



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA


ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial
y Diseño Industrial

Desarrollo de una herramienta para la estimación de
parámetros orbitales de órbitas SSO alrededor de Marte.

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

AUTOR/A: González Chacón, Antoni

Tutor/a: Moraño Fernández, José Antonio

Cotutor/a: Moll López, Santiago Emmanuel

Cotutor/a: Herrero Debón, Alicia

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Trabajo de Fin de Máster

Libro 1: Memoria

Desarrollo de una herramienta para la estimación de parámetros orbitales de órbitas SSO alrededor de Marte.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Autor: Antoni González Chacón

Tutor: José Antonio Morano Fernández

Máster en Ingeniería Aeronáutica

Curso 2023-2024

Resumen

Los satélites en órbitas heliosíncronas (SSO) alrededor de la Tierra son utilizados con frecuencia ya que ofrecen numerosas ventajas. Entre ellas destaca la posibilidad de mantener las condiciones de iluminación con el paso del tiempo ya que pasan por la misma zona a intervalos regulares, de esta forma se facilita la realización de estudios comparativos de datos sobre clima, paisaje, etc. Otra virtud de este tipo de órbitas es que permiten sobrevolar toda la superficie del planeta cada cierto periodo de tiempo permitiendo así crear mapas globales.

Este tipo de órbitas también se están utilizando para orbitar alrededor de Marte, pero las características orbitales difieren ligeramente debido a las diferencias en masa, radio y velocidad de rotación del planeta, sin embargo, el principio básico es el mismo. Un ejemplo de una misión que utiliza una SSO en Marte es la sonda "Mars Reconnaissance Orbiter"(MRO) de la NASA construida para obtener datos e imágenes de alta resolución de la superficie del planeta bajo condiciones de iluminación adecuadas..

En este TFM se desarrolla una herramienta que permite determinar los parámetros que proporcionan órbitas heliosíncronas alrededor de Marte que cumplen unos determinados requisitos de altura, tiempos de iluminación y eclipse, etc. De este modo se puede utilizar la herramienta para estimar qué órbita es la óptima para una misión en concreto. Para ello se va a desarrollar un software que evalúe las correlaciones entre la inclinación, el tiempo de eclipse y la altura de la órbita, entre otros parámetros, para encontrar las órbitas que cumplan esos requisitos y elegir la óptima. Conjuntamente se desarrolla un programa propagador de órbitas para verificar que las órbitas halladas mantienen su sincronía con el sol a lo largo del tiempo.

Abstract

Satellites with sun-synchronous orbits (SSO) around Earth are used frequently because of their numerous advantages. Among them, the possibility of maintaining luminosity conditions throughout time stands out, since they pass through the same zone in regular time steps, easing the development of comparative studies of landscape or climate data. Furthermore, another virtue of these types of orbits is that they allow overflying all planet's surface every certain amount of time, thus allowing to create global maps.

These types of orbits are also being used to orbit around Mars. However, the orbital characteristics differ slightly due to the differences in mass, radius and rotational speed of the planet, but maintaining the main principle of this type of orbit. An example of a mission using an SSO in Mars is "Mars Reconnaissance Orbiter" (MRO) of NASA, manufactured to obtain data and high-resolution images of the planet's surface under right luminosity conditions.

This Thesis develops a tool that allows to determine the parameters that provide sun-synchronous orbits around Mars that meet certain requirements of altitude, illumination, and eclipse times, etc. Therefore, this tool can be used to estimate which orbit is optimal for a specific mission. For that purpose, a software that evaluates the correlations between inclination, eclipse time, and altitude is going to be developed, so that it can find the orbits that satisfy those requirements and choose the optimal one. Simultaneously, it's going to be developed an orbit's propagation program to verify that the elected orbits maintain their synchronism with the sun along time.

Índice

Resumen	I
Abstract	II
Índice	III
Índice de figuras	V
Índice de gráficas	VII
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.1.1. Objeto	1
1.1.2. Justificación del Proyecto	1
1.2. ESTADO DEL ARTE	2
1.2.1. Historia y evolución del cálculo de órbitas	2
1.2.2. Historia y evolución de los satélites	3
1.3. Descripción del proyecto	5
1.3.1. Limitaciones	5
1.3.2. Descripción de la metodología general	6
1.4. Marco teórico	7
1.4.1. Elementos orbitales clásicos	7
1.4.2. Eclipses en órbita	8
1.4.3. Órbitas heliosíncronas	9
1.4.4. Modelo potencial por armónicos esféricos	10
1.4.5. Perturbaciones	10
1.5. Descripción del modelo matemático	11
1.5.1. Hipótesis iniciales	11
1.5.2. Sistemas de coordenadas	13
1.5.3. Propagador de órbitas.	14
1.5.3.1. Problema de los dos cuerpos	14
1.5.3.2. Perturbaciones	15
1.5.3.3. Resolución por métodos numéricos	18
1.5.4. Cálculo del tiempo de eclipse	19
1.5.4.1. Definición de la órbita	19
1.5.4.2. Cálculo del tiempo de eclipse	20

1.6. Implementación en Matlab	22
1.6.1. Propagador de órbitas	22
1.6.1.1. Desarrollo del propagador	22
1.6.1.2. Verificación del funcionamiento	24
1.6.2. Cálculo del eclipse	25
1.7. Prueba de funcionamiento	30
1.7.1. Selección de datos reales	30
1.7.2. Obtención de órbitas	33
1.7.3. Validación de la sincronía solar	35
1.7.3.1. Cálculo del vector estado	35
1.7.3.2. Validación del mantenimiento de los elementos orbitales	35
1.8. Conclusiones	41
1.9. Referencias	42

Índice de figuras

Figura 1: Johannes Keppler.	2
Figura 2: Isaac Newton.	2
Figura 3: La perra Laika.	3
Figura 4: Telescopio Hubble.	4
Figura 5: Representación de la constelación Starlink de SpaceX.	5
Figura 6: Satélite con paneles solares desplegados.	6
Figura 7: Representación del punto Aries.	7
Figura 8: Representación de los 4 elementos orbitales angulares.	8
Figura 9: Esquemmatización de la penumbra.	9
Figura 10: Diagrama ilustrador de la precesión nodal.	9
Figura 11: En verde, representación de órbita heliosíncrona.	10
Figura 12: Gráfica de la influencia sobre la órbita terrestre de cada perturbación.	12
Figura 13: Coordenadas geocéntricas o "body center".	13
Figura 14: Coordenadas perifocales.	13
Figura 15: Esquema del problema de los dos cuerpos.	14
Figura 16: Esquema del problema de los tres cuerpos.	16
Figura 17: Representación del ángulo solar.	20
Figura 18: Progresión de rotación de una órbita arbitraria.	21
Figura 19: Ejemplo de obtención de datos de LAGEOS-1 en Horizons System.	22
Figura 20: Introducción de los datos iniciales del propagador.	23
Figura 21: Lectura de datos del Sol y la Luna y sincronización de las matrices de datos resultantes.	23
Figura 22: Resolución de la ecuación diferencial definida en odefunction.m.	24

Figura 23: Introducción de los datos de Marte necesarios.	25
Figura 24: Expresión de la condición de sincronía (Ecuación 1.5.34) y resolución de la Ecuación 1.5.39 en simbólico.	26
Figura 25: Bucle para el cálculo de las u_i de todas las órbitas.	26
Figura 26: Positivización de posibles valores negativos de u .	26
Figura 27: Condición para la correcta ordenación de los u_i .	26
Figura 28: Cálculo del tiempo de eclipse.	27
Figura 29: Órbitas ejemplo.	28
Figura 30: Demostración de las relaciones de ángulos para la función sombra.m 1.	31
Figura 31: Demostración de las relaciones de ángulos para la función sombra.m 2.	31
Figura 32: Esquema de la condición de sombra.m.	32
Figura 33: Órbita solución del satélite CALIPSO en Marte.	40
Figura 34: Órbita solución del satélite AlSat 2A en Marte.	40
Figura 35: Órbita solución del satélite AlSat 2A en Marte.	40

Índice de tablas y gráficas

Gráfica 1: Distribución de error de posición en el tiempo.	24
Gráfica 2: Porcentaje de eclipse de todas las órbitas marcianas 3D.	27
Gráfica 3: Porcentaje de eclipse de todas las órbitas marcianas 2D.	28
Gráfica 4: Porcentaje de eclipse de todas las órbitas terrestres 2D.s	29
Tabla 1: Datos orbitales de los satélites ejemplo.	31
Tabla 2: Tiempo de eclipse de los satélites ejemplo.	32
Gráfica 5: Órbitas solución del satélite CALIPSO.	33
Gráfica 6: Órbitas solución del satélite AISat 2A.	34
Gráfica 7: Órbitas solución del satélite Amazonia-1.	34
Tabla 3: Parámetros orbitales de las órbitas solución.	34
Tabla 4: Elementos orbitales de las órbitas elegidas de cada satélite.	35
Tabla 5: Vectores estado de las órbitas solución.	37
Tabla 6: Vectores estado de las órbitas solución pasados 6 meses de propagación.	37
Tabla 7: Comparación de altura de la órbita tras la propagación.	37
Tabla 8: Comparación del ángulo solar de la órbita tras la propagación.	38
Tabla 9: Comparativa de inclinaciones teóricas y calculadas para los tres satélites.	39
Tabla 10: Comparativa de los porcentajes de tiempo de eclipse para los tres satélites.	39



1.1. Introducción

1.1.1. Objeto

El objetivo de este documento es desarrollar una herramienta de software que proporcione los datos necesarios para definir una órbita heliosíncrona alrededor de Marte. Se pretende que, introduciendo unos requisitos concretos que la órbita solución debe cumplir, calcule todos los parámetros necesarios para generar una órbita alrededor de Marte que cumpla dichos requisitos y mantenga su sincronía con el Sol.

Además, se va a desarrollar un propagador de órbitas, una herramienta que, partiendo de una posición inicial, calcule la posición del cuerpo orbitando en el tiempo, para comprobar que, transcurrido un tiempo prolongado, se mantienen las condiciones impuestas y la sincronía con el Sol.

Para probar su funcionamiento con datos reales, se van a seleccionar satélites terrestres y se van a obtener las órbitas que deberían seguir dichos satélites en Marte para seguir cumpliendo sus especificaciones de diseño reales.

1.1.2. Justificación del proyecto

Las órbitas heliosíncronas (SSO) poseen características óptimas para misiones relativas a la observación terrestre o meteorología debido a sus características de iluminación constantes en cada órbita. Así pues, la toma de imágenes en longitudes de onda visibles se facilita mucho dado que todas las imágenes van a tomarse con la misma iluminación.

De la misma manera que en la Tierra, las SSO también son de gran utilidad en otros planetas como Marte. En este planeta, la cartografía se suma a las utilidades de este tipo de órbita, así como la utilización de satélites con sensores remotos, que detectan, entre otros, la radiación solar en la superficie del planeta en las mismas condiciones de iluminación y, por lo tanto, radiación, también en el satélite.

Además, cada misión tiene unas características concretas y, por lo tanto, la órbita para desarrollar su misión de la mejor manera variará teniendo en cuenta diferentes parámetros. Por ejemplo, si la misión del satélite es la observación terrestre, y se cuenta con una cámara con una resolución concreta, la altura de la órbita será determinante para obtener imágenes de alta calidad. Es por esto por lo que desarrollar una herramienta que considere varios requisitos es de gran utilidad a la hora de definir la órbita óptima para una misión concreta.

1.2. Estado del arte

1.2.1. Historia y evolución del cálculo de órbitas

El cálculo de órbitas es una disciplina fundamental dentro de la mecánica celeste, que estudia el movimiento de cuerpos bajo la influencia de la gravedad. Sus orígenes se remontan a la antigüedad, pero fue en la era moderna cuando se establecieron las bases científicas que hoy conocemos.

Johannes Kepler (Figura 1) fue el primero en describir las órbitas planetarias con precisión matemática. Entre 1609 y 1619, formuló las tres leyes del movimiento planetario, conocidas como las Leyes de Kepler. Estas leyes establecen que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos, que la línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales, y que hay una relación precisa entre el período orbital de un planeta y su distancia media al Sol (Ley de los Períodos). Estas leyes fueron cruciales para el desarrollo posterior del cálculo de órbitas.

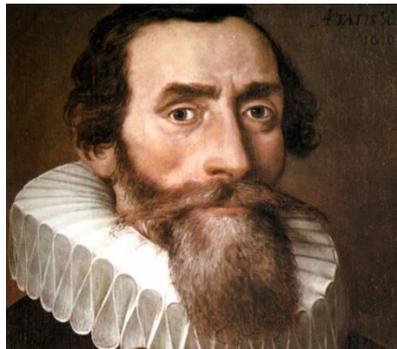


Figura 1: Johannes Kepler.[1]

El siguiente avance significativo fue la formulación de la Ley de la Gravitación Universal por Isaac Newton (Figura 2) en su obra "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica". Newton unificó las leyes de Kepler en una teoría más amplia, explicando que la fuerza de gravedad es la responsable del movimiento orbital de los cuerpos celestes. La ecuación de la fuerza gravitatoria de Newton permitió calcular la atracción mutua entre dos cuerpos y, por lo tanto, sus órbitas en torno a un centro común de masa.

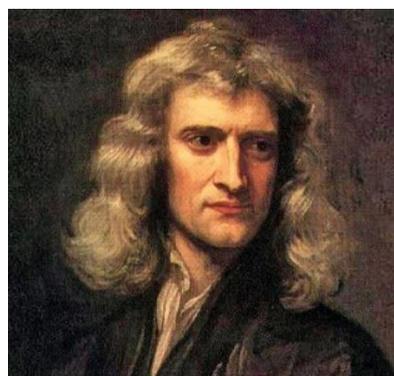


Figura 2: Isaac Newton.[2]

El problema de los dos cuerpos, que describe la interacción gravitacional entre dos masas puntuales, es un caso especial que puede resolverse analíticamente utilizando las leyes de Newton. Las soluciones al problema de los dos cuerpos proporcionan las ecuaciones clásicas de las órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas, fundamentales en la astronomía y la navegación espacial.

Sin embargo, a medida que se considera la influencia de más de dos cuerpos, como en el caso de sistemas planetarios o satélites bajo la influencia de la gravedad solar y planetaria, el sistema se vuelve caótico para la mayoría de condiciones iniciales, lo que se conoce como el “Problema de los N cuerpos”, el cual no tiene solución analítica. [3] Es por esto por lo que se han tenido que desarrollar métodos numéricos eficaces para calcular órbitas complejas. Entre los métodos de cálculo numérico más importantes se encuentran el método de Euler, el método de Runge-Kutta y el método de Adams-Bashforth-Moulton.

Con la llegada de nuevas tecnologías, como la inteligencia artificial y la computación cuántica, el futuro del cálculo orbital promete mejoras significativas en la precisión y la eficiencia. Estas innovaciones podrían revolucionar la forma en que planificamos y ejecutamos misiones espaciales, facilitando la exploración de Marte y otros cuerpos celestes con una precisión mucho mayor. [4]

1.2.1. Historia y evolución de los satélites

Con la llegada de nuevas tecnologías, como la inteligencia artificial y la computación cuántica, el futuro del cálculo orbital promete mejoras significativas en la precisión y la eficiencia. Estas innovaciones podrían revolucionar la forma en que planificamos y ejecutamos misiones espaciales, facilitando la exploración de Marte y otros cuerpos celestes con una precisión mucho mayor.

En 1955, después de la Segunda Guerra Mundial y en plena Guerra Fría entre Estados Unidos y la Unión Soviética, ambas potencias anunciaban públicamente sus intenciones de lanzar satélites artificiales al espacio en el corto plazo, dando así comienzo a una nueva parte importante de la Guerra Fría, la carrera espacial.

En 1957, la Unión Soviética inició dicha carrera lanzando el primer satélite artificial terrestre, el Sputnik 1, con el simple propósito de transmitir señales de radio que podían ser recibidas en la tierra. Ese mismo año se lanzó además el famoso y controversial Sputnik 2, ya que llevaba a la perra Laika (Figura 3), convirtiéndose en el primer ser vivo en orbitar la Tierra y demostrando así la capacidad de los satélites de llevar carga útil.



Figura 3: La perra Laika.[5]

Más adelante, en la década de los 60 se avanzó en el concepto de satélites de comunicaciones, lanzando el Echo 1 (1960), el primer satélite considerado de comunicaciones ya que reflejaba señales de radio provenientes de la Tierra; y el Telstar (1962), que permitió la transmisión de televisión en vivo entre continentes. En esta misma década se lanzaron también los primeros satélites meteorológicos, como el TIROS, que proporcionaba datos sobre el clima y el tiempo. Este tipo de satélites han sido cruciales para la predicción meteorológica.

En la década de los 70 hubo una gran expansión en cuanto a aplicaciones satelitales. Por una parte, se lanzaron satélites de observación terrestre como el Landsat 1 (1972), que proporcionó imágenes detalladas de la superficie terrestre y marcó el inicio de la teledetección. Además, en esta década se desarrolló el sistema de GPS (Global Positioning System), una constelación de satélites inaugurada en 1978 que revolucionó la navegación y el posicionamiento en todo el mundo hasta nuestros días. Finalmente, se lanzaron satélites no solo de exploración terrestre sino también de exploración planetaria, como los Voyager 1 y 2 (1977), que proporcionaron datos sobre los planetas más lejanos al Sol y hoy en día se sigue recibiendo información de ellos desde el borde de nuestro Sistema Solar. Después de la observación planetaria, se lanzaron también satélites de exploración espacial como el telescopio Hubble en 1990 (Figura 4), que aun hoy en día proporciona datos e imágenes espaciales que han revolucionado nuestra comprensión de la astronomía. [7]



Figura 4: Telescopio Hubble.[6]

Actualmente estamos en la Era Moderna de los Satélites, donde la miniaturización de satélites y el uso de constelaciones está en auge. Los CubeSats o nanosatélites permiten a las universidades y pequeñas empresas participar en la exploración espacial, como el grupo PlutónUPV de Generación Espontanea de la Universitat Politècnica de València. Por otro lado, grandes empresas como SpaceX o OneWeb han comenzado a lanzar constelaciones de satélites, como Starlink de SpaceX (Figura 5) que pretende proporcionar acceso a Internet global incluyendo áreas remotas. [8]

De cara al futuro, el uso de la inteligencia artificial para la toma de decisiones en tiempo real y la recolección de datos se está tomando en consideración. Además, la exploración de Marte (que está resonando mucho en los últimos tiempos debido a las intenciones de la famosa empresa SpaceX en colonizar el planeta en el corto plazo) y de otros planetas continuará impulsando el desarrollo de nuevos satélites y tecnologías, ampliando nuestras capacidades para estudiar el sistema solar. [9]



Figura 5: Representación de la constelación Starlink de SpaceX.[10]

1.3. Descripción del proyecto

1.3.1. Limitaciones

Este proyecto se engloba dentro de la mecánica orbital, una rama de la mecánica muy compleja a nivel matemático donde influyen infinidad de factores. En concreto, como se va a ver a lo largo de este documento, se tienen en cuenta interacciones gravitacionales entre más de dos cuerpos celestes, lo que hace entrar en el “Problema de los N cuerpos”, que como se ha dicho anteriormente, es de gran complejidad.

