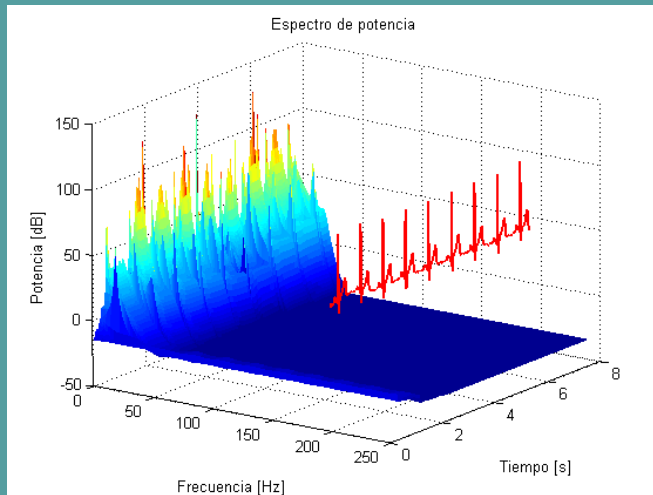


# Tesis Doctoral Ingeniería Industrial

## Método de descomposición modal no estacionaria basado en representación de espacio de estados con aplicación al análisis de señales ECG



**Autor: Luis Enrique Avendaño**

**Directores: David Cuesta Frau, Edilson Delgado Trejos**



Programa de Doctorado en Tecnologías para  
la Salud y el Bienestar  
Escuela de Doctorado  
Universitat Politècnica de València



Alcoy, junio 2024



Tesis Doctoral  
Ingeniería Industrial

Método de descomposición modal no estacionaria basado en  
representación de espacio de estados con aplicación al análisis  
de señales ECG

Autor:

**Luis Enrique Avendaño**

Directores:

**David Cuesta Frau, Edilson Delgado Trejos**

Programa de Doctorado en Tecnologías para  
la Salud y el Bienestar  
Escuela de Doctorado  
Universitat Politècnica de València

junio 2024



Tesis Doctoral: Método de descomposición modal no estacionaria basado en representación de espacio de estados con aplicación al análisis de señales ECG

Autor: Luis Enrique Avendaño

Directores: David Cuesta Frau, Edilson Delgado Trejos

La Tesis Doctoral “Método de descomposición modal no estacionaria basado en representación de espacio de estados con aplicación al análisis de señales ECG”, elaborada por Luis Enrique Avendaño, ha sido examinada y aprobada por el siguiente comité:

Mauricio A. Álvarez López

Pablo Laguna Lasaosa

Daniel Novak

# Comité Evaluador

**Mauricio A. Álvarez López, PhD**  
Senior Lecturer in Machine Learning  
Department of Computer Science  
University of Manchester  
Manchester, UK.

**Pablo Laguna Lasaosa, PhD**  
Escuela de Ingeniería y Arquitectura  
de Aragón (EINA)  
Universidad de Zaragoza (UZ)  
Zaragoza, Spain

**Daniel Novak, PhD**  
Associate Professor  
Czech Technical University in Prague  
Prague, Czechia

# Tribunal de Defensa de Tesis Doctoral

**Pablo Laguna Lasaosa, PhD**

Escuela de Ingeniería y Arquitectura  
de Aragón (EINA)  
Universidad de Zaragoza (UZ)  
Zaragoza, Spain

**Eva María Cirugeda Roldán, PhD**

Departamento de Teoría de la Señal y  
Comunicaciones y Sistemas Telemáticos y  
Computación  
Universidad Rey Juan Carlos  
Campus de Fuenlabrada (Madrid), España

**Daniel Novak, PhD**

Associate Professor  
Czech Technical University in Prague  
Prague, Czechia

Fecha de defensa: 25 de septiembre de 2024





*A mi amada esposa Gloria Mercedes  
A mis queridos hijos Luis David y José Daniel  
A mis adorables nietos Ángel Andrés, Rafael y María Liza*



# Agradecimientos

---

En primer lugar, agradezco al insigne Maestro Dr. Dn. José María Ferrero Corral (*QEPD*), quien fue el gestor de esta magnífica idea que se ha logrado plasmar en algunos países de América Latina y de la cual somos partícipes y beneficiarios. Su visión, compromiso y dedicación han sido fundamentales para el éxito de este proyecto y su legado siempre será recordado con admiración y gratitud.

A mis directores, el Dr. David Cuesta Frau y el Dr. Edilson Delgado Trejos, les agradezco de manera especial su compromiso, orientación oportuna, aliento y apoyo durante toda la elaboración de esta Tesis. Su valioso asesoramiento y guía han sido determinantes para que este proyecto se haya llevado a cabo con éxito. Ha sido un honor contar con su experiencia y conocimiento en cada etapa de la presente Tesis Doctoral.

También deseo manifestar la profunda gratitud que profeso a mi amada esposa, Gloria Mercedes, por su inquebrantable paciencia y comprensión durante las largas jornadas y las eventuales ausencias en la búsqueda de nuevos resultados. Su soporte incondicional ha sido fundamental para alcanzar mis metas y su amor y dedicación son la fuente de mi fortaleza y motivación en cada momento. Gracias por estar siempre a mi lado.

A mi hijo Luis David, le manifiesto mi reconocimiento por su apoyo incondicional en los momentos en los que más lo necesité. También agradezco a su estimada esposa, Andrianna, y a sus hermosos hijos, Rafael y María Liza, quienes nos han brindado una felicidad inefable en todo momento. Su presencia en mi vida es un regalo invaluable.

A mi hijo José Daniel, incansable en su pasión por la Física y el avistamiento de aves, y a su esposa Paula Andrea y su hijo Ángel Andrés, quienes lo acompañan en cada paso de su vida, les agradezco su afecto y consideración. También les agradezco las innumerables invitaciones para apreciar la maravillosa flora y fauna de nuestro país.

A mis compañeros de la UTP, les agradezco la confianza y esperanza en que puedo alcanzar resultados positivos en las empresas que he tratado de construir. Su apoyo y motivación son un impulso constante en mi camino hacia la excelencia.

A mis estimados alumnos, en particular a José Luis Rodríguez, Andrés Felipe Quiceno y a Jorge Iván Padilla, excelentes estudiantes, hoy profesionales de altos quilates, quienes fueron apoyo inestimable en el desarrollo de este proyecto.

Finalmente, quiero agradecer a la Universidad Tecnológica de Pereira, a la Universitat Politècnica de València y al Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín por el apoyo institucional que me han brindado durante la elaboración de esta Tesis. Los objetivos de este proyecto no hubieran sido posibles sin su colaboración y respaldo.

# Resumen

---

Esta tesis de doctorado está dedicada al problema de descomposición de señales no estacionarias en componentes modales, entendida como componentes oscilatorias independientes, con amplitud y fase dependientes del tiempo. Para este fin, se propone un enfoque metodológico basado en representaciones en espacio de estados diagonales en bloques. Una contribución teórica primaria de esta tesis consiste en demostrar que la respuesta de un sistema de espacio de estados diagonal en bloques puede ser representada en una forma modal con amplitudes y frecuencias dependientes del tiempo. Subsecuentemente, construyendo sobre este resultado, un marco de trabajo basado en filtros de Kalman se propone para la descomposición modal de señales no estacionarias. Como resultado, una familia de métodos paramétricos para la descomposición modal de señales no estacionarias univariadas y multivariadas basadas en representaciones de espacio de estados diagonales en bloques y filtros de Kalman ha sido postulada. La representación básica está construida en bloques de segundo orden, cada uno de los cuales representa los componentes en fase y en cuadratura de un único componente oscilatorio no estacionario. Así, la respuesta total es construida como la suma ponderada de cada uno de estos modos. La identificación de estos modelos requiere la estimación conjunta de las trayectorias y los parámetros modales dependientes del tiempo, así como los hiperparámetros del modelo, constituidos por la matriz de mezcla de modos, las matrices de covarianza del vector de estados, de parámetros y del ruido de medición, y las condiciones iniciales. Para este propósito, un algoritmo de Expectación-Maximización ha sido adaptado como parte de esta tesis. La metodología obtenida es entonces evaluada en la descomposición y eliminación de ruido de registros electrocardiográficos (ECG), los cuales consisten en componentes no-estacionarias pseudo-periódicas y son susceptibles a diferentes tipos de interferencias. La estructura de estas señales las hace susceptibles a las descomposiciones modales basadas propuestas en esta tesis. A diferencia de otros métodos populares de descomposición de señales, las descomposiciones obtenidas con la metodología propuesta proveen componentes oscilatorios con interpretabilidad física y que proveen resultados consistentes para señales multivariadas, como en el caso de registros de ECG con múltiples derivaciones.

Otra estrategia que se desarrolló en este proyecto investigativo lo constituye la aplicación

de la transformada delta u operador de Euler al filtro de Kalman, esto condujo a resultados de alta precisión en la extracción de componentes de banda angosta.

La metodología propuesta constituye una herramienta confiable para la descomposición modal en línea de señales no estacionarias multicomponentes, con resultados excelentes.

# Abstract

---

This PhD thesis is devoted to the problem of the decomposition of non-stationary signals in modal components, understood as independent oscillatory components with time-dependent amplitude and frequency. To this end, a methodological approach based on diagonal time-dependent state space models is postulated. A primary theoretical contribution of this work is to demonstrate that the response of a system in diagonal time-dependent state space form can be cast in a modal form characterized by time-dependent amplitudes and frequencies. Subsequently, building up on this result, a Kalman filter based framework for non-stationary modal decomposition is proposed. As a result, a family of parametric modal decomposition methods is postulated for univariate and multivariate non-stationary signals based on block-diagonal time-dependent state space representations and Kalman filtering/smoothing. The representation is built upon second order blocks, each representing the in-phase and quadrature components of a single non-stationary oscillatory component. The total response is then constructed as the weighted sum of each of these modes. Accordingly, the model identification involves the joint estimation of the modal trajectories and the time-dependent modal parameters, along with the model hyperparameters, constituted by the mode mixing matrix, the state, parameter and noise covariances, and initial conditions. A tailored Expectation-Maximization algorithm is designed for this purpose as part of this thesis. The obtained methodology is assessed in the decomposition and denoising of electrocardiographic (ECG) signals, which consist of pseudo-periodic non-stationary signals and are susceptible to significant interference. The ECG signal structure makes them amenable to the proposed non-stationary modal decompositions. In contrast to other popular non-stationary signal decomposition methods, the proposed method provides a physically meaningful decomposition of oscillatory components, with consistent results for multivariate signals, such as multi-lead ECG records.

Another strategy that was developed in this research project is the application of the delta transform or Euler operator to the Kalman filter, which led to highly precise results in extracting narrowband components.

The proposed methodology constitutes a reliable tool for on-line modal decomposition of multi-component non-stationary signals, with results comparable and even better than other state-of-the-art methods.





# Resum

---

Esta tesi de doctorat està dedicada al problema de descomposició de senyals no estacionaris en components modals, entesa com a components oscil·latòries independents amb amplitud i fase dependents del temps. Per a este fi, es proposa un enfocament metodològic basat en representacions en espai d'estats diagonals en blocs. Una contribució teòrica primària d'esta tesi consistix a demostrar que la resposta d'un sistema d'espai d'estats diagonal en blocs pot ser representada en una forma modal amb amplituds i freqüències dependents del temps. Subseqüentment, construïnt sobre este resultat, un marc de treball basat en filtres de Kalman es proposa per a la descomposició modal de senyals no estacionaris. Com a resultat, una família de mètodes paramètrics per a la descomposició modal de senyals no estacionaris univariades i multivariades basades en representacions d'espai d'estats diagonals en blocs i filtres de Kalman ha sigut postulada. La representació bàsica està construïda en blocs de segon ordre, cadascun dels quals representa els components en fase i en quadratura d'un únic component oscil·latori no estacionari. Així, la resposta total és construïda com la suma ponderada de cadascun d'estos modes. La identificació d'estos models requereix l'estimació conjunta de les trajectòries i els paràmetres modals dependents del temps, així com els hiperparàmetres del model, constituïts per la matriu de mescla de modes, les matrius de covariància del vector d'estats, de paràmetres i del soroll de mesurament, i les condicions inicials. Per a este propòsit, un algorisme d'Expectació-Maximització ha sigut adaptat com a part d'esta tesi. La metodologia obtinguda és llavors avaluada en la descomposició i eliminació de soroll de registres electrocardiogràfics (ECG), els quals consisteixen en components no-estacionàries pseudo-periòdiques i són susceptibles a diferents tipus d'interferències. L'estructura d'estos senyals les fa susceptibles a les descomposicions modals basades proposades en esta tesi. A diferència d'altres mètodes populars de descomposició de senyals, les descomposicions obtingudes amb la metodologia proposada proveïxen components oscil·latoris amb interpretabilitat física i que proveïxen resultats consistents per a senyals multivariats, com en el cas de registres d'ECG amb múltiples derivacions.

Una altra estratègia que es va desenvolupar en este projecte investigatiu el constituïx l'aplicació de la transformada delta o operador d'Euler al filtre de Kalman, això va conduir a resultats d'alta precisió en l'extracció de components de banda estreta.

La metodologia proposada constituïx una eina de confiança per a la descomposició modal en línia de senyals no estacionaris multicomponents, amb resultats excel·lents.

# Índice Abreviado

---

<i>Resumen</i>	VII
<i>Abstract</i>	IX
<i>Resum</i>	XI
<i>Índice Abreviado</i>	XIII
<i>Notación</i>	XXI
<i>Acrónimos</i>	XXIII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Conceptos generales	1
1.2 Planteamiento del problema	5
1.3 Objetivos	8
1.4 Metodología propuesta	10
1.5 Organización y contribuciones de esta Tesis Doctoral	11
1.6 Relación de los capítulos de la Tesis con publicaciones del autor	14
1.7 Publicaciones	15
<b>2 Extracción de componentes de banda angosta</b>	<b>23</b>
2.1 Estrategias de filtrado óptimo para remoción de perturbaciones	24
2.2 Resultados	50
2.3 Corrección de la desviación de línea base	57
2.4 Conclusiones	61
<b>3 Descomposición modal de señales no estacionarias</b>	<b>63</b>
3.1 Representaciones de espacio de estados dependientes del tiempo	65
3.2 Solución modal de una representación diagonal de espacio de estados dependiente del tiempo	66
3.3 Modelos de espacio de estados diagonales con bloques de segundo orden	69

3.4	Métodos de descomposición modal de sistemas dependientes del tiempo con KF	72
3.5	Aplicación a señales ECG	76
3.6	Conclusiones	80
<b>4</b>	<b>Representaciones modales en espacio de estados</b>	<b>83</b>
4.1	Marco metodológico	84
4.2	Análisis de señales multivariadas no estacionarias	90
4.3	Conclusiones	109
<b>5</b>	<b>Descomposición armónica del ECG de varias derivaciones</b>	<b>111</b>
5.1	Introducción	111
5.2	Metodología	113
5.3	Aplicación a señales ECG reales	123
5.4	Comparación con otros métodos de descomposición	135
5.5	Conclusiones	137
<b>6</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro (Conclusions and future work)</b>	<b>139</b>
6.1	Primera parte	139
6.2	Second part	149
	<i>Índice de Figuras</i>	159
	<i>Índice de Tablas</i>	163
	<i>Índice de Códigos</i>	165
	<i>Bibliografía</i>	165

# Índice

---

<i>Resumen</i>	VII
<i>Abstract</i>	IX
<i>Resum</i>	XI
<i>Índice Abreviado</i>	XIII
<i>Notación</i>	XXI
<i>Acrónimos</i>	XXIII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Conceptos generales	1
1.1.1 Representación de señales no estacionarias	1
1.1.2 Señales no estacionarias	2
1.1.3 Métodos de descomposición modal	3
1.1.4 Métodos de descomposición modal paramétricos	4
1.2 Planteamiento del problema	5
1.2.1 Declaración del problema	5
1.3 Objetivos	8
1.3.1 Análisis modal clásico	9
1.3.2 Descomposición modal de señales no estacionarias	9
1.4 Metodología propuesta	10
1.5 Organización y contribuciones de esta Tesis Doctoral	11
1.6 Relación de los capítulos de la Tesis con publicaciones del autor	14
Capítulo 2	14
Capítulo 3	14
Capítulo 4	15
Capítulo 5	15
1.7 Publicaciones	15
1.7.1 Artículos	15
1.7.2 Libros	19

<b>2</b>	<b>Extracción de componentes de banda angosta</b>	<b>23</b>
2.1	Estrategias de filtrado óptimo para remoción de perturbaciones	24
2.1.1	La base de datos QT de ECG	24
2.1.2	Modelo básico de la señal ECG y filtro de Kalman	25
2.1.3	Modelo para interferencia cuasi-sinusoidal	26
2.1.4	Transformada delta	27
2.1.5	Forma delta del estimador de estado óptimo	28
2.1.6	El filtro de Kalman con operador <i>delta</i>	29
2.1.7	Modelo simple	33
2.1.8	Modelo seguidor frecuencia	37
2.1.9	Estimación dual	40
2.1.10	Modelo ECG adaptativo	43
2.1.11	Modelo ECG con filtro Kalman <i>unscented</i>	46
2.1.12	Análisis de los modelos del KF	47
2.2	Resultados	50
2.2.1	Configuración del filtro para la interferencia de la red eléctrica	50
	Configuración inicial de los parámetros del filtro	52
	Ajuste de los parámetros del KF	53
	Ajuste óptimo de los parámetros del filtro	54
2.2.2	Análisis comparativo	55
2.3	Corrección de la desviación de línea base	57
2.3.1	Ajuste inicial de los parámetros del filtro	57
2.3.2	Ajuste de los parámetros del filtro	59
2.3.3	Análisis comparativo	60
2.4	Conclusiones	61
<b>3</b>	<b>Descomposición modal de señales no estacionarias</b>	<b>63</b>
3.1	Representaciones de espacio de estados dependientes del tiempo	65
3.2	Solución modal de una representación diagonal de espacio de estados dependiente del tiempo	66
3.2.1	Forma modal de la respuesta natural	67
3.2.2	Respuesta forzada como superposición de filtros modales	68
3.3	Modelos de espacio de estados diagonales con bloques de segundo orden	69
3.3.1	Modelos de espacio de estados de segundo orden dependientes del tiempo	69
3.3.2	Representaciones en espacio de estados dependientes del tiempo de bloques diagonales de orden $M$	72
3.4	Métodos de descomposición modal de sistemas dependientes del tiempo con KF	72
3.4.1	Estimación concurrente de trayectorias y parámetros modales	72
3.4.2	Enfoque basado en el modelo TAR	74
3.4.3	Inicialización de los métodos de descomposición modal	75
3.4.4	Optimización de los parámetros de ajuste	75

3.5	Aplicación a señales ECG	76
3.5.1	Descomposición modal de una señal ECG única sin ruido	76
3.5.2	Filtrado de la línea de potencia eléctrica	77
3.6	Conclusiones	80
<b>4</b>	<b>Representaciones modales en espacio de estados</b>	<b>83</b>
4.1	Marco metodológico	84
4.1.1	Representación modal del espacio de estado dependiente del tiempo	84
4.1.2	Definición del problema de identificación	86
	Estimación de las trayectorias de los estados y los parámetros	86
	Estimación de los hiperparámetros	87
	Resumen del algoritmo de identificación	89
4.1.3	Evaluación del modelo y selección del número de componentes	90
4.2	Análisis de señales multivariadas no estacionarias	90
4.2.1	Rotor flexible desequilibrado	91
	Descripción del sistema no lineal dependiente del tiempo	91
	Descomposición de componentes modales no estacionarios	92
	Resultados de la descomposición	94
	Análisis de los residuos de KF–Armónico y KF–Diagonal	96
	Análisis de ruido	96
4.2.2	Análisis de las características de una señal no estacionaria	97
	Métodos de descomposición modal para señales no estacionarias	100
	Análisis de Monte Carlo de los métodos de descomposición modal	101
	Métodos de análisis modal para señales multivariadas	105
4.3	Conclusiones	109
<b>5</b>	<b>Descomposición armónica del ECG de varias derivaciones</b>	<b>111</b>
5.1	Introducción	111
5.2	Metodología	113
5.2.1	Modelo estocástico de la señal ECG de varias derivaciones	113
5.2.2	Incorporación del modelo estocástico en una representación de espacio de estados	114
5.2.3	Identificación de la descomposición armónica	116
5.2.4	Optimización de los hiperparámetros	116
5.2.5	Armónicos no consecutivos	119
5.2.6	Evaluación del modelo y selección del número de componentes	119
5.2.7	El Filtro de Kalman Extendido conjunto para la estimación de los componentes armónicos	120
5.2.8	Introducción de otros componentes de banda estrecha en el modelo	122
5.3	Aplicación a señales ECG reales	123
5.3.1	Base de datos ECG de varias derivaciones PTB	123
5.3.2	Descomposición armónica de un registro del ECG de un individuo sano	123

5.3.3	Ajuste inicial del algoritmo de descomposición armónica	124
5.3.4	Resultados de la descomposición armónica del NS	126
5.3.5	Descomposición armónica de una señal de un paciente con infarto de miocardio	131
5.3.6	Algunas observaciones prácticas	133
5.4	Comparación con otros métodos de descomposición	135
5.5	Conclusiones	137
<b>6</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro (Conclusions and future work)</b>	<b>139</b>
6.1	Primera parte	139
6.1.1	Introducción	139
6.1.2	Síntesis	139
	Capítulo 1	139
	Capítulo 2	140
	Capítulo 3	141
	Capítulo 4	142
	Capítulo 5	143
6.1.3	Conclusiones generales	144
	Problema 1	144
	Problema 2	145
	Problema 3	146
	Problema 4	147
6.1.4	Trabajo futuro	147
	Aspecto teórico:	148
	Implementación:	148
6.2	Second part	149
6.2.1	Introduction	149
6.2.2	Synthesis	149
	Chapter 1	149
	Chapter 2	150
	Chapter 3	151
	Chapter 4	152
	Chapter 5	152
6.2.3	General conclusions	154
	Problem 1	154
	Problem 2	154
	Problem 3	156
	Problem 4	156
6.2.4	Future work	157
	Theoretical aspect:	157
	Implementation:	157



<i>Índice de Figuras</i>	159
<i>Índice de Tablas</i>	163
<i>Índice de Códigos</i>	165
<i>Bibliografía</i>	165



# Notación

---

$\mathbb{R}$	Cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	Cuerpo de los números complejos
$\ \mathbf{v}\ $	Norma del vector $\mathbf{v}$
$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$	Producto escalar de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$
$ \mathbf{A} $	Determinante de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	Determinante de la matriz (cuadrada) $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^\top$	Transpuesta de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inversa de la matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^H$	Transpuesta y conjugada de $\mathbf{A}$ . Matriz hermitiana
$\mathbf{A}^*$	Conjugada
$e$	número $e$
$e^{ix}$	Exponencial compleja
Sinc	Función sinc
$\frac{\partial y}{\partial x}$	Derivada parcial de $y$ respecto a $x$
$\Pr(A)$	Probabilidad del suceso $A$
$\sigma_X^2$	Varianza de la variable aleatoria $X$
$\sim f_X(x)$	Distribuido siguiendo la función densidad de probabilidad $f_X(x)$
$\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$	Distribución gaussiana para la variable aleatoria $X$ , de media $m_X$ y varianza $\sigma_X^2$
$\mathbf{I}_n$	Matriz identidad de dimensión $n$
$\text{diag}(\mathbf{x})$	Matriz diagonal a partir del vector $\mathbf{x}$
$\text{diag}(\mathbf{A})$	Vector diagonal de la matriz $\mathbf{A}$
$\stackrel{\text{def}}{=} , \doteq , \triangleq$	Igual por definición
$\ \mathbf{x}\ $	Norma-2 del vector $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots, n$	Elementos $i$ , de 1 a $n$ , del vector $\mathbf{x}$
$dx$	Diferencial de $x$
$\backslash$	Backslash

$\Leftrightarrow$	Si y sólo si
$\Delta$	Incremento
<b>O</b>	Orden
<sup>TM</sup>	Trade Mark
$\mathbb{E}\{x\}$	Esperanza matemática de $x$
<b>C<sub>x</sub></b>	Matriz de covarianza de $\mathbf{x}$
<b>R<sub>x</sub></b>	Matriz de correlación de $\mathbf{x}$
$\sigma_x^2$	Varianza de $x$

## Acrónimos

AR	Auto Regressive
ARMA	AutoRegressive Moving Average
DKF-NST	Dual Kalman Filter Non-stationary Sinusoid Tracking
DWT	Discrete Wavelet Transform
ECG	ElectroCardioGram
EKF	Extended Kalman filter
EM	Expectation-Maximization
EMD	Empirical Mode Decomposition
EOF	Empirical Orthogonal Function
FRF	Frequency Response Function
IA	Instantaneous Amplitude
IF	Instantaneous Frequency
IIR	Respuesta infinita al impulso
IMF	Intrinsic Mode Functions
IP	Instantaneous Phase
JKF-NST	Joint Kalman Filter Non-stationary Sinusoid Tracking
KF	Kalman filter
KF-FT	Kalman Filter Frequency Tracker
KLT	Karhunen-Loève Transform
LTV	Linear Time-Variant
MSE	Minimum square error
MSSA	Multivariate SSA
MSPE	Mean Squared Prediction Error
NID	Normally and Independently Distributed
NLTV-SS	Non-Linear Time-Variant State Space
NS	Non-stationary
POD	Proper Orthogonal Decomposition
PCA	Principal Component analysis
PDF	Probability Density Function
PTB	Physikalisch Technische Bundesanstalt Diagnostic ECG Database
SNR	Signal-to-noise ratio
RSS/SSS	Residual Sum of Squares over the Series Sum of Squares
SS	State Space
SSA	Singular Spectrum Analysis
SVD	Singular Value Decomposition
TAR	Time-dependent Auto Regressive
TAR-MD	TAR model-based Modal Decomposition
TFR	Time-Frequency Representation
TSR	Time-Scale Representation
UKF	Unscented Kalman Filter



# 1 Introducción

---

## 1.1 Conceptos generales

El tema central de esta Tesis Doctoral consiste en desarrollar una metodología para la descomposición armónica de señales multivariantes pseudoperiódicas no estacionarias. La metodología propuesta se fundamenta en una representación de espacio de estados de bloques diagonales dependiente del tiempo y en la aplicación del filtro de Kalman [13]. El filtro de Kalman (KF) constituye un método estadístico de filtrado y suavizado que facilita el manejo de señales no estacionarias y fluctuaciones aleatorias presentes en los datos por lo que puede aplicarse directamente en esta descomposición.

Una descomposición armónica no estacionaria se asocia con una descomposición de la señal en múltiples sinusoides cuyas amplitudes y frecuencias varían con el tiempo. Además, estas sinusoides tienen una frecuencia fundamental común que también depende del tiempo. De esta manera, una descomposición armónica no estacionaria se convierte en una generalización del análisis de series de Fourier, donde las sinusoides tienen amplitudes y frecuencias fijas.

Teniendo en cuenta la metodología planteada, el segundo aspecto primordial en esta Tesis Doctoral consiste en que este tipo de descomposición es especialmente adecuado para las señales electrocardiográficas (ECG), ya que estas señales tienen una estructura pseudoperiódica y la descomposición armónica no estacionaria puede proporcionar una forma efectiva de extraer ondas y detectar interferencias [10].

La descomposición armónica no estacionaria, por lo tanto, se puede utilizar para separar las componentes de la señal ECG. Este enfoque puede ser particularmente útil en la detección de arritmias que son difíciles de detectar con técnicas convencionales [17].

### 1.1.1 Representación de señales no estacionarias

Aunque los métodos convencionales de análisis estacionario pueden ser utilizados para el análisis inicial de las propiedades básicas de cualquier tipo de señal [73, 21], éstos no son suficientes para revelar la estructura de la dinámica no estacionaria. En consecuencia, la representación de la dinámica no estacionaria en la respuesta a oscilaciones de un sistema,

requiere métodos especializados que puedan representar adecuadamente las características evolutivas del contenido espectral [51, 45, 53]. Para este propósito, es posible utilizar tanto métodos de modelado no estacionarios no paramétricos como paramétricos.

Los métodos no paramétricos se fundamentan en representaciones de la distribución de potencia o energía de señales no estacionarias, bien sea en los dominios de tiempo-frecuencia o en descomposiciones modales. Ejemplos de lo primero incluyen el espectrograma, las distribuciones de tiempo-frecuencia de Wigner-Ville y afines, así como la transformada *wavelet* continua [37, 45, 53, 58, 122]. Por otra parte, las representaciones modales se basan en la transformada de Hilbert-Huang (también conocida como descomposición en modo empírico) [61] o en representaciones discretas de *wavelet* [91, 93]. Debido a su cálculo más simple e interpretación física, las representaciones no paramétricas han sido utilizadas ampliamente para el modelado de señales no estacionarias [5, 6, 32, 108, 44].

Ahora bien, las representaciones paramétricas se basan en modelos estocásticos no estacionarios, que incluyen modelos de auto regresión y media móvil dependientes del tiempo y modelos relacionados, así como modelos estocásticos de subespacios variables en el tiempo [105]. En particular, la familia de modelos paramétricos de auto regresión y media móvil dependientes del tiempo incluye tres tipos principales de modelos, los cuales se clasifican según la forma de la estructura impuesta en la evolución de los parámetros dependientes del tiempo y la varianza de las innovaciones [105]: (i) modelos de evolución de parámetros no estructurados (NSPE); (ii) modelos de evolución de parámetros estocásticos (SPE) y (iii) modelos de evolución de parámetros determinísticos (DPE). Cada tipo de modelo tiene sus propias ventajas y desventajas; sin embargo, está claro que la modelización NSPE, SPE y DPE puede potencialmente mejorar el rendimiento y el seguimiento de la dinámica dependiente del tiempo en una representación compacta. No obstante, el precio a pagar por estas mejoras es un incremento en la complejidad del proceso.

### 1.1.2 Señales no estacionarias

La mayoría de los sistemas en la vida real se caracterizan por tener una dinámica dependiente del tiempo, lo que hace que su respuesta dinámica resultante sea no estacionaria. Los métodos de representación de señales no estacionarias suelen ser diferentes de los métodos utilizados para señales estacionarias. En particular, los métodos de análisis de Fourier, utilizados comúnmente para señales estacionarias, no son apropiados para el análisis de señales no estacionarias. En su lugar, se requiere la aplicación de otros métodos que posibiliten la representación de la señal en diversas escalas de tiempo y frecuencia. Esto facilita la detección de patrones y cambios en la dinámica de la señal. Para realizar un análisis eficiente de las señales no estacionarias, es necesario utilizar métodos de representación apropiados que sean capaces de describir con precisión la dinámica evolutiva de la señal [37, Ch. 5], [92, Ch. 1], [109].

Algunos de los procedimientos no paramétricos comúnmente utilizados para el análisis de señales no estacionarias incluyen las Representaciones de Tiempo-Frecuencia (TFR) y las Representaciones de Tiempo-Escala (TSR), donde la señal no estacionaria se caracteriza en términos de un conjunto infinito de componentes oscilatorios localizados tanto en el tiempo como en la frecuencia [37, Ch. 5], [25, Ch. 2]. Aunque ambas técnicas tienen



objetivos similares, hay algunas diferencias intrínsecas entre ellas. La TFR se utiliza para analizar la señal en términos de la frecuencia y el tiempo. Se fundamenta en la transformada de Fourier, lo que hace posible el análisis de la señal en términos de su espectro de frecuencia y su evolución en el tiempo [28]. Por otro lado, la TSR se utiliza para analizar la señal en términos de su factor de escala y el tiempo, se basa en la transformada *wavelet* y permite analizar la señal en términos de su contenido de escala y además, la forma como varía en el tiempo [58, 8]. La principal diferencia entre TFR y TSR es la forma en que se descompone la señal. En la TFR, la señal se separa en sus componentes de frecuencia, mientras que en la TSR, la señal se descompone en sus elementos de escala. Así mismo, la escala de la señal se refiere a la amplitud o energía de las diferentes componentes de frecuencia en la señal [46]. La escala se puede entender como una medida de la "anchura" de la señal en términos de su contenido de frecuencia.

Las representaciones modales, por su parte, permiten describir una señal no estacionaria mediante la superposición de un número finito de componentes oscilatorios, denominados *modos*. A diferencia del caso estacionario, en el que la amplitud y la frecuencia de cada modo se consideran constantes, en el caso no estacionario, cada modo se asocia con valores de amplitud y frecuencia dependientes del tiempo [61]. En contraste con la TFR y la TSR, donde la representación se basa en superficies en el plano tiempo-frecuencia, las representaciones modales ofrecen representaciones más compactas de procesos no estacionarios y facilitan la extracción de componentes individuales de la señal

El procedimiento para calcular la representación modal de una señal dada, se referirá aquí como descomposición modal. En una representación modal, la señal puede consistir en un solo componente modal (llamado mono-componente) o puede construirse a partir de la superposición de varios componentes modales (llamados multi-componentes). El cálculo de la descomposición modal de una señal mono-componente se reduce al cálculo de la frecuencia instantánea (IF), la fase instantánea (IP) y la amplitud instantánea (IA) de la señal [42], [125], [64]. Por otra parte, la descomposición modal en el caso de señales multi-componente, requiere el aislamiento de componentes modales individuales y la estimación de sus respectivos parámetros modales instantáneos [125], [64]. Las representaciones modales permiten caracterizar una señal no estacionaria mediante la superposición de un número finito de modos.

### 1.1.3 Métodos de descomposición modal

La descomposición modal es una técnica de análisis utilizada en ingeniería estructural para descomponer una estructura en sus modos de vibración naturales. Estos modos de vibración representan patrones únicos de movimiento de la estructura que pueden ser útiles para comprender su comportamiento dinámico [16]. Existen varias formas de descomposición modal que han evolucionado a través de los años. Entre los métodos de descomposición modal más conocidos se encuentran los basados en la extracción de crestas a partir de las TFRs o las TSRs. En efecto, para las señales monocomponentes sin ruido, la IF se sitúa en el máximo de la TFR mientras que la IA se asocia al valor de la cresta [26]. Entonces, la estimación de la IF del componente modal se transforma en la localización del máximo en un TFR. No obstante, en las señales ruidosas, las estimaciones de la IF también son ruidosas y a menudo presentan discontinuidades. Para ello, se han desarrollado métodos

más especializados basados en procedimientos de extracción de curvas, tales como el algoritmo de Viterbi [42, 64]. En las señales multicomponentes, la descomposición modal basada en el TFR puede lograrse mediante el método de *peeling*, donde se extrae de la TFR el componente modal más dominante y posteriormente se elimina de la señal para extraer otros componentes modales [125, 64, 111]. Por otra parte, también existen algoritmos de procesamiento de imágenes para extraer y separar las crestas en imágenes de la TFR [113]. No obstante, estos métodos especializados de descomposición modal basados en la TFR requieren procesamiento muy pesado en las superficies tiempo-frecuencia, mientras que su desempeño está condicionado por el método de cálculo de la TFR y una cuidadosa selección de los parámetros.

Algunos métodos de descomposición modal se basan en diferentes tipos de representaciones no paramétricas no estacionarias de la señal. Por ejemplo, la transformada *wavelet* discreta (DWT) y algunos enfoques basados en bancos de filtros relacionados [2], [92, Cap. 1], permiten separar la señal en bandas de frecuencia [84, 4]. La Descomposición de Modo Empírico (EMD) también conocida como transformada de Hilbert-Huang, la cual tiene como objetivo separar la señal en varios componentes ortogonales no estacionarios, denominados Funciones de Modo Intrínseco (IMF), a partir de los cuales pueden obtenerse estimaciones de IA e IF mediante el uso de la transformada de Hilbert [61, 24, 70].

Por otra parte, se tienen los métodos basados en los valores propios de la señal o su matriz de covarianza, incluidos los *Métodos de Subespacios* y la conocida *Karhunen-Loève Transform* (KLT) (también denominada *Análisis de Componentes Principales* (PCA), *Descomposición Ortogonal Propia* (POD) o *Análisis de Espectro Singular* (SSA)) [132, 134, 60]. En esta metodología, una señal no estacionaria se descompone en un conjunto infinito de funciones base, las cuales posiblemente pueden ser no estacionarias. La descomposición, aplicando KLT es una técnica de análisis multivariante que utiliza la descomposición espectral de una matriz de covarianza para identificar las direcciones principales de variación en un conjunto de datos. Estas direcciones conocidas como *componentes principales*, se emplean para reducir la dimensionalidad de los datos, eliminar el ruido y extraer patrones y relaciones significativas presentes en la información. El SSA consiste entonces en la aplicación de la descomposición KLT para una señal de tiempo finito. La no correlación de los coeficientes es útil para aplicaciones como la reducción de ruido, ya que es posible eliminar componentes de la descomposición sin afectar a los restantes [119, 100, 101]. Sin embargo, las incertidumbres que influyen en la estimación de la covarianza y el tiempo de análisis finito suelen conducir a una separación deficiente de los componentes de las señales. La idea de realizar la separación de una señal en una serie de funciones base, como en el procedimiento de descomposición aplicando KLT, conduce a conceptos relacionados con la descomposición modal o la descomposición armónica de señales no estacionarias.

#### 1.1.4 Métodos de descomposición modal paramétricos

Los métodos de descomposición modal *paramétricos* hacen uso de una determinada estructura de modelo, definida por un conjunto limitado de parámetros. Los filtros adaptativos de ranura se encuentran entre los métodos paramétricos más simples [69, 87, 110]; sin embargo, su desempeño está limitado por una compensación entre la precisión del rastreo y el error de estimación, generalmente fijado por el factor de olvido del algoritmo. También

está disponible el método de estimación adaptativa no lineal para sinusoides simples y múltiples no estacionarias. En estos métodos, la amplitud instantánea y la frecuencia del componente sinusoidal son constantemente rastreadas por un algoritmo adaptativo [145, 72]. De manera similar, las expansiones de las bases funcionales se pueden usar para describir la evolución de la amplitud y frecuencia de los componentes modales [66]. Los dos últimos métodos se basan en metodologías de optimización no lineal, las cuales son propensas a caer en mínimos locales y son sensibles al ruido [106];[128, 112].

Los rastreadores de frecuencia con KF constituyen métodos alternativos de descomposición modal paramétrica [40]. Se basan en bloques de espacio de estado (SS) de segundo orden que describen una única componente sinusoidal y su cuadratura, mientras que también se añade un tercer estado que representa la IF. La relación no lineal entre la IF y los modos, a través de una función trigonométrica, requiere aproximaciones no lineales del KF [40, 35, 33]. Se ha propuesto un marco unificador en [10], que da lugar a la generación de bloques de segundo orden, constituidos por las partes real e imaginaria del valor propio instantáneo de la componente modal. Estos coeficientes comprenden un vector de parámetros, estimado conjuntamente con el vector de estado (modal). Aunque la representación SS resultante es mayor, implica una no linealidad bilineal más suave, que puede ser tratada mejor con un Filtro de Kalman Extendido (EKF). El rendimiento adecuado de estos métodos está ligado con la selección correcta de las covarianzas del estado, parámetro y ruido. Esta selección suele dejarse en manos del usuario. No obstante, se han propuesto esquemas de optimización basados en el error de predicción o en la verosimilitud marginal del KF [10] o en rastreo adaptativo [33]. Sin embargo, para limitar el número de parámetros a optimizar, las covarianzas se definen habitualmente en forma diagonal, lo que limita la posible precisión de la estimación, especialmente cuando las IF de los distintos componentes están correlacionadas.

También se puede usar una transformación de equivalencia para mapear la representación de espacio de estado asociada con un modelo autorregresivo dependiente del tiempo (TAR) de la señal de interés, en una representación diagonal de espacio de estados, donde cada elemento del vector de estado del sistema diagonalizado está asociado con un componente modal, mientras que los elementos de la diagonal principal de la matriz de estado se asocian con las frecuencias instantáneas de los respectivos componentes modales [140, 102]. Las ventajas principales de estos métodos incluyen la posibilidad de rastrear al mismo tiempo cualquier cantidad de componentes modales, ajustando el orden de los respectivos modelos, al tiempo que proporciona estimaciones de la amplitud instantánea, la frecuencia y la trayectoria modal.

## 1.2 Planteamiento del problema

### 1.2.1 Declaración del problema

El tema central de esta Tesis Doctoral es el desarrollo y aplicación de una metodología fundamentada en la descomposición modal de una señal no lineal dependiente del tiempo correspondiente a un proceso dinámico en presencia de perturbaciones y su aplicación en

la detección, filtrado e identificación de señales ECG. El trabajo realizado en esta Tesis se puede clasificar en tres aspectos principales, que también son los objetivos principales:

El tema central de esta Tesis Doctoral consiste en desarrollar una metodología para la descomposición armónica de señales multivariantes pseudoperiódicas no estacionarias.

- (i) La descomposición modal paramétrica de señales no lineales, no estacionarias, tanto univariadas como multivariadas y su aplicación a diferentes procesos dinámicos.
- (ii) Minimización de las interferencias que afectan los registros de la señal ECG, en particular la perturbación de línea de potencia y de la línea base, mediante metodologías basadas en el filtro de Kalman.
- (iii) Validar el método propuesto de descomposición modal paramétrica no estacionaria en el espacio de estados, mediante su aplicación en el análisis de señales ECG y las perturbaciones causadas por la línea de potencia.

El problema de la descomposición modal se refiere a la tarea de separar una señal compleja en sus componentes modales, las cuales son funciones sinusoidales de diferentes frecuencias y amplitudes. Estas componentes modales pueden ser analizadas y procesadas individualmente, lo que permite una mayor comprensión y manipulación de la señal original. Como se mostró en anteriormente, existen varios métodos para la descomposición modal, incluyendo el PCA, la EMD, la transformada de Fourier, las diferentes estructuras de la transformada *wavelet* y la SVD. Cada método tiene sus propias características y ventajas, y la elección del método dependerá de las características específicas de la señal que se está analizando y del objetivo de la descomposición modal. De acuerdo con las características de las señales a analizar, éstas pueden ser lineales o no lineales, así como univariantes o multivariantes, tales como las señales eléctricas del corazón (ECG) o las señales cerebrales (EEG).

A diferencia del caso univariante, la descomposición modal de señales multivariantes (vectoriales) no estacionarias ha recibido menos atención. Sin embargo, señales como las ECG o EEG y las señales de vibración de máquinas rotativas o turbinas eólicas, son multivariantes no estacionarias por naturaleza. En estos casos, el análisis modal puede proporcionar la separación de los componentes de la señal y su origen. Además, dado que las señales multivariantes ofrecen una visión colectiva del sistema subyacente, existe un potencial latente para mejorar el aislamiento de los componentes modales y la ausencia de ruido en comparación con los análisis modales univariantes independientes [126]. Para realizar estimaciones de la IA y la IF puede utilizarse métodos de identificación de sistemas paramétricos multivariantes y no estacionarios (ARMA dependiente del tiempo y otros relacionados) [124, 144]. Sin embargo, estos métodos no rastrear directamente las cantidades modales, lo que da lugar a estimaciones ruidosas/discontinuas y están viciados de modos espurios.

En el caso de la aplicación de la descomposición modal a la reducción de perturbaciones de la red eléctrica en un electrocardiograma, se busca separar la señal ECG en sus componentes modales para eliminar las interferencias producidas por la línea de potencia eléctrica que pueden aparecer como ruido en la señal. Esto es fundamental para obtener una señal ECG limpia y precisa, que pueda ser utilizada para diagnóstico médico. Además, la descomposición modal puede requerir una gran cantidad de cálculos y puede ser

computacionalmente costosa. Esto puede ser un problema en aplicaciones de tiempo real, en cuyo caso se requiere una respuesta rápida.

La interferencia de línea de potencia se produce debido a que los cables que transportan la señal ECG desde el paciente al dispositivo de monitoreo son susceptibles a la interacción electromagnética de la línea de alimentación, que actúa a una frecuencia nominal de 50 Hz o 60 Hz (según la región). Esto dificulta el análisis y la interpretación del ECG, ya que la delineación de ondas de baja amplitud no es fiable y se introducen ondas espurias [62]. La complejidad del filtrado de la interferencia de la línea de alimentación se ve condicionada por la variabilidad en el tiempo de su frecuencia, cuyo rango espectral se traslapa con la banda de frecuencias de la señal ECG. Además, la influencia de los armónicos superiores de la señal de interferencia no se puede reducir significativamente debido a que se tiene una tasa baja de muestreo de las señales electrocardiográficas. Por otra parte, la desviación de la línea base genera artefactos, los cuales se manifiestan cuando se miden los parámetros de la señal ECG. Muchas veces cuando se registra la señal ECG del electrodo de superficie que no está en contacto firme con la piel cuando el paciente respira, el tórax se expande y contrae, produciendo un movimiento relativo entre la piel y el electrodo. Esto ocasiona una alteración en la línea base, conocida como desviación de línea base de baja frecuencia [80]. La frecuencia fundamental de esta desviación coincide con la frecuencia de la respiración. La desviación de la línea base dificulta tanto el análisis manual como el automático de los registros de ECG, especialmente en la detección de desviaciones en el segmento ST.

Por lo tanto, se requiere un enfoque cuidadoso para aplicar la descomposición modal a la reducción de perturbaciones de la red eléctrica en un ECG. Es importante elegir el método de descomposición modal adecuado y ajustar los parámetros para lograr la mejor separación posible de las interferencias de la red eléctrica. Además, es necesario considerar el coste computacional y la velocidad de procesamiento para asegurar que el enfoque pueda ser implementado en tiempo real.

Cada método de descomposición modal tiene sus propias características y limitaciones, y es importante seleccionar el método que sea más adecuado para las características específicas de la señal ECG que se está analizando. Además, contiene componentes no lineales y no estacionarias que afectan la eficacia de la descomposición modal.

Otro problema puede ser la interpretación de los resultados de la descomposición modal. Es posible que las componentes modales identificadas por un cierto método de descomposición no sean completamente separables de las interferencias de la red eléctrica, o que la eliminación de componentes modales no deseadas pueda influir en la información diagnóstica de la señal ECG.

En esta Tesis Doctoral, con base en la formulación de espacio de estado diagonal dependiente del tiempo proporcionada en [10, 13, 17, 11], se aborda el problema del análisis en el dominio modal de señales multivariadas no estacionarias. Esto requiere la introducción de una matriz de mezcla de modo, que debe ser identificada. La matriz de mezcla junto con las covarianzas de estado, parámetro y ruido, así como los valores iniciales, se establecen como hiperparámetros de la representación modal de espacio de estado y posteriormente se estiman con un algoritmo de Expectación-Maximización (EM) adaptado. La metodología propuesta se evalúa en diferentes aplicaciones que incluyen una señal multivariada con tres componentes modales, presentando cruces de modo y amplitudes que se desvanecen. Sin embargo, la principal aplicación consiste en el análisis y

reconstrucción de la señal ECG de una derivación y de múltiples derivaciones de pacientes sanos y con alguna patología.

La aplicación del método de descomposición armónica propuesto se puede resumir en los siguientes pasos: *(i)* selección del número de componentes armónicos e inserción de la señal en la representación de espacio de estados en bloques diagonales; *(ii)* cálculo de los componentes modales y de la frecuencia instantánea fundamental; *(iii)* optimización general de la representación mediante el algoritmo de Expectation-Maximization (EM).

### 1.3 Objetivos

El objetivo principal de esta Tesis Doctoral consiste en realizar la descomposición modal paramétrica de señales no lineales, no estacionarias, tanto univariadas como multivariadas y su aplicación específica a la eliminación de las perturbaciones que afectan los registros de las señales ECG, en particular la interferencia de línea de potencia eléctrica y la línea base.

En esta Tesis se proporciona una mayor comprensión de las descomposiciones modales basadas en modelos de espacio de estado dependientes del tiempo, mediante el análisis de las propiedades de su respuesta dinámica. En este contexto, la contribución principal de esta Tesis es demostrar, mediante el uso de transformaciones de equivalencia, que la respuesta de un sistema lineal de SS dependiente del tiempo puede caracterizarse por la superposición de componentes de frecuencia de banda angosta, que en el caso de la respuesta natural toman la forma de componentes modales con IA e IF asociadas a los valores propios instantáneos de bloques de segundo orden de SS dependientes del tiempo. Además, el análisis realizado en este trabajo conduce a una parametrización más general y más simple de bloques de espacio de estado lineales de segundo orden dependientes del tiempo, los cuales pueden utilizarse en combinación con filtros de Kalman para obtener estimaciones precisas en línea de múltiples componentes modales y sus respectivos IA e IF. Se consideran dos enfoques de estimación basados en métodos de filtros de Kalman conjuntos o desacoplados, que conducen a los métodos propuestos de seguimiento de sinusoides no estacionarios con filtros de Kalman conjuntos/duales (JKF-NST o DKF-NST). Los métodos JKF-NST y DKF-NST postulados resultan ser una generalización del conocido método KF-FT, con la gran ventaja de que el problema de estimación concurrente de estados y parámetros implica un tipo de no linealidad más suave comparado con la que aparece en los KF-FT.

Un análisis de Monte Carlo de una señal no estacionaria ruidosa de tres componentes con cruce de modos y desvanecimiento, demuestra la mayor robustez de los métodos propuestos en comparación con el método KF-FT y el método de extracción de crestas descrito en [42], en términos de precisión del seguimiento de los componentes modales y su IA e IF. Además, los resultados teóricos derivados del análisis de modelos lineales de los espacio de estados dependientes del tiempo pueden extenderse hacia el diseño de métodos mejorados de descomposición modal.

### 1.3.1 Análisis modal clásico

El análisis modal clásico es una técnica empleada en el análisis estructural, que se utiliza para identificar las frecuencias y modos de vibración de una estructura, así como las deformaciones y tensiones asociadas a estos modos.

El análisis modal clásico se fundamenta en la teoría de la elasticidad lineal, la cual supone que la estructura es elástica, homogénea e isotrópica. La estructura se modela como un sistema de masas y resortes, en el que las masas representan la masa concentrada de la estructura y los resortes representan la rigidez de los elementos estructurales.

Para realizar el análisis modal clásico se requiere conocer las propiedades físicas de la estructura, tales como la geometría, el material y las condiciones de carga. Con esta información, mediante la solución de la ecuación característica, se pueden calcular las frecuencias y modos de vibración de la estructura del sistema.

Los modos de vibración describen patrones propios del movimiento de la estructura y están asociados a frecuencias específicas. Estos modos pueden ser visualizados mediante animaciones y gráficos, y son útiles para entender el comportamiento dinámico de la estructura.

El análisis modal clásico es una herramienta interesante para el análisis y diseño de estructuras, ya que posibilita la predicción de la respuesta dinámica de la estructura frente a diversas cargas y eventos sísmicos. Sin embargo, este análisis tiene algunas limitaciones, ya que no considera la no linealidad, la amortiguación, ni el comportamiento no elástico de la estructura, lo que puede conducir a errores en la predicción de la respuesta dinámica.

### 1.3.2 Descomposición modal de señales no estacionarias

La descomposición modal de señales no estacionarias es un método de análisis de señales que posibilita la descomposición de una señal en una serie de modos que representan patrones específicos de variación en el tiempo. Esta técnica es útil para analizar señales complejas que no pueden ser descompuestas mediante técnicas de análisis de Fourier, como señales no estacionarias o señales con componentes transitorias.

La descomposición modal de señales no estacionarias se fundamenta en la transformada de Hilbert-Huang (HHT), una técnica de análisis no lineal empleada para extraer información de señales complejas y no estacionarias. Se trata de un método de análisis espectral no paramétrico que utiliza la información de fase y amplitud de la señal para identificar los modos que la componen.

La HHT consiste de dos pasos principales: la EMD y la transformada de Hilbert (HT). En la EMD, la señal original se descompone en una serie de modos intrínsecos, cada uno de los cuales representa una frecuencia y una amplitud específicas de la señal. Cada modo se calcula eliminando iterativamente los componentes más lentos de la señal hasta que se obtiene un modo cuya frecuencia es aproximadamente constante.

Una vez obtenidos los modos empíricos, se aplica la HT a cada uno de ellos en la segunda etapa. La HT permite obtener la función analítica de la señal, que incluye tanto la información de la amplitud como la de fase de cada modo. A partir de la función analítica, se puede obtener la frecuencia instantánea y la amplitud de cada modo en función del tiempo. Cada función modal se asocia con una frecuencia específica, y se puede visualizar como una onda sinusoidal con una amplitud y fase específicas.

Después de identificar los modos, es factible reconstruir la señal original mediante la suma de los modos. La ventaja de esta técnica es que permite separar las diferentes componentes de la señal y analizarlas individualmente.

La descomposición modal de señales no estacionarias se utiliza en una amplia variedad de aplicaciones, que incluyen el análisis de señales biológicas, la detección de fallos en máquinas, el análisis de señales meteorológicas y la predicción de terremotos. Es una herramienta valiosa para la identificación de patrones en señales complejas y para la extracción de información útil de señales no estacionarias.

## 1.4 Metodología propuesta

En esta Tesis Doctoral se plantean dos formas metodológicas:

1. La primera, se aplica a la eliminación de la interferencia de la línea de potencia en señales ECG. Estructuralmente está conformada por el siguiente procedimiento:
  - (i) Con respecto a la señal sinusoidal de la línea de potencia (50 Hz o 60 Hz, según la región), se modela con un oscilador sinusoidal. Para efectos de mejorar la suavidad y robustez en el tratamiento digital [97, 98], al sistema oscilador se le aplica el operador *delta* u operador de Euler.
  - (ii) Con relación a la señal ECG, se utiliza como modelo un proceso autorregresivo variante en el tiempo, que sirve como predictor lineal, cuyo orden se obtiene a partir del criterio de información de Akaike. Los parámetros de este modelo se ajustan de forma adaptativa mediante un filtro de Kalman, el cual reduce el error cuadrático medio (MSE) de predicción [129].
  - (iii) A continuación se emplea el filtro de Kalman dual (DKF) [135], con el objetivo de estimar en forma conjunta los parámetros del proceso autorregresivo que modela tanto la señal ECG como el estado, consistente de la señal ECG limpia y del oscilador que modela la interferencia mencionada.
  - (iv) Para el caso de la desviación de la línea base, se aplica el filtro de Kalman con *B-spline*, y a continuación se realiza una sintonización precisa de las curvas de ajuste. Con esto se logra estimar la señal que produce tal desvío. El concepto clave es el posicionamiento de los nodos en la función *B-spline* sobre segmentos isoelectrónicos de la señal, que permite un adecuado acercamiento a la verdadera desviación de línea base.
2. La segunda metodología propuesta, constituye el núcleo de esta Tesis Doctoral y está desarrollada aplicando diferentes estrategias de descomposición modal paramétrica de señales multivariadas no estacionarias, con base en una representación de espacio de estado dependiente del tiempo de bloques diagonales de segundo orden y filtrado/suavizado de Kalman. Cada bloque de segundo orden se compone de las partes real e imaginaria de los valores propios instantáneos de cada modo; por lo tanto, representa un componente oscilatorio no estacionario único. La identificación de las trayectorias de estado/parámetro y de los hiperparámetros, constituidos por la matriz



de mezcla de modo, las covarianzas de estado, parámetro y ruido y las condiciones iniciales, se lleva a cabo con un algoritmo de Expectation-Maximization adaptado. Para aplicar esta metodología, que también se utiliza para la eliminación de la interferencia de la línea de potencia, se advierte que en la vida real, la mayoría de los sistemas exhiben dinámicas no lineales variantes en el tiempo; por lo que su respuesta es no estacionaria y, para el análisis efectivo de estas señales no estacionarias, se requiere emplear técnicas de representación adecuadas que permitan describir con claridad la dinámica de la señal evolutiva [37, Cap. 5], [92, Cap. 1], [109].

## 1.5 Organización y contribuciones de esta Tesis Doctoral

Esta Tesis Doctoral está estructurada en capítulos, los cuales se resumen en la Tabla 1.1. Los temas específicos discutidos en cada capítulo y sus respectivas contribuciones se describen a continuación.

**Tabla 1.1** Capítulos de esta Tesis.

Capítulo	Título
1	Este texto introductorio
2	Extracción de componentes de banda angosta
3	Descomposición modal de señales no estacionarias
4	Representaciones modales en espacios de estado
5	Descomposición armónica del ECG de varias derivaciones

### Capítulo 2: Extracción de componentes de banda angosta

En este capítulo se considera el problema del modelado y análisis de señales ECG estacionarias y no estacionarias utilizando métodos de filtrado convencional y óptimo. El capítulo está dividido en dos partes: en la primera se analizan varios métodos para la eliminación de interferencias producidas por la línea de potencia eléctrica, mientras que en la segunda se plantean los métodos para la remoción de la oscilación de la línea base.

Se aplicó el operador  $\delta$  para suavizar el filtrado, tanto del KF simple, como de las demás versiones del KF; por lo cual, el procedimiento empleado para el primer caso, también lo es para los demás. Se realizaron cinco versiones de filtrado de Kalman, a saber: Filtro de Kalman simple ( $\delta$ KF), filtro dual rastreador de frecuencia, EKF, DKF y UKF.

#### Contribuciones principales:

- (i) Como mecanismo de comparación de los diferentes métodos estudiados, se emplea la transformada de Gabor (análisis tiempo-frecuencia).
- (ii) La aplicación de derivadas recurrentes a procesos discretos en el tiempo.
- (iii) La evaluación de los diferentes métodos estacionarios y no estacionarios se proporciona en el contexto del modelado y análisis de la respuesta de la señal ECG, tanto

para la reducción de las interferencias de la línea de potencia eléctrica, como para la corrección de la desviación de la línea base. Se realiza una comparación detallada de los diversos enfoques de modelado, la determinación de sus ventajas y desventajas.

- (iv) Se modeló la señal AC con el operador *delta* aplicado al filtro de Kalman. Una vez que se tuvo el modelo definido, se combinó con la señal ECG y se aplicaron los métodos de filtrado seleccionados, lográndose resultados con alto nivel de desempeño.

### **Capítulo 3: Descomposición modal de señales no estacionarias**

Este capítulo aborda el problema de la descomposición de señales no estacionarias en componentes modales, a través de un enfoque metodológico basado en modelos de espacio de estados diagonales dependientes del tiempo. Los métodos propuestos se presentan como una herramienta confiable para la descomposición modal en línea de señales no estacionarias de múltiples componentes, con resultados comparables e incluso superiores a otros métodos de vanguardia. Estos métodos han llevado a una parametrización más sencilla y genérica de bloques de espacio de estado lineales de segundo orden dependientes del tiempo. Dichos bloques pueden ser combinados con filtros de Kalman para obtener estimaciones precisas en tiempo real de múltiples componentes modales y sus correspondientes IA e IF. Se han evaluado dos enfoques de estimación basados en filtros de Kalman, ya sea conjuntos o desacoplados. Ambos enfoques han conducido al desarrollo de los métodos planteados en esta Tesis, para el rastreo de sinusoides no estacionarias con filtros de Kalman conjuntos o duales (JKF-NST o DKF-NST). Estos métodos son una generalización del conocido método KF-FT, pero con una gran ventaja: el problema de estimación concurrente de estados y parámetros implica un tipo de no linealidad más suave que el que se presenta en los KF-FT.

#### Contribuciones principales:

- (i) Estudiar las propiedades de la respuesta de sistemas de espacio de estado lineales dependientes del tiempo y demostrar cómo dicha respuesta puede asociarse con una representación modal mediante el uso de transformaciones de equivalencia.
- (ii) Demostrar que la respuesta de un sistema de espacio de estados lineal dependiente del tiempo puede ser caracterizada por la superposición de componentes de frecuencia de banda angosta. En el caso de la respuesta natural toman la forma de componentes modales con IA e IF asociadas con los valores propios instantáneos de bloques de espacio de estados de segundo orden dependientes del tiempo.
- (iii) La efectividad de los métodos propuestos se demuestra en la descomposición y eliminación de ruido en señales electrocardiográficas de la base de datos QT.

## Capítulo 4: Representaciones modales en espacio de estados para la descomposición de señales multivariantes no estacionarias

Este capítulo presenta un método de descomposición modal paramétrico para señales multivariantes no estacionarias, basado en una representación de espacio de estados dependiente del tiempo y diagonal en bloques y filtrado/suavizado de Kalman. Cada bloque es de segundo orden y se conforma utilizando las partes real e imaginaria de los autovalores instantáneos de cada modo; por lo tanto, representa un único componente oscilatorio no estacionario. La identificación de las trayectorias de estado/parámetro y los hiperparámetros, constituidos por la matriz de mezcla de modos, las covarianzas de estado, parámetro y ruido, y las condiciones iniciales, se logra con un algoritmo de EM adaptado. La metodología se evalúa en un ejemplo numérico que trata una señal multivariante con tres componentes modales, que presenta cruces de modo y amplitudes que se desvanecen.

### Contribuciones principales:

- (i) La descomposición modal de señales no estacionarias multivariantes y sus aplicaciones en diferentes escenarios.
- (ii) El análisis modal que facilita la separación de los componentes de la señal y su origen.
- (iii) El análisis modal de señales multivariantes que proporciona una vista colectiva del sistema subyacente y tiene un potencial latente para un mejor aislamiento de los componentes modales y una mayor robustez al ruido, en contraste con los análisis modales univariados independientes.
- (iv) La aplicación del algoritmo de E-M adaptado para la identificación de los hiperparámetros.

## Capítulo 5: Descomposición armónica del ECG de varias derivaciones

En este capítulo se desarrolla un método de descomposición armónica no estacionaria para señales pseudo-periódicas no estacionarias multivariantes basado en descomposiciones modales mediante el KF. Una descomposición armónica no estacionaria se asocia a una descomposición de la señal compuesta por múltiples sinusoides con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo, cuyas frecuencias son múltiplos de una frecuencia fundamental común dependiente del tiempo. En este sentido, una descomposición armónica no estacionaria corresponde a una generalización del análisis de series de Fourier, en cuyo caso las sinusoides tienen amplitud y frecuencias fijas. Este tipo de descomposición puede ser apropiado para las señales ECG, ya que éstas tienen una estructura pseudoperiódica, y pueden facilitar la extracción de ondas y la detección de interferencias. En un trabajo reciente de los autores [23], se ha progresado hacia este objetivo, en el que se intenta hacer un análisis modal multivariante no estacionario sobre una representación del espacio de estados dependiente del tiempo diagonales en bloques y filtrado/suavizado de Kalman.

En la presente contribución, se modifica el algoritmo para representar armónicos no estacionarios e introducir un algoritmo de Expectation-Maximization para la identificación de las matrices de covarianza de ruido y la matriz de mezcla de la representación de espacio de estado resultante [11].

Los métodos propuestos constituyen una herramienta confiable para la descomposición modal en línea de señales no estacionarias de componentes múltiples, con resultados comparables e incluso mejores que otros métodos de vanguardia.

#### Contribuciones principales:

- (i) El diseño de un método de descomposición armónica no estacionaria para señales pseudo-periódicas multivariantes no estacionarias.
- (ii) Se realiza una descomposición armónica a partir de la generación de múltiples sinusoides con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo.
- (iii) Este tipo de descomposición se aplica a señales ECG, ya que tienen una estructura pseudo-periódica y facilitan la extracción de ondas y la detección de interferencias.
- (iv) Se modifica el algoritmo para representar armónicos no estacionarios y se introduce un algoritmo de E-M para la estimación de las matrices de covarianza de ruido y la matriz de mezcla de la representación de espacio de estados resultante.
- (v) Se realiza una comparación con métodos de descomposición clásicos en registros de ECG de condiciones sanas y patológicas.

## **1.6 Relación de los capítulos de la Tesis con publicaciones del autor**

En esta sección se ofrece una descripción concisa de la relación entre esta tesis y las publicaciones realizadas por el autor en diversos eventos y revistas.

### **Capítulo 2**

En este capítulo se aplicaron básicamente dos publicaciones: (i) Un artículo titulado *Reducción de interferencia de línea de potencia en señales electrocardiográficas mediante el filtro dual de Kalman* [18], en el cual se propuso la metodología del operador  $\delta$  aplicado al KF. Esto permitió mejorar la precisión en los resultados de la eliminación de perturbaciones en la señal ECG, así como la corrección de la desviación de la línea base. (ii) El libro *Análisis y filtrado de señales ECG* [15], donde se realizó una compilación que incluyó el estudio de algunas señales ECG patológicas. Se realizó un análisis comparativo de diversas metodologías del estado del arte. Se presentaron los algoritmos de las diferentes metodologías estudiadas y se compararon con la metodología propuesta por el autor. Éstas se resumen en las figuras 2.17 y 2.21, así como en la Tabla 2.2.

### **Capítulo 3**

Este capítulo sigue los lineamientos planteados en el artículo *Diagonal time dependent state space models for modal decomposition of non-stationary signals* [10], en el cual se establece el principio de la descomposición modal de señales no estacionarias mediante modelos de espacio de estados dependientes del tiempo con variables en bloques diagonales

de segundo orden. Para el problema de estimación de estados así como de la frecuencia y la amplitud instantáneas, se aplica el filtro extendido de Kalman.

#### Capítulo 4

Este capítulo se fundamenta en el artículo *State-space modal representations for decomposition of multivariate non-stationary signals* [13]. En este trabajo, basándose en la formulación de SS diagonal dependiente del tiempo, se aborda el problema del análisis en el dominio modal de señales multivariadas no estacionarias. Esto requiere la introducción de una matriz de mezcla de modos, que necesita ser identificada. La matriz de mezcla, junto con las covarianzas de estado, parámetro y ruido, y los valores iniciales, se establecen como hiperparámetros de la representación modal de SS y se estiman posteriormente con un algoritmo de EM adaptado. La metodología propuesta se evalúa con dos casos: (i) un sistema de rotor desbalanceado simulado (ii) Una señal multivariada con tres componentes modales, caracterizados por cruces de modos y amplitudes que tienden a cero.

#### Capítulo 5

Este capítulo está relacionado con el artículo *State space model-based harmonic decomposition of pseudo-periodic non-stationary multivariate signals* [11]. El principal objetivo de este trabajo fue diseñar un método de descomposición armónica no estacionaria para señales pseudo-periódicas multivariadas no estacionarias basado en representaciones de SS de bloques diagonales y KF. El método propuesto ofrece un procedimiento preciso, compacto y explicativo desde el punto de vista físico para analizar sistemas múltiples de salida pseudo-periódicos no estacionarios, como se muestra en registros ECG reales.

