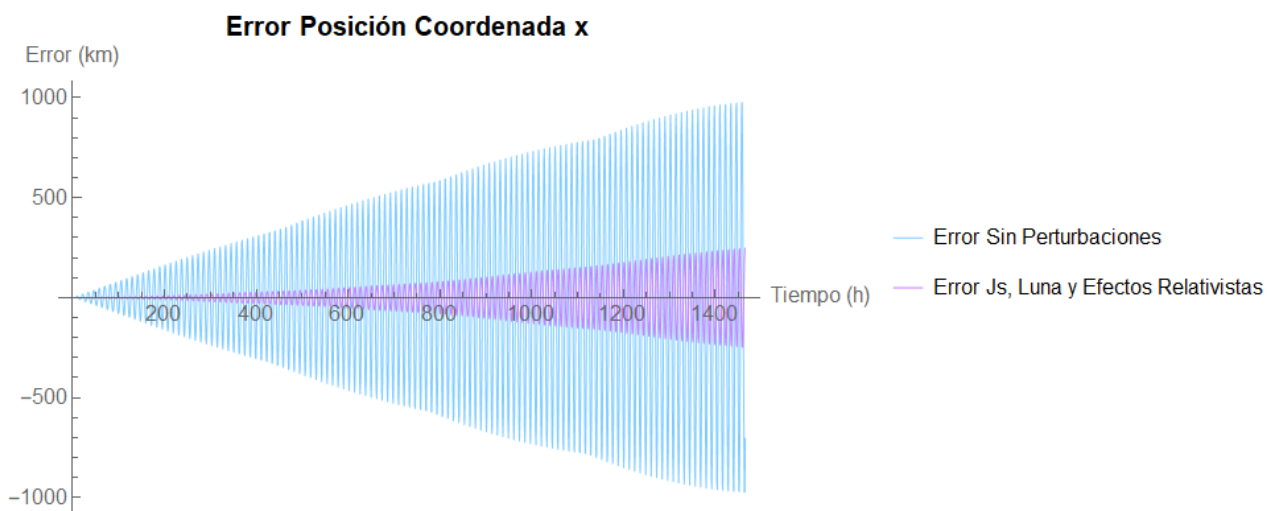


Gráfica 13: Error coordenada z con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para NAVSTAR-68

Al igual que para el caso de la perturbación debida a la Luna, no se nota un cambio significativo en el error. Esto se debe a que, para la mayoría de los satélites artificiales que orbitan alrededor de la Tierra, los efectos relativistas no son relevantes si el tiempo de integración es limitado. Sin embargo, para satélites GPS como es el caso es importante considerarlos ya que se requiere un alto grado de precisión.

3.1.5. Comparación

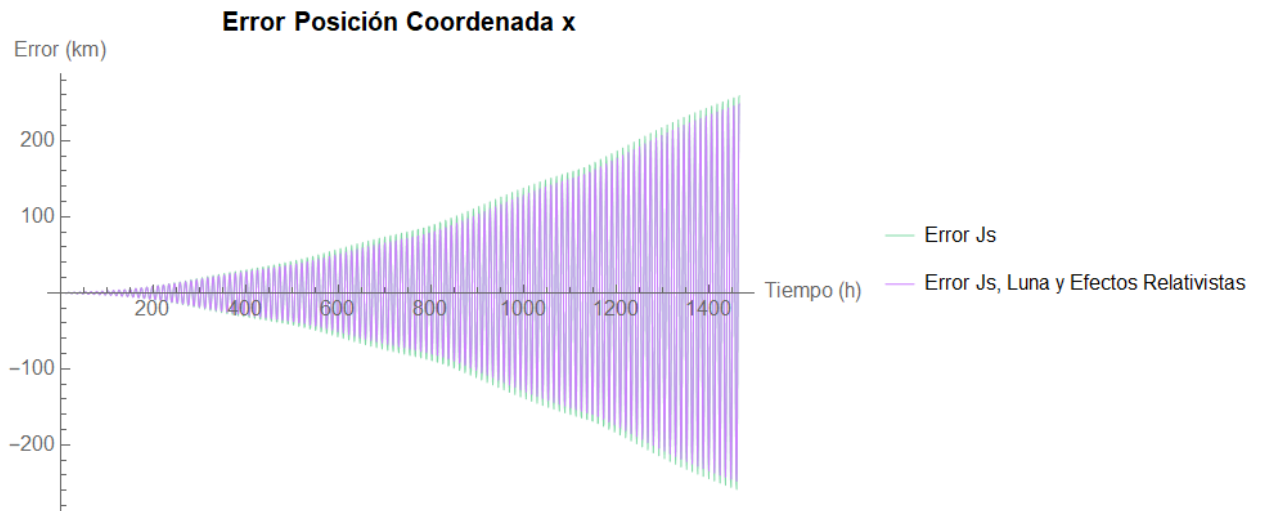
En la Gráfica 14 se compara, para la coordenada x , el error sin perturbaciones y el error teniendo en cuenta todas las perturbaciones para el satélite NAVSTAR-68. El error disminuye de forma notable, pasando de 1000 km de error a cerca de 200 km. Además, si tenemos en cuenta todas las perturbaciones, durante las primeras 200 horas, el error es casi nulo. Es lógico que con el paso del tiempo el error vaya aumentando, lo importante es que este aumento sea lo mínimo posible.



Gráfica 14: Comparación del error sin y con perturbaciones para la coordenada x del NAVSTAR-68

Por otro lado, en la Gráfica 15 se observa el error teniendo en cuenta los armónicos zonales y el error, añadiendo las perturbaciones de la luna y los efectos relativistas, ambos para la coordenada x . A simple vista es difícil diferenciar si se ha producido una disminución del error si no se realiza la comparación. No obstante, se puede observar que el error disminuye a partir de las 350 horas. Esta reducción es pequeña, pero, como se ha

comentado anteriormente, será necesario tenerla en cuenta para misiones que requieran una alta precisión.



Gráfica 15: Comparación error con Js y error con todas las perturbaciones para la coordenada x del NAVSTAR-68

3.2. LAGEOS-2

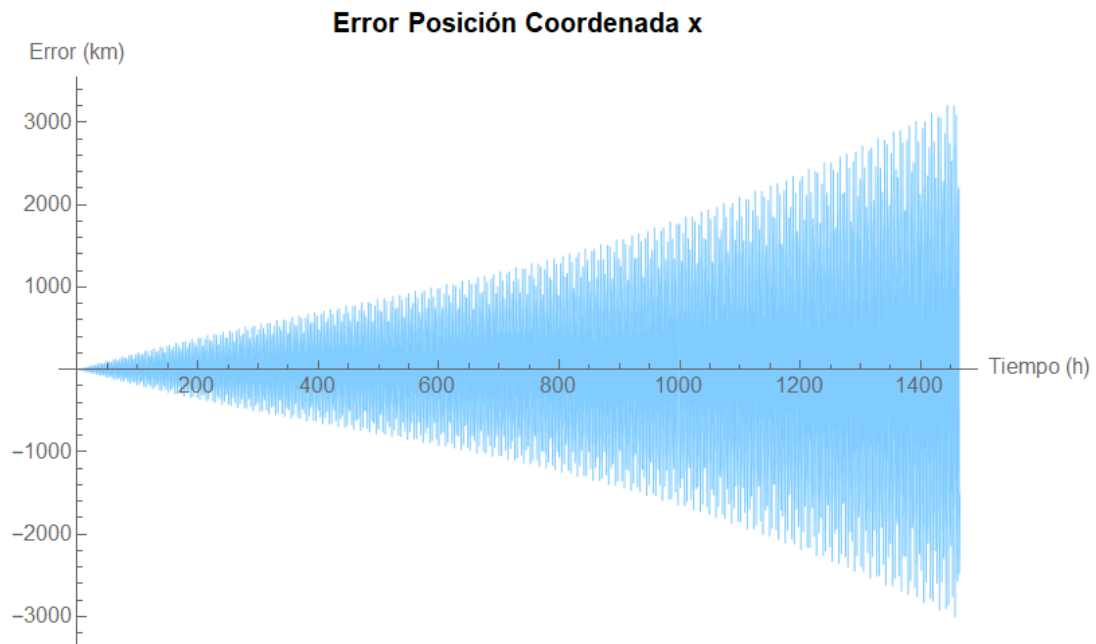
El satélite LAGEOS-2 es un satélite de investigación geodésica y geofísica lanzado el 22 de octubre de 1992. Es una misión conjunta entre la NASA y la Agencia Espacial Italiana (ASI). LAGEOS-2 es el sucesor de LAGEOS-1, que fue lanzado en 1976, y su principal objetivo es proporcionar datos precisos para el estudio de la geodinámica de la Tierra, en particular a lo referente a la tectónica de placas, la medición de la rotación de la Tierra y el movimiento del eje terrestre. Tiene un peso aproximado de 405 kg y fue puesto en una órbita aproximadamente a unos 5900 km de altura. Su inclinación orbital es de alrededor a 52.6 grados, lo que permite así cubrir una amplia gama de latitudes y proporcionar datos valiosos para todo el planeta.

Este satélite ha sido seleccionado como segundo ejemplo para la validación ya que posee unas características diferentes al NAVSTAR-68 y por tanto servirá para corroborar la validez del propagador.

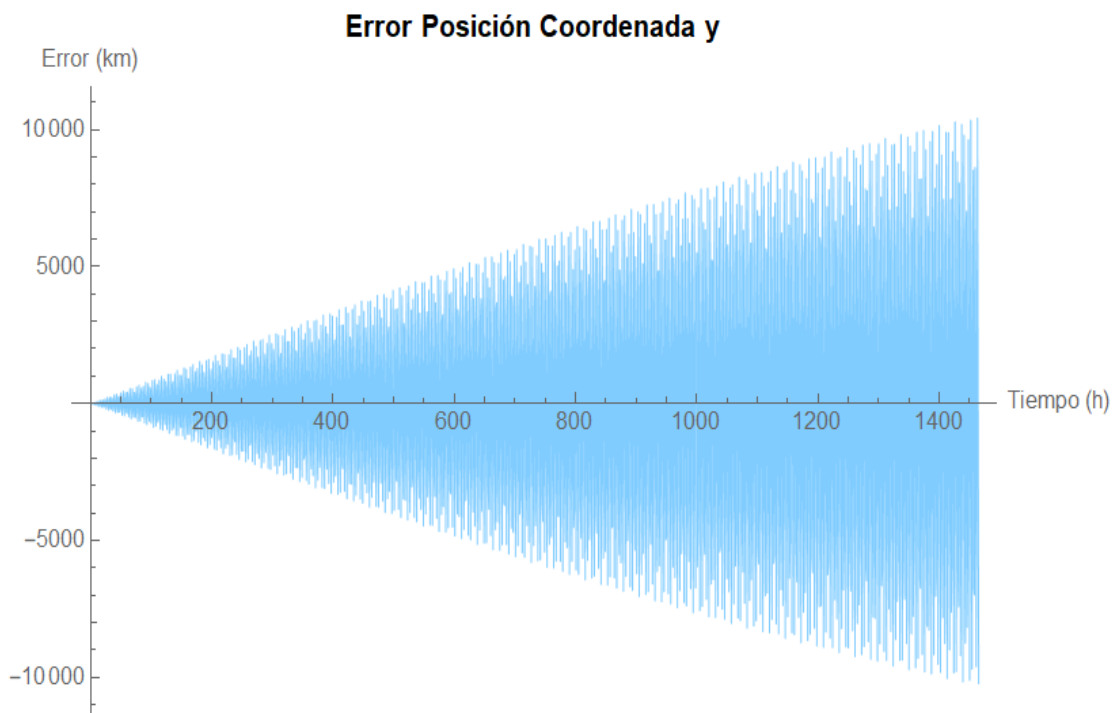
3.2.1. Propagador sin perturbaciones

De manera análoga al caso anterior, se resolverá la ecuación de movimiento relativo de dos cuerpos. Para ello, primero se obtienen los datos de Horizons System para las fechas