Es por este motivo por el que se van a utilizar softwares capaces de resolver de manera numérica ecuaciones diferenciales (MATLAB MathWorks). Sin embargo, este programa puede no tener la capacidad computacional tan avanzada como verdaderos softwares de cálculo orbital que se utilizan en el mundo profesional, de modo que el tiempo requerido para desarrollar los cálculos puede ser muy grande.

Además, en mecánica orbital, para tener resultados precisos de lo que se está estudiando, idealmente se deberían tener en cuenta todos y cada uno de los cuerpos y fenómenos que intervienen en el movimiento del cuerpo de estudio. Sin embargo, esto supone una complejidad muy por encima de los propósitos de este proyecto, por lo que en este documento se han asumido una serie de hipótesis para simplificar el trabajo que podrán ser eliminadas o refinadas en trabajos posteriores de mayor envergadura.

Por último, el resultado de este proyecto es una herramienta de software que los clientes podrían utilizar para obtener la órbita óptima para la misión que la empresa pretenda llevar a cabo. Al no disponer de una empresa que pretenda utilizar esta herramienta, para comprobar la utilidad del software y hacer un simulacro del funcionamiento del programa, se van a tener que introducir datos de otra manera, en este caso seleccionando satélites terrestres en activo, recogiendo sus características de diseño relevantes para este estudio, y utilizar el software para generar una órbita marciana con las mismas características.

1.3.2. Descripción de la metodología general

En este apartado se van a introducir los pasos que se van a seguir para desarrollar el programa de estudio.

Primeramente, se necesitan escoger qué características de la órbita vamos a tener en cuenta para que le cliente pueda establecer sus requisitos sobre ellos. En este caso, se han escogido dos parámetros controlables por el cliente para generar su órbita SSO en Marte: el tiempo de iluminación y la altitud de la órbita.

Por un lado, el tiempo de iluminación se refiere al tiempo que el satélite es alcanzado por la radiación solar, es decir, que no hay ningún cuerpo entre el satélite y el Sol. Este parámetro es muy relevante por lo que respecta al sistema de alimentación del satélite. Esto es porque tanto las placas solares como las baterías del satélite requieren obviamente de un tiempo de carga, pero también de un tiempo de refresco, es decir, un tiempo en el cual no están siendo cargados ni alcanzados por radiación solar para evitar sobrecalentamientos. Esto es un parámetro de diseño muy importante a la hora de diseñar el sistema de alimentación del satélite, por lo que es un parámetro muy importante también en la definición de la órbita.



Figura 6: Satélite con paneles solares desplegados.[11]

Por otro lado, la altitud de la órbita es clave en cualquier tipo de órbita como es lógico, pero en órbitas SSO es especialmente relevante debido a que la mayoría de satélites en órbitas heliosíncronas tienen misiones de exploración terrestre (o planetaria en general) que utilizan cámaras para tomar imágenes de este, o utilizan sensores remotos para tomar datos meteorológicos o de otro tipo, etc. Es por esto por lo que la distancia con el objeto de estudio se hace crucial, debido a la concreta resolución de la cámara del satélite o del marco de funcionamiento del sensor embarcado. De esta manera, dependiendo de la misión y de las características tecnológicas de esta, será más oportuna una altitud u otra, de modo que el hecho de que el cliente pueda especificar este parámetro es de vital importancia para el éxito de la misión.

Posteriormente, dado que calcular el tiempo de iluminación de una órbita depende obviamente de qué órbita se está considerando, se deberá hacer una tabla que calcule los tiempos de iluminación (o tiempos de eclipse) para una amplia lista de órbitas posibles, de modo que, al introducir el requisito de tiempo de iluminación, seleccione dentro de la tabla la órbita que cumpla dicho requisito. Es decir, la metodología general va a consistir en calcular el tiempo de eclipse de un amplio rango de órbitas, que cubran cualquier altura posible y seleccionar dentro de la lista la que cumpla las especificaciones del cliente.

Para verificar resultados, se va a utilizar un propagador de orbitas. Una herramienta que, dado un vector estado inicial de posición y velocidad de un satélite, calcule la posición y velocidad de este durante el tiempo. De este modo, al obtener la órbita deseada por el cliente, se va a introducir dicha órbita en el propagador para comprobar que pasado un tiempo considerable, mantiene su sincronía con el Sol y los requisitos introducidos por el cliente, constatando así que la órbita ofrecida por el programa es válida con un margen de error. Para validar el funcionamiento del propagador se va a utilizar con un satélite terrestre del cual se conocen los datos para visualizar el error de cálculo frente a datos reales de un satélite real.

1.4. Marco teórico

1.4.1. Elementos orbitales clásicos

Los elementos orbitales son los parámetros necesarios para definir una órbita concreta en tres dimensiones, concretamente para situar un punto de una órbita concreta en el que se encuentra un cuerpo orbitando otro. Antes de introducir los elementos orbitales clásicos es necesario definir algunos conceptos y parámetros sobre órbitas:

- **Eclíptica:** Plano de rotación del cuerpo de estudio (Tierra, Marte...) alrededor del Sol.
- **Punto Aries (Υ):** Punto de intersección entre la eclíptica y el plano ecuatorial en el cual el Sol pasa del hemisferio sur celeste al hemisferio norte celeste. (ver Figura 7)
- **Nodo ascendente:** Punto de la órbita donde se cruza el plano de referencia hacia arriba.



Figura 7: Representación del punto Aries.[12]

Definidos estos conceptos, se pasan a definir los elementos orbitales clásicos, que son: [13]

- **Excentricidad (e):** Término matemático que describe cuánto se alarga una elipse en comparación con un círculo perfecto.
- **Semieje mayor (a):** La suma de las distancias al perihelio y al afelio dividida entre 2.
- **Inclinación (i):** Inclinación vertical de la órbita respecto al plano de referencia (utilizando coordenadas geocéntricas, el plano ecuatorial), medida en el nodo ascendente.
- **Longitud del nodo ascendente o RAAN (Ω):** Ángulo horizontal medido desde el punto Aries que ubica el nodo ascendente.
- **Argumento de periapsis (ω):** Define la orientación de la elipse en el plano orbital, medido como el ángulo desde el nodo ascendente hasta la periapsis.
- **Anomalía verdadera (v):** Define el punto de la órbita ya definida con los 5 anteriores elementos en el cual se encuentra el cuerpo orbitando, medido como el ángulo desde el periapsis hasta la posición del cuerpo.

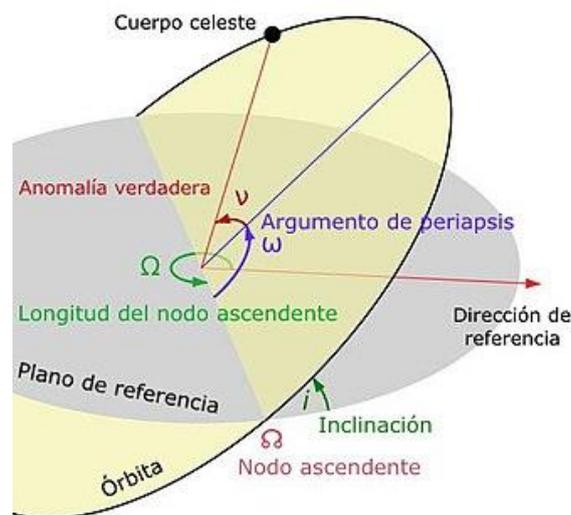


Figura 8: Representación de los 4 elementos orbitales angulares.[14]

1.4.2. Eclipses en órbita

Un eclipse se produce cuando el planeta se encuentra entre el Sol y el satélite, impidiendo que la radiación solar alcance el satélite. Este fenómeno es muy importante en el diseño y estudio de satélites debido a que el sistema de alimentación de estos se basa en placas solares, de modo que el tiempo que un satélite se encuentra en eclipse no está siendo alcanzado por la radiación solar por lo que no está siendo cargado. Además, es muy importante debido a que el sistema de alimentación siempre requiere un tiempo de refresco, es decir, un tiempo en el cual no está siendo cargado y puede “descansar” de la radiación solar y del constante trabajo, fenómenos que pueden producir sobrecalentamientos y malfuncionamientos.

Otro concepto a tener en cuenta es la Penumbra. La penumbra es una zona detrás del planeta en la cual se origina un eclipse parcial (Figura 9), es decir, no está completamente privado de radiación solar. Este fenómeno se produce debido a la gran diferencia de tamaño entre el Sol y el planeta.

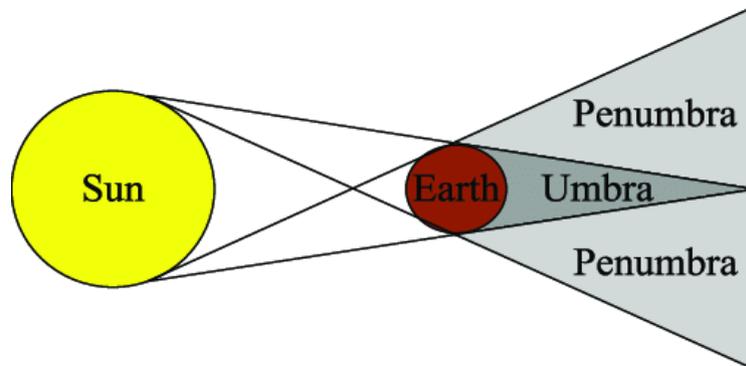


Figura 9: Esquematización de la penumbra.[15]

1.4.3. Órbitas heliosíncronas

Una órbita sincrónica al Sol es un tipo de órbita polar en la cual el satélite pasa sobre cualquier punto de un planeta a la misma hora solar local. Esto significa que la órbita está diseñada para que el plano orbital del satélite mantenga un ángulo constante con respecto a la línea que conecta el centro del planeta con el Sol.

Esto es posible debido a la precesión de la órbita. Se conoce como precesión a la variación que experimenta el eje de rotación de una órbita. En concreto, en mecánica orbital se habla de precesión nodal (Figura 10), que es la rotación del plano orbital del satélite debido a que el cuerpo sobre el que se orbita no es una esfera perfecta, lo que crea variaciones en su atracción gravitatoria a lo largo de una órbita, rotando el plano orbital. Se calcula como la primera derivada temporal de la longitud del nodo ascendente ($\dot{\Omega}$).

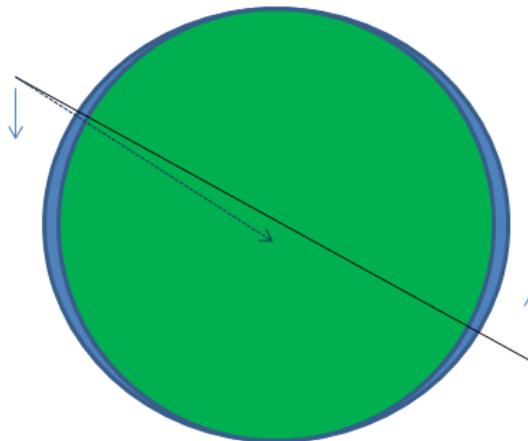


Figura 10: Diagrama ilustrador de la precesión nodal.[16]

Teniendo en cuenta la precesión nodal, y sabiendo que una órbita heliosíncrona siempre mantiene la misma orientación con respecto al Sol, la manera de obtener una órbita SSO es igualando la precesión nodal de la órbita con el movimiento del planeta (Tierra o Marte) alrededor del Sol. Es decir, que el satélite tarde el mismo tiempo en rotar su órbita una vuelta completa debido a la precisión nodal de lo que tarda el planeta en dar una vuelta alrededor del Sol. Como se puede ver en la Figura 11, la órbita verde es heliosíncrona, mantiene su orientación respecto al Sol durante toda su órbita.

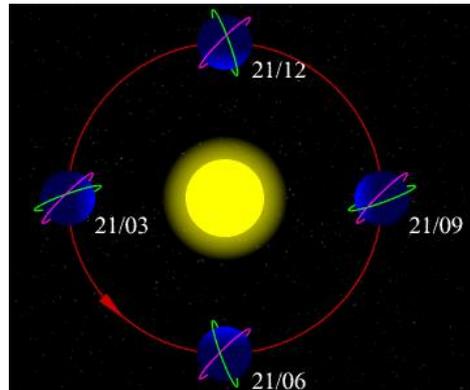


Figura 11: En verde, representación de órbita heliosíncrona.[17]

1.4.4. Modelo potencial por armónicos esféricos

Como se ha introducido, los cuerpos celestes incluyendo la Tierra y Marte, no son esferas perfectas. Esto, a parte influir en la precesión nodal de la órbita como se ha mencionado, también afecta directamente a la órbita.

Para calcular el efecto que estas imperfecciones producen en la órbita, se utilizan modelos matemáticos del potencial gravitatorio del planeta en forma de desarrollo en serie de armónicos esféricos. Es decir, la atracción gravitatoria que produce el cuerpo, con este modelo, contempla las irregularidades del mismo y añade precisión al cálculo de órbitas a medida que se van añadiendo coeficientes en la serie de armónicos. Estos coeficientes llamados armónicos zonales (representados por J_i), y los términos de esta serie se añaden en las ecuaciones del movimiento de las órbitas por medio de la perturbación que introducen en el sistema. El concepto de perturbación se explica en el siguiente subapartado.[18] [19] [20]

1.4.5. Perturbaciones

En mecánica orbital existen infinidad de fenómenos y cuerpos que influyen en el movimiento de un cuerpo. Para calcular la influencia de cada uno de ellos se utiliza el concepto de perturbaciones. Estas perturbaciones son términos que se añaden a las ecuaciones de movimiento base de la mecánica orbital: el problema de los dos cuerpos. Estas ecuaciones describen el movimiento de un cuerpo orbitando otro sin considerar las influencias gravitatorias de otros cuerpos, asumiendo el planeta como una esfera perfecta y otras simplificaciones. Así pues, las perturbaciones son términos que se añaden a esta ecuación base para precisar en los resultados, teniendo en cuenta así otros fenómenos que influyen en el movimiento orbital.

A continuación, se explican las principales perturbaciones a tener en cuenta a la hora de calcular el movimiento orbital de un cuerpo: [21]

- **Perturbación por achatamiento:** Este tipo de perturbación hace referencia al hecho de que los cuerpos celestes no son esferas perfectas, sino que tienen irregularidades que provocan diferencias en su campo gravitatorio, lo que produce variaciones en las órbitas de los cuerpos que lo orbitan. Se calcula mediante el modelo potencial por armónicos esféricos explicado anteriormente.
- **Perturbación del tercer cuerpo:** Este tipo de perturbación hace referencia a los cuerpos celestes que influyen en las demás órbitas debido a su propio tirón gravitatorio. Para calcular con precisión una órbita, se deberían tener en cuenta todos los cuerpos celestes y sus respectivas influencias al cuerpo de estudio.
- **Perturbación por presión de radiación solar:** Aunque los fotones que constituyen la luz solar no tengan masa según la física cuántica, sí tienen energía. Dicha energía, al alcanzar la superficie del satélite, puede generar variaciones en su movimiento.
- **Perturbación por resistencia atmosférica:** En órbitas bajas, el aire de la atmósfera puede generar resistencia al movimiento o Drag. Dicha resistencia se opone al movimiento del satélite perturbando su órbita.

1.5. Descripción del modelo matemático

1.5.1. Hipótesis iniciales

Como ya se ha comentado, calcular con precisión exacta cuestiones de mecánica orbital presenta grandes problemas, debido a la gran cantidad de fenómenos y cuerpos que intervienen. Es por esto por lo que, para la realización de este proyecto, se han tenido que tomar algunas consideraciones para simplificar los cálculos.

Primeramente, se van a considerar únicamente órbitas perfectamente circulares. Esto puede parecer una simplificación muy agresiva pero como se va a ver más adelante en este proyecto, las órbitas heliosíncronas presentan excentricidades de elipse generalmente bajas, existiendo incluso órbitas heliosíncronas con excentricidades del orden de 10^{-5} . En este trabajo, se va a considerar únicamente $e = 0$.

Además, se va a considerar la zona de penumbra como despreciable, es decir, el satélite va a estar o iluminado al 100% o sin iluminar. Calculando las zonas de penumbra que el sol proyecta tras la Tierra y tras Marte, se puede ver que son de menos de 0.4° de órbita, debido a las grandes distancias entre los cuerpos.

En los cálculos, como se va a ver más adelante, se necesita conocer la posición del Sol y de otros cuerpos para calcular sus influencias en la órbita. Dichos datos, se toman de la aplicación web de Horizons System de NASA, que ofrece una gran cantidad de datos de los cuerpos celestes y satélites, así como su posición y velocidad en cada instante de tiempo. En la toma de estos datos, se ha discretizado la posición de los cuerpos, es decir, se toma un dato de posición y velocidad cada cierto intervalo de tiempo, asumiendo que la variación de posición que el cuerpo sufre entre los dos instantes de tiempo es despreciable.

Por lo que respecta a las perturbaciones, se van a introducir perturbaciones por achatamiento por medio de hasta 4 armónicos en la serie del potencial gravitatorio (J_2 , J_3 , J_4 y J_5). Como cuerpos externos influyentes en la órbita por atracción gravitatoria, se van a considerar la Luna y el Sol para los cálculos relativos a la Tierra, y el Sol y Júpiter para los cálculos relativos a Marte. Además, no se van a considerar las perturbaciones de presión de radiación solar y de resistencia atmosférica debido a que su influencia en la órbita es órdenes de magnitud inferior a las demás, como se puede ver en la siguiente gráfica.