## 1.7 Publicaciones

### 1.7.1 Artículos

#### 1. State space model-based harmonic decomposition of pseudo-periodic non-stationary multivariate signals

Autores:

- (i) Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co), Institución: Escuela de Tecnología Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- (ii) Luis David Avendaño-Valencia (e-mail: ldav@sdu.dk) Institución: Dept. of Mechanical and Electrical Engineering, Syddansk Universitet, Campusvej 55, 5230, Odense M, Dinamarca.
- (iii) Edilson Delgado-Trejos (edilsondelgado@itm.edu.co), Institución: AMYSOD Lab, CM&P Research Group, Department of Quality and Production, Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM–, Medellín, Colombia.
- (iv) David Cuesta-Frau (dcuesta@disca.upv.es), Institución: Technological Institute of Informatics, Universitat Politècnica de València, Alcoy campus, 03801 Alcoy, España.

Artículo publicado en *Signal Processing*. Vol. 213, diciembre de 2023. Páginas 109192, 1 – 18.

<https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2023.109192>

This work is concerned with the harmonic decomposition of pseudo-periodic non-stationary multivariate signals. In this framework, a signal component corresponds to a single sinusoid with time-dependent amplitude and frequency. Thus, in the proposed harmonic decomposition, all the signal components are bound to share the same fundamental time-dependent frequency. Here, we establish a procedure to yield such decomposition by casting the multivariate signal into a block-diagonal state-space representation with multiple outputs. The harmonic components and instantaneous frequency are estimated using Kalman filtering. In addition, we provide an optimisation framework for the hyperparameters of the state space representation based on the Expectation-Maximisation algorithm. The proposed method provides an accurate, compact and physically explainable procedure for analysing pseudo-periodic non-stationary multiple-output systems, as demonstrated in the case of a simulated unbalanced rotor system and on real electrocardiographic records.

## **2. Diagonal time dependent state space models for modal decomposition of non-stationary signals**

Autores:

- (i) Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co), Institución: Escuela de Tecnología Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- (ii) Luis David Avendaño-Valencia (e-mail: ldav@sdu.dk) Institución: Dept. of Mechanical and Electrical Engineering, Syddansk Universitet, Campusvej 55, 5230, Odense M, Dinamarca.
- (iii) Edilson Delgado-Trejos (edilsondelgado@itm.edu.co), Institución: AMYSOD Lab, CM&P Research Group, Department of Quality and Production, Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM–, Medellín, Colombia.

Artículo Publicado en *Signal Processing*, Vol. 147, junio de 2018, páginas 208-223.

<https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2018.01.031>

This work is devoted to the problem of the decomposition of a non-stationary signal into modal components, for which a methodological approach based on diagonal time-dependent state space models is postulated. In particular, on this paper is shown that the response of a diagonal time-dependent state space models can be cast into a modal form characterized by time-dependent amplitudes and frequencies. Later, a KF based framework for non-stationary modal decomposition is built on the previously discussed diagonal state space representations. The enhanced performance of the proposed methods is demonstrated on a benchmark test consisting of three non-stationary modal components, and on the modal decomposition and denoising of a ECG signals from the QT database. The proposed methods constitute a reliable tool for on-line modal decomposition of multi-component non-stationary signals, with results comparable and even better than other state-of-the-art methods.

### 3. Detection of ECG Fiducial Points Using Recursive Estimation and Kalman filtering

Autores:

- (i) Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co), Institución: Escuela de Tecnología Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- (ii) Jorge I. Padilla (jorgei.padillab@autonoma.edu.co), Institución: Signal processing, Machine Learning. Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia.
- (iii) Edilson Delgado-Trejos (edilsondelgado@itm.edu.co), Institución: AMYSOD Lab, CM&P Research Group, Department of Quality and Production, Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM–, Medellín, Colombia
- (iv) David Cuesta-Frau (dcuesta@disca.upv.es), Institución: Technological Institute of Informatics, Universitat Politècnica de València, Alcoy campus, 03801 Alcoy, España.

Artículo presentado en Computing in Cardiology 2020, Rímini, Italia.

[ISSN:2325-887XDOI:10.22489/CinC.2020.284](https://doi.org/10.22489/CinC.2020.284)

Detection of the QRS complex is regarded as a baseline procedure for the segmentation of electrocardiographic (ECG) signals, as it is usually the most distinctive component of the signal and with the largest amplitude. Commonly, from the detection of the R peak, a backward and forward search is carried out to find the other components, which are P-wave, T-wave, and sometimes U-wave. Therefore, the QRS complex detector as a heartbeat indicator is useful for obtaining the RR interval measurement, a parameter associated to the heart rate variability (HRV), which is involved in arrhythmia detection routines. Accordingly, it is imperative that the QRS complex can be identified from heterogeneous morphology, which can occur in arrhythmias such as flutter, as well as atrial and ventricular fibrillation. Unfortunately, many QRS detection algorithms do not work well in pathological heartbeats, where the morphology of the QRS complex changes radically, and very often, ectopic beats are presented.

This paper addresses QRS detection by using a novel methodology consisting of recursive estimation of the ECG signal envelope through the Kalman Filter and smoothness priors. This approach effectively allows the estimation of R peaks, with similar performance to other methods highlighted in the state of the art, as it considers a time-dependent adaptive threshold independent of the morphology of the heartbeat, in order to achieve a robust detection. For validating this methodology, the MIT-BH, S, T-T, and AASC recordings were used. A global accuracy of 99.3% was achieved with a sensitivity value of 99.5%. The experimental results demonstrate the improvement of the proposed Kalman filter over other outstanding methods; showing that the performance of the methodology is stable both in the presence of powerline noise, such as baseline wandering, maintaining a high performance as the noise level increases.

#### **4. State-space modal representations for decomposition of multivariate non-stationary signals**

Autores:

- (i) Luis David Avendaño-Valencia (e-mail: ldav@sdu.dk) Institución: Dept. of Mechanical and Electrical Engineering, Syddansk Universitet, Campusvej 55, 5230, Odense M, Dinamarca.
- (ii) Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co), Institución: Escuela de Tecnología Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- (iii) Edilson Delgado-Trejos (edilsondelgado@itm.edu.co), Institución: AMYSOD Lab, CM&P Research Group, Department of Quality and Production, Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM–, Medellín, Colombia.
- (iv) David Cuesta-Frau (dcuesta@disca.upv.es), Institución: Technological Institute of Informatics, Universitat Politècnica de València, Alcoy campus, 03801 Alcoy, España.

Trabajo presentado en The 19th IFAC Symposium on System Identification. Julio 13-16. Volumen 54, Número 7, 2021. Páginas 475-480. Padua, Italia.

<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.08.405>

This paper presents a parametric modal decomposition method for multivariate non-stationary signals, based on a time-dependent state space representation using diagonal blocks and Kalman filtering/smoothing. Each second-order block is constructed using the real and imaginary parts of the instantaneous eigenvalues of each mode, thus representing a single non-stationary oscillatory component. The identification of the state/parameter trajectories and hyperparameters, such as the mode mixing matrix, state, parameter and noise covariances, and the initial conditions, is performed by an adapted expectation-maximization algorithm.

Modal decomposition can be defined as the problem of separating a signal into a finite set of orthogonal oscillatory components. In the non-stationary case, the oscillatory components comprise sinusoids with time-dependent amplitude and frequency –or instantaneous amplitude (IA) and instantaneous frequency (IF)–. There are several well-established modal decomposition methods that can be applied on single (univariate) non-stationary signals, including: proper orthogonal decomposition, empirical mode decomposition, ridge tracking on time-frequency/time-scale representations, and synchro squeezing/extracting transforms. Main limitations of these non-parametric methods relate to the maximum feasible resolution in time-frequency domain, and their sensitivity to noise and signal singularities –v.gr. IF discontinuities/crossings, or vanishing amplitudes–. KF frequency trackers constitute alternative parametric modal decomposition methods. These are based on second order SS blocks describing a single sinusoidal component and its quadrature, while a third state, representing the IF, is also appended. The non-linear relation from the IF to the modes, through a trigonometric function, calls for non-linear KF approximations. In a previous paper, the authors have presented a unifying framework, where second order blocks, comprised by the real and imaginary parts of the



instantaneous eigenvalue of the modal component. These coefficients comprise a parameter vector, jointly estimated with the state (modal) vector.

## 5. Reducción de interferencia de línea de potencia en señales electrocardiográficas mediante el filtro dual de Kalman

Autores:

- (i) Luis David Avendaño-Valencia (e-mail: ldav@sdu.dk) Institución: Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.
- (ii) Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co), Institución: Escuela de Tecnología Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- (iii) José María Ferrero (cferrero@eln.upv.es), Institución: Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial Universitat Politècnica de València, Valencia, España.
- (iv) Germán Castellanos D.(cgcastellanosd@unal.edu.co), Institución: Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación. Universidad Nacional de Colombia.

Artículo publicado en Ingeniería e Investigación. Universidad Nacional de Colombia. Vol. 27, No. 3, págs. 77-88, diciembre de 2007, Bogotá, Colombia.

[ISSN 0120-5609, ISSN-e 2248-8723](#)

Este artículo presenta el desarrollo de un filtro para la reducción de la interferencia de la línea de potencia eléctrica en señales ECG. El enfoque se basa en la estimación dual tanto de parámetros como de estado, aplicando el KF. Se consideran modelos independientes para la interferencia de línea de potencia y la señal ECG. Ambos modelos se combinan para simular la señal ECG medida, sobre la que se realiza la estimación de estado para separar la señal de la interferencia. El algoritmo propuesto se sintoniza y se evalúa en un conjunto de pruebas realizadas sobre la base de datos QT de electrocardiografía. Inicialmente se hacen pruebas de sintonización del algoritmo para el rastreo de la señal ECG limpia, y los resultados se emplean más adelante en las pruebas de filtrado. Posteriormente, se efectúan pruebas minuciosas en la base de datos QT, introduciendo artificialmente interferencia de la línea de potencia en los registros, para una SNR dada. Esto proporciona curvas del desempeño del algoritmo, que permiten a su vez comparar con otros algoritmos de filtración, tales como un filtro notch recursivo IIR y un KF basado en un modelo simple para la señal ECG. Los resultados demuestran que el algoritmo de filtrado desarrollado es robusto a los cambios de amplitud de la interferencia; además, conserva sus propiedades para los diferentes morfologías de señales ECG, tanto normales como patológicas.

### 1.7.2 Libros

#### 1. Diseño de Filtros Óptimos

Autor:

Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co)

Editorial: Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Libro de texto para el curso del mismo nombre.

©2023 por Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Electrónica y Robótica (LIDER), UTP.

## **2. Análisis y filtrado de señales ECG**

Autores:

- (i) Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co), Institución: Escuela de Tecnología Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- (ii) Edilson Delgado-Trejos (edilsondelgado@itm.edu.co), Institución: AMYSOD Lab, CM&P Research Group, Department of Quality and Production, Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM–, Medellín, Colombia.
- (iii) David Cuesta-Frau (dcuesta@disca.upv.es), Institución: Technological Institute of Informatics, Universitat Politècnica de València, Alcoy campus, 03801 Alcoy, España.

Libro de proyecto de investigación en ECG.

©2023 por LIDER, UTP.

## **3. Comparación de diferentes configuraciones del filtro de Kalman para eliminación de perturbaciones en señales ECG**

Autores:

- (i) Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co),  
Institución: Escuela de Tecnología Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- (ii) Luis David Avendaño-Valencia (e-mail: ldav@sdu.dk)  
Institución: Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.
- (iv) Germán Castellanos D.(cgcastellanosd@unal.edu.co),  
Institución: Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación. Universidad Nacional de Colombia.

Editorial: Universidad Tecnológica de Pereira

ISBN: 978-958-44-5225-2

©2013 por LIDER, UTP.

## **4. Estudio Comparativo de Métodos de Preprocesado y Segmentación en el Electrocardiograma**

Autor

Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co),

Trabajo de investigación para optar al Diploma de Estudios Avanzados

Directores:

- (i) José María Ferrero (cferrero@eln.upv.es), Institución: Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial Universitat Politècnica de València, Valencia, España.

(ii) Germán Castellanos D.(cgcastellanosd@unal.edu.co), Institución: Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación. Universidad Nacional de Colombia.

Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Electrónica, Valencia, España. 2005.

### **5. Remoción de perturbaciones en señales ECG en estados funcionales y disfuncionales**

Autor:

Luis Enrique Avendaño (leavenda@utp.edu.co)

Editorial: Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Proyecto de Investigación Año Sabático. Universidad Tecnológica de Pereira, 2008.



## 2 Extracción de componentes de banda angosta

---

El electrocardiograma (ECG) es una importante señal biológica, útil para diagnosticar arritmias cardíacas, medir la anormalidad de los latidos o detectar daños en el corazón. El análisis automatizado del ECG es un campo en expansión en el ámbito de la telemedicina.

Varios tipos de ruidos pueden contaminar las señales de ECG. Existen ruidos cardíacos y extracardíacos. El ruido cardíaco se presenta cuando hay una reducción o desaparición del intervalo isoelectrico o cuando hay un aleteo auricular. Los ruidos extracardíacos más comunes son la respiración, el desplazamiento de los electrodos, la contracción muscular y las interferencias de la línea eléctrica. La presencia de estos ruidos dificulta el análisis del ECG y la detección de anomalías. Las señales ECG están conformadas por la onda P, el complejo QRS y la onda T.

La interferencia de la línea de potencia eléctrica suele ser una onda sinusoidal con frecuencia aproximadamente constante de 50 Hz o 60 Hz, dependiendo de la región, y una fase aleatoria. Este tipo de ruido aditivo de alta frecuencia afecta a las máquinas de registro aunque se tenga especial cuidado en la conexión a tierra, el blindaje y el diseño del amplificador [143].

Otro tipo de interferencia presente en una señal ECG se conoce como ruido de línea base. Es un artefacto de baja frecuencia cuya oscilación se sitúa entre 0,05 Hz y 0,7 Hz, aproximadamente [141]. Este tipo de ruido se origina por el movimiento de los pacientes debido a factores tales como el dolor, la ansiedad, la tos, el estrés o la respiración; también puede ser causado por el desplazamiento de los electrodos.

El tipo de ruido presente en las señales ECG puede provocar una pérdida de la señal al cambiar las duraciones, formas y amplitudes de los latidos del corazón, lo que conduce a registros incorrectos. Por lo tanto, se requiere una etapa adecuada para la supresión de ruido de las señales de ECG, la cual a su vez, debe preservar las amplitudes y los picos de onda importantes de la señal.

Los filtros analógicos reducen los ruidos pero introducen cambios de fase no lineales y dependen de características físicas como la temperatura y la resistencia, por lo que introducen errores. Los filtros digitales ofrecen más ventajas que los analógicos. El desarrollo y la implementación de filtros digitales continúan siendo áreas abiertas en el análisis del ECG.

Se han propuesto diferentes métodos para eliminar las interferencias de la línea eléctrica en el ECG.

Entre los métodos de representación más reconocidos de las señales no estacionarias se encuentran las *Representaciones no paramétricas de Tiempo–Frecuencia* (TFR) y las *Representaciones de escala de tiempo* (TSR) [25, Ch. 2]; [37, Ch. 5], donde la señal no estacionaria se caracteriza en términos de un conjunto infinito de componentes oscilatorios localizados tanto en el tiempo como en la frecuencia. Estos métodos se han utilizado exhaustivamente en la representación y el análisis de muchos tipos de señales no estacionarias [29, 30, 48, 75]. Sus principales limitaciones provienen de la dificultad para la localización precisa de componentes en términos de tiempo y de frecuencia, una restricción establecida por el principio de incertidumbre. Además se enfrenta a la presencia de artefactos conocidos como términos cruzados, y a la dimensión considerable y redundancia innecesaria [61]; [92, Ch. 1].

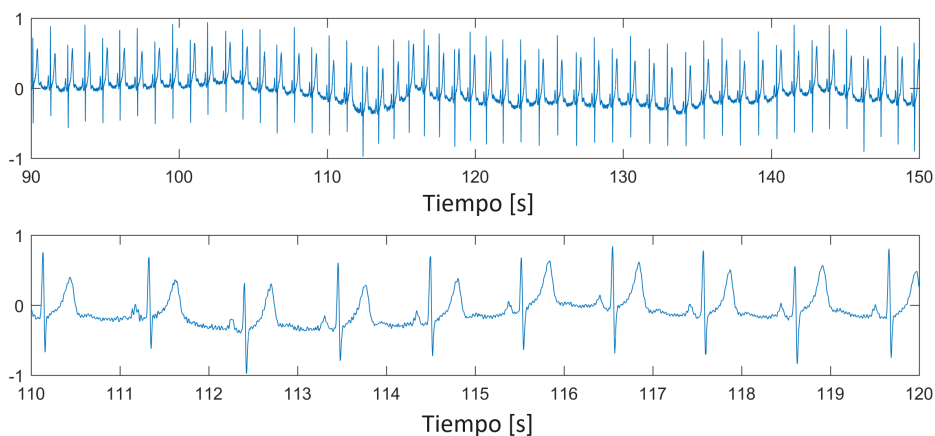
Cuando la señal se descompone utilizando la transformada *wavelet* (WT), un conjunto de coeficientes *wavelet* se correlaciona con las subbandas de alta frecuencia. Estas subbandas de alta frecuencia contienen los detalles del conjunto de datos. Este es el concepto básico de la umbralización: poner a cero todos los coeficientes de las subbandas de frecuencias que sean inferiores a un determinado umbral y utilizar estos coeficientes en una *Inverse Discrete Wavelet Transform* (IDWT) para reconstruir el conjunto de datos.

## 2.1 Estrategias de filtrado óptimo para remoción de perturbaciones

### 2.1.1 La base de datos QT de ECG

En este capítulo se estudia la supresión de las interferencias de la línea de potencia eléctrica en señales ECG, como una forma de demostrar la aplicabilidad de los métodos de descomposición modal propuestos en esta Tesis a señales caracterizadas por un comportamiento complejo no estacionario. Con este propósito, se utilizaron registros ECG de la base de datos QT, la cual está disponible públicamente, y se contaminaron artificialmente con interferencias de la red de potencia eléctrica.

La base de datos QT consta de un total de 105 registros ECG, seleccionados de una gran variedad de morfologías QRS y de segmentos ST-T. Estos registros fueron recopilados con el propósito de evaluar algoritmos de detección de QT en condiciones que simulan situaciones reales [82]. Cada registro tiene una duración de 15 minutos y está muestreado a 250 Hz, además se caracteriza por tener cambios súbitos de amplitud y frecuencia. La Figura 2.1 muestra un segmento típico de señal sin ruido de la base de datos QT (SEL117), donde se pueden observar las características complejas de la señal, incluidos los cambios rápidos de amplitud y de frecuencia.



**Figura 2.1** Fragmento ECG de registro SEL117 de la base de datos QT. En la parte superior: segmento de 60 s alrededor de  $t = 120$  s; en la parte inferior: segmento de  $t = 110$  s a 120 s.

### 2.1.2 Modelo básico de la señal ECG y filtro de Kalman

La señal ECG tomada por el dispositivo de adquisición comúnmente se describe con un modelo aditivo de señal útil más ruido, de la siguiente forma:

$$y_k = z_k + \eta_k \quad (2.1)$$

donde  $y_k$  es la señal ECG medida (con ruido),  $z_k$  es la parte de la señal de interés y  $\eta_k$  es la perturbación. Como ya se planteó, hay dos enfoques para el modelado de la señal ECG y las interferencias. En el caso de la señal ECG, se han propuesto tanto modelos lineales [99] como no lineales [117]. Los primeros no son apropiados para las señales ECG, debido a que no pueden seguir los cambios abruptos que ocurren en ella. A diferencia de los modelos lineales, los modelos no lineales son altamente complejos y demandan un proceso de adaptación de los parámetros del modelo, además de la reducción de la interferencia, lo que resulta en una alta carga computacional [120, 117, 121]. En consecuencia, es más conveniente el modelado de la interferencia que el de la señal ECG, debido a que sus características estocásticas son mejor conocidas. Para este caso, la interferencia en la Ecuación (2.1) se puede describir por el siguiente modelo lineal dinámico:

$$z_k = \sum_{i=1}^M \alpha_{i,k} \phi_{i,k} + v_k \quad (2.2)$$

donde el modelo de la interferencia es la suma de un conjunto de  $M$  funciones base  $\phi_{i,k}$  multiplicadas por coeficientes ponderados  $\alpha_i$ , mientras que el término  $v_k$  describe los componentes restantes que el modelo no puede representar. Los pesos introducidos pueden ser especificados como invariantes o dependientes del tiempo, dependiendo del problema concreto. La formulación del modelo dado en la Ecuación (2.2) en representación de

variables de estados es como sigue:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{L}v_k \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k \quad (2.3b)$$

donde  $\mathbf{x}_k$  es el vector de estados,  $\mathbf{A}$  es la matriz de transición de estados y  $\mathbf{C}$  es la matriz de medida de estados. Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  pueden ser invariantes o dependientes del tiempo. De acuerdo a la representación dada en las ecuaciones (2.3), la señal  $z_k$  es el valor medido de la salida del modelo dinámico de la Ecuación (2.3a) a través de la matriz de medida de estados  $\mathbf{C}$ ; esto es,  $z_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k$ . El modelo respectivo en espacio de estados se puede estimar por medio del filtro de Kalman, definido por la siguiente recursión [71]; [52, Cap.5]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}^\top + \mathbf{L}\mathbf{Q}\mathbf{L}^\top \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{P}_k^-\mathbf{C}^\top + \mathbf{R})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}_k^- \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde la notación  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  establece el estimado *a priori* del estado  $\hat{\mathbf{x}}_k$  usando información del estado anterior  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  y la señal  $y_1 \dots y_k$ ;  $\mathbf{P}_k^-$  es la matriz *a priori* de la covarianza del error en la estimación, también generada para el tiempo  $k-1$  y  $\mathbf{K}_k$  es la matriz de ganancia de Kalman. Así, basados en el modelo planteado en la Ecuación (2.2), la perturbación de la línea de potencia eléctrica y el desvío de la línea base pueden ser estimados adecuadamente y por lo tanto, removidos de la señal ECG.

### 2.1.3 Modelo para interferencia cuasi-sinusoidal

Puesto que esta clase de interferencia se puede asumir como una señal cuasi-sinusoidal con variaciones lentas y suaves en frecuencia y amplitud, el modelo respectivo se obtiene utilizando el siguiente conjunto de funciones base sinusoidales,  $\phi_i = \text{sen}(\omega_i + \varphi_{i,k})$ . Así, de la Ecuación (2.2), la perturbación de la línea de potencia eléctrica se define así:

$$z_k = \sum_{i=1}^M \alpha_{i,k} \text{sen}(\omega_{i,k} + \varphi_{i,k}) + v_k \quad (2.5)$$

donde  $\alpha_{i,k}$ ,  $\omega_{i,k}$  y  $\varphi_{i,k}$  son variantes pero con cambios suaves en el tiempo. Dado que la señal de la interferencia de la red posee una componente simple, la Ecuación (2.5) se puede simplificar, de modo que la interferencia se puede escribir como

$$z_k = \alpha_k \text{sen}(\omega_k + \varphi_k) + v_k \quad (2.6)$$

donde  $\omega_k = 2\pi f_0 k$  es la frecuencia instantánea con  $f_0$  la frecuencia nominal de la interferencia y  $\alpha_k$  y  $\varphi_k$ , son los valores de la amplitud y la fase a ser estimados por sustracción de la perturbación. La señal de interferencia generada por la línea de potencia eléctrica se puede modelar como una señal sinusoidal no estacionaria, la cual puede contener



cambios de amplitud, fase y frecuencia. La aplicación del filtro de Kalman para realizar la estimación y la eliminación de esta interferencia, requiere la obtención de un modelo discreto que describa su dinámica. El modelo básico ya ha sido previamente utilizado en el seguimiento de señales sinusoidales [81, 22, 77], por lo que no requiere justificación.

Una manera de obtener un modelo operativo de un oscilador sinusoidal se fundamenta en la representación general de un sistema discreto de segundo orden, descrito por las siguientes ecuaciones en espacio de estados:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2r \cos \omega & -r^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (2.7a)$$

$$y_k = [1 \ 0] \mathbf{x}_k + \eta_k \quad (2.7b)$$

donde  $r$  es el radio de los polos en el plano  $\mathcal{X}$  y  $\omega = 2\pi f/f_s$  es la frecuencia de oscilación del sistema. En este caso, si  $r = 1$ , el sistema no tiene atenuación y se obtendrá un oscilador. Este modelo es simple y fácil de obtener; sin embargo, no posee la robustez necesaria para rastrear una señal sinusoidal en ambientes ruidosos. Ahora bien, si se aplica la transformada *delta*, se obtiene un mejor desempeño en el rastreo de señales sinusoidales [98, 116].

### 2.1.4 Transformada delta

Los sistemas en tiempo discreto se pueden describir utilizando el conocido operador de desplazamiento temporal  $q$ , que se define por:

$$q\mathbf{x}_k \triangleq \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.8)$$

Un sistema discreto lineal en espacio de estados se puede describir con este operador como

$$q\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \quad (2.10)$$

El operador de desplazamiento temporal  $q$  definido previamente es usado ampliamente para describir sistemas en tiempo discreto [7]. Sin embargo, este operador tiene la desventaja de que no funciona su homólogo en tiempo continuo  $d/dt$ . De forma intuitiva, se supone que podría haber una mejor correspondencia entre tiempo continuo y discreto, si el operador de desplazamiento temporal fuera reemplazado por un operador de diferencia, el cual hace una mejor aproximación de la derivada. Con esta idea en mente, se define el operador *delta* a través de la diferencia directa [98]:

$$\delta \triangleq \frac{q-1}{T} \quad (2.11)$$

De esta forma, la expresión equivalente de la Ecuación (2.8) es:

$$\delta \mathbf{x}_k = \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T} \quad (2.12)$$

La relación entre  $\delta$  y  $q$  es una función lineal simple y, por lo tanto,  $\delta$  ofrece la misma flexibilidad para modelar sistemas discretos, de la forma como  $q$  lo hace. La elección del operador es función de la aplicación particular. Generalmente  $q$ , lleva a expresiones más simples y enfatiza la naturaleza secuencial de las señales muestreadas [97, 98]. Por otro lado, puesto que  $\delta$  está definida como una diferencia, conduce a modelos similares a aquellos modelados con el operador  $d/dt$ . Por lo tanto, los resultados obtenidos en tiempo continuo, también se pueden emplear con aproximaciones en aplicaciones de tiempo discreto.

Las ecuaciones en espacio de estados se pueden enunciar en forma  $\delta$  como sigue:

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_\delta u_k, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_\delta \mathbf{x}_k. \quad (2.14)$$

En general, una señal se encuentra expresada en forma discreta; para transformarla a forma *delta* se aplica la expresión:

$$q = 1 + T\delta. \quad (2.15)$$

De esta forma, puede establecerse las siguientes equivalencias:

$$\mathbf{A}_\delta = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{I}}{T}, \quad \mathbf{B}_\delta = \frac{\mathbf{B}}{T}, \quad \mathbf{C}_\delta = \mathbf{C}_q \quad (2.16)$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  corresponden a las matrices en el modelo de desplazamiento temporal dadas en las ecuaciones (2.9) y (2.10), así mismo  $\mathbf{I}$ , es la matriz identidad.

Aunque las ecuaciones (2.16) son correctas, no son la mejor metodología para evaluar el modelo *delta*, debido a que se generan problemas asociados con el proceso de conversión del desplazamiento temporal [98]. Un procedimiento más adecuado consiste en la evaluación directa de la transformada *delta*, a partir de las ecuaciones en espacio de estados de tiempo continuo:

$$\mathbf{A}_\delta = \mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{A}_c, \quad \mathbf{B}_\delta = \mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{B}_c, \quad \mathbf{C}_\delta = \mathbf{C}_c \quad (2.17)$$

donde

$$\mathbf{\Lambda}_\delta = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}_c T}{2!} + \frac{\mathbf{A}_c^2 T^2}{3!} + \dots \quad (2.18)$$

El resultado para  $\mathbf{\Lambda}_\delta$  se genera a partir de la consideración de una expansión en series de potencia de la expresión  $\mathbf{\Lambda}_\delta = (e^{\mathbf{A}_c T} - \mathbf{I})/T$ . A partir de las ecuaciones (2.17) y (2.18), se ve que hay una relación cercana entre los modelos en el dominio *delta* y los modelos en el dominio del tiempo continuo, dado que  $\mathbf{\Lambda}_\delta \rightarrow \mathbf{I}$  cuando  $T \rightarrow 0$ .

### 2.1.5 Forma delta del estimador de estado óptimo

La forma del estimador de estado presentada antes, es la forma normalizada con la notación del operador de desplazamiento. Sin embargo, esta forma no es consistente con los resultados correspondientes en tiempo continuo. Usando el operador delta, la descripción

de un sistema discreto será:

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{\delta,k} \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_\delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_{\delta,k} \quad (2.19b)$$

donde

$$\mathbf{v}_\delta = \frac{\mathbf{v}}{T}, \quad \mathbf{w}_\delta = \mathbf{w} \quad (2.20)$$

De aquí se obtiene para las covarianzas:

$$\text{cov}\{\mathbf{v}_\delta\} = \frac{\mathbf{Q}}{T^2} \quad (2.21a)$$

$$\text{cov}\{\mathbf{w}_\delta\} = \mathbf{R} \quad (2.21b)$$

### 2.1.6 El filtro de Kalman con operador *delta*

Teniendo en cuenta la relación entre el operador *delta* y el operador de desplazamiento en las descripciones de espacio de estados mostradas en las ecuaciones (2.19a) a (2.21b), y entonces sustituyéndolas en las ecuaciones (2.4), el filtro de Kalman con el operador *delta* se puede construir en su forma de predicción–corrección de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = (\mathbf{T}\mathbf{A}_\delta + \mathbf{I})\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{v}_{\delta,k-1} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{P}_{\delta,k}^- = (\mathbf{T}\mathbf{A}_\delta + \mathbf{I})\hat{\mathbf{P}}_{\delta,k-1}^+(\mathbf{T}\mathbf{A}_\delta + \mathbf{I})^\top + T^2\mathbf{L}\mathbf{Q}_\delta\mathbf{L}^\top \quad (2.23)$$

$$\mathbf{K}_\delta = \mathbf{P}_{\delta,k}^- \mathbf{C}_\delta^\top (\mathbf{C}_\delta \mathbf{P}_{\delta,k}^- \mathbf{C}_\delta^\top + \mathbf{R}_\delta)^{-1} \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_\delta (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_\delta \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{P}_{\delta,k}^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_\delta \mathbf{C}_\delta) \mathbf{P}_{\delta,k}^- \quad (2.26)$$

Estas ecuaciones proporcionan una forma incremental y de fácil implementación para el filtro de Kalman aplicando el operador *delta* o estimador de estado óptimo.

En el procedimiento de modelado a través de la transformada *delta*, se comienza con un oscilador sinusoidal continuo, el cual se describe con la siguiente ecuación en espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_c \mathbf{x} = [1 \ 0] \mathbf{x} \quad (2.27b)$$

donde  $\omega = 2\pi f$ , corresponde a la frecuencia de oscilación. Aplicando las ecuaciones (2.17) y (2.18), se obtiene:

$$\mathbf{A}_\delta = \mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{A}_c = \mathbf{\Lambda}_\delta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

donde

$$\mathbf{\Lambda}_\delta = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau = \frac{1}{\omega T_s} \begin{bmatrix} \text{sen } \omega T_s & \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega T_s) \\ \omega (\cos \omega T_s - 1) & \text{sen } \omega T_s \end{bmatrix}$$

siendo  $T_s$  el período de muestreo. De aquí se llega a la matriz de transición de estados en el dominio  $\delta$ , la cual está dada por:

$$\mathbf{A}_\delta = \frac{1}{T_s} \begin{bmatrix} \cos \omega T_s - 1 & -\frac{1}{\omega} \text{sen } \omega T_s \\ \omega \text{sen } \omega T_s & \cos \omega T_s - 1 \end{bmatrix}$$

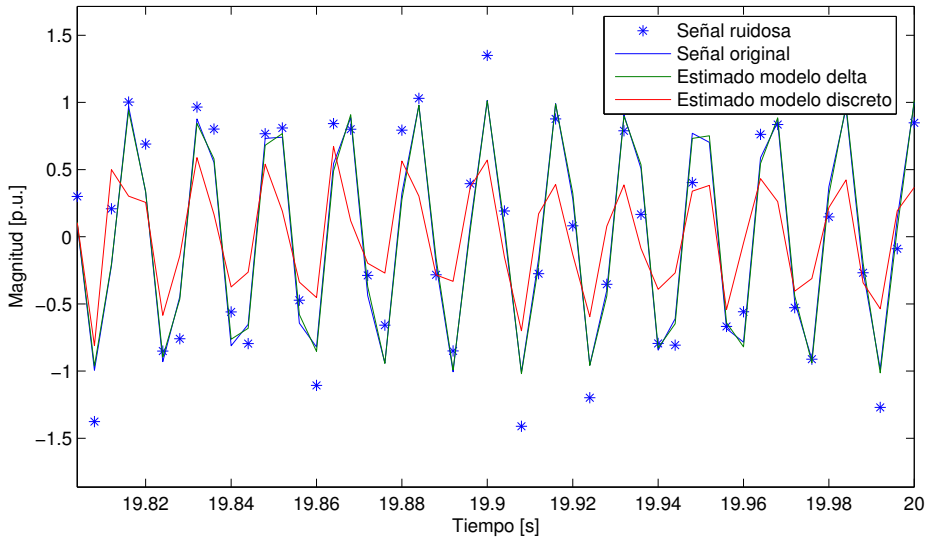
La matriz de medición  $\mathbf{C}_\delta$  es equivalente a la del modelo continuo, por lo que

$$\mathbf{C}_\delta = \mathbf{C}_c = [1 \quad 0]$$

Por lo tanto, el modelo propuesto en las ecuaciones (2.27), se convierte al dominio  $\delta$  de la siguiente manera:

$$\delta \mathbf{x} = \frac{1}{T_s} \begin{bmatrix} \cos \omega T_s - 1 & -\frac{1}{\omega} \text{sen } \omega T_s \\ \omega \text{sen } \omega T_s & \cos \omega T_s - 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{2.29a}$$

$$y = [1 \quad 0] \mathbf{x}. \tag{2.29b}$$



**Figura 2.2** Comparación del desempeño en el dominio del tiempo de los algoritmos de extracción de sinusoides sKF y  $\delta$ KF en una señal mono-componente con ruido blanco aditivo.

El modelo *delta* en las ecuaciones (2.29), se lleva a la forma discreta. Ahora bien, aplicando la Ecuación (2.15) y simplificando, se obtiene:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos \omega T_s & -\text{sen } \omega T_s \\ \text{sen } \omega T_s & \cos \omega T_s \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (2.30a)$$

$$y_k = [1 \quad 0] \mathbf{x}_k. \quad (2.30b)$$

Al aplicar los modelos definidos en las ecuaciones (2.7), (modelo discreto) y en las ecuaciones (2.30) (modelo *delta*), en el algoritmo correspondiente del KF, para la estimación de una senoide de 60 Hz con ruido blanco, se puede ver que el modelo establecido en las ecuaciones (2.30) tiene características superiores al descrito en las ecuaciones (2.7). Esto se puede constatar en la Figura 2.2, donde se encuentra que es posible estimar la senoide con mayor precisión al utilizar el modelo *delta* que al utilizar el modelo discreto, bajo las mismas condiciones. En este experimento se contaminó una señal sinusoidal con ruido blanco de media cero y varianza  $\sigma_v^2 = 0.1$ , obteniéndose con el modelo discreto un índice de correlación  $\rho = 0.83084$ , mientras que con el modelo *delta*,  $\rho = 0.99798$ .

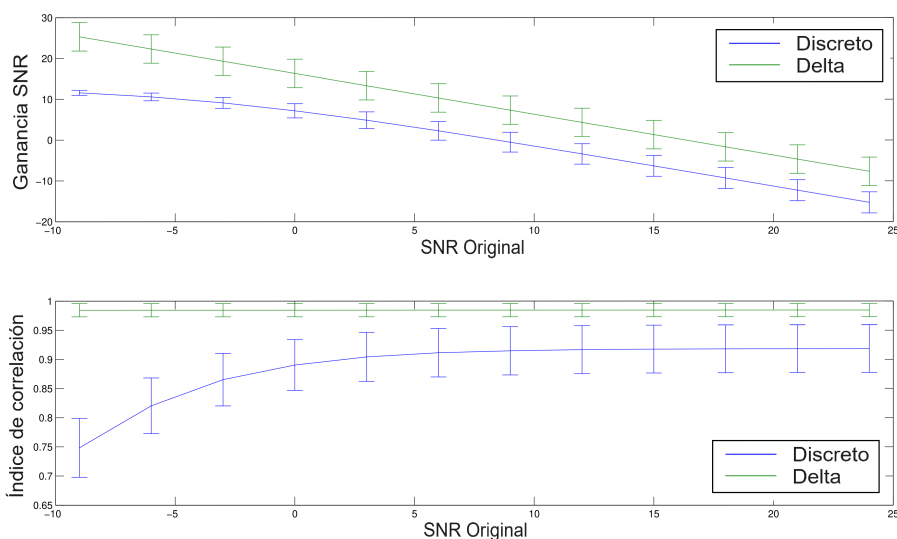


Figura 2.3 Desempeño de sKF vs  $\delta$ KF.

Se realizaron varias pruebas empleando algoritmos convencionales. También se aplicó el filtro simple de Kalman en su modelo discreto (sKF). Con el KF simple y otros métodos de filtrado, surgen problemas numéricos debido a que la señal ECG presenta cambios muy pronunciados durante el complejo QRS, lo cual se puede resumir en las observaciones que se dan a continuación:

- Si el período de muestreo es muy bajo, los cambios suceden a intervalos muy largos por lo cual no se detecta a tiempo el cambio en la señal, generándose un error en la estimación paramétrica (baja resolución) [98].

- Si se incrementa fuertemente el período de muestreo, los polos del filtro se acercan demasiado entre sí formando conglomerados alrededor del punto (1,0), sobre el círculo unitario. Esto produce alta sensibilidad de los coeficientes siendo también crucial para la estabilidad básica del filtro [50, 97].

---

**Algoritmo 1** Reducción de la interferencia de la línea de potencia eléctrica usando  $\delta$ KF.

---

**Definición del sistema:**

Ecuación de transición de estado:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{L}v_k = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\text{sen } \omega \\ \text{sen } \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_k$$

Ecuación de medición

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0] \mathbf{x}_k + \eta_k$$

**Inicialización:** Se define para  $k = 0$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^\top\}$$

**Recursión:** Para  $k = 1, 2, \dots$ , calcular

*Estimados a priori:*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= (\mathbf{T}\mathbf{A}_\delta + \mathbf{I})\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{T}\mathbf{L}v_{\delta,k-1} \\ \mathbf{P}_{\delta,k}^- &= (\mathbf{T}\mathbf{A}_\delta + \mathbf{I})\hat{\mathbf{P}}_{\delta,k-1}^+ (\mathbf{T}\mathbf{A}_\delta + \mathbf{I})^\top + \mathbf{T}^2\mathbf{L}\mathbf{Q}_\delta\mathbf{L}^\top \end{aligned}$$

*Ganancia de Kalman:*

$$\mathbf{K}_\delta = \mathbf{P}_{\delta,k}^- \mathbf{C}_\delta^\top (\mathbf{C}_\delta \mathbf{P}_{\delta,k}^- \mathbf{C}_\delta^\top + \mathbf{R}_\delta)^{-1}$$

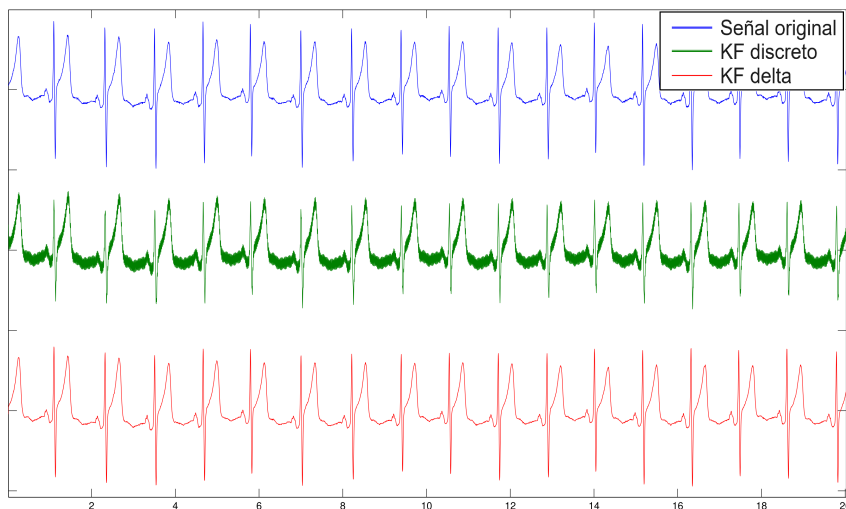
*Estimados a posteriori:*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_\delta (y_k - \mathbf{C}_\delta \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_{\delta,k}^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_\delta \mathbf{C}_\delta) \mathbf{P}_{\delta,k}^- \end{aligned}$$

*Señal ECG limpia:* Se obtiene del estado  $z_{ecg,k} = y_k - z_{1,k}$ .

---

Al aplicar el algoritmo  $\delta$ KF, se obtuvo un desempeño mucho mejor que el ofrecido por los demás métodos estudiados. La respuesta de los dos filtros se puede ver en la Figura 2.3. Esto evidencia que al aplicar el operador *delta*, el proceso de discretización se suaviza y permite obtener una mejor respuesta, por lo que la forma de onda del ECG se acerca mucho más a la forma estructural del ECG considerado, como se puede apreciar en la Figura 2.4.



**Figura 2.4** Respuesta temporal sKF vs  $\delta$ KF.

De acuerdo con lo anterior, el modelo de la interferencia de la Ecuación (2.6) es equivalente a la siguiente representación en espacio de estados [22, 9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{L}v_k = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\text{sen } \omega \\ \text{sen } \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_k \\ y_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0] \mathbf{x}_k + \eta_k \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \quad x_{2,k}]^\top$  es el vector de estado que comprende los términos  $x_{1,k} = \eta_k$  y  $x_{2,k}$  que está en cuadratura con  $x_{1,k}$ ,  $\mathbf{A}$  es la matriz de transición de estados,  $\mathbf{L} = [1 \quad 0]^\top$  es la matriz de acoplo de ruido y  $\mathbf{C}$  es la matriz de medida de los estados. El modelo establecido en las ecuaciones (2.31) junto con el KF, conduce a un esquema básico para el rastreo de la interferencia sinusoidal. En este procedimiento, la señal sinusoidal se estima inicialmente y luego se extrae de la señal ECG. El método se sintetiza en el Algoritmo 1.

### 2.1.7 Modelo simple para la supresión de interferencia de la línea de potencia eléctrica

En la subsección anterior se ha realizado la construcción, con su correspondiente demostración, de una estructura simple y robusta para modelar la interferencia de la red eléctrica basada en la transformada *delta*. Ahora, este modelo será conjugado con una caminata aleatoria para modelar la señal ECG. La señal cardíaca se puede modelar de manera simple utilizando un proceso autorregresivo de primer orden,  $AR(1)$ , que represente las características espectrales de la señal ECG, en la cual las componentes de baja frecuencia tienen mayor influencia. Esta condición hace que el tamaño del espacio de estados conste sólo de tres: dos correspondientes al oscilador y un tercero, correspondiente al modelo  $AR(1)$ , el cual reproduce la dinámica del ECG:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \cos \omega_n T_s & -\text{sen } \omega_n T_s & 0 \\ \text{sen } \omega_n T_s & \cos \omega_n T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\ y_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}_k + \eta_k \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $\mathbf{v}_k = [v_{1,k} \ v_{2,k} \ v_{3,k}]^\top$  corresponde al ruido del proceso, el cual es un ruido blanco gaussiano de media cero y matriz de covarianza definida como

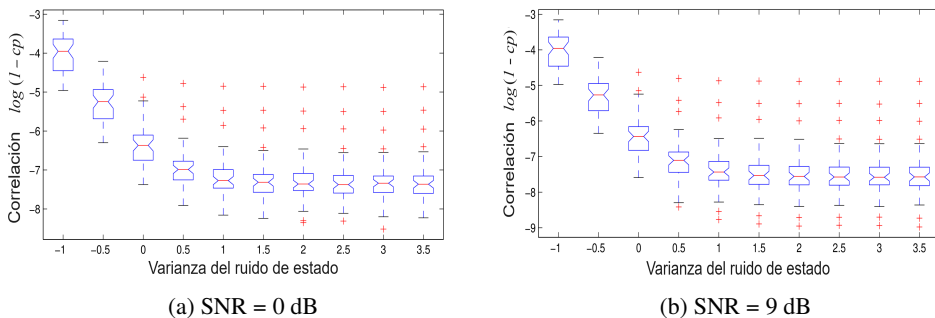
$$\text{cov}(\mathbf{v}_k) \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top\} = \begin{cases} \mathbf{R}_v, & k = l; \\ \mathbf{0}, & k \neq l. \end{cases} \quad (2.33)$$

donde,

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \sigma_{v_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{v_3}^2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

y  $\eta_k$  corresponde al ruido en la medida, definido en la Ecuación (2.1). Las varianzas  $\sigma_{v_1}^2$ ,  $\sigma_{v_2}^2$  y  $\sigma_{v_3}^2$  se ajustan de acuerdo con la relación señal a ruido que se espera de la señal. De forma general, se espera que la potencia dada por la señal ECG sea superior a la potencia de la interferencia de línea de potencia eléctrica, por lo cual en la implementación del algoritmo, se utiliza aproximadamente una relación de 1 : 10 entre  $\sigma_{v_1}^2$  y  $\sigma_{v_3}^2$ . En este caso,  $\sigma_{v_2}^2 = 0$

Ahora bien, si se aplica el KF sobre la señal ECG contaminada con ruido de 60 Hz, empleando el modelo de la Ecuación (2.32). Entonces en el estado  $x_1$ , se obtiene el estimado de la interferencia de línea de potencia, mientras que en el estado  $x_3$ , se obtiene el estimado de la señal ECG libre de ruido.



**Figura 2.5** Índice de correlación vs varianza del ruido de proceso  $\sigma_{v_1}^2$ , para el Algoritmo 2.

La mayor ventaja del modelo está en que es lineal y de pocas dimensiones, esto hace que solo sea necesario aplicar el KF sin necesidad de linealizar, además de tener que realizar una cantidad relativamente baja de cálculos.



---

**Algoritmo 2** Reducción de la interferencia de la línea eléctrica con el filtro de Kalman.

---

**Definición del sistema:**

Ecuación de transición de estado:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \cos \omega_n T_s & -\text{sen } \omega_n T_s & 0 \\ \text{sen } \omega_n T_s & \cos \omega_n T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

Ecuación de medición

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} + \eta_k$$

**Inicialización:** Se define para  $k = 0$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}\{[\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0][\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0]^\top\}$$

**Recursión:** Para  $k = 1, 2, \dots$ , calcular

*Estimados a priori:*

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{R}_v$$

*Ganancia de Kalman:*

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^\top [\mathbf{C}\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^\top + \sigma_\eta^2]^{-1}$$

*Estimados a posteriori:*

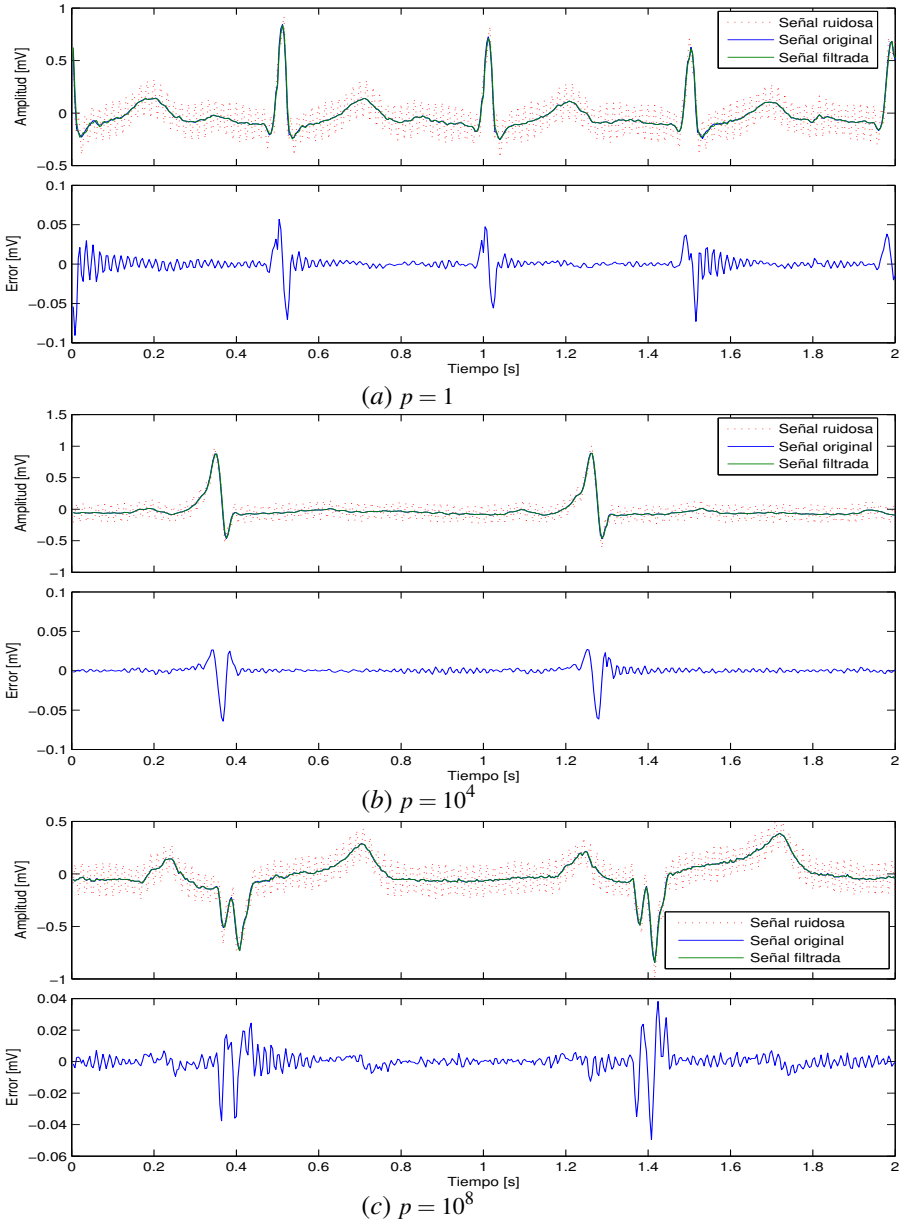
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-]$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^-$$

*Señal ECG limpia:* Se obtiene del estado  $x_{ecg,k} = x_{3,k}$ .

---

En la Figura 2.5, se observa el desempeño del filtro al variar uno de sus parámetros, teniendo la interferencia de línea de potencia con una relación señal a ruido SNR= 0 dB y SNR= 9 dB. Específicamente, se calculó el índice de correlación aplicado a la base de datos QT, entre los registros originales y los filtrados, para distintas varianzas de ruido del proceso  $\sigma_{v_1}^2$ , teniendo en cuenta la relación de 1:100 entre este valor con el de  $\sigma_{v_3}^2$ . Los demás parámetros fueron ajustados de la siguiente forma:  $\sigma_\eta^2 = 2 \times 10^{-4}$ ,  $\mathbf{P}_0 = 10^8 \mathbf{I}$ , suponiendo que la señal tiene bajo ruido de medición y que el estado inicial estimado no es cercano al estado inicial real. Se supone que la interferencia de la red eléctrica es cuasi-estacionaria con variaciones de amplitud y de frecuencia muy lentas y de poca magnitud. Para la medición del índice de correlación no se tiene en cuenta el período transitorio del filtro. Se observa que en cuanto  $\sigma_{v_1}^2$  aumenta, el desempeño del filtro mejora, haciendo que a partir de  $\sigma_{v_1}^2 = 1$ , se tenga una correlación  $\rho > 0.999$ .



**Figura 2.6** Comparación de los segmentos transitorios durante el filtrado de señales ECG con el Algoritmo 2, para diferentes  $\mathbf{P}_0$ .

En las Figuras 2.6 (a)–(c), se realiza la comparación del período transitorio obtenido para diferentes valores de inicialización de la matriz de error de estado  $\mathbf{P}_0$ , con el procedimiento de filtrado dado en el Algoritmo 2. Para todos los casos se hace  $\mathbf{P}_0 = p\mathbf{I}$  donde  $p = 1, 10^4$  y  $10^8$ . Los demás parámetros son  $\sigma_{v_1}^2 = 100$ ,  $\sigma_{v_2}^2 = 0$ ,  $\sigma_{v_3}^2 = 10^4$  y  $\sigma_{\eta}^2 = 2 \times 10^{-4}$ . En la figura se nota que a medida que incrementa  $p$ , el período transitorio se hace más corto.

### 2.1.8 Modelo con rastreo de frecuencia para supresión de la interferencia de la red eléctrica

Se puede modificar el desempeño del filtro desarrollado en la Subsección 2.1.7, haciendo que éste tenga la capacidad de rastrear la frecuencia de la interferencia de la línea de potencia eléctrica. El método propuesto en [81, 22, 77], consiste en agregar un tercer estado al oscilador descrito en la Ecuación (2.30), es decir,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos x_3 & -\text{sen} x_3 & 0 \\ \text{sen} x_3 & \cos x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

$$y_k = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}_k;$$

modelando de esta manera, los cambios en la frecuencia de la red eléctrica como una caminata aleatoria. Por lo tanto, el modelo completo para la remoción de interferencia de la red eléctrica queda como sigue:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} \cos x_{3,k} - x_{2,k} \text{sen} x_{3,k} + v_{1,k} \\ x_{1,k} \text{sen} x_{3,k} + x_{2,k} \cos x_{3,k} \\ x_{3,k} + v_{3,k} \\ x_{ecg,k} + v_{4,k} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$y_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}_k + \eta_k$$

donde  $\mathbf{v}_k = [v_{1,k} \ v_{2,k} \ v_{3,k} \ v_{4,k}]^\top$ , corresponde al ruido del proceso, el cual es un ruido blanco gaussiano de media cero y matriz de covarianza definida como

$$\text{cov}(\mathbf{v}_k) \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^\top\} = \begin{cases} \mathbf{R}_v, & k = l; \\ \mathbf{0}, & k \neq l. \end{cases} \quad (2.36)$$

donde

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \sigma_{v_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{v_3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_4}^2 \end{bmatrix}$$

mientras que  $\eta_k$  representa el ruido en la medida, definido en la Ecuación (2.1). Las varianzas  $\sigma_{v_1}^2$  y  $\sigma_{v_4}^2$  ajustan la forma en que el filtro sigue la interferencia y la señal y, como ya se señaló en la sección anterior, la varianza  $\sigma_{v_4}^2$  debe ser mayor a la varianza  $\sigma_{v_1}^2$ , debido a que se espera que la potencia de la señal ECG sea superior a la de la interferencia de la red eléctrica en la mayoría de los casos. Por su parte, la varianza  $\sigma_{v_3}^2$  se relaciona con las variaciones de la frecuencia de la interferencia y se ajusta a un valor pequeño para evitar la pérdida de sintonía del filtro a la frecuencia de la red. Como en el caso anterior,  $\sigma_{v_2}^2 = 0$ . Dada la forma no lineal de la Ecuación (2.35), para reducir la interferencia de la red eléctrica con este modelo, es necesario utilizar el EKF o alguna forma del KF de

punto sigma. Para el uso de este modelo con el EKF, primero se debe linealizar; es decir,

$$F_k = \frac{\partial f(x_k, v_k)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \cos x_{3,k} & -\text{sen} x_{3,k} & -x_{1,k} \text{sen} x_{3,k} - x_{2,k} \cos x_{3,k} & 0 \\ \text{sen} x_{3,k} & \cos x_{3,k} & x_{1,k} \cos x_{3,k} - x_{2,k} \sin x_{3,k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

El procedimiento correspondiente a este modelo se resume en el Algoritmo 3.

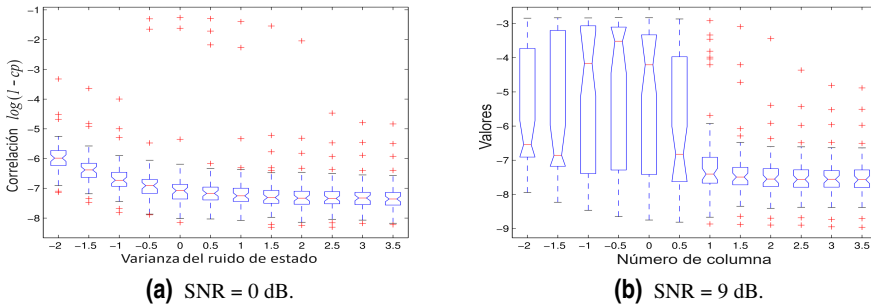


Figura 2.7 Índice de correlación vs varianza del ruido de proceso  $\sigma_{v_1}^2$ , para el Algoritmo 3.

En las figuras 2.7 y 2.8, se muestran los resultados de realizar un experimento de sintonización de parámetros del filtro, similar al mostrado en la Subsección 2.1.7 bajo las mismas condiciones de interferencia; es decir, interferencia de línea de potencia cuya amplitud y frecuencia poseen variaciones muy lentas y de poca magnitud. Se realizó el experimento para señales ECG con una SNR= 0 dB y 9 dB. En la Figura 2.7, se puede observar la relación entre la varianza del ruido del oscilador  $\sigma_{v_1}^2$  y el índice de correlación,  $\rho$  de la señal filtrada. Los demás parámetros del filtro tienen los siguientes valores:  $\sigma_{v_2}^2 = 0$ ,

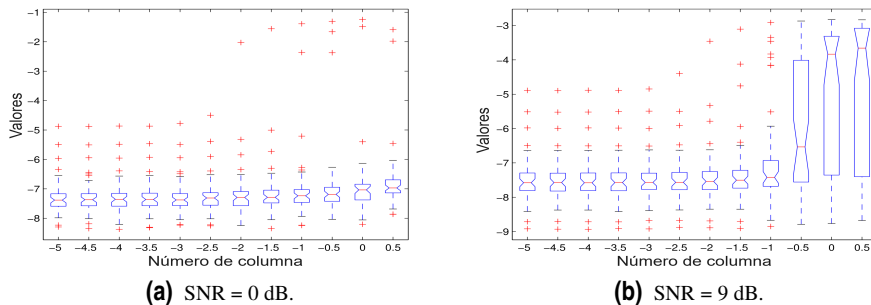


Figura 2.8 Índice de correlación vs varianza del ruido de proceso  $\sigma_{v_3}^2$ , para el Algoritmo 3.

**Algoritmo 3** Reducción de la interferencia de la red eléctrica mediante EKF.

**Definición del sistema:**

Ecuación de transición de estado:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} \cos x_{3,k} - x_{2,k} \operatorname{sen} x_{3,k} + v_{1,k} \\ x_{1,k} \operatorname{sen} x_{3,k} + x_{2,k} \cos x_{3,k} \\ x_{3,k} + v_{3,k} \\ x_{ecg,k} + v_{4,k} \end{bmatrix}$$

Ecuación de medición

$$y_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}_k + \eta_k$$

Linealización de la ecuación de transición de estado

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \cos x_{3,k} & -\operatorname{sen} x_{3,k} & -x_{1,k} \operatorname{sen} x_{3,k} - x_{2,k} \cos x_{3,k} & 0 \\ \operatorname{sen} x_{3,k} & \cos x_{3,k} & x_{1,k} \cos x_{3,k} - x_{2,k} \sin x_{3,k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Inicialización:** Se define para  $k = 0$ 

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ 2\pi f_o / f_s \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}\{[\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0][\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0]^\top\}$$

**Recursión:** Para  $k = 1, 2, \dots$ , calcular

*Estimados a priori:*

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, 0, k)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{R}_v$$

*Ganancia de Kalman:*

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^\top [\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^\top + \sigma_\eta^2]^{-1}$$

*Estimados a posteriori:*

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [y_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-]$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^-$$

*Señal ECG limpia:* Se obtiene del estado  $x_{ecg,k} = x_{4,k}$ .

$\sigma_{v_3}^2 = 10^{-2}$ ,  $\sigma_{v_4}^2 = 100 \times \sigma_{v_1}^2$ ,  $\sigma_\eta^2 = 2 \times 10^{-4}$  y  $\mathbf{P}_0 = 10^8 \mathbf{I}$ . Por su parte, en la Figura 2.8, se observa la relación entre la varianza del ruido de la frecuencia  $\sigma_{v_3}^2$  y el índice de correlación  $\rho$  de la señal filtrada. Los demás parámetros del filtro tienen los siguientes valores:  $\sigma_{v_1}^2 = 100$ ,  $\sigma_{v_2}^2 = 0$ ,  $\sigma_{v_3}^2 = 10^{-2}$ ,  $\sigma_\eta^2 = 2 \times 10^{-4}$  y  $\mathbf{P}_0 = 10^8 \mathbf{I}$ . De las figuras se

observa que la varianza del ruido del oscilador,  $\sigma_{v_1}^2$ , tiene la misma tendencia que en el caso anterior. Por su parte, la varianza del ruido de la frecuencia  $\sigma_{v_3}^2$  genera mejores estimados a medida que disminuye. Se observa en ambas gráficas que a medida que se incrementa la relación señal a ruido, el desempeño del estimador disminuye; esto se debe a que el filtro tiene una señal más débil para estimar.

El método descrito en el Algoritmo 3, representa una forma directa de estimación, la cual genera estimados *MAP* (*máximo a posteriori*) simultáneos del estado y de los parámetros del sistema, al definir el modelo en espacio de estados como en la Ecuación (2.35), donde el estado y el parámetro son concatenados en el estado extendido

$$\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \quad x_{2,k} \quad \omega_k \quad x_{ecg,k}]^\top.$$

Al ejecutar el KF, con este vector de estado se obtiene un algoritmo de estimación secuencial. Dado el alto nivel de acople entre los estados y los parámetros, generado por este tipo de formulación, se pueden tener problemas de convergencia en la ejecución del algoritmo [135, 103, 56].

### 2.1.9 Modelo de rastreo de la interferencia de la red eléctrica con el filtro de Kalman dual

Otro método para realizar el rastreo de la interferencia de la línea de potencia eléctrica consiste en la aplicación del algoritmo de estimación dual con el filtro de Kalman (DKF), el cual consiste en la estimación del estado con los parámetros fijos y la posterior estimación de los parámetros con el estado fijo. En este caso, se tienen dos representaciones, la primera dada por la evolución del estado, descrita en la Ecuación (2.32) y la segunda, la evolución de la frecuencia de la interferencia tomada como un parámetro que varía de la siguiente forma:

$$\omega_{k+1} = \omega_k + v_k \quad (2.37)$$

donde  $v_k$  es ruido blanco gaussiano con media cero y varianza definida como

$$\text{var}(v) = \mathbb{E}\{v_k v_l^\top\} = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ \sigma_v^2, & k = l. \end{cases} \quad (2.38)$$

Este parámetro se encuentra relacionado con las observaciones a través de

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \eta_k \quad (2.39)$$

donde  $\eta_k$  es una secuencia de ruido blanco gaussiano igual a la definida en la Ecuación (2.1), la cual corresponde al error de predicción. En este caso, la ecuación de transición de estado es similar a la dada en la Ecuación (2.32), donde se reemplaza  $\omega_k T_s$  por el estimado en el instante  $k$ ,  $\hat{\omega}_k$ . Un aspecto importante en el DKF, es la forma como se calcula el vector  $\mathbf{C}_\omega$ , el cual acopla las correcciones a cada uno de los parámetros del filtro. Éste se calcula como sigue [103, 56]:

$$\mathbf{C}_\omega \triangleq -\frac{\partial (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-)}{\partial \omega} = -\mathbf{C} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \omega} \quad (2.40)$$

Se debe notar que el cálculo de esta derivada no es directo ya que, dada la estructura recurrente del sistema,  $\hat{\mathbf{x}}_k$  es función de  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  y ambos son función de  $\omega$ . Por lo tanto, el vector  $\mathbf{C}_\omega$  debe ser calculado usando derivadas recurrentes, con una rutina similar al aprendizaje recursivo en tiempo real, usado en redes neuronales. Tomando la derivada de las ecuaciones del filtro de señal, resulta el siguiente sistema de ecuaciones recursivas:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-}{\partial \hat{\omega}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_k \hat{\mathbf{x}}_k}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}{\partial \hat{\omega}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_k \hat{\mathbf{x}}_k}{\partial \hat{\omega}} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-}{\partial \hat{\omega}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x,k} \mathbf{C}) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\omega}} + \frac{\partial \mathbf{K}_{x,k}}{\partial \hat{\omega}} (y_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.42)$$

Si se supone que la ganancia de Kalman definida como  $\mathbf{K}_{x,k}$ , es independiente del vector de parámetros  $\omega$ , entonces se puede despreciar el último término en la Ecuación (2.42). El segundo término de la Ecuación (2.41), se calcula como sigue:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_k \hat{\mathbf{x}}_k}{\partial \hat{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} [\hat{x}_{1,k} \cos \omega_k - \hat{x}_{2,k} \sen \omega_k] \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} [\hat{x}_{1,k} \sen \omega_k + \hat{x}_{2,k} \cos \omega_k] \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} [\hat{x}_{ecg}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_{1,k} \sen \omega_k - \hat{x}_{2,k} \cos \omega_k \\ \hat{x}_{1,k} \cos \omega_k - \hat{x}_{2,k} \sen \omega_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así, se obtienen las siguientes ecuaciones para calcular  $\mathbf{C}_\omega$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\omega,k} &= \mathbf{C} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\omega}} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\omega}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x,k} \mathbf{C}) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-}{\partial \hat{\omega}} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-}{\partial \hat{\omega}} &= \begin{bmatrix} \cos \omega_k & -\sen \omega_k & 0 \\ \sen \omega_k & \cos \omega_k & 0 \\ 0 & 0 & \hat{x}_{ecg} \end{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\omega}} + \begin{bmatrix} -\hat{x}_{1,k} \sen \omega_k - \hat{x}_{2,k} \cos \omega_k \\ \hat{x}_{1,k} \cos \omega_k - \hat{x}_{2,k} \sen \omega_k \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se ha obtenido un modelo que permite reaccionar efectivamente a los cambios que pueda presentar la interferencia de línea de potencia, además aún conserva la linealidad, pudiendo así ser utilizado el filtro de Kalman simple, con la única diferencia que deben ser realizados unos cálculos extras para las derivadas recursivas. En el Algoritmo 4 se sintetiza el procedimiento de filtrado aplicando este método, del cual se hacen las siguientes anotaciones:

- Las ecuaciones correspondientes al estimador de parámetros son de dimensión 1 y por lo tanto, las operaciones vectoriales en su mayoría, se reducen a operaciones entre escalares. Esto, debido a que se está estimando un parámetro escalar.
- El estimador de estado conserva su estructura lineal, reduciendo de esta forma el número de operaciones y generando estimados no aproximados.
- El desacople de la estimación de los parámetros permite que éstos sean calculados con precisión más alta, debido a la introducción de las derivadas recursivas, las cuales ofrecen mayor información al filtro acerca de como está variando la frecuencia de la señal de la línea de potencia eléctrica.