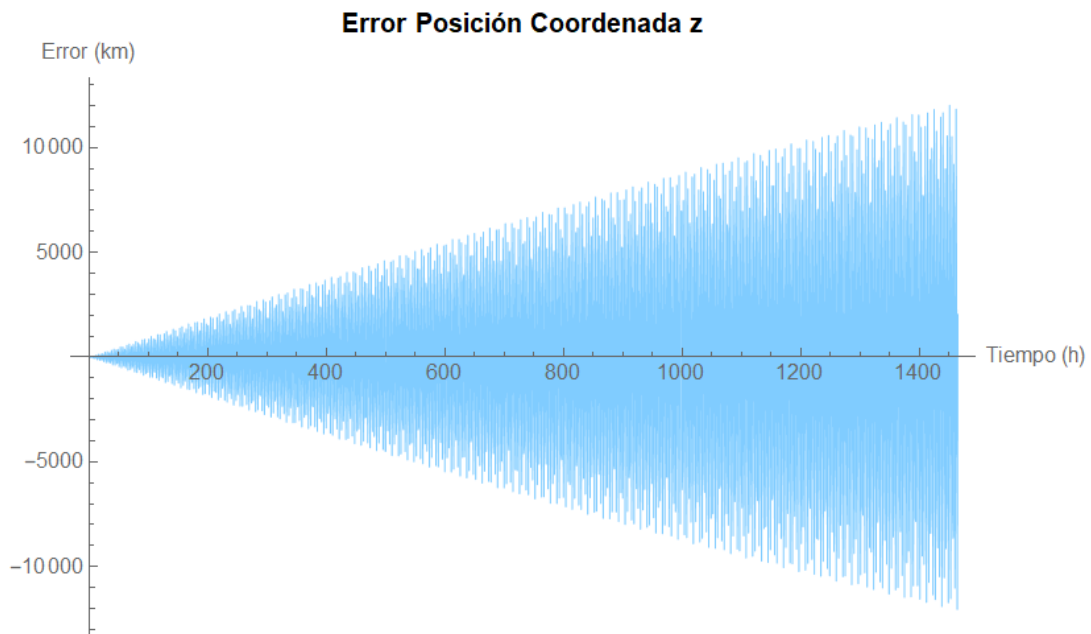
establecidas. Se establecen las nuevas condiciones iniciales de posición y velocidad y se representa el error de la integración respecto a los datos obtenidos.



Gráfica 16: Error en la coordenada x sin perturbaciones para LAGEOS-2.



Gráfica 17: Error en la coordenada y sin perturbaciones para LAGEOS-2.

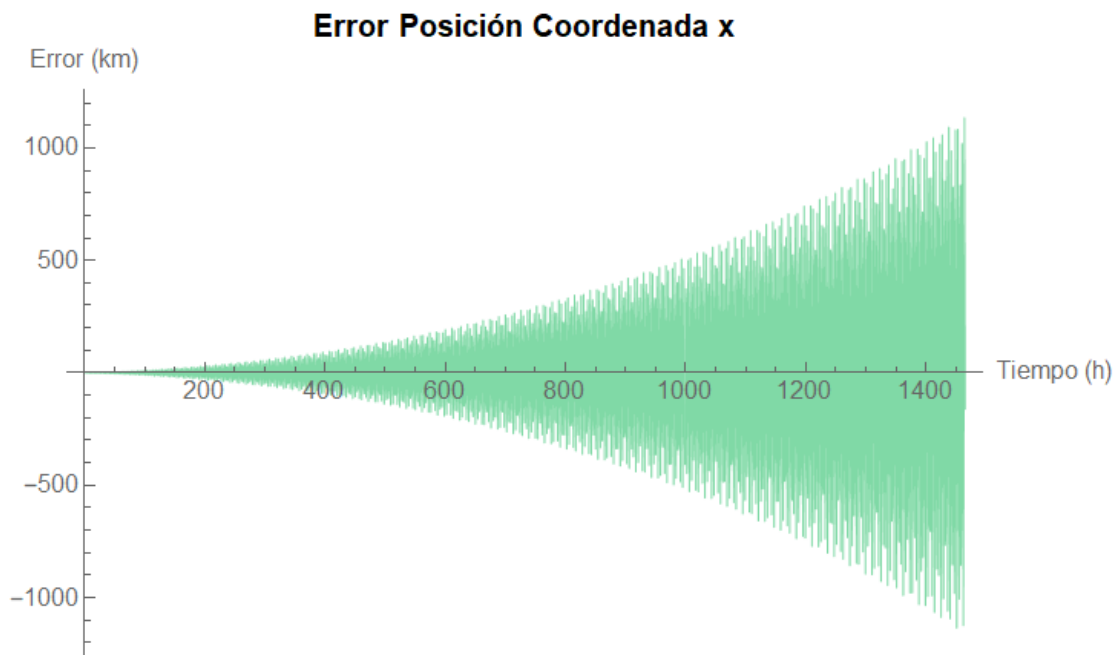


Gráfica 18: Error en la coordenada z sin perturbaciones para LAGEOS-2.

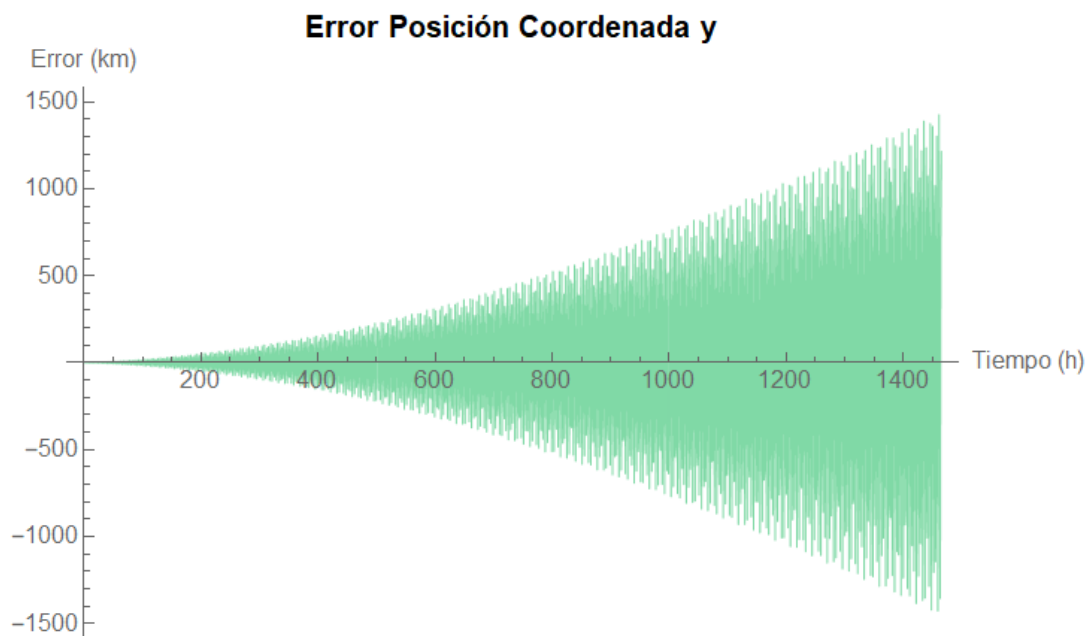
El error acumulado es más alto que para el satélite NAVSTAR-68, de valores cercanos a 3000 km para la coordenada x y errores de 10000 para las coordenadas y y z . Está claro que es necesario tener en cuenta las perturbaciones para disminuir este error y mejorar la precisión.

3.2.2. Propagador con J 's

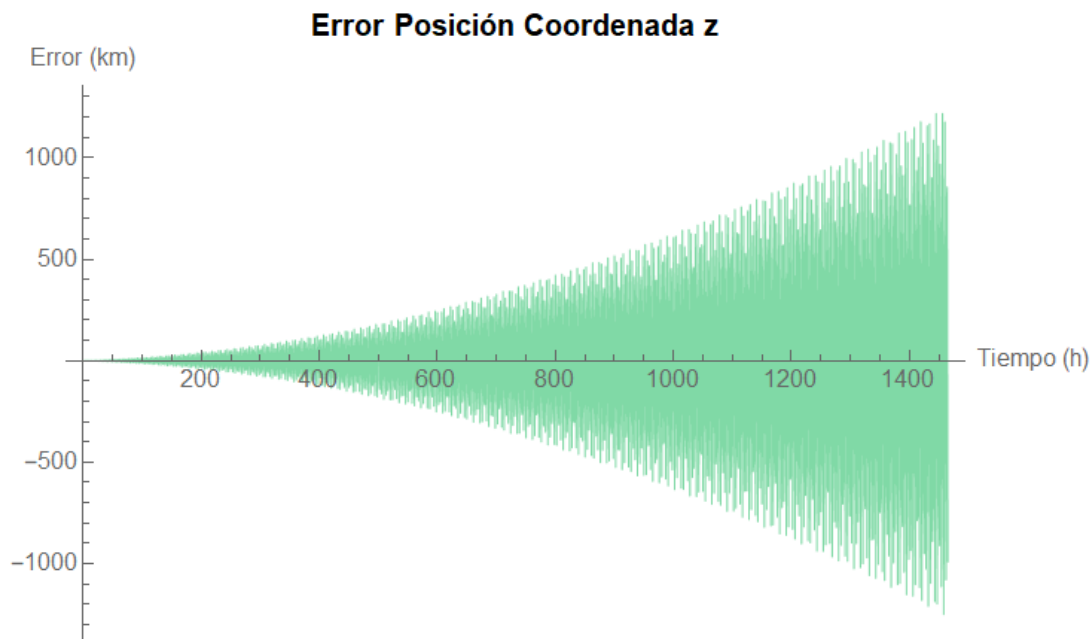
En primer lugar, se añade la perturbación debida a los armónicos zonales. Se incorporará a la ecuación de movimiento relativo siguiendo el método de Cowell. Al igual que en el caso anterior, la perturbación debida a J_2 será la que tenga más influencia en el error debido a su orden de magnitud. El error, teniendo en cuenta las perturbaciones gravitatorias, se observa en la Gráfica 19, Gráfica 20 y Gráfica 21.



Gráfica 19: Error en la coordenada x con J_2 para LAGEOS-2.



Gráfica 20: Error en la coordenada y con J_2 para LAGEOS-2.