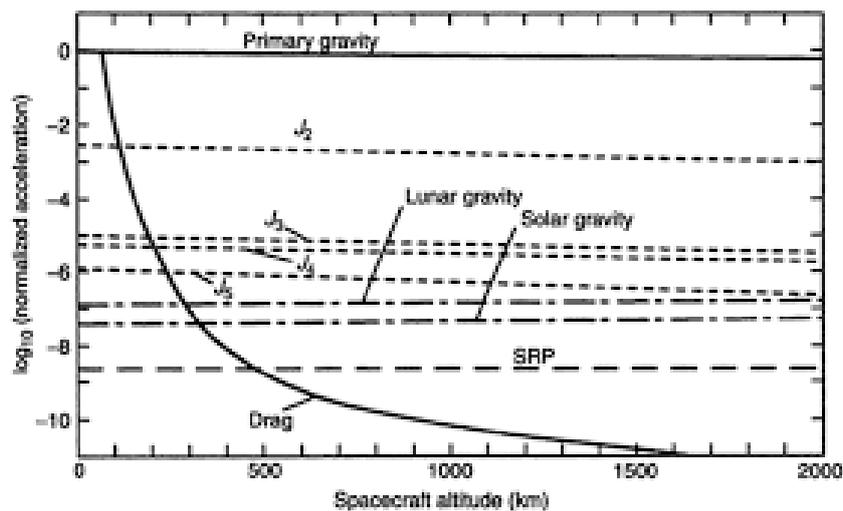


Figura 12: Gráfica de la influencia sobre la órbita terrestre de cada perturbación.[13]

Como se puede ver, la perturbación por achatamiento es la más influyente, teniendo en cuenta que a partir del 5 armónico empieza a tener una influencia despreciable. Seguidamente, aparecen las perturbaciones debidas a la Luna y el Sol, cabe destacar que, en Marte, la influencia de sus lunas es insignificante debido a su reducido tamaño. Por eso se ha introducido Júpiter como cuerpo perturbador además del Sol, teniendo en cuenta que éste, por la relación entre distancia y masa, influye más en las órbitas alrededor de Marte de lo que lo hacen sus lunas. Finalmente, se puede ver que las perturbaciones por presión de radiación solar y de resistencia atmosférica por encima de los 500 km (que es el orden de magnitud de las alturas de órbita que se van a manejar en este proyecto) son muy inferiores a las influencias de las gravedades solar y lunar, por lo que no se van a tener en cuenta.

1.5.2. Sistemas de coordenadas

Las coordenadas que se van a utilizar son principalmente las coordenadas geocéntricas (o “body center”, así llamadas las geocéntricas el caso de cuerpos diferentes a la Tierra como Marte). Sin embargo, como coordenadas intermedias en algunos procesos de cálculo también se utilizan las coordenadas perifocales.

- **Coordenadas geocéntricas o “body center”:** Se trata de un sistema de coordenadas de tres ejes ortogonales entre sí. Tienen su origen en el centro de la esfera o esferoide del planeta (Tierra o Marte). El eje x está en el plano ecuatorial e interseca el meridiano base. El eje y también está contenido en el plano ecuatorial y forma un ángulo de 90° con el eje x , intersecando el meridiano 90° . El eje z coincide con el eje polar y es positivo hacia el polo norte.

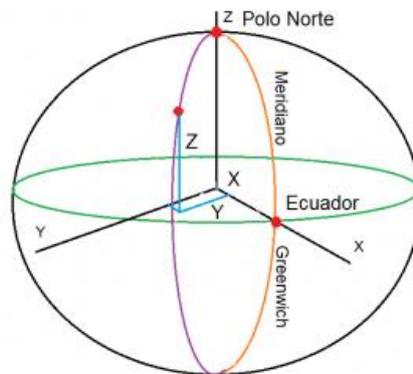


Figura 13: Coordenadas geocéntricas o "body center".[22]

- **Coordenadas perifocales:** Se trata de un sistema de coordenadas sobre la órbita. También consta de tres ejes de coordenadas ortogonales entre sí y con origen en el cuerpo sobre el que se orbita. El eje x está contenido en el plano de la órbita y va del foco de la elipse de la órbita al periapsis (punto de la órbita en el que la distancia entre los cuerpos es mínima). El eje y forma 90° con el eje x (en el sentido de movimiento del cuerpo orbitando) y también está contenido en el plano de la órbita. El eje z es perpendicular al plano XY , positivo hacia arriba siguiendo la regla de la mano derecha.

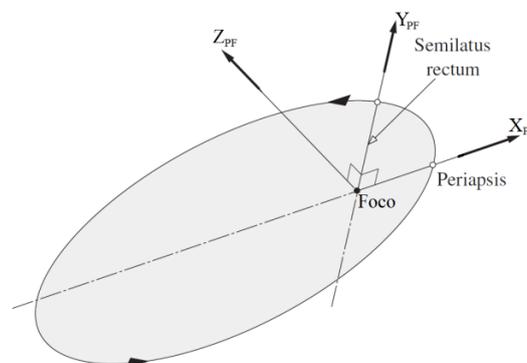


Figura 14: Coordenadas perifocales.[13]

1.5.3. Propagador de órbitas.

Un propagador de órbitas es un programa que, partiendo de un punto dado en un instante de tiempo, calcula la posición y velocidad del satélite para otros instantes de tiempo. En este apartado, se van a desarrollar las ecuaciones matemáticas que permiten este cálculo.[21]

1.5.3.1. Problema de los dos cuerpos

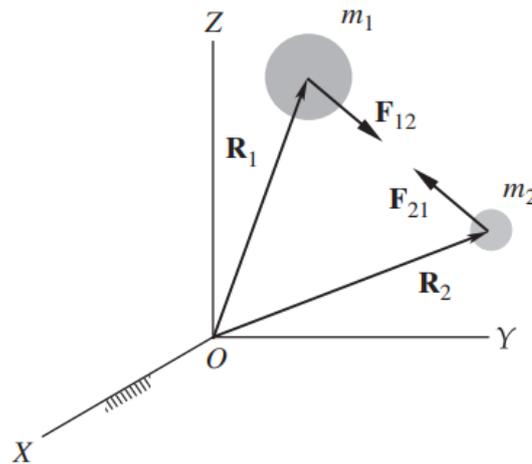


Figura 15: Esquema del problema de los dos cuerpos.[21]

Se consideran dos masas puntuales (m_1 y m_2) bajo únicamente la fuerza de atracción gravitatoria entre ellas. Las posiciones de sus centros de masas son \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 respectivamente. Así pues, las fuerzas gravitatorias que sufren cada una de las masas son respectivamente \mathbf{F}_{12} y \mathbf{F}_{21} . Bajo el sistema de referencia inercial se definen \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 como:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= X_1\hat{\mathbf{I}} + Y_1\hat{\mathbf{J}} + Z_1\hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{R}_2 &= X_2\hat{\mathbf{I}} + Y_2\hat{\mathbf{J}} + Z_2\hat{\mathbf{K}}\end{aligned}\quad (1.5.1)$$

Así pues, se define el vector \mathbf{r} como la posición de m_2 respecto de m_1 :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \quad (1.5.2)$$

$$\mathbf{r} = (X_2 - X_1)\hat{\mathbf{I}} + (Y_2 - Y_1)\hat{\mathbf{J}} + (Z_2 - Z_1)\hat{\mathbf{K}} \quad (1.5.3)$$

$$r = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \quad (1.5.4)$$

Además, se va a definir $\hat{\mathbf{u}}_r$ como el vector unitario que va desde la masa m_1 a m_2 .

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.5.5)$$

Atendiendo a la fórmula de gravitación universal de Newton, se pueden expresar las fuerzas de atracción entre las dos masas como:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.5.6)$$

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.5.7)$$

Donde G es la constante de gravitación universal. Aplicando la segunda ley de Newton $F = m \cdot a$:

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.5.8)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.5.9)$$

Derivando dos veces la Ecuación 1.5.2 y sustituyendo las Ecuaciones 1.5.8 y 1.5.9 obtenemos:

$$\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1 \quad (1.5.10)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.5.11)$$

Definiendo el parámetro gravitacional $\mu = G(m_1 + m_2)$ y sustituyendo la Ecuación 1.5.5 obtenemos la ecuación de movimiento de m_2 respecto a m_1 .

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}} \quad (1.5.12)$$

1.5.3.2. Perturbaciones

Una vez obtenida la ecuación que rige el movimiento principal, hay que añadirle las perturbaciones para minimizar el error en los resultados, de modo que la Ecuación 1.5.12 quedará de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \sum \mathbf{p}_i \quad (1.5.13)$$

Donde \mathbf{p}_i son cada una de las perturbaciones que se van a calcular a continuación.

1. Perturbación por achatamiento:

La perturbación por achatamiento, como se ha explicado, se introduce por medio del modelo potencial por armónicos esféricos. Obtener los coeficientes de los términos de la serie armónica de este modelo es una labor muy compleja, así como demostrar las expresiones de perturbación que estos introducen. Para obtener la demostración se puede consultar el libro *Analytical Mechanics of Space Systems* [23]. Las perturbaciones introducidas por cada uno de los armónicos son:

$$\mathbf{p}_{J_2} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_p}{r} \right)^2 \begin{Bmatrix} \left(1 - 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \frac{x}{r} \\ \left(1 - 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \frac{y}{r} \\ \left(3 - 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \frac{z}{r} \end{Bmatrix} \quad (1.5.14)$$

$$\mathbf{p}_{J_3} = \frac{1}{2} J_3 \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_P}{r} \right)^3 \left\{ \begin{array}{l} 5 \left(7 \left(\frac{z}{r} \right)^3 - 3 \left(\frac{z}{r} \right) \right) \frac{x}{r} \\ 5 \left(7 \left(\frac{z}{r} \right)^3 - 3 \left(\frac{z}{r} \right) \right) \frac{y}{r} \\ 3 \left(1 - 10 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + \frac{35}{3} \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right) \end{array} \right\} \quad (1.5.15)$$

$$\mathbf{p}_{J_4} = \frac{5}{8} J_4 \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_P}{r} \right)^4 \left\{ \begin{array}{l} \left(3 - 42 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 63 \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right) \frac{x}{r} \\ \left(3 - 42 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 63 \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right) \frac{y}{r} \\ \left(15 - 70 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 63 \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right) \frac{z}{r} \end{array} \right\} \quad (1.5.16)$$

$$\mathbf{p}_{J_5} = \frac{1}{8} J_5 \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_P}{r} \right)^5 \left\{ \begin{array}{l} 3 \left(35 \left(\frac{z}{r} \right) - 210 \left(\frac{z}{r} \right)^3 + 231 \left(\frac{z}{r} \right)^5 \right) \frac{x}{r} \\ 3 \left(35 \left(\frac{z}{r} \right) - 210 \left(\frac{z}{r} \right)^3 + 231 \left(\frac{z}{r} \right)^5 \right) \frac{y}{r} \\ \left(693 \left(\frac{z}{r} \right)^6 - 945 \left(\frac{z}{r} \right)^4 + 315 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 15 \right) \end{array} \right\} \quad (1.5.17)$$

Donde R_P es el radio del planeta (el subíndice “P” puede ser “T” para tierra y “M” para Marte) y que $x = X_2 - X_1$, $y = Y_2 - Y_1$ y $z = Z_2 - Z_1$. Así pues, el término de perturbación por achatamiento será la suma de todos los términos anteriores:

$$\mathbf{p}_J = \sum \mathbf{p}_{J_i} \quad (1.5.18)$$

Cabe destacar que las J_i y el parámetro gravitacional μ van a variar dependiendo del planeta que se esté orbitando.

2. Perturbación del tercer cuerpo

Considerando un problema ahora con 3 cuerpos, siendo el tercer cuerpo la Luna, el Sol, o Júpiter, se puede seguir un proceso similar al anterior. (Figura 16)

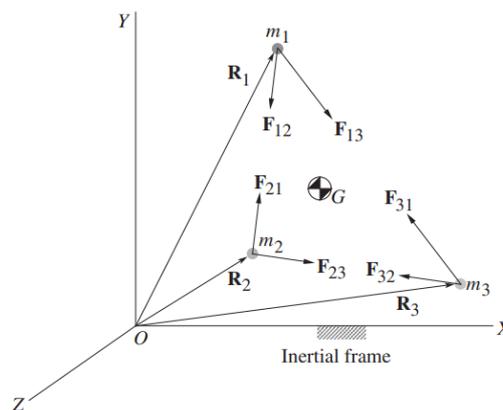


Figura 16: Esquema del problema de los tres cuerpos.[21]

En este caso, las fuerzas entre los cuerpos se pueden expresar como:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|^3} \quad (1.5.19)$$

$$\mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31} = \frac{Gm_1m_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1)}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1\|^3} \quad (1.5.20)$$

$$\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32} = \frac{Gm_2m_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2)}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} \quad (1.5.21)$$

Entendiendo ahora que la 2ª ley de Newton tiene en cuenta todas las fuerzas que afectan a la misma masa ($\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} = m_1\mathbf{a}_1$) y que $\mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{R}}_i$, se obtienen las aceleraciones de los tres cuerpos como:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{Gm_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1)}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1\|^3} \quad (1.5.22)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{Gm_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2)}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} \quad (1.5.23)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{Gm_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3)}{\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3\|^3} + \frac{Gm_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\|^3} \quad (1.5.24)$$

De este modo, podemos obtener la aceleración del cuerpo 2 (satélite) respecto al cuerpo 1 (Tierra o Marte) como $\mathbf{a}_{2/1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$:

$$\mathbf{a}_{2/1} = \left(Gm_1 \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\|^3} + Gm_3 \frac{(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2)}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} \right) - \left(Gm_2 \frac{(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|^3} + Gm_3 \frac{(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1)}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1\|^3} \right) \quad (1.5.25)$$

$$\mathbf{a}_{2/1} = -\mu \frac{(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|^3} + \mu_3 \left(\frac{(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2)}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} - \frac{(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1)}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1\|^3} \right) \quad (1.5.26)$$

Donde $\mu = G(m_1 + m_2)$ y $\mu_3 = Gm_3$. De este modo, reescribimos las ecuaciones siguiendo estas equivalencias:

- $\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$: Posición del satélite relativa al planeta.
- $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_{2/1}$: Aceleración del satélite relativa al planeta.
- $\mathbf{r}_t = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1$: Posición del tercer cuerpo relativa al planeta.
- $\mathbf{r}_{t/s} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2$: Posición del tercer cuerpo relativo al satélite.

Donde el subíndice “*t*” puede ser “*m*” para la Luna, “*M*” para Júpiter y “ \odot ” para el Sol.

Con estas consideraciones, la Ecuación 1.5.23 queda de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mu_t \left(\frac{\mathbf{r}_{m/s}}{r_{m/s}^3} - \frac{\mathbf{r}_t}{r_t^3} \right) \quad (1.5.27)$$

Que, siguiendo la estructura de la Ecuación 1.5.13, obtenemos:

$$\mathbf{p}_t = \mu_t \left(\frac{\mathbf{r}_{t/s}}{r_{t/s}^3} - \frac{\mathbf{r}_t}{r_t^3} \right) \quad (1.5.28)$$

De este modo, la Ecuación 1.5.13 puede reescribirse incluyendo todas las perturbaciones que se van a considerar, siendo esta la ecuación que va a determinar el movimiento del satélite alrededor del planeta y por lo tanto la ecuación que se va a tener que resolver para propagar la órbita del satélite (las dos ecuaciones para órbitas terrestres y marcianas respectivamente):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{p}_J + \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_\odot \quad (1.5.29)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{p}_J + \mathbf{p}_M + \mathbf{p}_\odot \quad (1.5.30)$$

1.5.3.3. Resolución por métodos numéricos

Como se ha anticipado, las Ecuaciones 1.5.29 y 1.5.30 son de gran complejidad y sin solución analítica ya que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales. Es por eso por lo que se deben utilizar algoritmos de integración numérica para resolverlas. En este caso, se va a utilizar el programa Matlab, en concreto la función de su librería *ode45.m*. Esta función es un integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de Runge-Kutta. [24]

Así pues, se deben reorganizar las ecuaciones para poder ser resueltas por la función de Matlab de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{p}_J + \mathbf{p}_M + \mathbf{p}_\odot \end{cases} \quad (1.5.31)$$

Como se puede ver, se van a obtener 6 constantes de integración (teniendo en cuenta que los vectores de posición y velocidad tienen tres elementos escalares), 3 para las posiciones y 3 para las velocidades, por lo que se van a necesitar 6 condiciones iniciales para poder resolver este sistema de ecuaciones, que van a ser la posición y velocidad inicial del satélite $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$.

De esta manera, resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de manera numérica, se obtiene la posición y velocidad del satélite respecto al planeta a través del tiempo teniendo en cuenta todas las perturbaciones.

1.5.4. Cálculo del tiempo de eclipse

1.5.4.1. Definición de la órbita

Para calcular el tiempo de eclipse de una órbita primero se deben obtener las características de esa órbita. En este caso, como se ha mencionado en el Apartado 1.3, se va a calcular el tiempo de eclipse de una gran cantidad de órbitas, por lo que se deben obtener los elementos orbitales de todas las órbitas que cumplen las condiciones deseadas. Se parte de la base que, debido a las consideraciones tomadas, ya se conocen de antemano algunos elementos orbitales:

- Al ser órbitas circulares, se tiene que $e = 0$, y por lo tanto $a = R_P + h$. Por lo que el parámetro orbital a tener en cuenta deja de ser el semieje mayor a para pasar a ser la altura de la órbita h .
- El argumento de periapsis (ω) podría obtener cualquier valor, dado que la órbita es circular y por lo tanto no tiene apoapsis ni periapsis, por lo que la orientación de estos podría estar en cualquier dirección sin que la órbita sufriera ningún cambio. Así pues, por simplicidad se impone que $\omega = 0$.
- La anomalía verdadera (v) sirve para colocar el satélite en un punto de una órbita ya definida, por lo que se va a imponer que el punto de estudio es cuando $v = 0$, es decir, el satélite se encuentra en el nodo ascendente.

Primeramente, se va a definir la condición de sincronía solar. Como se ha explicado, las SSO se obtienen cuando la precesión nodal de la órbita debida al achatamiento se coordina con el movimiento de translación del cuerpo alrededor del Sol. Para calcular la precesión nodal, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_P^2}{(1 - e^2)^2 a^2} \cdot \cos i \quad (1.5.32)$$

Sabiendo que esta precesión tiene que ser igual al movimiento de translación:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_P^2}{(1 - e^2)^2 a^2} \cdot \cos i = \frac{2\pi}{year} \quad (1.5.33)$$

Donde *year* es el tiempo en segundos que tarda el planeta en dar una vuelta al Sol (365.26 días · 24 h · 3600 s = para la Tierra, 686.97 días · 24 h · 3600 s para Marte). Por conveniencia, se va a introducir $f = \frac{2\pi}{year}$;

Teniendo en cuenta las hipótesis tomadas, $e = 0$, por lo que $a = R_P + h$. Así pues, la Ecuación 1.5.33 queda de la siguiente manera:

$$-\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_P^2}{(R_P + h)^2} \cdot \cos i = f \rightarrow \cos i = -2 \frac{f}{J_2} \sqrt{\frac{R_P + h}{\mu}} \frac{(R_P + h)^3}{R_P^2} \quad (1.5.34)$$

Es decir, que existe una relación entre la inclinación i y la altura de la órbita h para que la órbita sea heliosíncrona.