**Algoritmo 4** Reducción de la interferencia de la línea de potencia eléctrica mediante DKF.**Definición del sistema:**

Ecuación de transición de estado:

$$\begin{bmatrix} \cos \omega_k T_s & -\text{sen } \omega_k T_s & 0 \\ \text{sen } \omega_k T_s & \cos \omega_k T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

Ecuación de medición

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}_k + \eta_k$$

**Inicialización:** Se define para  $k = 0$ 

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_0 &= \mathbb{E}\{\omega_0\} = 2\pi f_o / f_s & \mathbf{P}_{\omega,0} &= \mathbb{E}\{(\omega_0 - \hat{\omega}_0)^2\} \\ \hat{\mathbf{x}}_0 &= \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ y_0 \end{bmatrix} & \mathbf{P}_{\mathbf{x},0} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^\top\} \end{aligned}$$

**Recursión:** Para  $k = 1, 2, \dots$ ,

Calcular ecuaciones para predicción de parámetros

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_k^- &= \omega_{k-1} \\ \mathbf{P}_{\omega,k}^- &= \mathbf{P}_{\omega,k-1} + \sigma_v = \mathbf{P}_{\omega,k-1} / \lambda \end{aligned}$$

Ecuaciones de predicción de estado

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathbf{x},k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{R}_v \end{aligned}$$

Ecuaciones de corrección del estado estimado

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{x},k} &= \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- \mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- \mathbf{C}^\top + \sigma_\eta^2)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_{\mathbf{x},k} (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x},k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\mathbf{x},k} \mathbf{C}) \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- \end{aligned}$$

Ecuaciones de corrección de los parámetros estimados

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\omega,k} &= \mathbf{P}_{\omega,k}^- \mathbf{C}_{\omega,k}^\top (\mathbf{C}_{\omega,k} \mathbf{P}_{\omega,k}^- \mathbf{C}_{\omega,k}^\top + \sigma_\eta^2)^{-1} \\ \omega_k &= \omega_k^- + \mathbf{K}_{\omega,k} (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_{\omega,k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\omega,k} \mathbf{C}_{\omega,k}) \mathbf{P}_{\omega,k}^- \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}{\partial \hat{\omega}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\mathbf{x},k} \mathbf{C}) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\omega}} + \frac{\partial \mathbf{K}_{\mathbf{x},k}}{\partial \hat{\omega}} (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{C}_{\omega,k+1} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{1,k}}{\partial \hat{\omega}} \cos \omega_k - \hat{\mathbf{x}}_{1,k} \text{sen } \omega_k - \hat{\mathbf{x}}_{2,k} \cos \omega_k \end{aligned}$$



### 2.1.10 Modelo ECG adaptativo

El modelo para la señal ECG que ha sido usado hasta ahora es bastante simple y no tiene en cuenta las diferentes variaciones que pueda tener la señal, lo cual puede ser fuente de distorsiones en la señal ECG filtrada. Una forma de mejorar este modelo consiste en el uso de un proceso autorregresivo para modelar la señal. Sin embargo, no es posible obtener un conjunto de parámetros exactos para modelar la señal ECG y, de hecho, la variabilidad que presenta esta señal no permite que se obtenga un modelo fijo. A continuación se propone modelar la señal ECG,  $x_{ecg,k}$ , como un proceso autorregresivo variante en el tiempo de orden  $p$ , TVAR( $p$ ), el cual cumple con la siguiente ecuación de diferencias [129]:

$$x_{ecg,k} = - \sum_{n=1}^p a_{n,k} x_{ecg,k-n} + v_{ecg,k} \quad (2.43)$$

donde  $a_{1,k}, \dots, a_{p,k}$  son los parámetros del modelo en el instante  $k$ , que serán estimados con el DKF y  $v_{ecg,k}$ , es un ruido blanco gaussiano con media cero y varianza  $\text{var}(v_{ecg}) = \sigma_{v_{ecg}}^2 \delta_k$ , la cual introduce la aleatoriedad al proceso. Para efectos de hacer la notación más compacta, se establecen las siguientes definiciones:

$$\mathbf{a}_k \triangleq [-a_{1,k} \quad -a_{2,k} \quad \dots \quad -a_{p,k}]^\top$$

$$\mathbf{x}_{ecg,k} \triangleq [x_{ecg,k-1} \quad x_{ecg,k-2} \quad \dots \quad x_{ecg,k-p}]^\top$$

con lo cual se obtiene la siguiente representación de un modelo TVAR( $p$ ):

$$x_k = \mathbf{a}_k^\top \mathbf{x}_{ecg,k} + v_{ecg,k} \quad (2.44)$$

Así mismo, se considera que los parámetros del proceso TVAR( $p$ ), están sujetos a variaciones aleatorias de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.45)$$

donde  $\mathbf{v}_k$  corresponde a un proceso aleatorio gaussiano con media cero y covarianza

$$\text{cov}(\mathbf{v}_k) = \mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^\top\} = \begin{cases} \mathbf{R}_v, & k = l; \\ \mathbf{0}, & k \neq l. \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_v = \sigma_v^2 \mathbf{I}$$

lo cual hace que cada uno de los pesos dados por  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , varíe de forma independiente respecto de los demás. Una representación en espacio de estados para este modelo está dada por

$$\mathbf{x}_{ecg,k+1} = \mathbf{A}_{ecg} \mathbf{x}_{ecg,k} + \mathbf{v}_{ecg,k}$$

$$y_{ecg,k} = \mathbf{C}_{ecg} \mathbf{x}_{ecg,k} \quad (2.46)$$

donde

$$\mathbf{A}_{ecg} = \begin{bmatrix} -a_{1,k} & -a_{2,k} & \cdots & -a_{p-1,k} & -a_{p,k} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k^\top \\ \mathbf{I}_{(p-1) \times p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{ecg} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

$$\mathbf{x}_{ecg,k} = [x_{ecg,k} \ x_{ecg,k-1} \ \cdots \ x_{ecg,k-p}]^\top$$

$$\mathbf{v}_{ecg,k} = [v_{ecg,k} \ 0 \ \cdots \ 0]^\top$$

Para utilizar este modelo en la remoción de la interferencia de línea de potencia eléctrica, se prosigue con el modelo de la Ecuación (2.32) y se reconstruye para incluir el modelo TVAR del ECG:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\text{sen } \omega & 0 \\ \text{sen } \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{ecg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \mathbf{x}_{ecg,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ \mathbf{v}_{ecg,k} \end{bmatrix}$$

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \ 0 \ \mathbf{C}_{ecg}]\mathbf{x}_k + \eta_k \quad (2.47)$$

donde  $\mathbf{v}_k$ , corresponde al ruido del proceso, el cual es un ruido blanco gaussiano con media cero y matriz de covarianza definida como:

$$\text{cov}(\mathbf{v}_k) \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^\top\} = \begin{cases} \mathbf{R}_v, & k = l; \\ \mathbf{0}, & k \neq l. \end{cases} \quad (2.48)$$

donde

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \sigma_{v_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{v_{ecg}}^2 \end{bmatrix}$$

Así mismo,  $\eta_k$  corresponde al ruido en la medida, definido en la Ecuación (2.1). Las varianzas  $\sigma_{v_1}^2$ ,  $\sigma_{v_2}^2$  y  $\sigma_{v_{ecg}}^2$  son ajustadas de acuerdo con la relación señal a ruido esperada de la señal. Se espera que la potencia que presenta la señal ECG sea superior a la potencia generada por la interferencia de la red eléctrica. Por lo cual, en la implementación del algoritmo se utiliza aproximadamente una relación de 1 : 100 entre  $\sigma_{v_1}^2$  y  $\sigma_{v_{ecg}}^2$ . Las ecuaciones (2.45) y (2.47), constituyen la representación de los pesos en espacio de estados de la evolución, tanto de la interferencia como del ECG, con los cuales se define el proceso autorregresivo para el modelado de la señal ECG y la señal interferente. Éstos son utilizados para el proceso de estimación dual que permitirá separar la señal ECG de la interferencia sinusoidal, mediante el conjunto de ecuaciones que se muestra en el Algoritmo 5.

---

**Algoritmo 5** Reducción de la interferencia de la red eléctrica mediante DKF adaptativo.

---

**Definición del sistema:**

Ecuación de transición de estado:

$$\begin{bmatrix} \cos \omega_n T_s & -\text{sen } \omega_n T_s & 0 \\ \text{sen } \omega_n T_s & \cos \omega_n T_s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{ecg} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

Ecuación de medición

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0 \quad \mathbf{C}_{ecg}] \mathbf{x}_k + \eta_k$$

**Inicialización:**

Se define para  $k = 0$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_0 &= \mathbb{E}\{\mathbf{a}\} & \mathbf{P}_{\mathbf{a},0} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{a}_0 - \hat{\mathbf{a}}_0)(\mathbf{a}_0 - \hat{\mathbf{a}}_0)^\top\} \\ \hat{\mathbf{x}}_0 &= \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\} & \mathbf{P}_{\mathbf{x},0} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^\top\} \end{aligned}$$

**Recursión:**

Para  $k = 1, 2, \dots$ , calcular

*Ecuaciones de predicción de los parámetros*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_k^- &= \hat{\mathbf{a}}_{k-1} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- &= \mathbf{P}_{\mathbf{a},k-1} + \mathbf{R}_v \end{aligned}$$

*Ecuaciones de predicción de estados*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- &= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{\mathbf{x},k-1} \mathbf{A}_{k-1}^\top + \mathbf{R}_v \end{aligned}$$

*Ecuaciones de corrección de los estados estimados*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{x},k} &= \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- \mathbf{C}^\top \left( \mathbf{C} \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- \mathbf{C}^\top + \sigma_\eta^2 \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_{\mathbf{x},k} (y_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x},k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\mathbf{x},k} \mathbf{C}) \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- \end{aligned}$$

*Ecuaciones de corrección de los parámetros estimados*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{a},k} &= \mathbf{P}_{\mathbf{a},k}^- \mathbf{C}_{\mathbf{a},k}^\top \left( \mathbf{C}_{\mathbf{a},k} \mathbf{P}_{\mathbf{a},k}^- \mathbf{C}_{\mathbf{a},k}^\top + \sigma_\eta^2 \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{a}}_k &= \hat{\mathbf{a}}_k^- + \mathbf{K}_{\mathbf{a},k} (y_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{a},k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\mathbf{a},k} \mathbf{C}_{\mathbf{a},k}) \mathbf{P}_{\mathbf{a},k}^- \end{aligned}$$


---

El cálculo del vector  $\mathbf{C}_a$ , que acopla las correcciones a cada uno de los parámetros del filtro, se realiza como sigue [103, 56]:

$$\mathbf{C}_a \triangleq -\frac{\partial (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-)}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{C} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \mathbf{a}} \quad (2.49)$$

El cálculo de esta derivada no es directo ya que, dada la estructura recurrente del sistema,  $\hat{\mathbf{x}}_k$  es función de  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  y ambos son función de  $\mathbf{a}$ . Por lo tanto, el vector  $\mathbf{C}_a$  se calcula usando derivadas recurrentes. Tomando la derivada de las ecuaciones del filtro de señal, resulta el siguiente sistema de ecuaciones recursivas:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_k \hat{\mathbf{x}}_k}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k}{\partial \hat{\mathbf{a}}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_k \hat{\mathbf{x}}_k}{\partial \hat{\mathbf{a}}} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x,k} \mathbf{C}) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\mathbf{a}}} + \frac{\partial \mathbf{K}_{x,k}}{\partial \hat{\mathbf{a}}} (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.51)$$

El último término en la Ecuación (2.51) puede ser despreciado si se asume que la ganancia de Kalman  $\mathbf{K}_{x,k}$  es independiente del vector de parámetros  $\mathbf{a}$ . Aunque esto simplifica fuertemente al algoritmo, el valor exacto de  $\frac{\partial \mathbf{K}_{x,k}}{\partial \hat{\mathbf{a}}}$  puede ser calculado [103]. Así, se obtienen las ecuaciones siguientes para el cálculo de  $\mathbf{C}_a$ :

$$\mathbf{C}_a = \mathbf{C} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \mathbf{a}} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x,k} \mathbf{C}) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\mathbf{a}}} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = \hat{\mathbf{A}}_k \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_k^-}{\partial \hat{\mathbf{a}}} + \hat{\mathbf{X}}_k \quad (2.54)$$

donde

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ecg}^\top & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{(p-1) \times (p-2)} & \mathbf{0}_{(p-1) \times 2} \end{bmatrix}.$$

### 2.1.11 Modelo ECG con filtro Kalman *unscented*

Con el filtro extendido de Kalman las ecuaciones de evolución se linealizan alrededor del valor actual esperado del vector de estado. Para mejorar el comportamiento del EKF y evitar inestabilidad, que podría conducirlo a divergencia de los valores estimados o sesgar los resultados [95], se expande el vector de estado con el fin de incluir también los componentes de los estados. Para el caso de la señal ECG, tales componentes corresponden al estimado de la señal y a las interferencias. Puesto que estas señales tienen componentes no lineales, se deben establecer condiciones para garantizar la precisión y convergencia de los valores estimados con el modelo EKF; sin embargo, éstos han sido explorados solo parcialmente [115]. Contribuciones recientes en el campo de la identificación de parámetros han mostrado que, debido a la linealización de la evolución de los estados, el EKF no presenta optimalidad [39], [94], [59], [139], [41]. Más aún, si hay degradación por el esfuerzo realizado dentro del sistema debido al incremento en la variación de algún

parámetro, los resultados empeoran. Como alternativa, esquemas de linealización más sofisticados, como el adoptado por los modelos DEKF [136], pueden conducir a un mejor desempeño; sin embargo, el costo computacional adicional puede hacer prohibido su uso para aplicaciones de identificación en línea [94]. Para incrementar la precisión del método, se ha propuesto una familia de filtros punto-sigma [131]. Estos filtros generan una población de los llamados puntos sigma sobre la base de la media y la varianza actualizadas del vector de estado y les permite propagarse en el tiempo de acuerdo a la dinámica verdadera del sistema no lineal. Entonces, toda la información acumulada en la evolución punto-sigma es recogida a través de un paso ponderado. El UKF pertenece a esta clase de filtros no lineales y cuenta con dos ventajas principales con respecto al EKF: (i) no se realiza ninguna fase de linealización, entonces no se requiere calcular el gradiente de la evolución de las ecuaciones de estado, (ii) en una expansión en serie de las estadísticas del vector de estado, logra un tercer orden de precisión, mientras que el EKF es a lo más de primer orden de precisión. El filtro de Kalman *unscented* (UKF), para la supresión de la interferencia de la línea de potencia eléctrica, desarrollado en esta Tesis, se puede observar en el Algoritmo 6.

### 2.1.12 Análisis de los modelos del KF aplicados a la supresión de la interferencia de la red eléctrica

Para el caso del KF, inicialmente, se modeló la señal ECG con el operador delta. Una vez que se tuvo el modelo definido se aplicaron los diferentes métodos de filtrado estudiados, lográndose resultados con alto nivel de desempeño. Es conveniente aclarar que el operador  $\delta$  se ha aplicado tanto al filtro de Kalman simple, como a las demás versiones de filtrado Kalman; por lo cual, el procedimiento aplicado al primer caso, también lo es para los demás. Se realizaron cinco versiones de filtrado Kalman, a saber: Filtro de Kalman simple ( $\delta$ KF), filtro dual rastreador de frecuencia, EKF, DKF y UKF. Así mismo, se modeló la señal ECG empleando la serie temporal AR(1), la cual permitió realizar un filtro con alto nivel de desempeño; sin embargo, se siguió investigando la posibilidad de emplear un AR( $p$ ), con  $p > 1$ , pero que además cumpliera el requisito de eficiencia computacional requerido. Luego de varias pruebas se llegó al valor  $p = 3$ .

Se realizó un análisis de la mejora de la SNR desde  $-6$  dB hasta 45 dB en el nivel de la señal de entrada, obteniéndose los resultados mostrados en la Figura 2.9. Cuando la SNR de entrada es baja, la mayor ganancia la presenta el algoritmo  $\delta$ KF; v.gr., cuando la SNR de entrada es de  $-6$  dB, la ganancia en la SNR se aproxima a 30 dB. La menor ganancia para este nivel de entrada la produce el algoritmo del DKF, con un valor cercano a 3 dB. Los demás algoritmos basados en KF tienen para este nivel una ganancia cercana a los 20 dB. Si se incrementa la SNR de entrada, los filtros tienden a reducir su ganancia; sin embargo, el DKF se incrementa suavemente hasta llegar a unos 8 dB cuando la SNR de entrada se incrementa hasta 15 dB, de allí en adelante empieza a decrecer monótonamente. El algoritmo UKF se mantiene constante, hasta cuando el nivel de la SNR de entrada está por los 15 dB, de ahí en adelante, decrece suavemente. El algoritmo  $\delta$ KF, decrece monótonamente a medida que el nivel de la SNR de entrada se incrementa; por esta razón al llegar a 12 dB, en el nivel de la señal de entrada, la curva de ganancia del algoritmo  $\delta$ KF se corta con la curva UKF. Los algoritmos UKF y  $\delta$ KF, son los que presentan un

**Algoritmo 6** Reducción de la interferencia de la red eléctrica con UKF.

Ecuación de transición de estado:

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} \cos x_{3,k} - x_{2,k} \operatorname{sen} x_{3,k} + v_{1,k} \\ x_{1,k} \operatorname{sen} x_{3,k} + x_{2,k} \cos x_{3,k} \\ x_{3,k} + v_{3,k} \\ x_{ecg,k} + v_{4,k} \end{bmatrix}$$

Ecuación de medición

$$y_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \eta_k = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}_k + \eta_k$$

Inicialización:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\alpha,0} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_{\alpha,0}\}; \quad \mathbf{P}_{\alpha,0} = \mathbb{E}\{(\mathbf{x}_{\alpha,0} - \hat{\mathbf{x}}_{\alpha,0})(\mathbf{x}_{\alpha,0} - \hat{\mathbf{x}}_{\alpha,0})^\top\}$$

Cálculo de los pesos de los puntos sigma:

$$w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{M_\alpha + \lambda}; \quad w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{M_\alpha + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta); \quad w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2(M_\alpha + \lambda)} \quad \forall i = 1, \dots, 2M_\alpha.$$

Para  $k \in \{1 \dots \infty\}$ :

Calcular los puntos sigma:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0^{(\alpha)} &= \hat{\mathbf{x}}^{(\alpha)}(k-1); \\ \mathcal{X}_i^{(\alpha)} &= \hat{\mathbf{x}}^{(\alpha)}(k-1) + \left( \sqrt{(M_\alpha + \lambda) \mathbf{P}_\alpha} \right)_i \quad i = 1, \dots, M_\alpha; \\ \mathcal{X}_i^{(\alpha)} &= \hat{\mathbf{x}}^{(\alpha)}(k-1) - \left( \sqrt{(M_\alpha + \lambda) \mathbf{P}_\alpha} \right)_i \quad i = M_\alpha + 1, \dots, 2M_\alpha. \end{aligned}$$

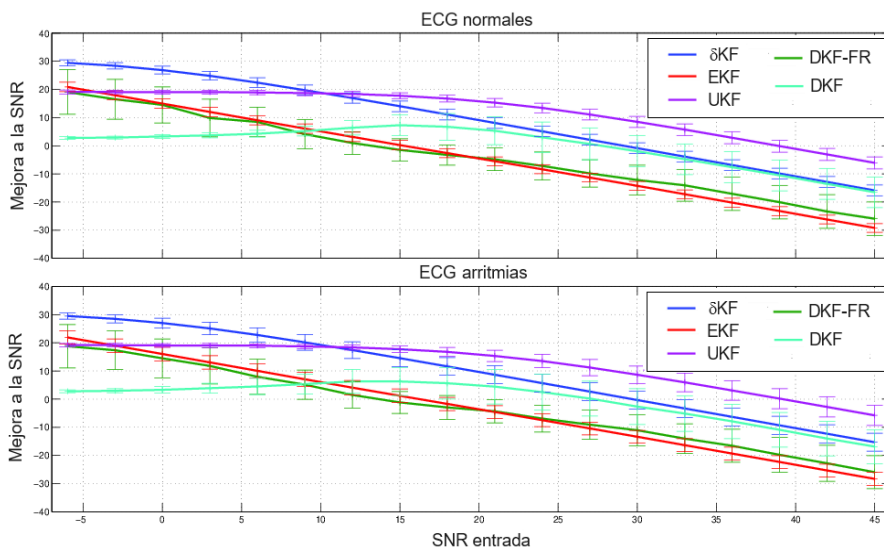
Las ecuaciones de predicción del KF son:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_k^{(x)} &= \mathbf{f}(\mathcal{X}^{(x)}(k-1), \mathcal{X}^{(v)}(k-1), \mathbf{u}_k, \mathbf{a}); \quad \hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2M_\alpha} w_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k}^{(x)}; \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- &= \sum_{i=0}^{2M_\alpha} w_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k}^{(x)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\mathcal{X}_{i,k}^{(x)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-]^\top \\ \mathcal{Y}_k &= \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{(x)}, \mathcal{X}^{(\eta)}(k-1), \mathbf{a}); \quad \hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2M_\alpha} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_{i,k} \end{aligned}$$

y las ecuaciones de corrección son:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{y,k} &= \sum_{i=0}^{2M_\alpha} w_i^{(c)} [\mathcal{Y}_{i,k} - \hat{\mathbf{y}}_k^-][\mathcal{Y}_{i,k} - \hat{\mathbf{y}}_k^-]^\top \\ \mathbf{P}_{xy,k} &= \sum_{i=0}^{2M_\alpha} w_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k}^{(x)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\mathcal{Y}_{i,k} - \hat{\mathbf{y}}_k^-]^\top \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{xy,k} \mathbf{P}_{y,k}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_{\mathbf{x},k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{y,k} \mathbf{K}_k^\top, \quad \text{donde} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^{(\alpha)} = [\mathbf{x}^\top \mathbf{v}^\top \boldsymbol{\eta}^\top]^\top; \quad \mathcal{X}^{(\alpha)} = [(\mathcal{X}^{(x)})^\top (\mathcal{X}^{(v)})^\top (\mathcal{X}^{(\eta)})^\top]^\top$$



**Figura 2.9** Mejora a la SNR para filtros de Kalman.

mejor desempeño, con respecto a los demás algoritmos de KF estudiados.

Los algoritmos, en general, presentan baja dispersión. Su comportamiento es similar para los casos de pacientes sanos o para aquellos que tienen algún tipo de arritmia, como se puede observar en la figura ya mencionada.

De todas maneras se demuestra que el desempeño de estos filtros con respecto a la SNR de entrada, en particular el  $\delta$ KF y el UKF, es superior al desempeño de los filtros convencionales estudiados.

Para el PRD la situación es similar con respecto a los algoritmos considerados, como se aprecia en la Figura 2.10; es decir, para bajos niveles de la SNR de entrada, el algoritmo correspondiente al  $\delta$ KF, presenta la mejor respuesta, v. gr., para un SNR de  $-6$  dB, la magnitud del PRD es del orden de 0.1. A este mismo nivel, la más alta ocurre para el algoritmo DKF, con un valor alrededor de 1.5. A partir de una SNR en la entrada de 10 dB, algunos algoritmos tienden a estabilizarse en un valor constante; sin embargo, los algoritmos UKF y DKF, continúan reduciendo su PRD, hasta tener un valor mínimo cercano a 0.01, para el UKF y  $\approx 0.5$ , para el DKF, respectivamente. También, a partir de  $\approx 10$  dB de la SNR de entrada, el algoritmo UKF presenta el PRD más bajo entre los filtros de Kalman analizados. Los algoritmos, filtro dual rastreador de frecuencia y el DKF, presentan la mayor dispersión. El algoritmo EKF, presenta la menor dispersión. El algoritmo  $\delta$ KF, se estabiliza en 0.035 a partir de una SNR de entrada de 10 dB.

Todos los algoritmos tienen un desempeño adecuado para los diferentes tipos de pacientes, tanto para individuos sanos como para aquellos que presentan alguna forma de arritmia.

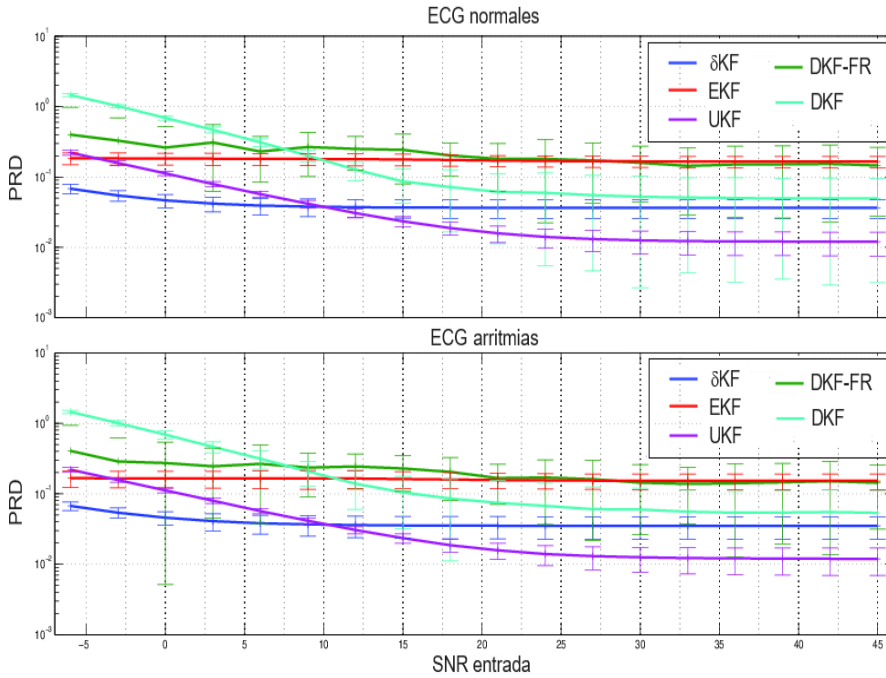


Figura 2.10 Raíz de la diferencia porcentual para filtros de Kalman.

## 2.2 Resultados

### 2.2.1 Configuración del filtro para la interferencia de la red eléctrica

Se puede modelar la interferencia de la línea de potencia eléctrica como una combinación de sinusoides con variaciones tanto de amplitud como de frecuencia. Además de un patrón de comportamiento cuasi-estacionario de la interferencia, el modelo correspondiente se logra mediante el uso de un conjunto de funciones sinusoidales base, variantes en el tiempo:

$$\{\phi_{i,k} = a_{i,k} \sin(\omega_{i,k} + \varphi_{i,k}) : \forall k \in \mathbb{N}\}$$

donde  $k$  es el índice de tiempo e  $i = 1, \dots, M$  es el índice de la senoide.

Sin embargo, se pueden considerar dos escenarios donde se efectúa una variación temporal en la amplitud y en la frecuencia de las sinusoides. En primer lugar, cuando la interferencia se comporta de acuerdo a los estándares de la red eléctrica, donde las variaciones de amplitud y de frecuencia son muy limitadas. En segundo lugar, en ambientes quirúrgicos o escenarios de alto ruido, cuando la interferencia se comporta de una manera poco estable, lo que significa que la amplitud de la senoide puede mostrar grandes variaciones. En [22] se ha demostrado que el KF es capaz de seguir correctamente la



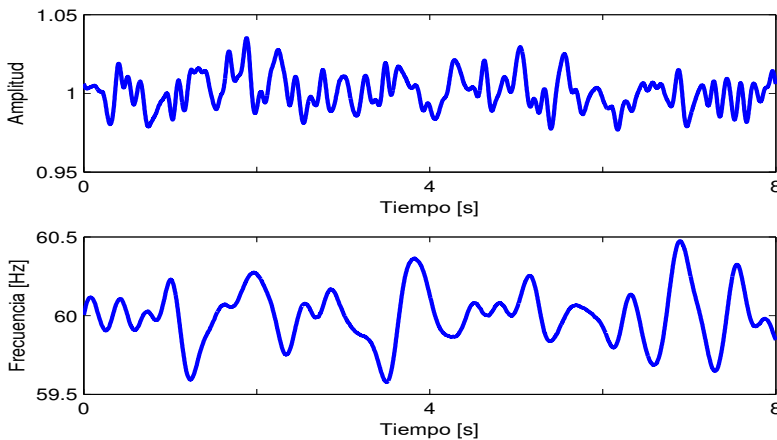
sinusoide en los dos escenarios descritos anteriormente. Cada componente se define como

$$\alpha_k = \alpha_0 + \delta_{\alpha,k}$$

$$\omega_k = \omega_0 + \delta_{\omega,k} = 2\pi f_0 + \delta_{\omega,k}$$

donde  $\delta_{\alpha,k}$  y  $\delta_{\omega,k}$  son procesos gaussianos coloreados, cuyo ancho de banda se ajusta para que la interferencia de línea de potencia permanezca estacionaria durante intervalos largos de tiempo.

La frecuencia central de la interferencia sinusoidal es  $f_0 = 60$  Hz. Por su parte, la fase inicial  $\phi_0$  se modela como una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . La dispersión de  $\delta_{\alpha,k}$  y  $\delta_{\omega,k}$  se ajusta de tal forma que se cumpla con condiciones normales de funcionamiento de la red eléctrica [65]. Por lo tanto, en el caso de  $\delta_{\omega,k}$  se acepta un valor máximo de desviación de  $\pm 1$  Hz cumpliendo con las normas de calidad de los sistemas de energía. En el caso de  $\delta_{\alpha,k}$  se acepta una desviación de hasta del 10% del valor pico.



**Figura 2.11a** Amplitud y frecuencia instantáneas.

Las características típicas de la interferencia cuasi-sinusoidal obtenidas con el modelo dado en la Ecuación (2.6), se muestran en las figuras 2.11a y 2.11b. En la primera se observan las variaciones típicas de la amplitud y de la frecuencia de la señal cuasi-sinusoidal. Mientras que en la segunda se muestra la gráfica de la transformada de Fourier de una señal típica, dividida en respuesta de amplitud y en respuesta de fase. Se nota que el ancho de banda de la señal es estrecho y además considera sólo las variaciones alrededor de la frecuencia central. Las variaciones de amplitud y frecuencia son bastante suaves también.

La puesta a punto del filtro para la red eléctrica se realiza en varias etapas, como se describe a continuación.

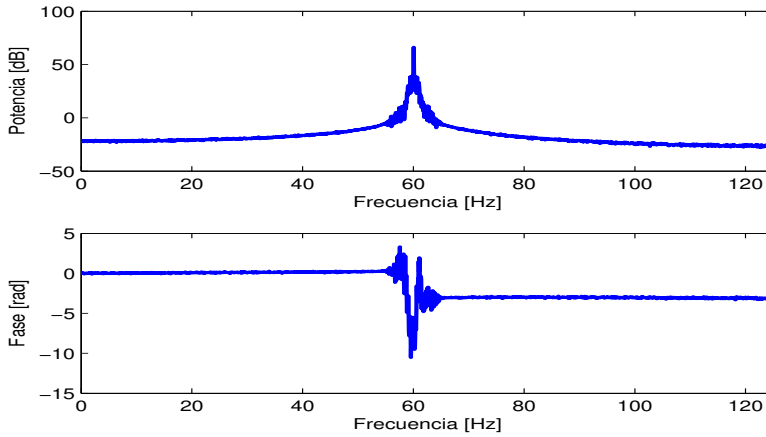


Figura 2.11b Transformada de Fourier.

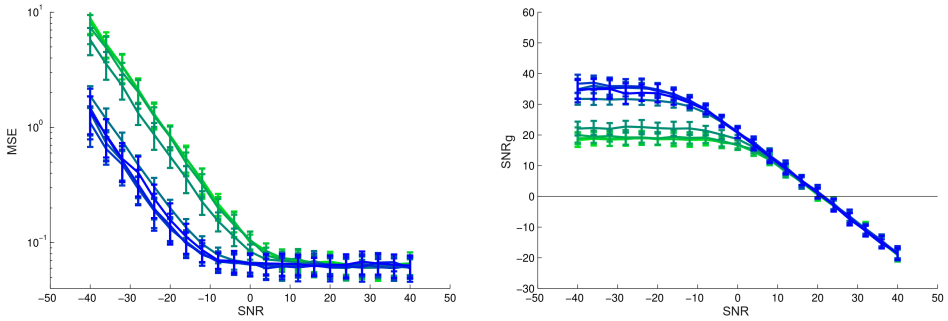
**Configuración inicial de los parámetros del filtro**

Se hace una suposición inicial sobre el funcionamiento del filtro usando una configuración básica, donde la interferencia de la red de energía se extrae del ruido de fondo. El desempeño

Tabla 2.1 Parámetros de la prueba.

	Parámetro	Valor
Señal	Frecuencia de muestreo ( $f_s$ )	250 Hz
	Ancho de banda de la señal	$0.5f_s/2$
	Frecuencia de la interferencia	$[0.1, 0.2, \dots, 0.9]f_s/2$
	SNR de la señal de entrada	$[-40, -38, \dots, 40]$ dB
Filtro	Varianza del ruido del proceso ( $\sigma_v^2$ )	$10^{-6}$
	Varianza del ruido de medición ( $\sigma_s^2$ )	1
	Varianza inicial del error de estimación $\sigma_p^2$	$10^6$

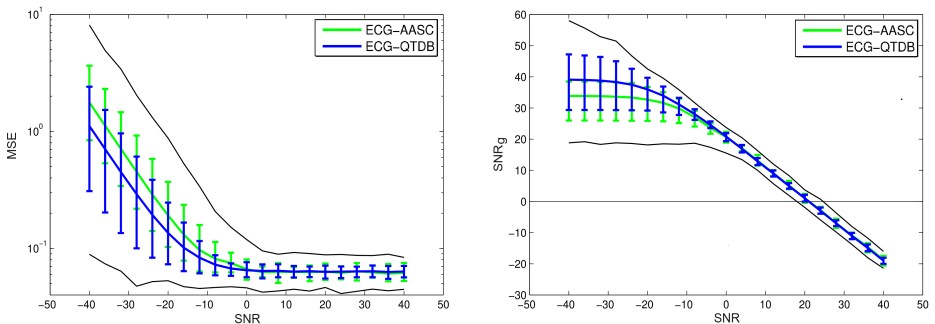
se evalúa variando la frecuencia nominal de la interferencia. En este caso se tomó el rango  $[0.1, 0.2, \dots, 0.9]f_s/2$ . Considerando que el espectro de la señal ECG se concentra principalmente alrededor de los rangos de baja frecuencia, entonces, el ruido de fondo se sintetiza como ruido coloreado, filtrando el ruido blanco gaussiano con un filtro de Butterworth de sexto orden pasa bajas. El ruido de la red eléctrica se extrae del ruido de fondo utilizando diferentes valores de SNR en el rango de  $-40$  dB a  $40$  dB. Los parámetros de esta prueba se pueden observar en la Tabla 2.1. Los resultados de la misma, en la Figura 2.12. Cada curva considera la ganancia del filtro cuando se varía la frecuencia central de la señal interferente considerada. El color azul más oscuro, se relaciona con la frecuencia nominal más baja, mientras que el color verde suave, se refiere a la frecuencia central más alta de la señal interferente cuasi-sinusoidal. Se observa que el filtro también trabaja adecuadamente cuando la señal interferente está localizada dentro de los rangos de frecuencia del ruido de fondo con la concentración más grande de energía; es decir, por debajo de la frecuencia de corte del filtro conformado, o sea,  $0.5f_s/2$ .



**Figura 2.12** Curvas de desempeño de estimación para diferentes frecuencias centrales de la interferencia.

### Ajuste de los parámetros del KF

Para el caso específico de las señales provenientes de las bases de datos AASC y QT, la ganancia del filtro se calcula utilizando los parámetros resultantes de la prueba anterior, la frecuencia nominal de la línea de potencia eléctrica ( $f_0 = 60$  Hz) y el intervalo de SNR mostrado en la Tabla 2.1.

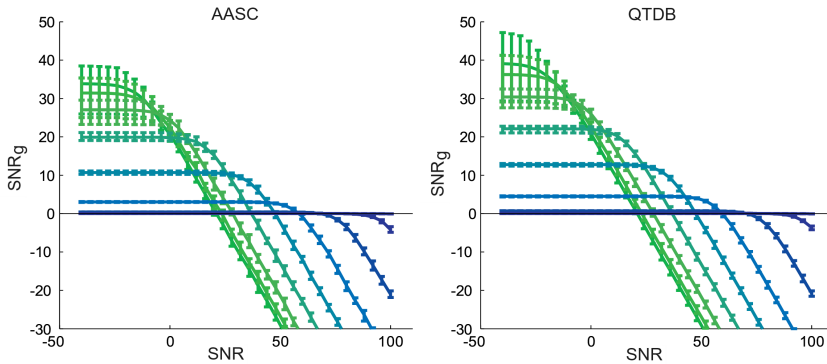


**Figura 2.13** Curvas de desempeño del filtro para la eliminación de interferencia de línea de potencia en la señal ECG,  $\sigma^2 = 10^{-6}$ .

En la Figura 2.13, se muestran los resultados. El desempeño del filtro se da para ambas bases de datos, es decir, AASC (verde) y QT (azul). Además, las líneas delgadas muestran el rango de desempeño obtenido en la prueba anterior. De acuerdo con el desempeño observado en la Figura 2.13, los resultados alcanzados para cada base de datos tienen diferentes valores de la media y la dispersión. Esto se debe a la gran variedad de formas de onda en las bases de datos y también a diferentes concentraciones del espectro de las señales ECG, como puede ser confirmado por la prueba de la Figura 2.12. La SNR obtenida para la base de datos QT supera en 5 dB al desempeño de la base de datos AASC; sin embargo, también muestra mayor dispersión, la cual es causada por una mayor variedad de formas de onda y condiciones, además posee menor frecuencia de muestreo que la base de datos QT.

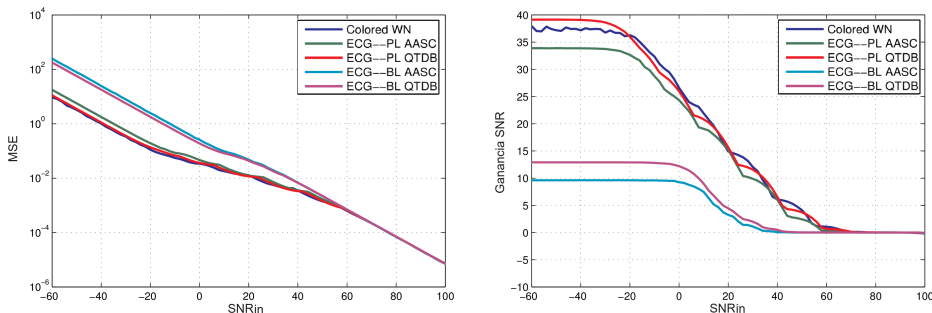
**Ajuste óptimo de los parámetros del filtro**

Puede alcanzarse un mejor desempeño si se efectúa un mayor ajuste a los parámetros del KF, adaptando sus valores de modo que se considere la potencia de la interferencia. Se da una mayor atención en el ajuste de los valores de la varianza  $\sigma_v^2$  en el rango  $[10^{-5}, 10^{-4}, \dots, 10^3]$ . Con respecto a los demás parámetros  $\sigma_s^2$  y  $\sigma_p^2$ , sus valores se mantienen fijos, a saber,  $\sigma_s^2 = 1$  y  $\sigma_p^2 \gg 1$ , como se recomienda en [56]. Los resultados de la prueba se muestran



**Figura 2.14** Curvas de desempeño del filtro para remoción de la interferencia de línea de potencia en ECG.

en la Figura 2.14, donde se evalúa la ganancia del filtro para diferentes valores de  $\sigma_v^2$ . La curva verde clara se relaciona con el valor más alto de  $\sigma_v^2 = 10^3$ , mientras que la línea azul oscura pertenece al valor más bajo de  $\sigma_v^2 = 10^{-5}$ . Cuando los valores del parámetro  $\sigma_v^2$  decrecen, la máxima ganancia SNR se reduce, decayendo rápidamente. De acuerdo a esto, se encuentra que para cada SNR de la señal de entrada hay valores óptimos de  $\sigma_v^2$ , los cuales maximizan el desempeño del filtro. En la Figura 2.15, se ven los resultados obtenidos



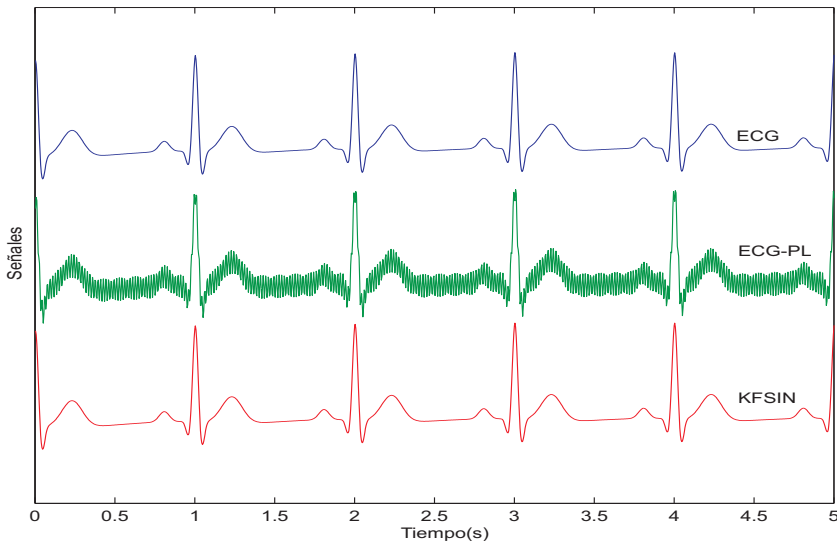
**Figura 2.15** Curvas óptimas del filtro para remoción de interferencias en la señal ECG.

utilizando los mejores valores paramétricos para cada SNR. Se puede observar que el filtro proporciona alta ganancia para SNR bajo, al mismo tiempo, no agrega distorsión cuando

se tienen altos valores de SNR. Mirando las curvas MSE, también se encuentra que para todos los valores SNR considerados, hay un decrecimiento monótono del valor mínimo de MSE y, por lo tanto, puede inferirse el alto desempeño del filtro.

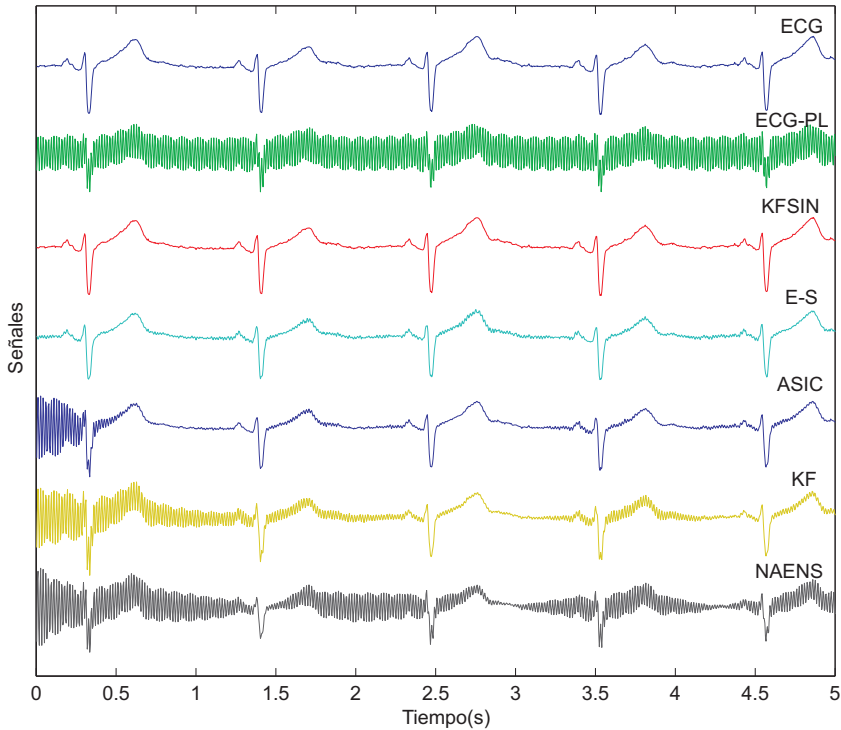
### 2.2.2 Análisis comparativo

Para el caso de supresión de la interferencia de línea de potencia, considerando su variabilidad en amplitud, frecuencia y fase, se logró un seguimiento preciso de la señal ECG, lo cual condujo a una discriminación clara entre la señal ECG y la perturbación. El enfoque propuesto para la reducción de la interferencia de la red eléctrica, es la aplicación del filtro de Kalman con modelo sinusoidal (KFSIN). Este método aplica la metodología desarrollada en la Sección 2.1. En la Figura 2.16 se ilustra la respuesta para el caso de una SNR de  $-15$  dB. Se puede ver que el filtro actúa de manera que la señal no sufre distorsión alguna respecto de la original; sin embargo, la perturbación es completamente eliminada.



**Figura 2.16** Resultado para eliminación de la interferencia de la línea de potencia con el algoritmo propuesto. SNR =  $-15$  dB.

El procedimiento se contrastó con otros métodos del estado del arte, como se puede observar en la Figura 2.17, en la cual se graficó la respuesta temporal de varios algoritmos del estado del arte, para un ECG típico y para una SNR dada. Las metodologías a contrastar ya fueron estudiadas en la Sección 2.1, donde se desarrollaron los algoritmos correspondientes. En la Tabla 2.2, se muestra el resultado para la media y la desviación estándar de la ganancia SNR ( $\mu \pm \sigma$ ) de cada uno de los filtros considerados, para los valores de SNR  $[-6, 0, 6, 12, 30, 100]$  dB. Los parámetros de la Figura 2.2 y la Tabla 2.2 se han ajustado siguiendo los lineamientos establecidos en los trabajos [14] y [15].



**Figura 2.17** Comparación de filtros para la eliminación de la interferencia de la red eléctrica. SNR = 6 dB.

El enfoque propuesto, para el caso de la eliminación de la interferencia de la línea eléctrica, realiza un rastreo muy preciso de dicha interferencia. Esto conduce a una clara discriminación entre la señal ECG y la perturbación. La comparación del desempeño del resultado final del algoritmo propuesto con los otros enfoques considerados [14], se puede observar en la Figura 2.17 y en la Tabla 2.2, donde se aprecia la notable mejora dada por el enfoque propuesto. No obstante, con base al resultado obtenido en cada uno de los métodos de filtrado considerados, se pueden hacer varias observaciones:

- El algoritmo E–S presenta una alta ganancia SNR y dispersión muy pequeña para señales con una relación señal a ruido baja. Esto indica que el filtro tiene un alto desempeño y alta estabilidad ante diferentes clases de formas de onda. Sin embargo, el desempeño cae rápidamente cuando se trata de señales con alta SNR. Esto también se refleja en la respuesta temporal del filtro donde se observan oscilaciones en la zona del complejo QRS.
- El algoritmo ASIC presenta alta ganancia SNR pero alta variabilidad para los diferentes registros, esto indica un pobre desempeño para algunas formas de onda. También introduce artefactos sobre señales de alta SNR. La respuesta temporal

**Tabla 2.2** Comparación de la ganancia de SNR con diferentes filtros para la interferencia de la red eléctrica [15, Ch. 3].

Filtro [dB]	ASIC [dB]	NAENS [dB]	E-S [dB]
-6	23.74 ± 2.81	11.13 ± 2.83	26.47 ± 0.39
0	19.50 ± 2.91	8.87 ± 4.71	23.63 ± 0.73
6	15.55 ± 2.96	8.07 ± 5.24	19.01 ± 0.97
12	12.80 ± 2.67	6.51 ± 5.06	13.44 ± 1.05
30	0.00 ± 1.30	3.77 ± 4.21	-4.41 ± 1.08
100	-18.35 ± 0.84	-8.31 ± 4.51	-24.41 ± 1.08
Filtro [dB]	Wavelet [dB]	KFDis [dB]	<b>KFSIN [dB]</b>
-6	27.82 ± 4.63	10.60 ± 0.92	<b>24.89 ± 0.75</b>
0	21.92 ± 4.67	7.19 ± 1.71	<b>22.96 ± 0.68</b>
6	16.22 ± 4.55	2.27 ± 2.26	<b>21.51 ± 0.70</b>
12	11.13 ± 3.74	-3.38 ± 2.49	<b>20.85 ± 0.84</b>
30	-0.01 ± 3.30	-21.26 ± 2.59	<b>17.63 ± 2.35</b>
100	-16.59 ± 5.09	-41.26 ± 2.59	<b>2.88 ± 4.47</b>

muestra fuertes transitorios al comienzo del procedimiento junto con oscilaciones en el segmento ST.

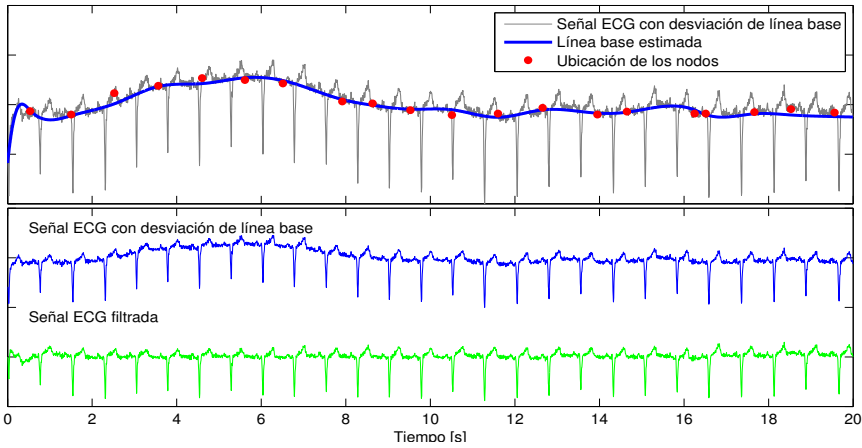
- El filtro NAENS tiene bajo desempeño comparado con los otros procedimientos considerados, dada su baja ganancia SNR y alta variabilidad para la mayoría de los registros. La respuesta temporal muestra que el filtro es inestable, haciendo que la interferencia de la red eléctrica aparezca y desaparezca en algunos intervalos y segmentos de la señal.
- El algoritmo propuesto, KFSIN, presenta una reducción apropiada de la interferencia, sin adición de artefactos a la señal ECG. Esta metodología presenta una ganancia SNR positiva con un desempeño estable para diferentes valores de la SNR. La respuesta temporal indica que el filtro no produce distorsión en la señal ECG.

## 2.3 Corrección de la desviación de línea base

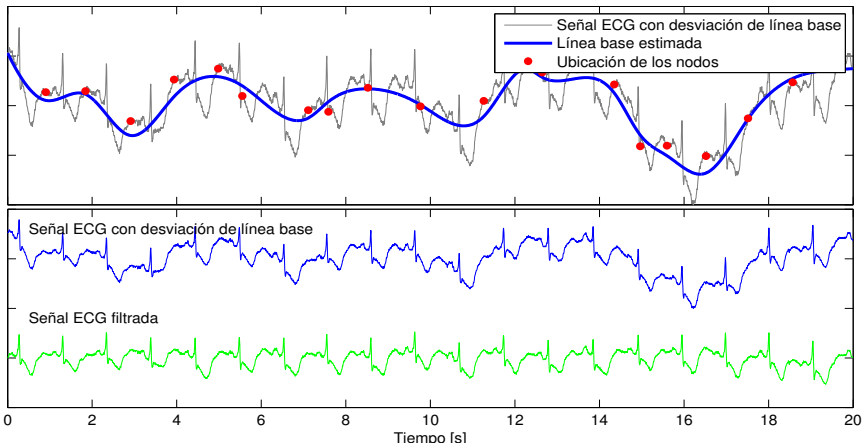
Utilizando la misma metodología para el ajuste del filtro, se realizan las etapas que se plantean a continuación.

### 2.3.1 Ajuste inicial de los parámetros del filtro

Las figuras 2.18a y 2.18b muestran el desempeño del algoritmo de reducción de la desviación de la línea base. Para esta prueba se seleccionaron dos señales ECG con artefactos en la línea base, provenientes de la base de datos QT: SEÑAL QTDB01, Figura 2.18a y SEÑAL QTDB82, Figura 2.18b. Por inspección, se obtienen los siguientes parámetros del filtro: varianza del ruido del proceso,  $\sigma_v^2 = 10^{-6}$ , distancia entre nodos,  $d = 200$ , orden de la base del B-spline,  $\kappa = 4$ . Los diagramas superiores en las figuras 2.18a y 2.18b, muestran la señal original donde se puede apreciar la desviación de la línea base, la localización de



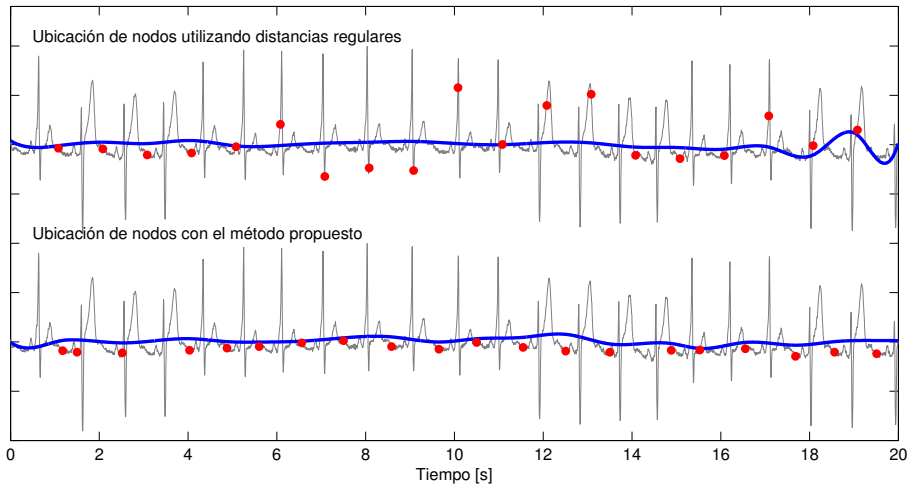
**Figura 2.18a** Base de datos QT. SEÑAL QTDB01.



**Figura 2.18b** Base de datos QT. SEÑAL QTDB82.

los nodos —obtenida con la metodología propuesta— y la línea base estimada. Posteriormente, la línea base estimada se remueve de la señal original, lográndose la señal ECG limpia, que se muestra en la gráfica inferior, que corresponde a cada señal seleccionada. De estos resultados se puede notar que la desviación de la línea base desaparece después del filtrado y no se percibe ninguna distorsión en la señal ECG. En la Figura 2.19, se hace una comparación entre la localización regular y la modal de los nodos. Es notable que el algoritmo propuesto escoge la localización de los nodos cerca a los segmentos isoelectrónicos de la señal ECG, diferente a la localización regular de los nodos, la cual a menudo selecciona puntos en las ondas ST o el complejo QRS. En el caso particular de este registro ECG, se encuentra una diferencia importante entre la línea base estimada durante los últimos dos segundos. También, para otros registros la localización del nodo





**Figura 2.19** Comparación entre métodos de localización de nodos.

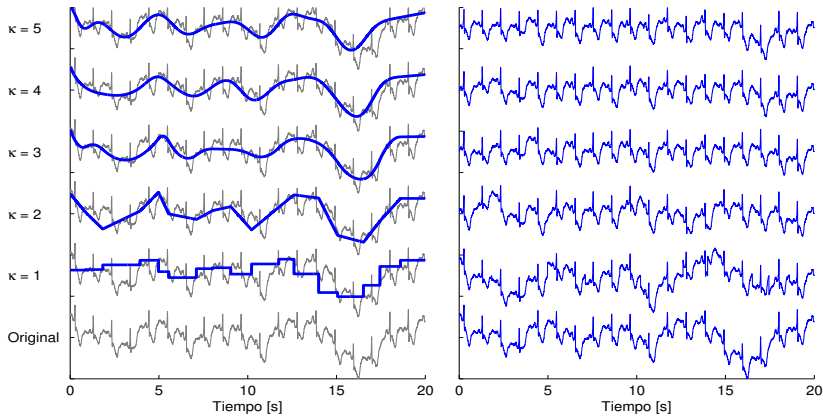
estimado puede diferenciarse mejor, lo cual puede ocasionar la introducción de artefactos en la señal ECG.

### 2.3.2 Ajuste de los parámetros del filtro

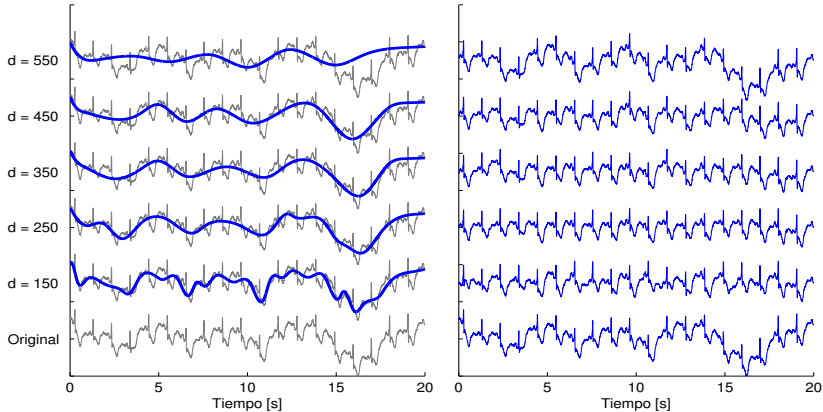
Se analizan dos aspectos del método del filtrado propuesto, primero, la influencia del orden de las funciones base (*B-spline*) y segundo la influencia de la distancia entre nodos  $d$ . A diferencia del caso del filtro para la reducción de la interferencia de la red eléctrica, se descubrió de forma empírica que el filtro para la corrección de la línea base no es sensible a los cambios de la varianza del ruido del proceso  $\sigma_v^2$ , de manera que este parámetro no se evalúa. La Figura 2.20a, muestra la diferencia de los resultados de la estimación utilizando diferentes órdenes de las funciones base *B-spline* ( $\kappa = 1, 2, \dots, 5$ ). En la gráfica de la izquierda se visualiza la línea base estimada para diversos órdenes de la función base *B-spline*, mientras que en la gráfica de la derecha se muestra la señal ECG resultante tras la sustracción de la línea base estimada.

Cuando el orden de la *B-spline* se incrementa, la línea base estimada será más suave; así, la señal filtrada resultante también mejora en calidad. Para este caso se encontró que el valor adecuado para el orden del *B-spline* es  $\kappa = 4$ .

La Figura 2.20b, evidencia la diferencia en la respuesta de estimación utilizando diferentes distancias entre nodos ( $d = 150, \dots, 550$ ). Para valores pequeños de  $d$ , la línea base es muy inestable y en lugar de reducir la desviación de la línea base, incrementa el nivel de los artefactos. Más aún, para grandes valores de  $d$ , varios componentes de los artefactos presentes en la línea base no son eliminados. Utilizando un valor de  $d$  de alrededor de 250, proporciona buenos resultados en general; asimismo, podría obtenerse precisión mejorada si esta cantidad fuera escogida de acuerdo a la frecuencia cardíaca del paciente.



**Figura 2.20a** Comparación visual cuando se varía el orden base del B-spline.



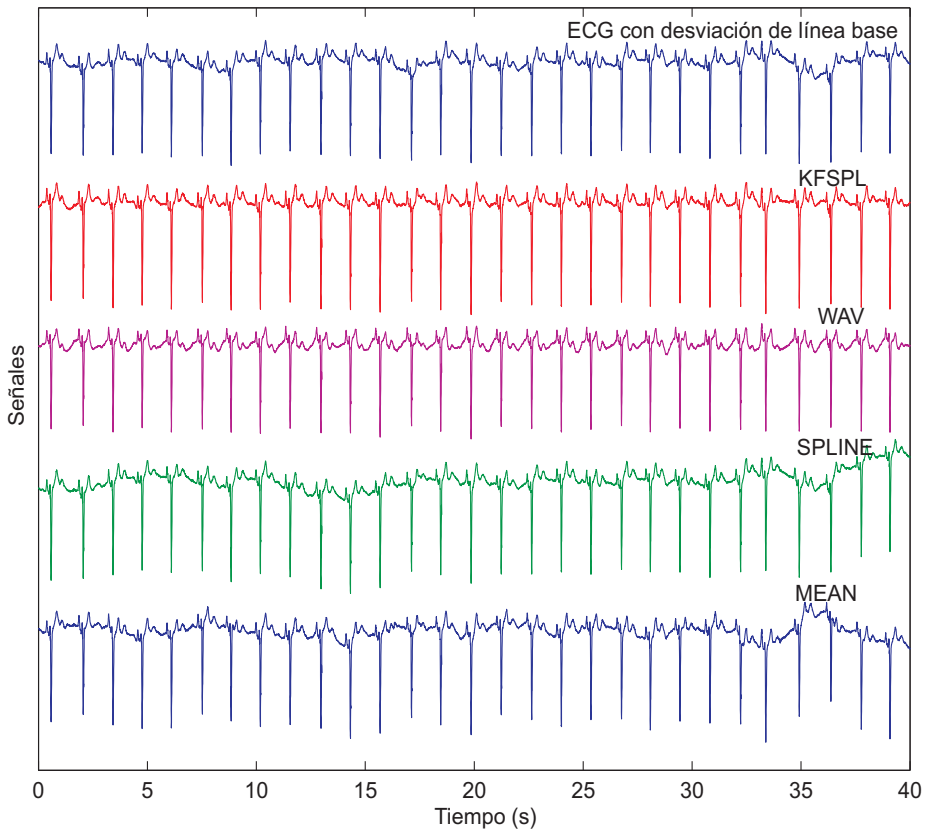
**Figura 2.20b** Comparación visual entre diferentes distancias nodales.

### 2.3.3 Análisis comparativo

Por otra parte, para el caso de la disminución del desvío de la línea base, el enfoque propuesto: filtro de Kalman con modelo *spline* (KFSPL), también se comparó con otros métodos del estado del arte, tales como: algoritmo *wavelet* (WAV) [3, 68, 38], aproximación *spline* (SPLINE), desarrollado en [96, 67, 55, 130] y promediado de ventanas (MEAN). Los resultados se pueden ver en la Figura 2.21.

- El algoritmo *wavelet* introduce distorsión y atenuación de algunos componentes de la señal ECG.
- El algoritmo *spline*, no reduce completamente la interferencia de la línea base, debido a la carencia de un método adecuado de localización de los nodos y de un algoritmo preciso para estimar los parámetros del *spline*.

- El enfoque propuesto, junto con el método para la localización de los nodos y la estimación de los vértices aplicando KF, muestra una gran mejoría en la disminución del desvío de la línea base, sin alterar el contenido útil de los registros de la señal ECG.



**Figura 2.21** Comparación de diferentes métodos de reducción de perturbaciones de línea base. Registro 92, base de datos QT.

## 2.4 Conclusiones

Se ha planteado una nueva estrategia para la supresión de interferencias de línea de potencia eléctrica y el desvío de línea base en señales ECG, basada en el KF y el modelado de dichas perturbaciones, cuya estructura es conocida, en lugar de modelar la señal ECG, la cual posee una estructura de alta variabilidad y complejidad. Se ha encontrado que con esta metodología es posible remover adecuadamente las perturbaciones de las señales ECG superando sustancialmente el desempeño obtenido con otras metodologías del estado del arte. De esta forma, la dificultad para la aplicación del KF en la filtración de la señal

ECG es superada al hacer énfasis en el modelado de las otras señales cuya estructura es mejor conocida. Se demostró también que el desempeño del KF es estable, a pesar de la no gaussianidad de la señal ECG.

Se realizó el proceso de filtrado utilizando diversos modelos del KF, entre los que el  $\delta$ KF, presentó el mejor desempeño en la eliminación de las perturbaciones producidas por la línea de potencia. Para este caso se empleó un modelo sinusoidal cuasiestacionario. Con esta metodología se obtiene, en primer lugar, un algoritmo de filtrado robusto ante cambios en la amplitud, en la frecuencia y en la fase de la señal de interferencia, preservando estas propiedades para las diversas clases de morfologías de señales ECG, tanto normales como patológicas, y diversas condiciones de adquisición. El método reduce la interferencia y mantiene un alto desempeño en el caso que se presenten variaciones de amplitud y frecuencia o combinación de ellas. Además es posible obtener un ajuste adecuado que siempre permite mejorar la SNR de la señal ECG sin introducir algún tipo de perturbación.

Para el caso de la desviación de la línea base, la utilización del KF con B-splines, y después de una sintonización precisa de las curvas de ajuste, es posible estimar la señal que produce tal desvío. El concepto clave es el posicionamiento de los nodos en la función B-spline sobre segmentos isoelectrónicos de la señal, lo cual permite un adecuado acercamiento a la verdadera desviación de línea base.

En ambos casos se obtienen resultados significativamente superiores a los obtenidos con los métodos encontrados en el estado del arte, demostrando un mejor desempeño.

Como conclusión final, se puede afirmar que los métodos propuestos constituyen una herramienta fiable para la descomposición modal en línea, de señales no estacionarias, con resultados precisos comparables e incluso mejores que otros métodos del estado del arte.

## 3 Descomposición modal de señales no estacionarias

---

En este capítulo, con base en la formulación de espacio de estados diagonal dependiente del tiempo en [10], se aborda el problema del análisis en el dominio modal de señales no estacionarias. Esto requiere la introducción de una matriz de mezcla de modos, la cual debe ser identificada. La matriz de mezcla junto con las covarianzas de estado, de parámetros y de ruido y los valores iniciales, se establecen como hiperparámetros de la representación modal en el espacio de estados (SS) y a continuación se estiman con un algoritmo adaptado de Expectación-Maximización (EM). La metodología propuesta se aplica en la descomposición modal y en la supresión del ruido en registros ECG.