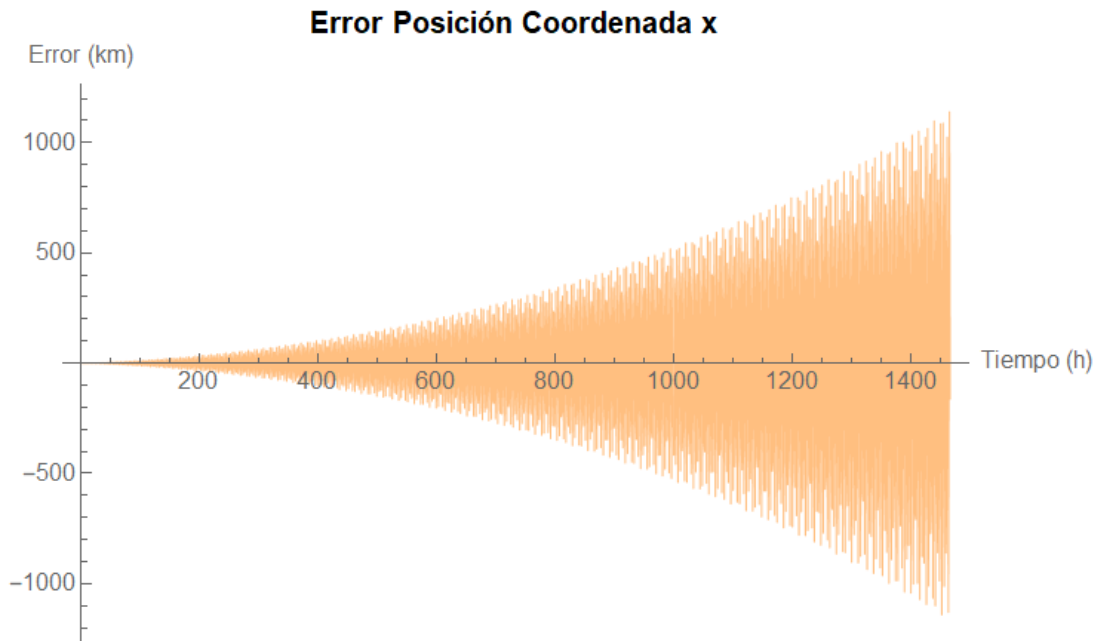


Gráfica 21: Error en la coordenada z con J_2 para LAGEOS-2.

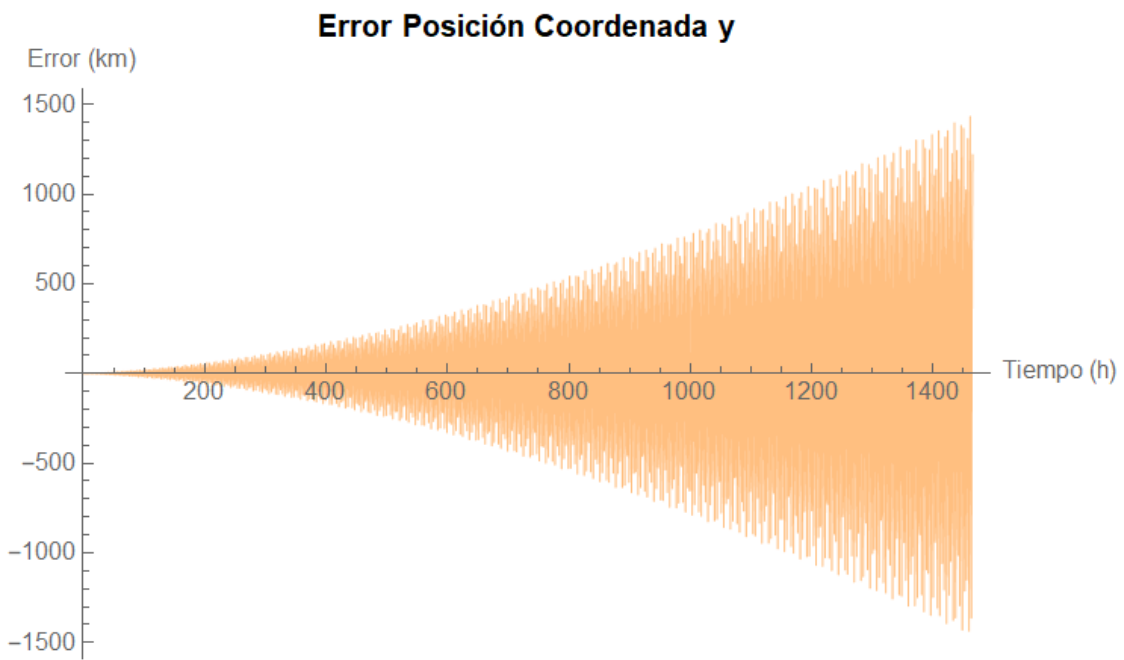
Como era de esperar, se ha producido una reducción significativa del error, llegando a bajar alrededor de 9000 km para las coordenadas y y z y alrededor de 2000 km para la coordenada x . Además, cabe destacar que el aumento del error es más suave una vez se ha añadido la perturbación. Un aspecto importante es que el error es casi nulo en las primeras horas, tomando valores de varios órdenes de magnitud por debajo del error al final de la integración.

3.2.3. Propagador con J 's y gravedad lunar

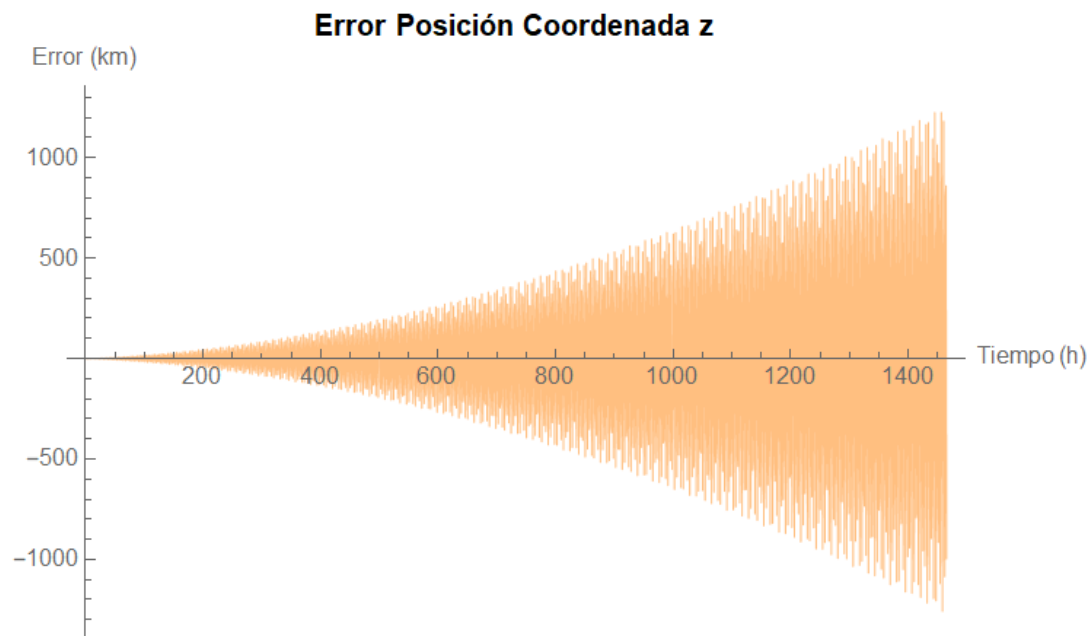
En esta sección se añade la perturbación debida a la gravedad lunar. Se calcula esta perturbación mediante las ecuaciones (42), (43) y (44), donde es necesario conocer el vector posición de la Luna durante la integración. De manera análoga al caso anterior se utiliza un polinomio interpolador. La Gráfica 22, Gráfica 23 y Gráfica 24 muestran el error en las tres coordenadas teniendo en cuenta las perturbaciones gravitatorias y la gravedad lunar.



Gráfica 22: Error en la coordenada x con J_2 y gravedad lunar para LAGEOS-2.



Gráfica 23: Error en la coordenada y con J_2 y gravedad lunar para LAGEOS-2.

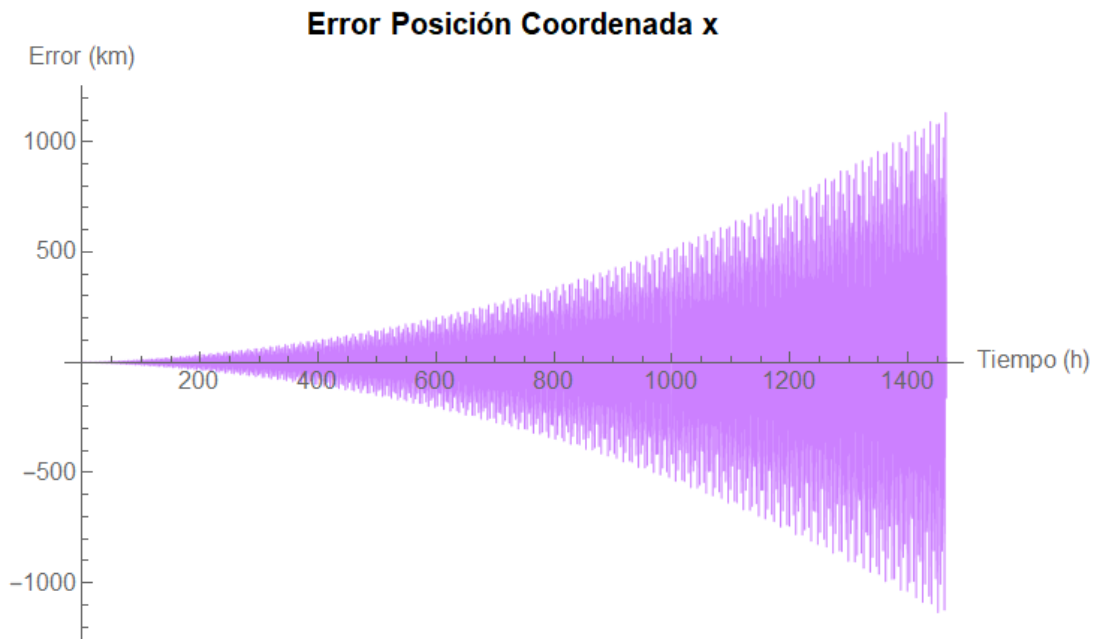


Gráfica 24: Error en la coordenada z con J_2 y gravedad lunar para LAGEOS-2.