Así pues, solo falta definir la RAAN. Como sabemos, la RAAN va a ser constante respecto a la posición del Sol, por lo que va a ser útil expresar la RAAN en términos relativos a este.

Se introduce el concepto de ángulo solar. El ángulo solar (AS) es el ángulo que forman la línea que une el centro del planeta con el nodo ascendente de la órbita, y la línea que une el centro del planeta con el centro del Sol.

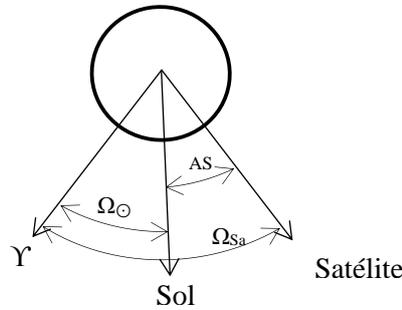


Figura 17: Representación del ángulo solar.

Como se puede ver, el ángulo solar se va a mantener constante, mientras que las RAAN tanto del Sol como del satélite van a variar a medida que el cuerpo orbite alrededor del Sol. Así pues, se define la RAAN del satélite como la relación entre la RAAN del Sol y el ángulo solar.

$$\Omega_{sat} = \Omega_{\odot} + AS \quad (1.5.35)$$

Sin embargo, se puede considerar que, en el momento de estudio, el planeta se encuentra alineado con el Punto Aries, es decir, nos encontramos en el equinoccio de primavera. De esta manera obtenemos que $\Omega_{sat} = AS$ en el momento de estudio.

De esta manera, obtenemos que, para calcular el tiempo de eclipse de una órbita, se deben especificar tan solo dos parámetros, el ángulo solar y la altura de la órbita o la inclinación (ya que definir uno es definir el otro). En este caso, como se ha explicado previamente, se va a especificar la altura.

1.5.4.2. Cálculo del tiempo de eclipse

Una vez obtenida la órbita, se puede calcular el tiempo que un satélite en dicha órbita va a estar en eclipse. En concreto, es más útil obtener el porcentaje de tiempo de la órbita que está en eclipse.

Para ello, se va a partir de una órbita arbitraria circular sobre el plano XY, es decir, se va a partir de la ecuación paramétrica de la circunferencia con radio $R_p + h$.

$$(x, y, z) = (R_p + h) \cdot \{\cos(u), \sin(u), 0\} \quad (1.5.36)$$

Donde $u \in [0, 2\pi]$ es la longitud verdadera del satélite $u = \omega + v$ (Ver Figura 8). El siguiente paso es orientar el círculo, es decir, rotarlo sobre sus ejes de manera que coincida con las especificaciones de diseño. Para ello, se va a utilizar la fórmula de rotación de Rodrigues. [25]

$$f_{rot}(\mathbf{e}, \mathbf{k}, \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \mathbf{e} + \sin(\alpha) (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) + (1 - \cos(\alpha))(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{k} \quad (1.5.37)$$

Esta función rota el vector e alrededor del eje k una cantidad de α radianes. Con esta función, podemos rotar la circunferencia de la órbita arbitraria a conveniencia. Pretendemos rotar la circunferencia de dos maneras. Primero rotaremos la circunferencia en el eje z un total de AS radianes para orientar la RAAN de la órbita como se ha explicado anteriormente. Seguidamente se rotará sobre el eje x una cantidad de i radianes para obtener la órbita deseada. A continuación, se representa un diagrama que muestra un ejemplo de rotación de $AS = 45^\circ$ y $i = 40^\circ$:

1. Se parte de una circunferencia arbitraria en el plano XY con la Ecuación paramétrica 1.5.36.
2. Se rota AS rad sobre el eje z para orientar la RAAN de la órbita.
3. Se rota i rad sobre el eje x' . El eje x' es el eje x rotado AS rad sobre el eje z , para someter los ejes a las mismas transformaciones que se le han hecho a la órbita.

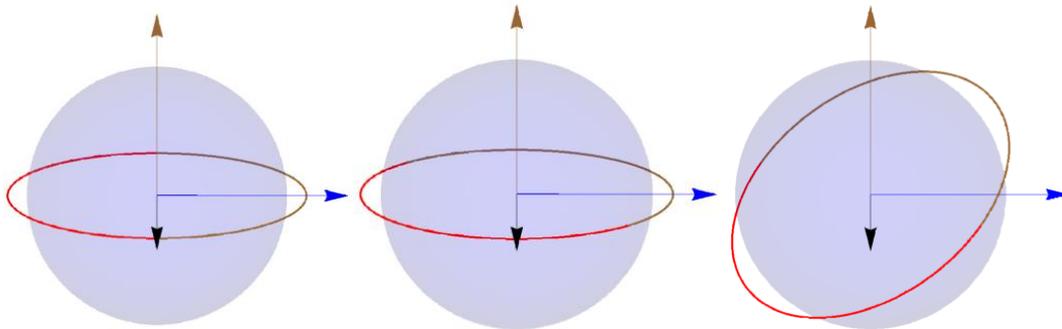


Figura 18: Progresión de rotación de una órbita arbitraria.

Así pues, la ecuación de la órbita circular se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & f_{rot}(f_{rot}[(R_p + h) \cdot \{\cos(u), \sin(u), 0\}, \{0,0,1\}, AS], f_{rot}[\{1,0,0\}, \{0,0,1\}, AS], i) = \\
 & = (R_p + h) \begin{cases} \cos(AS) \cos(u) - \cos(i) \sin(AS) \sin(u) \\ \cos(u) \sin(AS) + \cos(AS) \cos(i) \sin(u) \\ \sin(i) \sin(u) \end{cases} \quad (1.5.38)
 \end{aligned}$$

Para calcular el tiempo de eclipse, se asume que el Sol se encuentra en dirección del eje x y se calculan los puntos en los que la órbita calculada pasa por el horizonte del planeta. Es decir, se calculan los puntos en los que el satélite entra en la zona de eclipse, sale de la zona de eclipse, cruza el horizonte quedando delante del planeta, y sale de este. Así pues, para calcular el tiempo de eclipse, se deberá calcular la diferencia entre el tiempo del punto de entrada en eclipse y el tiempo del punto de salida.

Así pues, para obtener los 4 tiempos en los que la órbita cruza el horizonte desde la perspectiva del eje x , se debe resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 & (R_p + h) \sqrt{c_y^2 + c_z^2} = R_p \rightarrow \\
 & \sin^2(i) \sin^2(u) + (\cos(u) \sin(AS) + \cos(AS) \cos(i) \sin(u))^2 = \left(\frac{R_p}{R_p + h} \right)^2 \quad (1.5.39)
 \end{aligned}$$

Donde c_y y c_z son el segundo y tercer elementos de la Ecuación 1.5.38. De esta manera, se obtienen los 4 puntos mencionados anteriormente, u_1 , u_2 , u_3 y u_4 . Estos puntos se deberán ordenar de menor a mayor de manera que u_1 sea el menor, que representará en punto en el que el satélite deja de estar delante del planeta. Siendo entonces u_2 el inicio del eclipse y u_3 el final del eclipse ($zona\ de\ eclipse = u_3 - u_2$) y u_4 el punto en el que empieza a estar delante del planeta.

Para calcular el tiempo que equivalen estos puntos, se necesita saber el periodo orbital del satélite y estimar el tiempo proporcional que el satélite permanece eclipsado:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_p + h)^3}{\mu}} \quad (1.5.40)$$

$$t_{eclipse} = \frac{u_3 - u_2}{\frac{2\pi}{T}} \quad (1.5.41)$$

$$t_{\%} = \frac{t_{eclipse}}{T} \quad (1.5.42)$$

Este tiempo de eclipse, como se ha explicado, es uno de los requisitos que va a poder introducir el cliente en el programa final para obtener las características de su órbita.

1.6. Implementación en Matlab

1.6.1. Propagador de órbitas

1.6.1.1. Desarrollo del propagador

En este apartado se va a explicar como se ha desarrollado el programa propagador de órbitas en el entorno Matlab, y se va a estudiar su funcionamiento comparando con datos reales. Los datos que se van a utilizar para comprobar el funcionamiento del propagador son datos extraídos de la aplicación web Horizons System de NASA y corresponden al satélite LAEGOS-1. Se ha elegido este satélite debido a que tiene una órbita muy constante y sencilla en el tiempo.

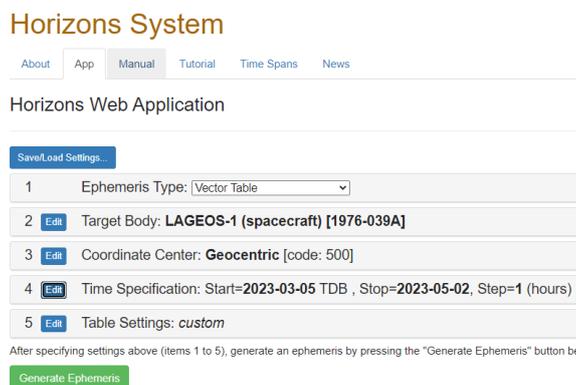


Figura 19: Ejemplo de obtención de datos de LAGEOS-1 en Horizons System.[26]

Primeramente, se deben introducir los datos iniciales, es decir, el punto de partida del satélite, así como la velocidad que lleva en ese punto. Estos datos se van a utilizar como condiciones iniciales para resolver la ecuación diferencial, pero intuitivamente sirven para decirle al programa donde está el satélite en el instante inicial para que calcule los siguientes instantes. Además, se debe introducir el momento exacto al que corresponden esos datos iniciales, para así poder luego saber qué datos de la posición de los demás astros que se consideren como el Sol se deben introducir.

En la Figura 19 se muestra el código de Matlab para la introducción de datos iniciales, completados con los datos de la posición y velocidad del satélite LAGEOS-1 el 5 de Marzo de 2023 a las 00:00 h.

```
% Posicion, tiempo y velocidad inicial
X=3.289994721379378E+03;
Y=2.592219626274290E+03;
Z=1.154642212470967E+04;
VX=3.500058675459043E+00;
VY=-4.489507107861080E+00;
VZ=-1.508001340622525E-02;

d = 5;
m = 3;
ye = 2023;
h = 0;
```

Figura 20: Introducción de los datos iniciales del propagador.

Seguidamente, se deben introducir en el programa los datos de la posición de los astros externos que perturban la órbita, el Sol y la Luna para órbitas terrestres (como la del LAGEOS-1) y el Sol y Júpiter para órbitas marcianas.

Para ello, se van a descargar los datos de la aplicación web de Horizons System. Los datos que se descargan de esta web contienen gran cantidad de información, sin embargo, solo interesan las posiciones de los astros en cada instante de tiempo. De este modo, se necesita un programa que sea capaz de separar los datos no necesarios de los necesarios y almacenarlos en una variable para poder trabajar con ellos. Para ello, se va a crear la función *read_file.m*. Esta función almacena en la variable de salida el instante de cada línea de datos, y los datos de posición y velocidad de esta.

Una vez obtenidos todos los datos descargados, hay que ordenar la matriz de datos resultante de manera que el primer dato que haya sea el del día y hora especificado por el usuario, de este modo se sincroniza el cálculo con la posición de los astros.

```
% Moon perturbation
moon_file = 'datos/moon.txt';
% Leer el archivo de luna
moon_raw = read_file(moon_file);

% Sincronizar moon
tf = ismember(moon_raw(:,1:4),[d m ye h], 'rows');
fila_ini = find(tf);
moon = moon_raw(fila_ini:end,7:9);

% Sun perturbation
sun_file = 'datos/sun.txt';
% Leer el archivo de sol
sun_raw = read_file(sun_file);

% Sincronizar sun
tf_s = ismember(sun_raw(:,1:4),[d m ye h], 'rows');
fila_ini_s = find(tf_s);
sun = sun_raw(fila_ini_s:end,7:9);
```

Figura 21: Lectura de datos del Sol y la Luna y sincronización de las matrices de datos resultantes.

Finalmente, se especifica durante cuánto tiempo se pretende propagar la órbita en la variable *días* y se resuelve la ecuación diferencial explicada anteriormente con la función *ode45.m*. La función diferencial se debe definir en una función externa llamada *odefuction.m*, donde simplemente se introducen las Ecuaciones 1.5.31.

```
tiempo=[0:60:4320*3600];
x0=[r0 v0];
options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);

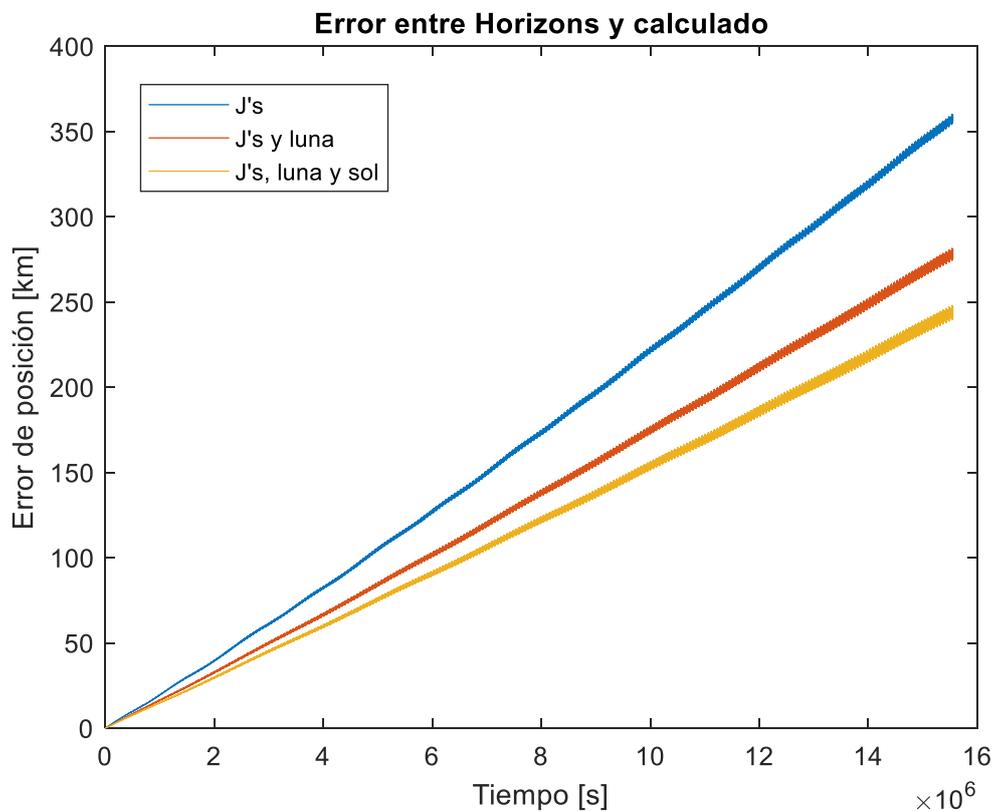
[t,x] = ode45(@(t,r) odefunction(t,r,moon,moon_switch,...
    sun,sun_switch,solar_switch), tiempo, x0,options);
```

Figura 22: Resolución de la ecuación diferencial definida en *odefuction.m*.

1.6.1.2. Verificación del funcionamiento

Una vez desarrollado el propagador, se debe comprobar el funcionamiento del mismo, ya que durante este proyecto se han introducido muchas consideraciones y hay que comprobar el error que estas hipótesis han supuesto.

Para ello, se descargan de Horizons System los datos del satélite LAGEOS-1 para ser comparados con los datos que calcula el programa. De esta manera, se propaga el satélite durante seis meses con las condiciones iniciales descargadas, y se calcula la diferencia entre lo calculado y los datos descargados en cada instante de tiempo, obteniendo la siguiente distribución de error.



Gráfica 1: Distribución de error de posición en el tiempo.

Como se puede ver en la gráfica, se han comparado los datos en tres modos del propagador, es decir, considerando cada vez más perturbaciones en la órbita. Primeramente, se ha lanzado el programa simplemente considerando la perturbación por achatamiento, luego añadiendo la perturbación gravitatoria de la luna y luego la del sol. Se puede ver como añadiendo perturbaciones se va mejorando el error de posición, por lo que la premisa tomada anteriormente de que cuantos más fenómenos de perturbación se consideran más se precisa en el resultado es correcta.

Otro aspecto que se puede ver es que el error de posición va aumentando con el tiempo. Esto es lógico ya que las pequeñas discrepancias entre la ecuación considerada y la que rige realmente el comportamiento del satélite teniendo en cuenta todos los fenómenos y cuerpos posibles introduce un pequeño error en cada paso de tiempo, que se va acumulando y provocan un error creciente en la posición. Así pues, se debe tener en cuenta que para tiempo de propagación muy elevados el programa va a empezar a perder precisión.

Así pues, se puede ver que, una vez consideradas todas las perturbaciones, el error de posición es de unos 240 km pasados unos seis meses. Debido a que estamos considerando una órbita de unos 12200 km de radio, supone un error del 1.97%. Por lo tanto, se puede considerar que, pasados seis meses, el programa funciona con buena precisión, estando por debajo del 2% de error de posición.

1.6.2. Cálculo de eclipse

Para calcular el tiempo de eclipse de una órbita no es necesario crear un programa específico para ello, con una calculadora siguiendo las instrucciones del Apartado 1.5.4 es suficiente. Sin embargo, como se ha explicado, no se pretende calcular el tiempo de eclipse de una órbita concreta, se pretende calcularlo de muchas órbitas posibles para poder luego elegir entre ellas la condición especificada por el cliente. Es por esto que desarrollar un programa que de manera automática calcule una gran cantidad de órbitas es de mucha utilidad.

Para empezar, se deben introducir los datos del planeta sobre el que se van a calcular las órbitas, en concreto el J_2 , el parámetro gravitacional μ , el radio del planeta y el tiempo en días que tarda en dar una vuelta al Sol.

```
%Marte  
mu = 42828.37; %km^3/s^2  
RT = 3397; %km  
J2 = 0.00195545367944545;  
any = 686.97; %días
```

Figura 23: Introducción de los datos de Marte necesarios.

Para los siguientes pasos se va a trabajar en simbólico. Matlab ofrece la librería Symbolic Math Toolbox, que es una librería que permite trabajar con variables simbólicas como otros softwares de cálculo matemático. De esta manera, podemos expresar la Ecuación 1.5.39 de forma que se puedan ir cambiando los datos de AS e i . y resolver la ecuación con la función *solve.m*.