Entre los métodos de representación más reconocidos de las señales no estacionarias se encuentran las *Representaciones no paramétricas de Tiempo–Frecuencia* (TFR) y las *Representaciones de escala de tiempo* (TSR) [25, Ch. 2]; [37, Ch. 5], donde la señal no estacionaria se caracteriza en términos de un conjunto infinito de componentes oscilatorios localizados tanto en el tiempo como en la frecuencia. Estos métodos se han utilizado exhaustivamente en la representación y el análisis de muchos tipos de señales no estacionarias [29, 30, 48, 75]. Sus principales desventajas derivan del problema de la localización precisa de componentes de tiempo y de frecuencia, limitados por el principio de incertidumbre, la presencia de artefactos (conocidos como términos cruzados) y su gran tamaño y redundancia innecesarios [61]; [92, Ch. 1]. Las representaciones modales, por otro lado, se enfocan en la conformación de una señal no estacionaria mediante la superposición de un número finito de componentes oscilatorios, denominados *modos*. A diferencia del caso estacionario donde la amplitud y la frecuencia de cada modo se consideran constantes [127, Cap. 4], en el caso no estacionario, cada modo está asociado con valores de amplitud y frecuencia dependientes del tiempo [61]. En contraste con las TFR y las TSR, donde la representación se articula sobre superficies en el plano tiempo–frecuencia, las estructuras modales ofrecen representaciones más compactas de procesos no estacionarios, facilitando la extracción de componentes individuales de la señal.

En una representación modal, la señal puede estar conformada por una sola componente

modal o estar constituida por la superposición de varias componentes modales. El cálculo de la descomposición modal de una señal monocomponente se reduce al cálculo de la *frecuencia instantánea* (IF), la *fase instantánea* (IP) y la *amplitud instantánea* (IA) de la señal. La descomposición modal en el caso de señales multicomponentes, requiere además el aislamiento de componentes modales individuales y la estimación de sus respectivos parámetros modales instantáneos. Las principales dificultades asociadas a la descomposición de múltiples componentes modales, provienen de la localización y el seguimiento precisos de cada trayectoria de frecuencia evolutiva en un entorno ruidoso, especialmente en el caso de componentes con frecuencias cruzadas o en el caso de componentes que desaparecen.

Por otro lado, las representaciones de espacio de estados dependientes del tiempo y sus propiedades pueden usarse para calcular descomposiciones modales de señales no estacionarias. Uno de estos métodos, el *Kalman Filter Frequency Tracker* (KF-FT), se basa en un tipo particular de representación diagonal por bloques de espacio de estados, donde un bloque de segundo orden está asociado con un único componente modal. A su vez, cada bloque se parametriza, a través de una relación no lineal, por la frecuencia instantánea del componente modal. Entonces, el vector de estado y la frecuencia instantánea se pueden estimar conjuntamente usando un *Extended Kalman Filter* (EKF) [23, 81] o algún otro método de estimación de estado no lineal [35, 76, 78]. De manera similar, se puede usar una transformación de equivalencia para mapear la representación de espacio de estados asociada con un modelo autorregresivo dependiente del tiempo (TAR) de la señal de interés, en una representación diagonal de espacio de estados, donde cada elemento del vector de estado del sistema diagonalizado está asociado con un componente modal, en tanto que los componentes de la diagonal en la matriz de estado están asociados con las frecuencias instantáneas de los respectivos componentes modales [140, 102]. Las ventajas principales de estos métodos incluyen la posibilidad de rastrear al mismo tiempo cualquier cantidad de componentes modales, ajustando el orden de los respectivos modelos, al tiempo que proporciona estimaciones de la amplitud instantánea, la frecuencia y la trayectoria modal. Por lo tanto, estos métodos son ideales para el rastreo en línea y la extracción de componentes modales.

En este capítulo se proporciona una mayor comprensión de las descomposiciones modales basadas en modelos de espacio de estados dependientes del tiempo, mediante el análisis de las propiedades de su respuesta dinámica. En este sentido, y en contraste con la mayoría de los estudios recientes que pretenden describir la respuesta de un sistema lineal dependiente del tiempo, descritas por las llamadas *Funciones de Respuesta de Frecuencia Instantánea y Armónica* [118], la principal contribución de este capítulo es demostrar, mediante el uso de transformadas de equivalencia, que la respuesta de un sistema lineal definido en espacio de estados dependientes del tiempo, se puede caracterizar por la superposición de componentes de frecuencia de banda angosta, que en el caso de la respuesta natural toman la forma de componentes modales con IA e IF asociadas a los valores propios instantáneos de bloques de segundo orden de SS dependientes del tiempo. Además, el análisis realizado en este trabajo conduce a una parametrización más general y más simple de bloques de espacio de estados lineales de segundo orden dependientes del tiempo, los cuales pueden utilizarse en combinación con filtros de Kalman para obtener estimaciones precisas en línea de múltiples componentes modales y sus respectivos IA e IF.

Se consideran dos enfoques de estimación basados en métodos de filtros de Kalman: **conjuntos** o **desacoplados**, que conducen a los métodos propuestos de seguimiento de sinusoides no estacionarios con filtros de Kalman definidos en este documento como conjuntos/duales (JKF-NST o DKF-NST). Los métodos JKF-NST y DKF-NST postulados resultan ser una generalización del conocido método KF-FT, con la gran ventaja de que el problema de estimación concurrente de estados y parámetros implica un tipo de no linealidad más suave comparado con la que aparece en los KF-FT.

La aplicación en la eliminación de ruido de registros ECG de la base de datos QT, demuestra la mayor robustez de los métodos propuestos en comparación con el método KF-FT y el método de extracción de crestas descrito en [42], en términos de precisión del seguimiento de los componentes modales y su IA e IF. Además, la respuesta teórica obtenida a partir del análisis de modelos lineales del espacio de estados lineales dependientes del tiempo, pueden extenderse hacia el diseño de métodos de descomposición modal mejorados.

### 3.1 Representaciones de espacio de estados dependientes del tiempo

Considérese la representación de espacio de estados dependiente del tiempo (tiempo discreto):

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}_k \cdot u_k \quad (3.1a)$$

$$y_k = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{x}_k + w_k, \quad w_k \sim \text{NID}(0, \sigma_w^2) \quad (3.1b)$$

donde  $k \in \mathbb{Z}^+$  es el tiempo discreto normalizado,  $y_k \in \mathbb{R}$  es la señal de respuesta,  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^M$  es el *vector de estado*,  $u_k \in \mathbb{R}$  es la *excitación* del sistema, mientras que  $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{M \times M}$ ,  $\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  y  $\mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^{1 \times M}$  son la *matriz de estado dependiente del tiempo*, el *vector de acoplamiento de a entrada* y el *vector de medida de los estados*. Además,  $w_k$  es una *innovación normal e idénticamente distribuida* (NID) con media cero y varianza  $\sigma_w^2$ .

El estado del sistema y su respuesta en el tiempo  $k$  se pueden calcular con base en un estado inicial  $\mathbf{x}_0$  y excitación  $u_k$ , por medio de las expresiones [36, pp. 110–111]:

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,0} \cdot \mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=1}^k \Phi_{k,\tau} \cdot \mathbf{b}_\tau \cdot u_\tau \quad (3.2a)$$

$$y_k = \mathbf{c}_k \cdot \Phi_{k,0} \cdot \mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=1}^k \mathbf{c}_k \cdot \Phi_{k,\tau} \cdot \mathbf{b}_\tau \cdot u_\tau + w_k \quad (3.2b)$$

donde

$$\Phi_{k,\tau} \triangleq \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{A}_{k-1} \cdots \mathbf{A}_\tau, \quad \forall k > \tau$$

se conoce como *matriz de transición de estados*. Nótese que el primer componente del miembro de la derecha de la Ecuación (3.2b) corresponde a la *respuesta natural* del sistema, mientras que el segundo representa la *respuesta forzada*, respectivamente.

La representación de espacio de estados en la Ecuación (3.1) puede asociarse con una representación de espacio de estados *equivalente* por medio de una transformación de equivalencia. Para este propósito, sea  $\mathbf{V}_k \in \mathbb{R}^{M \times M}$  una matriz ortogonal no singular que satisfaga  $\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{V}_k^{-1} = \mathbf{I}$  y  $\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{x}_k$ . Entonces, la ecuación de espacio de estados:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{A}}_k \cdot \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \bar{\mathbf{b}}_k \cdot u_k \quad (3.3a)$$

$$y_k = \bar{\mathbf{c}}_k \cdot \bar{\mathbf{x}}_k + w_k \quad (3.3b)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{A}}_k = \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{V}_k^{-1}, \quad \bar{\mathbf{b}}_k = \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{b}_k, \quad \bar{\mathbf{c}}_k = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{V}_k^{-1} \quad (3.4)$$

se dice que es *equivalente* (algebraicamente) a la Ecuación (3.1) y la matriz  $\mathbf{V}_k$  se denomina transformación de *equivalencia* [133], [88], [36, pp. 111–115].

De la misma forma, la matriz de transición de estados  $\Phi_{k,\tau}$  asociada con la representación de espacio de estados en la Ecuación (3.1) se transforma según la expresión:

$$\bar{\Phi}_{k,\tau} = \mathbf{V}_k \cdot \Phi_{k,\tau} \cdot \mathbf{V}_k^{-1} \quad (3.5)$$

donde  $\bar{\Phi}_{k,\tau}$  es la matriz de transición de estados *equivalente*.

Una consecuencia de lo anterior es que, aunque las matrices de transición de estados son diferentes, la respuesta de los dos sistemas equivalentes es exactamente la misma. Esta propiedad se aplica incluso en el caso dependiente del tiempo y se puede usar para facilitar la evaluación de la respuesta de un sistema especificado por una representación de espacio de estados. No obstante, una dificultad importante en el caso dependiente del tiempo proviene del hecho de que, en general, la matriz de transformación también depende del tiempo.

### 3.2 Solución modal de una representación diagonal de espacio de estados dependiente del tiempo

Considérese un sistema dependiente del tiempo caracterizado por la matriz de estado diagonal (compleja) dependiente del tiempo:

$$\mathbf{A}_k \triangleq \mathbf{\Lambda}_k = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_k) = \begin{bmatrix} \lambda_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{M,k} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}_k = [\lambda_{1,k} \ \cdots \ \lambda_{M,k}]^\top$ , con  $\lambda_{m,k} = r_{m,k} \cdot e^{j\bar{\omega}_{m,k}} \in \mathbb{C}$ ,  $r_{m,k} \in \mathbb{R}$  y  $\bar{\omega}_{m,k} \in [-\pi, \pi]$ . La matriz de estado definida en la Ecuación (3.6) puede asociarse con la matriz de transición



de estado, también diagonal:

$$\Phi_{k,\tau} = \prod_{k'=\tau}^k \begin{bmatrix} \lambda_{1,k'} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{M,k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{1,k,\tau} \cdot e^{j\varphi_{1,k,\tau}} & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_{M,k,\tau} \cdot e^{j\varphi_{M,k,\tau}} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

donde:

$$\rho_{m,k,\tau} = \left| \prod_{k'=\tau}^k \lambda_{m,k'} \right| = \prod_{k'=\tau}^k r_{m,k'} \quad \varphi_{m,k,\tau} = \arg \left\{ \prod_{k'=\tau}^k \lambda_{m,k'} \right\} = \sum_{k'=\tau}^k \bar{\omega}_{m,k'} \quad (3.8)$$

son la IA y la IF asociadas a cada estado  $x_{m,k}$ ,  $m = 1, \dots, M$ , relacionado con una excitación en el tiempo  $k$ .

A continuación se mostrará que en la Ecuación (3.6), la respuesta natural, la respuesta al impulso y la respuesta forzada del sistema de espacio de estados diagonal, toman la forma de la superposición de un conjunto de sinusoides con amplitudes y frecuencias dependientes del tiempo.

### 3.2.1 Forma modal de la respuesta natural

Introduciendo la matriz de transición de estados de la Ecuación (3.7) en la Ecuación (3.2b), con estado inicial  $\mathbf{x}[0]$  y excitación nula  $u_k = 0, \forall k$ , se produce la respuesta natural de la representación diagonal de espacio de estados, lo que lleva al resultado:

$$\begin{aligned} y_k &= \begin{bmatrix} c_{1,k} & \cdots & c_{M,k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{1,k,0} \cdot e^{j\varphi_{1,k,0}} & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_{M,(k,0)} \cdot e^{j\varphi_{M,k,0}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{M,0} \end{bmatrix} + w_k \\ &= \sum_{m=1}^M c_{m,k} \cdot \rho_{m,k,0} \cdot e^{j\varphi_{m,k,0}} \cdot x_{m,0} + w_k \end{aligned} \quad (3.9)$$

o

$$y_k = \sum_{m=1}^M A_{m,k} \cdot e^{j\varphi_{m,k}} + w_k = \sum_{m=1}^M y_{m,k} + w_k \quad (3.10)$$

donde  $y_{m,k} = A_{m,k} \cdot e^{j\varphi_{m,k}}$ , es el  $m$ -ésimo componente de la respuesta natural con *amplitud instantánea* (IA),  $A_{m,k} \triangleq c_{m,k} \cdot \rho_{m,k,0} \cdot x_{m,0}$  y con *fase instantánea* (IP),  $\varphi_{m,k} \triangleq \varphi_{m,k,0}$ . Por lo tanto, cada componente de la respuesta natural del sistema dependiente del tiempo se asemeja a una señal analítica [37, pp. 30]. Sin embargo, para cumplir con la definición estricta de señal analítica, deben mantenerse las condiciones siguientes [26], [37, pp. 35 – 36]:

(a) El espectro de la componente de amplitud  $A_{m,k}$  se encuentra en la región  $|\omega| < \omega_c$ .

(b) El espectro de  $\cos \varphi_{m,k}$  existe sólo en el intervalo  $|\omega| \geq \omega_c$ .

Si se cumplen las condiciones anteriores, entonces la IF del  $m$ -ésimo componente modal puede definirse de forma única como la derivada con respecto al tiempo de la fase instantánea respectiva [26]. Para el caso de tiempo discreto considerado aquí, en lugar de la derivada se utiliza la siguiente aproximación de diferencias finitas de primer orden de la IF en atraso [27]:

$$\omega_{m,k} = \frac{d\varphi_{m,k}}{dk} \approx \frac{\varphi_{m,k} - \varphi_{m,k-1}}{T_s} = \frac{\bar{\omega}_m}{T_s} \quad (3.11)$$

Naturalmente, esta sería una aproximación efectiva de la IF siempre que las derivadas de orden superior de la IF real sean lo suficientemente pequeñas. Por lo tanto, tanto la IA como la IF están limitadas a ser funciones de variación lenta en el tiempo, de acuerdo con la condición (a) de la señal analítica y la condición sobre las derivadas de orden superior de la IF.

### 3.2.2 Respuesta forzada como superposición de filtros modales

La respuesta forzada del sistema de espacio de estados diagonal dependiente del tiempo con la matriz de estado definida en la Ecuación (3.6) y evaluada en el tiempo  $k$ , corresponde a la superposición de la respuesta de  $M$  filtros modales dependientes del tiempo, de la siguiente manera:

$$x_{m,k} = \lambda_{m,k} \cdot x_{m,k-1} + b_{m,k} \cdot u_k \quad (3.12a)$$

$$y_k = \sum_{m=1}^M c_{m,k} \cdot x_{m,k} + w_k \quad (3.12b)$$

A su vez, cada filtro modal puede asociarse con una respuesta al impulso modal  $h_{m,k,k-\tau}$ , definida como la respuesta del sistema a un impulso en el tiempo  $\tau$ , de modo que:

$$h_{m,k,k-\tau} = \lambda_{m,k} \cdot h_{m,k-1,k-1-\tau} + b_{m,k} \cdot \delta_\tau \quad (3.13)$$

Como una generalización de la *Función de Respuesta en Frecuencia* (FRF) en el caso estacionario, la FRF *instantánea* de un sistema dependiente del tiempo  $H_{[k,\omega]}$ , se define como la respuesta del sistema a una excitación exponencial compleja normalizada por la propia excitación [118]. Con base en esta definición, la FRF instantánea se puede calcular como la transformada de Fourier de la respuesta al impulso dependiente del tiempo sobre la dimensión  $\tau$  [109, 118], la cual en el caso de cada filtro modal  $m$ , conduce a la siguiente expresión para la FRF instantánea:

$$\begin{aligned} H_{m,[k,\omega]} &:= \mathcal{F} \{ h_{m,k,k-\tau} \}_{\tau \rightarrow \omega} \\ &= \mathcal{F} \{ \lambda_{m,k} \cdot h_{m,k-1,k-1-\tau} + b_{m,k} \cdot \delta_\tau \}_{\tau \rightarrow \omega} \\ &= \lambda_{m,k} \cdot H_{m,[k-1,\omega]} \cdot e^{-j\omega T_s} + b_{m,k} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si el sistema dependiente del tiempo varía lentamente, tal que  $H_{m,[k,\omega]} \approx H_{m,[k-1,\omega]}$ , entonces la FRF instantánea se simplifica en la bien conocida forma racional [109]:

$$H_{m,[k,\omega]}^{(F)} = \frac{b_{m,k}}{1 - \lambda_{m,k} \cdot e^{-j\omega T_s}} = \frac{b_{m,k}}{1 - r_{m,k} \cdot e^{j(\bar{\omega}_{m,k} - \omega) T_s}} \quad (3.15)$$

que se conoce como *FRF congelada*. Nótese que el único requisito para que la Ecuación (3.15) sea válida es que, tanto los valores propios instantáneos como los coeficientes de acoplamiento de entrada, satisfagan las condiciones  $\lambda_{m,k} \approx \lambda_{m,k-1}$  y  $b_{m,k} \approx b_{m,k-1}$ . La FRF congelada de cada filtro modal  $H_{m,[k,\omega]}^{(F)}$  se caracteriza por una resonancia instantánea en  $\omega = \bar{\omega}_{m,k}/T_s$ , mientras que su ancho de banda respectivo está determinado por  $r_{m,k}$ . Por otra parte, si la excitación se caracteriza por una sola componente sinusoidal; es decir,  $u_k = e^{j\theta_k}$ , con  $\theta_k = \sum_{\tau=0}^k \gamma_k$ , entonces la respuesta sería de la forma

$$y_{m,k} = H_{m,[k,\gamma_k/T_s]}^{(F)} \cdot e^{j\theta_k} \quad (3.16)$$

lo que implica que la respuesta del filtro modal corresponde a una versión modulada en amplitud de la excitación sinusoidal. Por otro lado, si la excitación es de banda ancha y plana (v.gr.: ruido blanco gaussiano), entonces, la respuesta instantánea consiste de un conjunto infinito de sinusoides, de las cuales las más cercanas a la resonancia instantánea tienen las amplitudes mayores.

### 3.3 Modelos de espacio de estados diagonales con bloques de segundo orden dependientes del tiempo

El sistema de espacio de estados diagonal analizado en la sección anterior se caracteriza por poseer coeficientes complejos y componentes modales, lo cual podría complicar la implementación práctica de los algoritmos de descomposición modal. En esta sección se discuten representaciones modales alternas basadas en representaciones de espacio de estados diagonales dependientes del tiempo, construidas a partir de bloques de segundo orden, con la ventaja de que todos los coeficientes y los componentes modales se encuentran en el dominio de los números reales. Inicialmente, se discuten las formas de segundo orden para la representación de un componente modal simple y entonces se usan bloques múltiples de segundo orden para representar los componentes modales múltiples.

#### 3.3.1 Modelos de espacio de estados de segundo orden dependientes del tiempo

Considérese el siguiente modelo de espacio de estados en forma diagonal:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{\Lambda}_{m,k} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} + \bar{\mathbf{b}}_m \cdot u_k \quad (3.17a)$$

$$y_k = \bar{\mathbf{c}}_m \cdot \tilde{\mathbf{x}}_k + w_k \quad (3.17b)$$

en el que:

$$\mathbf{\Lambda}_{m,k} = \begin{bmatrix} \lambda_{m,k} & \\ & \lambda_{m,k}^* \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}}_m = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}_m = [1 \quad 1]$$

donde  $\lambda_{m,k} = r_{m,k} \cdot e^{j\bar{\omega}_{m,k}}$  y el superíndice (\*) indica el complejo conjugado.

Según la Ecuación (3.10), la respuesta natural de la representación de espacio de estados en la Ecuación (3.17) es de la forma:

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{2} (\rho_{m,k} \cdot e^{j\varphi_{m,k}} + \rho_{m,k} \cdot e^{-j\varphi_{m,k}}) + w_k \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho_{m,k} \cdot \cos \varphi_{m,k} + w_k \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $\rho_{m,k} = \prod_{\tau=1}^k r_{m,\tau}$  y  $\varphi_{m,k} = \sum_{\tau=1}^k \bar{\omega}_{m,\tau}$ .

La representación de espacio de estados en la Ecuación (3.17) puede transformarse en una representación de espacio de estados equivalente, donde todas las variables son reales, a través de la matriz de transformación *invariante en el tiempo*:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

donde  $\mathbf{v}_k$  y  $\mathbf{u}_k$  son los vectores propios invariantes en el tiempo, por la derecha y por la izquierda, de la matriz  $\mathbf{\Lambda}_k$  en el tiempo  $k$ , respectivamente. Aplicando estas matrices de transformación en la Ecuación (3.17), se obtiene a la representación de espacio de estados simétrica:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{M}_{m,k} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}_m \cdot u_k \quad (3.20a)$$

$$y_k = \mathbf{c}_m \cdot \mathbf{x}_k + w_k \quad (3.20b)$$

donde:

$$\mathbf{M}_{m,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{m,k} & \beta_{m,k} \\ -\beta_{m,k} & \alpha_{m,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_m = [1 \quad 0] \quad (3.21)$$

caracterizado por los valores propios  $\lambda_{m,k} = \alpha_{m,k} + j\beta_{m,k} = r_{m,k} \cdot e^{j\bar{\omega}_{m,k}}$ , donde  $\alpha_{m,k}$  y  $\beta_{m,k}$  corresponden a las partes real e imaginaria de los valores propios instantáneos. Si el término  $r_{m,k} \equiv 1$  para todo  $k$ , entonces la respuesta del sistema tendrá solamente componentes sinusoidales de la forma  $\cos \bar{\varphi}_{m,k,\tau}$ . Más aún,  $\alpha_{m,k} = \cos \bar{\omega}_{m,k}$  y  $\beta_{m,k} = \sin \bar{\omega}_{m,k}$ , convirtiendo la matriz de estado en la forma:

$$\mathbf{M}_{m,k} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\omega}_{m,k} & \sin \bar{\omega}_{m,k} \\ -\sin \bar{\omega}_{m,k} & \cos \bar{\omega}_{m,k} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

La representación de espacio de estados simétrica dependiente del tiempo de la Ecuación (3.21) está dotada de algunas propiedades atractivas, que se enumeran a continuación:

- (i) La matriz de transformación  $\mathbf{V}$  y sus vectores propios respectivos son invariantes en el tiempo. Esto significa que la transformación entre las representaciones diagonales y simétricas es siempre bien definida, ya que la matriz de transformación y su inversa también lo es.
- (ii) El vector de estado contiene la componente modal en fase y su cuadratura, por lo que directamente proporciona una representación analítica de la componente modal. Para mostrar esta propiedad, considérese primero la matriz de transición de estado de la representación simétrica la cual, de acuerdo con Ecuación (3.5), es la siguiente:

$$\begin{aligned}\Phi_{k,\tau} &= \mathbf{V} \cdot \bar{\Phi}_{k,\tau} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{m,k,\tau} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\varphi_{m,k,\tau}} & \\ & e^{-j\varphi_{m,k,\tau}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \\ &= \rho_{m,k,\tau} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_{m,k,\tau} & \text{sen } \varphi_{m,k,\tau} \\ -\text{sen } \varphi_{m,k,\tau} & \cos \varphi_{m,k,\tau} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.23)$$

Entonces, la solución natural del vector de estado para el valor inicial definido como  $\mathbf{x}_0 = [x_0 \ 0]^\top$  en el tiempo  $k$ , está determinada por la Ecuación (3.2), que en el presente caso será:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \Phi_{k,0} \cdot \mathbf{x}_0 = \rho_{m,k,0} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_{m,k,0} & \text{sen } \varphi_{m,k,0} \\ -\text{sen } \varphi_{m,k,0} & \cos \varphi_{m,k,0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho_{m,k,0} \cdot x_0 \cdot \cos \varphi_{m,k} \\ -\rho_{m,k,0} \cdot x_0 \cdot \text{sen } \varphi_{m,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Por lo tanto, es claro que el estado  $x_{1,k}$  está relacionado con la componente cosenoidal, mientras que el estado  $x_{2,k}$  está relacionado con la componente sinusoidal, ambos con la misma frecuencia y amplitud.

- (iii) Puesto que ambos estados constituyen la forma analítica de la respuesta, entonces la amplitud y la fase instantáneas están determinadas a partir del vector de estado a través de las relaciones:

$$A_{m,k} = (x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2)^{1/2}; \quad \varphi_{m,k} = \arctan\left(\frac{x_{2,k}}{x_{1,k}}\right)\quad (3.25)$$

- (iv) La representación está completamente caracterizada por el vector de parámetros de orden  $M$  dependiente del tiempo,  $\boldsymbol{\theta}_k = [\alpha_{m,k} \ \beta_{m,k}]^\top$ .

### 3.3.2 Representaciones en espacio de estados dependientes del tiempo de bloques diagonales de orden $M$

Una señal conformada por  $M$  componentes sinusoidales puede expresarse por la siguiente representación de bloques diagonales:

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,k} & & & \\ & \mathbf{M}_{2,k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_{M,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{c}_M] \quad (3.26)$$

donde cada uno de los bloques  $\mathbf{M}_{m,k}$ ,  $\mathbf{b}_m$  y  $\mathbf{c}_m$  está definido en la Ecuación (3.21). Esta representación en bloques diagonales de espacio de estados se puede asociar con la respuesta natural:

$$y_k = \sum_{m=1}^M A_{m,k} \cdot \cos \varphi_{m,k} + w_k \quad (3.27)$$

mientras que la amplitud y fase instantáneas pueden derivarse de la Ecuación (3.25) en cada uno de los componentes modales. La representación de espacio de estados simétrica de bloques diagonales obtenida, se caracteriza por el número de componentes modales  $M$ , la varianza de innovaciones  $\sigma_{w,k}^2$  y el vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}_k \in \mathbb{R}^{2M}$ , éste último definido como:

$$\boldsymbol{\theta}_k = [\alpha_{1,k} \quad \beta_{1,k} \quad \alpha_{2,k} \quad \beta_{2,k} \quad \cdots \quad \alpha_{M,k} \quad \beta_{M,k}]^T \quad (3.28)$$

## 3.4 Métodos de descomposición modal de sistemas dependientes del tiempo con el filtro de Kalman

### 3.4.1 Estimación concurrente de trayectorias y parámetros modales

Como se expuso en la Sección 3.2, la respuesta natural de un sistema de espacio de estados diagonal toma la forma de una superposición de componentes modales con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo. Además, como se ha mostrado en la Sección 3.3, determinadas estructuras de bloques diagonales también pueden asociarse directamente con la respuesta de un sistema de espacio de estados diagonal mediante una transformación de equivalencia invariante en el tiempo. En esta sección, se mostrará cómo las estructuras de bloques diagonales pueden utilizarse para estimar una descomposición modal de una señal no estacionaria dada.

Por lo tanto, considérese la señal no estacionaria  $y_k$ , la cual se supone que cumple con una descomposición modal de orden  $M$  de la forma de la Ecuación (3.10). Para estimar las trayectorias modales IA e IF, se considera el siguiente sistema de espacio de estados

en bloques diagonales:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_k) \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b} \cdot u_k, \quad u_k \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2) \quad (3.29a)$$

$$y_k = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k + w_k, \quad w_k \sim \text{NID}(0, \sigma_w^2) \quad (3.29b)$$

donde  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_k) \equiv \mathbf{M}_k$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  están definidos en la Ecuación (3.26),  $u_k$  y  $w_k$  son ruidos NID del proceso y de la respuesta, con valor medio cero y varianzas  $\sigma_u^2$  y  $\sigma_w^2$ , respectivamente. Debe señalarse que, aunque el objetivo es asociar la señal observada con la respuesta natural del sistema de espacio de estados, la excitación del ruido  $u_k$ , se conserva en el modelo de estimación para tener en cuenta la incertidumbre en las trayectorias de los modos.

Se debe introducir una ecuación más en el sistema de espacio de estados para describir la evolución del vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}_k$ . Ahora, suponiendo una variación lenta de la dinámica, se tiene el siguiente modelo estocástico de primera diferencia:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \text{NID}(\mathbf{0}_d, \boldsymbol{\Sigma}_v) \quad (3.30)$$

donde  $d$  es la dimensión del vector de parámetros y  $\mathbf{v}_k$  es el proceso de innovaciones del parámetro NID con matriz de media cero y covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_v \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . En este caso, se asume que la matriz de covarianza de las innovaciones de los parámetros tiene la forma  $\boldsymbol{\Sigma}_v = \sigma_v^2 \cdot \mathbf{I}$ , con el fin de disminuir la cantidad de parámetros a fijar aplicando este método.

Dada la representación de espacio de estados de la Ecuación (3.29) y el modelo de evolución de los parámetros en la Ecuación (3.30), el problema de estimación de las trayectorias y parámetros modales se traduce en la estimación concurrente, tanto del estado como de los parámetros, que puede resolverse mediante un filtro de Kalman Conjunto (JKF) o un filtro de Kalman Dual (DKF). En el método de seguimiento de sinusoides no estacionarias mediante el filtro de Kalman conjunto (JKF-NST), tanto el estado como los parámetros se representan colectivamente en términos de un vector de estado conjunto definido como  $\mathbf{x}_{J,k} = [\mathbf{x}_k^\top \quad \boldsymbol{\theta}_k^\top]^\top$  y, a continuación, se utiliza un único filtro de Kalman para la estimación del estado. Por otro lado, el método de rastreo de sinusoides no estacionarias con el filtro Kalman Dual (DKF-NST) se basa directamente en la representación de espacio de estados concurrente en las ecuaciones (3.29) y (3.30), mientras que la estimación se realiza mediante dos filtros de Kalman acoplados, cada uno de los cuales estima al vector de estados y al vector de parámetros. Los detalles de estos métodos de estimación se pueden encontrar en [137].

Una versión más sencilla del método JKF-NST se consigue utilizando los bloques simplificados descritos en la Ecuación (3.22), dando lugar a los métodos conocidos como Rastreadores de Frecuencia con Filtros de Kalman (KF-FT), en los que la estimación se fundamenta en filtros de Kalman Extendidos (EKF) [81, 23], o en métodos más robustos de estimación de estado no lineal, tales como los filtros Cubature o los filtros de Kalman *Unscented* (UKF) [76, 78, 35]. En los métodos KF-FT, el número de parámetros a estimar se reduce, pero al mismo tiempo se introduce un tipo de no linealidad más fuerte en las ecuaciones de espacio de estados, lo que puede llevar a que la estimación sea más sensible al ruido o a las perturbaciones.

### 3.4.2 Enfoque basado en el modelo TAR

Un modelo TAR ( $\kappa$ ), con  $\kappa$  designando su orden AR, se define como sigue [109]:

$$y_k = -\sum_{i=1}^{\kappa} a_{i,k} \cdot y_{k-i} + u_k, \quad u_k \sim \text{NID}(0, \sigma_{u,k}^2) \quad (3.31)$$

donde  $a_{i,k}$  son los parámetros AR dependientes del tiempo y  $u_k$  un proceso de innovación no observable NID, con valor medio cero y varianza  $\sigma_{u,k}^2$ . El modelo TAR en la Ecuación (3.31) se puede convertir en la representación de espacio de estados dependiente del tiempo que se muestra en la Ecuación (3.1), donde:

$$\mathbf{A}_{TAR,k} = \begin{bmatrix} -a_{1,k} & -a_{2,k} & \cdots & -a_{\kappa-1,k} & -a_{\kappa,k} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\kappa \times \kappa} \quad \mathbf{b} = \mathbf{c}^\top = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Entonces, se puede obtener una descomposición modal a partir de la forma del espacio de estados del modelo TAR mediante una transformación de equivalencia adecuada, como se discutió en la Sección 3.1. Una condición necesaria pero no suficiente, para obtener una representación consistente de  $M$  componentes sinusoidales, como en la Ecuación (3.26), es usar un modelo TAR de orden  $\kappa = 2 \cdot M$ . La matriz de transformación  $\mathbf{V}_k$  se calcula a partir de la siguiente descomposición instantánea de valores propios:

$$\mathbf{A}_{TAR,k} \cdot \lambda_k = \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k \quad (3.33)$$

Por lo tanto, suponiendo que los parámetros del modelo TAR varían lentamente y que los valores propios no se repiten, la representación del espacio de estados original se transforma en una representación diagonal, a través de la transformación de equivalencia aproximada:

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{A}_{TAR,k} \cdot \mathbf{V}_{k-1}^{-1} \approx \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{A}_{TAR,k} \cdot \mathbf{V}_k^{-1} \quad (3.34)$$

y similarmente para las matrices  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ .

Este tipo de descomposición modal se ha analizado en [140, 102, 43], aunque su aplicación encuentra algunas dificultades prácticas. Una de ellas es que el número de raíces instantáneas, reales y complejas conjugadas, no se puede controlar y, como resultado, estas cantidades pueden desplazarse entre instantes de tiempo. En consecuencia, suelen encontrarse discontinuidades en los modos extraídos. Además, los valores de las raíces no se rastrean directamente y, por esa razón, estos deben ser ordenados y cotejados con sus valores en instantes de tiempo anteriores. Como resultado, los valores estimados de las trayectorias modales suelen presentar saltos o discontinuidades.



### 3.4.3 Inicialización de los métodos de descomposición modal

Los valores iniciales de las estimaciones de los estados y del vector de parámetros ( $\hat{\mathbf{x}}[1]$  y  $\hat{\boldsymbol{\theta}}[1]$ ) se pueden derivar de un modelo AR de orden  $\kappa = 2 \cdot M$ , estimado a partir de un fragmento inicial corto de la señal. Entonces, los valores iniciales de las trayectorias modales se pueden obtener como:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_1 = [y_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1 \times 2M}^T \quad (3.35)$$

donde  $\mathbf{A}_{AR} = \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{W}^{-1}$  es la descomposición en valores propios de la matriz de estado asociada con el fragmento corto del modelo AR estimado y

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_M \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

es una matriz de transformación que mapea la representación de espacio de estados diagonal compleja en un bloque diagonal real. Además,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$  puede inicializarse a partir de las entradas de la matriz diagonal de valores propios  $\boldsymbol{\Lambda}$ .

### 3.4.4 Optimización de los parámetros de ajuste

Los parámetros de ajuste de los métodos de descomposición modal son las varianzas  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_v^2$  y  $\sigma_w^2$ . Estos parámetros controlan la capacidad de rastreo del filtro de Kalman y el ruido de las estimaciones. Más precisamente, cuando la relación  $\sigma_v^2/\sigma_w^2$  es grande, entonces el filtro de Kalman se ajusta más rápido a los cambios en los parámetros, pero puede generar estimaciones más ruidosas. Del mismo modo, cuando la relación  $\sigma_u^2/\sigma_w^2$  es grande, entonces el filtro de Kalman se ajusta más rápido a los cambios en los componentes modales. Por el contrario, valores pequeños de estas proporciones darían lugar a una menor variabilidad en las estimaciones, pero podrían obstaculizar la capacidad de rastreo. Aunque se pueden utilizar métodos heurísticos para ajustar estas varianzas, la optimización basada en la probabilidad o el error de predicción es más recomendable. El *Método de Verosimilitud Marginal* asociado con el filtro de Kalman se define como [12]; [79, Cap.6]; [123, Cap.6]:

$$\ln \mathcal{L}(\sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_w^2) = K - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \left( \ln \hat{\sigma}_{e,k}^2 + \frac{\hat{w}_{k|k-1}^2}{\hat{\sigma}_{e,k}^2} \right) \quad (3.37a)$$

$$\hat{w}_{k|k-1} = y_k - \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (3.37b)$$

$$\hat{\sigma}_{e,k}^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{P}_{k|k-1} \cdot \mathbf{c}^T + \sigma_w^2 \quad (3.37c)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  es el estimado *a priori* del vector de estado y:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbb{E} \left\{ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \cdot \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T \right\} \quad (3.38)$$

es la matriz de covarianza de error del estimador de estado *a priori*, ambos proporcionados por el KF.

Por otro lado, el *Error de Predicción Cuadrático Medio* (MSPE), definido como

$$MSPE(\sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_w^2) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \hat{w}_{k|k-1}^2 \quad (3.39)$$

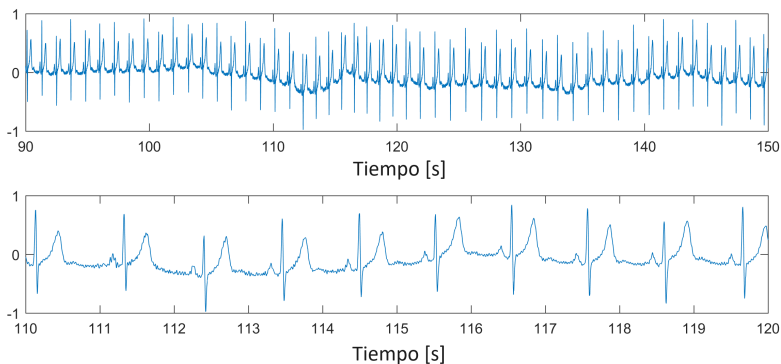
donde  $\hat{w}_{k|k-1}$  denota el error de predicción, proporciona un método más simple para calcular el desempeño de la descomposición modal.

La optimización basada en cualquiera de las funciones objetivo mencionadas anteriormente puede ser difícil debido a la presencia de mínimos locales. Además, en algunos casos aparecen inestabilidades numéricas para algunos valores de las varianzas. Para hacer frente a este problema, es recomendable realizar una búsqueda aproximada en el espacio de parámetros antes de intentar utilizar un esquema de optimización numérica. Además, para simplificar aún más el problema de optimización, la cantidad de parámetros optimizados se puede reducir definiendo  $\sigma_w^2 = 1$  y luego optimizando únicamente  $\sigma_u^2$  y  $\sigma_v^2$ .

## 3.5 Aplicación a señales ECG

### 3.5.1 Descomposición modal de una señal ECG única sin ruido

Se emplean los métodos de descomposición modal JKF-NST, DKF-NST y EKF-FT para obtener la descomposición modal de la señal ECG `SEL117` que se muestra en la Figura 3.1. Se utiliza el método adaptativo TFR para contrastar los resultados de la descomposición modal. El método de descomposición modal basado en el TAR no se incorpora en esta demostración, debido a los resultados no satisfactorios obtenidos en la prueba de evaluación comparativa, en particular, en lo concerniente a la capacidad de estimación de los componentes modales.



**Figura 3.1** Extracto del registro ECG `SEL117` de la base de datos QT. Parte superior: porción de 60 s alrededor de  $t = 120$  s; Parte inferior: porción de  $t = 110$  s a 120 s.

Para los algoritmos de descomposición modal basados en el KF se selecciona un número total de 30 componentes modales, que corresponden al mínimo del MSPE (Ecuación (3.39)) obtenido en el rango de 1 a 50. Las varianzas se seleccionan de forma heurística como sigue:  $\sigma_w^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 10^{-3}$ ,  $\sigma_v^2 = 10^{-7}$  y  $p_o = 10^{-7}$ .

El vector de parámetros  $\theta_1$  se inicializa con valores cercanos a la frecuencia cardíaca y sus armónicos observados en la señal. En el caso del método TFR adaptativo, el parámetro de resolución de la ventana *gaussiana* se fija en  $f_0 = 1$  Hz. La respuesta de la descomposición modal obtenida se puede observar en la Figura 3.2 y en la Figura 3.3. Los gráficos de la izquierda muestran los 6 primeros componentes modales, mientras que los gráficos de la derecha muestran la IF correspondiente a cada uno de los componentes modales no estacionarios superpuestos al espectrograma. Los resultados demuestran que los métodos de descomposición modal basados en el KF proporcionan resultados similares, los cuales son igualmente afectados por el cambio repentino de frecuencia a partir del tiempo  $t = 110$  s.

El primer componente modal identificado corresponde a la oscilación de la línea base; es decir, la tendencia observada en la señal ECG. El siguiente componente puede asociarse a la frecuencia cardíaca o, en otras palabras, al período fundamental de la señal ECG. Otros componentes corresponden a los armónicos de la frecuencia cardíaca. Es evidente que las estimaciones de la IF están influidas por los transitorios correspondientes al complejo QRS (pico mayor) de la señal ECG. El método adaptativo del TFR identifica casi los mismos modos que los métodos de descomposición modal basados en el KF, aunque no es capaz de identificar el componente de desviación de la línea de base y, en cambio, introduce un modo espurio a unos 2 Hz. Sin embargo, este método no se ve afectado por el cambio súbito de la frecuencia que se produce alrededor de los 110 s. Por otro lado, se observan fuertes oscilaciones en las estimaciones de la IF, en contraste con el método JKF-NST.

### 3.5.2 Filtrado de la línea de potencia eléctrica

Para la prueba de eliminación de ruido, cada una de las señales ECG originales seleccionadas de la base de datos QT, se contamina artificialmente con una señal de interferencia de la línea de alta tensión no estacionaria, de acuerdo con:

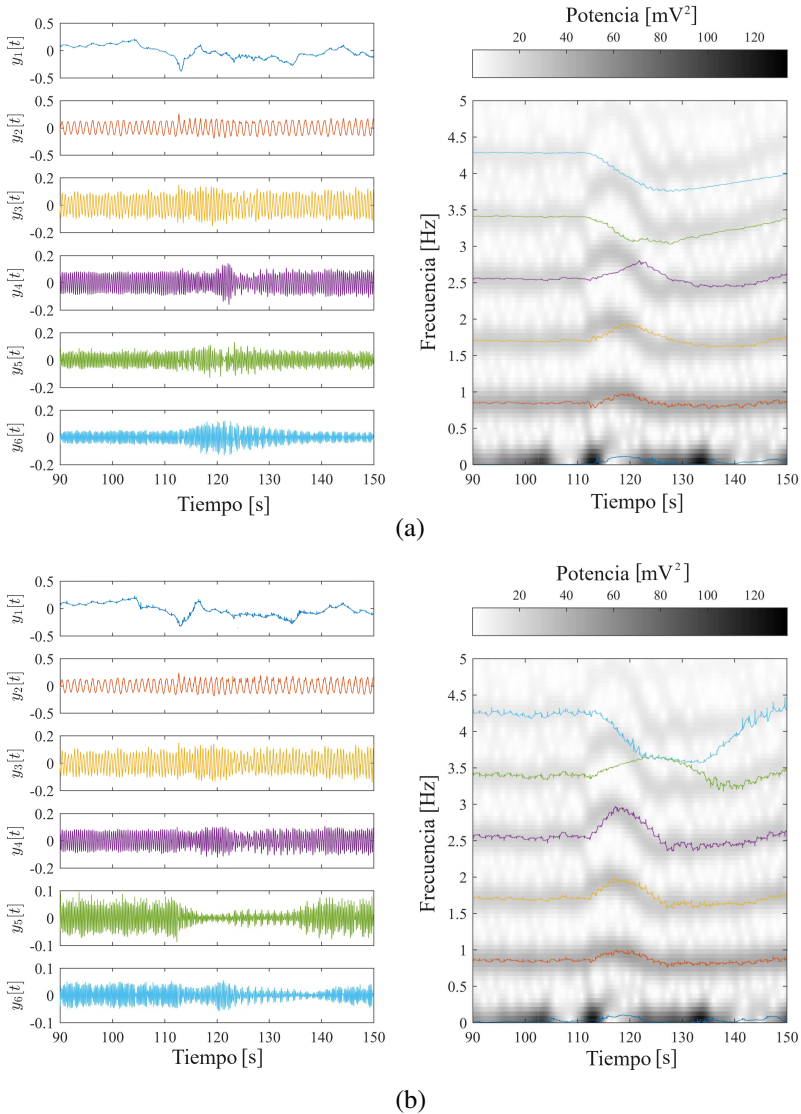
$$y_{noisy,k} = y_{ecg,k} + y_{pl,k} \quad (3.40)$$

$$y_{pl,k} = \gamma \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi f_{pl}}{f_s} k \right) \cdot \frac{1}{1 + \exp(-0.5(k - 60)/f_s)} \quad (3.41)$$

donde  $y_{ecg,k}$  es la señal de ECG limpia,  $y_{noisy,k}$  la señal de ECG ruidosa y  $y_{pl,k}$  la interferencia de la línea eléctrica no estacionaria, con frecuencia  $f_{pl} = 50$  Hz y amplitud dependiente del tiempo, determinada por el coeficiente  $\gamma$ . Esta definición para la interferencia de la línea eléctrica se usa para simular el inicio de la interferencia en el tiempo  $t = 60$  s. El coeficiente  $\gamma$  se usa para ajustar la SNR del ECG ruidoso.

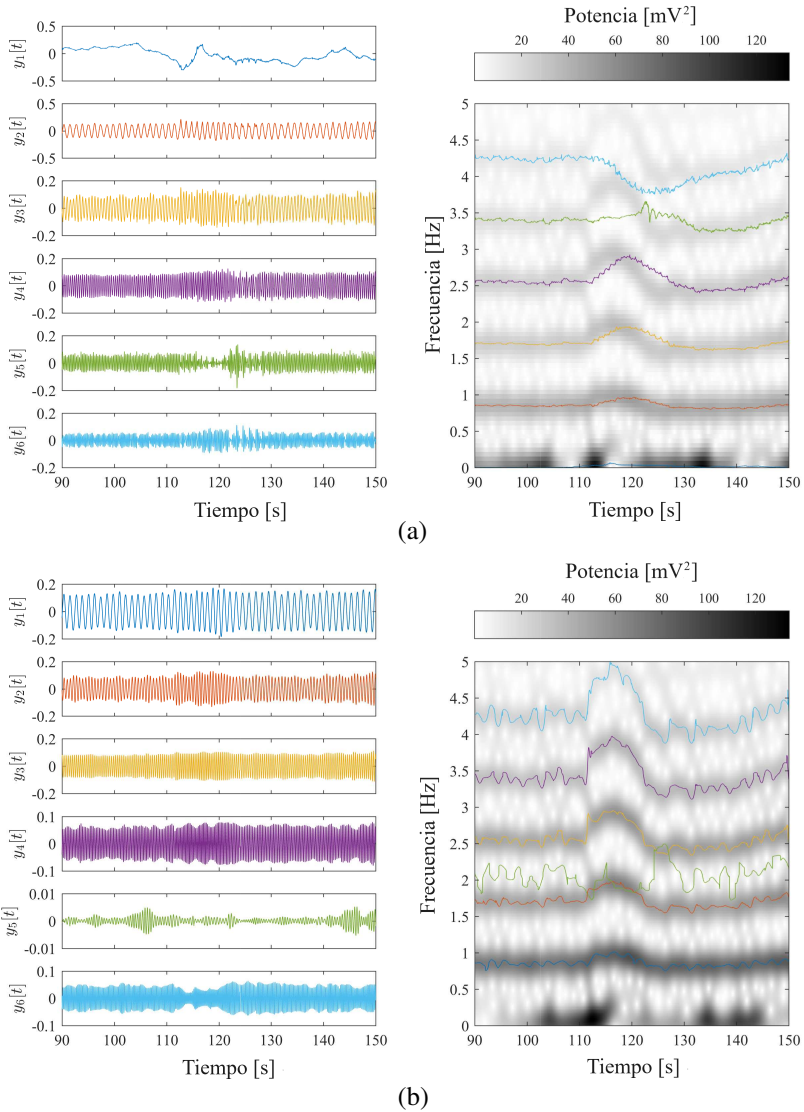
El filtrado de la interferencia de la línea de potencia eléctrica sigue el procedimiento descrito a continuación:

- (i) Se calcula una descomposición modal de orden 30 con los métodos JKF-NST, DKF-NST y EKF-FT.



**Figura 3.2** Descomposiciones modales del registro ECG `SEL117` obtenidas con (a) el método JKF-NST (b) el método DKF-NST. La columna izquierda muestra trayectorias modales únicas, mientras que la columna derecha muestra las frecuencias modales respectivas sobre el espectrograma de la señal ECG. Espectrograma calculado utilizando una ventana gaussiana de 4096 muestras y 4094 muestras superpuestas.

- (ii) Se analizan los componentes modales estimados para detectar la presencia de la interferencia de la línea de potencia eléctrica (componente de 50 Hz).
- (iii) Se obtiene una señal ECG sin ruido, eliminando la componente estimada de ruido de la línea de potencia, en la señal ECG ruidosa.

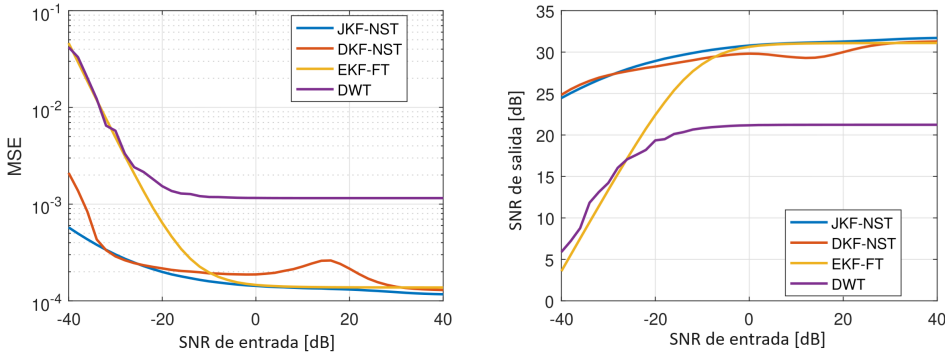


**Figura 3.3** Descomposiciones modales del registro ECG SEL117 obtenidas con (a) el método EKF-FT (b) el método TFR-adaptativo. La columna izquierda muestra trayectorias modales únicas, mientras que la columna derecha muestra las frecuencias modales respectivas sobre el espectrograma de la señal de ECG. Espectrograma calculado utilizando una ventana gaussiana de 4096 muestras y 4094 muestras superpuestas.

El vector de parámetros  $\theta_1$  de los métodos de descomposición modal se inicializa con valores cercanos a la frecuencia cardíaca y sus armónicos. Además, se asigna uno de los modos a la frecuencia de interferencia de la línea eléctrica.

Para evaluar el desempeño de los diferentes métodos utilizados, se considera una prueba de Monte Carlo, la cual consiste en añadir artificialmente la interferencia de la línea

eléctrica a todos los registros ECG de la base de datos QT, para diferentes valores de la SNR (entrada de la SNR), utilizando el modelo de perturbación de la Ecuación (3.40).



**Figura 3.4** Valores medianos de SNR y MSE obtenidos una vez eliminada la interferencia de la línea de potencia eléctrica con los métodos de eliminación de ruido considerados en el conjunto completo de registros ECG, de la base de datos QT.

Aparte de los métodos de filtrado de interferencia de línea eléctrica basados en la descomposición modal de espacio de estados con el KF propuestos, también se usó para referencia, un método fundamentado en la transformada *wavelet* discreta (DWT) [83], [1]. El método *wavelet* para eliminación de ruido se basa, para este caso, en una descomposición *wavelet* de Meyer de 10 niveles [107]. Se aplica un umbral rígido en los niveles de detalle más altos (9 y 10) y posteriormente se reconstruye la señal.

El desempeño de los métodos de filtrado se mide en términos del MSE y de la SNR de la señal, calculados entre las señales ECG originales y las filtradas. En la Figura 3.4, se muestran los resultados de esta prueba, utilizando valores de la SNR en el rango  $SNR_{in} = [-40, \dots, 40]$  dB. Las curvas de funcionamiento muestran que todos los métodos de descomposición modal basados en el KF proporcionan un mejor desempeño para la eliminación del ruido en comparación con el método *wavelet*. En particular, el método JKF-NST proporciona el mejor desempeño entre los métodos evaluados.

### 3.6 Conclusiones

En este capítulo se ha discutido el problema de descomposición modal de señales no estacionarias con base en representaciones de espacio de estados diagonales lineales dependientes del tiempo. Como contribución inicial se demuestra, con el uso de transformaciones de equivalencia, que la respuesta de una representación de espacio de estados lineal dependiente del tiempo se puede describir como la superposición de un número finito de componentes de frecuencia de banda angosta, que para el caso de la respuesta natural el proceso, se reduce a componentes modales con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo. Además, basándose en el resultado anterior, se propone una estructura particular de espacio de estados en forma de bloques diagonales, que se aplica para calcular descomposiciones modales de señales no estacionarias en combinación con KF. Se proponen dos

métodos basados en KF para estimar las descomposiciones modales, uno basado en la estimación conjunta de estados y parámetros de la representación de bloques diagonales (JKF-NST), y otro basado en la estimación desacoplada de estados y parámetros (DKF-NST). Ambos métodos corresponden a generalizaciones de los conocidos rastreadores de frecuencia con filtro de Kalman (KF-FT), siendo la principal ventaja que los métodos obtenidos son lineales en los parámetros.

La metodología propuesta se aplica en la descomposición modal y en la supresión del ruido en registros ECG. El análisis realizado en la descomposición modal y eliminación de ruido de registros ECG, con una prueba de Monte Carlo, demuestra la mayor precisión y confiabilidad en el seguimiento de los métodos propuestos, especialmente en el caso del método JKF-NST.

Como conclusión final, se puede afirmar que los métodos propuestos constituyen una herramienta fiable para la descomposición modal en línea, de señales multicomponentes no estacionarias, con resultados precisos comparables e incluso mejores que otros métodos del estado del arte. Los esfuerzos adicionales pueden dirigirse al perfeccionamiento de los métodos propuestos para casos especiales, como por ejemplo el caso de los armónicos. Asimismo, sería interesante investigar métodos para autoajustar los procedimientos de descomposición modal en situaciones especiales, como por ejemplo, en el caso de una señal no estacionaria; evitando así el problema del ajuste de las varianzas del ruido del proceso y de la medida. También, sería interesante investigar métodos para autoajustar los procedimientos de descomposición modal cuando operan sobre una señal no estacionaria, evitando así el problema del ajuste de las varianzas del ruido del proceso y de la medición. Esto será analizado en los próximos capítulos.





## 4 Representaciones modales en SS para la descomposición de señales NS multivariadas

---

La descomposición modal se puede definir como el problema de separar una señal en un conjunto finito de componentes oscilatorios ortogonales. En el caso no estacionario, los componentes oscilatorios comprenden sinusoides con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo, o amplitud instantánea (IA) y frecuencia instantánea (IF).

Existen varios métodos bien establecidos de descomposición modal que se pueden aplicar a señales no estacionarias individuales (univariantes), incluyendo: la descomposición ortogonal propia [90], la descomposición en modo empírico [54], el seguimiento de crestas en representaciones tiempo-frecuencia/tiempo-escala [64] y las transformadas de extracción/sincronización [86]. Las limitaciones fundamentales de estos métodos no paramétricos se vinculan con la resolución máxima alcanzable en el dominio tiempo-frecuencia y su alta sensibilidad al ruido y a las singularidades de la señal, tales como discontinuidades/cruces de la IF o amplitudes que se desvanecen tienden a cero [64, 126].

Los rastreadores de frecuencia del KF constituyen métodos alternativos de descomposición modal paramétrica [40]. Estos se basan en bloques de segundo orden de *espacio de estados* (SS) que describen una única componente sinusoidal y su cuadratura, mientras que se añade un tercer estado que representa la IF. La relación no lineal de la IF con los modos, a través de una función trigonométrica, requiere aproximaciones no lineales del KF [40, 34, 33]. Se ha presentado un marco unificado en [10], donde se introducen bloques de segundo orden, compuestos por las partes real e imaginaria del valor propio instantáneo de la componente modal. Estos coeficientes comprenden un vector de parámetros, estimado conjuntamente con el vector de estado (modal). Si bien la representación del SS resultante es más grande, implica una no linealidad bilineal más suave, que puede ser tratada mejor por un EKF.

El desempeño de estos métodos está ligado a la selección correcta de las covarianzas del estado, los parámetros y el ruido. Esta selección suele dejarse en manos del usuario. No

obstante, se han propuesto esquemas de optimización basados en la verosimilitud marginal o el error de predicción del KF [10] o el seguimiento adaptativo [33]. Sin embargo, para limitar el número de parámetros a optimizar, las covarianzas suelen definirse como matrices diagonales, lo que limita la precisión potencial de la estimación, especialmente cuando las IF de diferentes componentes están correlacionadas.

En contraste con el caso univariante, la descomposición modal de señales no estacionarias multivariantes (vectoriales) ha recibido menos atención. No obstante, señales como las eléctricas del corazón o del cerebro, y las señales de vibración de maquinaria rotativa o turbinas eólicas, son multivariantes y no estacionarias por naturaleza. En estos casos, el análisis modal puede facilitar la separación de los componentes de la señal y su origen. Además, como las señales multivariantes proporcionan una vista colectiva del sistema subyacente, existe un potencial latente para un mejor aislamiento de los componentes modales y una mayor robustez al ruido, en contraste con los análisis modales univariados independientes [126]. Los métodos de identificación de sistemas paramétricos no estacionarios multivariantes (ARMA dependiente del tiempo y relacionados), se pueden utilizar para derivar estimaciones de la IA y la IF [124, 144]. Sin embargo, estos métodos no rastrean directamente las cantidades modales, lo que resulta en estimaciones ruidosas/discontinuas, y están plagados de modos espurios.

En este capítulo, basado en la formulación de espacio de estado diagonal dependiente del tiempo proporcionada en [10], se aborda el problema del análisis en el dominio modal de señales multivariantes no estacionarias. Esto requiere la introducción de una matriz de mezcla de modos, que debe ser identificada [13]. La matriz de mezcla junto con las covarianzas de estado, parámetros y ruido y los valores iniciales se establecen como hiperparámetros de la representación modal de SS y se estiman posteriormente con un algoritmo de Expectación-Maximización (EM) personalizado.

La metodología propuesta se evalúa con dos ejemplos numéricos: el primer caso corresponde a la aplicación del método de descomposición armónica no estacionaria a un sistema dinámico no lineal dependiente del tiempo; el segundo caso se refiere a un sistema con una señal multivariante que está caracterizado por tres componentes modales, el cual presenta cruces de modo y amplitudes que desaparecen. El marco metodológico se presenta en la Sección 4.1, mientras que los ejemplos numéricos se presentan en la Sección 4.2.

## 4.1 Marco metodológico

### 4.1.1 Representación modal del espacio de estado dependiente del tiempo

Considérese la señal multivariante  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^n$ , obtenida por la superposición de  $M$  componentes modales no estacionarios como:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{m=1}^M \Re\{\boldsymbol{\psi}_m x_{m,k}\} + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k \sim \text{NID}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon) \quad (4.1a)$$

$$x_{m,k} = A_{m,k} \cdot e^{j\phi_{m,k}} \quad (4.1b)$$

donde  $x_{m,k} \in \mathbb{C}$  es la  $m$ -ésima componente modal no estacionaria (*modo*) con *ganancia instantánea* (IA)  $A_{m,k} \in \mathbb{R}$  y *fase instantánea* (IP)  $\phi_{m,k} \in \mathbb{R}$ , mientras que el vector de mezcla  $\boldsymbol{\Psi}_m \in \mathbb{C}^n$  representa la proporción de cada componente modal en la señal y  $\boldsymbol{\varepsilon}_k \in \mathbb{R}^n$  es el ruido de la medición, que se supone un proceso NID de media cero, con una matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ . Cada modo puede asociarse con la IF  $\omega_{m,k}$  definido como [26]:

$$\omega_{m,k} = \frac{\partial}{\partial k} \phi_{m,k} \approx \frac{1}{T_s} (\phi_{m,k} - \phi_{m,k-1}) \quad [\text{rad/s}] \quad (4.2)$$

donde  $T_s$  es el período de muestreo. Para evitar la indeterminación de los coeficientes en el vector de mezcla y las IA, se considera que los modos  $x_{m,k}$  son ortonormales, de modo que  $\langle x_{m,k}, x_{n,k} \rangle = 1$ , si  $m = n$  y cero en otro caso. Como se demuestra en [10], una señal de respuesta única  $y_{i,k}$ ,  $i = 1, \dots, n$  puede representarse como la respuesta de un sistema de SS en bloques diagonales con coeficientes dependientes del tiempo. Esta representación se puede extender a la señal multivariante  $\mathbf{y}_{m,k}$ , como sigue:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{k-1}) \cdot \mathbf{z}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{u}_k \sim \text{NID}(\mathbf{0}_{2M}, \boldsymbol{\Sigma}_u) \quad (4.3a)$$

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \text{NID}(\mathbf{0}_{2M}, \boldsymbol{\Sigma}_v) \quad (4.3b)$$

$$\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{z}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k \sim \text{NID}(\mathbf{0}_n, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon) \quad (4.3c)$$

donde los vectores de estado y de parámetros son respectivamente:

$$\mathbf{z}_k := \begin{bmatrix} \Re\{x_{1,k}\} \\ \Im\{x_{1,k}\} \\ \vdots \\ \Re\{x_{M,k}\} \\ \Im\{x_{M,k}\} \end{bmatrix}_{2M} \quad \boldsymbol{\theta}_k := \begin{bmatrix} \alpha_{1,k} \\ \beta_{1,k} \\ \vdots \\ \alpha_{M,k} \\ \beta_{M,k} \end{bmatrix}_{2M} \quad (4.4)$$

con  $\Re\{\mathbb{C}\}$  indicando las parte real e  $\Im\{\mathbb{C}\}$  la parte imaginaria del número complejo  $\mathbb{C}$ . La matriz de medición  $\boldsymbol{\Psi}$  y la matriz de transición de estado  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_k)$  se definen como:

$$\boldsymbol{\Psi} = [\Re\{\boldsymbol{\Psi}_1\} \quad \Im\{\boldsymbol{\Psi}_1\} \quad \dots \quad \Re\{\boldsymbol{\Psi}_M\} \quad \Im\{\boldsymbol{\Psi}_M\}] \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_k) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{M}_M(\boldsymbol{\theta}_k) & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (4.5b)$$

$$\mathbf{M}_m(\boldsymbol{\theta}_k) = \begin{bmatrix} \alpha_{m,k} & \beta_{m,k} \\ -\beta_{m,k} & \alpha_{m,k} \end{bmatrix}, \quad m = 1, \dots, M \quad (4.5c)$$

donde  $\alpha_{m,k} + j\beta_{m,k} = \lambda_{m,k}$  representa el valor propio instantáneo asociado con el modo  $m$ -ésimo, de manera que:

$$x_{m,k} = \prod_{\tau=1}^k \lambda_{m,\tau} = \prod_{\tau=1}^k (\alpha_{m,\tau} + j\beta_{m,\tau}) \quad (4.6)$$

$$A_{m,k} = \left| \prod_{\tau=1}^k \lambda_{m,\tau} \right|, \quad \phi_{m,k} = \sum_{\tau=1}^k \arg(\lambda_{m,\tau}) \quad (4.7)$$

Las innovaciones de los estados  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{2M}$ , las innovaciones de los parámetros  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{2M}$  y el ruido de medición  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  son procesos aleatorios de media cero NID y no correlacionados mutuamente, con covarianzas respectivas  $\boldsymbol{\Sigma}_u \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_v \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}$ . Debido a la condición de ortonormalidad de los modos, la covarianza de las innovaciones de estado debe ser diagonal, de modo que  $\boldsymbol{\Sigma}_u = \text{diag}(\sigma_{u_1}^2, \sigma_{u_2}^2, \dots, \sigma_{u_{2M}}^2)$  con  $\sigma_{u_{2i}}^2 = \sigma_{u_{2i-1}}^2$ , para todo  $i = 1, \dots, M$ .

La Ecuación (4.3a) define una relación bilineal entre los valores previos del estado y los vectores de parámetros, mientras que la Ecuación (4.3b) define un modelo de media de desviación para el vector de parámetros, donde el valor actualizado del parámetro es igual al valor anterior más algún incremento aleatorio. Por otra parte, la Ecuación (4.3c) es equivalente a la Ecuación (4.1a).

### 4.1.2 Definición del problema de identificación

El modelo de componentes modales de SS dado en la Ecuación (4.3) está formado por cuatro componentes, a saber, la señal observada  $\mathbf{y}_k$ , la estructura (número de modos)  $M$ , las variables latentes correspondientes a los vectores de estado y de parámetros  $\mathbf{z}_k$  y  $\boldsymbol{\theta}_k$  y los hiperparámetros (parámetros del modelo modal SS)  $\mathcal{P} := \{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Sigma}_u, \boldsymbol{\Sigma}_v, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\}$ . Desde la perspectiva de la identificación, sólo se conoce  $\mathbf{y}_k$ , mientras que se debe calcular/identificar  $\mathbf{z}_k$ ,  $\boldsymbol{\theta}_k$ ,  $M$  y  $\mathcal{P}$ . En el análisis que se presenta a continuación, se supone que se conoce el número de componentes modales ( $M$ ). Si no es así, siempre es posible evaluar diferentes modelos con complejidades crecientes y seleccionar el mejor en función de algún criterio de desempeño, como la probabilidad. Así, dada la señal  $\mathbf{y}_1^N := \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N\}$  y una estructura  $M$ , el objetivo de este problema de identificación es determinar tanto las variables ocultas  $\{\mathbf{z}_1^N, \boldsymbol{\theta}_1^N\}$  como los hiperparámetros  $\mathcal{P}$  que mejor se ajusten a los datos disponibles. A su vez, esta tarea puede dividirse en dos partes, como se explica a continuación.

### Estimación de las trayectorias de los estados y los parámetros

Si se dispone de hiperparámetros, se puede utilizar el KF y el suavizado a intervalos fijos para calcular la distribución de estados y parámetros, dados los datos y los hiperparámetros. Los procedimientos de filtrado y suavizado tienen como objetivo calcular la distribución posterior conjunta de los vectores de estado y de parámetros, de modo que se calculan las

siguientes funciones de densidad de probabilidad (PDF) [123, pp. 326-330]:

$$p(\mathbf{z}_k, \boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{y}_1^k, \mathcal{P}) = \mathcal{N} \left[ \begin{matrix} \hat{\mathbf{z}}_k^k \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^k \end{matrix} \right], \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{z_k}^k & \mathbf{P}_{z_k, \theta_k}^k \\ \mathbf{P}_{\theta_k, z_k}^k & \mathbf{P}_{\theta_k}^k \end{bmatrix} \quad (4.8a)$$

$$p(\mathbf{z}_k, \boldsymbol{\theta}_k | \mathbf{y}_1^N, \mathcal{P}) = \mathcal{N} \left[ \begin{matrix} \hat{\mathbf{z}}_k^N \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^N \end{matrix} \right], \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{z_k}^N & \mathbf{P}_{z_k, \theta_k}^N \\ \mathbf{P}_{\theta_k, z_k}^N & \mathbf{P}_{\theta_k}^N \end{bmatrix} \quad (4.8b)$$

según las condiciones iniciales:

$$p(\mathbf{z}_0, \boldsymbol{\theta}_0) = \mathcal{N} \left[ \begin{matrix} \hat{\mathbf{z}}_0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \end{matrix} \right], \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{z_0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\theta_0} \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{\mathbf{z}}_k^k := \mathbb{E}\{\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_1^k, \mathcal{P}\}$  y  $\hat{\mathbf{z}}_k^N := \mathbb{E}\{\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_1^N, \mathcal{P}\}$  definen el valor esperado del vector de estado en el tiempo  $k$ , con base en los datos hasta el tiempo  $k$  (filtrado) y hasta el tiempo  $N$  (suavizado a intervalo fijo), con las covarianzas asociadas,

$$\mathbf{P}_{z_k}^k := \mathbb{E}\{(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^k)(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^k)^\top | \mathbf{y}_1^k, \mathcal{P}\} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{P}_{z_k}^N := \mathbb{E}\{(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^k)(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^k)^\top | \mathbf{y}_1^N, \mathcal{P}\}. \quad (4.10)$$

Definiciones similares se aplican para  $\mathbf{P}_{z_k, \theta_k}^k$  y  $\mathbf{P}_{z_k, \theta_k}^N$ .