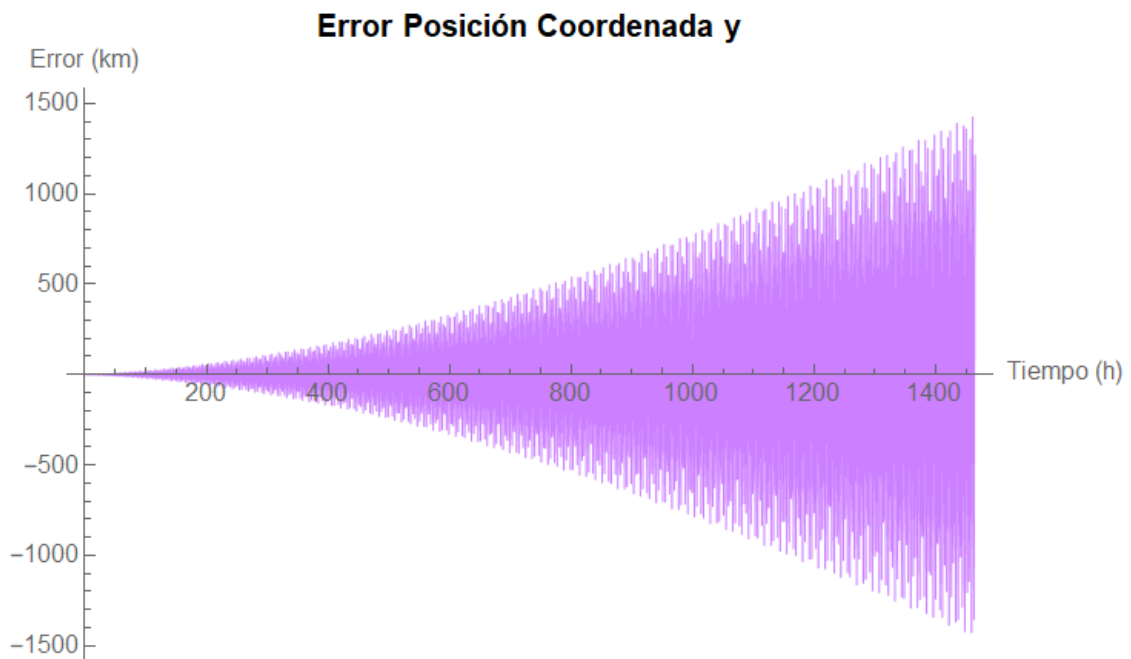
La disminución del error no es apreciable. Esto se debe a que la perturbación producida por la gravedad lunar afecta a órdenes de magnitud menores. Sin embargo, es una perturbación que se ha de considerar para satélites que requieran alta precisión o tiempos de integración más prolongado.

3.2.4. Propagador con J 's, gravedad lunar y efectos relativistas

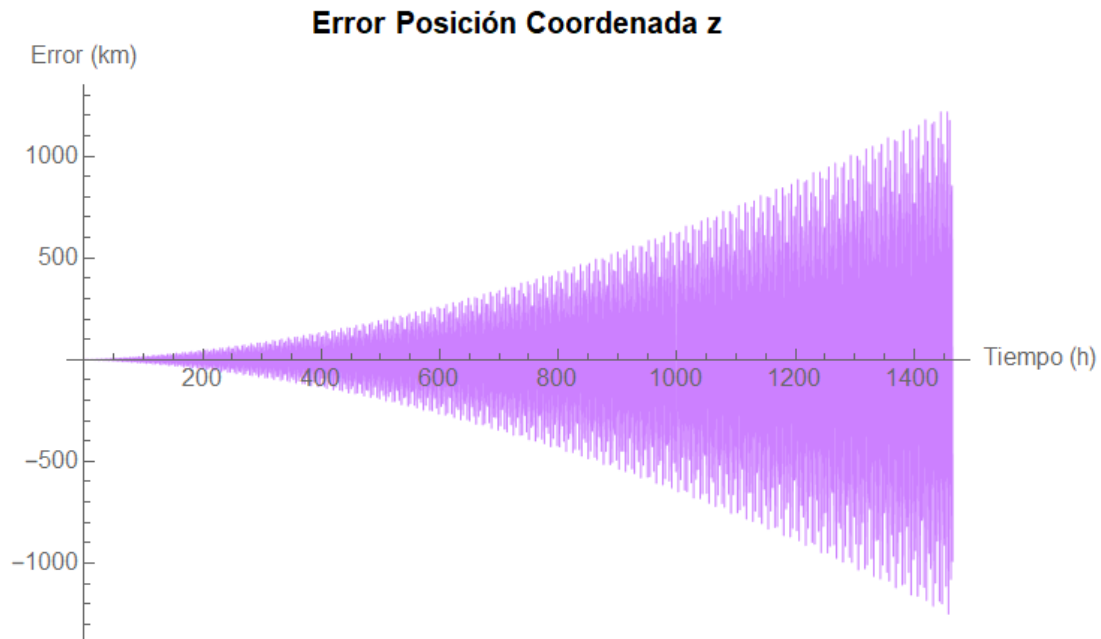
Mediante el método de Cowell se añade a la ecuación diferencial la perturbación debida a los efectos relativistas. Se aplican de nuevo las Ecuaciones (36), (37) y (38) para calcular los efectos relativistas en cada coordenada. El error de la posición para las 3 coordenadas, teniendo en cuenta todas las perturbaciones, se muestra en la Gráfica 25, Gráfica 26 y Gráfica 27.



Gráfica 25: Error en la coordenada x con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para LAGEOS-2.



Gráfica 26: Error en la coordenada y con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para LAGEOS-2.

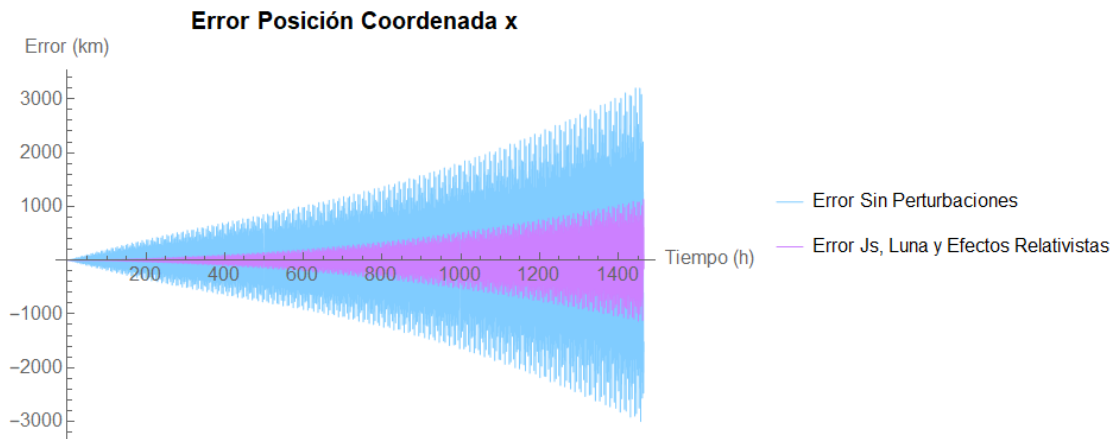


Gráfica 27: Error en la coordenada z con J_2 , gravedad lunar y efectos relativistas para LAGEOS-2.

No se contemplan cambios significativos en el error. Esto se debe a que los efectos relativistas son significativos cuando el satélite alcanza velocidades altas, no obstante, para el satélite estudiado, sí se van a tener en cuenta estos efectos para alcanzar una mayor precisión en los cálculos.

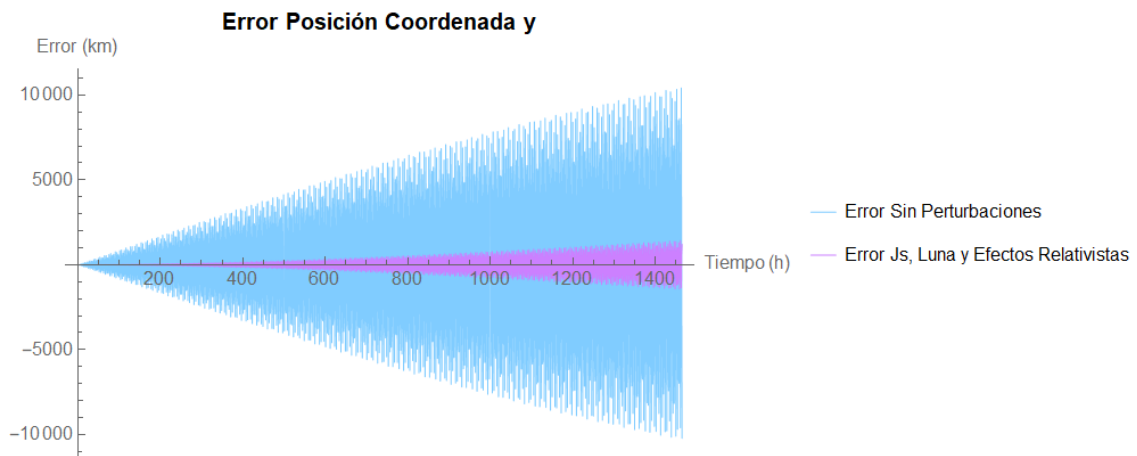
3.2.5. Comparación

En la Gráfica 28 se muestra la comparación del error en la coordenada x con y sin perturbaciones. Disminuye el error alrededor de 2000 km y, además, gracias a la incorporación de las perturbaciones, el propagador tiene mucha precisión para las primeras 300 horas.

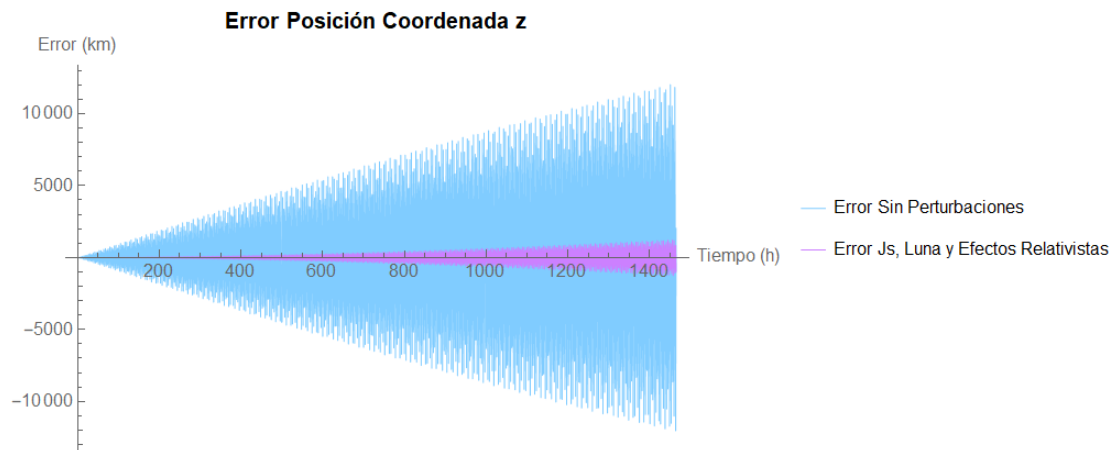


Gráfica 28: Comparación del error sin y con perturbaciones para la coordenada x del LAGEOS-2.

En la Gráfica 29 y Gráfica 30 se tiene la comparación del error de las coordenadas y y z . En estas representaciones se tienen mejores resultados, ya que la disminución del error es de casi 9000 km. Por otro lado, al igual que para la coordenada x , hay una mejora en la precisión durante las primeras 300 horas.



Gráfica 29: Comparación del error sin y con perturbaciones para la coordenada y del LAGEOS-2.



Gráfica 30: Comparación del error sin y con perturbaciones para la coordenada z del LAGEOS-2.