%% Ecuaciones

syms h AS u

cos_i(h) = -2*pi/any/86400*(RT+h)^(7/2)*2/3/sqrt(mu)/J2/RT^2;

```
u(AS,h) = solve((1-cos_i^2)*sin(u)^2+(cos(u)*sin(AS)+...
cos(AS)*cos_i*sin(u))^2==(RT/(RT+h))^2);
```

Figura 24: Expresión de la condición de sincronía (Ecuación 1.5.34) y resolución de la Ecuación 1.5.39 en simbólico.

De esta manera, podemos crear un bucle que vaya dando valores a AS y a i de manera que se vayan resolviendo y dando los valores de todas las u_i . Cabe destacar que las órbitas que se van a calcular van desde los 200km hasta los 2000km, valores de altura más que suficientes para las típicas misiones de satélites en órbitas heliosíncronas. Los valores de AS van desde 0° a los 90° , dado que después de ese ángulo las órbitas son equivalentes, siendo $t_{\%}(AS = 90^\circ + x) = t_{\%}(AS = 90^\circ - x)$ para $0 < x < 90$, y $t_{\%}(AS = 180^\circ + x) = t_{\%}(AS = x)$ para $0 < x < 180$. Además, se debe ajustar el paso, en este caso, se calculará una órbita cada 0.3° de AS y cada 6 km de altura:

```
for j = 0:0.03:9
sub.AS = (j*10)/180*pi;
for k = 1:0.03:10
sub.h = k*200;

u_vec_raw = double(subs(u,sub));
```

Figura 25: Bucle para el cálculo de las u_i de todas las órbitas.

Seguidamente, para evitar valores negativos de u , se deben incluir la condición de que todos los puntos se encuentren en la primera vuelta de la órbita. De modo que en caso de que algún valor de u sea negativo, se le añadirá 2π rad para que pase a ser positivo.

```
for i = 1:length(u_vec_raw)
if real(u_vec_raw(i))<0
u_vec_raw(i) = u_vec_raw(i)+2*pi;
end
end
```

Figura 26: Positivización de posibles valores negativos de u .

El siguiente paso es ordenar de menor a mayor los valores de u . Sin embargo, esto presenta también problemas al hacerlo de manera automática. Dependiendo de la órbita, hay veces que u_4 presenta valores entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Esto implica que, a la hora de ordenar, u_4 aparecerá en primera posición cuando debería estar en la última. Esto va a provocar que se calcule el tiempo de eclipse como $u_2 - u_1$. Para evitar este error, hay que poner una condición de que u_4 no se encuentre en el primer cuadrante. Para ello, se va a imponer que los dos primeros valores de u calculados por el programa no estén ambos en el primer cuadrante (entre 0 y 2π). En caso contrario, el primero de ellos va a ser u_4 y el segundo u_1 .

```
u_vec = sort(u_vec_raw);
if real(u_vec(1))>0 && real(u_vec(1))<pi/2 && real(u_vec(2))>0 && real(u_vec(2))<pi/2
u_vec = [u_vec(2),u_vec(3),u_vec(4),u_vec(1)];
end
```

Figura 27: Condición para la correcta ordenación de los u_i

Finalmente, cuando la órbita no cruza en ningún punto, es decir, no existe tiempo de eclipse, la Ecuación 1.5.39 no ofrece soluciones reales, sino imaginarias. Cuando esto sucede, el cálculo del tiempo de eclipse falla dado que se trabaja con números imaginarios, los cuales no tienen sentido en estos cálculos. Así pues, se debe asegurar que cuando la solución incluye números imaginarios, es decir que nos encontramos en una órbita sin tiempo de eclipse, éste no se calcule, sino que se imponga $t_{\%} = 0$. En caso contrario, se calculará $t_{\%}$ de manera normal como indica la Ecuación 1.5.42.

```

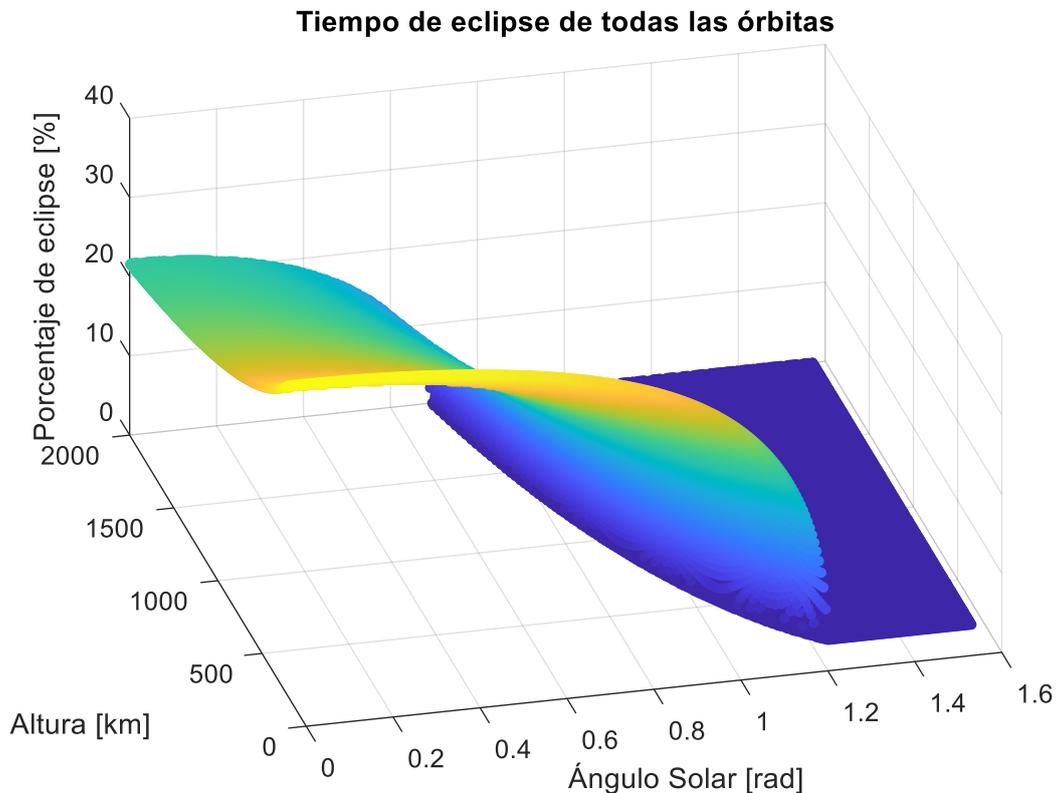
if abs(imag(u_vec(1)))>10^-15
    te_prop=0;
else

    T = 2*pi*sqrt((RT+sub.h)^3/(mu));
    n = 2*pi/T;
    t_eclipse = (u_vec(3)-u_vec(2))/n;
    te_prop = t_eclipse/T*100;
end

```

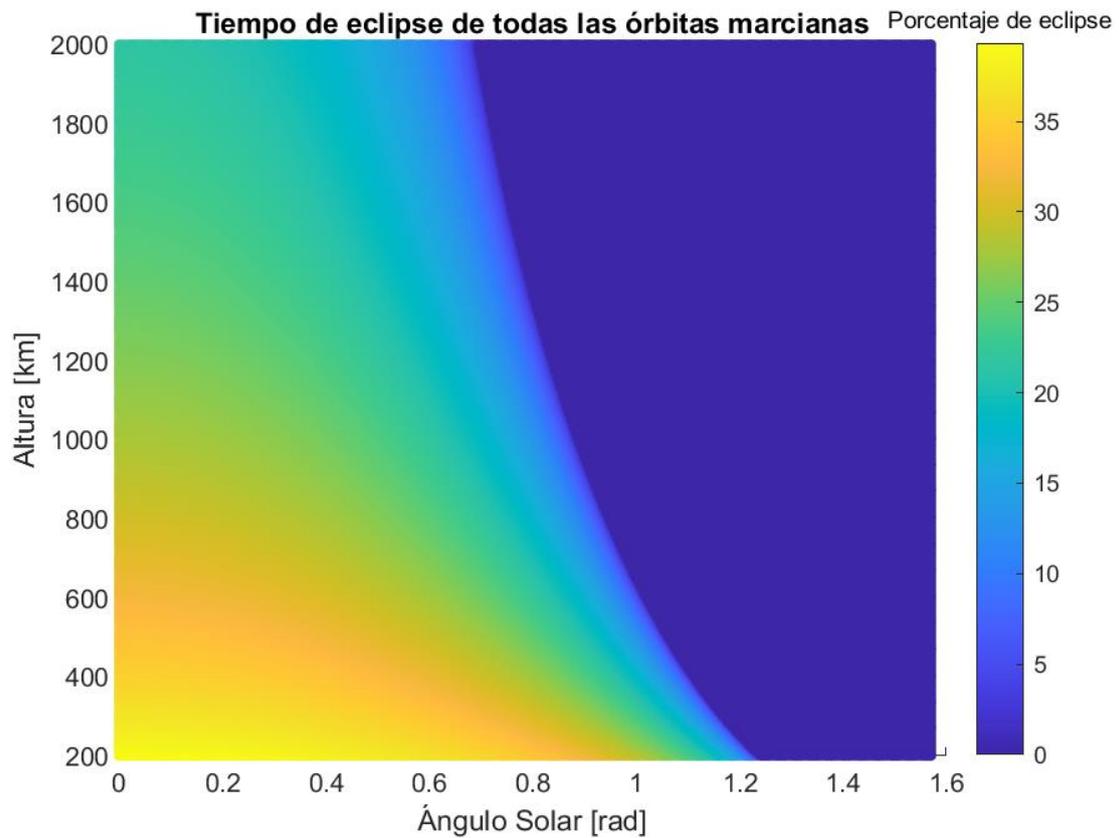
Figura 28: Cálculo del tiempo de eclipse.

De esta manera se obtiene el tiempo de eclipse para una gran cantidad de órbitas. Para visualizar los cálculos realizados, se puede graficar $t_{\%}$ en función de AS y la altura h :



Gráfica 2: Porcentaje de eclipse de todas las órbitas marcianas 3D.

Una mejor visualización se ofrece con la siguiente gráfica:



Gráfica 3: Porcentaje de eclipse de todas las órbitas marcianas 2D.

Se puede ver como para ángulos solares cercanos a los 90° , no existe tiempo de eclipse (Figura 29a). Además, como es de esperar, según se aumenta la altura de la órbita el tiempo de eclipse se reduce dado que la órbita está más alejada del planeta y por tanto pasa menos tiempo por su sombra. Seguidamente se introducen dos órbitas arbitrarias ejemplo de tiempo de eclipse nulo y de tiempo de eclipse medio, respectivamente:

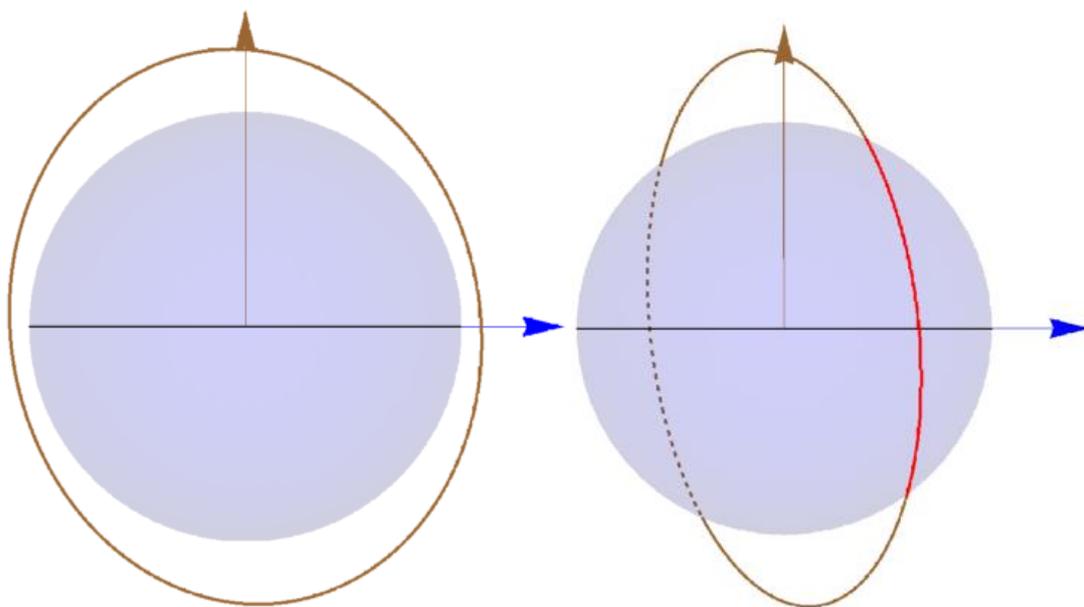
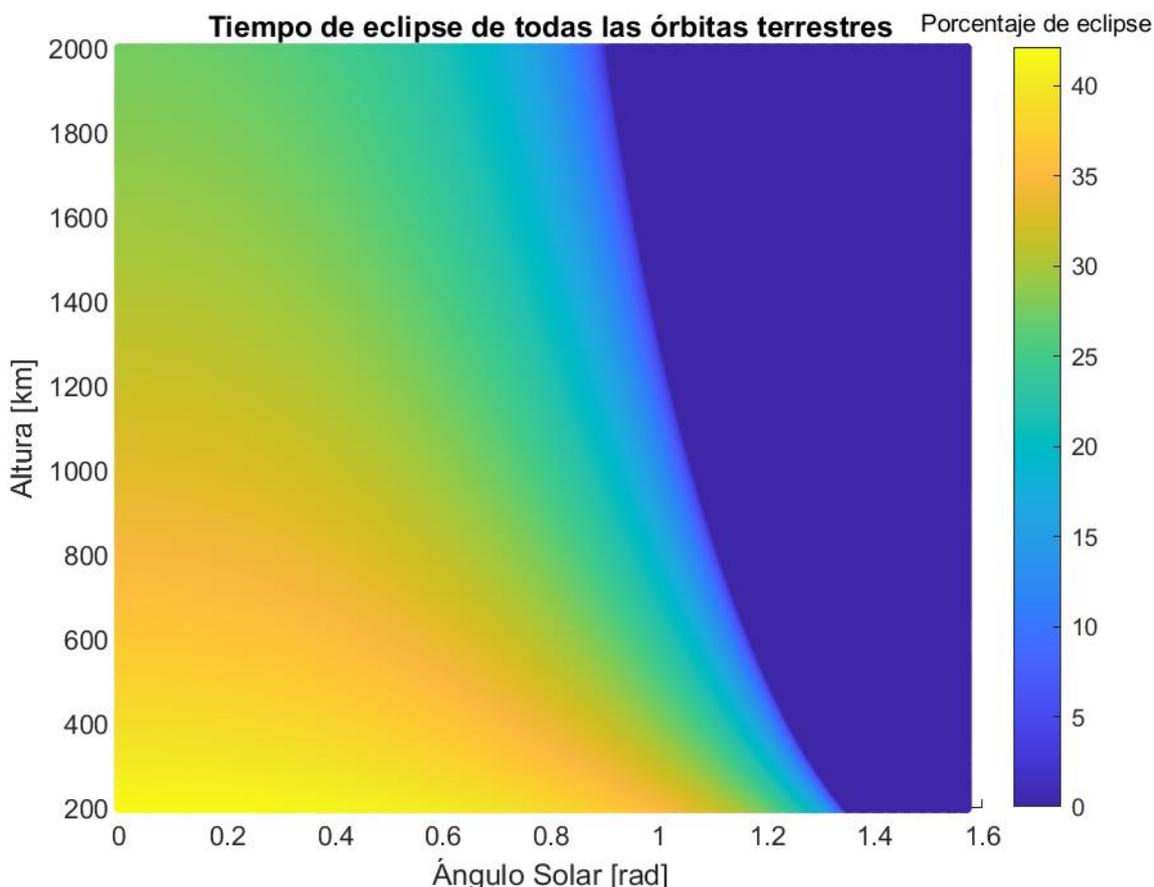


Figura 29: Órbitas ejemplo.

Es útil comparar la gráfica obtenida (que corresponde a órbitas marcianas), con la gráfica que se obtiene una vez introducidos los datos terrestres.



Gráfica 4: Porcentaje de eclipse de todas las órbitas terrestres 2D.

Como era de esperar, hay un tiempo de eclipse medio mayor y una menor cantidad de órbitas de tiempo de eclipse nulo. Esto es debido al mayor tamaño de la Tierra frente a Marte. Con la misma altura de las órbitas, el mayor radio de la Tierra provoca que una órbita a una altura baja tenga mayor tiempo de eclipse que en un planeta más pequeño donde dicha altura, en relación, no es tan baja. Lo mismo sucede con el ángulo solar, se necesita más margen para las órbitas terrestres.

Con esto se tienen todas las herramientas necesarias para seleccionar la órbita que más se acerque a las especificaciones de altura y tiempo de eclipse que indique el cliente. Simplemente se debe seleccionar de la tabla de datos ya calculada, la órbita que más se acerque a las especificaciones introducidas. Para ello, se debe introducir un margen de error, ya que puede que las especificaciones concretas introducidas no sean posibles, por lo que es útil que el cliente indique un margen de error en el que los parámetros de la órbita deseada pueden moverse para así poder seleccionar la órbita que más se acerque a sus especificaciones, si no existe una perfectamente idéntica. Dicho margen de error dependerá de la flexibilidad que ofrezca la misión del cliente, pero en caso de que sea demasiado estrecho, puede que no haya órbitas posibles que casen con esos requisitos.

1.7. Prueba de funcionamiento

1.7.1. Selección de datos reales

Para probar el funcionamiento del programa desarrollado, se van a escoger datos reales de actuales satélites en funcionamiento. Dichos datos se van a utilizar para tratar de replicar en Marte la órbita que siguen en la Tierra. De este modo, se simulan los requisitos de una misión ficticia específica en Marte con otra misión real en otro planeta.

El primer paso entonces es obtener los datos de los satélites. En concreto, se van a utilizar tres satélites, para comprobar el funcionamiento del programa con 3 datos diferentes para así poder comparar los errores cometidos en cada uno de ellos, para verificar la robustez del programa. Así pues, se pueden descargar datos técnicos de satélites en bases de datos recopilatorias como la Satellite Database de Union of Concerned Scientists [31], que ofrece una lista de todos los satélites orbitando actualmente la Tierra con información técnica sobre el satélite y su órbita.