Debido a la bilinealidad entre los vectores de estado y de parámetros en la ecuación de transición de estado (Ecuación (4.3a)), se requiere un método de linealización adecuado (filtros de Kalman extendidos o de punto sigma) [138]. Aquí se aplica el filtro/suavizador de Kalman extendido.

### Estimación de los hiperparámetros

Si se conocen las trayectorias de los estados/parámetros, las estimaciones de los hiperparámetros y de las condiciones iniciales pueden derivarse de la función log-verosimilitud:

$$\begin{aligned} -2 \ln \mathcal{L}(\mathcal{P}) &= \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{z_0}| + (\mathbf{z}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{z_0}^{-1} (\mathbf{z}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0) \\ &\quad + \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{\theta_1}| + (\boldsymbol{\theta}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)^\top \mathbf{P}_{\theta_1}^{-1} (\boldsymbol{\theta}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ &\quad + N \ln |\boldsymbol{\Sigma}_u| + \sum_{t=1}^N \mathbf{u}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} \mathbf{u}_k \\ &\quad + N \ln |\boldsymbol{\Sigma}_v| + \sum_{t=1}^N \mathbf{v}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{v}_k \\ &\quad + N \ln |\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon| + \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde  $|\cdot|$  indica el determinante de la matriz en el argumento y, a partir de la Ecuación (4.3),  $\mathbf{u}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{k-1})\mathbf{z}_{k-1}$ ,  $\mathbf{v}_k = \boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}$  and  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}_k$ . Dado que las trayectorias de los estados y los parámetros son desconocidas, la verosimilitud de la Ecuación (4.11) no puede optimizarse directamente. En su lugar, las estimaciones de estado/parámetro suavizadas

y los hiperparámetros se perfeccionan iterativamente con la ayuda de un algoritmo de *Expectación-Maximización* (EM). Formalmente, los hiperparámetros en la iteración  $j$  se obtienen a partir de la optimización de la función objetivo [123, p. 340]:

$$\mathcal{Q}(\mathcal{P}|\mathcal{P}[j-1]) := \mathbb{E}\{-2\ln\mathcal{L}(\mathcal{P}) | \mathbf{y}_1^N, \mathcal{P}[j-1]\} \quad (4.12)$$

con base en la PDF del estado/parámetros suavizados, condicionada a los datos disponibles y a la conjetura previa de los hiperparámetros  $\mathcal{P}[j-1]$ .

Aplicando la definición de la Ecuación (4.12) sobre la verosimilitud en la Ecuación (4.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\mathcal{P}|\mathcal{P}[j-1]) = & \ln|\boldsymbol{\Sigma}_{z_0}| + \ln|\boldsymbol{\Sigma}_{\theta_0}| + \text{tr}\left\{\boldsymbol{\Sigma}_{z_0}^{-1}\left(\mathbf{P}_{z_0}^N + (\hat{\mathbf{z}}_0^N - \hat{\mathbf{z}}_0)(\hat{\mathbf{z}}_0^N - \hat{\mathbf{z}}_0)^\top\right)\right\} \\ & + \text{tr}\left\{\boldsymbol{\Sigma}_{\theta_0}^{-1}\left(\mathbf{P}_{\theta_0}^N + (\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^N - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^N - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)^\top\right)\right\} + N\ln|\boldsymbol{\Sigma}_u| + N\ln|\boldsymbol{\Sigma}_v| \\ & + N\ln|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon| + \text{tr}\left\{\boldsymbol{\Sigma}_u^{-1}\left(\mathbf{S}_{z_{11}} - \mathbf{S}_{z_{10}} - \mathbf{S}_{z_{10}}^\top + \mathbf{S}_{z_{00}}\right)\right\} \\ & + \text{tr}\left\{\boldsymbol{\Sigma}_v^{-1}\left(\mathbf{S}_{\theta_{11}} - \mathbf{S}_{\theta_{10}} - \mathbf{S}_{\theta_{10}}^\top + \mathbf{S}_{\theta_{00}}\right)\right\} + \text{tr}\left\{\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}\mathbf{S}_y\right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{z_{11}} &:= \sum_{k=2}^N \left( \hat{\mathbf{z}}_k^N (\hat{\mathbf{z}}_k^N)^\top + \mathbf{P}_{z_k}^N \right) \\ \mathbf{S}_{z_{10}} &:= \sum_{k=2}^N \left( \hat{\mathbf{z}}_k^N (\hat{\mathbf{z}}_{k-1}^N)^\top + \mathbf{P}_{z_k, z_{k-1}}^N \right) \mathbf{M}^\top (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^N) \\ \mathbf{S}_{z_{00}} &:= \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{M} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^N) \left( \hat{\mathbf{z}}_k^N (\hat{\mathbf{z}}_k^N)^\top + \mathbf{P}_{z_k}^N \right) \mathbf{M}^\top (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^N) \\ \mathbf{S}_{\theta_{11}} &:= \sum_{k=2}^N \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^N (\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^N)^\top + \mathbf{P}_{\theta_k}^N \right) \\ \mathbf{S}_{\theta_{10}} &:= \sum_{k=2}^N \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^N (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^N)^\top + \mathbf{P}_{\theta_k, \theta_{k-1}}^N \right) \\ \mathbf{S}_{\theta_{00}} &:= \sum_{k=1}^{N-1} \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^N (\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^N)^\top + \mathbf{P}_{\theta_k}^N \right) \\ \mathbf{S}_y &:= \sum_{k=2}^N \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^N (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^N)^\top + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{P}_{z_k}^N \boldsymbol{\Psi}^\top \right) \end{aligned}$$

y donde  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^N := \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\Psi} \hat{\mathbf{z}}_k^N$  es el error de suavizado y  $\mathbf{P}_{z_k, z_{k-1}}^N$  y  $\mathbf{P}_{\theta_k, \theta_{k-1}}^N$  son las covarianzas de estado y de parámetros de un retardo, calculadas con el suavizador definido por la Propiedad 6.3 en [123, p. 334] y  $\text{tr}\{\cdot\}$  indica la traza de la matriz en el argumento.

A continuación, se expone el procedimiento para estimar los hiperparámetros y las condiciones iniciales. En primer lugar, se utiliza la minimización de la expectación condicional de la función log-verosimilitud de la Ecuación (4.13), mediante la técnica de

diferenciación. Después de haber realizado las operaciones algebraicas necesarias, se derivan las ecuaciones que posibilitan la actualización de los valores de los hiperparámetros y las condiciones iniciales en cada iteración del algoritmo. Estas ecuaciones de actualización resultantes son fundamentales para el correcto funcionamiento del método de descomposición modal. Esto permite una aproximación más cercana a los valores óptimos de los parámetros del modelo. El proceso de estimación de parámetros es esencial en la descomposición modal de señales no estacionarias y la utilización de técnicas eficientes para la estimación de los mismos es fundamental para obtener resultados precisos y confiables. En este caso, la metodología aplicada ha demostrado ser eficaz y robusta ante diferentes tipos de señales y condiciones. El procedimiento es como sigue:

**Actualización de los hiperparámetros:**

$$\Psi_j = \left( \sum_{k=2}^N \mathbf{y}_k (\hat{\mathbf{z}}_k^N)^\top \right) \mathbf{S}_{z_{11}}^{-1} \quad (4.14a)$$

$$\Sigma_{\varepsilon_j} = (N-1)^{-1} \mathbf{S}_y \quad (4.14b)$$

$$\Sigma_{u_j} = (N-1)^{-1} \text{diag}(s_1, s_1, s_2, s_2, \dots, s_M, s_M) \quad (4.14c)$$

$$s_m = [\mathbf{S}_{z_{11}} - \mathbf{S}_{z_{10}} - \mathbf{S}_{z_{10}}^\top + \mathbf{S}_{z_{00}}]_{2m,2m} \quad (4.14d)$$

$$\Sigma_{v_j} = (N-1)^{-1} \left( \mathbf{S}_{\theta_{11}} - \mathbf{S}_{\theta_{10}} - \mathbf{S}_{\theta_{10}}^\top + \mathbf{S}_{\theta_{00}} \right) \quad (4.14e)$$

**Actualización de las condiciones iniciales:**

$$\hat{\mathbf{z}}_0 = \hat{\mathbf{z}}_0^N \quad \Sigma_{z_0} = \mathbf{P}_{z_0}^N \quad (4.14f)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^N \quad \Sigma_{\theta_0} = \mathbf{P}_{\theta_0}^N \quad (4.14g)$$

donde  $\text{diag}(\cdot)$  indica una matriz diagonal con los elementos indicados en el argumento, y  $[x]_{i,j}$  indica el  $\{i,j\}$ -ésimo elemento de la matriz  $\mathbf{X}$ . Sólo se calculan los elementos de la diagonal de la matriz de innovaciones de estado siguiendo su definición en el Sección 4.1.1.

**Resumen del algoritmo de identificación**

La identificación mediante el algoritmo EM se resume en los dos pasos siguientes:

- (i) Cálculo de la log-verosimilitud condicional esperada –Ecuación (4.13)– con el filtro/suavizador de Kalman (paso de expectación),
- (ii) Actualización de hiperparámetros por maximización de la log-verosimilitud condicional esperada –Ecuación (4.14)– (paso de maximización).

Ambos pasos se iteran hasta que se alcanza un número de iteraciones prescrito o hasta que se cumpla un criterio de convergencia. El algoritmo necesita ser inicializado con una primera estimación de los hiperparámetros y de las condiciones iniciales. Debido a la complejidad del problema de identificación, agravada por la no linealidad subyacente de la configuración modal SS, es esencial proporcionar buenos valores iniciales para mejorar las posibilidades de convergencia a la mejor solución posible. Para ello, se puede utilizar

el análisis modal estacionario tradicional en un segmento corto de la señal. Los resultados obtenidos pueden utilizarse como una estimación inicial.

### 4.1.3 Evaluación del modelo y selección del número de componentes

Una vez completada la optimización con el algoritmo EM, es de interés evaluar el desempeño del modelo obtenido. Si bien es razonable evaluar la verosimilitud logarítmica esperada en la Ecuación (4.13), es más eficiente calcular el *Suma de Residuos Cuadrados sobre la Suma de Cuadrados de la Serie* (RSS/SSS) de la señal reconstruida o la *verosimilitud marginal* del modelo. Ambas cantidades se definen de la siguiente manera:

$$RSS/SSS_l(\%) = \frac{\sum_{k=1}^N (\hat{\varepsilon}_{l,k}^N)^2}{\sum_{k=1}^N y_{l,k}^2} \times 100\% \quad (4.15a)$$

$$\ln \mathcal{L}(\mathcal{P}|\mathbf{y}_1^N) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\ln |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}_k}| + \mathbf{e}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}_k}^{-1} \mathbf{e}_k) \quad (4.15b)$$

donde  $\hat{\varepsilon}_k^N := \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}_k^N$  es el error de suavizado, como se define en la ecuación (4.13), y  $\mathbf{e}_k := \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}_k^{k-1}$  es el error de predicción a un paso adelante, con matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}_t} := \mathbf{C}\mathbf{P}_{z_k, z_{k-1}}^N \mathbf{C}^\top + \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ .

El  $RSS/SSS_l$  mide el error de reconstrucción basado en las estimaciones suavizadas de los componentes armónicos como proporción de la energía total de la señal para cada canal de señal indexado por  $l$ . Por otro lado, la verosimilitud (logarítmica) marginal mide la adecuación del modelo subyacente para representar la señal general antes de tener en cuenta el factor de corrección introducido por el filtro/suavizador de Kalman. Por lo tanto, si bien el  $RSS/SSS_l$  tiende a sobreajustar la señal, la verosimilitud marginal es un indicador más confiable de la adecuación del modelo subyacente y tiene menos tendencia a sobreajustar.

Teniendo en cuenta estas dos medidas, también es posible seleccionar el número de componentes mediante un esquema de búsqueda discreta, donde se consideran varios valores candidatos de  $M$  en un cierto rango de valores. Luego, se selecciona la estructura que ofrece el mejor rendimiento en términos de RSS/SSS y verosimilitud marginal.

## 4.2 Análisis de señales multivariadas no estacionarias

Muchos sistemas de la vida real se distinguen por exhibir dinámicas no estacionarias, al mismo tiempo que conservan cierto grado de periodicidad. Ejemplos de ello incluyen máquinas rotativas y alternativas, donde la dinámica está impulsada por la rotación de uno o varios ejes. De manera similar, algunos sistemas biológicos, como el sistema cardíaco o respiratorio, son periódicos en función del ritmo cardíaco o respiratorio.

La caracterización efectiva de estas señales y la extracción/remoción de componentes de la señal son fundamentales para el análisis y la detección de anomalías. La caracterización efectiva puede evaluarse en términos de precisión de representación y compacidad, es decir, representar la señal con el menor error utilizando un número reducido de componentes.



Al mismo tiempo, la caracterización de la señal debe ser explicativa, en el sentido de que pueda entenderse fácilmente y quizás atribuirse a una propiedad física del sistema.

Al mismo tiempo, la presencia de ruido en las señales puede resultar en la pérdida de calidad e interpretabilidad de la señal. Por lo tanto, la separación adecuada de los componentes de la señal del ruido es una parte importante de cualquier análisis, en el cual es necesario preservar cuidadosamente las características morfológicas originales de la señal. Esta sección se centra en la descomposición armónica de señales pseudo-periódicas no estacionarias multivariadas. En este marco, un componente de la señal corresponde a una única sinusoidal con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo. Por lo tanto, en la descomposición armónica propuesta, todos los componentes de la señal están obligados a compartir la misma frecuencia fundamental dependiente del tiempo. Aquí, se establece un procedimiento para obtener dicha descomposición al transformar la señal multivariable en una representación de espacio de estados en forma de bloque diagonal con múltiples salidas. Los componentes armónicos y la frecuencia instantánea se estiman utilizando filtrado de Kalman. Además, se proporciona un marco de optimización para los hiperparámetros de la representación de espacio de estados, fundamentado en el algoritmo de EM.

El método propuesto ofrece un procedimiento preciso, compacto y físicamente explicable para analizar sistemas pseudo-periódicos no estacionarios de múltiples salidas, como se demuestra en el caso de un sistema de rotor desequilibrado simulado y en el registro de una señal multivariante que está caracterizado por tres componentes modales, que presenta cruces de modo y amplitudes que desaparecen. Estos dos problemas son los temas de análisis en la siguientes subsecciones.

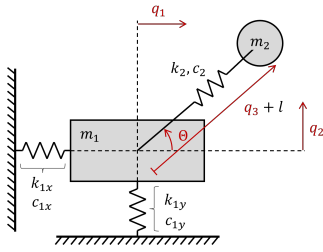
### 4.2.1 Rotor flexible desequilibrado

#### Descripción del sistema no lineal dependiente del tiempo

El sistema para estudio se puede observar en la Figura 4.1. Está compuesto por dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , donde la primera representa el estator y la segunda la masa desequilibrada en el rotor. La masa  $m_2$  rota alrededor de  $m_1$  con una frecuencia angular  $\Omega = \dot{\theta}$ , donde  $\theta$  indica el ángulo del rotor. En la configuración no deformada,  $m_2$  se encuentra a una distancia  $l$  del estator. El estator está fijo al suelo en los ejes horizontal y vertical mediante un resorte-amortiguador con coeficientes de rigidez y amortiguamiento  $k_{1x}, k_{1y}$  y  $c_{1x}, c_{1y}$ , mientras que el estator y el rotor están conectados mediante un resorte-amortiguador con rigidez  $k_2$  y amortiguamiento  $c_2$ . El sistema gira al momento de aplicar un par de torsión  $\tau$  al rotor, el cual se controla para lograr una velocidad de rotación deseada  $\Omega_d$ . El par de torsión  $\tau$  se regula aplicando una ley de control Proporcional-Integral (P-I), de modo que

$$\tau = C_p(\Omega - \Omega_d) + C_i \int (\Omega - \Omega_d) dt \quad (4.16)$$

donde  $C_p$  y  $C_i$  son los coeficientes proporcional e integral, respectivamente [11]. Los valores de todos los parámetros del sistema están consignados en la Tabla 4.1 .



Parámetro	Valor
Masas (kg)	$m_1 = 20, m_2 = 0.5$
Rigidez (kN/m)	$k_{1x} = 2, k_{1y} = 20, k_2 = 0.5$
Amortiguación (N s/m)	$c_{1x} = c_{1y} = 10^{-3}, c_2 = 0$
Radio no deformado (m)	$l = 0.25$
Coefficientes P-I	$C_p = 4, C_i = 20$
Velocidad del rotor (rad/s)	$\Omega_d = 2.8\pi$

**Figura 4.1** Representación gráfica del sistema de rotor flexible no equilibrado utilizado para las simulaciones.

**Tabla 4.1** Parámetros utilizados en la simulación del sistema no lineal dependiente del tiempo.

El sistema se caracteriza por un modelo de 4 grados de libertad, a saber  $q_1, q_2, q_3$  y  $\theta$ , y está gobernado por la ecuación diferencial:

$$\mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2(l+q_3)\dot{\theta}^2 \cos \theta + 2m_2\dot{q}_2\dot{\theta} \sin \theta - c_{1x}\dot{q}_1 - k_{1x}q_1 \\ m_2(l+q_3)\dot{\theta}^2 \sin \theta - 2m_2\dot{q}_2\dot{\theta} \cos \theta - c_{1y}\dot{q}_2 - k_{1y}q_2 \\ m_2(l+q_3)\dot{\theta}^2 - c_2\dot{q}_3 - k_2q_3 \\ \tau - 2m_2\dot{q}_3\dot{\theta}(l+q_3) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

donde la matriz de masa  $\mathbf{M}$  se define como

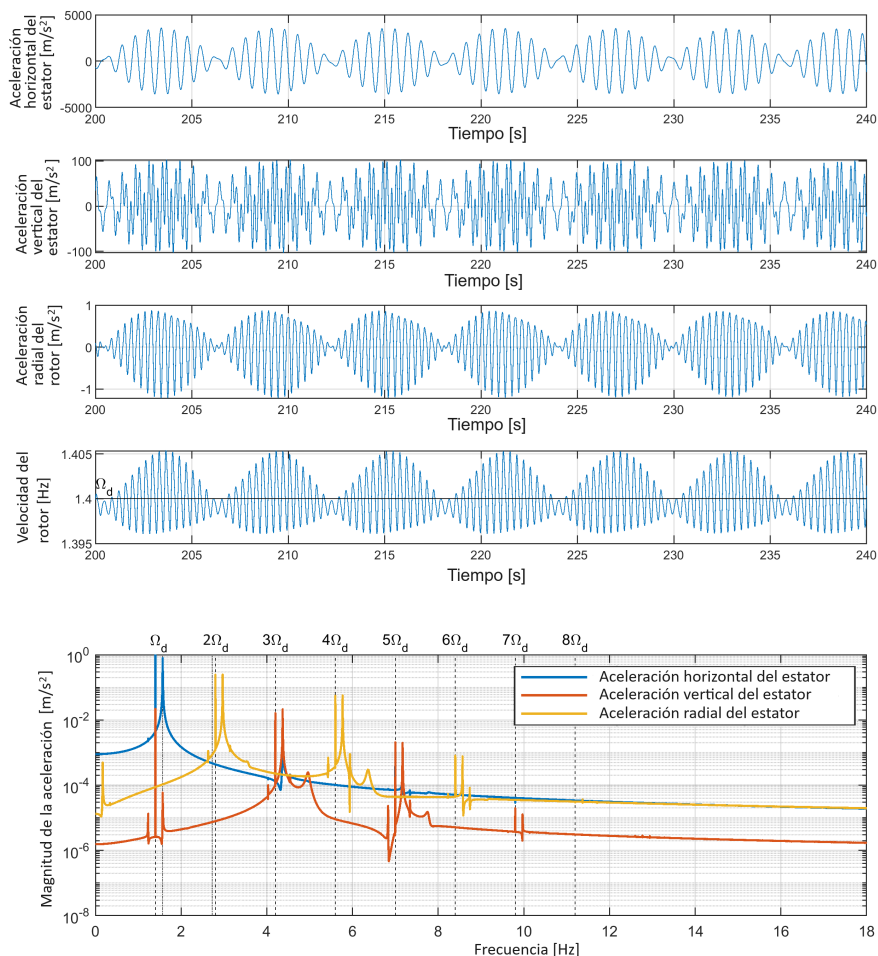
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & m_2 \cos \theta & -m_2(l+q_2) \sin \theta \\ 0 & m_1 + m_2 & m_2 \sin \theta & m_2(l+q_2) \cos \theta \\ m_2 \cos \theta & m_2 \sin \theta & m_2 & 0 \\ -m_2(l+q_2) \sin \theta & m_2(l+q_2) \cos \theta & 0 & m_2(l+q_2)^2 \end{bmatrix}$$

La velocidad del rotor dependiente del tiempo contribuye como una frecuencia de excitación variable, mientras que el cambio en el radio de rotación de la masa del rotor introduce un comportamiento adicional en el sistema el cual es dependiente del tiempo.

La respuesta del sistema no lineal se calcula utilizando el método de Runge-Kutta (función ode45 de MATLAB®) durante un período de 300 s, con una frecuencia de muestreo de 200 Hz. Todas las condiciones iniciales se fijan en cero, excepto la velocidad del rotor, que se establece en  $\Omega_d$ . Después de la integración, las series de tiempo obtenidas se reducen a una frecuencia de muestreo de 40 Hz, que es la frecuencia de muestreo utilizada en los análisis posteriores. La Figura 4.2 muestra las respuestas de aceleración horizontal y vertical del estator y la aceleración radial en el rotor, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. La naturaleza cuasi periódica de la respuesta es evidente en todas las respuestas de aceleración. Además, la representación en el dominio de la frecuencia pone de manifiesto la estructura armónica de la respuesta.

### Descomposición de componentes modales no estacionarios

La respuesta multivariable, que comprende las respuestas de aceleración horizontal, vertical y axial del sistema no lineal, se descompone en componentes modales no estacionarios utilizando tres métodos para su comparación:



**Figura 4.2** Las aceleraciones horizontales, verticales y radiales obtenidas en el estator y el rotor para el sistema de rotor desequilibrado en la ecuación (4.17) se calcularon utilizando los parámetros del sistema definidos en la Tabla 4.1.

- **Descomposición armónica NS (KF–Armónico)**, el método propuesto.
- **Descomposición modal NS (KF–Diagonal)**, que representa un modelo con capacidades similares a KF–Armónico, pero con menos restricciones, ya que todos los coeficientes de los bloques de segundo orden son libres y no correlacionados entre sí. Como resultado, cada componente puede interpretarse como un modo NS, pero no están colectivamente restringidos como en una descomposición armónica. El método KF–Diagonal se optimiza mediante un procedimiento EM similar al método KF–Armónico, y se establece el mismo procedimiento de inicialización. Los pormenores de esta metodología se pueden encontrar en [13].

- **Análisis de espectro singular (SSA)**, es un método de descomposición no paramétrico y no estacionario, basado en la *Descomposición en Valores Singulares (SVD)* de la matriz de covarianza empírica de la respuesta de aceleración multivariada del sistema. Esto da como resultado las llamadas *Funciones Ortogonales Empíricas (EOFs)*, que en el caso no estacionario se interpretan como componentes modales ortogonales con la IF y la IA correspondientes. La implementación considerada aquí corresponde al algoritmo de SSA Multivariado (MSSA) discutido en [49, Cap.4].

**Tabla 4.2** Ajuste de los métodos de descomposición modal considerados.

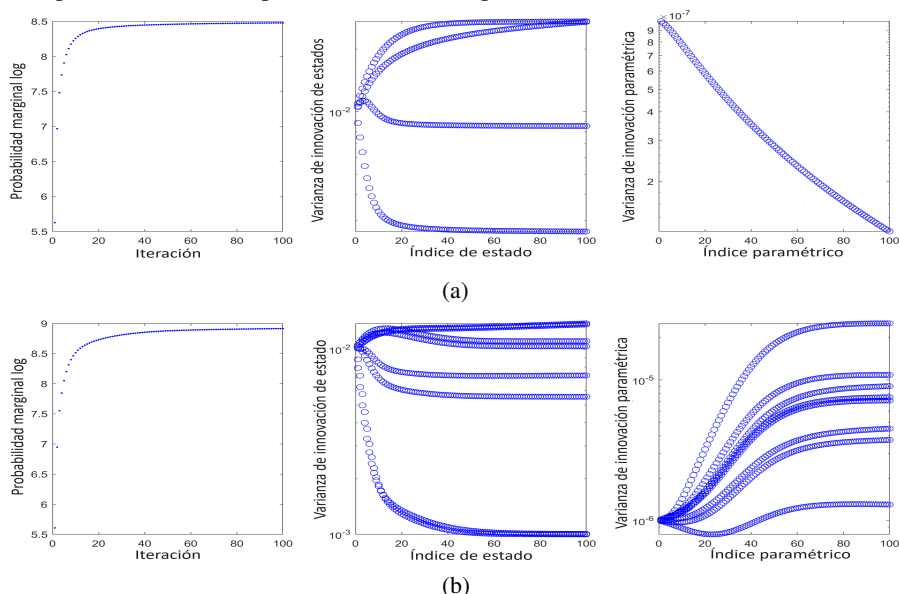
Método	Configuración
<i>KF–Armónico</i> <i>KF–Diagonal</i>	<p><b>Estructura:</b> <math>M = 4</math> componentes armónicos/modales con frecuencias consecutivas, de modo que se rastrean las frecuencias <math>\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega</math>.</p> <p><b>Inicialización:</b> Frecuencia inicial <math>\omega_0</math> seleccionada como la frecuencia en la FFT de tiempo corto más cercana a la frecuencia objetivo <math>\Omega_d</math> con magnitud máxima (pico FFT). El valor inicial del vector armónico/modal <math>\mathbf{z}_0</math> se establece en 1 para los componentes en fase y en 0 para los componentes en cuadratura. Los valores iniciales de los hiperparámetros son: <math>\Sigma_\epsilon = \text{cov}(\mathbf{y}_t)</math>, <math>\Sigma_u = \sigma_u^2 \mathbf{I}</math>, con <math>\sigma_u^2 = 10^{-2}</math>, con <math>\sigma_w^2 = 10^{-6}</math>, y <math>\mathbf{C}</math> ajustado a las partes real/imaginaria de los valores pico en <math>\omega_0</math> y sus armónicos.</p> <p><b>Optimización EM:</b> establecida en un máximo de 100 iteraciones.</p> <p>Hiperparámetros optimizados <i>KF–Armónico</i>: <math>\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 2M}</math>, <math>\Sigma_\epsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}</math>, <math>\Sigma_u \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}</math> y <math>\Sigma_w \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}</math>.</p> <p>Hiperparámetros optimizados <i>KF–Diagonal</i>: <math>\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 2M}</math>, <math>\Sigma_\epsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}</math>, <math>\Sigma_u \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}</math> y <math>\Sigma_w \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}</math>.</p>
<i>MSSA</i>	<p>Orden de incrustación <math>K = 8</math>.</p> <p>Implementado como el SVD de la matriz Hankel de datos.</p>

Los tres métodos considerados son capaces de proporcionar descomposiciones de series temporales NS multivariantes. También ofrecen la posibilidad de comparar las descomposiciones obtenidas tras imponer restricciones incrementales a la dinámica. En este sentido, el método *KF–Armónico* considera restricciones adicionales, en las que es necesario estimar la frecuencia de cada uno de los bloques de segundo orden. Además, todos los bloques se caracterizan por ser múltiplos de la misma frecuencia instantánea. En el método *KF–Diagonal*, hay que estimar los coeficientes diagonales y no diagonales de los bloques de segundo orden y los parámetros de los distintos bloques no están necesariamente correlacionados. En SSA, la única restricción es que los componentes obtenidos no estén correlacionados, pero no hay ninguna restricción sobre su evolución temporal y sus frecuencias respectivas. La configuración de cada uno de los métodos se condensa en la Tabla 4.2 y los resultados se discuten a continuación.

### Resultados de la descomposición

La Figura 4.3 muestra las trayectorias de optimización seguidas por los métodos de descomposición *KF–Armónico* y *KF–Diagonal*. Cada cuadro muestra el logaritmo de la verosimilitud marginal, las entradas diagonales de la covarianza de las innovaciones del estado y las entradas diagonales de la covarianza de las innovaciones de los parámetros, a

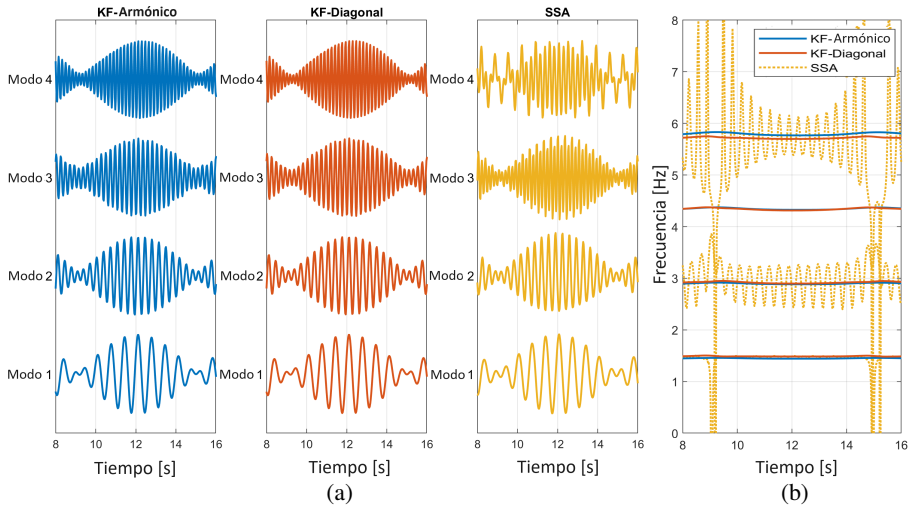
medida que se incrementa el número de iteraciones. En ambos casos, se puede observar que el logaritmo de verosimilitud marginal aumenta con el número de iteraciones y el desempeño se estabiliza aproximadamente después de 40 iteraciones.



**Figura 4.3** Trayectorias de optimización seguidas por (a) el método KF–Armónico, (b) el método KF–Diagonal.

El método KF–Diagonal proporciona en última instancia una verosimilitud marginal ligeramente más alta después de completar la optimización en comparación con el método KF–Armónico. Además, se puede observar que las varianzas de las innovaciones del estado convergen rápidamente, mientras que las varianzas de las innovaciones de los parámetros requieren más iteraciones para estabilizarse. En el caso del método KF–Armónico, la varianza de las innovaciones de los parámetros no alcanza un estado estacionario, pero el cambio relativo en la verosimilitud marginal del modelo es insignificante. Por esta razón, no se consideran más iteraciones de la optimización EM. Debido al mayor tamaño del vector de parámetros, la optimización del método KF–Diagonal requiere aproximadamente un 50% más de tiempo que en el caso del método KF–Armónico.

La Figura 4.4, muestra los cuatro modos extraídos utilizando los métodos KF–Armónico, KF–Diagonal y MSSA. La Figura 4.4(a), muestra las trayectorias modales de los primeros 4 modos, mientras que la Figura 4.4(b), muestra las correspondientes IFs extraídas de cada uno de los métodos. Para los métodos KF–Armónico y KF–Diagonal, las formas de onda de los modos obtenidos son prácticamente idénticas, mientras que en el caso de MSSA, los dos primeros modos coinciden, pero los dos últimos contienen interferencias con otros componentes en el mismo ancho de banda. Al observar las IFs en la Figura 4.4(b), se puede apreciar que las estimaciones casi coinciden en los métodos KF–Armónico y KF–Diagonal. Por otro lado, los resultados de MSSA son menos confiables, especialmente para los modos de orden superior.



**Figura 4.4** Resultados de la descomposición  $M$  obtenidos con los métodos KF–Armónico, KF–Diagonal y MSSA. (a) Formas de onda de las primeras cuatro trayectorias modales; (b) estimaciones correspondientes de las IFs.

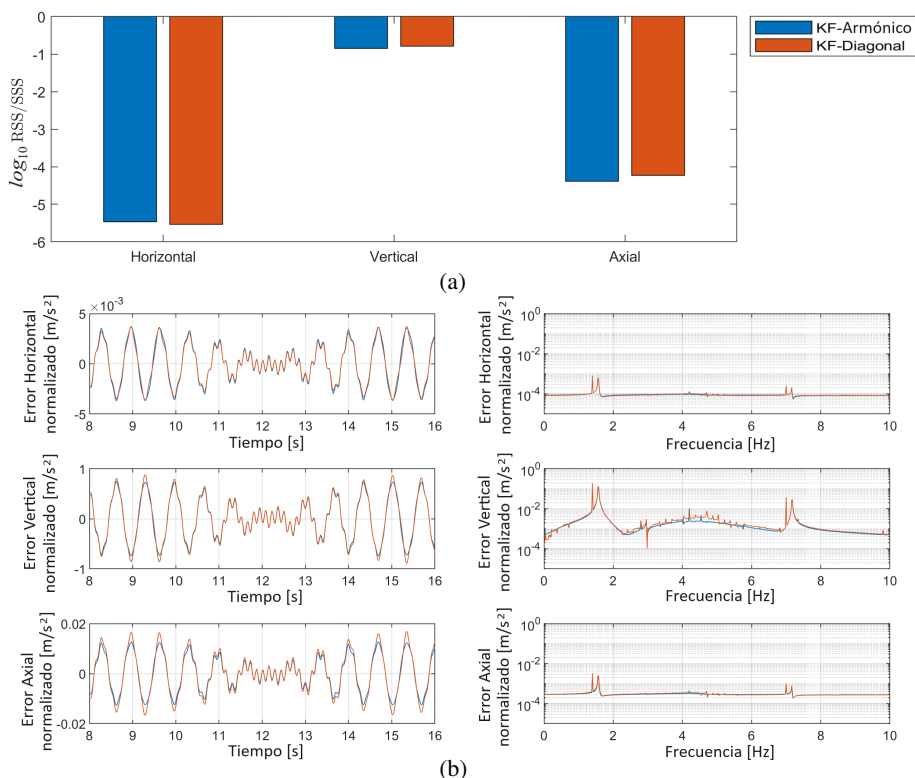
### Análisis de los residuos de KF–Armónico y KF–Diagonal

El análisis de los resultados de la descomposición modal se completa al examinar los residuos de modelado de los métodos KF–Armónico y KF–Diagonal. Esto se logra calculando los residuos suavizados obtenidos de ambos métodos, en términos de la medida RSS/SSS en la Ecuación (4.15a). La Figura 4.5(a) muestra el RSS/SSS calculado para cada uno de los grados de libertad. Los resultados son muy consistentes entre los métodos, con una pequeña ventaja hacia el método KF–Armónico. Los residuos en los grados de libertad horizontal y axial son muy bajos, en contraste con los residuos obtenidos en la dirección vertical.

Un análisis adicional en el dominio del tiempo y la frecuencia, presentado en la Figura 4.5(b), revela un patrón armónico relacionado con el grado de libertad vertical, que no es capturado por los modos seleccionados en ambos métodos. Esto, de hecho, indica que tanto el método KF–Armónico como el KF–Diagonal, son capaces de separar estos componentes modales superpuestos, a diferencia del método MSSA, donde los dos últimos modos se superponen con estos componentes dinámicos.

### Análisis de ruido

Por último, se evalúa el desempeño de los métodos KF–Armónico y KF–Diagonal bajo ruido a diferentes relaciones señal-ruido (SNR). Se consideran dos casos: (i) ruido aditivo gaussiano blanco, correspondiente a una interferencia de banda ancha en las señales de respuesta de vibración, (ii) ruido aditivo gaussiano coloreado, correspondiente a una interferencia de banda estrecha. En este último caso, el ancho de banda del ruido está centrado alrededor de 2 Hz con una mitad del ancho de banda en potencia de 3.2 Hz. En ambos escenarios, se calcula el RSS/SSS derivado de los residuos suavizados para valores crecientes de la SNR en el rango de 0 a 60 dB, con un paso de 5 dB. Los resultados de este análisis se presentan en la Figura 4.6. El caso de ruido blanco, presentado en la



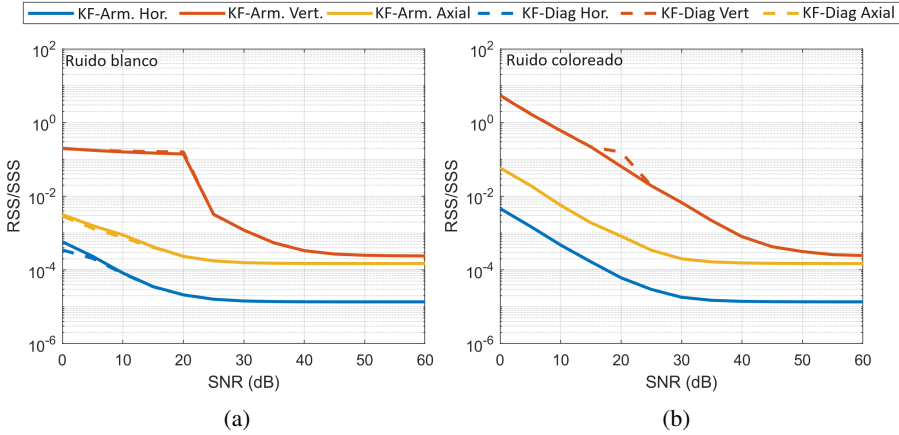
**Figura 4.5** Análisis de los residuos de estimación suavizados de los métodos KF–Armónico y KF–Diagonal. (a) RSS/SSS estimado en cada uno de los grados de libertad del sistema; (b) Análisis de los residuos en los dominios del tiempo y la frecuencia .

Figura 4.6(a), indica que el desempeño se ve afectado en niveles bajos de SNR, donde el error de estimación suavizado en el grado de libertad vertical se ve más afectado. Nótese que la respuesta es aproximadamente constante entre 0 y 20 dB. El error mínimo se alcanza cuando la SNR alcanza casi los 40 dB. El desempeño con ambos métodos, KF–Armónico y KF–Diagonal, es prácticamente el mismo. Además, el desempeño bajo ruido coloreado muestra un patrón similar; sin embargo, el desempeño bajo la SNR baja se degrada más que en el caso de ruido blanco.

#### 4.2.2 Análisis de las características de una señal no estacionaria

Como un segundo problema, se realiza la evaluación de los métodos de descomposición modal en la tarea de extraer las características de los componentes modales de una señal no estacionaria (NS). La señal en cuestión está compuesta por tres componentes sinusoidales dependientes del tiempo, los cuales se encuentran embebidos en un proceso de ruido blanco gaussiano.

Se ha prestado atención especial a las características de frecuencia-tiempo de la señal, las cuales incluyen la ocurrencia de cruce de modos y desvanecimiento temporal de uno



**Figura 4.6** Error de reconstrucción (RSS/SSS) obtenido con los métodos KF–Armónico y KF–Diagonal para SNR crecientes, considerando ruido blanco y ruido coloreado.

de los componentes modales. El objetivo de esta evaluación es determinar la eficacia de los métodos de descomposición modal en la identificación precisa de estos cambios en la señal, lo cual es esencial para muchas aplicaciones prácticas.

Los resultados alcanzados evidencian que los métodos de descomposición modal propuestos logran extraer con éxito las características de frecuencia-tiempo de la señal, incluyendo los momentos de cruce de modos y el desvanecimiento temporal de los componentes modales. Esto demuestra la eficacia y la utilidad de estos métodos en la tarea de analizar y procesar señales no estacionarias complejas para diversas aplicaciones prácticas.

Inicialmente, se comparan los cuatro métodos discutidos en la Sección 3.4, a saber: los métodos JKF–NST y DKF–NST respectivamente, el método de Rastreo de Frecuencia EKF–FT y el método de Descomposición Modal (MD) basado en TAR (TAR–MD). Posteriormente se aplica el método desarrollado en este capítulo, en el cual se aborda el análisis en el dominio modal de señales multivariadas no estacionarias. En las secciones siguientes se aplican las metodologías planteadas.

Se considera una señal multivariante de dimensión  $n = 2$ , definida como la superposición de tres sinusoides no estacionarias. Las componentes modales se definen como en [10], donde la IA y la IF de cada modo obedece a las siguientes leyes:

$$A_{1,k} = A_{1,0} + A_{1,1} \cdot \cos 2\pi T_s \alpha_1 k \quad f_{1,k} = f_{1,0} + f_{1,1} \cdot \sen 2\pi T_s \alpha_1 k \quad (4.18a)$$

$$A_{2,k} = A_{2,0} + A_{2,1} \cdot \sen 2\pi T_s \alpha_2 k \quad f_{2,k} = f_{2,0} + f_{2,1} \cdot \sen 2\pi T_s \alpha_2 k \quad (4.18b)$$

$$A_{3,k} = \max(A_{3,0} + A_{3,1} \cdot |\cos 2\pi T_s \alpha_3 k|, 0) \quad f_{3,k} = f_{3,0} + f_{3,1} \cdot \sen 2\pi T_s \alpha_3 k \quad (4.18c)$$

donde  $k = 1, 2, \dots, N$  es el tiempo discreto normalizado y  $T_s$  es el período de muestreo. Los coeficientes  $A_{m,0}$  y  $f_{m,0}$  para  $m = 1, 2, 3$  indican la amplitud y frecuencia medias, mientras que los coeficientes  $A_{m,1}$  y  $f_{m,1}$  para  $m = 1, 2, 3$ , indican la variación de la amplitud y de la frecuencia y los coeficientes  $\alpha_m$  para  $m = 1, 2, 3$ , indican las frecuencias normalizadas de la amplitud y las variaciones de la frecuencia.



**Tabla 4.3** Simulación de parámetros usados en la prueba comparativa.

Coeficientes IA e IF					
$m$	$A_{m,0}$	$A_{m,1}$	$f_{m,0}$	$f_{m,1}$	$\alpha_m$
1	1.0	0.2	50	-20	0.50
2	0.8	0.4	80	20	0.50
3	-0.2	1.0	120	20	0.25
Vectores de mezcla					
$\Psi_1 =$	$\begin{bmatrix} 1.0 - j0.8 \\ 0.5 - j0.5 \end{bmatrix}$	$\Psi_2 =$	$\begin{bmatrix} 0.5 - j0.5 \\ 0.8 - j0.1 \end{bmatrix}$	$\Psi_3 =$	$\begin{bmatrix} 0.2 - j0.8 \\ 0.4 - j0.6 \end{bmatrix}$
Propiedades de muestreo y ruido					
$N = 3000$ samples, $T_s = 1/500$ s, $SNR = 10$ dB					

La señal multivariante se construye entonces mediante la superposición de los modos individuales, según:

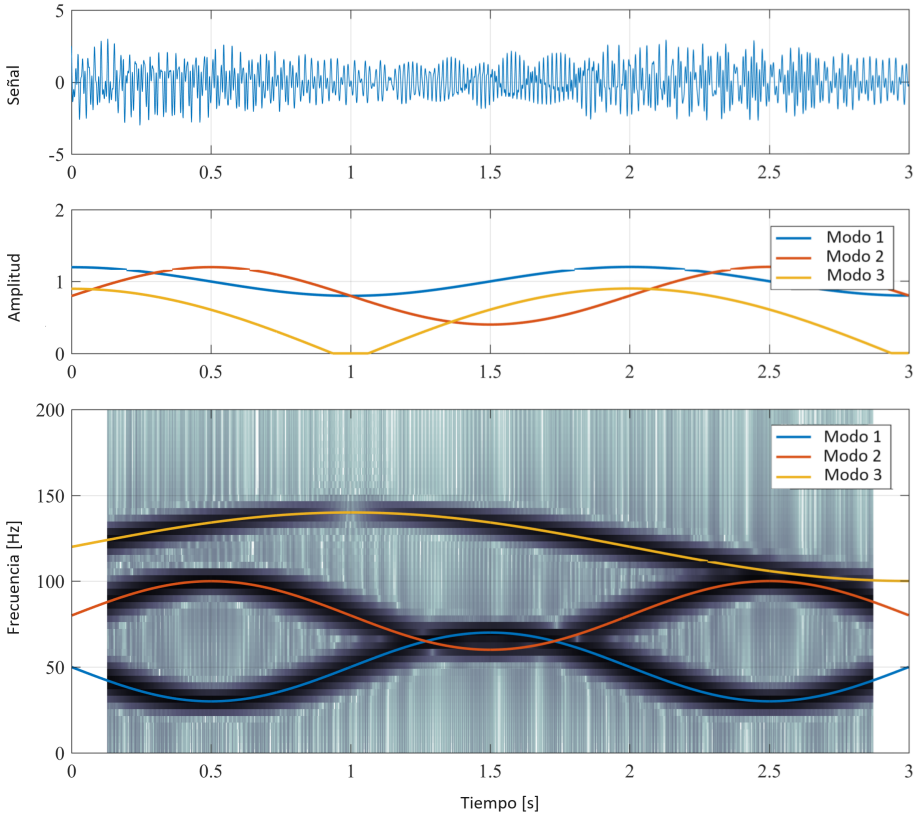
$$\mathbf{y}_k = \sum_{m=1}^3 \Psi_m x_{m,k} + \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (4.19a)$$

$$x_{m,k} = A_{m,k} \cdot e^{j\phi_{m,k}}, \quad \phi_{m,k} = \phi_{m,0} + 2\pi \sum_{\tau=1}^k f_{m,\tau} \quad (4.19b)$$

donde  $\phi_{m,0}$  es la fase inicial, la cual es una variable aleatoria con distribución uniforme en el rango  $[-\pi, \pi)$ ,  $\Psi_m$  es el vector de mezcla  $m$ -ésimo, con  $m = 1, 2, 3$ , y  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  es un ruido NID de media cero con covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}$ , con  $\sigma_\varepsilon^2$  ajustado para obtener una SNR de 10 dB. Los coeficientes IA e IF, la matriz de mezcla y otras propiedades de la señal se resumen en la Tabla 4.3. De acuerdo con las definiciones anteriores se genera una señal de  $N = 3000$  muestras, con un período de muestreo  $T_s = 1/500$  s. Una realización típica de esta señal se puede observar en la Figura 4.7. La señal presenta las siguientes características: cruce de los modos 1 y 2 en el tiempo  $k = 1,5$  s; casi cruce de los modos 2 y 3 alrededor de tiempo  $k = 2,5$  s y amplitud desvaneciente del modo 3 en  $k = 1$  s. Resulta difícil llevar a cabo la descomposición modal de este tipo específico de señal debido a la presencia de dos tipos de singularidades a saber:

- (i) Los modos 1 y 2 presentan cruces de frecuencia en los tiempos  $k = 1,25 + T_1$  s y  $k = 1,75 + T_1$  s, con  $T_1 = 2$  s;
- (ii) La amplitud del modo 3 desaparece periódicamente durante unos 400 ms alrededor de los tiempos  $k = 1 + T_1$  s, con  $T_1 = 2$  s.

Estas características hacen que la estimación de IA/IF con métodos no paramétricos univariantes convencionales sea un reto, como se demuestra en [10]. El próximo análisis pretende demostrar la mejora en la estimación de IA/IF conseguida con la descomposición modal no estacionaria multivariante propuesta, en contraste con la homóloga univariante y la ventaja del ajuste de hiperparámetros con el algoritmo EM.



**Figura 4.7** Realización típica de la señal no estacionaria simulada sin ruido. Arriba: señal en el dominio del tiempo; Medio: IA de los componentes modales; Abajo: espectrograma de la señal con IF superpuesto de cada componente modal. Parámetros del espectrograma: ventana de Hamming, longitud 256 muestras, 255 muestras superpuestas.

### Métodos de descomposición modal para señales no estacionarias

Todos los métodos se aplican asumiendo que el número de componentes modales es conocido. A continuación se describe cada método:

- 1. Métodos JKF–NST, DKF–NST y EKF–FT:** Estos métodos se aplican después de suponer que se conoce la cantidad de componentes modales. Los valores de partida se extraen de un modelo autorregresivo,  $AR(6)$ , estimado a partir de las 200 muestras iniciales de la señal. El desempeño óptimo es rastreado por un *Algoritmo Genético* (GA) que opera en el MSPE, tal como se define en la Ecuación (3.39). Las variables optimizadas son las varianzas de los estados  $\sigma_u^2$  y de los parámetros  $\sigma_v^2$ , así como la varianza del error inicial  $p_0$ , de modo que la matriz de covarianza del error inicial es de la forma  $\mathbf{P}[0|0] = p_0 \cdot \mathbf{I}$ . Además, la varianza del error de medición  $\sigma_w^2$  se

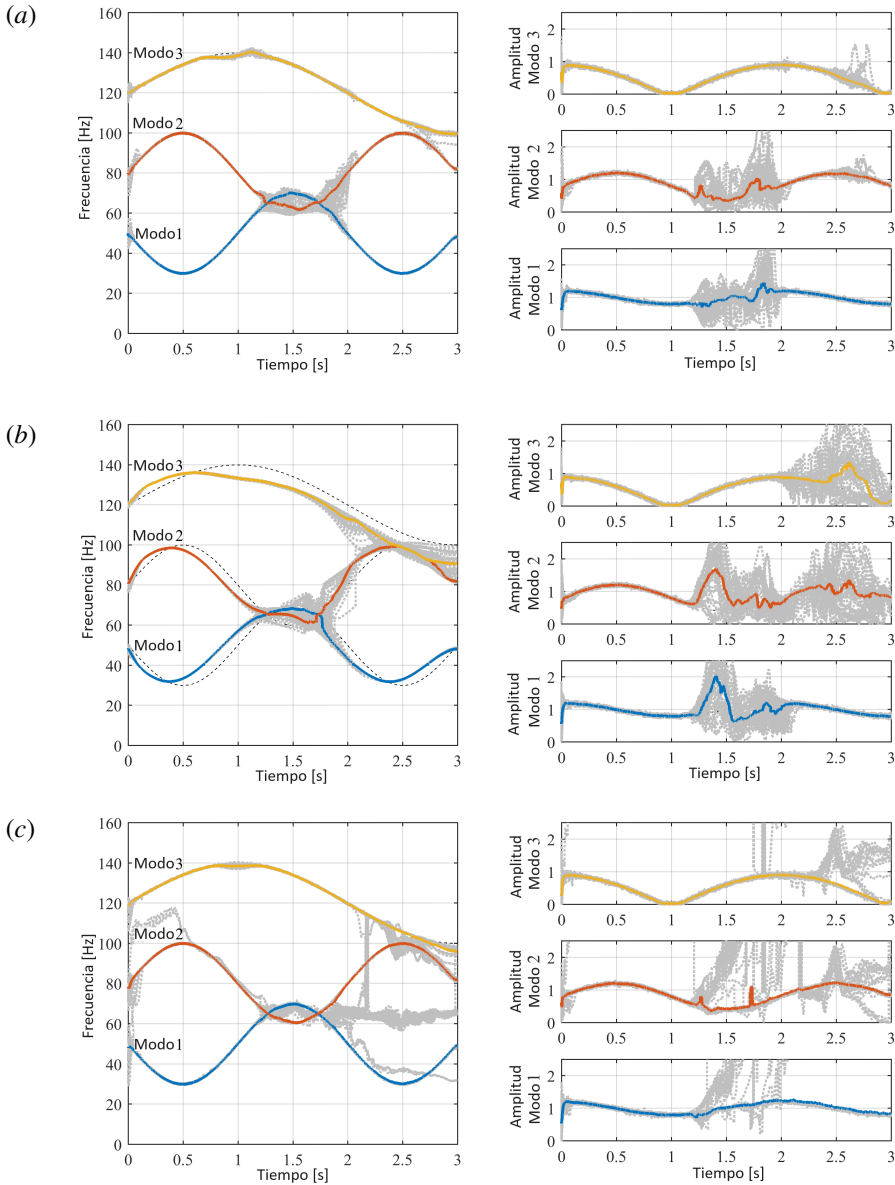
define como igual a uno, esto para reducir el número de parámetros a optimizar. Las varianzas se optimizan para cada valor de SNR con base en una única representación de la señal.

2. **Método TAR–MD:** Este método se ajusta según las directrices proporcionadas en [109], utilizando un enfoque de modelado TAR con *Smoothness Priors* de segundo orden. El orden óptimo del modelo TAR se selecciona minimizando el Criterio de Información Bayesiano (BIC) que en el presente caso conduce al orden del modelo  $n_a = 18$ . Varios modos espurios aparecen en la descomposición modal basada en el modelo TAR, ya que el orden del modelo es mucho mayor que el doble del número de componentes. Por lo tanto, sólo se consideran los tres primeros modos con la amortiguación más baja como los modos reales de la señal, mientras que los restantes se consideran modos espurios.
3. **TFR–máximo:** Se consigue localizando el máximo de la TFR. Los componentes múltiples se extraen mediante el método de *peeling*. Los valores estimados de la TFR se obtienen con el espectrograma (transformada de Fourier con ventana) basándose en una ventana *gaussiana* con resolución  $f_0 = 0,05$  Hz. La implementación se realiza mediante el *toolbox* de MATLAB<sup>®</sup> sugerido en [64].
4. **TFR–adaptativo:** Corresponde al método de extracción de curvas con penalización adaptativa de los saltos de frecuencia como se sugiere en [64], donde se denomina *Esquema II* ( $\alpha, \beta$ ). Los parámetros de ajuste del método, a saber,  $\alpha$  y  $\beta$ , se fijan en 1 como se sugiere en [64]. Las estimaciones de la TFR obtenidas con el espectrograma (transformada de Fourier con ventana) se basan en una ventana *gaussiana* con un parámetro de resolución  $f_0 = 0,05$  Hz. La implementación se realiza mediante el *toolbox* de MATLAB<sup>®</sup> sugerido en [64].

### Análisis de Monte Carlo de los métodos de descomposición modal

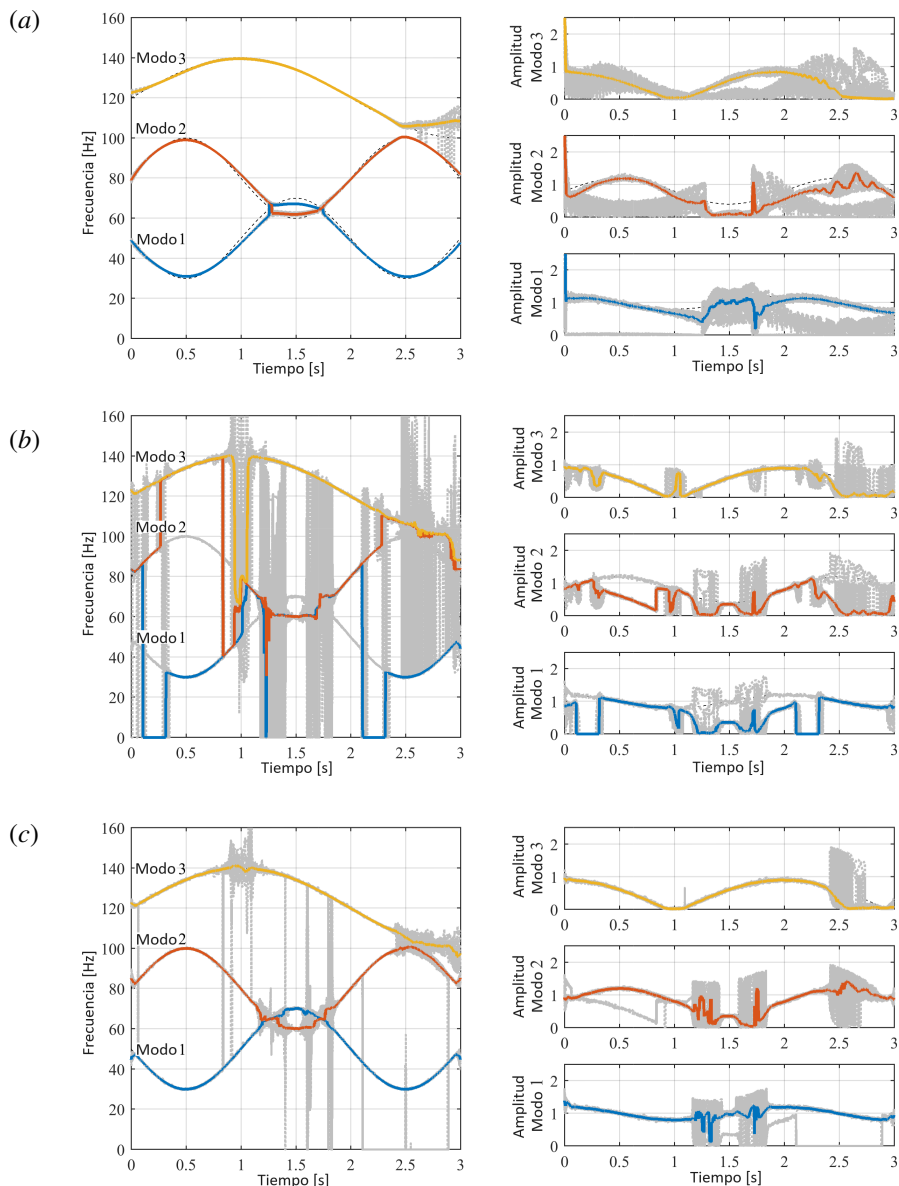
Se realizó una prueba con el método de Monte Carlo para evaluar el desempeño de los métodos de descomposición modal en la estimación de los componentes modales de la señal no estacionaria y sus respectivos IA e IF. Se consideraron valores de SNR en el rango de  $-20$  a  $20$  dB, y se realizaron 40 corridas de Monte Carlo independientes para cada nivel de la SNR. La Figura 4.8 y la Figura 4.9, permiten visualizar la mediana y la distribución muestral de las estimaciones de IF e IA, obtenidas con cada uno de los métodos de descomposición modal tras el análisis de Monte Carlo, para una SNR = 20 dB. Por otra parte, la Figura 4.10 permite visualizar el valor de la mediana MSE, calculada para cada una de las estimaciones de las componentes modales y las respectivas estimaciones de IA e IF para el rango de SNR considerado y para valores incrementales de SNR de ruido blanco aditivo, obtenido a partir de las 40 corridas de Monte Carlo.

En general, se observa que el método JKF–NST proporciona sistemáticamente el mejor desempeño, aunque otros métodos pueden proporcionar un mejor rendimiento para determinados rangos de SNR particulares. Además, está claro que el nivel de ruido tiene un efecto perjudicial para todos los métodos de descomposición modal. En particular, para los componentes 1 y 2 caracterizados por un cruce de frecuencias, las estimaciones obtenidas tienen errores mayores. A continuación se realiza un análisis conciso de los resultados obtenidos con cada uno de los métodos:



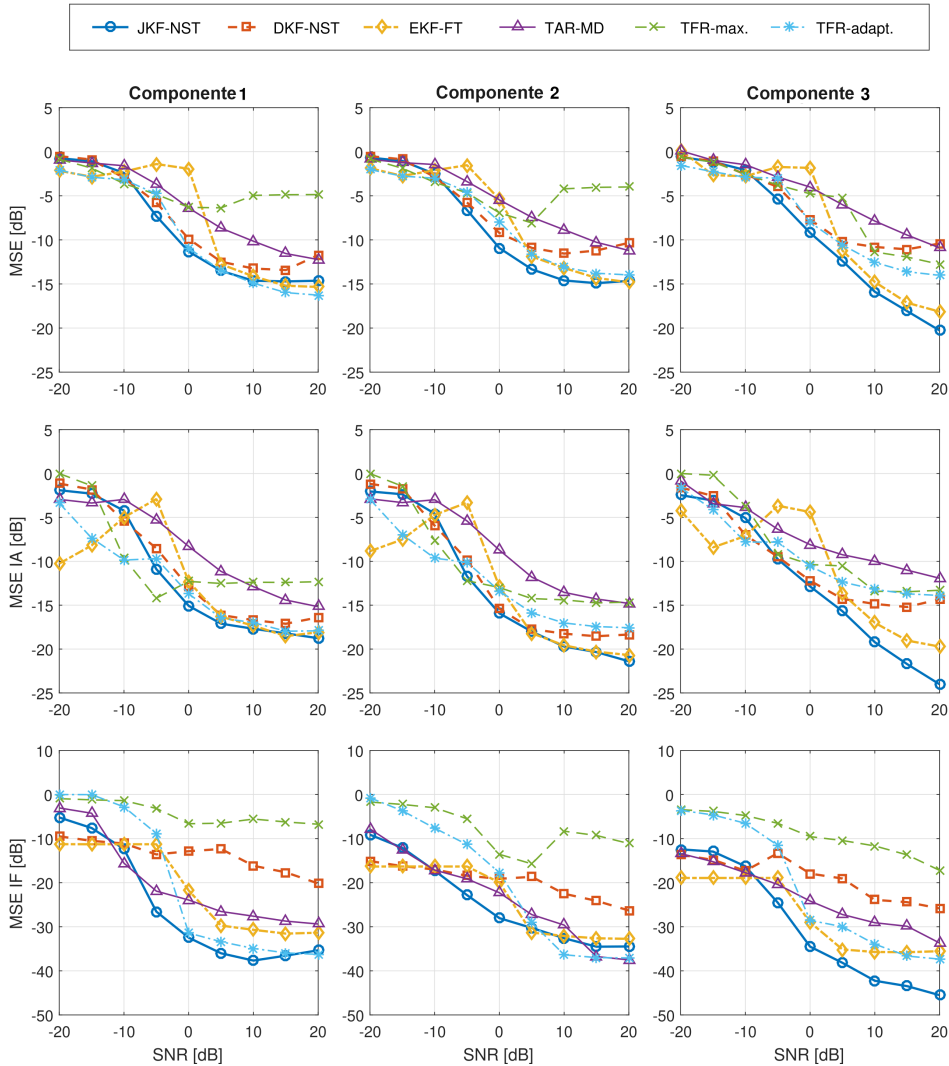
**Figura 4.8** Mediana y distribución muestral de las estimaciones de IF e IA obtenidas con (a) el método JKF–NST, (b) el método DKF–NST, (c) el método EKF–FT. Resultados obtenidos tras 40 corridas de Monte Carlo con  $SNR = 20$  dB. Las líneas continuas representan el valor medio estimado, las líneas de puntos grises representan las estimaciones de muestras individuales, las líneas de puntos negros representan los valores reales de IF e IA.

**Método JKF–NST:** Entre los métodos analizados ofrece cifras de desempeño consistentemente buenas. Como se observa en la Figura 4.8, parece ser el menos afectado por el cruce de modos, aunque sigue teniendo una influencia importante en las estimaciones de



**Figura 4.9** Mediana y distribución muestral de las estimaciones de IF e IA obtenidas con (a) el método TAR-MD basado en el modelo TAR(18), (b) el método TFR-máximo, (c) el método TFR-adaptativo. Resultados obtenidos tras 40 corridas de Monte Carlo con  $SNR = 20$  dB. Las líneas continuas representan el valor medio estimado, las líneas grises punteadas representan las estimaciones de las muestras individuales, las líneas negras de trazos representan los valores reales de IF e IA.

la amplitud. Por otro lado, la componente modal que desaparece parece ser correctamente rastreada por el algoritmo. En funcionamiento normal, el método JKF-NST rastrea con error muy bajo cada una de las componentes modales.



**Figura 4.10** Mediana del MSE normalizado de las estimaciones de los componentes modales y sus respectivos IA e IF obtenidos con los diferentes métodos de descomposición modal para niveles crecientes de SNR después de 40 corridas de Monte Carlo. Resultados separados por componente (columnas) y según el tipo de error (filas). Fila superior: MSE de las estimaciones de los componentes modales; fila central: MSE de las estimaciones de IA; fila inferior: MSE de las estimaciones del IF.

**Método DKF–NST:** El desempeño global de este método es bastante similar al del método JKF–NST, en cuanto a la estimación de la amplitud y la trayectoria modal, aunque los resultados en la IF no son tan robustos. Como se puede observar en la Figura 4.8(b), el rendimiento reducido puede deberse a un aparente retraso en el seguimiento de la IF y a las prolongadas perturbaciones originadas después del cruce de frecuencias.

**Método EKF–FT:** Al igual que el método JKF–NST, el método EKF–FT proporciona muy buen seguimiento de los componentes modales y sus propiedades, hasta el evento

de cruce de la frecuencia. Después de esto, en algunos puntos, las estimaciones de la IF pierden el rastro de la IF real y, como efecto, las estimaciones obtenidas también presentan grandes diferencias con los valores reales. En consecuencia, los resultados globales de comportamiento que se visualizan en la Figura 4.10 se encuentran reducidos, en contraste con los obtenidos con el método JKF–NST. Sin embargo, como se puede observar, muestra un buen desempeño para valores muy bajos de la SNR.

**Método TAR–MD:** Como se puede visualizar en la Figura 4.9(a), el método TAR–MD proporciona estimaciones de la IF muy fiables durante el evento de cruce de frecuencias, aunque en general las estimaciones de la IF obtenidas parecen estar sesgadas. Sin embargo, las estimaciones de IA y de la trayectoria modal tienen grandes errores, lo que hace que este método sea el menos preciso entre los métodos de descomposición modal de SS.

**Métodos TFR–máximo y TFR–adaptativo:** Según la Figura 4.10, ambos métodos son muy fiables en la estimación de los componentes modales y su amplitud para SNRs bajas, siendo por supuesto el método TFR–adaptativo el más eficaz de todos. Sin embargo, las estimaciones de la IF no son tan precisas como las obtenidas con el método JKF–NST. Como puede verse en la Figura 4.9(b)–(c), el cruce de modos tiene un enorme efecto perjudicial en las estimaciones de la IF, incluso para el método de extracción de curvas con penalización adaptativa (TFR–adaptive), lo que explica el bajo desempeño en la estimación de las curvas de IF. Por lo demás, los métodos parecen producir estimaciones adecuadas.