3.3. Conclusión validación

En resumen, las perturbaciones en un propagador orbital son cruciales por su influencia significativa en la precisión y exactitud. Para el caso del satélite NAVSTAR-68 los resultados son mejores, ya que teniendo en cuenta las perturbaciones se tiene un error cercano a 200 km. La propagación para el satélite LAGEOS-2 no tiene un error tan bajo, sino que teniendo las perturbaciones alcanza valores del error cercanos a 1000 km. Aunque este valor sea algo más elevado, el propósito de la validación se ha cumplido, ya que gracias a estas correcciones el error disminuye un orden de magnitud. Por otro lado, teniendo en cuenta las limitaciones de este estudio, los resultados son razonables. Con mejores recursos y considerando más perturbaciones se podría realizar un mejor propagador.

4. Misión a Europa. Propagador y trayectorias

4.1. Introducción

Este apartado aborda la misión con el propagador desarrollado con la herramienta de cálculo Wolfram Mathematica.

El desarrollo de la misión se divide en tres etapas claves. En primer lugar, una vez puesto el satélite en una órbita de *parking*, se realizará un impulso para llegar a la esfera de influencia de la Tierra. Luego, se partirá de ésta hasta llegar a Júpiter y una vez dentro de la influencia del gigante gaseoso, se realizará otro cambio de trayectoria para llegar al objetivo de la misión: Europa. Es importante destacar que cada etapa de la misión cuenta con unos sistemas de coordenadas y unas perturbaciones diferentes.

4.2. Trayectoria desde la órbita de *parking* a la esfera de influencia

En esta sección se detalla la primera fase de la misión espacial: la transición desde una órbita de estacionamiento hasta la esfera de influencia de la Tierra. Durante esta fase se considerarán diversos factores, como la configuración orbital inicial, las fuerzas perturbadoras y la precisión del sistema de propulsión. Además, se hará un estudio de la variación del empuje y del impulso para analizar cuál es el más rentable en cuanto a combustible y tiempo de viaje. Este trayecto estará en coordenadas geocéntricas ecuatoriales, ya que nos encontramos cerca de la Tierra.

4.2.1. Condiciones iniciales

El satélite parte de una órbita circular de *parking* a 300 km de altura sobre la Tierra, estas coordenadas, así como la velocidad, se muestran en la ecuación (57). Se ha elegido esta órbita al aportar gran flexibilidad en las ventanas de lanzamiento y eficacia en cuanto a consumo de combustible durante el lanzamiento [10].

$$r_0 = \{6678, 0, 0\} \quad (57)$$

$$v_0 = \{0, 7.7258, 0\}$$

Por otro lado, el objetivo ya mencionado es alcanzar la esfera de influencia terrestre, que es una región del espacio alrededor de la Tierra dentro de la cual predomina la influencia gravitacional de ésta. La esfera tiene un radio aproximado de 900000 km. Para poder alcanzar esta distancia será necesario añadir a la velocidad (que corresponde con la velocidad circular de la órbita de *parking*) del satélite un empuje durante un tiempo limitado.

Se va a utilizar un motor iónico de bajo empuje. Este tipo de motores tienen un impulso específico muy alto [11], lo cual será más eficiente en cuanto a términos de consumo de combustible. Además, es capaz de proporcionar un empuje muy preciso, lo que es ideal para ajustar la trayectoria según los objetivos. Aunque no es necesario para la misión actual, tiene capacidad de operar durante largos períodos. No obstante, se va a utilizar el motor iónico de manera intermitente para realizar maniobras de cambio de órbitas como en la Dawn Mission de la NASA [12], donde se encendió y apagó el motor según las necesidades específicas de la misión. El empuje de los motores iónicos ronda desde decenas a cientos de milinewtons [16]. Considerando que para la propagación se necesita la aceleración, si dividimos entre una masa de alrededor de 1000 kg, los valores de la aceleración del motor tendrán unos órdenes de magnitud entre 10^{-4} y 10^{-5} . Para la misión actual se ha seleccionado una aceleración de 0.00055 m/s^2 . Si se fija un empuje constante durante toda la misión es imposible alcanzar el objetivo con precisión, por tanto, se ha impuesto que el empuje se realizará durante un determinado tiempo.

4.2.2. Perturbaciones necesarias

Debido a que se parte de una órbita alrededor de la Tierra no se puede obviar el efecto de la perturbación producida por los armónicos zonales. Como se ha comentado, el efecto de J_2 será el más importante, y, siguiendo el marco teórico, esta perturbación debida al achatamiento terrestre vendrá dada por las ecuaciones (32), (33) y (34). Por otro lado, el objetivo es llegar a la esfera de influencia de la Tierra, por lo que la perturbación debida a los efectos gravitatorios de la Luna se habrán de tener en cuenta. Esto se debe a que la órbita lunar se encuentra a 384400 km de la Tierra, lo que significa que el satélite pasará por su órbita para llegar al objetivo de los 900000 km.

Para implementar las perturbaciones debidas a cuerpos celestes se ha procedido de manera diferente a la validación; esto se debe a que la integración a lo largo de la misión abarca mucho tiempo, y, como se ha comprobado en la validación, el error se va

acumulando conforme se avanza en el espectro temporal. Por tanto, para evitar el error extra que producía un polinomio interpolador, se ha implementado la órbita lunar de manera más sencilla, simplificando la órbita elíptica a una órbita circular y obteniendo las coordenadas x e y según la ecuación (58). La coordenada z se obtiene a partir de las coordenadas x e y .

$$x = R * \cos \omega t \quad (58)$$

$$y = R * \sin \omega t$$

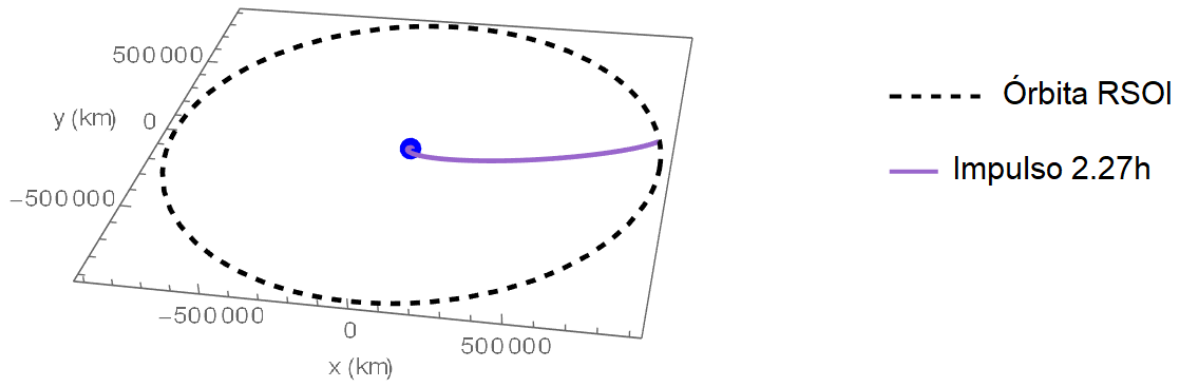
Donde R es la distancia de la Tierra a la Luna y ω la velocidad angular de la Luna.

Por último, se va a añadir también la perturbación debida a los efectos relativistas, ya que se busca la mayor precisión posible durante la misión. Todas las perturbaciones son añadidas mediante el método de Cowell.

4.2.3. Propagación y resultados

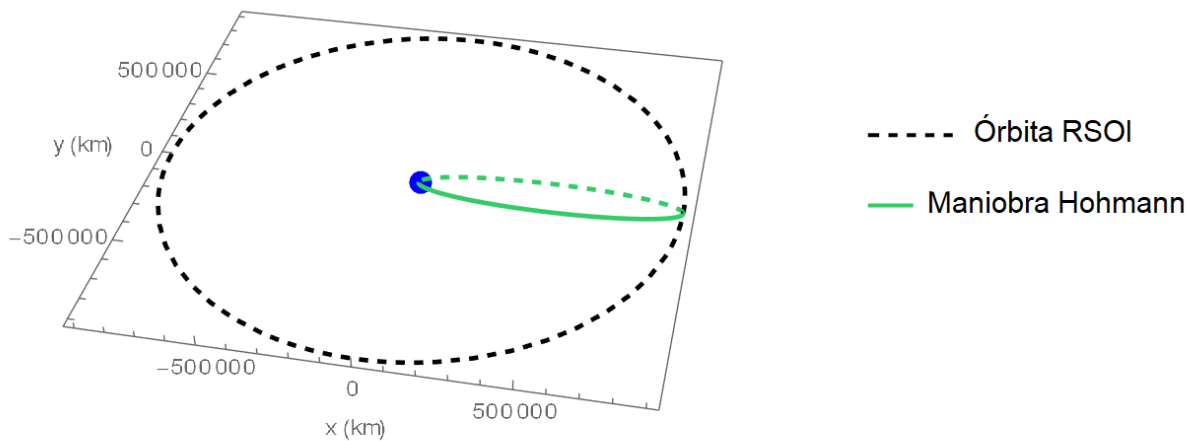
Como se ha comentado, a fin de calcular la trayectoria hasta la órbita de influencia, se precisará un empuje adicional a la velocidad que lleve el satélite. La aceleración de este empuje es de 0.00055 y, para evitar imprecisión en el cálculo, se ha dado esta aceleración durante un tiempo específico. El impulso necesario para llegar a la órbita es de 2.27 horas, unas 2 horas, 16 minutos y 12 segundos. Este valor se ha conseguido realizando un estudio que se muestra a continuación.

Por tanto, utilizando el propagador validado se resuelve la ecuación diferencial para un tiempo de integración de 15 días. Las condiciones iniciales y las perturbaciones son las que se han mencionado en los apartados anteriores. La trayectoria para llegar a la esfera de influencia se observa en la 31 en azul, donde la esfera central es la Tierra y la órbita de puntos es la órbita a 900000 km que simula la órbita del límite de la esfera de influencia terrestre.



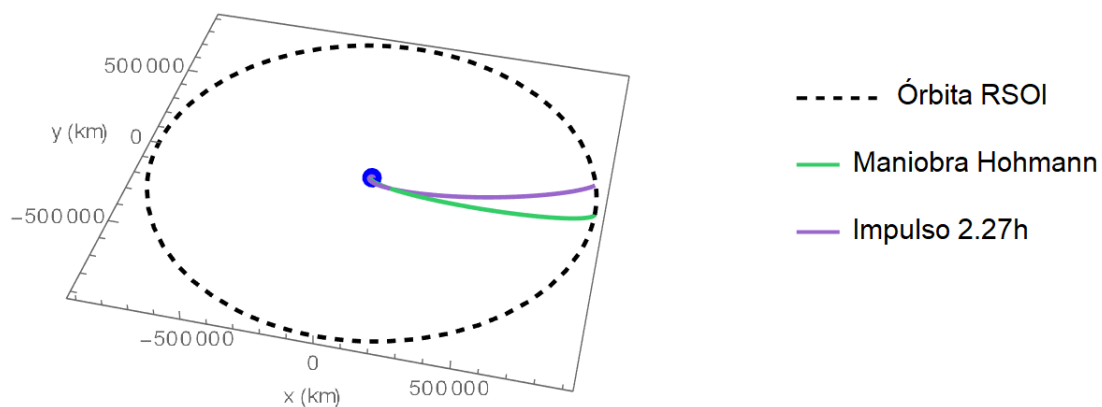
Gráfica 31: Trayectoria del satélite hasta el límite de la esfera de influencia

En las misiones interplanetarias se busca el mínimo consumo de combustible. Para transferir un satélite entre dos órbitas circulares a diferentes altitudes se puede utilizar la maniobra de Hohmann y así reducir el combustible usado. Se ha planteado de forma teórica esta maniobra para compararla con la trayectoria de la misión. En la Gráfica 32 se muestra el recorrido de este cambio de órbita, donde con un segundo impulso en la mitad de la órbita el satélite se colocaría en la órbita final.