Existen una gran cantidad de satélites orbitando actualmente la Tierra, por lo que es conveniente seleccionar los satélites que tengan características, tanto técnicas como orbitales, parecidas a las que se estudian en este proyecto con todas sus hipótesis. De esta manera, se van a seleccionar satélites obviamente con órbitas heliosíncronas. Además, es conveniente seleccionar satélites con órbitas de baja excentricidad, es decir, cercanamente circulares. Finalmente, se van a buscar misiones de satélites donde la altura de la órbita sea importante para la misión. Esto son misiones relativas a la observación terrestre, donde la resolución de la cámara es clave para dictaminar la distancia óptima, o diferentes misiones, pero también con instrumentación de a bordo con condiciones de calidad de resolución importantes como algunos satélites de medición de características atmosféricas entre otros. Como ejemplo, los satélites de comunicaciones tienen un requerimiento de altura menos estricto, por lo que no se van a preferir.

Así pues, los tres satélites seleccionados son:

- CALIPSO (Cloud-Aerosol Lidar and Infrared Pathfinder Satellite Observations). Se trata de un satélite desarrollado por NASA y CNES dedicado a la observación de alta resolución de los aerosoles de la atmósfera superior. Utiliza un telescopio de 1 metro de diámetro con tecnología LIDAR (que permite determinar la distancia del objeto que se está observando) y un radiómetro infrarrojo. [27]
- AlSat 2A: Es un satélite desarrollado por la Agencia Espacial Argelina dedicado a la cartografía terrestre, gestión de la agricultura y control de cultivos, así como gestión de desastres naturales. Está equipado con el NAOMI (New AstroSat Optical Modular Instrument), una cámara de alta resolución con una resolución de hasta 2.5 m a la altura de la órbita. [28] [29]
- Amazonia-1. Se trata de un satélite desarrollado por el INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais), Brasil, dedicado a la observación terrestre, la lucha contra la deforestación ilegal y la vigilancia del mar, entre otras. Cuenta con una cámara de resolución de 60 m a 850 km. [30]

En la siguiente tabla se resumen las características orbitales necesarias de los tres satélites.

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
Excentricidad e	$7.07 \cdot 10^{-5}$	$1.42 \cdot 10^{-4}$	$2.10 \cdot 10^{-4}$
Altura orbital media [km]	702	673	762
Período orbital T [min]	98.8	98.2	98.5

Tabla 1: Datos orbitales de los satélites ejemplo.

Sin embargo, no se ha encontrado ninguna información sobre el diseño eléctrico de los satélites, ni datos sobre la necesidad de refresco del sistema de alimentación del mismo. Por lo tanto, se va a asumir que el tiempo de eclipse de las órbitas que siguen estos satélites son los óptimos para su sistema de alimentación. Sin embargo, tampoco se ha encontrado este dato en las hojas técnicas de los satélites que se han podido encontrar.

De este modo, se va a tener que calcular el tiempo de eclipse de estos manualmente. Para ello, se podría proceder del mismo modo explicado en el Apartado 1.5.4, sin embargo, los datos que se requieren para seguir ese procedimiento son muy difíciles de encontrar ya que son muy técnicos y concretos.

Así pues, se va a desarrollar un programa sencillo que, basándose en la posición del satélite a lo largo de una órbita obtenida de Horizons System, calcule si éste se encuentra iluminado o no. Para ello, se ha desarrollado la función lógica *sombra.m*, que, partiendo de la matriz de datos proporcionada por la función anteriormente explicada *read_file.m*, calcula en cada instante de tiempo durante todo el recorrido de un período orbital si el satélite está iluminado (logic output = 1) o no (logic output = 0).

El principio de funcionamiento de *sombra.m* es pura geometría. Por una parte, si el ángulo formado por las líneas que conectan el centro del Sol con el centro del planeta, y el centro del Sol con el borde de este, es mayor que el ángulo formado por la misma línea Sol-planeta y la línea que conecta el centro del Sol con el satélite, significa que el satélite está delante o detrás de la Tierra:

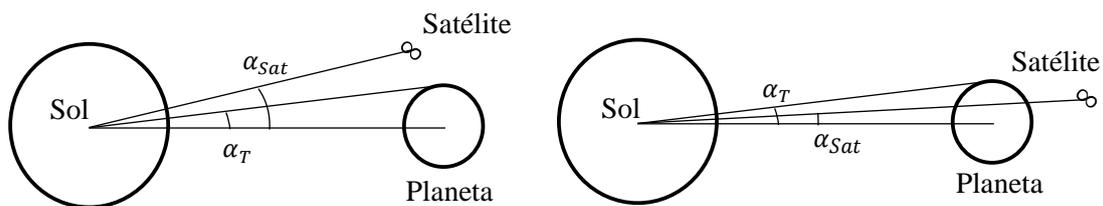


Figura 30: Demostración de las relaciones de ángulos para la función *sombra.m* 1.

Por otro lado, hay que diferenciar de cuando el satélite está delante del planeta o detrás, para ello, el eclipse se da cuando el ángulo formado entre la línea Sol-planeta y la línea que une el satélite con el planeta es mayor de 90° y menor de 270° :

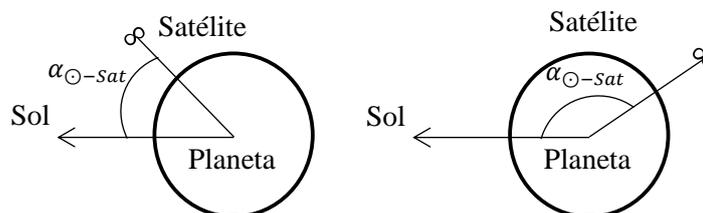


Figura 31: Demostración de relaciones de ángulos para la función *sombra.m* 2.

Para calcular el ángulo Sol-satélite se hace uso del producto escalar, siendo \mathbf{r}_{\odot} el vector Sol-planeta y \mathbf{r}_{sat} el vector satélite-planeta:

$$\mathbf{r}_{\odot-sat} = \mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}_{sat} \quad (1.7.1)$$

$$\alpha_{sat} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{r}_{\odot-sat} \cdot \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot-sat}\| \cdot \|\mathbf{r}_{\odot}\|} \right) \quad (1.7.2)$$

Para calcular el ángulo entre el Sol y el borde del planeta, se aproxima el planeta como una esfera perfecta de radio el radio ecuatorial, y se calcula mediante la tangente:

$$\alpha_T = \tan^{-1} \left(\frac{R_P}{\|\mathbf{r}_{\odot}\|} \right) \quad (1.7.3)$$

Finalmente, para calcular el ángulo que forman el satélite y el Sol respecto a la Tierra se procede como en la Ecuación 1.7.2:

$$\alpha_{\odot-sat} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{r}_{sat} \cdot \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{sat}\| \cdot \|\mathbf{r}_{\odot}\|} \right) \quad (1.7.4)$$

Con todos los datos calculados, la función *sombra.m* actúa como un condicional con la siguiente estructura:

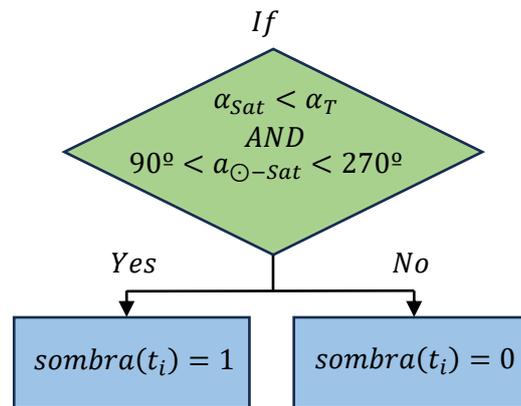


Figura 32: Esquema de la condición de *sombra.m*.

De esta manera, conociendo la posición del Sol y la posición del satélite, se puede calcular en cada instante de tiempo t_i , con un paso entre instantes de tiempo dt , si el satélite se encuentra en eclipse ($sombra(t_i) = 1$) o no ($sombra(t_i) = 0$), y luego, conociendo el período orbital expuesto en la Tabla 1:

$$t_{\%} = \frac{\sum sombra(t_i) \cdot dt}{T} \quad (1.7.5)$$

De esta manera, se calculan los $t_{\%}$ de todos los satélites considerados y se recogen en la siguiente tabla:

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
Porcentaje de tiempo de eclipse $t_{\%}$ [%]	27.30	22.40	34.07

Tabla 2: Tiempo de eclipse de los satélites ejemplo.

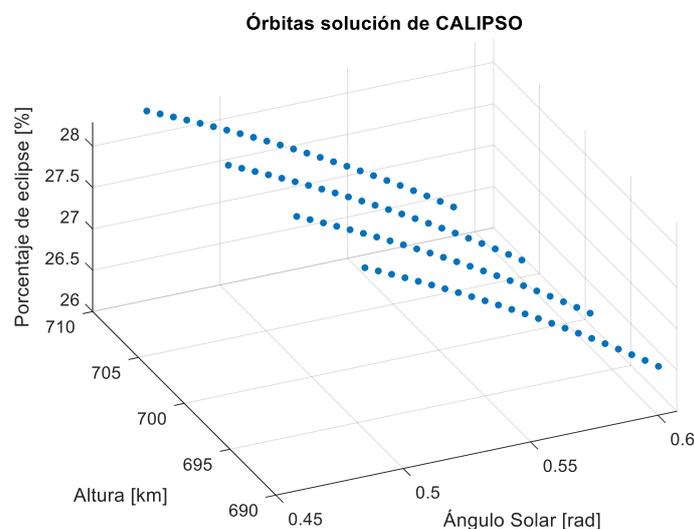
1.7.2. Obtención de órbitas

Una vez obtenidos todos los datos, se puede proceder con la obtención de las órbitas en Marte. Para ello, debemos partir de la matriz de datos generada en el Apartado 1.6.2 y seleccionar las órbitas que, con un margen de error, tengan las mismas características de altura de órbita y porcentaje de tiempo de eclipse similares a las que mantiene en la Tierra, para así simular los requisitos que podría poner una empresa para definir su órbita en Marte.

Para ello, al disponer de una amplia colección de datos, es útil desarrollar un pequeño programa que seleccione en la matriz de datos las órbitas que casan con dichos requisitos. Así pues, este programa va a pedir al usuario que se introduzcan los requisitos de altura de órbita (h_u) y porcentaje de tiempo de elipse ($t_{\%u}$), así como sus márgenes de error (e_h y $e_{t_{\%}}$ respectivamente). En el caso de este apartado, los datos principales se encuentran en las Tablas 1 y 2, y los márgenes de error se van a imponer $e_h = 10 \text{ km}$ y $e_{t_{\%}} = 1\%$, excepto para el Amazonia-1, que no existen órbitas con estos márgenes de error y se considera $e_{t_{\%}} = 5\%$.

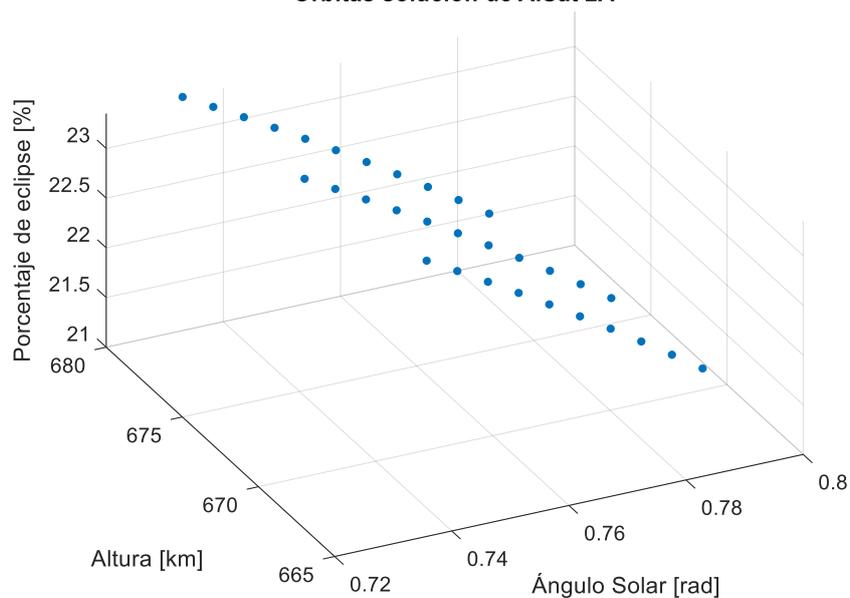
Posteriormente va a recorrer toda la matriz de datos calculada en el Apartado 1.6.2 recopilando todas las órbitas que cumplan que la altura $h = h_u \pm e_h$ y el porcentaje de tiempo de eclipse $t_{\%} = t_{\%u} \pm e_{t_{\%}}$, para que luego el usuario manualmente pueda escoger la más conveniente para su misión. Cabe destacar que no se ofrece una solución única debido a que existe la posibilidad de que la órbita con menos error de altura tenga un elevado error de porcentaje de tiempo de eclipse (aunque dentro del margen de error introducido por el usuario) o viceversa. De este modo, el usuario puede elegir si desea minimizar un error más que otro, o elegir un punto medio. En el caso de ejemplo, se va a optar por elegir la órbita con la altura más cercana a la del usuario como prioridad, y de entre todas las órbitas con esa altura la que tenga el porcentaje de tiempo de eclipse más parecido.

Tras correr el programa con los datos de los satélites, se obtienen todas estas órbitas posibles para cada satélite:



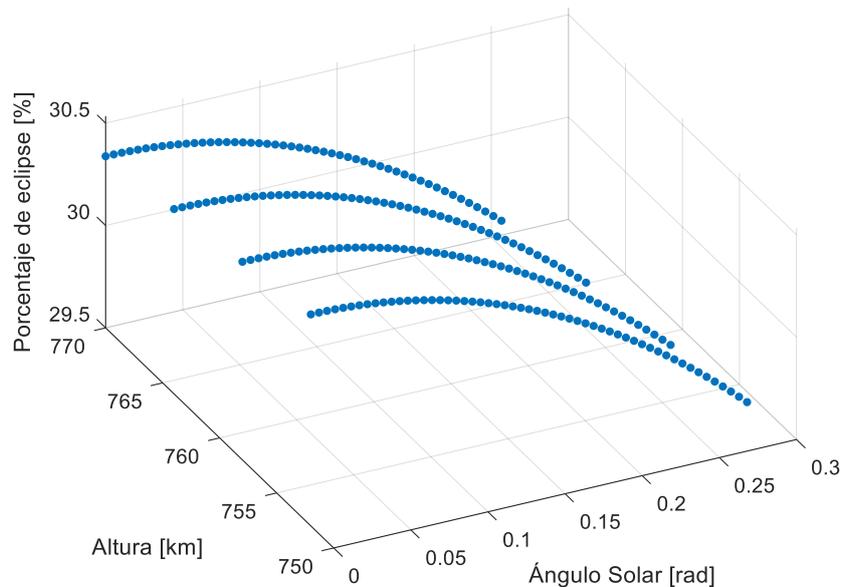
Gráfica 5: Órbitas solución del satélite CALIPSO.

Órbitas solución de AISat 2A



Gráfica 6: Órbitas solución del satélite AISat 2A.

Órbitas solución de Amazonia-1



Gráfica 7: Órbitas solución del satélite Amazonia-1.

Así pues, en la Tabla 3, se recogen las características de las órbitas escogidas:

Parámetro	CALIPSO	AISat 2A	Amazonia-1
Excentricidad e	0	0	0
Altura orbital h [km]	704	674	764
Error en altura orbital [%]	0.28	0.15	0.26
Porcentaje de tiempo de eclipse $t_{\%}$ [%]	27.29	22.42	30.04
Error en $t_{\%}$ [%]	$3.66 \cdot 10^{-2}$	$8.93 \cdot 10^{-2}$	11.83
Ángulo solar AS [rad]	0.5445	0.7645	0
Ángulo solar AS [°]	31.198	43.806	0

Tabla 3: Parámetros orbitales de las órbitas solución.

Como se puede ver, tanto CALIPSO como AlSat 2A tienen unas características orbitales que son muy replicables en Marte, sin embargo, el Amazonia-1 posee un tiempo de eclipse muy elevado y, como se ha comentado, las órbitas en Marte tienden a reducir el tiempo de eclipse, por lo que el error entre el porcentaje de tiempo de eclipse introducido y el más cercano posible a esas altitudes es considerable, sin embargo, no se puede considerar error del programa ya que el motivo de la diferencia entre ambos valores es la imposibilidad de la órbita introducida en Marte, por lo que se van a tomar los otros dos datos de error como estándar del error que supone calcular órbitas con el programa.

Estos resultados evidencian que tanto CALIPSO como AlSat 2A son replicables en Marte con los requisitos prácticamente exactos, sin embargo, se deberían hacer modificaciones técnicas en el satélite Amazonia-1 para poder ser llevado a una órbita marciana, por ejemplo, aumentar la eficiencia del sistema de alimentación para que el mayor tiempo de exposición a radiación solar en Marte no produzca sobrecalentamientos en el mismo, o cambiando la instrumentación de a bordo como la cámara para permitir modificar la altura de la órbita para lograr el tiempo de eclipse deseado.

1.7.3. Validación de la sincronía solar

1.7.3.1. Cálculo del vector estado

En este apartado, se va a usar el propagador de órbitas para introducir las órbitas solución y comprobar que mantienen su sincronía solar tras un tiempo de órbita.

Para ello, dado que el propagador exige la introducción del vector estado en el tiempo inicial, se deben obtener los componentes del mismo. Así pues, partiendo de los elementos orbitales que se han calculado, se debe calcular el vector estado. Resumiendo, los elementos orbitales que se tienen son (se recopilan en la Tabla 4):

- **Excentricidad (e):** Las órbitas se consideran circulares por lo que $e = 0$.
- **Semieje mayor (a):** En este caso disponemos de la altura de órbita h , por lo que $a = R_p + h$.
- **Inclinación (i):** Como sabemos, está relacionada con la altura mediante la Ecuación 1.5.34.
- **Longitud del nodo ascendente o RAAN (Ω):** Si situamos el momento inicial en el equinoccio de primavera, $\Omega = AS$.
- **Argumento del periapsis (ω) y anomalía verdadera (v):** Como se ha explicado anteriormente, ambos parámetros se pueden considerar 0.

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
Excentricidad e	0	0	0
Semieje mayor a [km]	4101	4071	4161
Inclinación i [°]	93.83	93.73	94.03
RAAN Ω [°]	31.198	43.806	0
Argumento de periapsis (ω) y anomalía verdadera (v) [rad]	0	0	0

Tabla 4: Elementos orbitales de las órbitas elegidas de cada satélite.