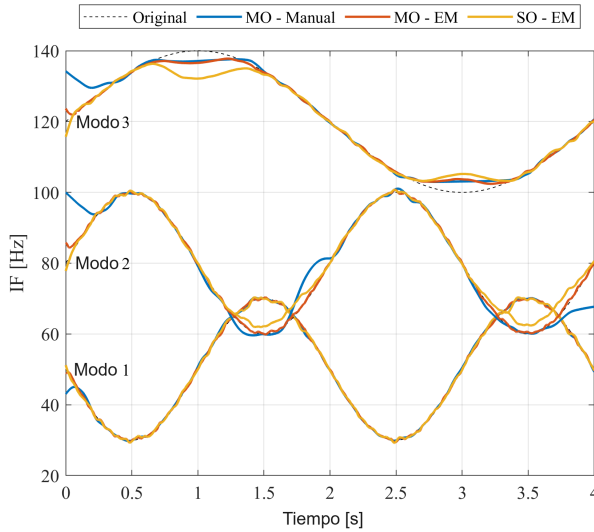
### Métodos de análisis modal para señales multivariadas

Se considera una señal multivariada de dimensión  $n = 2$ , definida como la superposición de tres sinusoides no estacionarias. La señal multivariada se construye a través de la superposición de modos individuales, de acuerdo a la Ecuación (4.19), utilizando la configuración de la Tabla 4.3.

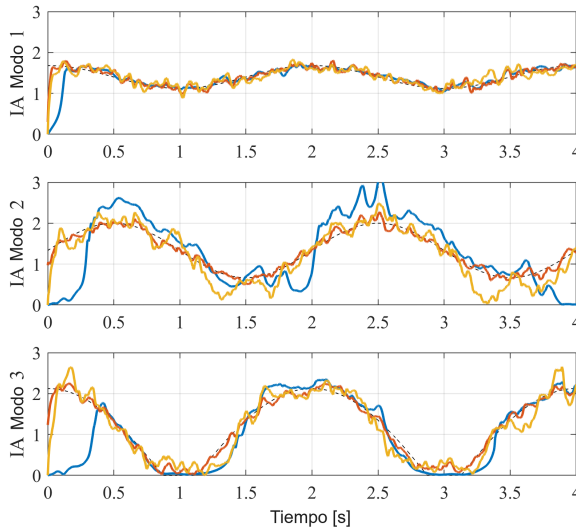
Se simula una señal multivariante generada por la Ecuación (4.19) utilizando la configuración de la Tabla 4.3. El método de estimación modal propuesto se utiliza en la señal multivariante obtenida en dos formas:

1. *Ajuste manual:* Las covarianzas de estado y de parámetros se ajustan manualmente (por ensayo y error) a  $\Sigma_u = 10^{-4}\mathbf{I}$  y  $\Sigma_v = 10^{-5}\mathbf{I}$ . La matriz de mezcla, la covarianza del ruido y las condiciones iniciales se establecen mediante un análisis modal a corto plazo basado en un modelo autorregresivo vectorial (VAR) de segundo orden estimado a partir de las 600 primeras muestras de señal.
2. *Optimización EM:* Los hiperparámetros y las condiciones iniciales se optimizan con el algoritmo EM. El algoritmo EM se inicializa basándose en los resultados del análisis modal de un modelo VAR de segundo orden calculado a partir de las 600 primeras muestras de señal. Las covarianzas de las innovaciones de estado y parámetros se inicializan como  $\Sigma_u = 10^{-5}\mathbf{I}$  y  $\Sigma_v = 10^{-6}\mathbf{I}$ . El algoritmo se ejecuta hasta 60 iteraciones o hasta que la norma del cambio en los hiperparámetros sea inferior a  $10^{-6}$ .

Además, se considera la descomposición modal basada en una única señal ( $\mathbf{y}_{1,k}$ ). Los hiperparámetros del modelo modal TD–SS respectivo se optimizan con el algoritmo EM utilizando los mismos ajustes que en la contraparte multivariante.



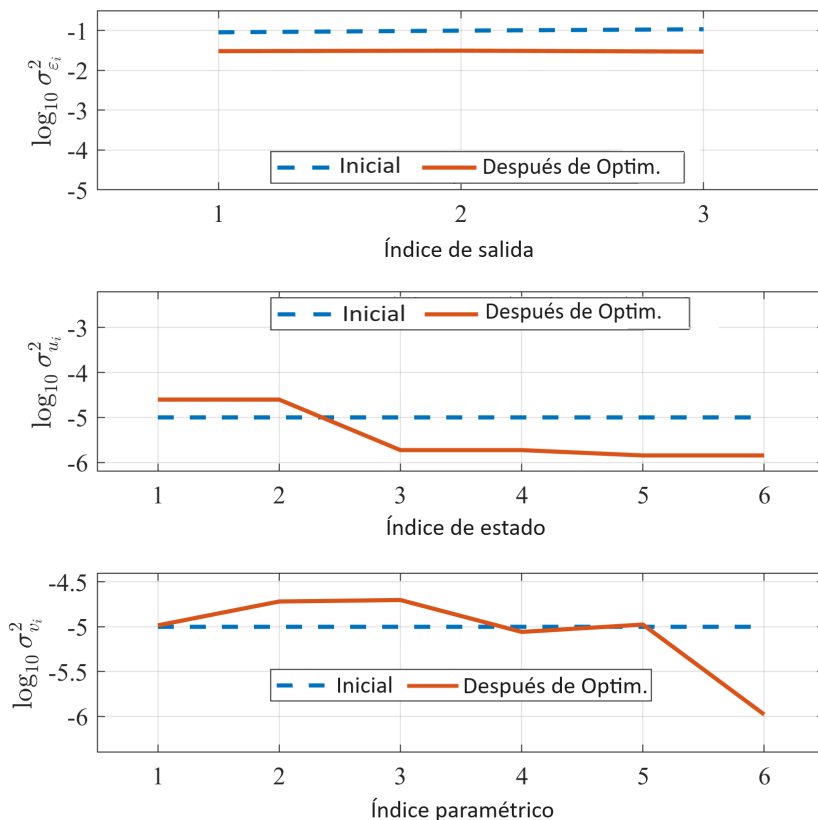
**Figura 4.11** Valores estimados de la IF antes y después de la optimización EM comparados con los originales. MO: Salida múltiple, SO: Salida única.



**Figura 4.12** Valores estimados de la IA antes y después de la optimización EM comparados con los originales.

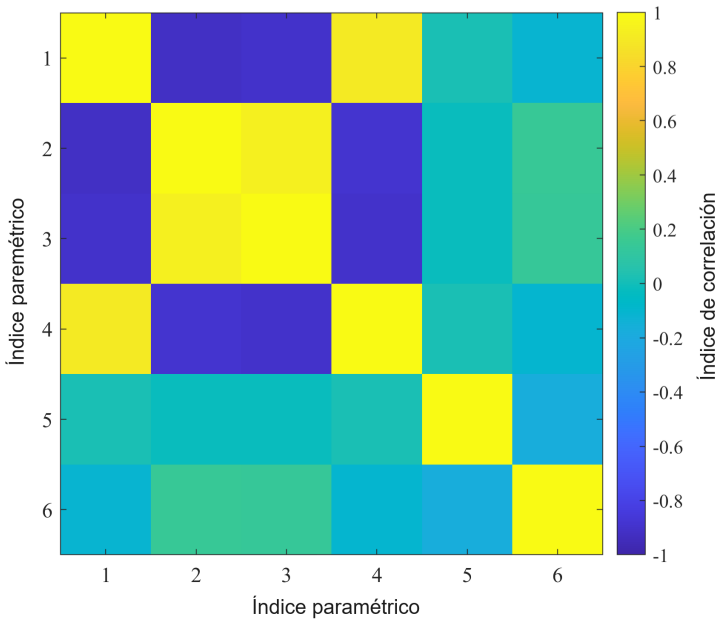


Las figuras 4.11 y 4.12 muestran las trayectorias IF e IA originales junto con sus respectivas estimaciones obtenidas con el ajuste manual y la optimización de hiperparámetros EM. Los elementos de la diagonal de las matrices de covarianza de ruido, estado y parámetros se muestran en la Figura 4.13, mientras que una representación de la estructura completa de correlación de innovaciones de parámetros se puede observar en la Figura 4.14. Las estimaciones de IF e IA mostradas en las figuras 4.11 y 4.12 demuestran una clara mejora una vez que la optimización EM se ha realizado. Asimismo, se observa una reducción de la sensibilidad al ruido y una mejora del rendimiento del seguimiento cuando se utiliza la señal multivariante. En las estimaciones de IF, la mejora se evidencia principalmente en la reducción de la duración del transitorio inicial y del error de seguimiento global. De hecho, parece que el error de seguimiento de la IF en el modo 2 aumenta después de los cruces de frecuencia en el método ajustado manualmente. Del mismo modo, en las estimaciones de IA, el transitorio inicial y el error global aumentan, especialmente en el modo 3, que presenta una amplitud evanescente.



**Figura 4.13** Elementos diagonales de las covarianzas de las innovaciones de ruido, estado y parámetros una vez realizada la optimización EM.

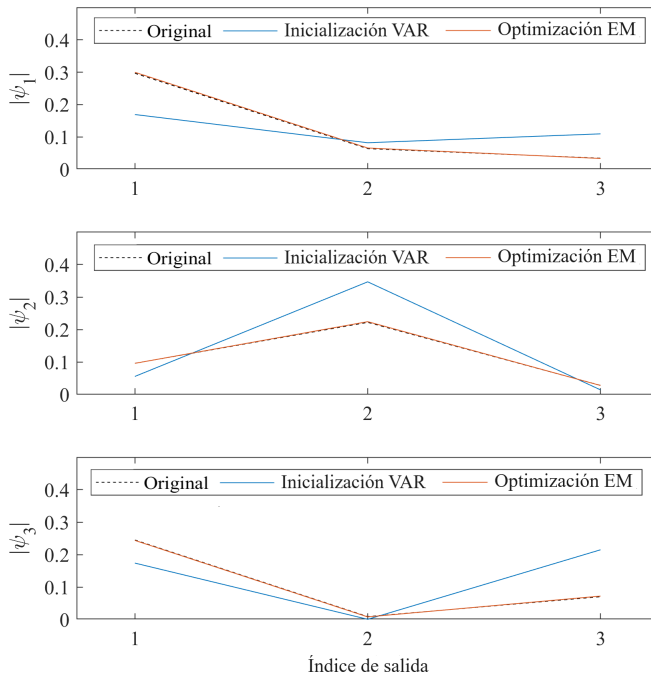
Las figuras 4.13 y 4.14 evidencian el efecto de la optimización EM en las covarianzas de las innovaciones de estado y parámetro. En cuanto a la covarianza de las innovaciones de estado, el algoritmo pasa de varianzas iguales para todos los estados, a valores independientes para cada par de estados que codifican los componentes en fase y cuadratura de cada modo. Del mismo modo, los elementos diagonales de la covarianza de las innovaciones de los parámetros también se modifican en función del índice de variación de cada modo, pero lo que es más importante, como se aprecia en la Figura 4.14, el algoritmo permite la evolución de una estructura diagonal a una estructura completa, lo cual explica muy bien las correlaciones entre los parámetros modales. Por ejemplo, la estructura de covarianza



**Figura 4.14** Matriz del índice de correlación calculada a partir de la covarianza de las innovaciones de los parámetros una vez realizada la optimización.

completa puede explicar que los modos 1 y 2, con parámetros indexados de 1 a 4, estén muy correlacionados. De hecho, al comparar los IF de la Figura 4.11, puede observarse que los IF de los modos 1 y 2 evolucionan con el mismo patrón sinusoidal, pero de polaridad inversa. Como resultado, cuando se utilizan las matrices de covarianza optimizadas por EM, el filtro/suavizador de Kalman no se confunde con el cruce de frecuencias, ya que se le informa que estos modos deben ser antisimétricos.

La Figura 4.15 muestra la magnitud de las estimaciones del vector de mezcla. Los vectores de mezcla obtenidos tras la inicialización basada en VAR y tras la optimización EM se comparan con los valores originales. Después de la optimización EM se puede visualizar que no hay diferencia visible entre los valores originales y sus estimaciones.



**Figura 4.15** Módulo de las estimaciones del vector de mezcla con inicialización basada en VAR después de la optimización EM.

### 4.3 Conclusiones

En este capítulo se abordó el problema de la descomposición modal de señales multivariantes no estacionarias, proponiendo un método que se basa en una representación de espacio de estado de bloques diagonales dependiente del tiempo y en el filtrado/suavizado de Kalman. La idea es construir cada bloque de segundo orden con las partes real e imaginaria de los valores propios instantáneos de cada modo, lo que permite representar un único componente oscilatorio no estacionario. De esta forma, se logra una descomposición modal paramétrica de la señal.

Para identificar las trayectorias de los estados/parámetros y de los hiperparámetros (como la matriz de mezcla de modos, las covarianzas de los estados, los parámetros, el ruido y las condiciones iniciales), se utiliza un algoritmo de EM adaptado. El algoritmo EM permite ajustar los valores iniciales, matrices de covarianza y otros parámetros de la representación de espacio de estados, en conjunto referidos como hiperparámetros. La selección de los valores iniciales para los hiperparámetros en nuestros experimentos tuvo un efecto significativo, pero no crítico, en el desempeño de los métodos propuestos. Así, por ejemplo, en el caso del método de descomposición modal multivariado, las matrices de covarianza del ruido de estado ( $\Sigma_u$ ) y de parámetros ( $\Sigma_v$ ) son las que parecen tener mayor efecto. Como regla empírica, para controlar la variación inicial de los hiperparámetros, se sugiere inicializar  $\Sigma_u$  y  $\Sigma_v$  como matrices idénticas multiplicadas por coeficientes positivos

con valores significativamente menores a 1. Los otros parámetros (matrices de mezcla y amplitudes iniciales) se puede extraer de un análisis modal convencional en una porción pequeña de la señal. Finalmente, el número de componentes modales óptimo se puede obtener mediante una búsqueda discreta, facilitada por la verosimilitud marginal.

El uso de esta metodología ha demostrado ser efectivo en la descomposición de señales no estacionarias, incluso en presencia de singularidades. De esta manera, se logra una estimación directa de los componentes modales de señales multivariantes no estacionarias mediante la configuración modal de espacio de estado. La parte aplicada se planteó de dos maneras: en la primera se utilizaron los métodos y herramientas desarrolladas en el Capítulo 3. Para este caso se presentaron dos métodos de estimación de descomposición modal basados en KF: JKF-NST y DKF-NST, los cuales, como se sabe, son generalizaciones de los rastreadores de frecuencia con KF y tienen la ventaja de ser lineales en sus parámetros. En el segundo caso se aplicó la metodología desarrollada en este Capítulo, en la que se descompuso una señal multivariante en tres componentes modales a partir de las cuales se realizó el análisis. Los resultados numéricos obtenidos muestran la eficacia de los métodos propuestos para la descomposición de señales no estacionarias.

# 5 Descomposición armónica del ECG de varias derivaciones

---

## 5.1 Introducción

Las señales electrocardiográficas miden la actividad eléctrica del corazón y aportan información muy valiosa sobre las características fisiológicas de este órgano. Puesto que las señales ECG proporcionan información sobre la actividad del músculo cardíaco, constituyen una herramienta muy importante para la identificación de anomalías en la función cardíaca, ya sea por parte de los médicos o de herramientas automatizadas de apoyo al diagnóstico [19]. Desde un punto de vista morfológico, las señales ECG están formadas por una serie de ondas que se repiten de forma pseudoperiódica, cada una de ellas relacionada con el orden de activación de diferentes regiones del músculo cardíaco [20, Ch. 29]. El tiempo y la polaridad de estas ondas son indicadores de la salud de un individuo, pero también de su relación cuando se observan en diferentes ubicaciones de los electrodos (derivaciones del ECG). La presencia de ruido en las señales ECG puede provocar la pérdida de calidad de la señal, al cambiar la duración, la forma y la amplitud de los latidos, lo que a su vez conduce a una interpretación incorrecta. Por lo tanto, la separación adecuada de los componentes del ECG del ruido, es una parte importante de cualquier análisis del ECG, en el que es necesario preservar cuidadosamente sus características morfológicas reales. La interpretación adecuada de los componentes de la señal ECG, así como el rechazo eficaz del ruido y los artefactos, sólo puede lograrse mediante herramientas eficaces de representación y análisis de la señal. Sin embargo, la estructura no estacionaria inherente a las señales ECG, incluso en un paciente sano, hace que esta sea una tarea difícil.

Tradicionalmente, el análisis de los registros ECG de una sola derivación se ha realizado con la ayuda de representaciones no paramétricas de tiempo–frecuencia (TF) y de tiempo–escala (TS) [25, Ch. 2], [63], [142]. Estos métodos comprenden una generalización del análisis de Fourier, en el que las señales analizadas se representan como la superposición de un conjunto infinito de funciones base, bien localizadas en el tiempo y la

frecuencia. Como resultado, se pueden obtener distribuciones de energía (o potencia) en el plano tiempo–frecuencia. Estos métodos están limitados por la resolución alcanzable en tiempo y frecuencia y, en algunos casos, por la presencia generalizada de componentes de interferencia conocidos como términos cruzados. Y lo que es más importante, el gran tamaño y la redundancia de estas representaciones dificultan su aplicación en el análisis automatizado de los registros ECG.

Existen varios métodos bien constituidos para el proceso de descomposición modal, los cuales se pueden aplicar a señales univariantes no estacionarias. Entre los más conocidos se tienen: la descomposición ortogonal propia (POD) [90], la descomposición modal empírica (EMD) [54], el rastreo de crestas en representaciones de tiempo–frecuencia/tiempo–escala (RTTF/TS) [64] y las transformaciones de compresión/extracción sincronizadas (SS/ET) [86]. Una característica común de estos métodos es que la señal se separa en un conjunto de componentes modales con frecuencia y amplitud instantáneas. Las frecuencias instantáneas de las componentes modales obtenidas pueden estar limitadas únicamente por su tasa de cambio a lo largo del tiempo, lo cual proporciona flexibilidad en el caso general de señales no estacionarias. Sin embargo, en el contexto de señales pseudo-periódicas no estacionarias, la introducción de una restricción en la frecuencia instantánea de las componentes de la señal, como un múltiplo de una frecuencia fundamental instantánea común, podría ayudar a mejorar el desempeño de rastreo alcanzable. Otras limitaciones de estos métodos son bien conocidas e incluyen la máxima resolución factible en el dominio tiempo-frecuencia para análisis tiempo-frecuencia, la sensibilidad al ruido y a las singularidades de la señal, así como la discontinuidad o cruce de las frecuencias instantáneas o el desvanecimiento de las amplitudes [64, 126].

A menudo, es necesario analizar simultáneamente múltiples señales no estacionarias. Este es el caso de los ECG, que suelen adquirirse en conjuntos de 12 derivaciones (algunas aplicaciones pueden requerir menos o más electrodos). Mientras que las descomposiciones modales pueden intentarse mediante el análisis independiente de señales individuales, un análisis combinado del conjunto completo de señales proporcionará un procedimiento de descomposición más robusto, ya que la información concurrente de múltiples sensores se utiliza para estimar las mismas cantidades. Así, el juego de modos obtenido será el más representativo del conjunto de señales, lo que a su vez puede proporcionar la identificación/aislamiento de las interferencias que afectan a un solo sensor. Los métodos no paramétricos, como el EMD o el SSA/POD, pueden adaptarse para analizar conjuntos de señales [57, 104, 101]. Por otro lado, aunque los métodos de identificación de sistemas paramétricos no estacionarios multivariantes pueden utilizarse para extraer características modales no estacionarias [124, 144], la identificación paramétrica directa en el dominio modal en el caso de las señales multivariantes no ha alcanzado todavía una atención generalizada.

El principal objetivo de este capítulo es elaborar un método de descomposición armónica no estacionaria para señales multivariantes pseudoperiódicas no estacionarias a partir de descomposiciones modales fundamentadas en el KF. Una descomposición armónica no estacionaria se asocia a una descomposición de la señal basada en múltiples sinusoides con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo, cuya frecuencia es múltiplo de una frecuencia fundamental común dependiente del tiempo. En este contexto, una descomposición armónica no estacionaria es una generalización del análisis de series de

Fourier, donde las sinusoides poseen amplitudes y frecuencias constantes. Este tipo de descomposición resulta especialmente apropiado para las señales ECG, dada su naturaleza pseudoperiódica. Además esta técnica ofrece la capacidad de extraer ondas y detectar interferencias de forma eficaz en este tipo de señales.

En un trabajo reciente [13], se ha logrado un progreso inicial hacia este fin, donde se realiza un análisis modal no estacionario multivariado con base en una representación de espacio de estados dependiente del tiempo en forma de bloques diagonales y filtrado/suavizado de Kalman. En el presente capítulo, se realiza una modificación al algoritmo con el fin de representar armónicos no estacionarios. Además, se introduce un algoritmo de Expectación-Maximización (EM) para estimar las matrices de covarianza del ruido y la matriz de mezcla que resultan de la representación en espacio de estados.

Por lo tanto, en este capítulo, para lograr estimaciones de descomposición más precisas mediante un enfoque basado en modelos paramétricos, se aprovechan las siguientes dos características de las señales pseudo-periódicas multivariantes no estacionarias: (i) la frecuencia instantánea (IF) de todas las componentes de la señal corresponde a múltiplos de una única IF fundamental; (ii) los diferentes canales de la señal multivariable contienen diferentes combinaciones lineales de las mismas componentes armónicas. En consecuencia, como contribución principal, se diseñó una representación de espacio de estados en forma de bloques diagonales con múltiples salidas, como modelo estocástico básico para representar la señal pseudo-periódica multivariable no estacionaria, y se utilizó el filtro de Kalman para estimar el vector de estado asociado con cada componente armónica. Los parámetros del modelo de espacio de estados, incluida la matriz de mezcla (medición de estado) y las covarianzas del ruido de proceso y de medición, se ajustan automáticamente mediante un algoritmo de EM diseñado específicamente para este propósito.

## 5.2 Metodología

### 5.2.1 Modelo estocástico de la señal ECG de varias derivaciones

Las señales ECG tienen una estructura secuencial muy específica, la cual se repite de forma casi periódica. Si la señal ECG fuera perfectamente periódica, podría representarse en una serie de Fourier compuesta por senos y cosenos de amplitudes y frecuencias constantes. Sin embargo, como el cuerpo humano se adapta a diferentes estímulos, el período y la forma de la señal ECG presentan variaciones significativas, incluso en una condición saludable. El enfoque de modelización estocástica que se presenta aquí se basa en la suposición de que, aunque la señal ECG no es exactamente periódica, tiene una estructura cuasiperiódica que puede representarse mediante la superposición de un número finito de *componentes armónicos no estacionarios* (NS). Cada componente armónico NS corresponde a una senoide con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo. En consecuencia, una sola derivación del ECG,  $y_{l,k}$ , donde  $l$  denota el índice de la derivación y  $k = 1, 2, \dots, N$  el índice de la muestra temporal, puede representarse como:

$$y_{l,k} = \sum_{m=1}^M \psi_{l,m} A_{m,k} \cos(m\omega_k k - \phi_{l,m}) \quad (5.1)$$

donde  $M$  es el número de armónicos NS,  $A_{m,k}$  y  $\omega_k$  representan la *amplitud instantánea* (IA) y la *frecuencia instantánea* (IF) del  $m$ -ésimo armónico NS y  $\psi_{l,m}$  y  $\phi_{l,m}$  indican el factor de amplitud y la fase relativa del  $m$ -ésimo armónico NS de la derivación  $l$  del ECG.

La ecuación (5.1) puede escribirse alternativamente en términos de los componentes en fase y cuadratura  $z_{2m-1,k} = A_{m,k} \cos m\omega_k k$  y  $z_{2m,k} = A_{m,k} \sin m\omega_k k$  respectivamente, como sigue:

$$y_{l,k} = \sum_{m=1}^M (\psi_{l,m} \cos \phi_{l,m} z_{2m-1,k} + \psi_{l,m} \sin \phi_{l,m} z_{2m,k}) \quad (5.2)$$

y así, la señal ECG de  $n$  derivaciones  $\mathbf{y}_k = [y_{1,k} \ y_{2,k} \ \cdots \ y_{n,k}]^\top \in \mathbb{R}^n$ , puede representarse mediante el producto matricial vectorial:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{z}_k \quad (5.3)$$

donde  $\mathbf{z}_k = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \cdots \ z_{2M-1,k} \ z_{2M,k}]^\top$  y

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} \cos \phi_{1,1} & \psi_{1,1} \sin \phi_{1,1} & \cdots & \psi_{1,M} \cos \phi_{1,M} & \psi_{1,M} \sin \phi_{1,M} \\ \psi_{2,1} \cos \phi_{2,1} & \psi_{2,1} \sin \phi_{2,1} & \cdots & \psi_{2,M} \cos \phi_{2,M} & \psi_{2,M} \sin \phi_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \psi_{n,1} \cos \phi_{n,1} & \psi_{n,1} \sin \phi_{n,1} & \cdots & \psi_{n,M} \cos \phi_{n,M} & \psi_{n,M} \sin \phi_{n,M} \end{bmatrix}$$

El vector  $\mathbf{z}_k$  comprende los componentes armónicos NS en fase y cuadratura  $M$ , mientras que la matriz de mezcla  $\mathbf{\Psi}$  indica cómo se encuentra cada uno de estos armónicos NS en cada una de las derivaciones del ECG, incluyendo un valor de fase de referencia. Obsérvese que, aunque esta fase también podría depender del tiempo, se ha optado por no incluirla en el modelo, ya que aumentaría aún más su complejidad.

El objetivo principal de este criterio de modelado es la estimación, tanto de la matriz de mezcla como del vector armónico NS, a partir de un registro ECG multivariante dado. También está relacionado con la selección del número de componentes armónicos NS. En la siguiente sección, se describirá un método de identificación basado en la incorporación del modelo estocástico de la Ecuación (5.3) en una representación de espacio de estado en bloques diagonales dependiente del tiempo.

## 5.2.2 Incorporación del modelo estocástico en una representación de espacio de estados

En [10], se muestra que una componente armónica única como la definida en la Ecuación (5.1) puede representarse como la respuesta de un sistema de segundo orden:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{m,k} &= \mathbf{M}_{m\omega_{k-1}} \mathbf{z}_{m,k-1} + \mathbf{u}_{m,k}, & \mathbf{u}_k &\sim \text{NID}(\mathbf{0}_2, \mathbf{\Sigma}_{u_m}) \\ \omega_k &= \omega_{k-1} + w_k, & w_k &\sim \text{NID}(0, \sigma_w^2) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{z}_{m,k}$  indica el vector con las componentes armónicas en fase y en cuadratura del  $m$ -ésimo armónico,  $\omega_k$  es la IF fundamental asociada con la componente armónica y  $\mathbf{u}_{m,k}$  y  $w_k$  son los ruidos de proceso correspondientes, definidos como secuencias de media cero



*normal e independientemente distribuidas* (NID), con matriz de covarianza respectiva  $\Sigma_{u_m}$  y  $\sigma_w^2$ . Actualmente, se ha utilizado un modelo de media variable para representar la evolución de la IF. Sin embargo, este modelo podría modificarse por uno más preciso si se dispone de más información. El ruido de proceso  $u_{m,k}$  introduce un componente estocástico al modelo, lo cual facilita el seguimiento de la amplitud instantánea (IA) de la componente armónica.

Utilizando el bloque definido anteriormente y el modelo de señal en la Ecuación (5.3), ahora se puede definir la siguiente representación modal de *espacio de estados no lineal y variante en el tiempo* (NLTV-SS):

El modelo armónico NS de la Ecuación (5.3) se completa introduciendo un modelo dinámico para la evolución del vector de armónicos  $z_k$ , que conduce a la siguiente representación modal de *espacio de estado no lineal variable en el tiempo* (NLTV-SS):

$$z_k = \mathbf{M}(\omega_{k-1}) \cdot z_{k-1} + u_k, \quad u_k \sim \text{NID}(\mathbf{0}_{2M}, \Sigma_u) \quad (5.5a)$$

$$\omega_k = \omega_{k-1} + w_k, \quad w_k \sim \text{NID}(0, \sigma_w^2) \quad (5.5b)$$

$$y_k = \Psi \cdot z_k + \epsilon_k, \quad \epsilon_k \sim \text{NID}(\mathbf{0}_n, \Sigma_\epsilon) \quad (5.5c)$$

donde se supone que la IF fundamental  $\omega_k$  se conoce *a priori*. En el caso de la señal electrocardiográfica, se puede obtener una buena estimación de  $\omega_k$  mediante la detección de picos R, el cálculo del intervalo entre latidos y la interpolación de los intervalos entre latidos obtenidos.

La evolución del vector de estado está condicionado por la matriz de transición de estados  $\mathbf{M}(\omega_{k-1}) \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}$ , la cual a su vez depende de la IF fundamental  $\omega_k$ . La ecuación de transición de estado se rige por el proceso  $u_k$  de media cero y distribución normal e independiente (NID) con covarianza  $\Sigma_u := \text{blkdiag}(\Sigma_{u_1}, \Sigma_{u_2}, \dots, \Sigma_{u_M})$ . Además, para representar el ruido de medición en la señal ECG multivariante, se introduce el término  $\epsilon_k \in \mathbb{R}^n$ , correspondiente a un proceso estocástico NID de media cero con matriz de covarianza  $\Sigma_\epsilon$ .

La representación LTV-SS adopta una forma modal mediante la definición de la matriz de transición de estados en la siguiente forma de bloques diagonales:

$$\mathbf{M}(\omega_k) := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\omega_k} & & & \\ & \mathbf{M}_{2\omega_k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_{M\omega_k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{m\omega_k} := \begin{bmatrix} \cos m\omega_k & \sin m\omega_k \\ -\sin m\omega_k & \cos m\omega_k \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

para  $m = 1, \dots, M$ . Además, como la IF fundamental es en esencia una función dependiente del tiempo, el sistema global es variable en el tiempo con respuesta no estacionaria.

La representación modal LTV-SS descrita por las ecuaciones (5.5) está totalmente caracterizada por la matriz de mezcla  $\Psi$  y las covarianzas  $\Sigma_\epsilon, \Sigma_u, \sigma_w^2$ , que se denominan colectivamente como los hiperparámetros del modelo  $\mathcal{P} := \{\Psi, \Sigma_\epsilon, \Sigma_u, \sigma_w^2\}$ . La estimación de la descomposición armónica se realiza identificando el vector de estado  $z_k$  junto con la IF fundamental  $\omega_k$ , dados una señal multivariante  $y_k, k = 1, 2, \dots, N$ , los hiperparámetros  $\mathcal{P}$

y el número de armónicos  $M$ . Por otro lado, la inferencia del modelo armónico corresponde a la estimación de los hiperparámetros  $\mathcal{P}$  que mejor se ajusten a la secuencia de señal disponible  $\mathbf{y}_k, k = 1, 2, \dots, N$ . Estas dos tareas se detallan a continuación.

### 5.2.3 Identificación de la descomposición armónica

Ahora, el problema de identificación puede definirse formalmente. La descomposición armónica de una señal de longitud  $N$ , indicada como  $\mathbf{y}_1^N := \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N\}$ , para unos valores de hiperparámetros  $\mathcal{P}$  dados, un número de armónicos  $M$  y la correspondiente IF fundamental  $\omega_k$ , puede estimarse con la ayuda del filtro de Kalman y un suavizado de intervalos fijos. De aquí en adelante se adopta para la linealización, el EKF. Los procedimientos de filtrado y suavizado tienen como objetivo calcular la distribución conjunta posterior de los vectores de estado y parámetros, de modo que se determinen las siguientes *funciones de densidad de probabilidad* (PDF) [123, pp. 326-330]:

$$\text{PDF de filtrado:} \quad p(\mathbf{z}_k, \omega_k | \mathbf{y}_1^k, \mathcal{P}) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_k^k \\ \hat{\omega}_k^k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{z_k, \omega_k}^k & \mathbf{P}_{z_k, \omega_k}^k \\ (\mathbf{P}_{z_k, \omega_k}^k)^\top & \mathbf{P}_{\omega_k}^k \end{bmatrix} \right) \quad (5.7a)$$

$$\text{PDF de suavizado con intervalo fijo:} \quad p(\mathbf{z}_k, \omega_k | \mathbf{y}_1^N, \mathcal{P}) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_k^N \\ \hat{\omega}_k^N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{z_k}^N & \mathbf{P}_{z_k, \omega_k}^N \\ (\mathbf{P}_{z_k, \omega_k}^N)^\top & \mathbf{P}_{\omega_k}^N \end{bmatrix} \right) \quad (5.7b)$$

con la condición inicial:

$$p(\mathbf{z}_0, \omega_0) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_0 \\ \hat{\omega}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{z_0} & \\ & \sigma_{\omega_0}^2 \end{bmatrix} \right)$$

donde  $\hat{\mathbf{z}}_k^k := \mathbb{E}\{\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_1^k, \mathcal{P}\}$  y  $\hat{\mathbf{z}}_k^N := \mathbb{E}\{\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_1^N, \mathcal{P}\}$  definen el valor esperado del vector de estado en el tiempo  $k$  basándose en los datos hasta el tiempo  $k$  (filtrado) y hasta el tiempo  $N$  (suavizado a intervalos fijos), con las covarianzas asociadas  $\mathbf{P}_{z_k}^k := \mathbb{E}\{(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^k)(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^k)^\top | \mathbf{y}_1^k, \mathcal{P}\}$  y  $\mathbf{P}_{z_k}^N := \mathbb{E}\{(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^N)(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^N)^\top | \mathbf{y}_1^N, \mathcal{P}\}$ . Se aplican definiciones similares para las estimaciones de los parámetros de filtrado y suavizado  $\hat{\omega}_k^k, \hat{\omega}_k^N$  y sus respectivas covarianzas.

### 5.2.4 Optimización de los hiperparámetros

La estimación de la descomposición armónica requiere una selección cuidadosa de los hiperparámetros. Las matrices de covarianza suelen ajustarse mediante prueba y error, lo que da como resultado un rendimiento aceptable pero probablemente no óptimo. Sin embargo, la matriz de mezcla debe ser definida adecuadamente, de modo que los componentes armónicos puedan distribuirse adecuadamente en cada una de las señales de respuesta. Un enfoque sencillo implica la extracción de amplitudes máximas en espectros de corto tiempo o algún tipo de análisis modal a corto plazo [11]. Un procedimiento similar podría aplicarse para establecer las condiciones iniciales.

Una forma más precisa de obtener estos valores es mediante la optimización del modelo SS bajo algún criterio de ajuste. Si se conocieran las trayectorias reales del estado y de

la IF, se podrían realizar estimaciones de los hiperparámetros y las condiciones iniciales basadas en la verosimilitud logarítmica del modelo SS, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 -2\ln \mathcal{L}(\mathcal{P}) &= \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{z_0}| + (\mathbf{z}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{z_0}^{-1} (\mathbf{z}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0) + N \ln |\boldsymbol{\Sigma}_u| \\
 &\quad + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} \mathbf{u}_k + N \ln |\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon| + \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_k^\top \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_k
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde, de la Ecuación (5.5),  $\mathbf{u}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{M}(\boldsymbol{\omega}_{k-1})\mathbf{z}_{k-1}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}_k$ .

Sin embargo, dado que las trayectorias del estado (componentes armónicos) son desconocidas, la verosimilitud en la Ecuación (5.8) no puede ser optimizada directamente. En su lugar, las estimaciones suavizadas del estado/parámetros y los hiperparámetros pueden ser refinados de forma iterativa con la ayuda de un algoritmo de EM, que se basa en la maximización de la verosimilitud esperada condicional con relación a los datos disponibles [123, Sec. 340]. Formalmente, los hiperparámetros en la iteración  $j$  se obtienen mediante la optimización de la verosimilitud logarítmica esperada [123, p. 340]:

$$\mathcal{Q}(\mathcal{P}|\mathcal{P}_{j-1}) := \mathbb{E}\{-2\ln \mathcal{L}(\mathcal{P}) | \mathbf{y}_1^N, \boldsymbol{\omega}_1^N, \mathcal{P}_{j-1}\} \tag{5.9}$$

basándose en la PDF del estado/parámetros suavizados condicionados a los datos disponibles y a la conjetura anterior de los hiperparámetros  $\mathcal{P}_{j-1}$ . Aplicando la definición de la Ecuación (5.9) sobre la probabilidad de la Ecuación (5.8) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}(\mathcal{P}|\mathcal{P}_{j-1}) &= \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{z_0}| + \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}_{z_0}^{-1} \left( \mathbf{P}_{z_0}^N + (\hat{\mathbf{z}}_0^N - \hat{\mathbf{z}}_0) (\hat{\mathbf{z}}_0^N - \hat{\mathbf{z}}_0)^\top \right) \right\} \\
 &\quad + N \ln |\boldsymbol{\Sigma}_u| + \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} (\mathcal{S}_{z_{11}} - \mathcal{S}_{z_{10}} - \mathcal{S}_{z_{10}}^\top + \mathcal{S}_{z_{00}}) \right\} \\
 &\quad + N \ln |\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon| + \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathcal{S}_y \right\}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{z_{11}} &:= \sum_{k=2}^N \hat{\mathbf{z}}_k^N (\hat{\mathbf{z}}_k^N)^\top + \mathbf{P}_{z_k}^N \\
 \mathcal{S}_{z_{10}} &:= \sum_{k=2}^N \left( \hat{\mathbf{z}}_k^N (\hat{\mathbf{z}}_{k-1}^N)^\top + \mathbf{P}_{z_k, z_{k-1}}^N \right) \mathbf{M}^\top (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^N) \\
 \mathcal{S}_{z_{00}} &:= \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{M} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^N) \left( \hat{\mathbf{z}}_k^N (\hat{\mathbf{z}}_k^N)^\top + \mathbf{P}_{z_k}^N \right) \mathbf{M}^\top (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^N) \\
 \mathcal{S}_y &:= \sum_{k=2}^N \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^N (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^N)^\top + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{P}_{z_k}^N \boldsymbol{\Psi}^\top
 \end{aligned}$$

y donde  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^N := \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\Psi}\hat{\mathbf{z}}_k^N$  es el error de suavizado,  $\mathbf{P}_{z_k, z_{k-1}}^N$  indica la covarianza de estado de un retardo y la varianza de la IF, calculada con el suavizador definido por la Propiedad 6.3 en [123, p. 334] y  $\text{tr}\{\cdot\}$  representa la traza de la matriz que se encuentra en el argumento.

La esperanza condicional del logaritmo de verosimilitud en la Ecuación (5.10) se puede

derivar e igualar a cero con el fin de encontrar las actualizaciones de los valores de los hiperparámetros y las condiciones iniciales. Siguiendo este procedimiento y, después de las manipulaciones algebraicas adecuadas, se obtienen las siguientes ecuaciones de actualización:

**Actualización de hiperparámetros:**

$$\Psi_j = \left( \sum_{k=2}^N \mathbf{y}_k (\hat{\mathbf{z}}_k^N)^\top \right) \mathbf{S}_{z_{11}}^{-1} \quad (5.11a)$$

$$\Sigma_{\varepsilon_j} = (N-1)^{-1} \mathbf{S}_y \quad (5.11b)$$

$$\Sigma_{u_j} = (N-1)^{-1} \text{diag}(s_1, s_1, s_2, s_2, \dots, s_M) \quad (5.11c)$$

$$\mathbf{s}_m = [\mathbf{S}_{z_{11}} - \mathbf{S}_{z_{10}} - \mathbf{S}_{z_{10}}^\top + \mathbf{S}_{z_{00}}]_{2m,2m} \quad (5.11d)$$

**Actualización de las condiciones iniciales:**

$$\hat{\mathbf{z}}_0 = \hat{\mathbf{z}}_0^N \quad \Sigma_{z_0} = \mathbf{P}_{z_0}^N \quad (5.11e)$$

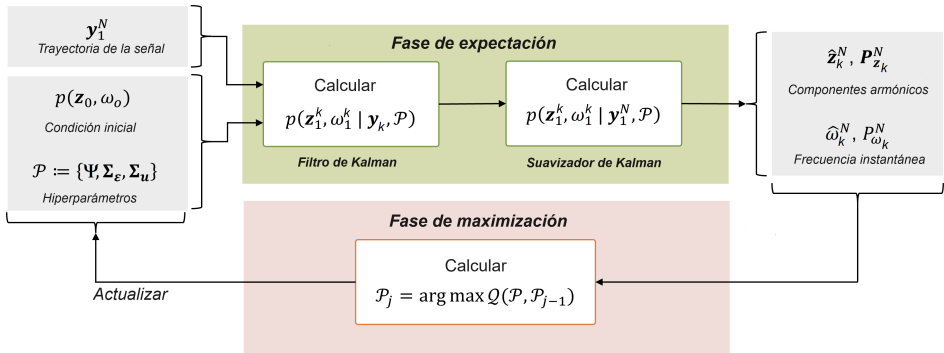
donde  $\text{diag}(\cdot)$  representa la matriz diagonal con los elementos indicados en el argumento y  $[x]_{k,j}$  indica el  $\{k,j\}$ -ésimo elemento de la matriz  $\mathbf{X}$ . Se debe tener en cuenta que sólo se calculan los elementos de la diagonal principal de la matriz de innovaciones del estado en lugar de la matriz completa. Esta selección se realiza para preservar la estructura diagonal de esta matriz y garantizar la ortogonalidad de los componentes modales.

Debido a la complejidad de la optimización involucrada en el procedimiento de actualización del algoritmo EM en las Ecuaciones (5.11), es importante proporcionar un buen conjunto de valores iniciales para los hiperparámetros. En ese caso, es recomendable realizar un análisis de subespacio a corto plazo con el fin de obtener valores iniciales adecuados para los hiperparámetros.

Entonces, dada una trayectoria de señal  $\mathbf{y}_1^N$ , un número de componentes modales  $M$  y suposiciones iniciales para los hiperparámetros  $\mathcal{P}_0$  y los parámetros de condición inicial, el procedimiento de inferencia del modelo se puede resumir de la siguiente manera:

- (i) *Fase de Expectación:* Se emplea el KF y el suavizado de intervalo fijo para determinar las distribuciones posteriores de filtrado y suavizado en la Ecuación (5.7), como se indica en la Subsección 5.2.7.
- (ii) *Fase de Maximización:* Se actualizan los hiperparámetros del modelo de SS utilizando la Ecuación (5.11). El procedimiento se repite hasta alcanzar la convergencia, la cual se verifica cuando la tasa de cambio de  $\mathcal{P}$  o la mejora en la verosimilitud logarítmica esperada  $\mathcal{Q}(\mathcal{P}|\mathcal{P}_j - 1)$  son inferiores a un cierto umbral determinado, o bien, si se ha alcanzado un número específico de iteraciones.

Finalmente, los componentes armónicos y la IF fundamental se pueden obtener a partir de las estimaciones suavizadas del vector de estado  $\hat{\mathbf{z}}_t^N$  y  $\hat{\omega}_t^N$  en la última iteración. El procedimiento de inferencia del modelo a través del algoritmo EM se resume visualmente en la Figura 5.1.



**Figura 5.1** Resumen del procedimiento para el cálculo de la descomposición armónica NS basado en filtros de Kalman y representaciones de espacio de estados diagonales por bloques.

### 5.2.5 Armónicos no consecutivos

En general, no es imprescindible rastrear los armónicos con valores múltiples consecutivos, *v.gr.*, armónicos con frecuencias  $\omega_k, 2\omega_k, 3\omega_k$  y así sucesivamente. En cambio, es posible rastrear sólo un subconjunto de armónicos destacados, lo que puede ayudar a reducir el tamaño de la representación de SS y la complejidad de la estimación. Así, el vector de armónicos  $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_M]^\top \in \mathbb{R}^M$  contiene los múltiplos (no necesariamente enteros) que definen las frecuencias de los armónicos de interés. A su vez, la matriz de transición de estado de la Ecuación (5.6), se redefine como sigue:

$$\mathbf{M}(\omega_k, \mathbf{h}) := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{h_1 \omega_k} & & & \\ & \mathbf{M}_{h_2 \omega_k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_{h_M \omega_k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{h_m \omega_k} := \begin{bmatrix} \cos h_m \omega_k & \text{sen } h_m \omega_k \\ -\text{sen } h_m \omega_k & \cos h_m \omega_k \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

para  $m = 1, \dots, M$ . Las definiciones restantes, así como los algoritmos de estimación y optimización de los hiperparámetros siguen siendo los mismos.

### 5.2.6 Evaluación del modelo y selección del número de componentes

Una vez completada la optimización con el algoritmo EM, resulta interesante evaluar el desempeño del modelo obtenido. Si bien es razonable evaluar la verosimilitud logarítmica esperada en la Ecuación (5.10), resulta más eficiente calcular la suma residual de cuadrados en relación con la suma de cuadrados de la serie de la señal reconstruida (RSS/SSS) y la

probabilidad marginal del modelo. Ambas cantidades se definen de la siguiente manera:

$$RSS/SSS_l (\%) = \frac{\sum_{k=1}^N (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{l,k}^N)^2}{\sum_{k=1}^N y_{l,k}^2} \times 100 \% \quad (5.13a)$$

$$\ln \mathcal{L}(\mathcal{P}|y_1^N) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\ln |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}_k}| + \mathbf{e}_k^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}_k}^{-1} \mathbf{e}_k) \quad (5.13b)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k^N := \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\Psi} \mathbf{z}_k^N$  es el error de suavizado, definido en la Ecuación (5.10) y la expresión  $\mathbf{e}_k := \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\Psi} \mathbf{z}_k^{l-1}$  representa el error de predicción de un paso adelante, con la matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}_k} := \boldsymbol{\Psi} \mathbf{P}_{z_k, z_{k-1}}^N \boldsymbol{\Psi}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ .

El  $RSS/SSS_l$  mide el error de reconstrucción basándose en las estimaciones suavizadas de los componentes armónicos como proporción de la energía total de la señal para cada canal de señal indexado por  $l$ . Por otro lado, la verosimilitud marginal (logarítmica) mide la capacidad del modelo subyacente para representar la señal global antes de tener en cuenta el factor de corrección introducido por el filtro/suavizado de Kalman. Por lo tanto, mientras que el  $RSS/SSS_l$  tiende a sobreajustar la señal, la verosimilitud marginal es un indicador más confiable de la capacidad del modelo subyacente y tiene menos probabilidades de sobreajustarse.

Teniendo en cuenta estas dos medidas, también es posible seleccionar el número de componentes mediante un esquema de búsqueda discreta, donde se consideran diversos valores candidatos de  $M$  dentro de un cierto rango. Luego, se selecciona la estructura que obtenga el mejor desempeño en términos de  $RSS/SSS$  y verosimilitud marginal.

### 5.2.7 El Filtro de Kalman Extendido conjunto para la estimación de los componentes armónicos

La representación LTV-SS en la Ecuación (5.5) puede transformarse en una representación de SS no lineal, mediante la definición del vector de estado conjunto  $\mathbf{x}_k := [\mathbf{z}_k^T \quad \boldsymbol{\omega}_k^T]^T$ , lo cual conduce a:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\boldsymbol{\omega}_{k-1}) \cdot \mathbf{z}_{k-1} \\ \boldsymbol{\omega}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \quad (5.14a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k \quad (5.14b)$$

donde  $\mathbf{H} := [\boldsymbol{\Psi} \quad \mathbf{0}_{n \times 1}]$  y  $\mathbf{w}_k \sim \text{NID}(\mathbf{0}_{2M+1}, \boldsymbol{\Sigma}_w)$ , con  $\boldsymbol{\Sigma}_w = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_u, \boldsymbol{\Sigma}_v^2)$ .

La aplicación del Filtro Extendido de Kalman requiere la linealización de la representación no lineal del espacio de estados dada por la Ecuación (5.14) mediante una expansión en serie de Taylor de primer orden. Esto implica el cálculo de las derivadas parciales de primer orden de la Ecuación (5.14a) con respecto a  $\mathbf{z}_{k-1}$  y  $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$ . Lo cual da como resultado:

$$\mathbf{x}_k \approx \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k \quad \mathbf{F}_k := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{z}_{k-1}} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \boldsymbol{\omega}_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

donde:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{z}_{k-1}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_{k-1}} \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\omega_{k-1}) \cdot \mathbf{z}_{k-1} \\ \omega_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\omega_{k-1}) \\ \mathbf{0}_{1 \times 2M} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \omega_{k-1}} = \frac{\partial}{\partial \omega_{k-1}} \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\omega_{k-1}) \cdot \mathbf{z}_{k-1} \\ \omega_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}'(\omega_{k-1}) \cdot \mathbf{z}_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

y donde:

$$\mathbf{M}'(\omega_{k-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_{\omega} & & & \\ & \mathbf{M}'_{2\omega} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}'_{M\omega} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}'_{m\omega} := m \begin{bmatrix} -\text{sen } m\omega & \text{cos } m\omega \\ -\text{cos } m\omega & -\text{sen } m\omega \end{bmatrix}$$

Con base en las definiciones anteriores, la estimación de la descomposición armónica se consigue mediante el EKF y el suavizador de intervalo fijo que se detallan a continuación:

**Filtro de Kalman Extendido:** Dado un número de armónicos  $M$ , los hiperparámetros  $\mathcal{P} = \{\Psi, \Sigma_{\varepsilon}, \Sigma_u, \sigma_v^2\}$  y las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 := [\mathbf{z}_o^\top \quad \boldsymbol{\omega}_o]^\top$ , calcular para  $k = 1, \dots, N$ :

**Ecuaciones de predicción:**

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{k-1}) \quad (5.18a)$$

$$\mathbf{P}_k^{k-1} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{P}_{k-1}^{k-1} \cdot \mathbf{F}_k^\top + \Sigma_w \quad (5.18b)$$

**Ecuaciones de actualización:**

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^{k-1} \quad (5.18c)$$

$$\mathbf{S}_{\varepsilon_k} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_k^{k-1} \cdot \mathbf{H}^\top + \Sigma_{\varepsilon} \quad (5.18d)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{k-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{S}_{\varepsilon_k}^{-1} \quad (5.18e)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^k = \hat{\mathbf{x}}_k^{k-1} + \mathbf{K}_k \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \quad (5.18f)$$

$$\mathbf{P}_k^k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}^\top) \cdot \mathbf{P}_k^{k-1} \quad (5.18g)$$

**Suavizador de intervalo fijo (Kalman):** Dadas las condiciones iniciales  $\hat{\mathbf{x}}_N^N$  y  $\mathbf{P}_N^N$  iguales a las estimaciones EKF, calcular para  $k = N, N-1, \dots, 1$ :

$$\mathbf{J}_{k-1} = \mathbf{P}_{k-1}^{k-1} \mathbf{F}_k^\top (\mathbf{P}_k^{k-1})^{-1} \quad (5.19a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^N = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{J}_{k-1} (\hat{\mathbf{x}}_k^N - \hat{\mathbf{x}}_k^{k-1}) \quad (5.19b)$$

$$\mathbf{P}_k^N = \mathbf{P}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{J}_{k-1} (\mathbf{P}_k^N - \mathbf{P}_k^{k-1}) \mathbf{J}_{k-1}^\top \quad (5.19c)$$

Nótese que para el cálculo de las ecuaciones de actualización de los hiperparámetros, las estimaciones de estado y covarianza suavizadas se separan como sigue:

$$\mathbf{P}_k^N = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{z_k}^N & \mathbf{P}_{z_k, \omega_k}^N \\ \mathbf{P}_{\omega_k, z_k}^N & \mathbf{P}_{\omega_k}^N \end{bmatrix}$$

### 5.2.8 Introducción de otros componentes de banda estrecha en el modelo

Las señales ECG suelen presentar contaminación por otros componentes de banda estrecha, específicamente la línea de base y la interferencia de la línea eléctrica. El primero corresponde a un componente de muy baja frecuencia, que puede interpretarse como una tendencia y que adultera el valor de la línea de base de la señal ECG. La segunda corresponde a un componente asociado a la frecuencia de la red de distribución eléctrica (50 Hz o 60 Hz). Esta situación ocurre como resultado de una conexión deficiente a tierra o de un acoplamiento electromagnético, lo cual genera una contaminación de la señal ECG. Cada una de estas interferencias puede añadirse a la representación LTV-SS, ampliando la matriz de transición de estados de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\omega) & & \\ & \mathbf{M}_{bl} & \\ & & \mathbf{M}_{pl} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

donde  $\mathbf{M}_{bl}$  y  $\mathbf{M}_{pl}$  corresponden a los bloques de segundo orden:

$$\mathbf{M}_{bl} := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{pl} := \begin{bmatrix} \cos \omega_{pl} & \text{sen } \omega_{pl} \\ -\text{sen } \omega_{pl} & \cos \omega_{pl} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

y donde  $\omega_{pl} = 2\pi f_{pl}$ , siendo  $f_{pl}$  la frecuencia de la línea eléctrica (50 Hz o 60 Hz). La frecuencia de la línea eléctrica también puede añadirse como frecuencia a rastrear, si se esperan cambios de frecuencia significativos. También se pueden introducir varios armónicos de la frecuencia de la línea eléctrica, si es necesario.

La extensión de la matriz de transición de estado también resulta en una extensión del vector de estado, la covarianza del ruido del proceso y la matriz de mezcla, como sigue:

$$\mathbf{z}_k := \begin{bmatrix} z_{ecg,k} \\ z_{bl,k} \\ z_{pl,k} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_u := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{u_{ecg}} & & \\ & \boldsymbol{\Sigma}_{u_{bl}} & \\ & & \boldsymbol{\Sigma}_{u_{pl}} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Psi} := [\boldsymbol{\Psi}_{ecg} \quad \boldsymbol{\Psi}_{bl} \quad \boldsymbol{\Psi}_{pl}] \quad (5.22)$$

No obstante, tanto el Filtro de Kalman Extendido como el procedimiento de suavizado, utilizados para la estimación de los componentes armónicos y la optimización de los hiperparámetros, siguen un enfoque similar al escrito en la Subsección 5.2.4, si se tiene en cuenta la estructura modificada de las matrices involucradas.



## 5.3 Aplicación a señales ECG reales

En esta sección, se ilustra el método de descomposición armónica NS en señales seleccionadas de la base de datos de ECG del PTB, que contiene registros ECG de doce derivaciones, tanto de individuos sanos, como de pacientes que sufren diversos tipos de afecciones cardíacas. Inicialmente, se proporciona una breve descripción de la base de datos del PTB; a continuación, se expone cómo se optimiza el método de descomposición armónica NS para un registro ECG seleccionado de un individuo sano y luego se presentan los resultados obtenidos de la descomposición. Posteriormente, se repite el mismo procedimiento para el registro de un paciente que sufre un infarto de miocardio.

### 5.3.1 Base de datos ECG de varias derivaciones PTB

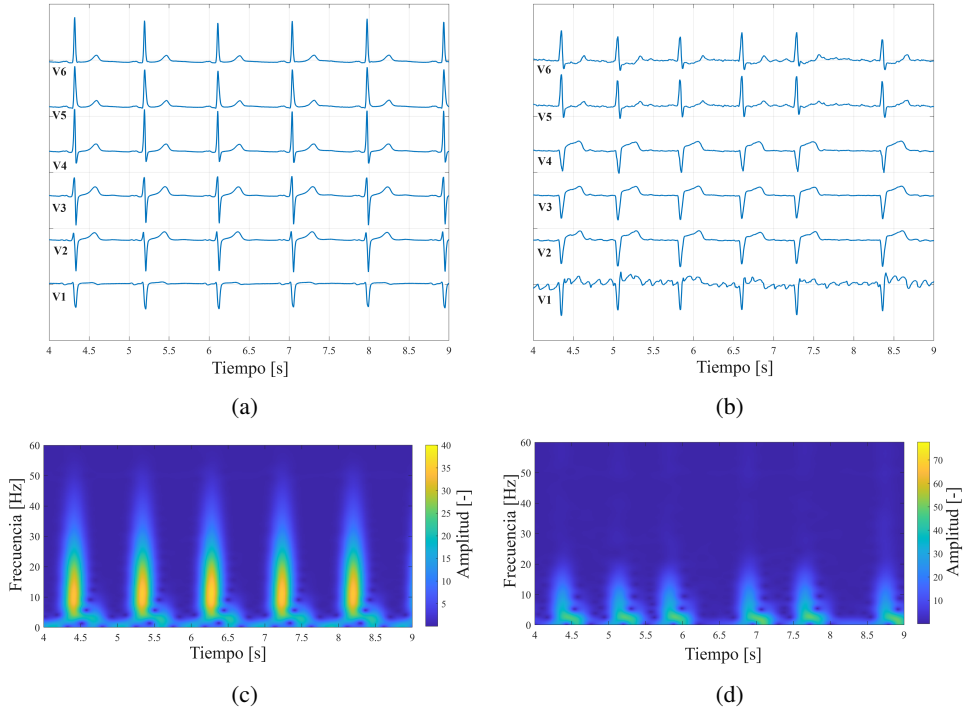
Los registros ECG recopilados en la base de datos de diagnóstico PTB fueron obtenidos mediante el uso de un prototipo de grabadora de ECG no comercial [31]. Esta base de datos contiene 549 registros de 290 sujetos, incluyendo sujetos masculinos y femeninos con un rango de edad de 17 a 87 años. Cada registro incluye 15 señales medidas simultáneamente: las 12 derivaciones convencionales, junto con los ECG de las 3 derivaciones de Frank, y se muestrean a 1 kHz, con una resolución de 16 bits.

Para el análisis posterior, la descomposición armónica se calcula únicamente en las derivaciones precordiales del ECG (V1 a V6). Las señales se submuestrean a 250 Hz utilizando la función `resample` de MATLAB, que incluye un filtro antialiasing. A continuación, la señal se normaliza mediante la eliminación de la media y realizando la división entre la desviación estándar de cada derivación. Posteriormente, se elimina de forma independiente la interferencia producida por la línea base de cada una de las derivaciones del ECG. El procedimiento de reducción de la interferencia de la línea base implica la detección del segmento isoelectrico posterior a la onda U, seguido de una interpolación mediante *B-spline* de los segmentos isoelectricos detectados. De esta manera, se estima y se elimina la deriva de la línea base de cada una de las derivaciones del ECG. Paralelamente, la IF fundamental de las señales del ECG, necesaria para el cálculo de la descomposición armónica, se estima con la ayuda de la detección del pico R. Para ello, se detectan los picos R de una sola derivación del ECG y se calcula la diferencia para obtener una estimación del intervalo entre latidos. A continuación, el intervalo entre latidos se interpola mediante *B-splines*, para obtener una serie temporal con la misma frecuencia de muestreo que el registro del ECG. La inversa de la señal obtenida se utiliza como IF fundamental en los procedimientos posteriores.

### 5.3.2 Descomposición armónica de un registro del ECG de un individuo sano

El método de descomposición armónica NS se ilustra primero en un registro ECG de un individuo sano. La evaluación se realiza sobre la señal `SO3061RE` correspondiente al sujeto de control, `PACIENTE 104`. Un segmento de la señal con una duración de 5 s se presenta en la Figura 5.2(a), mientras que en la Figura 5.2(c) se presenta el espectrograma de la señal correspondiente a la derivación V4. El espectrograma se calcula utilizando una ventana gaussiana de  $N_w = 1024$  muestras con un coeficiente de apertura  $\alpha = 12$  (equivalente a una desviación estándar  $\sigma = (N_w - 1)/2\alpha$ ). El coeficiente de apertura se

establece de manera que el tamaño efectivo de la ventana coincida aproximadamente con un solo latido cardíaco, el cual para el presente caso es de aproximadamente 64 latidos por minuto, equivalente a una frecuencia fundamental de 1.07 Hz.



**Figura 5.2** Muestra de registros ECG de las derivaciones precordiales V1 a V6, obtenidos de la base de datos PTB para evaluar el desempeño del algoritmo de descomposición armónica. (a) Segmentos de tiempo de 5 s de un individuo sano (PACIENTE 104, SEÑAL S03061RE); (b) Segmentos de tiempo de 5 s de un individuo con infarto de miocardio (PACIENTE 025, SEÑAL S00871RE); (c) Espectrograma del registro de ECG sano en la derivación V4; (d) Espectrograma del registro de ECG patológico en la derivación V4. Configuraciones del espectrograma: ventana gaussiana de 1024 muestras con un coeficiente de apertura igual a 12.

### 5.3.3 Ajuste inicial del algoritmo de descomposición armónica

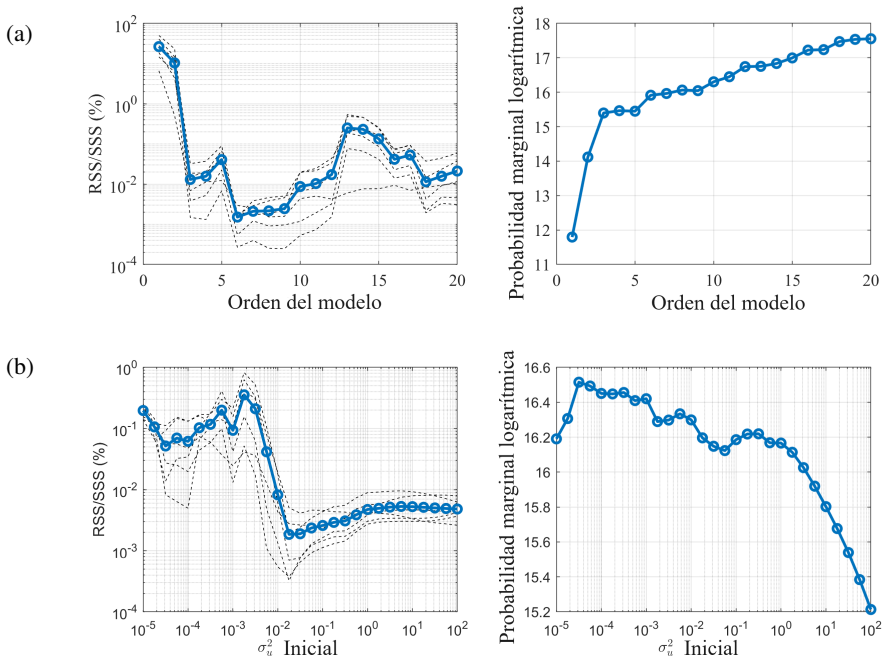
Antes de proceder al análisis de la descomposición armónica, primero se evalúa el efecto del orden del modelo (número de armónicos) y los valores iniciales en el rendimiento alcanzado después de aplicar el algoritmo de optimización EM.

**Selección del número de componentes armónicos.** Este procedimiento se lleva a cabo mediante el cálculo de diferentes descomposiciones con órdenes  $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ . Para cada orden del modelo, se ejecuta el algoritmo EM con los valores iniciales que se resumen en la Tabla 5.1. Al completar la optimización, se computan la suma de los cuadrados de los residuos (RSS) y la suma de los cuadrados del suavizado (SSS) de la señal ECG reconstruida, determinando así la relación  $RSS/SSS$ . Además, se calcula la verosimilitud marginal, ambas cantidades se definen en la Ecuación (5.13a). Los resultados de este

análisis se presentan en la Figura 5.3(a). Se puede observar que el cociente RSS/SSS mejora rápidamente al incluir los primeros componentes, pero posteriormente el desempeño se deteriora después de incorporar 10 componentes.

**Tabla 5.1** Valores iniciales de los hiperparámetros utilizados para la inicialización del algoritmo EM.

Hiperparámetro	Inicialización
Covarianza de las innovaciones del estado	$\Sigma_u = 10^{-2} \cdot I_{2M}$
Varianza de las innovaciones de los parámetros	$\sigma_w^2 = 10^{-12} \cdot I_{2M}$
Covarianza del ruido de medición	$\Sigma_\varepsilon = 10^{-2} I_m$
Vector de estado inicial	$z_0 = \mathbf{0}_{2M \times 1}$
Covarianza del error de estimación del estado	$P_0 = 10^{-4} \cdot I_{2M}$
Número máximo de iteraciones	100
Matriz de mezcla	$\Psi$ se establece como la amplitud de la FFT de cada derivación del ECG en las frecuencias $m\omega_0$ .



**Figura 5.3** Comportamiento del método de descomposición armónica NS en el registro del ECG de un individuo sano para: (a) número creciente de componentes armónicos (orden del modelo); (b) diferentes puntos de inicio de la covarianza de las innovaciones de estados. La columna de la izquierda indica la RSS/SSS para cada una de las derivaciones (V1 a V6), la columna de la derecha indica la verosimilitud marginal.

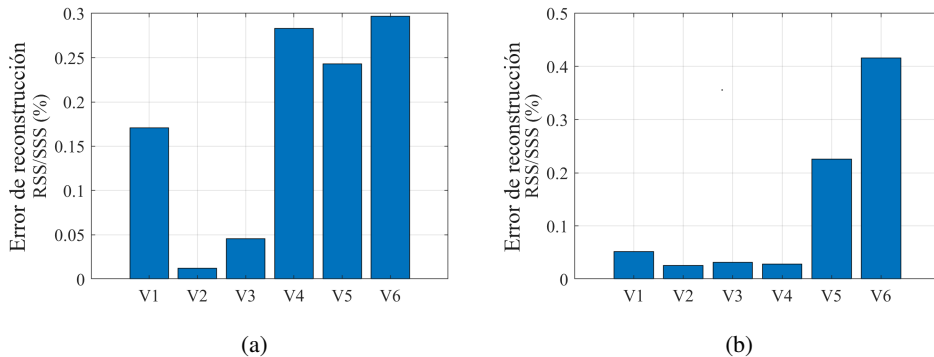
Por otro lado, la verosimilitud marginal muestra un incremento constante a medida que

aumenta el número de componentes. Sin embargo, la pendiente en la curva de la verosimilitud marginal disminuye después de utilizar 10 componentes en el modelo, lo cual indica que el rendimiento no mejora significativamente. Al comparar ambas curvas, se concluye que 10 componentes son suficientes para representar adecuadamente el registro ECG.