Gráfica 32: Maniobra de Hohmann hasta límite de la esfera de influencia

En la Gráfica 33 se comparan la trayectoria original y la maniobra de Hohmann. La trayectoria de la misión tarda 15 días en completarse mientras que para el cambio de órbita mediante Hohmann se tardan cerca de 17 días y 14 horas. Esto nos indica que, si se realiza la maniobra de Hohmann, se optimizaría el combustible, mientras que, con la trayectoria original, se optimizaría más el tiempo; no obstante, son valores parecidos, por lo que esta primera fase de la misión es aceptable en cuanto a tiempo y consumo de combustible.

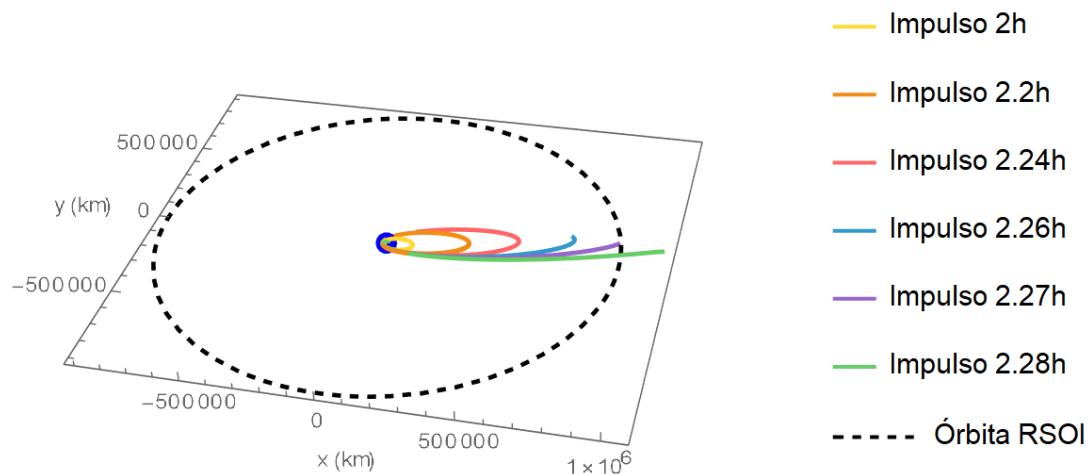


Gráfica 33: Comparación trayectoria original y maniobra de Hohmann

Al haber fijado un empuje inicialmente, para encontrar el tiempo necesario del impulso hasta llegar de forma razonable a la órbita final, se ha realizado un estudio variando el tiempo en el que el motor está funcionando. Como el valor del empuje es importante, ante variaciones pequeñas en el tiempo del impulso, la trayectoria cambia totalmente. Es por esto último que no se han podido coger valores muy dispares. Si se prueban valores menores a 2 horas el satélite no tiene la fuerza necesaria para cambiar su órbita y por tanto no se puede visualizar gráficamente. En la Gráfica 34 se muestra como para impulsos desde 2 horas hasta 2.28 horas (2 horas, 16 minutos y 48 segundos), las trayectorias cambian considerablemente. Esto indica lo sensible que es añadir o quitar tiempo de empuje en la misión. Conforme se da más tiempo de impulso, la órbita crece más y tiene un apogeo mayor. A partir de las 2h, si añadimos 12 minutos (0.2 horas) de empuje, la trayectoria (que corresponde con el color naranja) crece de forma notable, pero sigue siendo afectada por la influencia de la Tierra. Si se sigue añadiendo impulso, se contempla

como las trayectorias roja y azul, a las cuáles se les han añadido poco más de un minuto, aumentan considerablemente su apogeo. Es para 2.27 h cuando llega la trayectoria hasta la órbita final de forma razonable. Si superamos este tiempo, se observa que la trayectoria se va más allá de la órbita buscada. Ello es debido a que se ha superado la zona donde influye la gravedad terrestre y es muy fácil, consecuentemente, alejarse sin control.

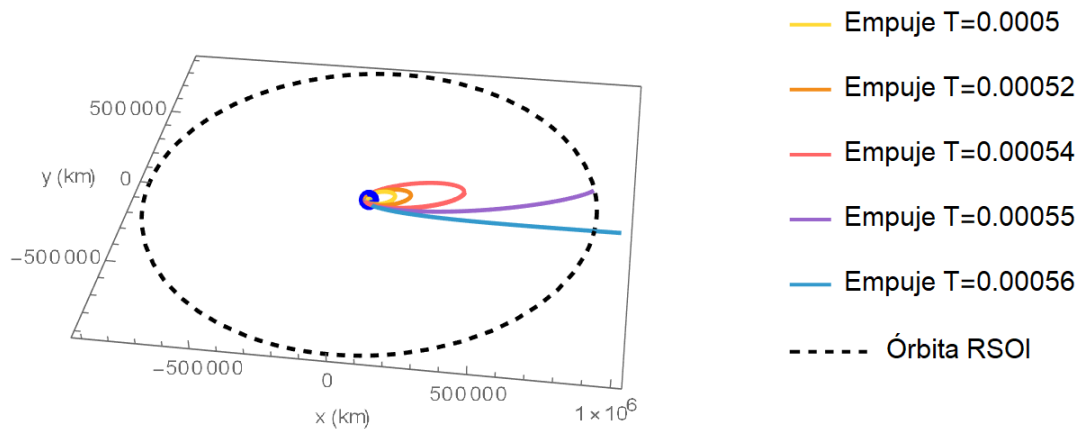
El tiempo de integración de todas las trayectorias ha sido de 15 días.



Gráfica 34: Comparación diferentes impulsos para llegar al límite de la esfera de influencia.

Por otro lado, para comprobar si el valor del empuje también afecta de forma notable a la trayectoria, se ha realizado otro estudio variando éste y dejando fijo el impulso de 2.27 horas, que se ve reflejado en la Gráfica 35. La integración se ha realizado nuevamente para 15 días y se han tenido en cuenta las mismas perturbaciones que para la trayectoria original. De igual forma que para el caso anterior, se contempla como variando poco el empuje, las trayectorias cambian de ampliamente. Para valores menores a 0.0005, la órbita no cambia de forma visual y, por tanto, necesita más empuje para empezar a notarse. A partir de este valor, se van añadiendo 0.00002 de empuje más a cada trayectoria y se observa que el cambio es cada vez mayor. De 0.0005 a 0.00054 aumenta cada vez más el apoapsis, y al añadir 0.00001 más la trayectoria ya alcanza la órbita final. Más allá de 0.00055, el satélite se va fuera de la esfera de influencia terrestre. Se demuestra de nuevo la sensibilidad del empuje en esta misión, ya que cambiando tanto el tiempo de empuje como el valor de éste se comprueba que la trayectoria se transforma

considerablemente. Por ello, se puede concluir tras estos estudios que el empuje es un factor determinante a la hora del diseño de la misión.



Gráfica 35: Comparación diferentes empujes para llegar al límite de la esfera de influencia.

4.3. Trayectoria desde esfera de influencia hasta Júpiter

Este apartado aborda la segunda parte de la misión: el viaje desde la órbita en el límite de la influencia terrestre hasta Júpiter. Como se va a realizar un viaje interplanetario se han cambiado las coordenadas a heliocéntricas eclípticas. Además, al alejarnos de la tierra va a haber perturbaciones que ya no afecten, cambiará el impulso del empuje y las condiciones iniciales serán diferentes.

4.3.1. Condiciones iniciales

Si el satélite siguiera la maniobra de Hohmann, la órbita final que se obtendría sería circular, sin embargo, mediante la trayectoria realizada, se obtiene una órbita final con un poco de excentricidad. Esta diferencia se debe a que la velocidad con la que se llega a la órbita final es de 0.176 km/s, un valor bastante bajo, pero no nulo, como sería si se hiciese con Hohmann.

Debido a que es necesario un cambio a coordenadas heliocéntricas y al tratarse de un estudio preliminar, no se va a coger el valor final de la primera parte de la misión como valor inicial de esta segunda fase.

Se va a asumir que la velocidad con la que parte será la velocidad circular de la Tierra respecto al Sol lo que significa que el satélite está orbitando a la misma velocidad que la

Tierra, por lo que ya parte de una velocidad circular alta. Esto se corresponde con las siguientes coordenadas:

$$r_0 = \{-1.9896 \times 10^7, -1.4814 \times 10^8, 0\} \quad (59)$$

$$v_0 = \{29.783, 0, 0\}$$

La distancia media entre la Tierra y Júpiter es de aproximadamente 778 millones de kilómetros. Al tener que recorrer una distancia tan grande no será suficiente con la velocidad con la que parte, sin embargo, con un impulso de poco tiempo se conseguirá llegar al objetivo. Con el mismo valor de empuje del primer tramo se va a dar otro impulso de valor diferente.

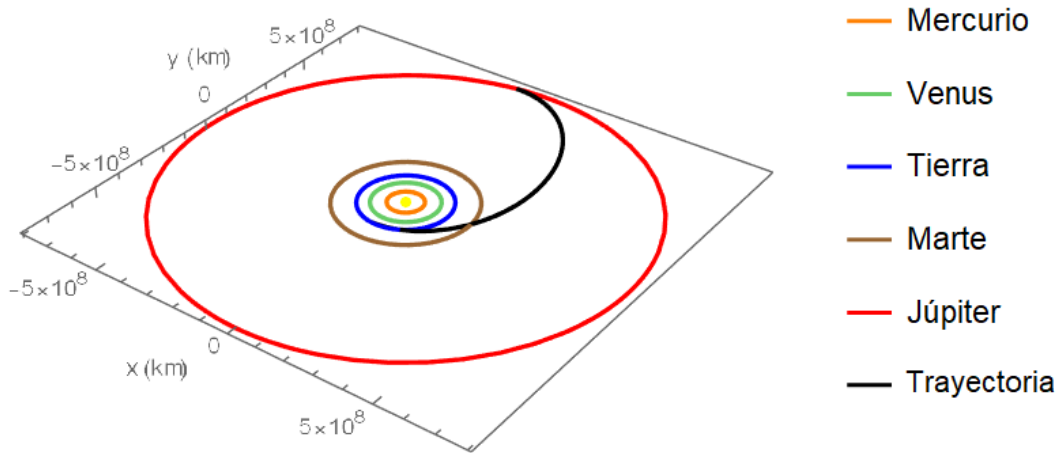
4.3.2. Perturbaciones necesarias

En este caso, al realizar un viaje a través del sistema solar, las perturbaciones van a cambiar. En primer lugar, no se va a tener en cuenta ni el efecto del achatamiento terrestre ni la influencia gravitatoria de la luna. La perturbación que si se va a mantener es la de los efectos relativistas, esto se debe a que depende de la velocidad del satélite y no es muy costosa computacionalmente a pesar del cambio de coordenadas.