Así pues, las órbitas solución quedan completamente definidas con estos parámetros orbitales. Sin embargo, como se ha dicho, el propagador de órbitas precisa del vector estado en un instante inicial, no de los elementos orbitales. Sin embargo, es posible calcular este vector partiendo de los elementos orbitales siguiendo un procedimiento muy sencillo. Así pues, se va a explicar a continuación el procedimiento a llevar a cabo para pasar de elementos orbitales a vector estado.

Para este procedimiento se van a utilizar las coordenadas perifocales (*PF*) mencionadas en el Apartado 1.5.2, por lo que se necesita saber cómo cambiar de éstas a las coordenadas geocéntricas o “planet centered” (*GE*).

$$\begin{pmatrix} X_{GE} \\ Y_{GE} \\ Z_{GE} \end{pmatrix} = R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \cdot \begin{pmatrix} X_{PF} \\ Y_{PF} \\ Z_{PF} \end{pmatrix} \quad (1.7.6)$$

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.7.7)$$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7.8)$$

Para calcular las coordenadas perifocales, se utilizan las siguientes relaciones:

$$\mathbf{r}_{PF} = \begin{pmatrix} X_{PF} \\ Y_{PF} \\ Z_{PF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(v) \\ r \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7.9)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{PF} = \begin{pmatrix} \dot{X}_{PF} \\ \dot{Y}_{PF} \\ \dot{Z}_{PF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{H} \sin(v) \\ \frac{\mu}{H} (e + \cos(v)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7.10)$$

Así pues, para definir el vector estado en coordenadas perifocales, primero se deben calcular los parámetros *H* (momento angular) y *r* (radio orbital), que se calculan de la siguiente manera:

$$H = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad (1.7.11)$$

$$r = \frac{\frac{H^2}{\mu}}{1 + e \cos(v)} \quad (1.7.12)$$

Una vez calculados estos parámetros, se siguen las ecuaciones anteriores para obtener los vectores de estado de, primero en coordenadas perifocales, y finalmente, con la Ecuación 1.7.6, se obtiene en coordenadas “body center”. Siguiendo el procedimiento, se calculan los vectores estado de las órbitas de los tres satélites y se recogen en la siguiente tabla.

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
$r_{GE} [km]$	$\begin{pmatrix} 3501.5 \\ -2120.4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2932.6 \\ -2812.8 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4153.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\dot{r}_{GE} [km/s]$	$-\begin{pmatrix} 0.112 \\ 0.184 \\ 3.227 \end{pmatrix}$	$-\begin{pmatrix} 0.1459 \\ 0.1521 \\ 3.2400 \end{pmatrix}$	$-\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2251 \\ 3.2032 \end{pmatrix}$

Tabla 5: Vectores estado de las órbitas solución.

El siguiente paso, entonces, es introducir estos datos en el propagador, habiendo introducido los datos relativos al planeta de referencia de Marte, para obtener los vectores estado de los satélites pasados 6 meses del inicio de la órbita. Debe asegurarse que la fecha inicial es 26 de Diciembre del 2022, el último equinoccio de primavera en Marte.

Así pues, pasados los 6 meses, los vectores de estado en el último instante de tiempo son los siguientes:

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
$r_{GE} [km]$	$\begin{pmatrix} -1644.4 \\ -3202.8 \\ 1935.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2338.0 \\ -2843.3 \\ 1707.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -382.5 \\ 934.5 \\ 4021.7 \end{pmatrix}$
$\dot{r}_{GE} [km/s]$	$\begin{pmatrix} 0.481 \\ 1.473 \\ 2.843 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.687 \\ 1.202 \\ 2.940 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.734 \\ 3.111 \\ -0.746 \end{pmatrix}$

Tabla 6: Vectores estado de las órbitas solución pasados 6 meses de propagación.

1.7.3.2. Validación del mantenimiento de los elementos orbitales

En este apartado se va a comprobar que, pasados los 6 meses de propagación, las órbitas calculadas mantienen los parámetros de diseño: la altura de la órbita, el tiempo de eclipse y la sincronía solar.

La altura de la órbita es muy fácil de comprobar, tan solo es necesario hacer el módulo del vector estado pasados los 6 meses. Así pues, las alturas de las órbitas con sus errores se muestran en la Tabla 7 así como el error calculado de la siguiente manera.

$$error = \frac{|parámetro\ inicial - parámetro\ final|}{parámetro\ inicial} \cdot 100 \quad (1.7.13)$$

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
<i>Altura inicial [km]</i>	704	674	764
<i>Altura final [km]</i>	697.94	668.30	757.03
<i>error [%]</i>	0.8602	0.8453	0.9121

Tabla 7: Comparación de altura de la órbita tras la propagación.

Como se puede ver, el error está por debajo del 1%, por lo que se puede concluir con bastante precisión que las órbitas mantienen la altura en el tiempo.

Así pues, tan solo queda demostrar el tiempo de eclipse y la sincronía solar, sin embargo, ambas características están relacionadas, por lo que demostrando que satélite mantiene la sincronía solar, es decir, que mantiene el mismo ángulo solar y que la relación de la Ecuación 1.5.34 se mantiene, se demuestra que el tiempo de eclipse se mantiene debido a lo estipulado en el Apartado 1.5.4.2.

Por un lado, se va a obtener el ángulo solar de la órbita pasados los 6 meses para compararlo con el inicial y ver si se ha mantenido. Primeramente, se calcula la RAAN de la órbita partiendo del vector estado. Para ello se necesita calcular la dirección de la línea de nodos \mathbf{n} , y calcular su ángulo (RAAN). Para calcular la dirección de la línea de nodos, se parte del momento angular específico, y se procede de la siguiente manera:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rightarrow H = \|\mathbf{H}\| \quad (1.7.14)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{H} \rightarrow n = \|\mathbf{n}\| \quad (1.7.15)$$

$$\Omega = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}}{n} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{n_x}{n} \right) \quad (1.7.16)$$

Sin embargo, puede haber ambigüedad con el cuadrante al calcular el \cos^{-1} , por lo que se debe imponer la siguiente condición.

$$\Omega = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{n_x}{n} \right) \rightarrow (n_y \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{n_x}{n} \right) \rightarrow (n_y < 0) \end{cases} \quad (1.7.17)$$

Para calcular el ángulo solar, como vemos en la Ecuación 1.5.35, necesitamos también la RAAN del Sol. Este parámetro es muy sencillo de calcular, puesto que sabemos el tiempo que hemos propagado la órbita desde que $\Omega_{\odot} = 0$ (182 días). Como sabemos que Ω_{\odot} tarda un año marciano (686.97 días) en llegar a $\Omega_{\odot} = 2\pi$, se puede calcular este parámetro fácilmente con una sencilla regla de tres:

$$\Omega_{\odot} = \frac{182 \text{ días}}{686.97 \text{ días}} \cdot 2\pi \text{ rad} \quad (1.7.18)$$

$$AS = \Omega - \Omega_{\odot} \quad (1.7.19)$$

Así pues, se calculan los ángulos solares de los tres satélites tras propagar la órbita y se obtienen los siguientes valores:

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
$AS \text{ inicial [rad]}$	0.5445	0.7645	0
$AS \text{ final [rad]}$	0.5321	0.7517	-0.0107
$error \text{ [%]}$	2.2613	1.6738	1.3566*

Tabla 8: Comparación del ángulo solar de la órbita tras la propagación.

Como se puede ver, el error está entorno al 2% (*al no poder calcularse el error relativo con la Ecuación 1.7.13 dado que $AS_{inicial} = 0$, se ha calculado con el valor medio que puede tomar AS , $\frac{\pi}{4}$ dejándolo como $error = \frac{|AS_{ini} - AS_{fin}|}{\frac{\pi}{4}} \cdot 100$), por lo que también existe un bajo error en el mantenimiento del ángulo solar. Lo que indica que la condición de sincronía solar es fiable en una primera estimación.

Sin embargo, para comprobar más rigurosamente la condición de sincronía, se va a comprobar que la relación entre inclinación y altura de órbita de las órbitas SSO se mantiene. Para ello, se debe calcular la inclinación de la órbita en el instante final, para ver si ésta coincide con la inclinación teórica que debería tener, que se puede calcular con la altura de órbita y la Ecuación 1.5.34 (relación de sincronía solar).

Para calcular la inclinación de la órbita partiendo del vector estado simplemente se parte del momento angular específico \mathbf{H} , y con él es directo calcular la inclinación.

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}}{H} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{H_z}{H} \right) \quad (1.7.20)$$

Seguidamente, se va a calcular la inclinación teórica que debería tener la órbita para mantener su sincronía. Para ello, como se ha explicado, se va a hacer uso de la Ecuación 1.5.34 y la altura de la órbita pasados los 6 meses calculada anteriormente. Así pues, se calculan las inclinaciones teóricas de las órbitas propagadas de los tres satélites y se recogen todos los datos calculados en la siguiente tabla.

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
<i>inclinación teórica</i> [rad]	1.63712	1.63545	1.64054
[°]	93.8000	93.7042	93.9960
<i>inclinación calculada</i> [rad]	1.63757	1.63590	1.64104
[°]	93.8261	93.7300	94.0249
<i>error</i> [%]	$2.79 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-2}$	$3.08 \cdot 10^{-2}$

Tabla 9: Comparativa de inclinaciones teóricas y calculadas para los tres satélites.

Como se puede ver, el error para cada uno de los tres casos es entorno al 0.03 %, por lo que se puede asumir con gran precisión que las órbitas obtenidas para los tres satélites mantienen su sincronía con el Sol en el tiempo.

Finalmente, siguiendo el procedimiento del Apartado 1.5.4.2, se calcula el $t_{\%}$ de los tres satélites para ver el error cometido.

Parámetro	CALIPSO	AlSat 2A	Amazonia-1
<i>t_% inicial</i> [%]	27.29	22.42	30.04
<i>t_% final</i> [%]	27.58	22.98	30.47
<i>error</i> [%]	1.06	2.50	1.43

Tabla 10: Comparativa de los porcentajes de tiempo de eclipse para los tres satélites.

Como se puede ver, el error cometido en el porcentaje de tiempo de eclipse también se encuentra entorno al 2%. De este modo, se ha verificado que todos los parámetros característicos de la órbita, así como sus requisitos iniciales introducidos por el cliente se mantienen en el tiempo con un error aceptable. Para minimizar el error cometido, se debería refinar el propagador de órbitas, añadiendo las perturbaciones gravitacionales de otros cuerpos y incluyendo las perturbaciones de otros fenómenos.

Para finalizar este proyecto, se van a representar las órbitas solución de los tres satélites para su visualización.

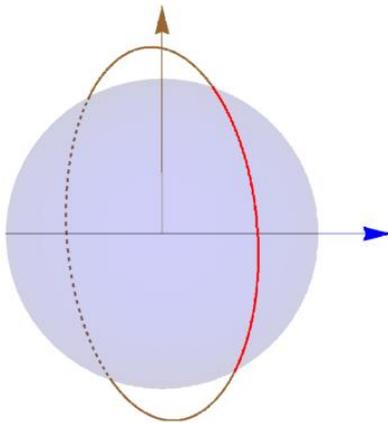


Figura 33: Órbita solución del satélite CALIPSO en Marte.

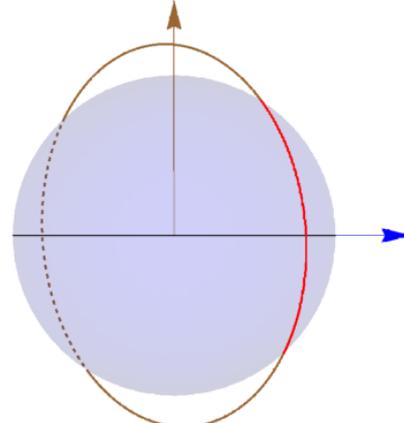


Figura 34: Órbita solución del satélite AISat 2A en Marte.

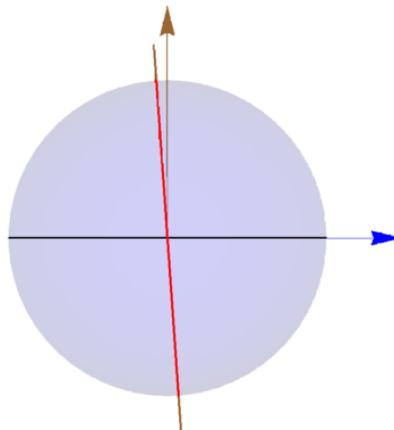


Figura 35: Órbita solución del satélite AISat 2A en Marte.

1.8. Conclusiones

El presente trabajo ha abordado el desarrollo y validación de una herramienta de software destinada a calcular órbitas heliosíncronas (SSO) en Marte, un tema crucial en la planificación de misiones interplanetarias, especialmente aquellas orientadas a la observación remota y a la recolección de datos en condiciones de iluminación constante.

El proceso de desarrollo del software se ha centrado en la implementación de algoritmos que permiten definir órbitas SSO en Marte. Se han utilizado métodos numéricos para resolver las ecuaciones del movimiento orbital, teniendo en cuenta las perturbaciones más significativas que afectan a la órbita. Se han desarrollado programas para la propagación de órbitas, lo que permite predecir la evolución de la posición y velocidad de un satélite a lo largo del tiempo, lo cual se ha usado tanto para determinar los tiempos de eclipse de satélites reales, como para verificar el mantenimiento de la sincronía solar en las órbitas generadas por el programa principal.

Este mismo software de propagación ha sido sometido a una serie de pruebas de validación mediante la propagación de órbitas conocidas. Este proceso de validación ha revelado que, aunque el propagador orbital es capaz de simular con precisión las condiciones orbitales, el error en la posición calculada del satélite tiende a incrementarse a medida que se avanza en el tiempo. Este comportamiento está asociado a las limitaciones de los métodos numéricos empleados, así como de las simplificaciones adoptadas en la modelización de las perturbaciones, lo que requiere refinación de las ecuaciones si se pretende mejorar la precisión a largo plazo.

Una de las conclusiones más significativas de este trabajo es la demostración de la viabilidad de aplicar la herramienta desarrollada. El software proporciona una base para el diseño preliminar de órbitas SSO, permitiendo a los usuarios realizar simulaciones precisas que faciliten la toma de decisiones durante las primeras fases de planificación de una misión.

Además, cabe destacar que la herramienta principal desarrollada en este proyecto es el que calcula una órbita marciana bajo unos requisitos. Dicho programa, como se puede ver en la Tabla 3, funciona con un error por debajo del 0.3 %, por lo que el error medio de entorno al 2% de algunos parámetros orbitales tras la propagación, corresponde en mayor medida al propagador, una herramienta desarrollada con el mero propósito de validación de resultados, no al programa de cálculo de órbitas, objetivo principal de este proyecto. Es por esto por lo que, refinando el propagador, o disponiendo de otro propagador comercial de alto nivel, se comprobaría con mayor certeza la viabilidad de las órbitas calculadas por el programa principal.

En conclusión, se ha demostrado que el programa desarrollado es capaz de lograr los objetivos de este trabajo con un error suficientemente bajo, lo que valida la capacidad del mismo a ser utilizado en proyectos reales que no requieran de gran precisión.

1.9. Referencias

- [1] Museo virtual de la ciencia, *Johannes Kepler* [En línea]. Disponible en: <https://museovirtual.csic.es/salas/universo/universo9.htm>
- [2] Biography.com Editors, *Isaac Newton*, A&E Networks Television. [En línea]. Disponible en: <https://www.biography.com/scientists/isaac-newton>.
- [3] NASA, "Celestial Mechanics," NASA Solar System Exploration. [En línea]. Disponible en: <https://solarsystem.nasa.gov/resources/317/celestial-mechanics/>
- [4] Encyclopaedia Britannica "Orbital Mechanics,". [En línea]. Disponible en: <https://www.britannica.com/science/orbital-mechanics>.
- [5] AnimaNaturalis, "60 años después: Que descanses en paz, Laika," 16-abr-2016. [En línea]. Disponible en: <https://www.animanaturalis.org/blog/44872/60-anos-despues-que-descanses-en-paz-laika>.
- [6] E. García, "La NASA celebra 50 años del primer satélite artificial," El Mundo, 10-nov-2009. [En línea]. Disponible en: <https://www.elmundo.es/elmundo/2009/11/10/ciencia/1257855952.html>.
- [7] L. George, "Chapter 1: The History of Satellites", *Open Education Resource: Introductory Engineering Mechanics*, [En línea]. Disponible en: https://oer.pressbooks.pub/lynnanageorge/chapter/copy-of-chapter-1_editing/.
- [8] SOAR Earth, "The History of Satellites", *SOAR Earth*. [En línea]. Disponible en: <https://about.soar.earth/blog-pages/history-of-satellites>
- [9] Science Learning Hub, "History of Satellites - Timeline", *Science Learning Hub*. [En línea]. Disponible en: <https://www.sciencelearn.org.nz/resources/1905-history-of-satellites-timeline>
- [10] J. López, "Satélites Starlink: qué son y cómo verlos," Xataka, 04-may-2021. [En línea]. Disponible en: <https://www.xataka.com/basics/satelites-starlink-que-como-verlos>.
- [11] Ciudad Valencia, Irán produce paneles solares para autos y viviendas," 16-ago-2023. [En línea]. Disponible en: <https://www.ciudadvalencia.com.ve/iran-produce-paneles-solares/>
- [12] Star Walk , "Celestial Coordinates: Understanding the Coordinate System of the Stars", [En línea]. Disponible en: <https://starwalk.space/es/news/celestial-coordinates>
- [13] José Antonio Morano Fernández, *Lecciones breves de mecánica orbital*, Universitat Politècnica de València.
- [14] "Elementos orbitales," Wikipedia, [En línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Elementos_orbitales
- [15] "Earth's penumbra and umbra," ResearchGate, [En línea]. Disponible en: https://www.researchgate.net/figure/Earths-penumbra-and-umbra_fig2_318124646.



[16] "Precesión nodal," Wikipedia, [En línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Precesi%C3%B3n_nodal.

[17] "Precesión de los equinoccios," ES Academic, [En línea]. Disponible en: <https://es-academic.com/dic.nsf/eswiki/878349>.

[18] MathWorks, "Zonal Harmonic Gravity Model," *MathWorks Documentation*. [En línea]. Disponible en: <https://es.mathworks.com/help/aeroblks/zonalharmonicgravitymodel.html>

[19] A. Khan and A. Siddiqui, "Harmonic coefficients for Earth, Mars, Moon, and Venus," *ResearchGate*. [En línea]. Disponible en: https://www.researchgate.net/figure/Harmonic-coefficients-for-Earth-Mars-Moon-and-Venus_tbl1_51932756

[20] Juan José Costa Pérez, Luís Floría, *Coeficientes de los armónicos esféricos de la potencial gravitatorio de un sólido e integrales de inercia*. Universidad de Zaragoza, 2021.