**Impacto de los valores iniciales de los hiperparámetros.** A pesar de que el propósito de la optimización de hiperparámetros con el algoritmo EM es evitar la selección manual de éstos, las estimaciones resultantes aún son sensibles a la elección de los valores iniciales proporcionados al algoritmo EM. En consecuencia, para analizar el efecto de la covarianza inicial de las innovaciones del estado, se efectuaron múltiples ejecuciones del algoritmo EM con el número de componentes armónicos seleccionados en el análisis anterior (10 componentes) para diferentes puntos de partida de esta variable. Más precisamente, en cada ejecución, la covarianza inicial de las innovaciones del estado se iniciaron como  $\Sigma_u = \sigma_u^2 \mathbf{I}_{2M}$  utilizando 29 valores de  $\log_{10} \sigma_u^2$  en el rango desde  $-5$  hasta  $2$ . Los resultados de este análisis se presentan en la Figura 5.3(b). Como se puede observar en los resultados, hay un mínimo claro en la relación RSS/SSS, que no coincide exactamente con los valores máximos de verosimilitud marginal. En el caso de la relación RSS/SSS, el mínimo se alcanza aproximadamente en  $\sigma_u^2 = 2 \times 10^{-2}$ , mientras que para la verosimilitud marginal, el óptimo ocurre en  $\sigma_u^2 \approx 3.2 \times 10^{-5}$ . Nuevamente, considerando las dos figuras de desempeño, se selecciona finalmente el valor  $\sigma_u^2 = 2 \times 10^{-2}$ .

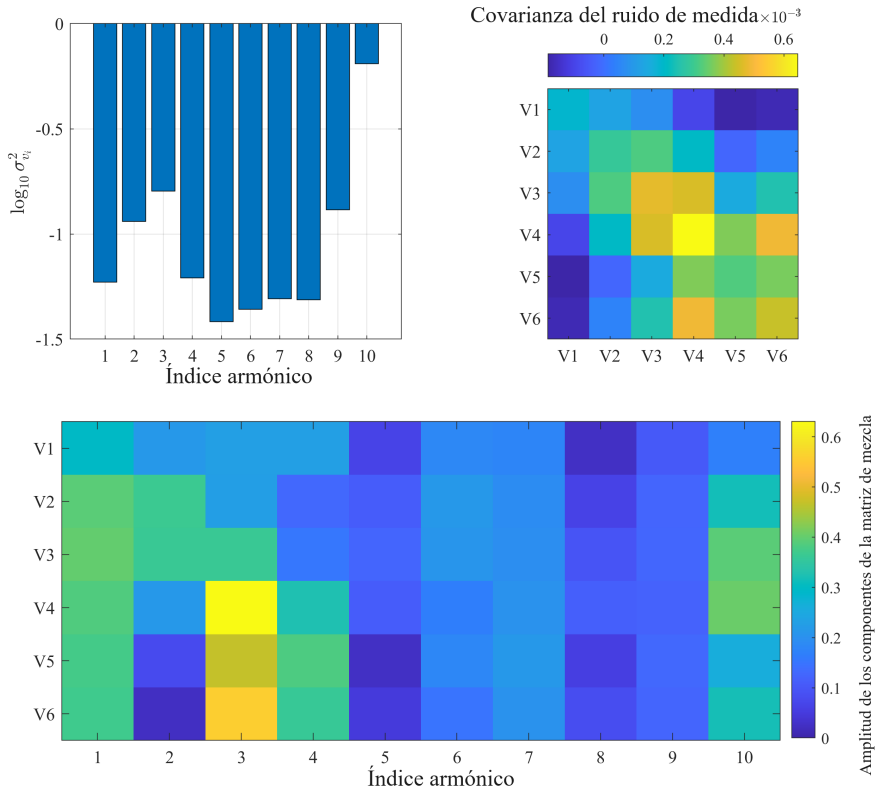
### 5.3.4 Resultados de la descomposición armónica del NS

El RSS/SSS logrado con la descomposición armónica NS para  $M = 10$  y  $\sigma_u^2 = 2 \times 10^{-2}$  se muestra en la Figura 5.4 (los demás ajustes del algoritmo EM son los mismos que se indican en la Tabla 5.1). El rendimiento obtenido es muy bueno en general, con un



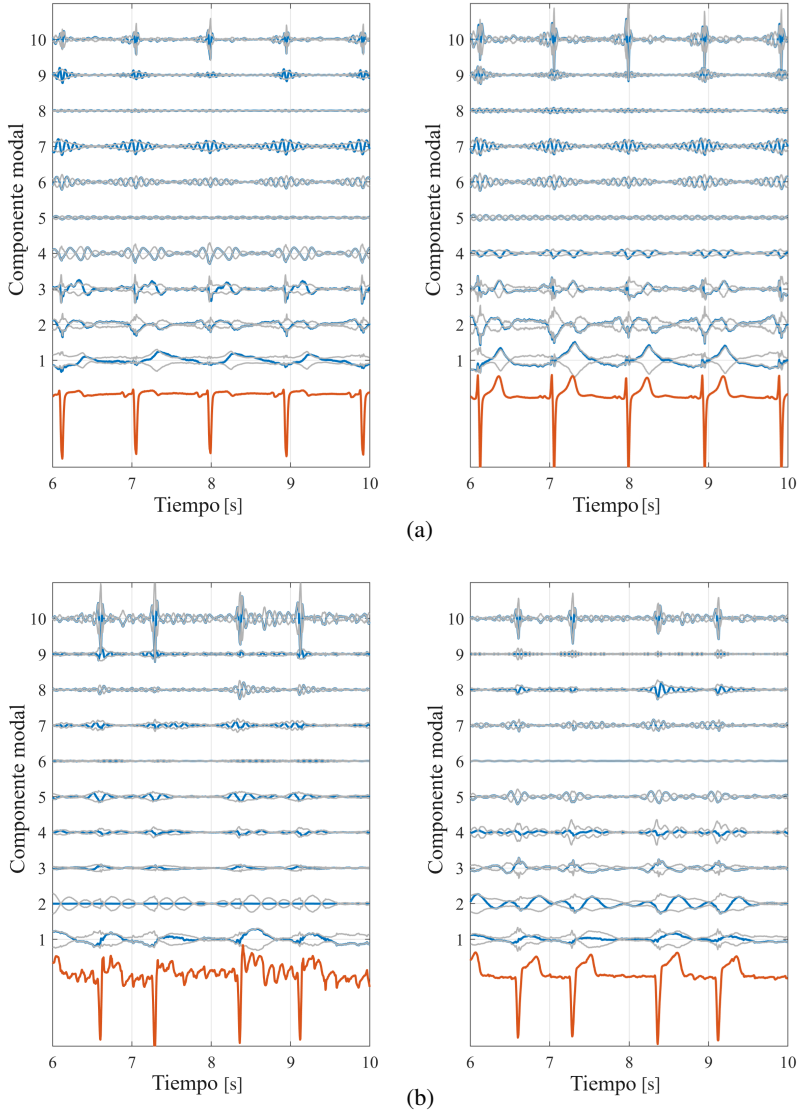
**Figura 5.4** Error de reconstrucción (RSS/SSS) por derivación en (a) señal de ECG de control saludable (PACIENTE 104, SEÑAL S03061RE); (b) registro de paciente con infarto de miocardio (PACIENTE 025, SEÑAL S00871RE).

RSS/SSS inferior al 0.3% en las seis derivaciones del ECG. Existe cierta variación de rendimiento entre las derivaciones. V2 y V3 tienen el mejor desempeño, con un RSS/SSS por debajo del 0.05%, mientras que las demás derivaciones tienen casi 5 veces ese valor. En la Figura 5.5 se muestran los valores de los hiperparámetros obtenidos después de



**Figura 5.5** Hiperparámetros optimizados de la descomposición armónica NS obtenidos en la señal de ECG de control saludable (PACIENTE104, señal SO3061RE). Arriba a la izquierda: entradas diagonales de la covarianza de las innovaciones del estado; arriba a la derecha: covarianza del ruido de medición; abajo: matriz de mezcla.

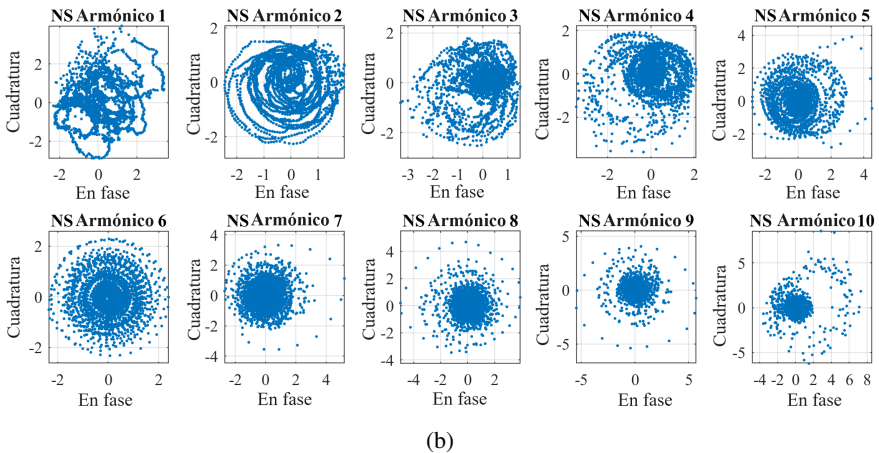
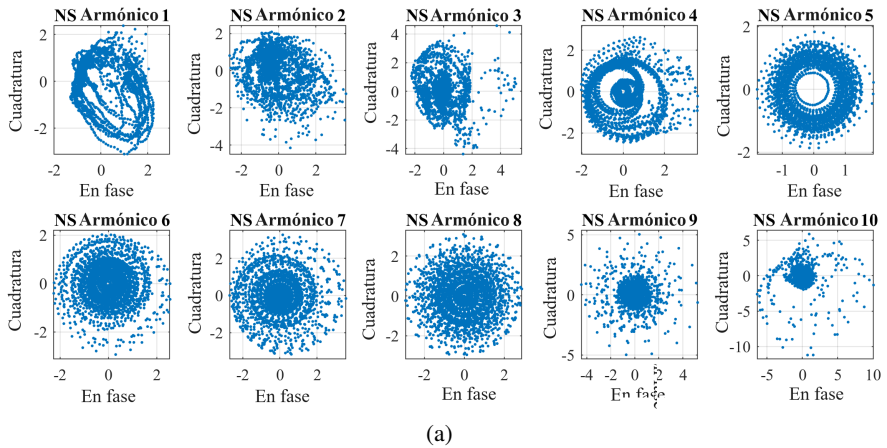
la optimización del algoritmo EM. Las gráficas superiores de la Figura 5.5 muestran las entradas diagonales de la covarianza optimizada de las innovaciones del estado y la matriz de covarianza del ruido de medición. El gráfica inferior muestra las entradas de la matriz de mezcla optimizada. Las varianzas de las innovaciones del estado para los armónicos del 1 al 9 están aproximadamente en la misma escala, mientras que es mayor para el último armónico. Como se evidenciará a continuación, el último modo tiene una varianza mayor, ya que representa la mayor parte del complejo QRS. La matriz de covarianza del ruido de medición indica entradas más grandes relacionadas con las derivaciones V3, V4 y V6. El cuadro inferior muestra la contribución individual de cada uno de los 10 armónicos en las 6 derivaciones del ECG, que se calcula a partir de la matriz de mezcla optimizada como  $\sqrt{c_{j,2m-1}^2 + c_{j,2m}^2}$  para el armónico  $m = 1, \dots, 10$  y la derivación  $j = 1, \dots, 6$ . A partir de esto, se puede concluir, por ejemplo, que el tercer armónico contribuye en mayor medida a las derivaciones V4 a V6. Además, se puede observar que hay algunos armónicos con una contribución menor a todas las derivaciones del ECG, incluyendo los armónicos 5, 8 y 9.



**Figura 5.6** Gráficos en el dominio del tiempo de los componentes armónicos proyectados en las derivaciones V1 (panel izquierdo) y V2 (panel derecho) de los respectivos registros ECG para (a) paciente de control saludable (PACIENTE 104, SEÑAL S03061RE), (b) paciente con patología cardíaca (PACIENTE 025, SEÑAL S0087LRE). Cada panel muestra la derivación correspondiente del ECG en color rojo, los 10 componentes armónicos de fase en color azul y las respectivas IA en color gris.

Las trazas en el dominio del tiempo de los 10 componentes armónicos obtenidos en el registro ECG del paciente saludable, proyectados en las derivaciones V1 y V2, se muestran en la Figura 5.6(a). La proyección se obtiene multiplicando los componentes  $z_{2m-1,k}$  y  $z_{2m,k}$  para cada armónico  $m = 1, \dots, 10$  con su respectiva entrada en la matriz de mezcla, de modo que se obtiene su contribución a la derivación del ECG correspondiente. A partir de

este análisis, es fácil ver que la mayor parte del complejo QRS se representa con el décimo armónico, con cierta contribución del tercero, mientras que la mayor parte de la onda ST se representa con los modos primero y tercero. Para el caso de un paciente patológico, la respuesta se puede observar en la Figura 5.6(b). Se resaltan las características morfológicas de las señales correspondientes.

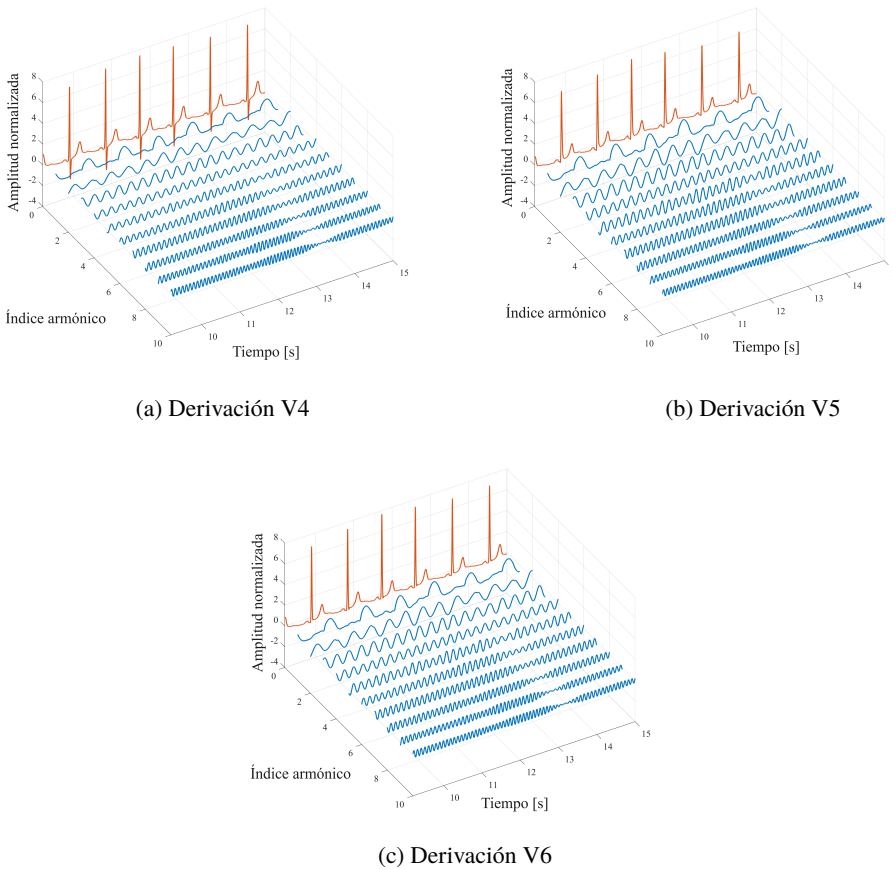


**Figura 5.7** Primeros 10 componentes armónicos en fase obtenidos a partir de la muestra de la señal ECG de control con la descomposición armónica NS, después de realizar la optimización con el algoritmo EM (PACIENTE104, SEÑAL S03061RE).

La Figura 5.7 muestra gráficos de fase de los componentes armónicos en cuadratura frente a los componentes armónicos en fase para los 10 armónicos correspondientes. Estos gráficos de fase resumen el comportamiento dinámico dependiente del tiempo de la actividad eléctrica del corazón. Algunas de las órbitas muestran un patrón más organizado, lo que indica estabilidad en el comportamiento dinámico, mientras que otras órbitas parecen ser más caóticas, aunque aún sujetas a un cierto patrón. De estos gráficos se puede

destacar, por ejemplo, el décimo armónico, que la mayor parte del tiempo se encuentra cerca del origen, pero en algunos períodos de tiempo se aleja en el comienzo del segmento QRS.

En la Figura 5.8, se muestran las primeras 10 componentes armónicas obtenidas en las derivaciones V4, V5 y V6 del ECG. La variación en la proporción de cada uno de los componentes armónicos del NS en cada derivación no es muy evidente; sin embargo, la variación en la IA de cada armónico es clara en algunos armónicos. El primer armónico parece estar dominado principalmente por la onda T, mientras que otros armónicos introducen otros detalles de la forma de onda del ECG.

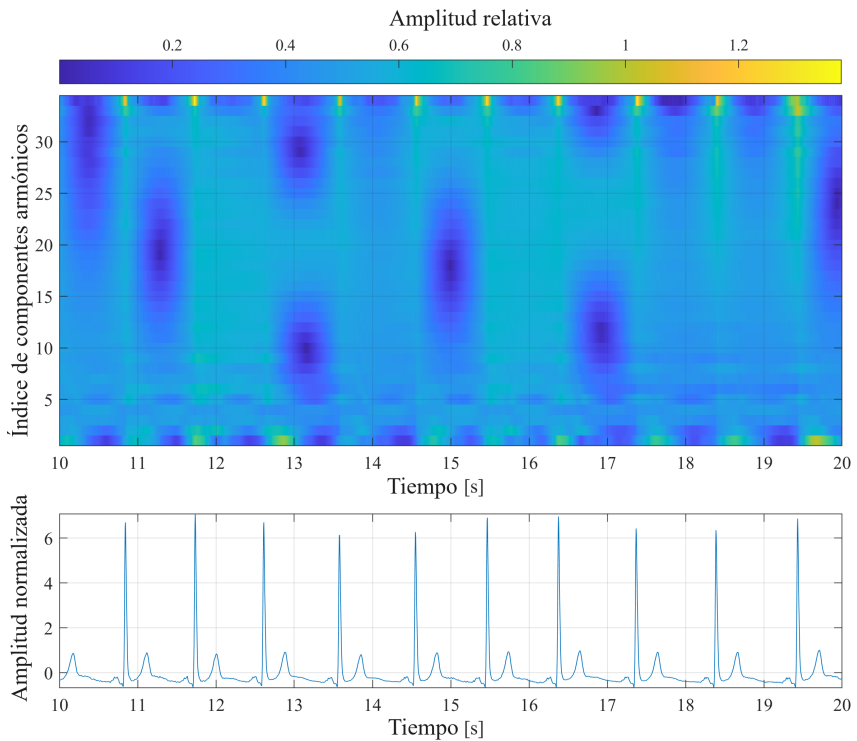


**Figura 5.8** Primeros 10 componentes armónicos en fase obtenidos a partir de la muestra de la señal ECG de control mediante la descomposición armónica NS después de efectuar la optimización EM (PACIENTE104, SEÑAL S03061RE).

En la Figura 5.9 se representan las IA asociadas a todos los componentes armónicos obtenidos tras la descomposición armónica NS en la señal ECG de la derivación V5. Al igual que en el espectrograma, el gráfico de superficie que se observa en el cuadro superior



representa la amplitud instantánea de la señal en componentes de oscilación específicos, en este caso asociados a un único componente armónico NS. La señal ECG correspondiente se muestra en el cuadro inferior. Las barras verticales en el gráfico de superficie pueden asociarse a los intervalos de energía más altos correspondientes a los complejos QRS. También puede observarse que los armónicos inferiores transmiten la mayor parte de la información sobre otros componentes de onda del registro de ECG. Por ejemplo, la mayor parte de la energía asociada a la onda T se encuentra en los primeros y segundos armónicos de la NS. Por último, se observa que una proporción significativa de la energía del complejo QRS está representada en los últimos armónicos de la NS (índices 33 y 34). En contraste con el espectrograma mostrado en la Figura 5.2(c) y (d), es evidente que la superficie de la IA puede proporcionar una localización tiempo–frecuencia más precisa de los diferentes componentes de onda de la señal ECG.

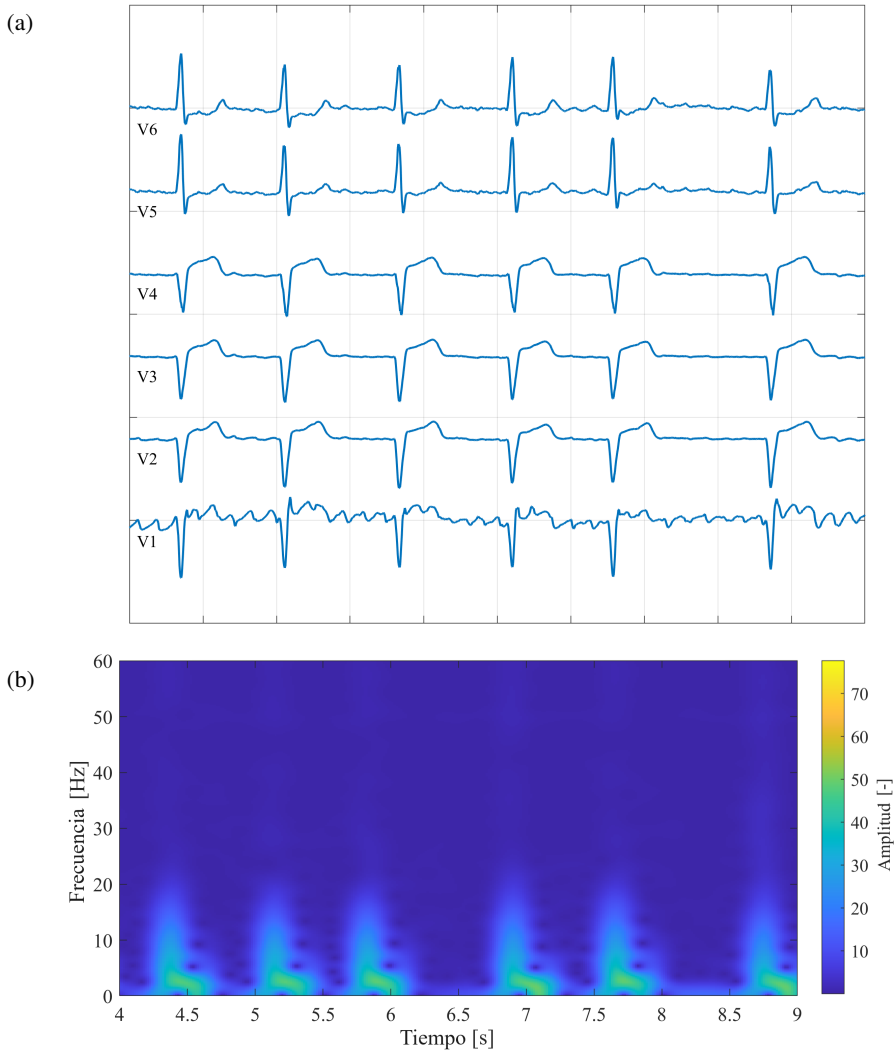


**Figura 5.9** Amplitudes instantáneas asociadas con cada uno de los armónicos NS obtenidos en la señal ECG de la derivación V5 (cuadro superior) y la respectiva señal ECG (cuadro inferior).

### 5.3.5 Descomposición armónica de una señal de un paciente con infarto de miocardio

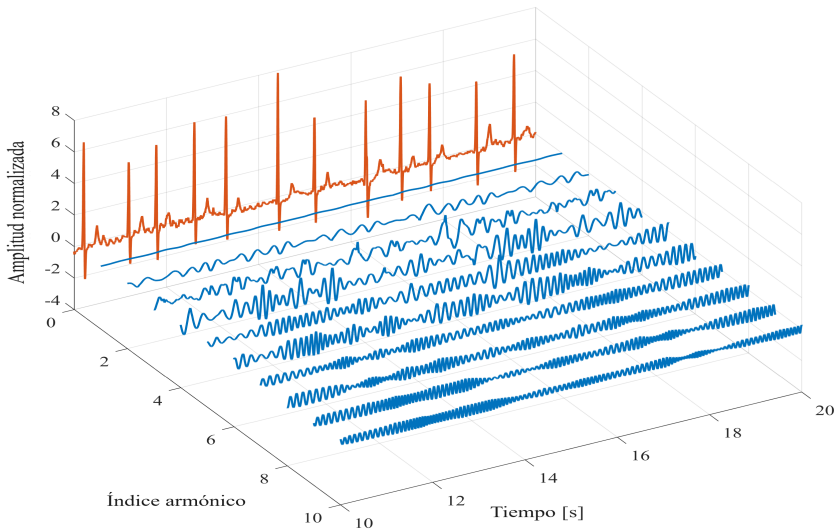
En esta sección, se repite el procedimiento de descomposición armónica NS en un registro ECG correspondiente a un paciente de la base de datos PTB (PACIENTE025, SIGNAL

so087LRE), que sufre un infarto del miocardio. Una muestra de las señales ECG (derivaciones V1 a V6) se puede observar en la Figura 5.10, con el espectrograma correspondiente a la derivación V5 mostrado en la Figura 5.10(b). Los ajustes del espectrograma son los mismos que en el análisis de la sección anterior.



**Figura 5.10** Muestra del registro del ECG seleccionado de un individuo que sufre un infarto de miocardio extraído de la base de datos de la PTA (PACIENTE 025 señal So087LRE): (a) Extracto de la señal de 10 s correspondiente a las derivaciones precordiales (V1 a V6). (b) Espectrograma de la señal del ECG de la derivación V4. Configuración del espectrograma: Ventana gaussiana de 1024 muestras con coeficiente de apertura igual a 12.

El cálculo de la descomposición armónica NS se basa en la aplicación del algoritmo EM para el cálculo de hiperparámetros, con valores iniciales de hiperparámetros y orden del modelo como en el caso del registro ECG del individuo sano. El desempeño del error alcanzado se muestra en la Figura 5.4(b), donde se observa que se alcanzan errores ligeramente mayores en el presente caso, en contraste con el caso del registro ECG del



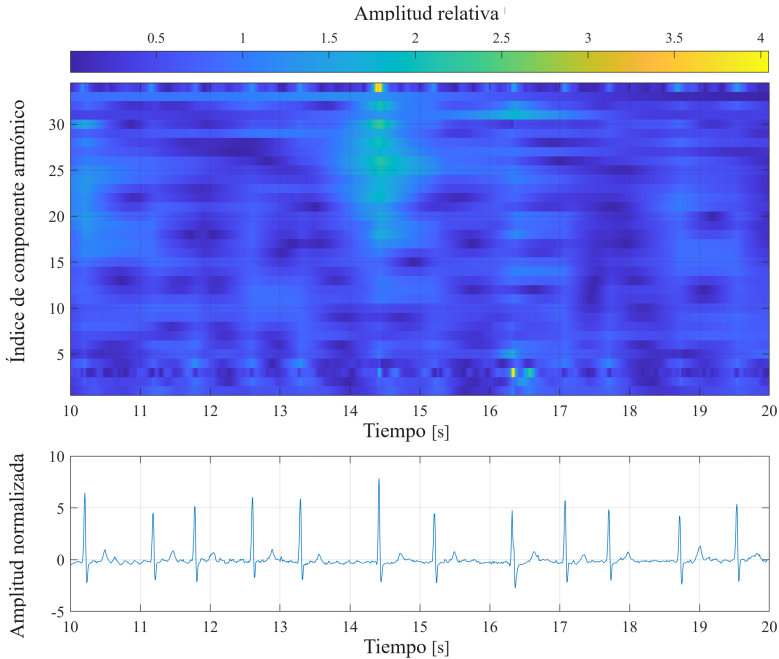
**Figura 5.11** Primeros 10 componentes armónicos obtenidos de la muestra de la señal ECG de control, mediante la descomposición armónica NS después de realizar la optimización EM (PACIENTE025, señal Soo87LRE – paciente con infarto de miocardio).

los primeros 10 componentes armónicos obtenidos en la derivación V5 del registro ECG del paciente con infarto de miocardio. A diferencia del caso del individuo sano en el que se observan formas de onda periódicas ordenadas, en este caso patológico es evidente la mayor complejidad de las formas de onda en cada uno de los componentes armónicos. Asimismo, se nota que la contribución del primer armónico es casi nula. Una conclusión similar se desprende del gráfico de la superficie de la IA en la Figura 5.12, donde se observa el comportamiento errático en todos los armónicos, al tiempo que se nota una mayor contribución de los armónicos de orden superior.

### 5.3.6 Algunas observaciones prácticas

La aplicación del método propuesto de descomposición armónica se resume en los siguientes pasos:

1. Selección del número de componentes armónicos e incrustación de la señal en la representación de espacio de estados de bloques diagonales.
2. Cálculo de los componentes modales y de la frecuencia instantánea fundamental.
3. Optimización general de la representación mediante EM.



**Figura 5.12** Amplitudes instantáneas asociadas a cada uno de los armónicos NS obtenidos a partir de la señal ECG de un paciente con infarto de miocardio en la derivación V5 (cuadro superior) y la respectiva señal ECG (cuadro inferior) (PACIENTE025, señal Soo87LRE).

Cada uno de estos pasos puede estar asociado con algunos puntos clave que pueden conducir a una aplicación exitosa del método:

- (i) **Selección de un número adecuado de componentes armónicos.** En este caso, se puede realizar una búsqueda discreta con la ayuda de RSS/SSS y verosimilitud marginal. No obstante, siempre es recomendable realizar una evaluación inicial de la señal con herramientas convencionales de frecuencia o tiempo-frecuencia. Éstas pueden proporcionar una evaluación inicial de la complejidad de la señal y sugerir un espacio de búsqueda inicial.
- (ii) **Condiciones iniciales para la optimización de EM.** Éstas se pueden dividir en algunas subcategorías:
  - a) *Varianzas de estado y parámetros.* Una buena práctica es comenzar con valores pequeños y aumentarlos gradualmente hasta que el rendimiento parezca adecuado. Posteriormente, se puede aplicar una búsqueda discreta, como se sugiere en la Subsección 5.3.3, después de identificar un rango potencial.
  - b) *Matriz de mezcla.* El procedimiento utilizado en este capítulo, que se basa en seleccionar las partes real e imaginaria de la FFT de un segmento inicial corto de la

señal, funcionó muy bien en las simulaciones realizadas. Se podrían implementar enfoques más complejos, pero dado que estos valores se optimizan posteriormente, es suficiente proporcionar una buena estimación inicial con la FFT.

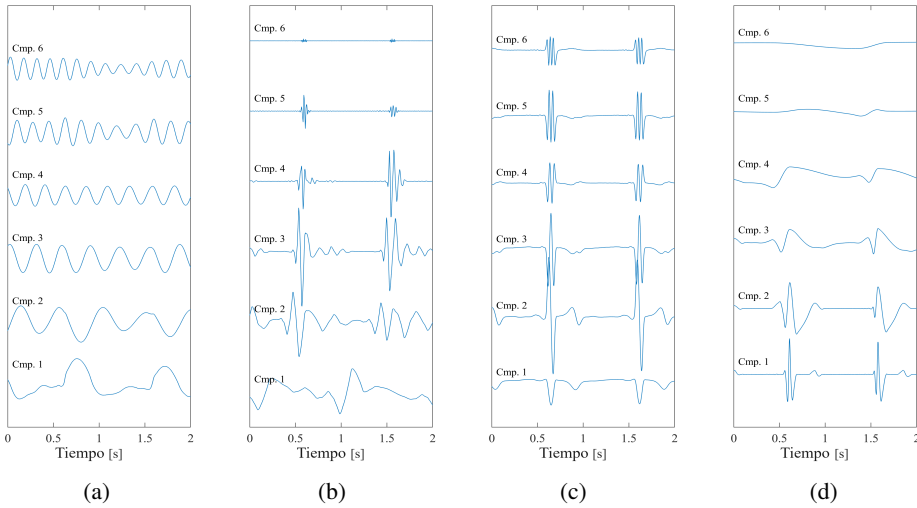
- c) *Valores iniciales de las estimaciones de estado y parámetros.* Si bien el vector de estado se puede establecer fácilmente en cero, es importante proporcionar un buen valor inicial para la frecuencia instantánea. De lo contrario, el algoritmo de filtrado/suavizado de Kalman puede caer fácilmente en un mínimo local o divergir.

Como observación final se puede mencionar que, si bien el método propuesto y los métodos relacionados basados en el filtrado de Kalman son complejos, tanto conceptual como computacionalmente, el marco de optimización de EM simplifica en gran medida la aplicación del método armónico. Por lo tanto, se pueden obtener buenos resultados siempre que se sigan las pautas proporcionadas anteriormente. Además, si es necesario aplicar el método a registros muy largos, se requiere sólo una vez, realizar la optimización de hiperparámetros en un segmento corto de la señal y luego llevar estos hiperparámetros optimizados para el análisis del resto de la señal. Por otro lado, los valores iniciales de las estimaciones de estado y parámetros se pueden concatenar en diferentes intervalos de la señal.

## 5.4 Comparación con otros métodos de descomposición

En esta sección, la descomposición armónica NS obtenida con el método propuesto se compara con otros métodos de descomposición modal conocidos. Se consideran los siguientes algoritmos:

- **Transformación *wavelet* discreta (DWT):** La DWT expande una señal en una base funcional determinada por una función *wavelet madre*, que es una función con una ubicación específica en el plano de tiempo–frecuencia. La DWT produce entonces una descomposición de la señal que se caracteriza por la proyección de la señal en versiones modificadas de la *wavelet* madre, obtenidas por compresión o estiramiento en función de un factor de escala de la forma  $b^j$ , donde lo más habitual es utilizar  $b = 2$ . Cabe destacar que la DWT opera exclusivamente sobre señales univariantes, por lo que se analiza una sola derivación del ECG a la vez. En el presente análisis, siguiendo las recomendaciones de [85], se utiliza la DWT con una *wavelet* madre Daubechies 6 y una descomposición de séptimo orden, lo que conduce a 7 coeficientes de detalle más 1 coeficiente de aproximación. Los coeficientes obtenidos se remuestrean a la frecuencia de muestreo de la señal original con el fin de obtener los diferentes componentes modales. Las componentes de la señal obtenidas se muestran en la Figura 5.13(b).
- **Análisis del Espectro Singular (SSA):** El SSA es un método de descomposición de señales no paramétrico, el cual se basa en la descomposición del valor singular (SVD) de la matriz de autocovarianza empírica de una serie temporal. El objetivo principal del SSA es descomponer una señal como la superposición de varios componentes oscilatorios ortogonales que no son necesariamente sinusoidales y, por



**Figura 5.13** Comparación de las diferentes descomposiciones modales obtenidas sobre el registro ECG de un individuo sano de la base de datos PTB (PACIENTE104, señal SO3061RE), utilizando: (a) la descomposición armónica NS propuesta; (b) la transformada wavelet discreta (symlet 4); (c) el análisis del espectro singular; (d) la descomposición modal empírica.

lo tanto, también es apto para señales no estacionarias como el ECG. De los métodos considerados aquí, el SSA es el único capaz de manejar señales multivariadas, con la construcción de la matriz empírica de autocovarianza cruzada  $\mathbf{C}$ , definida como:

$$\mathbf{C} := \frac{1}{N-d} \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Phi}^\top \quad \mathbf{\Phi} := [\mathbf{Y}_0 \quad \mathbf{Y}_1 \quad \dots \quad \mathbf{Y}_d] \quad (5.23)$$

donde  $\mathbf{Y}_j := [\mathbf{y}_{d+1-j} \quad \mathbf{y}_{d+2-j} \quad \dots \quad \mathbf{y}_{d+N-j}]^\top$  es la matriz de la señal,  $\mathbf{\Phi}$  es la matriz de Hankel asociada con la señal multivariante y  $d$  es el retardo máximo utilizado para construir la matriz de Hankel. El SSA puede calcularse entonces mediante la SVD de la matriz de Hankel, de modo que  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top$ , donde  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(N-d) \times nd}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{nd \times nd}$  representan las matrices de vectores singulares izquierda y derecha y  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{nd \times nd}$  representa la matriz diagonal de valores propios. La matriz de vectores singulares izquierda  $\mathbf{U}$  contiene los modos de oscilación del SSA, mientras que las entradas diagonales al cuadrado de  $\mathbf{S}$  proporcionan una medida de la proporción de la varianza total de la señal que se explica por cada uno de los componentes [89]. La Figura 5.13(c) muestra los primeros componentes del SSA, obtenidos con  $d = 20$ .

- **Descomposición de Modo Empírico (EMD):** La EMD consiste en la descomposición de una señal no lineal y no estacionaria  $y_k$  en términos de las llamadas *Funciones de Modo Intrínseco* (IMFs). Las IMFs se obtienen a través de un proceso de tamizado, que se repite hasta obtener un número deseado de componentes [74].

La señal  $y_k$  se descompone en la suma de sus modos intrínsecos y un residuo de la siguiente manera:

$$y_k = \sum_{i=1}^n c_{i,k} + r_k \quad (5.24)$$

donde  $c_{i,k}$  es el  $i$ -ésimo IMF, el cual representa una componente intrínseca de la señal en una escala de tiempo específica;  $r_k$  es la señal residual que generalmente es una función simple (como una constante o una función lineal) después de extraer todas las IMFs. y  $n$  es el número total de IMFs extraídas. Cada modo intrínseco se define como una función que satisface las siguientes condiciones: (a) Tiene el mismo número de máximos y mínimos en cada ventana de tiempo. (b) En cualquier punto, el valor promedio de su envolvente definida como la media entre sus mínimos locales y sus máximos locales, es cero. (c) Tiene una frecuencia promedio bien definida. (d) Cada IMF representa una frecuencia diferente y una escala de tiempo.

Para descomponer la señal en sus IMFs, se realiza el siguiente procedimiento:

- (i) Se identifica una función de envolvente, un *spline* cúbico,  $m_{1,k}$  que se ajusta a la señal  $y_k$ .
- (ii) Se sustrae el *spline*  $m_{1,k}$  de la señal  $y_k$  para obtener el primer IMF  $h_{1,k}$

$$h_{1,k} = y_k - m_{1,k}$$

- (iii) Se identifica un nuevo *spline*  $m_{2,k}$  que se ajusta a  $h_{1,k}$ .
- (iv) Se sustrae el *spline*  $m_{2,k}$  de  $h_{1,k}$  para obtener el segundo IMF  $h_{2,k}$

$$h_{2,k} = h_{1,k} - m_{2,k}$$

- (v) Se repite el proceso de identificación del *spline* y la extracción del IMF para obtener los siguientes IMFs. El proceso se detiene cuando se obtiene un IMF que representa la componente más fina de la señal.

Una vez que se han obtenido todos los IMFs, se pueden analizar y visualizar individualmente. Cada IMF representa una frecuencia y una escala de tiempo específica, lo que permite el análisis en diferentes escalas de tiempo y frecuencias.

La EMD es un proceso iterativo y adaptativo que se ajusta automáticamente a la señal que se está analizando.

## 5.5 Conclusiones

Este capítulo se ha dedicado al desarrollo de un método de descomposición armónica no estacionaria basado en representaciones de espacio de estado en bloques diagonales y filtrado de Kalman, con aplicación principal al análisis de señales ECG de múltiples derivaciones. El marco conceptual se sustenta en un modelo de espacio de estados diseñado específicamente para representar un proceso pseudo-periódico no estacionario. En este sentido, primero se proporciona un fundamento teórico para llegar a dicha representación

de espacio de estados y una metodología de optimización para ajustar los hiperparámetros de la representación de un registro de datos dado.

El marco EM facilita en gran medida el ajuste del método en señales tan complejas como los registros de ECG, como se demuestra en este capítulo. Además, a diferencia de muchos métodos convencionales de descomposición de señales no estacionarias disponibles, los componentes obtenidos por el método propuesto tienen interpretabilidad física, como componentes sinusoidales con una frecuencia fundamental común dependiente del tiempo.

Si bien el método es computacional y conceptualmente más complejo que los métodos convencionales de descomposición de señales no estacionarias, el nivel de detalle y resolución de forma de onda puede ser beneficioso para análisis detallados. Además, la estructura impuesta en la señal por el método puede facilitar la detección de componentes con cierta información, o bien, la eliminación de componentes que no cumplen con la estructura del proceso impuesta. Esto puede resultar especialmente útil al considerar la detección y localización de características relacionadas con trastornos patológicos en sistemas biológicos o daños/fallos en sistemas mecánicos. Asimismo, esta propiedad se puede utilizar para eliminar ruido o artefactos de la señal. Se ilustra el procedimiento propuesto y su aplicabilidad al análisis de registros de electrocardiografía.

Las principales aportaciones metodológicas de este capítulo se refieren a: (i) la concepción de la descomposición armónica NS como estados asociados a una representación de espacio de estado en bloques diagonales dependientes del tiempo, las cuales se mapean en las diferentes respuestas medidas mediante una matriz de mezcla, (ii) la optimización de los parámetros de la matriz de mezcla y las covarianzas del ruido aplicando un algoritmo de EM.

La aplicabilidad de este método en el análisis armónico de señales ECG de varias derivaciones se demostró en registros seleccionados de un individuo sano y de un paciente con infarto de miocardio. En ambos casos, fue posible obtener errores bajos en la reconstrucción. Además, a diferencia de los métodos de descomposición modal no estacionaria relacionados, las formas de onda obtenidas de los componentes armónicos son sencillas de interpretar y asociar con las características principales del ECG.

Aunque el coste computacional del método propuesto puede ser grande en contraste con los métodos de descomposición modal no paramétricos (especialmente teniendo en cuenta la optimización de EM), el nivel de detalle y la resolución de la forma de onda pueden valer la pena en los análisis detallados de la señal ECG. Esto puede resultar especialmente útil cuando se considera la detección y localización de características relacionadas con trastornos patológicos.



# 6 Conclusiones y trabajo futuro (Conclusions and future work)

---

## 6.1 Primera parte

### 6.1.1 Introducción

La presente Tesis Doctoral se enfoca en el desarrollo de algoritmos para el modelado discreto de sistemas dinámicos. Su enfoque principal es el análisis tiempo-frecuencia y la respuesta no estacionaria de señales dependientes del tiempo y sujetas a incertidumbres. Se utilizan modelos dependientes del tiempo con parámetros variables, con una aplicación particular al caso de las señales ECG.

En la Subsección 6.2.2 se ofrece una descripción detallada de los logros alcanzados en cada una de las líneas de investigación. Se presentan los resultados obtenidos y se examinan los avances realizados en el análisis tiempo-frecuencia y en el modelado de sistemas dinámicos discretos.

En la Subsección 6.2.3 se exponen las conclusiones derivadas de cada uno de los problemas planteados en los diferentes capítulos de la Tesis. Se resumen los principales hallazgos y se destacan las contribuciones más relevantes. Se discuten las limitaciones y las posibles áreas de mejora para futuras investigaciones.

Finalmente, en la Subsección 6.2.4 se plantean las direcciones para futuros trabajos derivados de la presente Tesis. Se identifican los posibles caminos a seguir, basados en los resultados obtenidos y las áreas que requieren una mayor exploración. Se proponen posibles extensiones de la investigación y se sugieren temas relacionados que podrían abordarse en futuros proyectos.

### 6.1.2 Síntesis

#### Capítulo 1

El Capítulo 1 contiene una introducción a esta Tesis y proporciona un resumen sobre el problema general de modelado descomposición armónica no estacionaria de señales

multivariantes pseudoperiódicas no estacionarias. Además, se revisó y discutió el estado del arte actual, y se presentó el alcance específico del trabajo. Finalmente, se presentaron analíticamente los capítulos de la Tesis y se describieron sus contribuciones individuales.

## **Capítulo 2**

Se ha planteado una nueva estrategia para la remoción de perturbaciones en la línea de potencia eléctrica y el desvío de la línea base en señales ECG, con base en el KF; además, realizando el modelado de dichas perturbaciones, cuya estructura es conocida, en lugar de modelar la señal ECG, la cual posee una estructura de alta variabilidad y complejidad. Se ha encontrado que con esta metodología es posible remover adecuadamente las perturbaciones de las señales ECG superando sustancialmente el desempeño obtenido con otras metodologías del estado del arte. De esta forma, la dificultad para la aplicación del KF en el filtrado de la señal ECG es superada al hacer énfasis en el modelado de las otras señales cuya estructuras son mejor conocidas. Se demostró también que el desempeño del KF es estable, a pesar de la no gaussianidad de la señal ECG.

En el caso de las perturbaciones de línea de potencia se empleó un modelo sinusoidal cuasi-estacionario para la señal de la red eléctrica. Mediante esta metodología se logró obtener, en primer lugar, un algoritmo diseñado para el filtrado, el cual es robusto frente los cambios de amplitud, frecuencia y fase de la perturbación, manteniendo estas características para los variados tipos de morfologías de señales ECG, tanto normales como patológicas, y para diversas condiciones de adquisición. El método reduce la interferencia y mantiene un alto desempeño en el caso que se presenten variaciones de amplitud y frecuencia o combinación de ambas. Además es posible obtener un ajuste adecuado que siempre permite mejorar la SNR de la señal ECG sin introducir algún tipo de perturbación en la misma.

Conocidas las respuestas de los métodos planteados y, para efecto de comparación, se seleccionaron los algoritmos convencionales Wavelet 2 y estimador-sustractor y aquellos con KF denominados  $\delta$ KF y UKF, algoritmos que están completamente elaborados y explicados en [14]. Los últimos procedimientos presentaron la mejor respuesta entre todos los filtros estudiados. Se realizaron las pruebas de nuevo confrontando sus respuestas. Se hizo la relación de la mejora de la SNR, del PRD y del índice de correlación de la señal filtrada resultante, con respecto a la SNR de la señal de entrada y de allí se obtuvieron las gráficas correspondientes.

Se observó que al aplicar el operador  $\delta$ , el proceso de discretización se suaviza y permite obtener una mejor respuesta, por lo cual la forma de onda del ECG se aproxima mucho más a la forma de onda del ECG considerado, tanto para pacientes normales como para pacientes con algún tipo de arritmia.

Las principales conclusiones extraídas de este estudio se sintetizan en los siguientes párrafos:

- Se demuestra que para la eliminación de la perturbación producida por la red eléctrica en el ECG, el KF, con la mejora introducida a través de la transformada  $\delta$ , es superior a todos los demás filtros considerados.
- Se presenta y se valida el algoritmo de KF ( $\delta$ KF), el cual incorpora la transformada  $\delta$  que permite un mayor acercamiento al modelo dinámico de la señal ECG.

- Se introdujo un modelo autorregresivo simple, AR(5), para cada modelo de la señal ECG y se construyó una nueva estructura  $\delta$ KF. El filtro así diseñado se aplicó a las señales ECG ruidosas y la respuesta obtenida muestra la capacidad del filtro para el rastreo y filtrado de la señal ECG perturbada. Como resultado, la SNR tiene una mejora apreciable, de alta estabilidad y baja dispersión, especialmente para las SNR de entrada de valor muy bajo.

Con la aplicación del operador delta se tienen varias ventajas:

- El operador  $\delta$  puede ser considerado como una combinación lineal del operador discreto  $q$ . Por lo que proporciona la misma flexibilidad e implementabilidad que dicho operador. Más aún, se transforma en un modelo continuo cuando  $h \rightarrow 0$ , [114].
- Se pueden formular y resolver las ecuaciones de estado, en particular las que provee el algoritmo de Kalman, con casi la misma facilidad que con el operador  $q$ .

En el modelo propuesto para las perturbaciones, se supone que los parámetros de amplitud y frecuencia de la red eléctrica se comportan como procesos gaussianos.

- Cuando la SNR de entrada es muy baja (v.gr.,  $\text{SNR}_{\text{in}} < 0$  dB), se puede afirmar que predomina la dinámica gaussiana.
- Cuando la SNR de entrada es mayor (v.gr.,  $\text{SNR}_{\text{in}} > 12$  dB), la dinámica dominante es la de la señal ECG, la cual es no gaussiana.

El desempeño del  $\delta$ KF, que tiene en cuenta la alta gaussianidad de las señales, es mejor cuando la SNR de entrada es pequeña (alta gaussianidad), mientras que el del UKF es mejor cuando la SNR de entrada es alta (baja gaussianidad).

Para el caso de la desviación de la línea base, el empleo del KF con *B-splines*, y después de una sintonización precisa de las curvas de ajuste, es posible estimar la señal que produce tal desvío. El concepto clave es el posicionamiento de los nodos en la función *B-spline* sobre segmentos isoeléctricos de la señal, que permite un adecuado acercamiento a la verdadera desviación de línea base.

En ambos casos se obtienen resultados significativamente superiores a los obtenidos con los métodos encontrados en el estado del arte, demostrando un mejor desempeño.

### Capítulo 3

En este capítulo se abordó el problema de la descomposición modal de señales no estacionarias mediante el uso de representaciones de espacio de estados diagonales lineales dependientes del tiempo. Se demostró que la respuesta de una representación de espacio de estados lineal dependiente del tiempo puede describirse como la superposición de un número finito de componentes de frecuencia de banda estrecha. En el caso de la respuesta natural, estas componentes se reducen a componentes modales con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo, lo cual proporciona una comprensión más amplia y precisa de la dinámica de los sistemas bajo estudio.

Como contribución fundamental, se ha propuesto una estructura específica de espacio de estados con bloques diagonales que, en combinación con los KF, ha demostrado una notable eficacia en el cálculo de las descomposiciones modales de señales no estacionarias.

Se han presentado con detalle dos métodos basados en los KF: (i) el método JFK-NST, que se basa en la estimación conjunta de estados y parámetros de la representación en bloques diagonales y (ii) el método DKF-NST, que se basa en la estimación desacoplada de estados y parámetros. Ambos métodos representan generalizaciones de los conocidos rastreadores de frecuencia con filtro de Kalman (KF-FT), pero con la ventaja de ser lineales en sus parámetros, lo que simplifica el proceso de estimación y permite una mejora significativa en la eficiencia computacional.

La metodología propuesta se ha aplicado de manera exitosa en la descomposición modal y la eliminación de ruido en registros electrocardiográficos (ECG). Los resultados alcanzados han demostrado la capacidad de los métodos propuestos para proporcionar respuestas precisas y confiables, lo cual ha permitido una mejora significativa en la calidad de las señales ECG obtenidas.

En conclusión, los métodos propuestos constituyen una contribución útil al campo de la descomposición modal de señales no estacionarias. Mediante el uso de representaciones espacio de estados diagonales lineales dependientes del tiempo, se ha logrado una mayor comprensión de la dinámica de los sistemas analizados, al describir la respuesta como una superposición de componentes modales con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo. Esta estructura específica, combinada con los KF, ha demostrado ser una herramienta eficaz para calcular las descomposiciones modales en tiempo real.

#### **Capítulo 4**

En este capítulo se ha desarrollado un método de descomposición modal paramétrica para señales no estacionarias multivariadas basado en una representación de espacio de estados dependiente del tiempo en forma de bloques diagonales y filtrado/suavizado de Kalman. Se construyen bloques de segundo orden, cada uno de los cuales está conformado con la parte real e imaginaria de los autovalores instantáneos de cada modo, representando así un único componente oscilatorio no estacionario. De esta manera, se logra una representación precisa de los componentes oscilatorios no estacionarios y se obtiene una descomposición modal paramétrica.

A diferencia del caso univariado, la descomposición modal de señales no estacionarias multivariadas ha recibido menos atención. Sin embargo, muchas señales tales como las generadas por sistemas mecánicos o biológicos son de naturaleza multivariable y no estacionarias. En esos casos, el análisis modal puede facilitar la separación de los componentes de la señal y su origen. Además, dado que las señales multivariadas proporcionan una vista colectiva del sistema subyacente, existe un potencial latente para una mejor separación de los componentes modales y una mayor robustez frente al ruido, en contraste con análisis modales univariados independientes. Se pueden utilizar métodos de identificación paramétrica de sistemas no estacionarios multivariados para obtener estimaciones de la IA y la IF. No obstante, estos métodos no realizan un rastreo directo de las cantidades modales, lo que resulta en estimaciones ruidosas/discontinuas, las cuales eventualmente se pueden ver afectadas por modos indeseables.

El problema del análisis en el dominio modal de señales multivariadas no estacionarias, se aborda con base en la formulación de espacio de estados diagonal dependiente del tiempo. Esto requiere la introducción de una matriz de mezcla de modos, que debe ser identificada. La matriz de mezcla junto con las covarianzas de estado, parámetros y ruido,

y los valores iniciales se establecen como hiperparámetros de la representación modal de espacio de estados, y posteriormente se estiman mediante un algoritmo de EM adaptado.

El método propuesto ofrece un enfoque preciso, conciso y físicamente explicable para analizar sistemas multivariantes no estacionarios, como se ha demostrado en el caso de un sistema de rotor desequilibrado simulado, así como en el análisis de una señal multivariable que exhibe tres componentes modales con cruces de modo y amplitudes que se desvanecen en algún intervalo de tiempo.

## Capítulo 5

Este capítulo se ocupa de la descomposición armónica de señales pseudo-periódicas no estacionarias multivariantes, con aplicación al análisis de señales ECG de múltiples derivaciones. En este marco, un componente de la señal corresponde a una única forma sinusoidal con amplitud y frecuencia dependientes del tiempo. Por lo tanto, en la descomposición armónica propuesta, todos los componentes de la señal están obligados a compartir la misma frecuencia fundamental dependiente del tiempo. En este capítulo, se ha establecido un procedimiento para obtener dicha descomposición, al convertir la señal multivariable en una representación de espacio de estados con bloques diagonales y múltiples salidas. Los componentes armónicos y la frecuencia instantánea se estiman mediante filtrado de Kalman. Adicionalmente, se proporciona un marco de optimización para los hiperparámetros de la representación de espacio de estados, basado en el algoritmo de EM.

El marco de EM facilita en gran medida el ajuste del método en señales tan complejas como los registros de ECG, como se ha demostrado. Además, a diferencia de muchos métodos convencionales de descomposición de señales no estacionarias disponibles, los componentes obtenidos por el método propuesto tienen interpretabilidad física, como componentes sinusoidales (no distorsionados) con una frecuencia fundamental común dependiente del tiempo.

El método propuesto proporciona un procedimiento preciso y eficiente para analizar sistemas no estacionarios de múltiples salidas, como se demuestra en el caso de registros ECG reales. A diferencia de los métodos de descomposición modal no estacionaria relacionados, las formas de onda obtenidas de los componentes armónicos son sencillas de interpretar y asociar con las características principales del ECG.

Si bien el método es computacional y conceptualmente más complejo que los métodos convencionales de descomposición de señales no estacionarias, el nivel de detalle y resolución de forma de onda puede ser beneficioso para análisis detallados. Además, la estructura impuesta en la señal por el método puede facilitar la detección de componentes con cierta información, que de otra forma es muy difícil de adquirir; o bien, la eliminación de componentes que no cumplen con la estructura del proceso impuesta. Esto puede resultar especialmente útil al considerar la detección y localización de características relacionadas con pacientes que sufran de algún tipo de trastorno patológico, *v.gr.*: de tipo cardíaco. Asimismo, esta propiedad se puede utilizar para eliminar ruido o artefactos de la señal.

Se demostró la aplicabilidad de este método en el análisis armónico de señales ECG de varias derivaciones en registros seleccionados de un individuo sano y de un paciente con infarto de miocardio. En ambos casos, se logró obtener errores bajos en la reconstrucción.

Finalmente, el KF tiene como gran ventaja que no genera distorsiones en las señales procesadas, lo cual depende enteramente de la elección de los parámetros del filtro y del modelo de adaptación. El ajuste de estos parámetros constituye un aspecto vital de esta metodología y depende totalmente de las condiciones específicas que enfrentará. En el caso en el que el filtro se enfrente a una interferencia con parámetros relativamente estables, se utilizan parámetros de adaptación más flexibles: En contraste, cuando la interferencia presenta variaciones significativas, se requiere un proceso de adaptación más riguroso. Las covarianzas del ruido del proceso y del ruido de medición  $\mathbf{R}_n$  y  $\mathbf{R}_v$  respectivamente, determinan la forma como el filtro aproxima la señal ECG y rastrea las variaciones de la interferencia sinusoidal. La elección de un ruido de medición mayor al ruido del proceso hace que el filtro reaccione ante cambios en la forma de la señal cardíaca como si fuera otro tipo de perturbación, lo cual provoca distorsión en la señal procesada.

### 6.1.3 Conclusiones generales

#### Problema 1

*Reducción de las perturbaciones que afectan los registros de la señal ECG, en particular la interferencia de línea de potencia y de la línea base, por medio de modelos basados en el filtro de Kalman.*

En esta Tesis, se aborda el problema desde dos perspectivas distintas. Por un lado, se emplean modelos basados en el operador *delta*, como se describe en el Capítulo 2. Por otro lado, se utiliza la descomposición modal de señales no estacionarias basada en la representación diagonal de espacio de estados dependiente del tiempo, explicada en el Capítulo 3. Además, se aplica la metodología de descomposición modal, se modifica el algoritmo para representar armónicos no estacionarios y se introduce un algoritmo de EM para la estimación de las matrices de covarianza de ruido y la matriz de mezcla resultantes de la representación de espacio de estados, facilitando el análisis de señales ECG de varias derivaciones, la cual se desarrolla en el Capítulo 5.

En el Capítulo 2 se ha presentado la estrategia de aplicación del operador *delta*, donde la interferencia de la línea de potencia se modela como una combinación de sinusoides con variaciones de amplitud y frecuencia.

Para el caso de la interferencia de línea de potencia, se utilizó un modelo sinusoidal cuasiestacionario con el fin de representar la señal proveniente de la red eléctrica. Esta metodología ofrece varias ventajas. En primer lugar, se logra desarrollar un algoritmo de filtrado robusto capaz de adaptarse a los cambios de amplitud, frecuencia y fase de la señal de interferencia. Estas propiedades se mantienen incluso frente a diferentes tipos de morfologías de señales ECG tanto normales como patológicas, así como en diversas condiciones de adquisición. Así mismo, el método implementado tiene la capacidad de reducir eficazmente la interferencia, al mismo tiempo que garantiza un desempeño óptimo frente a variaciones en la amplitud y la frecuencia. Además, se logra obtener un ajuste adecuado que siempre permite mejorar la SNR de la señal ECG sin introducir perturbaciones adicionales en la misma.

De acuerdo con [47], la interferencia de la línea de potencia se puede modelar como una combinación de sinusoides con variación de amplitud y frecuencia. Además de un patrón

de comportamiento cuasi-estacionario de la interferencia, el modelo correspondiente se logra mediante el uso de un conjunto de funciones sinusoidales base variables en el tiempo.

Para el caso de reducción de la interferencia de línea de potencia, considerando su variabilidad en amplitud, frecuencia y fase, se logró un rastreo preciso de la señal ECG. Esto condujo a una clara discriminación entre la señal ECG y la perturbación.

Para el caso de la desviación de la línea base, la aplicación del KF con *B-splines* y, luego de una sintonización precisa de las curvas de ajuste, es posible estimar la señal que produce tal desvío. El concepto clave es el posicionamiento de los nodos en la función *B-spline* sobre segmentos isoelectrónicos de la señal, que permite un adecuado acercamiento a la verdadera desviación de línea base.

En ambos casos se obtienen resultados significativamente superiores a los obtenidos con los métodos encontrados en el estado del arte, demostrando un mejor desempeño.

## Problema 2

*Descomposición modal de señales no estacionarias basadas en la representación diagonal de espacio de estado dependiente del tiempo.*

Para realizar la segunda metodología, igualmente aplicada a la reducción de la interferencia de la línea de potencia, es importante aclarar que la mayoría de los sistemas en la vida real se caracterizan por dinámicas no lineales dependientes del tiempo; por lo tanto, su respuesta resultante es no estacionaria. El análisis efectivo de señales no estacionarias requiere métodos de representación adecuados capaces de describir con precisión la evolución de la dinámica de la señal. Entre las metodologías más reconocidas para la representación de señales no estacionarias, se encuentran las clases de representaciones de Tiempo-Frecuencia (TF) y Tiempo-Escala (TS) no paramétricas. Éstas tienen como propósito caracterizar una señal variante en el tiempo en términos de un conjunto infinito de componentes oscilatorios localizados tanto en el tiempo como en la frecuencia. Estos métodos se han utilizado de forma exhaustiva para la representación y el análisis de diversos tipos de señales no estacionarias. No obstante, sus principales desventajas se derivan del problema de lograr una localización precisa de componentes en el tiempo y la frecuencia, limitados por el principio de incertidumbre, la presencia de artefactos de estimación (conocidos como términos cruzados) y su gran tamaño. Por otro lado, las representaciones modales, permiten caracterizar una señal no estacionaria mediante la superposición de un número finito de componentes oscilatorios, conocidos como modos. Mientras que, para las señales estacionarias, cada modo está asociado con una sola senoide de amplitud y frecuencia constantes, en una señal no estacionaria, cada modo está asociado con una única senoide con amplitud dependiente del tiempo y de la frecuencia. Precisamente, uno de los temas tratados en esta investigación, se relaciona con el cálculo de la descomposición modal de una señal no estacionaria y, en particular, sobre la estimación simultánea de la amplitud instantánea, la frecuencia y la trayectoria modal asociada con un componente modal de señales caracterizadas por varios componentes (señales multicomponente). En este sentido, los métodos basados en el rastreo de las características en representaciones de TF, como el algoritmo de Viterbi, no son candidatos ideales, ya que estos no son adecuados para señales multicomponentes; además, las trayectorias modales no se pueden extraer directamente. En esta Tesis se abordó el problema de la descomposición modal de

señales no estacionarias mediante el uso la representación diagonal de espacio de estado dependiente del tiempo. Se llevó a cabo la derivación de representaciones en el dominio del tiempo y la frecuencia para sistemas lineales de tiempo discreto que varían en el tiempo. Se estudiaron las condiciones bajo las cuales una representación de espacio de estado dependiente del tiempo lleva a una descomposición modal con una amplitud y frecuencia instantáneas significativas, de acuerdo con la transformada de Hilbert. Además, se postuló una familia de métodos de descomposición modal basada en diferentes arquitecturas de representación del espacio de estado, lo que condujo a cuatro implementaciones diferentes a saber: el Rastreador Sinusoidal no estacionario con filtro Extendido de Kalman Dual y Conjunto, el Rastreador de frecuencia con filtro Extendido de Kalman y un método de descomposición modal basado en un modelo TAR. Se compararon estas implementaciones en una prueba de desempeño y en un ejemplo de aplicación orientado hacia la eliminación de perturbaciones en señales ECG. Los resultados demostraron la robustez y aplicabilidad de estos métodos para el análisis de señales no estacionarias. De acuerdo con lo analizado, se establece que los objetivos correspondientes planteados en esta Tesis se han alcanzado de un manera clara y efectiva.

### **Problema 3**

*Descomposición modal paramétrica para señales multivariantes no estacionarias basada en una representación de espacio de estado de bloques diagonales dependientes del tiempo y en el KF y su aplicación al filtrado de señales ECG.*

En el Capítulo 4, se abordó el problema de la descomposición modal de señales multivariantes no estacionarias, presentando un método basado en la representación de espacio de estado de bloques diagonales dependiente del tiempo y en el filtrado/suavizado de Kalman. Esta técnica ofrece una solución efectiva para el análisis de señales complejas, permitiendo una descomposición modal paramétrica de alta precisión.

La idea fundamental del método propuesto radica en la construcción de bloques de segundo orden mediante el uso de las partes real e imaginaria de los valores propios instantáneos de cada modo. Esta estrategia permite una representación única cada componente oscilatorio no estacionario presente en la señal. La descomposición resultante proporciona una comprensión más profunda de la naturaleza de la señal al separarla en sus componentes modales subyacentes.

Para lograr una descomposición modal completa, es necesario identificar tanto las trayectorias de los estados/parámetros como los hiperparámetros asociados. Para abordar este reto, se ha empleado un algoritmo de EM adaptado, el cual es altamente eficaz en la estimación de parámetros en modelos estadísticos que involucran variables latentes o incompletas. Este algoritmo juega un papel fundamental al estimar parámetros como la matriz de mezcla de modos, las covarianzas de los estados, los parámetros, el ruido y las condiciones iniciales. Su aplicación permite obtener estimaciones precisas y confiables de estos elementos clave en el proceso de descomposición modal.

La utilización del algoritmo de EM adaptado, permite aprender y ajustar de manera precisa los parámetros del modelo a partir de las observaciones disponibles. A través de múltiples iteraciones, el algoritmo mejora gradualmente sus estimaciones, refinando la descomposición modal y proporcionando resultados más precisos y confiables. Esto



permite una representación más completa de la señal original y una comprensión más profunda de sus características modales, mejorando la capacidad para identificar las trayectorias de los estados y los hiperparámetros asociados.

#### **Problema 4**

*Descomposición modal paramétrica para señales multivariantes y su aplicación al análisis de los registros ECG.*

La solución a este problema, la cual se encuentra elaborada en el Capítulo 5 de esta Tesis Doctoral, consiste en el desarrollo y mejora del método de descomposición armónica para señales multivariantes pseudoperiódicas no estacionarias, con base en descomposiciones modales fundamentadas en el KF. La descomposición armónica no estacionaria implica separar la señal en múltiples sinusoides cuyas amplitudes y frecuencias son dependientes del tiempo. Esta descomposición es una generalización del análisis de series de Fourier, donde las sinusoides tienen amplitudes y frecuencias fijas. Esta técnica de descomposición resulta especialmente adecuada para señales ECG, que presentan una estructura pseudoperiódica, y puede facilitar la extracción de ondas y la detección de interferencias.

En el trabajo previo sobre esta temática (ver Capítulo 4), se ha logrado un avance significativo en este campo, mediante un análisis modal no estacionario multivariante, basado en una representación de espacio de estado dependiente del tiempo con bloques diagonales y el uso de filtrado/suavizado de Kalman. En la contribución actual, se han realizado modificaciones al algoritmo original para poder representar adecuadamente los armónicos no estacionarios. Además, se ha incorporado un algoritmo de EM para estimar las matrices de covarianza de ruido y la matriz de mezcla resultantes de la representación de espacio de estado.

La incorporación del algoritmo de EM es de particular importancia, ya que permite realizar una estimación precisa de los parámetros desconocidos en el modelo de descomposición armónica no estacionaria. Este algoritmo se utiliza para estimar las matrices de covarianza de ruido, que capturan la variabilidad de las señales armónicas en cada modo, y la matriz de mezcla, que describe la contribución relativa de cada modo en la señal original. Estas estimaciones mejoradas permiten una representación más precisa de la señal y una separación efectiva de las componentes armónicas no estacionarias.

La modificación del algoritmo permite una representación más precisa y flexible de los armónicos no estacionarios presentes en las señales pseudoperiódicas. Al adaptar la técnica de bloques diagonales y el filtrado/suavizado de Kalman, se puede capturar y analizar con mayor precisión las variaciones temporales en las amplitudes y frecuencias de los armónicos. Esto permite una descomposición armónica más precisa y detallada de la señal, mejorando la capacidad para extraer ondas y detectar interferencias con mayor precisión.

#### **6.1.4 Trabajo futuro**

Los resultados derivados de esta Tesis Doctoral permiten identificar diversas áreas que continúan siendo propicias para investigaciones futuras.