Las perturbaciones más importantes a tener en cuenta en este tramo van a ser las perturbaciones debidas a la gravedad de los planetas. Al trabajar en coordenadas heliocéntricas, es más simple implementar las órbitas de los planetas. Se va a asumir que las órbitas de los planetas son circulares y están en el plano de la eclíptica, por lo que $z = 0$. Las coordenadas x e y vienen determinadas por la Ecuación (58). Una vez se conoce como varía la posición de la órbita con el tiempo se aplican las Ecuaciones (42), (43) y (44). Esto se aplica para todos los planetas del sistema solar. Otro factor para tener en cuenta es que los planetas no parten todos del mismo punto en el valor inicial, así que se ha calculado una aproximación preliminar del ángulo que los separa a través de The Planets Today [13].

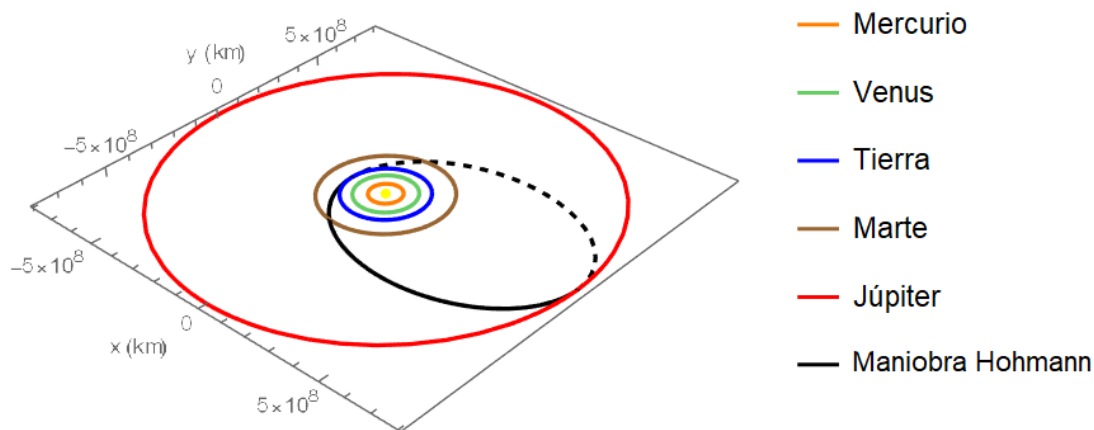
4.3.3. Propagación y resultados

Con el uso del propagador validado, se lleva a cabo la integración para alcanzar Júpiter, donde se aplican las condiciones iniciales y las perturbaciones descritas en los apartados previos. La representación de la trayectoria que toma el satélite con este impulso se contempla en la Gráfica 36, donde se han representado las trayectorias de los planetas, desde Mercurio hasta Júpiter. La trayectoria resultante es aceptable, ya que llega de manera suave y en la misma dirección que la trayectoria de Júpiter. Por lo que si se le da un impulso en el momento en que llega a este valor, el satélite se quedaría en la órbita de Júpiter, que es el objetivo de esta segunda fase.



Gráfica 36: Trayectoria hasta Júpiter.

Por otro lado, se ha calculado la maniobra de Hohmann de forma teórica y se ha representado en la Gráfica 37. El tiempo óptimo para llegar a Júpiter si se realiza una transferencia de Hohmann viene definido por la ecuación (55) y es de alrededor a 998 días. Para la trayectoria original se aplica el empuje durante 4 horas, 22 minutos y 12 segundos y llega a Júpiter en 950 días. Aplicando un empuje se llega antes, pero mediante la maniobra de Hohmann se ahorrará más combustible.



Gráfica 37: Maniobra de Hohmann para llegar a Júpiter

El resultado de la trayectoria es bastante bueno teniendo en cuenta las limitaciones y que se trata de una aproximación preliminar. El tiempo de integración tiene sentido, así como la llegada a la órbita de Júpiter. No se ha realizado un estudio variando el empuje o el impulso, ya que los resultados serían muy similares a la primera parte de la misión.

4.4. Trayectoria hasta Europa

Para llegar hasta Europa es necesario un cambio de coordenadas nuevamente. Al tratarse de un trayecto dentro de la influencia de Júpiter, se va a utilizar un sistema de coordenadas centrado en este planeta. Como es de esperar, cambiarán las condiciones iniciales, así como las perturbaciones a tener en cuenta.

4.4.1. Condiciones iniciales

En la segunda parte de la misión se llegaba a la influencia de Júpiter con una velocidad de 7.36 km/s. Para que la nave se aproxime a Europa, es necesario que reduzca su velocidad. Se asumirá que la nave realiza una maniobra de frenado hasta alcanzar la velocidad requerida para esta aproximación. La velocidad necesaria dependerá de la altitud inicial de la nave, la cual se considerará en una órbita a una distancia diez veces menor que el radio de influencia gravitacional de Júpiter. Este radio de influencia es de 4.8233×10^7 km, lo cual es lógico al ser el planeta más grande del sistema solar. Si se

parte de este radio y suponiendo que se realiza una maniobra Hohmann para llegar a Europa, las condiciones iniciales para la aproximación son:

$$r_0 = \{0, 4.8233 \times 10^6, 0\} \quad (60)$$

$$v_0 = \{2.53, 0, 0\}$$

4.4.2. Perturbaciones necesarias

En este tramo no se considerará la influencia de la perturbación gravitacional de los planetas al trabajar en el sistema joviano. Se asume que las perturbaciones gravitacionales que más van a afectar son las de los satélites galileanos, descubiertos por Galileo Galilei en 1610. Estos satélites son los presentados en la Tabla 1, donde se muestran también su distancia hasta Júpiter y su masa.

Satélite	Distancia a Júpiter (km)	Masa (kg)
Ío	421,700	8.93×10^{22}
Europa	670,900	4.80×10^{22}
Ganimedes	1,070,400	1.48×10^{23}
Calisto	1,882,700	1.08×10^{23}

Tabla 1: Resumen sobre las lunas galileanas.

Entre más de los 90 satélites actualmente conocidos de Júpiter, se han seleccionado estos cuatro por sus grandes masas. Los demás cuerpos tienen una masa considerablemente menor, casi 4 órdenes de magnitud menos, por lo que no se tendrán en cuenta para esta aproximación preliminar.

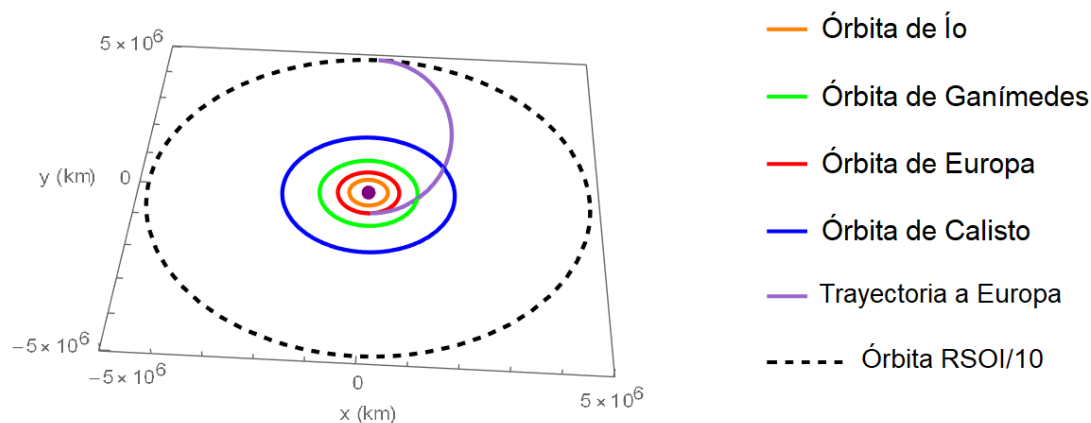
Para tener en cuenta las perturbaciones gravitacionales se aplicarán las ecuaciones ((42), (43) y (44) a los cuerpos mencionados. Además, se ha asumido que los 4 satélites se encuentran en el plano de Júpiter, es decir, la coordenada z será 0.

Por otro lado, aparte de las perturbaciones comentadas, se tendrá en cuenta nuevamente la perturbación debida a los efectos relativistas, que se puede calcular según las ecuaciones (36), (37) y (38) teniendo en cuenta que el cuerpo central es Júpiter.

4.4.3. Propagación y resultados

En esta parte de la misión no ha sido necesario el uso de empuje porque solo con reducir la velocidad de nuestro satélite se puede llegar al objetivo final. Se ha seleccionado un décimo del radio de influencia gravitacional de Júpiter, ya que al tratarse de una distancia tan elevada no se podría representar junto a las órbitas de los satélites galileanos. No obstante, podemos suponer diferentes alturas antes de llegar a Europa. Para ello, se ha hecho también un estudio de como varían los valores de velocidad según la altura desde la que se parte.

Para saber cuál es la velocidad necesaria para llegar a Europa mediante una maniobra de Hohmann, primero se calcula el momento angular específico de la órbita de elíptica de transferencia mediante la ecuación (49). Luego, para obtener la velocidad que debería tener el satélite en el periapsis de la órbita, se divide este momento angular entre la distancia desde la que sale el satélite hasta Júpiter (la décima parte de la esfera de influencia gravitacional de Júpiter). Por otro lado, para obtener el tiempo necesario para llegar hasta Europa se aplica la ecuación (52). Para este caso, se obtiene una velocidad de 2.53 km/s y un tiempo de 14.71 días. Aplicando esto como condición inicial y tiempo de integración respectivamente se obtiene la trayectoria de la Gráfica 38. En esta gráfica se representan Júpiter en el centro, las órbitas de los satélites galileanos en los colores indicados y un décimo del radio de influencia gravitacional en color negro y de línea discontinua.



Gráfica 38: Trayectoria a Europa desde Rsoi/10 hasta Europa mediante una maniobra de Hohmann

Si en vez de coger un décimo del radio de influencia gravitacional se tomaran otros valores, cambiarían tanto la velocidad como el tiempo de integración. En la Tabla 2 se muestra la comparación del original con tres alturas diferentes.

Distancia (km)		Momento angular (km^2/s)	Velocidad (km/s)	Tiempo de integración (días)
Rsoi/5	9.647×10^6	1.261×10^7	1.31	37.85
Rsoi/10	4.823×10^6	1.222×10^7	2.53	14.71
Rsoi/15	3.215×10^6	1.186×10^7	3.69	8.75
Rsoi/20	2.412×10^6	1.153×10^7	4.78	6.18

Tabla 2: Comparación del momento angular, la velocidad y el tiempo de integración para diferentes distancias

Según los resultados obtenidos, si se parte de una altura cada vez menor, se necesitará un menor momento angular específico, lo cual es lógico. Por otro lado, se necesitará una mayor velocidad. Esto se debe a que, a medida que te acercas a Júpiter, la fuerza gravitacional que ejerce sobre la nave aumenta significativamente y, consecuentemente, para contrarrestar esta mayor fuerza gravitacional la nave debe moverse a una velocidad mayor. Por último, el tiempo de integración es mayor cuanto más lejos esté la nave ya que la influencia gravitacional es menor a estas distancias. Cabe destacar que el tiempo de integración baja de más de casi 38 días a 6 días, que es un cambio muy notable.