[21] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, 3rd ed. Oxford, UK: Elsevier, 2013.

[22] "Geodesia," Para Topografía, [En línea]. Disponible en: <https://paratopografia.com/geodesia/>.

[23] H. Schaub and J. L. Junkins, *Analytical Mechanics of Space Systems*, 3rd ed. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014.

[24] MathWorks, "ODE45: Solve nonstiff differential equations—medium order method," *MATLAB Documentation*. [En línea]. Disponible en: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>

[25] "Fórmula de rotación de Rodrigues," Wikipedia, [En línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_rotaci%C3%B3n_de_Rodrigues.

[26] NASA/JPL, "HORIZONS Web-Interface," *NASA/JPL Solar System Dynamics*. [En línea]. Disponible en: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#>

[27] NASA, "CALIPSO Satellite", *NASA*. [En línea]. Disponible en: <https://www-calipso.larc.nasa.gov/>

[28] Gunter's Space Page, "Alsat-2", *Gunter's Space Page*. [En línea]. Disponible en: https://space.skyrocket.de/doc_sdat/alsat-2.htm

[29] "Alsat-2 Satellite Mission", *EO Portal Directory*. [En línea]. Disponible en: <https://www.eoportal.org/satellite-missions/alsat-2#summary>

[30] "Amazonia 1: Primer Satélite de Observación de la Tierra Totalmente Operado por Brasil", *Defensa.com*. [En línea]. Disponible en: <https://www.defensa.com/aeronautica-y-espacio/amazonia-1-primer-satelite-observacion-tierra-totalmente-operado>

[31] Union of Concerned Scientists, "Satellite Database," Union of Concerned Scientists. [En línea]. Disponible en: <https://www.ucsusa.org/resources/satellite-database>

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALENCIA

Trabajo de Fin de Máster

Libro 2: Pliego de Condiciones

Desarrollo de una herramienta para la estimación de parámetros orbitales de órbitas SSO alrededor de Marte.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Autor: Antoni González Chacón

Tutor: José Antonio Morano Fernández

Máster en Ingeniería Aeronáutica

Curso 2023-2024

Índice

Índice	I
2.1. INTRODUCCIÓN	1
2.2. Real Decreto 488/1997	1
2.3. Real Decreto 486/1997	3



2.1. Introducción

El pliego de condiciones es un documento donde se especifican las condiciones que se deben cumplir, con respecto a la normativa vigente, durante el desarrollo de un trabajo para asegurar un espacio de trabajo adecuado.

2.2. Real Decreto 488/1997

Este Real Decreto “*determina el cuerpo básico de garantías y responsabilidades preciso para establecer un adecuado nivel de protección de la salud de los trabajadores frente a los riesgos derivados de las condiciones de trabajo, en el marco de una política coherente, coordinada y eficaz*”. Los artículos aplicables a este proyecto son:

Artículo 3: obligaciones generales

1. Equipo

- Pantalla:
 - Los caracteres de la pantalla deberán estar bien definidos y configurados de forma clara, y tener una dimensión suficiente, disponiendo de un espacio adecuado entre los caracteres y los renglones.
 - La imagen de la pantalla deberá ser estable, sin fenómenos de destellos, centelleos u otras formas de inestabilidad.
 - El usuario de terminales con pantalla deberá poder ajustar fácilmente la luminosidad y el contraste entre los caracteres y el fondo de la pantalla, y adaptarlos fácilmente a las condiciones del entorno.
 - La pantalla deberá ser orientable e inclinable a voluntad, con facilidad para adaptarse a las necesidades del usuario. No deberá tener reflejos ni reverberaciones que puedan molestar al usuario.
- Teclado:
 - El teclado deberá ser inclinable e independiente de la pantalla para permitir que el trabajador adopte una postura cómoda que no provoque cansancio en los brazos o las manos.
 - Tendrá que haber espacio suficiente delante del teclado para que el usuario pueda apoyar los brazos y las manos.
 - La superficie del teclado deberá ser mate para evitar los reflejos.
 - La disposición del teclado y las características de las teclas deberán tender a facilitar su utilización.
 - Los símbolos de las teclas deberán resaltar suficientemente y ser legibles desde la posición normal de trabajo.

- Mesa o superficie de trabajo:
 - La mesa o superficie de trabajo deberán ser poco reflectantes, tener dimensiones suficientes y permitir una colocación flexible de la pantalla, del teclado, de los documentos y del material accesorio.
 - El soporte de los documentos deberá ser estable y regulable y estará colocado de tal modo que se reduzcan al mínimo los movimientos incómodos de la cabeza y los ojos.
 - El espacio deberá ser suficiente para permitir a los trabajadores una posición cómoda.
- Asiento de trabajo:
 - El asiento de trabajo deberá ser estable, proporcionando al usuario libertad de movimiento y procurándole una postura confortable.
 - La altura del mismo deberá ser regulable. El respaldo deberá ser reclinable y su altura ajustable.

2. Entorno:

- Espacio:
 - El puesto de trabajo deberá tener una dimensión suficiente y estar acondicionado de tal manera que haya espacio suficiente para permitir los cambios de postura y movimientos de trabajo.
- Iluminación:
 - La iluminación general y la iluminación especial (lámparas de trabajo), cuando sea necesaria, deberán garantizar unos niveles adecuados de iluminación y unas relaciones adecuadas de luminancias entre la pantalla y su entorno, habida cuenta del carácter del trabajo, de las necesidades visuales del usuario y del tipo de pantalla utilizado.
 - El acondicionamiento del lugar de trabajo y del puesto de trabajo, así como la situación y las características técnicas de las fuentes de luz artificial, deberán coordinarse de tal manera que se eviten los deslumbramientos y los reflejos molestos en la pantalla u otras partes del equipo.
- Reflejos y deslumbramientos:
 - Los puestos de trabajo deberán instalarse de tal forma que las fuentes de luz, tales como ventanas y otras aberturas, los tabiques transparentes o translúcidos y los equipos o tabiques de color claro no provoquen deslumbramiento directo ni produzcan reflejos molestos en la pantalla.
 - Las ventanas deberán ir equipadas con un dispositivo de cobertura adecuado y regulable para atenuar la luz del día que ilumine el puesto de trabajo.

- Ruido:
 - El ruido producido por los equipos instalados en el puesto de trabajo deberá tenerse en cuenta al diseñar el mismo, en especial para que no se perturbe la atención ni la palabra.
- Calor:
 - Los equipos instalados en el puesto de trabajo no deberán producir un calor adicional que pueda ocasionar molestias a los trabajadores.
- Emisiones:
 - Toda radiación, excepción hecha de la parte visible del espectro electromagnético, deberá reducirse a niveles insignificantes desde el punto de vista de la protección de la seguridad y de la salud de los trabajadores.
- Humedad:
 - Deberá crearse y mantenerse una humedad aceptable.

2.3. Real Decreto 486/1997

Este Real Decreto “*establece las disposiciones mínimas de seguridad y de salud aplicables a los lugares de trabajo*”. Los artículos aplicables a este proyecto son:

ARTÍCULO 4: condiciones constructivas

1. El diseño y las características constructivas de los lugares de trabajo deberán ofrecer seguridad frente a los riesgos de resbalones o caídas, choques o golpes contra objetos y derrumbamientos o caídas de materiales sobre los trabajadores.
2. El diseño y las características constructivas de los lugares de trabajo deberán también facilitar el control de las situaciones de emergencia, en especial en caso de incendio, y posibilitar, cuando sea necesario, la rápida y segura evacuación de los trabajadores.
3. Los lugares de trabajo deberán cumplir, en particular, los requisitos mínimos de seguridad siguientes:
 - Las dimensiones de los locales de trabajo deberán permitir que los trabajadores realicen su trabajo sin riesgos para su seguridad y salud y en condiciones ergonómicas aceptables. Sus dimensiones mínimas serán las siguientes:
 - 3 metros de altura desde el piso hasta el techo. No obstante, en locales comerciales, de servicios, oficinas y despachos, la altura podrá reducirse a 2,5 metros.
 - 2 metros cuadrados de superficie libre por trabajador.
 - 10 metros cúbicos, no ocupados, por trabajador.
 - Las zonas de los lugares de trabajo en las que exista riesgo de caída, de caída de objetos o de contacto o exposición a elementos agresivos, deberán estar claramente señalizadas.



- Los suelos de los locales de trabajo deberán ser fijos, estables y no resbaladizos, sin irregularidades ni pendientes peligrosas.
- Los trabajadores deberán poder realizar de forma segura las operaciones de apertura, cierre, ajuste o fijación de ventanas, vanos de iluminación cenital y dispositivos de ventilación. Cuando estén abiertos no deberán colocarse de tal forma que puedan constituir un riesgo para los trabajadores.
- Las vías y salidas de evacuación deberán permanecer expeditas y desembocar lo más directamente posible en el exterior o en una zona de seguridad. En caso de peligro, los trabajadores deberán poder evacuar todos los lugares de trabajo rápidamente y en condiciones de máxima seguridad.
- Las vías y salidas de evacuación, así como las vías de circulación que den acceso a ellas, no deberán estar obstruidas por ningún objeto de manera que puedan utilizarse sin trabas en cualquier momento. Las puertas de emergencia no deberán cerrarse con llave.
- La instalación eléctrica no deberá entrañar riesgos de incendio o explosión. Los trabajadores deberán estar debidamente protegidos contra los riesgos de accidente causados por contactos directos o indirectos. La instalación eléctrica y los dispositivos de protección deberán tener en cuenta la tensión, los factores externos condicionantes y la competencia de las personas que tengan acceso a partes de la instalación.

ARTÍCULO 5: orden, limpieza y mantenimiento. Señalización.

1. Las zonas de paso, salidas y vías de circulación de los lugares de trabajo y, en especial, las salidas y vías de circulación previstas para la evacuación en casos de emergencia, deberán permanecer libres de obstáculos de forma que sea posible utilizarlas sin dificultades en todo momento.
2. Los lugares de trabajo, incluidos los locales de servicio, y sus respectivos equipos e instalaciones, se limpiarán periódicamente y siempre que sea necesario para mantenerlos en todo momento en condiciones higiénicas adecuadas.
3. Los lugares de trabajo y, en particular, sus instalaciones, deberán ser objeto de un mantenimiento periódico, de forma que sus condiciones de funcionamiento satisfagan siempre las especificaciones del proyecto, subsanándose con rapidez las deficiencias que puedan afectar a la seguridad y salud de los trabajadores.

ARTÍCULO 7: condiciones ambientales.

1. La exposición a las condiciones ambientales de los lugares de trabajo no deberá suponer un riesgo para la seguridad y salud de los trabajadores. A tal fin, dichas condiciones ambientales y, en particular, las condiciones termohigrométricas de los lugares de trabajo deberán ajustarse a las siguientes condiciones:



- La temperatura de los locales donde se realicen trabajos sedentarios propios de oficinas o similares estará comprendida entre 17 y 27 °C.
- La humedad relativa estará comprendida entre el 30 y el 70 por 100, excepto en los locales donde existan riesgos por electricidad estática en los que el límite inferior será el 50 por 100.
- Los trabajadores no deberán estar expuestos de forma frecuente o continuada a corrientes de aire cuya velocidad exceda los siguientes límites:
 - Trabajos en ambientes no calurosos: 0,25 m/s.
 - Trabajos sedentarios en ambientes calurosos: 0,5 m/s.
 - Trabajos no sedentarios en ambientes calurosos: 0,75 m/s.

Estos límites no se aplicarán a las corrientes de aire expresamente utilizadas para evitar el estrés en exposiciones intensas al calor, ni a las corrientes de aire acondicionado, para las que el límite será de 0,25 m/s en el caso de trabajos sedentarios.

ARTÍCULO 8: iluminación.

1. La iluminación de los lugares de trabajo deberá permitir que los trabajadores dispongan de condiciones de visibilidad adecuadas para poder circular por los mismos y desarrollar en ellos sus actividades sin riesgo para su seguridad y salud.
2. La iluminación de los lugares de trabajo deberá cumplir, en particular, las siguientes disposiciones.
 - Siempre que sea posible, los lugares de trabajo tendrán una iluminación natural, que deberá complementarse con una iluminación artificial cuando la primera, por sí sola, no garantice las condiciones de visibilidad adecuadas. En tales casos se utilizará preferentemente la iluminación artificial general, complementada a su vez con una localizada cuando en zonas concretas se requieran niveles de iluminación elevados.
 - Los sistemas de iluminación utilizados no deben originar riesgos eléctricos, de incendio o de explosión, cumpliendo, a tal efecto, lo dispuesto en la normativa específica vigente.

ARTÍCULO 9: servicios higiénicos.

1. Los lugares de trabajo dispondrán de agua potable en cantidad suficiente y fácilmente accesible. Se evitará toda circunstancia que posibilite la contaminación del agua potable.
2. Los lugares de trabajo dispondrán, en las proximidades de los puestos de trabajo y de los vestuarios, de locales de aseo con espejos, lavabos con agua corriente, caliente si es necesario, jabón y toallas individuales u otro sistema de secado con garantías higiénicas. Dispondrán además de duchas de agua corriente, caliente y fría, cuando se realicen habitualmente trabajos sucios, contaminantes o que originen elevada sudoración. En tales casos, se suministrarán a los trabajadores los medios especiales de limpieza que sean necesarios.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALENCIA

Trabajo de Fin de Máster

Libro 3: Presupuestos

Desarrollo de una herramienta para la estimación de parámetros orbitales de órbitas SSO alrededor de Marte.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Autor: Antoni González Chacón

Tutor: José Antonio Morano Fernández

Máster en Ingeniería Aeronáutica

Curso 2023-2024

Índice

Índice	I
3.1. Introducción	1
3.2. Coste de los sueldos a trabajadores	1
3.3. Coste de los dispositivos	1
3.4. Coste del software utilizado	2
3.5. Coste total del proyecto	2
3.6. Referencias	3

3.1. Introducción

En este documento se describirán los distintos aspectos del proyecto que implican gastos económicos.

Estos aspectos incluyen el salario del ingeniero o ingenieros encargados de llevar a cabo las tareas necesarias para el desarrollo del proyecto, el costo de los dispositivos empleados en cada tarea, el gasto de energía para alimentar todos los sistemas que lo requieren, y el costo de los programas de software de pago utilizados durante el desarrollo.

El costo total del proyecto se obtiene sumando los gastos de cada uno de estos aspectos de manera individual.

3.2. Coste de los sueldos a trabajadores

Para realizar el análisis económico, es necesario considerar inicialmente el pago al ingeniero que ha llevado a cabo el diseño. Esto debe incluir una evaluación de las diferentes tareas realizadas, los conocimientos requeridos para cada una, el tiempo dedicado a ellas y el costo asociado a ese tiempo de trabajo [1] [2]. Además, se debe tener en cuenta el tiempo de trabajo en la supervisión del desarrollo del proyecto por parte del profesor tutor.

En la siguiente tabla se indican los costes de cada uno de estos aspectos:

Trabajador	Sueldo / hora [€/h]	Tiempo trabajado (h)	Subtotal (€)
Autor	15	360	5400
Tutor	20	20	400
Total [€]			5800

Tabla 1: Desglose de precios del coste de los trabajadores.

3.3. Coste de los dispositivos

Este trabajo ha requerido únicamente un dispositivo: un ordenador portátil personal. En este caso, se utilizó un Acer Nitro 5 AN515-57 [3]. Es importante mencionar que no se debe considerar el costo total del dispositivo, sino únicamente el porcentaje correspondiente a la parte de su vida útil [4] que se ha utilizado para este proyecto.

Dispositivo	Precio de compra [€]	Vida útil [años] [horas]	Tiempo invertido [h]	Coste total [€]
Acer Nitro 5 AN515-57	1099	6 13140	360	30.11

Tabla 2: Desglose de precios del coste de los dispositivos.

3.4. Coste del software utilizado

Como se mencionó anteriormente, el trabajo se ha llevado a cabo principalmente utilizando el software de pago Matlab [5]. La licencia tiene un costo de 840€ anuales o 2100€ sin límite de tiempo. Para los cálculos de horas, se considerará el costo de la licencia anual de 840€ dado que es un proyecto que demora menos de un año en terminar.

Además, se han utilizado minoritariamente los programas de pago Microsoft Office Excel [6] y Wolfram Mathematica.[7]

Software	Licencia	Precio de licencia [€]
Matlab	Anual	840
Microsoft Office Excel	Anual	69
Wolfram Mathematica	Anual	195
Total [€]		1104

Tabla 3: Desglose de precios del coste del software.

3.5. Coste total del proyecto

Por lo tanto, al considerar todos los aspectos mencionados anteriormente, el coste total del proyecto se determina sumando los gastos de cada uno de estos elementos.

Software	Precio de licencia [€]
Coste del sueldo del trabajador [€]	5800
Coste de los dispositivos [€]	30.11
Coste del software utilizado	1104
Total [€]	6934.11

Tabla 4: Desglose de precios global y coste total del proyecto.



3.6. Referencias

[1] Glassdoor, "Sueldos de Ingeniero Junior," Glassdoor, https://www.glassdoor.es/Sueldos/ingeniero-junior-sueldo-SRCH_KO0,16.htm.

[2] Glassdoor, "Sueldos de Profesor Universitario," *Glassdoor*, https://www.glassdoor.es/Sueldos/profesor-universitario-sueldo-SRCH_KO0,22.htm#:~:text=Sueldos%20para%20el%20puesto%20de%20Profesor%20Universitario%20en%20Espa%C3%B1a&text=E1%20sueldo%20medio%20para%20el,2000%20%E2%82%AC%20y%2010.000%20%E2%82%AC.

[3] Acer, "Acer Nitro 5 Portátil Gaming AN515-57 Negro NH.QESEB.001," *Acer*, <https://store.acer.com/es-es/acer-nitro5-portatil-gaming-an515-57-negro-nh-qeseb-001>.

[4] Tecfys, "¿Conoces la Vida Media de Tu Ordenador?," *Tecfys*, <https://tecfys.com/blog/conoces-la-vida-media-de-tuordenador/>.

[5] MathWorks, "Precios y Licenciamiento," *MathWorks*, <https://es.mathworks.com/pricing-licensing.html>.

[6] Microsoft, "Comparar Todos los Productos de Microsoft 365," *Microsoft*, <https://www.microsoft.com/es-ES/microsoft365/buy/compare-all-microsoft-365-products>.

[7] Wolfram Research, "Mathematica Pricing for Home and Hobby," Wolfram Research, <https://www.wolfram.com/mathematica/pricing/home-hobby/>