**Aspecto teórico:**

1. **Operador  $\delta$ :** La primera parte está elaborada sobre la estructura de la transformada de Euler u operador  $\delta$ . Éste es un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden, el cual permite generar una respuesta muy suave a un proceso que en principio es lineal. Sería interesante incrementar el orden para aplicar a modelos no lineales.
2. **Ajuste automático:** También, es de interés investigar métodos para el ajuste automático de los procedimientos de descomposición modal cuando operan sobre una señal no estacionaria.
3. **Ruido:** Es conveniente ampliar el concepto de análisis de ruido para el caso de implementación en tiempo real de los algoritmos. (i) Ruidos del proceso y de la medición no lineales y correlacionados, (ii) Ruido coloreado.

Este problema ya está resuelto con los KF. Falta generalizar a la descomposición de componentes estacionarios y no estacionarios.

**Implementación:**

1. Los algoritmos propuestos para la reducción de interferencias y artefactos en ECG, permiten su ejecución en tiempo real, sin embargo, hasta ahora han sido probados fuera de línea. El traslado de estos algoritmos a una plataforma en tiempo real constituye una tarea importante, ya que se deben considerar métodos para reducir el costo computacional. En particular, se puede aprovechar la forma especial que tiene la estructura de espacio de estados de los modelos propuestos, para conseguir una implementación más eficiente de los algoritmos.
2. El proceso de implementación de los algoritmos puede facilitarse con el desarrollo de la tecnología electrónica.
3. Los algoritmos, a pesar de su complejidad, han sido probados en un sistema reconocido (Matlab<sup>®</sup>) que facilita su implementación con soporte de tiempo real, v.gr.: DSP o sistemas embebidos.
4. Adaptación de las metodologías propuestas para manejar señales con un comportamiento no estacionario más complejo, como las que tienen características de ruido variable en el tiempo o cambios bruscos en la dinámica<sup>1</sup>. Este es uno de los beneficios potenciales del KF, ya que es posible ajustar las matrices de covarianza del ruido de estado y de medida para adaptar a ambientes cambiantes en el tiempo, ya sea en la dinámica o en el ruido de medición. No obstante, el ajuste no se debería hacer de forma manual y el algoritmo EM, tal como ha sido diseñado, sólo puede ajustar estos parámetros a valores estáticos. Por lo tanto, se requieren estrategias que se adapten a las condiciones instantáneas de la señal, lo cual se considera que requiere mayor tiempo de investigación. En este sentido, la tesis constituye una base sólida para avanzar en esta dirección.
5. Las metodologías propuestas, en particular el método de descomposición armónica para ECG de varias derivaciones, son computacional y conceptualmente más complejas que los métodos convencionales, lo que puede limitar su aplicación práctica.

<sup>1</sup> Observación formulada por el profesor Daniel Novak.

¿dónde sería la aplicabilidad?<sup>2</sup> Sí, esta es una desventaja potencial de los métodos propuestos. El uso principal previsto para esta metodología es en análisis de alta resolución fuera de línea; por ejemplo, dentro de procedimientos de extracción de características para clasificación de señales ECG. No obstante, también se reconocen los recientes avances en procesadores digitales de señales (DSPs), que pueden facilitar la implementación en tiempo real de los algoritmos propuestos, con aplicación potencial en monitoreo cardíaco o análisis Holter.

Los resultados alcanzados en esta Tesis Doctoral abren nuevas perspectivas para el desarrollo de métodos de análisis de señales tanto univariantes como multivariantes; así mismo, señales lineales estacionarias y no estacionarias. Se plantea una metodología para la descomposición de componentes estacionarios y no estacionarios, así como la descomposición modal de una señal basada en la respuesta de impulso armónico. Este tipo de descomposición no solo sirve para analizar componentes de la señal, sino que también se puede utilizar para derivar algoritmos computacionalmente eficientes para la estimación de diferentes tipos de señales definidas en el espacio de estados.

## 6.2 Second part

### 6.2.1 Introduction

This Doctoral Thesis focuses on the development of algorithms for discrete modeling of dynamic systems. Its main emphasis is the time-frequency analysis and the non-stationary response of time-dependent signals subject to uncertainties. Time-dependent models with varying parameters are used, with a particular application to the case of ECG signals.

A detailed description of the achievements in each of the lines of research is provided in Subsection 6.2.2. The results obtained are presented, and the advances made in time-frequency analysis as well as in the modeling of discrete dynamic systems are also examined.

Conclusions derived from each of the problems raised in the different chapters of the Thesis are presented in Subsection 6.2.3. The main findings are summarized and the most relevant contributions are highlighted. Limitations and potential areas for improvement in future research are discussed.

Finally, Subsection 6.2.4 outlines the directions for future work derived from this Thesis. Potential ways forward are identified, based on the results obtained and the areas requiring further exploration. Possible extensions of the research are proposed, and related topics that could be addressed in future projects are suggested.

### 6.2.2 Synthesis

#### Chapter 1

Chapter 1 contains an introduction to this Thesis and provides an overview of the general problem of modeling the nonstationary harmonic decomposition of multivariate pseudo-periodic nonstationary signals. In addition, the current state of the art is reviewed and

<sup>2</sup> Observación formulada por el profesor Daniel Novak.

discussed, and the specific scope of the work is presented. Finally, the chapters of the Thesis are analytically presented, and their individual contributions are described.

## **Chapter 2**

A new strategy for the removal of power line disturbances and baseline wander in ECG signals based on the KF has been proposed. This approach involves modeling the disturbances, whose structure is known, rather than modeling the ECG signal, which has a highly variable and complex structure. It has been found that this methodology effectively removes disturbances from ECG signals, significantly outperforming other state-of-the-art methods. Thus, the difficulty of applying the KF to filter ECG signals is overcome by emphasizing the modeling of other signals with better-known structures. It was also demonstrated that the performance of the KF is stable, despite the non-Gaussian nature of the ECG signal.

In the case of power line disturbances, a quasi-stationary sinusoidal model was used for the electrical network signal. By means of this methodology it was possible to obtain, firstly, an algorithm designed for filtering, which is robust to changes in amplitude, frequency and phase of the disturbance, maintaining these characteristics for the various types of ECG signal morphologies, both normal and pathological, and for different acquisition conditions. The method reduces interference and maintains high performance in the case of amplitude and frequency variations or combination of both. In addition, it is possible to obtain an adequate adjustment that always allows improving the SNR of the ECG signal without introducing any type of disturbance in it.

Based on the responses of the proposed methods and for comparison purposes, the conventional algorithms Wavelet 2 and estimator-subtractor, as well as those with KF named  $\delta$ KF and UKF, were selected. These algorithms are fully developed and explained in [14]. The latter procedures presented the best response among all the filters studied. The tests were conducted again to compare their responses. The improvement in SNR, PRD, and correlation index of the resulting filtered signal was measured in relation to the SNR of the input signal, and the corresponding graphs were obtained.

It was observed that applying the  $\delta$  operator smooths the discretization process and allows for a better response. Consequently, the ECG waveform more closely approximates the considered ECG waveform for both normal patients and patients with some type of arrhythmia.

The main conclusions drawn from this study are summarized in the following items:

- It is demonstrated that for the elimination of power line disturbances in the ECG, the KF, with the improvement introduced through the  $\delta$  transform, is superior to all other filters considered.
- The  $\delta$ KF algorithm, which incorporates the  $\delta$  transform to allow for a closer approximation to the dynamic model of the ECG signal, is presented and validated.
- A simple autoregressive model, AR(5), was introduced for each model of the ECG signal, and a new  $\delta$ KF structure was constructed. The filter thus designed was applied to noisy ECG signals, and the response obtained shows the filter's capability for tracking and filtering the perturbed ECG signal. As a result, the SNR shows an appreciable improvement, with high stability and low dispersion, especially for very low input SNR values.

The application of the delta operator offers several advantages:

- The  $\delta$  operator can be considered as a linear combination of the discrete  $q$  operator. Therefore, it provides the same flexibility and implementability as the  $q$  operator. Moreover, it transforms into a continuous model when  $h \rightarrow 0$  [114].
- The state equations, particularly those provided by the Kalman algorithm, can be formulated and solved with almost the same ease as with the  $q$  operator.

In the proposed model for disturbances, it is assumed that the amplitude and frequency parameters of the power line behave as Gaussian processes.

- When the input SNR is very low (e.g.,  $\text{SNR}_{\text{in}} < 0$  dB), it can be stated that the Gaussian dynamics predominate.
- When the input SNR is higher (e.g.,  $\text{SNR}_{\text{in}} > 12$  dB), the dominant dynamics are those of the ECG signal, which is non-Gaussian.

The performance of the  $\delta$ KF, which takes into account the high Gaussianity of the signals, is better when the input SNR is low (high Gaussianity), while the performance of the UKF is better when the input SNR is high (low Gaussianity).

For the case of baseline wander, the use of the KF with B-splines, after precise tuning of the fitting curves, makes it possible to estimate the signal that causes such a wander. The key concept is the positioning of the nodes in the B-spline function over isoelectric segments of the signal, which allows for an adequate approximation to the true baseline wander.

In both cases, the results obtained are significantly superior to those achieved with other state-of-the-art methods, demonstrating better performance.

### Chapter 3

In this chapter, the problem of modal decomposition of non-stationary signals was addressed using time-dependent linear diagonal state-space representations. It was demonstrated that the response of a time-dependent linear state-space representation can be described as the superposition of a finite number of narrowband frequency components. In the case of the natural response, these components reduce to modal components with time-dependent amplitude and frequency, providing a broader and more accurate understanding of the dynamics of the systems under study.

As a fundamental contribution, a specific state-space structure with diagonal blocks has been proposed, which, in combination with KF, has demonstrated remarkable efficacy in calculating the modal decompositions of non-stationary signals. Two KF-based methods have been detailed: (i) the JKF-NST method, which is based on the joint estimation of states and parameters of the diagonal block representation, and (ii) the DKF-NST method, which is based on the decoupled estimation of states and parameters. Both methods represent generalizations of the well-known Kalman Filter Frequency Trackers (KF-FT), but with the advantage of being linear in their parameters, which simplifies the estimation process and allows for a significant improvement in computational efficiency.

The proposed methodology has been successfully applied to the modal decomposition and noise removal in electrocardiographic (ECG) recordings. The results achieved have

demonstrated the ability of the proposed methods to provide accurate and reliable responses, leading to a significant improvement in the quality of the obtained ECG signals.

In conclusion, the proposed methods constitute a valuable contribution to the field of modal decomposition of non-stationary signals. By using time-dependent linear diagonal state-space representations, a greater understanding of the dynamics of the analyzed systems has been achieved, describing the response as a superposition of modal components with time-dependent amplitude and frequency. This specific structure, combined with KF, has proven to be an effective tool for calculating modal decompositions in real time.

#### **Chapter 4**

In this chapter, a parametric modal decomposition method for multivariable non-stationary signals has been developed, based on a time-dependent state-space representation in the form of diagonal blocks and Kalman filtering/smoothing. Second-order blocks are constructed, each of which is composed of the real and imaginary parts of the instantaneous eigenvalues of each mode, thus representing a single non-stationary oscillatory component. In this way, an accurate representation of non-stationary oscillatory components is achieved, resulting in a parametric modal decomposition.

Unlike the univariate case, the modal decomposition of multivariable non-stationary signals has received less attention. However, many signals, such as those generated by mechanical or biological systems, are multivariable and non-stationary in nature. In such cases, modal analysis can facilitate the separation of the signal components and their origins. Additionally, since multivariable signals provide a collective view of the underlying system, there is a latent potential for better separation of modal components and greater robustness to noise, in contrast to independent univariate modal analyses. Methods for parametric identification of multivariable non-stationary systems can be used to obtain estimates of IA and IF. However, these methods do not perform direct tracking of modal quantities, resulting in noisy/discontinuous estimates, which may eventually be affected by undesirable modes.

The problem of modal domain analysis of multivariate non-stationary signals is addressed based on the time-dependent diagonal state space formulation. This requires the introduction of a mode mixing matrix, which needs to be identified. The mixing matrix, along with the state covariances, parameters, and noise, and initial values, are set as hyperparameters of the modal state space representation, and subsequently estimated by an adapted EM algorithm.

The proposed method provides a precise, concise, and physically explainable approach for analyzing nonstationary multivariable systems. This has been demonstrated in the case of a simulated unbalanced rotor system, as well as in the analysis of a multivariable signal that exhibits three modal components with mode crossings and amplitudes that decay within a certain time interval. In summary, this method offers a valuable tool for understanding and characterizing complex systems.

#### **Chapter 5**

This chapter deals with the harmonic decomposition of multivariable non-stationary pseudo-periodic signals, with application to the analysis of multi-lead ECG signals. In this framework, a signal component corresponds to a single sinusoidal waveform with

time-dependent amplitude and frequency. Therefore, in the proposed harmonic decomposition, all signal components are constrained to share the same time-varying fundamental frequency. In this chapter, a procedure has been established to obtain this decomposition by converting the multivariable signal into a state-space representation with diagonal blocks and multiple outputs. The harmonic components and the instantaneous frequency are estimated using KF. Additionally, an optimization framework for the hyperparameters of the state-space representation is provided, based on the EM algorithm.

The EM framework greatly facilitates the tuning of the method for complex signals such as ECG recordings, as demonstrated. Moreover, unlike many conventional non-stationary signal decomposition methods available, the components obtained by the proposed method have physical interpretability as sinusoidal components (undistorted) with a common time-varying fundamental frequency.

The proposed method provides a precise and efficient procedure for analyzing non-stationary multi-output systems, as demonstrated in the case of real ECG recordings. Unlike related non-stationary modal decomposition methods, the waveforms obtained from the harmonic components are straightforward to interpret and associate with the main features of the ECG.

Although the method is computationally and conceptually more complex than conventional non-stationary signal decomposition methods, the level of detail and waveform resolution can be beneficial for detailed analyses. Moreover, the structure imposed on the signal by the method can facilitate the detection of components containing certain information that would otherwise be very difficult to acquire, or the elimination of components that do not conform to the imposed process structure. This can be especially useful when considering the detection and localization of features related to patients suffering from some type of pathological disorder, *e.g.*, cardiac conditions. Additionally, this property can be used to remove noise or artifacts from the signal.

The applicability of this method has been demonstrated in the harmonic analysis of multi-lead ECG signals in selected recordings from a healthy individual and a patient with myocardial infarction. In both cases, low reconstruction errors were achieved.

Finally, the great advantage of the KF is that it does not introduce distortions in the processed signals, which entirely depends on the choice of filter parameters and the adaptation model. The tuning of these parameters is a vital aspect of this methodology and is highly dependent on the specific conditions it will face. When the filter encounters interference with relatively stable parameters, more flexible adaptation parameters are used. In contrast, when the interference exhibits significant variations, a more rigorous adaptation process is required. The process noise covariances and measurement noise covariances,  $\mathbf{R}_n$  and  $\mathbf{R}_v$  respectively, determine how the filter approximates the ECG signal and tracks variations in sinusoidal interference. Choosing a measurement noise greater than the process noise causes the filter to react to changes in the cardiac signal as if they were another type of disturbance, resulting in distortion in the processed signal.

### 6.2.3 General conclusions

#### Problem 1

*Reduction of disturbances affecting ECG signal recordings, particularly power line interference and baseline wander, through models based on the Kalman filter.*

In this Thesis, the problem is addressed from two different perspectives. On one hand, models based on the delta operator are employed, as described in Chapter 2. On the other hand, the modal decomposition of non-stationary signals based on the time-dependent diagonal state-space representation is utilized, as explained in Chapter 3. Additionally, the modal decomposition methodology is applied, the algorithm is modified to represent non-stationary harmonics, and an EM algorithm is introduced for the estimation of noise covariance matrices and the mixing matrix resulting from the state-space representation, facilitating the analysis of multi-lead ECG signals, as developed in Chapter 5.

In Chapter 2, the application strategy of the delta operator is presented, where power line interference is modeled as a combination of sinusoids with varying amplitude and frequency.

For the case of power line interference, a quasi-stationary sinusoidal model was used to represent the signal from the power grid. This methodology offers several advantages. First, it allows the development of a robust filtering algorithm capable of adapting to changes in the amplitude, frequency, and phase of the interference signal. These properties are maintained even with different types of ECG signal morphologies, both normal and pathological, as well as under various acquisition conditions. Moreover, the implemented method effectively reduces interference while ensuring optimal performance in the face of amplitude and frequency variations. Additionally, it achieves a proper fit that consistently improves the SNR of the ECG signal without introducing additional disturbances.

According to [47], power line interference can be modeled as a combination of sinusoids with varying amplitude and frequency.

In addition to a quasi-stationary behavior pattern of the interference, the corresponding model is achieved through the use of a set of time-varying sinusoidal basis functions.

For the case of power line interference reduction, considering its variability in amplitude, frequency, and phase, precise tracking of the ECG signal was achieved. This led to a clear discrimination between the ECG signal and the disturbance.

For the case of baseline wander, the application of the KF with B-splines, and after precise tuning of the fitting curves, allows for the estimation of the signal causing such deviation. The key concept is the positioning of the nodes in the B-spline function over isoelectric segments of the signal, enabling an accurate approximation to the true baseline wander.

In both cases, significantly superior results are obtained compared to those achieved with state-of-the-art methods, demonstrating better performance.

#### Problem 2

*Modal decomposition of non-stationary signals based on the time-dependent diagonal state-space representation.*



To implement the second methodology, which is also applied to the reduction of power line interference, it is important to clarify that most real-life systems are characterized by time-dependent nonlinear dynamics, resulting in non-stationary responses. The effective analysis of non-stationary signals requires appropriate representation methods capable of accurately describing the signal's dynamic evolution. Among the most recognized methodologies for the representation of non-stationary signals are the classes of non-parametric Time-Frequency (TF) and Time-Scale (TS) representations. These aim to characterize a time-varying signal in terms of an infinite set of oscillatory components localized in both time and frequency.

These methods have been extensively used for the representation and analysis of various types of non-stationary signals. However, their main disadvantages arise from the challenge of achieving precise localization of components in time and frequency, limited by the uncertainty principle, the presence of estimation artifacts (known as cross-terms), and their large size. On the other hand, modal representations allow for characterizing a non-stationary signal through the superposition of a finite number of oscillatory components, known as modes. While for stationary signals, each mode is associated with a single sinusoid of constant amplitude and frequency, in a non-stationary signal, each mode is associated with a single sinusoid with time-dependent amplitude and frequency.

One of the topics addressed in this research relates to the calculation of the modal decomposition of a non-stationary signal, specifically the simultaneous estimation of the instantaneous amplitude, frequency, and modal trajectory associated with a modal component of signals characterized by multiple components (multicomponent signals). In this context, methods based on tracking features in TF representations, such as the Viterbi algorithm, are not ideal candidates since they are not suitable for multicomponent signals; additionally, the modal trajectories cannot be directly extracted.

In this Thesis, the problem of modal decomposition of non-stationary signals was addressed using time-dependent diagonal state space representation. Time and frequency domain representations for discrete-time linear systems that vary over time were derived. Conditions under which a time-dependent state space representation leads to a modal decomposition with significant instantaneous amplitude and frequency, according to the Hilbert transform, were studied. Additionally, a family of modal decomposition methods based on different state space representation architectures was proposed, leading to four different implementations, namely: the Non-Stationary Sinusoidal Tracker with Dual and Ensemble Extended Kalman Filter, the Frequency Tracker with Extended Kalman Filter, and a modal decomposition method based on a TAR model. These implementations were compared in a performance test and an application example aimed at eliminating disturbances in ECG signals. The results demonstrated the robustness and applicability of these methods for analyzing non-stationary signals.

Based on the analysis, it is established that the objectives set forth in this thesis have been clearly and effectively achieved.

**Problem 3**

*Parametric modal decomposition for non-stationary multivariate signals based on a time-dependent block diagonal state space representation and the KF, with application to ECG signal filtering.*

In Chapter 4, the problem of modal decomposition of non-stationary multivariate signals is addressed, presenting a method based on a time-dependent block diagonal state space representation and Kalman filtering/smoothing. This technique offers an effective solution for the analysis of complex signals, enabling highly precise parametric modal decomposition.

The fundamental idea of the proposed method lies in the construction of second-order blocks using the real and imaginary parts of the instantaneous eigenvalues of each mode. This strategy allows for a unique representation of each non-stationary oscillatory component present in the signal. The resulting decomposition provides a deeper understanding of the signal's nature by separating it into its underlying modal components.

To achieve a complete modal decomposition, it is necessary to identify both the state/parameter trajectories and the associated hyperparameters. To address this challenge, an adapted EM algorithm has been employed, which is highly effective in parameter estimation in statistical models involving latent or incomplete variables. This algorithm plays a fundamental role in estimating parameters such as the mode mixing matrix, state covariances, parameters, noise, and initial conditions. Its application enables precise and reliable estimations of these key elements in the modal decomposition process.

The use of the adapted EM algorithm allows for precise learning and adjustment of the model parameters based on the available observations. Through multiple iterations, the algorithm gradually improves its estimations, refining the modal decomposition and providing more accurate and reliable results. This facilitates a more comprehensive representation of the original signal and a deeper understanding of its modal characteristics, enhancing the ability to identify the state trajectories and associated hyperparameters.

**Problem 4**

*Parametric modal decomposition for multivariate signals and its application to the analysis of ECG recordings.*

The solution to this problem, which is detailed in Chapter 5 of this Doctoral Thesis, involves the development and enhancement of the harmonic decomposition method for multivariate pseudo-periodic non-stationary signals, based on modal decompositions using the Kalman filter. Non-stationary harmonic decomposition entails separating the signal into multiple sinusoids whose amplitudes and frequencies are time-dependent.

This decomposition is a generalization of Fourier series analysis, where the sinusoids have fixed amplitudes and frequencies. This decomposition technique is particularly suitable for ECG signals, which exhibit a pseudo-periodic structure, and can facilitate wave extraction and interference detection.

In previous work on this subject (see Chapter 4), significant progress has been made in this field through non-stationary multivariate modal analysis, based on a time-dependent state-space representation with diagonal blocks and the use of Kalman filtering/smoothing.

In the current contribution, modifications have been made to the original algorithm to adequately represent non-stationary harmonics. Additionally, an EM algorithm has been incorporated to estimate the noise covariance matrices and the mixing matrix resulting from the state-space representation.

The incorporation of the EM algorithm is particularly important as it allows for the precise estimation of unknown parameters in the non-stationary harmonic decomposition model. This algorithm is used to estimate the noise covariance matrices, which capture the variability of the harmonic signals in each mode, and the mixing matrix, which describes the relative contribution of each mode in the original signal. These improved estimates enable a more accurate representation of the signal and an effective separation of the non-stationary harmonic components.

Modifying the algorithm allows for a more precise and flexible representation of the non-stationary harmonics present in pseudo-periodic signals. By adapting the diagonal block technique and Kalman filtering/smoothing, temporal variations in the amplitudes and frequencies of the harmonics can be captured and analyzed more accurately. This leads to a more precise and detailed harmonic decomposition of the signal, enhancing the ability to extract waves and detect interferences with greater accuracy.

#### 6.2.4 Future work

The results derived from this Doctoral Thesis allow the identification of various areas that remain promising for future research.

##### Theoretical aspect:

1.  **$\delta$  operator:** The first part of this Thesis is based on the structure of the Euler transform or the  $\delta$  operator. This is a first-order difference equation system that allows generating a very smooth response to a process that is initially linear. It would be interesting to increase the order for application to nonlinear models.
2. **Automatic adjustment:** It is also of interest to investigate methods for the automatic adjustment of modal decomposition procedures when operating on a non-stationary signal.
3. **Noise:** It is advisable to expand the concept of noise analysis for real-time implementation of the algorithms. (i) Nonlinear and correlated process and measurement noise, (ii) Colored noise. This problem has already been addressed with KF. The next step is to generalize the approach to the decomposition of stationary and non-stationary components.

##### Implementation:

1. The proposed algorithms for the reduction of interference and artifacts in ECG signals enable real-time execution. However, so far, they have only been tested offline. Transferring these algorithms to a real-time platform is a significant task, as methods to reduce computational costs must be considered. In particular, the special form of the state-space structure of the proposed models can be leveraged to achieve a more efficient implementation of the algorithms.

2. The implementation process of the algorithms can be facilitated with the development of electronic technology.
3. Despite their complexity, the algorithms have been tested in a well-known system (Matlab<sup>®</sup>), which facilitates their implementation with real-time support, e.g., DSP or embedded systems.
4. Adapting the proposed methodologies to handle signals with more complex non-stationary behavior, such as those with time-varying noise characteristics or abrupt changes in dynamics. This is one of the potential benefits of the KF, as it is possible to adjust the state and measurement noise covariance matrices to adapt to time-varying environments, either in dynamics or measurement noise. However, this adjustment should not be done manually, and the EM algorithm, as designed, can only adjust these parameters to static values. Therefore, strategies that adapt to the instantaneous conditions of the signal are required, which is considered to need more research time. In this sense, the Thesis provides a solid foundation to advance in this direction.
5. The proposed methodologies, particularly the harmonic decomposition method for multi-lead ECGs, are computationally and conceptually more complex than conventional methods, which may limit their practical application. Where would the applicability be? Yes, this is a potential drawback of the proposed methods. The main intended use for this methodology is high-resolution offline analysis; for instance, within feature extraction procedures for ECG signal classification. However, recent advances in digital signal processors (DSPs) are also recognized, which could facilitate the real-time implementation of the proposed algorithms, with potential applications in cardiac monitoring or Holter analysis.

The results achieved in this Doctoral Thesis open up new perspectives for the development of signal analysis methods, both univariate and multivariate, as well as for stationary and non-stationary linear signals. A methodology is proposed for the decomposition of stationary and non-stationary components, as well as for modal decomposition of a signal based on the harmonic impulse response. This type of decomposition not only serves to analyze signal components but can also be used to derive computationally efficient algorithms for the estimation of different types of signals defined in state space.

# Índice de Figuras

---

2.1	Fragmento ECG de registro SEL117 de la base de datos QT. En la parte superior: segmento de 60 s alrededor de $t = 120$ s; en la parte inferior: segmento de $t = 110$ s a 120 s	25
2.2	Comparación del desempeño en el dominio del tiempo de los algoritmos de extracción de sinusoides sKF y $\delta$ KF en una señal mono-componente con ruido blanco aditivo	30
2.3	Desempeño de sKF vs $\delta$ KF	31
2.4	Respuesta temporal sKF vs $\delta$ KF	33
2.5	Índice de correlación vs varianza del ruido de proceso $\sigma_{v_1}^2$ , para el Algoritmo 2	34
2.6	Comparación de los segmentos transitorios durante el filtrado de señales ECG con el Algoritmo 2, para diferentes $P_0$	36
2.7	Índice de correlación vs varianza del ruido de proceso $\sigma_{v_1}^2$ , para el Algoritmo 3	38
2.8	Índice de correlación vs varianza del ruido de proceso $\sigma_{v_3}^2$ , para el Algoritmo 3	38
2.9	Mejora a la SNR para filtros de Kalman	49
2.10	Raíz de la diferencia porcentual para filtros de Kalman	50
2.11a	Amplitud y frecuencia instantáneas	51
2.11b	Transformada de Fourier	52
2.12	Curvas de desempeño de estimación para diferentes frecuencias centrales de la interferencia	53
2.13	Curvas de desempeño del filtro para la eliminación de interferencia de línea de potencia en la señal ECG, $\sigma^2 = 10^{-6}$	53
2.14	Curvas de desempeño del filtro para remoción de la interferencia de línea de potencia en ECG	54
2.15	Curvas óptimas del filtro para remoción de interferencias en la señal ECG	54
2.16	Resultado para eliminación de la interferencia de la línea de potencia con el algoritmo propuesto. SNR= -15 dB	55
2.17	Comparación de filtros para la eliminación de la interferencia de la red eléctrica. SNR = 6 dB	56
2.18a	Base de datos QT. SEÑAL QTDB01	58
2.18b	Base de datos QT. SEÑAL QTDB82	58
2.19	Comparación entre métodos de localización de nodos	59
2.20a	Comparación visual cuando se varía el orden base del B-spline	60
2.20b	Comparación visual entre diferentes distancias nodales	60

2.21	Comparación de diferentes métodos de reducción de perturbaciones de línea base. Registro 92, base de datos QT	61
3.1	Extracto del registro ECG SEL117 de la base de datos QT. Parte superior: porción de 60 s alrededor de $t = 120$ s; Parte inferior: porción de $t = 110$ s a 120 s	76
3.2	Descomposiciones modales del registro ECG SEL117 obtenidas con (a) el método JFK-NST (b) el método DKF-NST. La columna izquierda muestra trayectorias modales únicas, mientras que la columna derecha muestra las frecuencias modales respectivas sobre el espectrograma de la señal ECG. Espectrograma calculado utilizando una ventana gaussiana de 4096 muestras y 4094 muestras superpuestas	78
3.3	Descomposiciones modales del registro ECG SEL117 obtenidas con (a) el método JFK-FT (b) el método TFR-adaptativo. La columna izquierda muestra trayectorias modales únicas, mientras que la columna derecha muestra las frecuencias modales respectivas sobre el espectrograma de la señal de ECG. Espectrograma calculado utilizando una ventana gaussiana de 4096 muestras y 4094 muestras superpuestas	79
3.4	Valores medianos de SNR y MSE obtenidos una vez eliminada la interferencia de la línea de potencia eléctrica con los métodos de eliminación de ruido considerados en el conjunto completo de registros ECG, de la base de datos QT	80
4.1	Representación gráfica del sistema de rotor flexible no equilibrado utilizado para las simulaciones	92
4.2	Las aceleraciones horizontales, verticales y radiales obtenidas en el estator y el rotor para el sistema de rotor desequilibrado en la ecuación (4.17) se calcularon utilizando los parámetros del sistema definidos en la Tabla 4.1	93
4.3	Trayectorias de optimización seguidas por (a) el método KF-Armónico, (b) el método KF-Diagonal	95
4.4	Resultados de la descomposición M obtenidos con los métodos KF-Armónico, KF-Diagonal y MSSA. (a) Formas de onda de las primeras cuatro trayectorias modales; (b) estimaciones correspondientes de las IFs	96
4.5	Análisis de los residuos de estimación suavizados de los métodos KF-Armónico y KF-Diagonal. (a) RSS/SSS estimado en cada uno de los grados de libertad del sistema; (b) Análisis de los residuos en los dominios del tiempo y la frecuencia	97
4.6	Error de reconstrucción (RSS/SSS) obtenido con los métodos KF-Armónico y KF-Diagonal para SNR crecientes, considerando ruido blanco y ruido coloreado	98
4.7	Realización típica de la señal no estacionaria simulada sin ruido. Arriba: señal en el dominio del tiempo; Medio: IA de los componentes modales; Abajo: espectrograma de la señal con IF superpuesto de cada componente modal. Parámetros del espectrograma: ventana de Hamming, longitud 256 muestras, 255 muestras superpuestas	100
4.8	Mediana y distribución muestral de las estimaciones de IF e IA obtenidas con (a) el método JFK-NST, (b) el método DKF-NST, (c) el método JFK-FT. Resultados obtenidos tras 40 corridas de Monte Carlo con $SNR = 20$ dB. Las líneas continuas representan el valor medio estimado, las líneas de puntos grises representan las estimaciones de muestras individuales, las líneas de puntos negros representan los valores reales de IF e IA	102

4.9	Mediana y distribución muestral de las estimaciones de IF e IA obtenidas con (a) el método TAR–MD basado en el modelo TAR(18), (b) el método TFR–máximo, (c) el método TFR–adaptativo. Resultados obtenidos tras 40 corridas de Monte Carlo con $SNR = 20$ dB. Las líneas continuas representan el valor medio estimado, las líneas grises punteadas representan las estimaciones de las muestras individuales, las líneas negras de trazos representan los valores reales de IF e IA	103
4.10	Mediana del MSE normalizado de las estimaciones de los componentes modales y sus respectivos IA e IF obtenidos con los diferentes métodos de descomposición modal para niveles crecientes de SNR después de 40 corridas de Monte Carlo. Resultados separados por componente (columnas) y según el tipo de error (filas). Fila superior: MSE de las estimaciones de los componentes modales; fila central: MSE de las estimaciones de IA; fila inferior: MSE de las estimaciones del IF	104
4.11	Valores estimados de la IF antes y después de la optimización EM comparados con los originales. MO: Salida múltiple, SO: Salida única	106
4.12	Valores estimados de la IA antes y después de la optimización EM comparados con los originales	106
4.13	Elementos diagonales de las covarianzas de las innovaciones de ruido, estado y parámetros una vez realizada la optimización EM	107
4.14	Matriz del índice de correlación calculada a partir de la covarianza de las innovaciones de los parámetros una vez realizada la optimización	108
4.15	Módulo de las estimaciones del vector de mezcla con inicialización basada en VAR después de la optimización EM	109
5.1	Resumen del procedimiento para el cálculo de la descomposición armónica NS basado en filtros de Kalman y representaciones de espacio de estados diagonales por bloques	119
5.2	Muestra de registros ECG de las derivaciones precordiales V1 a V6, obtenidos de la base de datos PTB para evaluar el desempeño del algoritmo de descomposición armónica. (a) Segmentos de tiempo de 5 s de un individuo sano (PACIENTE 104, SEÑAL S03061RE); (b) Segmentos de tiempo de 5 s de un individuo con infarto de miocardio (PACIENTE 025, SEÑAL S00871RE); (c) Espectrograma del registro de ECG sano en la derivación V4; (d) Espectrograma del registro de ECG patológico en la derivación V4. Configuraciones del espectrograma: ventana gaussiana de 1024 muestras con un coeficiente de apertura igual a 12	124
5.3	Comportamiento del método de descomposición armónica NS en el registro del ECG de un individuo sano para: (a) número creciente de componentes armónicos (orden del modelo); (b) diferentes puntos de inicio de la covarianza de las innovaciones de estados. La columna de la izquierda indica la RSS/SSS para cada una de las derivaciones (V1 a V6), la columna de la derecha indica la verosimilitud marginal	125
5.4	Error de reconstrucción (RSS/SSS) por derivación en (a) señal de ECG de control saludable (PACIENTE 104, SEÑAL S03061RE); (b) registro de paciente con infarto de miocardio (PACIENTE 025, SEÑAL S00871RE)	126
5.5	Hiperparámetros optimizados de la descomposición armónica NS obtenidos en la señal de ECG de control saludable (PACIENTE104, señal s03061RE). Arriba a la izquierda: entradas diagonales de la covarianza de las innovaciones del estado; arriba a la derecha: covarianza del ruido de medición; abajo: matriz de mezcla	127

5.6	Gráficos en el dominio del tiempo de los componentes armónicos proyectados en las derivaciones V1 (panel izquierdo) y V2 (panel derecho) de los respectivos registros ECG para (a) paciente de control saludable (PACIENTE 104, SEÑAL S03061RE), (b) paciente con patología cardíaca (PACIENTE 025, SEÑAL S0087LRE). Cada panel muestra la derivación correspondiente del ECG en color rojo, los 10 componentes armónicos de fase en color azul y las respectivas IA en color gris	128
5.7	Primeros 10 componentes armónicos en fase obtenidos a partir de la muestra de la señal ECG de control con la descomposición armónica NS, después de realizar la optimización con el algoritmo EM (PACIENTE104, SEÑAL S03061RE)	129
5.8	Primeros 10 componentes armónicos en fase obtenidos a partir de la muestra de la señal ECG de control mediante la descomposición armónica NS después de efectuar la optimización EM (PACIENTE104, SEÑAL S03061RE)	130
5.9	Amplitudes instantáneas asociadas con cada uno de los armónicos NS obtenidos en la señal ECG de la derivación V5 (cuadro superior) y la respectiva señal ECG (cuadro inferior)	131
5.10	Muestra del registro del ECG seleccionado de un individuo que sufre un infarto de miocardio extraído de la base de datos de la PTA (PACIENTE 025 señal S0087LRE): (a) Extracto de la señal de 10 s correspondiente a las derivaciones precordiales (V1 a V6). (b) Espectrograma de la señal del ECG de la derivación V4. Configuración del espectrograma: Ventana gaussiana de 1024 muestras con coeficiente de apertura igual a 12	132
5.11	Primeros 10 componentes armónicos obtenidos de la muestra de la señal ECG de control, mediante la descomposición armónica NS después de realizar la optimización EM (PACIENTE025, señal S0087LRE – paciente con infarto de miocardio)	133
5.12	Amplitudes instantáneas asociadas a cada uno de los armónicos NS obtenidos a partir de la señal ECG de un paciente con infarto de miocardio en la derivación V5 (cuadro superior) y la respectiva señal ECG (cuadro inferior) (PACIENTE025, señal S0087LRE)	134
5.13	Comparación de las diferentes descomposiciones modales obtenidas sobre el registro ECG de un individuo sano de la base de datos PTB (PACIENTE104, señal S03061RE), utilizando: (a) la descomposición armónica NS propuesta; (b) la transformada wavelet discreta (symlet 4); (c) el análisis del espectro singular; (d) la descomposición modal empírica	136



# Índice de Tablas

---

1.1	Capítulos de esta Tesis	11
2.1	Parámetros de la prueba	52
2.2	Comparación de la ganancia de SNR con diferentes filtros para la interferencia de la red eléctrica [15, Ch. 3]	57
4.1	Parámetros utilizados en la simulación del sistema no lineal dependiente del tiempo	92
4.2	Ajuste de los métodos de descomposición modal considerados	94
4.3	Simulación de parámetros usados en la prueba comparativa	99
5.1	Valores iniciales de los hiperparámetros utilizados para la inicialización del algoritmo EM	125



# Bibliografía

---

- [1] Sakshi Agrawal and Anubha Gupta, *Fractal and EMD based removal of baseline wander and powerline interference from ECG signals*, *Computers in biology and medicine* **43** (2013), no. 11, 1889–1899.
- [2] Ali N. Akansu and Richard A. Haddad, *Fundamentals and optimal design of subband and wavelet transforms*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [3] M. Akay, *Wavelet applications in medicine*, *IEEE Spectrum* **34** (1997), no. 5, 50–56.
- [4] E. Alickovica, J. Kevricb, and A. Subasic, *Performance evaluation of empirical mode decomposition, discrete wavelet transform, and wavelet packed decomposition for automated epileptic seizure detection and prediction*, *Biomedical Signal Processing and Control* **39** (2018), 94–102.
- [5] Jerome Antoni, *Cyclic spectral analysis in practice*, *Mechanical Systems and Signal Processing* **21** (2007), 597–630.
- [6] \_\_\_\_\_, *Cyclostationarity by examples*, *Mechanical Systems and Signal Processing* **23** (2009), 987–1036.
- [7] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer-controlled systems: Theory and design*, 3 ed., Prentice Hall Information and System Sciences, 1997.
- [8] François Auger and Patrick Flandrin, *Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method*, *IEEE Transactions on Signal Processing* **43** (1995), no. 5, 1068–1089.
- [9] L. D. Avendaño, L. E. Avendaño, J. M. Ferrero, and G. Castellanos-D., *Improvement of an extended Kalman filter power line interference suppressor for ECG signals*, *Computers in Cardiology, 2007* (2007), 553–556.
- [10] Luis Enrique Avendaño, Luis David Avendaño-Valencia, and Edilson Delgado-Trejos, *Diagonal time dependent state space models for modal decomposition of non-stationary signals*, *Signal Processing* **147** (2018), 208–223.

- [11] Luis Enrique Avendaño, Luis David Avendaño-Valencia, Edilson Delgado-Trejos, and David Cuesta-Frau, *State space model-based harmonic decomposition of pseudo-periodic non-stationary multivariate signals*, *Signal Processing* **213** (2023), 109192, 1–18.
- [12] L.D. Avendaño-Valencia and S.D. Fassois, *Generalized stochastic constraint time-dependent ARMA modeling of non-stationary signals: Maximum likelihood identification methods*, Submitted for Publication on *Mechanical Systems and Signal Processing* (2016).
- [13] Luis David Avendaño-Valencia, Luis Enrique Avendaño, Edilson Delgado-Trejos, and David Cuesta-Frau, *State-space modal representations for decomposition of multivariate non-stationary signals*, The 19th IFAC Symposium on System Identification (Padua, Italia) (ScienceDirect, ed.), vol. 54, IFAC, Elsevier, July 2021, pp. 475–480.
- [14] Luis Enrique Avendaño, *Comparación de diferentes configuraciones del filtro de Kalman para eliminación de perturbaciones en señales ECG*, 1 ed., Publicaciones UTP, No. 97, La Julita, Pereira, Col., 2010.
- [15] \_\_\_\_\_, *Análisis y filtrado de señales ECG*, 1 ed., Publicaciones UTP, No. 97, La Julita, Pereira, Col., 2023.
- [16] Luis David Avendaño-Valencia, *Non-Stationary Time-dependent ARMA Random Vibration Modeling, Analysis & SHM with Wind Turbine Applications*, Ph.D. thesis, Department of Mechanical Engineering and Aeronautics University of Patras, Patras, Grecia, October 2018.
- [17] Luis David Avendaño-Valencia, Luis Enrique Avendaño, Edilson Delgado-Trejos, and David Cuesta-Frau, *Multi-lead electrocardiogram harmonic decomposition with time-variant state space representations*, *Signal Processing* (2023).
- [18] Luis David Avendaño-Valencia, Luis Enrique Avendaño, José María Ferrero-y Loma-Osorio, and Germán Castellanos-Domínguez, *Reducción de interferencia de línea de potencia en señales electrocardiográficas mediante el filtro dual de Kalman*, *Ingeniería e Investigación* **27** (2007), no. 3, 77–88.
- [19] J. J. Bailey, A. S. Berson, A. Garson Jr, L. G. Horan, P. W. Macfarlane, D. W. Mortara, and C. Zywertz., *Recommendations for standardization and specifications in automated electrocardiography: bandwidth and digital signal processing*, A report for health professionals by an *ad hoc* writing group of the committee on electrocardiography and cardiac electrophysiology of the Council on Clinical Cardiology, American Heart Association, 2015.
- [20] K. Barrett, S. Barman, H. Brooks, and J. Yuan, *Ganong's review of medical physiology*, 26th ed., McGraw-Hill Education, New York, Lange, USA, 2019.
- [21] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Random data: Analysis and measurement procedures*, 4 ed., Wiley Series in Probability and Statistics, March 2010.

- [22] S. Bittanti and S. M. Savaresi, *On the parameterization and design of an Extended Kalman Filter frequency tracker*, IEEE Transactions on Automatic Control **45** (2000), no. 9, 1718–1724.
- [23] Sergio Bittanti and Sergio M. Savaresi, *On the parametrization and design of an Extended Kalman Filter frequency tracker*, IEEE Transactions on Automatic Control **45** (2000), no. 9, 1718–1724.
- [24] Manuel Blanco-Velasco, Binwei Weng, and Kenneth E. Barner, *ECG signal denoising and baseline wander correction based on the empirical mode decomposition*, Computers in Biology and Medicine **38** (2008), no. 1, 1–13.
- [25] B. Boashash (ed.), *Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference*, first ed., Elsevier Ltd., The Boulevard, Langford Lane Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK, 2003.
- [26] Boualem Boashash, *Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal –Part 1: Fundamentals*, Proceedings of the IEEE **80** (1992), no. 4, 520–538.
- [27] ———, *Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal – Part 2: Algorithms and applications*, Proceedings of the IEEE **80** (1992), no. 4, 540–568.
- [28] ———, *Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference*, Academic Press publications. Elsevier, 125 London Wall, London, EC2Y 5AS, UK, 2016.
- [29] Boualem Boashash and Ghasem Azemi, *A review of time-frequency matched filter design with application to seizure detection in multichannel newborn EEG*, Digital Signal Processing: A Review Journal **28** (2014), no. 1, 28–38.
- [30] Boualem Boashash, Ghasem Azemi, and Nabeel Ali Khan, *Principles of time-frequency feature extraction for change detection in non-stationary signals: Applications to newborn eeg abnormality detection*, Pattern Recognition **48** (2015), no. 3, 616–627.
- [31] R. Bousseljot, D. Kreiseler, and A. Schnabel, *Nutzung der EKG-Signaldatenbank CARDIODAT der PTB über das Internet*, Biomedizinische Technik / Biomedical Engineering **40** (1995), no. s1, 317–318.
- [32] Simon Braun and Michael Feldman, *Decomposition of non-stationary signals into varying time scales: Some aspects of the EMD and HVD methods*, Mechanical Systems and Signal Processing **25** (2011), no. 7, 2608–2630.
- [33] Alessandro Brumana and Luigi Piroddi, *A multi-tone central divided difference frequency tracker with adaptive process noise covariance tuning*, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing **34** (2020), no. 7, 877–900.

- [34] O. Cardona-Morales, L.D. Avendaño-Valencia, and G. Castellanos-Domínguez, *Nonlinear model for condition monitoring of non-stationary vibration signals in ship driveline application*, Mechanical Systems and Signal Processing **44** (2014), no. 1, 134 – 148, Special Issue on Instantaneous Angular Speed (IAS) Processing and Angular Applications.
- [35] Oscar Cardona-Morales, Luis David Avendaño-Valencia, and German Castellanos-D., *Nonlinear model for condition monitoring of non-stationary vibration signals in ship driveline application*, Mechanical Systems and Signal Processing **44** (2014), no. 1-2, 134–148.
- [36] Chi-Tsong Chen, *Linear system theory and design*, 3 ed., Oxford University Press, 1999.
- [37] Leon Cohen, *Time-frequency analysis*, Prentice Hall Signal Processing Series, Prentice Hall, 1995.
- [38] Ronald Raphael Coifman and Mladen Victor Wickerhauser, *Experiments with adapted wavelet de-noising for medical signals and images*, Time-Frequency and Wavelets in Biomedical Engineering, IEEE Press, 1998.
- [39] A. Corigliano and S. Mariani, *Parameter identification in explicit structural dynamics: performance of the extended Kalman filter*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **193** (2004), 3807–3835.
- [40] A. Dardanelli, S. Corbetta, I. Boniolo, S.M. Savaresi, and S. Bittanti, *Model-based Kalman filtering approaches for frequency tracking*, IFAC Proceedings Volumes **43** (2010), no. 10, 37 – 42, 10th IFAC Workshop on the Adaptation and Learning in Control and Signal Processing.
- [41] D. Del Giudice and S. Grillo, *Analysis of the sensitivity of Extended Kalman Filter-Based Inertia Estimation Method to the assumed time of disturbance*, Energies **12** (2019), no. 483, 1–19.
- [42] Igor Djurović, *Viterbi algorithm for chirp-rate and instantaneous frequency estimation*, Signal Processing **91** (2011), 1308–1314.
- [43] L Duque Muñoz, Luis David Avendaño-Valencia, and Germán Castellanos-D., *Epileptic seizure detection in EEG using time variant autoregressive models*, 5th European IFMBE Conference (A. Jobbagy, ed.), Springer, 2011, pp. 1–4.
- [44] K. Dziejciech, W. J.Staszewski, and T. Uhl, *Wavelet-based modal analysis for time-variant systems*, Mechanical Systems and Signal Processing **50-51** (2015), 323–337.
- [45] Patric Flandrin, *Time and frequency representation of signals and systems*, ch. Time Dependent Spectra for Non Stationary Stochastic Processes, pp. 69–124, Springer-Verlag, 1989.

- [46] Patrick Flandrin, *Time-frequency/time-scale analysis*, Wavelet analysis and its applications, vol. 10, 525B Street, Suite 1900, San Diego, CA 92101-4495, USA, 1999.
- [47] G. M. Friesen, T. C. Janett, M. A. Jadallah, S. L. Yates, S. R. Quint, and H. T. Nagle, *A comparison of the noise sensitivity of nine QRS detection algorithms*, IEEE Transactions on biomedical engineering **37** (1990), no. 1, 85–98.
- [48] Ana Gavrovska, Vesna Bogdanovic, Irini Reljin, and Branimir Reljin, *Automatic heart sound detection in pediatric patients without electrocardiogram reference via pseudo-affine wigner-ville distribution and haar wavelet lifting*, Computer Methods and Programs in Biomedicine **113** (2014), no. 2, 515–528.
- [49] Nina Golyandina, Anton Korobeynikov, and Anatoly Zhigljavsky, *SSA for multivariate time series*, pp. 189–229, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2018.
- [50] G. C. Goodwin, R. H. Middleton, and H. V. Poor, *High-speed digital signal processing and control*, Proc. of the IEEE **80** (1992), no. 2, 240–259.
- [51] Yves Grenier, *Time and frequency representation of signals and systems*, ch. Parametric Time-Frequency Representations, pp. 125–175, Springer-Verlag, 1989.
- [52] M.S. Grewal and A.P. Andrews, *Kalman filtering: theory and practice using MATLAB®*, cuarta edición ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, EE UU, 2015.
- [53] Joe K. Hammond and Paul R. White, *The analysis of non-stationary signals using time-frequency methods*, Journal of Sound and Vibration **190** (1996), 419–447.
- [54] Huan Hao, H.L. Wang, and N.U. Rehman, *A joint framework for multivariate signal denoising using multivariate empirical mode decomposition*, Signal Processing **135** (2017), 263 – 273.
- [55] M. Harashima, L.A. Ferrari, and P. V. Sankar, *Spline approximation using Kalman filter state estimation*, IEEE transactions on circuits and systems–II: Analog and digital signal processing **44** (1997), no. 5, 421–424.
- [56] S. Haykin, *Kalman filtering and neural networks*, Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control, John Wiley and Sons, 2001.
- [57] Xiaochuan He, Rafik A. Goubran, and Xiaoping P. Liu, *Ensemble empirical mode decomposition and adaptive filtering for ECG signal enhancement*, 2012 IEEE International Symposium on Medical Measurements and Applications Proceedings, 2012, pp. 1–5.
- [58] Franz Hlawatsch and Gerald Matz, *Time-frequency methods for non-stationary statistical signal processing*, ISTE and Wiley, 2010.

- [59] Shin Hoi Song, Myonghwan Ahn, Kwanghoon Kim, and Jin Park, *Performance analysis of EKF and UKF for estimating tire longitudinal and side angle slip*, MATEC Web of Conferences **70** (2016), 04002–04006.
- [60] Gholam-Ali Hossein-Zadeh, Babak A. Ardekani, and Hamid Soltanian-Zadeh, *A signal subspace approach for modeling the hemodynamic response function in fMRI*, Magnetic Resonance Imaging **21** (2003), no. 8, 835–843.
- [61] Norden E. Huang, Zheng Shen, Steven R. Long, Manli C. Wu, Hsing H. Shih, Quanan Zheng, Nai-Chyuan Yen, Chi Chao Tung, and Henry H. Liu, *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **454** (1998), no. 1971, 903–995.
- [62] J. Huhta and J. Webster, *60 Hz interference in electrocardiography*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering **20** (1973), no. 2, 91–101.
- [63] A.F. Hussein, S.J. Hashim, A.F.A. Aziz, F. Z. Rokhani, and W. A. W. Adnan, *Performance evaluation of time-frequency distributions for ECG signal analysis*, Journal of Medical Systems **42** (2018), no. 15, 1–16.
- [64] Dmytro Iatsenko, Peter V E McClintock, and Aneta Stefanovska, *Extraction of instantaneous frequencies from ridges in time-frequency representations of signals*, Signal Processing **125** (2016), 290–303.
- [65] IEEE, *Std. 519-1992, IEEE recommended practices and requirements for harmonic control in electrical power systems*, American National Standard (ANSI), Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 345 East 47th Street, New York, NY 10017 USA., April 1993.
- [66] Meryem Jabloun, Nadine Martin, Francois Leonard, and Michelle Vieira, *Estimation of the instantaneous amplitude and frequency of non-stationary short-time signals*, Signal Processing **88** (2008), no. 7, 1636–1655.
- [67] R. Jané, P. Laguna, N. V. Thakor, and P. Caminal, *Adaptive baseline wander removal in the ECG: Comparative analysis with cubic spline technique*, Work supported by Grant TIC 1037-91, from CICYT (España) and by NATO Grant 900058 (1992).
- [68] Maarten Jansen, *Noise reduction by wavelet thresholding*, Springer-Verlag, 2001.
- [69] A. Torbjörn Johansson and Paul R. White, *Instantaneous frequency estimation at low signal-to-noise ratios using time-varying notch filters*, Signal Processing **88** (2008), no. 5, 1271–1288.
- [70] Kevin Kærgaard, Søren Hjøllund Jensen, and Sadasivan Puthusserypady, *A comprehensive performance analysis of EEMD-BLMS and DWT-NN hybrid algorithms for ECG denoising*, Biomedical Signal Processing and Control **25** (2016), 178–187.
- [71] R. E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Journal of Basic Engineering **82** (1960), no. 1, 35–45.



- [72] M. Karimi-Ghartemani and A. K. Ziarani, *A nonlinear time-frequency analysis method*, IEEE Transactions on Signal Processing **52** (2004), no. 6, 1585–1595.
- [73] S.M. Kay, *Modern Spectral Estimation*, Prentice-Hall Signal Processing Series, Prentice-Hall, 1988.
- [74] Jesmin Khan, Sharif Bhuiyan, Gregory Murphy, and Mohammad Alam, *Empirical mode decomposition of the ECG signal for noise removal*, Optical Pattern Recognition XXII (David P. Casasent and Tien-Hsin Chao, eds.), vol. 8055, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2011, pp. 29 – 40.
- [75] Nadine Khodor, Guy Carrault, David Matelot, Hassan Amoud, Mohamad Khalil, Nathalie Thillaye du Boullay, François Carre, and Alfredo Hernández, *Early syncope detection during head up tilt test by analyzing interactions between cardio-vascular signals*, Digital Signal Processing **49** (2016), 86–94.
- [76] S. Kim, L. Holmstrom, and J. McNames, *Multiharmonic tracking using marginalized particle filters*, 2008 30th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Aug 2008, pp. 29–33.
- [77] S. Kim and J. McNames, *Tracking tremor frequency in spike trains using the extended Kalman filter*, Proceedings of the 2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference (2005).
- [78] Sunghan Kim, Anindya S. Paul, Eric A. Wan, and James McNames, *Multiharmonic frequency tracking method using the sigma-point Kalman smoother*, Eurasip Journal on Advances in Signal Processing **2010** (2010).
- [79] Genshiro Kitagawa, *Introduction to time series modeling*, CRC Press, 2010.
- [80] Kanhaiya Kumar, Saurabh Anand, and Ram Lal Yadava, *Advanced DSP technique to remove baseline noise from ECG signal*, International Journal of Electronics and Computer Science Engineering **1** (2012).
- [81] B. La Scala and R. R. Bitmead, *Design of an extended Kalman filter frequency tracker*, IEEE Transactions on Signal Processing **44** (1996), no. 3, 739–742.
- [82] P. Laguna, R.G. Mark, A.L. Goldberger, and G.B. Moody, *A database for evaluation of algorithms for measurement of QT and other waveform intervals in the ECG*, Computers in Cardiology, vol. 24, 1997, pp. 673–676.
- [83] Jacek M. Łęski and Norbert Henzel, *ECG baseline wander and powerline interference reduction using nonlinear filter bank*, Signal Processing **85** (2005), 781–793.
- [84] H. Li, Z. Li, and W. Mo, *A time varying filter approach for empirical mode decomposition*, Signal Processing **138** (2017), 146–158.
- [85] Wei Li, *Wavelets for Electrocardiogram: Overview and Taxonomy*, IEEE Access **7** (2018), 25627–25649.

- [86] Zhen Li, Jinghuai Gao, Hui Li, Zhuosheng Zhang, Naihao Liu, and Xiangxiang Zhu, *Synchroextracting transform: The theory analysis and comparisons with the synchroqueezing transform*, *Signal Processing* **166** (2020), 107243.
- [87] Junli Liang, Bangjie Ji, Junying Zhang, Shijun Wang, and Feng Zhao, *Recursive least squares-like algorithms for the adaptive second-order lattice notch filter*, *Digital Signal Processing: A Review Journal* **18** (2008), no. 3, 291–306.
- [88] Kefu Liu, *Identification of Linear Time-Varying Systems*, *Journal of Sound and Vibration* **206** (1997), no. 4, 487–505.
- [89] Kuan Jen Liu, Ting Yu and Lin and Hsi Chun Wu, *ECG data encryption then compression using Singular Value Decomposition*, *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics* **22** (2018), no. 3, 707–713.
- [90] Kuan Lu, Yulin Jin, Yushu Chen, Yongfeng Yang, Lei Hou, Zhiyong Zhang, Zhong-gang Li, and Chao Fu, *Review for order reduction based on proper orthogonal decomposition and outlooks of applications in mechanical systems*, *Mechanical Systems and Signal Processing* **123** (2019), 264 – 297.
- [91] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, 2 ed., Academic Press, San Diego, CA, USA, 1999.
- [92] ———, *A wavelet tour of signal processing*, 3rd ed., Academic Press, 2008.
- [93] Stephane Mallat and Sifen Zhong, *Characterization of signals from multiscale edges*, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **14** (1992), no. 7.
- [94] S. Mariani and A. Corigliano, *Impact induced composite delamination: state and parameter identification via joint and dual extended Kalman filters*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **194** (2005), no. 52, 5242–5272.
- [95] S. Mariani and A. Ghisi, *Unscented Kalman filtering for nonlinear structural dynamics*, *Nonlinear Dynamics* **49** (2007), no. 1, 131–150.
- [96] C. R. Meyer and H. N. Keiser, *Electrocardiogram baseline noise estimation and removal using cubic splines and state-space computation techniques*, *Computers and Biomedical Research* **10** (1977), no. 5, 459–470.
- [97] R. H. Middleton and G. C. Goodwin, *Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators*, *IEEE AC-31* **32** (1986), no. 11, 1015–1021.
- [98] ———, *Digital control and estimation: A unified approach*, 1 ed., Prentice-Hall International, Inc., 1990.
- [99] M. A. Mneimneh, E. E. Yaz, M. T. Johnson, and R. J. Povinelli, *An adaptive Kalman filter for removing baseline wandering in ECG signals*, *Computers in Cardiology*, vol. 33, 2006, pp. 253–256.

- [100] Nasser Mourad, *ECG denoising algorithm based on group sparsity and singular spectrum analysis*, *Biomedical Signal Processing and Control* **50** (2019), 62–71.
- [101] Sourav Kumar Mukhopadhyay and Sridhar Krishnan, *A singular spectrum analysis-based model-free electrocardiogram denoising technique*, *Computer Methods and Programs in Biomedicine* **188** (2020), 105304.
- [102] Jouchi Nakajima and Mike West, *Dynamic network signal processing using latent threshold models*, *Digital Signal Processing* **47** (2015), 5–16.
- [103] A. T. Nelson, *Nonlinear estimation and modeling of noisy time-series by Dual Kalman Filtering Methods*, Ph.D. thesis, Oregon Graduate Institute of Science and Technology, 01 2000.
- [104] Phuong Nguyen and Jong-Myon Kim, *Adaptive ECG denoising using genetic algorithm-based thresholding and ensemble empirical mode decomposition*, *Information Sciences* **373** (2016), 499–511.
- [105] M. Niedzwieki, *Identification of time-varying processes*, John Wiley and Sons, England, 2000.
- [106] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical optimization*, 2 ed., Operations Research, Springer, Springer-Verlag New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 2006.
- [107] Wojtaszczy P., *A mathematical introduction to wavelets*, reprinted ed., London Mathematical Society Student Texts, 37, The Press Syndicate of the University of Cambridge, Ruiz de Alarcón 13, 28014 Madrid, Spain, 1999.
- [108] P. F. Pai, *Time-frequency analysis for parametric and non-parametric identification of non linear dynamical systems*, *Mechanical Systems and Signal Processing* **36** (2013), no. 2, 332–353.
- [109] Aggelos Poulimenos and Spillios Fassois, *Parametric time-domain methods for non-stationary random vibration modeling and analysis: A critical survey and comparison*, *Mechanical Systems and Signal Processing* **20** (2006), no. 4, 763–816.
- [110] R. Punalard, A. Lorsawatsiri, W. Loetwassana, J. Koseeyaporn, P. Wardkein, and A. Roeksabutr, *Direct frequency estimation based adaptive algorithm for a second-order adaptive FIR notch filter*, *Signal Processing* **88** (2008), no. 2, 315–325.
- [111] Yi Qin, *Multicomponent AM-FM demodulation based on energy separation and adaptive filtering*, *Mechanical Systems and Signal Processing* **38** (2013), no. 2, 440–459.
- [112] A. Rahimi and B. Recht, *Random features for large-scale kernel machines*, *Advances in Neural Information Processing Systems* **20** (2008), 1177–1184.

- [113] L. Rankine, M. Mesbah, and B. Boashash, *IF estimation for multicomponent signals using image processing techniques in the time-frequency domain*, *Signal Processing* **87** (2007), no. 6, 1234–125.
- [114] H. C. Reddy and G. S. Moschytz, *Unified cellular neural network cell dynamical equation using delta operator*, *IEEE International symposium on circuits and systems* (1997).
- [115] K. Reif, S. Günther, E. Yaz, and R. Unbehauen, *Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter*, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44** (1999), no. 4, 714–728.
- [116] M. Salgado, R. Middleton, and G. C. Goodwin, *Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering*, *IEE Proceedings* **I35** (1988), no. 1, 28–34.
- [117] R. Sameni and M. B. Shamsollahi, *Filtering electrocardiogram signals using the extended Kalman filter*, *Engineering in Medicine and Biology, 29th Annual Conference*, 2007.
- [118] H. Sandberg, E. Möllerstedt, and B. Bernhardsson, *Frequency domain analysis of linear time-periodic systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control* **12** (2005), no. 50, 1971–1983.
- [119] S. Sanei and H. Hassani, *Singular spectrum analysis of biomedical signals*, 1st ed., Taylor and Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton, FL 33487-2742, 2016.
- [120] O. Sayadi, R. Sameni, and M. B. Shamsollahi, *Filtering electrocardiogram signals using the extended Kalman filter*, *Proceedings of the 29th Annual International Conference of the IEEE EMBS* (2007).
- [121] O. Sayadi and M. B. Shamsollahi, *ECG denoising and compression using a modified extended Kalman filter structure*, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **55** (2008), no. 9, 2240–2248.
- [122] Ervin Sejdić, Igor Djurović, and Jin Jiang, *Time-frequency feature representation using energy concentration: An overview of recent advances*, *Digital Signal Processing* **19** (2009), 153–183.
- [123] Robert H. Shumway and David S. Stoffer, *Time series analysis and its applications*, third ed., Springer, 2011.
- [124] M.D. Spiridonakos and S.D. Fassois, *Parametric identification of a time-varying structure based on vector vibration response measurements*, *Mechanical Systems and Signal Processing* **23** (2009), no. 6, 2029 – 2048, Special Issue: Inverse Problems.

- [125] L. Stanković, I. Djurović, S. Stanković, M. Simeunović, S. Djukanović, and M. Daković, *Instantaneous frequency in time-frequency analysis: Enhanced concepts and performance of estimation algorithms*, *Digital Signal Processing* **35** (2014), 1–13.
- [126] Ljubiša Stanković, Miloš Brajović, Miloš Daković, and Danilo Mandić, *On the decomposition of multichannel nonstationary multicomponent signals*, *Signal Processing* **167** (2020), 107 – 261.
- [127] P. Stoica and R. L. Moses, *Spectral analysis of signals*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2005.
- [128] I. Sutskever, J. Martens, G. Dahl, and G. Hinton, *On the importance of initialization and momentum in deep learning*, *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning*, 2013, pp. 1139–1147.
- [129] M. P. Tarvainen, S. D. Georgiadis, and P. A. Karjalainen, *Time-varying analysis of heart rate variability with Kalman smoother algorithm*, *27th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society* (2005).
- [130] M. Unser, *Ten good reasons for using spline wavelets*, *Wavelets Applications in Signal and Image Processing*, 1997, pp. 422–431.
- [131] R. van der Merwe, *Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models*, Ph.D. thesis, OGI School of Science & Engineering at Oregon Health & Science University, Canadá, abril 2004.
- [132] P. Van Overschee and B. De Moor, *A unifying theorem for three subspace system identification algorithms*, *Automatica* **31** (1995), no. 12, 1853–1864.
- [133] Michel Verhaegen and Xiaode Yu, *A class of subspace model identification algorithms to identify periodically and arbitrarily time-varying systems*, *Automatica* **31** (1995), no. 2, 201–216.
- [134] Mats Viberg and M. Viberg, *Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems*, *Automatica* **31** (1995), no. 12, 1835–1851.
- [135] E. A. Wan and A. T. Nelson, *Dual Kalman filtering methods for nonlinear prediction, estimation and smoothing*, *Advances in Neural Information Processing Systems* **9** (1997).
- [136] ———, *Dual Extended Kalman Filter Methods*, ch. 5, pp. 123–173, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., USA, 2001.
- [137] Eric A. Wan and Alex T. Nelson, *Dual Extended Kalman Filter methods*, *Kalman filtering and neural networks* (Simon Haykin, ed.), Wiley, 2001, pp. 123–173.
- [138] Eric A. Wan and Rudolph van der Merwe, *The Unscented Kalman Filter*, ch. 7, pp. 221–280, John Wiley & Sons, Ltd, 2001.

- [139] X. Wang and J. Wang, *Simulation analysis of EKF and UKF implementations in PHD filter*, 2016 IEEE 13th International Conference on Networking, Sensing, and Control (ICNSC), April 2016, pp. 1–6.
- [140] Mike West, Raquel Prado, and Andrew Krystal, *Evaluation and comparison of EEG traces: Latent structure in nonstationary time series*, Journal of the American Statistical Association **94** (1999), no. 448, 1083–1095.
- [141] JL Willems, *Recommendations for measurement standards in quantitative electrocardiography*, European Heart Journal **6** (1985), no. 10, 815–825.
- [142] Xiaowen Xu, Ying Liang, Pei He, and Junliang Yang, *Adaptive Motion Artifact Reduction Based on Empirical Wavelet Transform and Wavelet Thresholding for the Non-Contact ECG Monitoring Systems*, Sensors **19** (2019), no. 13.
- [143] Z. Zhao and Y. Chen, *A new method for removal of baseline wander and power line interference in ECG signals*, 2006 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2006, pp. 4342–4347.
- [144] Si-Da Zhou, Yuan-Chen Ma, Li Liu, Jie Kang, Zhi-Sai Ma, and Lei Yu, *Output-only modal parameter estimator of linear time-varying structural systems based on vector TAR model and least squares support vector machine*, Mechanical Systems and Signal Processing **98** (2018), 722 – 755.
- [145] A. K. Ziarani and A. Konrad, *A method of extraction of nonstationary sinusoids*, Signal Processing **84** (2004), no. 8, 1323–1346.