El resultado más aceptable dependerá de varios factores. En primer lugar, como se llega a Júpiter con una velocidad de 7.36 km/s, será necesario frenar más y por tanto consumir más combustible cuanto más lejos estemos del gigante gaseoso. Si se quiere alcanzar una velocidad de 4.78 km/s se necesitará bajar la velocidad 2.58 km/s, mientras que para alcanzar una velocidad de 1.31 km/s se necesitará un frenado de 6.05 km/s. A esto hay que añadirle que los tiempos de integración no dependerán únicamente de la distancia, sino también del momento en el que Europa se encuentre en el lugar adecuado. Debido a que se trata de una aproximación, no se ha tenido en cuenta el momento en el que Europa pasa por el periapsis de la órbita de transferencia. Sin embargo, para la misión será necesario conocer la posición exacta para poder hacer la maniobra.

5. Conclusiones y continuación del proyecto

En este Trabajo de Fin de Grado, se ha desarrollado un propagador orbital utilizando la herramienta de cálculo Wolfram Mathematica. Este propagador ha sido validado en coordenadas geocéntricas ecuatoriales con dos satélites distintos: el NAVSTAR-68 y LAGEOS-2. Para llevar a cabo esta validación se han tenido en cuenta diversas perturbaciones que ayudaban a disminuir el error de la posición del satélite, comprobando por tanto la validez del propagador.

El propagador se ha utilizado para simular la trayectoria de una nave espacial hacia Europa, uno de los satélites galileanos de Júpiter. El viaje se ha dividido en tres partes distintas. En la primera parte del viaje, se ha pasado de una órbita de *parking* a 300 km de altura sobre la Tierra al radio de influencia gravitacional terrestre. Para llevar a cabo esta primera parte del viaje, ha sido necesario el estudio de la variación del empuje y del impulso implementado. En segundo lugar, partiendo del radio de influencia terrestre, se ha llegado hasta Júpiter en un tiempo y una trayectoria similares a las obtenidas en la literatura. Por último, gracias a la reducción de velocidad, se ha logrado implementar una maniobra de Hohmann para alcanzar la órbita de Europa. Para cada tramo del viaje se han utilizado unas coordenadas, unas condiciones iniciales y unas perturbaciones diferentes que se han adaptado según las necesidades de cada trayecto.

Los resultados obtenidos son coherentes con la literatura considerando que se trata de una aproximación preliminar. Sin embargo, como trabajo futuro, se podría mejorar el propagador. Por un lado, se podrían tener en cuenta más perturbaciones pues en las misiones espaciales es primordial tener mucha precisión. Además, se podría mejorar la aproximación a Europa haciendo la transición entre etapas de forma más realista, es decir, empezar la segunda fase teniendo en cuenta los datos finales de la primera de una forma más precisa. Para ello habría que cambiar las coordenadas de la posición y la velocidad, en el primer caso de geocéntricas a heliocéntricas y en el segundo caso de heliocéntricas a un sistema de coordenadas centrado en Júpiter.

Por último, sería posible realizar un estudio detallado de las ventanas de lanzamiento para determinar los momentos exactos en los que llevar a cabo la misión. Esto incrementaría el tiempo total del viaje, pero proporcionaría una simulación más realista y precisa.

6. Pliego de condiciones

El pliego de condiciones es el documento que establece los requisitos técnicos y legales necesarios para llevar a cabo el proyecto. Durante su desarrollo, el trabajador deberá cumplir con diversas condiciones que pueden afectar tanto su rendimiento como su bienestar. Es fundamental gestionar estas condiciones para optimizar el desempeño y reducir cualquier riesgo potencial.

6.1. Condiciones técnicas

6.1.1. Hardware

El equipo físico usado ha de cumplir con una serie de requisitos de cálculo y procesamiento a lo largo del desarrollo del trabajo. A continuación, se detallan las especificaciones del hardware utilizado:

- Modelo del sistema: Lenovo S540
- Procesador: Intel Core i7-8565U CPU @ 1.80GHz 1.99 GHz
- Memoria RAM: 8GB RAM
- Almacenamiento: 512 GB SSD
- Tarjeta gráfica: GeForce GTX 1650-4GB
- Teclado estándar
- Ratón: NGS Mist Ratón 800 DPI
- Sistema operativo: Windows 10 Pro

6.1.2. Software

En este proyecto se han usado los siguientes programas informáticos:

- Microsoft Office
- Wolfram Mathematica 12.1

6.2. Condiciones del puesto de trabajo

El entorno de trabajo es vital tanto para el bienestar del autor como para mantener un alto rendimiento. Es necesario identificar y gestionar posibles riesgos, prestando especial atención a la ergonomía, para cumplir con las normativas vigentes de seguridad y salud ocupacional.

Es crucial considerar la postura del trabajador durante sus tareas, así como prevenir la fatiga visual, física y mental. Las condiciones que se enumeran a continuación son esenciales para asegurar un ambiente de trabajo saludable y eficiente:

- Teclado: Debe haber suficiente espacio para los brazos y permitir un acceso cómodo a todas las teclas. El tamaño debe ser adecuado para una escritura fluida.
- Equipo: La pantalla debe ajustarse de manera que se eviten reflejos y parpadeos, garantizando una lectura clara y nítida del texto. Su posición debe ser adecuada para prevenir la fatiga visual y adaptarse a las necesidades del usuario.
- Mesa de trabajo: La mesa debe ser lo suficientemente amplia para la colocación de todo el equipo y los materiales necesarios.
- Asiento: Debe proporcionar una postura confortable y permitir libertad de movimientos. Para satisfacer las preferencias del usuario la altura y el respaldo deben ser ajustables y reclinables.

El entorno laboral debe estar equipado con las condiciones necesarias para asegurar un desempeño seguro y eficiente, optimizando el rendimiento sin poner en riesgo la salud del trabajador.

- Iluminación: La iluminación, tanto artificial como natural, debe ser adecuada y equilibrada con la luz de la pantalla, considerando las características del trabajo y las necesidades visuales del trabajador. Es importante acondicionar el espacio de trabajo para evitar deslumbramientos y reflejos molestos.
- Espacio: El área de trabajo debe ser suficientemente amplia y estar dispuesta de manera que permita al trabajador cambiar de postura o posición con comodidad.
- Temperatura: Los equipos deben mantener una temperatura adecuada para no perturbar la comodidad del usuario.
- Ruido: El nivel de ruido producido por los equipos debe ser suficientemente bajo para no distraer al usuario ni provocar fatiga de ningún tipo.
- Humedad: Debe estar dentro de rangos específicos para asegurar el confort del usuario.

7. Objetivos de Desarrollo Sostenible

En 2015, la ONU aprobó la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible, ofreciendo a los países una oportunidad para mejorar la vida de todas las personas.

Los Objetivos de Desarrollo Sostenible [14] son 17 objetivos que combinan la erradicación de la pobreza con estrategias para el crecimiento económico, la educación, la sanidad, la protección social y el empleo, mientras se enfrenta al cambio climático y se protege el medio ambiente.

El desarrollo de un propagador espacial para llegar a Júpiter se alinea con el Objetivo 9 al impulsar la innovación tecnológica y la investigación avanzada. Este proyecto busca ayudar al progreso tecnológico de manera sostenible y promueve la colaboración internacional.

8. Presupuesto

A continuación, se presenta el presupuesto asociado al desarrollo del proyecto, que se va a dividir en costes de personal, costes de hardware y software y costes energéticos.

8.1. Costes del personal

Se entiende como coste asociado al personal todas las labores desempeñadas por el equipo involucrado en el desarrollo de un proyecto. En la Tabla 3 se presenta estos costes:

Trabajador	Coste (€/h)	Tiempo (h)	Subtotal (€)
Estudiante Grado Ingeniería Aeroespacial	15	350	5250
Doctor	30	50	1500

Tabla 3: Costes del personal

8.2. Costes de hardware

Los costes del hardware tienen en cuenta el tiempo de empleo de los equipos informáticos para la realización del proyecto. Se utiliza un coeficiente de amortización lineal del 25 %.

Equipo	Coste (€)	Tiempo (meses)	Coef. amortización	Subtotal (€)
Lenovo S540	816	7	0.25	119

Tabla 4: Costes de hardware

8.3. Costes de software

Los costes de software tienen en cuenta los programas y licencias utilizados para la realización del proyecto.

Programa	Coste (€)	Tiempo (meses)	Subtotal (€)
Wolfram Mathematica 12.1	815	7	475.41

Tabla 5: Costes de software

8.4. Costes energéticos

Los costes energéticos tienen en cuenta el tiempo de uso del equipo el precio medio del kWh en España [15].

Coste (€/kWh)	Tiempo (h)	Consumo (W)	Subtotal (€)
0.1063	350	50	1.86

Tabla 6: Costes energéticos

8.5. Presupuesto total

Categoría	Subtotal (€)
Personal	6750
Hardware	119
Software	475.41
Consumo energético	1.86
Subtotal	7346.27
I.V.A. 21 %	1542.71
TOTAL	8888.98

Tabla 7: Presupuesto total

Bibliografía

- [1] Ignacio Crespo. Fundación Aquae. *Europa: la luna con agua que nos merecemos*. URL: <https://www.fundacionaquae.org/luna-europa/>
- [2] BBC News Mundo. BBC. *Luna Europa de Júpiter: el sorprendente hallazgo de "sal de mesa" en el satélite del planeta más grande del sistema solar (y por qué es importante)*. URL: <https://www.bbc.com/mundo/noticias-48642086>
- [3] ESA. Juice: Jupiter Icy Moons Explorer. URL: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Juice
- [4] NASA. Europa Clipper: Exploring Jupiter's Ocean World. URL: <https://europa.nasa.gov/>
- [5] Curtis, H. D. (2013). *Orbital Mechanics for Engineering Students* (3rd ed.). Butterworth-Heinemann.
- [6] R.H. Battin. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. AIAA, Education Series, Reston, Virginia, revised edition, 1999.
- [7] David A. Vallado. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Microcosm Press/Springer, 3rd edition, 2007.
- [8] Bernard Godard, Frank Budnik, Trevor Morley y Alejandro Lopez Lozano. *Relativistic acceleration of planetary orbiters*. URL: https://issfd.org/ISSFD_2012/ISSFD23_OD1_5.pdf
- [9] NASA Jet Propulsion Laboratory. HORIZONS Web-Interface. URL: Horizons System (nasa.gov)
- [10] Espacio (2008). Gtd. System & Software engineering. *Un Espacio Sin Parquímetros*. URL: <https://www.gtd.eu/es/blog/un-espacio-sin-parquimetros>
- [11] Michael Patterson. NASA Facts. *Ion Propulsion*. URL: https://www.nasa.gov/wp-content/uploads/2015/08/ionpropfact_sheet_ps-01628.pdf
- [12] NASA. Science NASA. *Dawn*. URL: <https://science.nasa.gov/mission/dawn/>
- [13] The Planets Today. URL: <https://www.theplanetstoday.com/>
- [14] ONU. Objetivos de Desarrollo Sostenible. URL: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/>
- [15] Jorge Morales Fernández. Tarifaluzhora. *¿Cuánto cuesta el kilovatio hora de luz (kWh) en España?*. URL: <https://tarifaluzhora.es/info/precio-kwh>
- [16] SatNow. RF Ion Thrusters. URL: RF Ion Thrusters (satnow.com)