



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA


ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial
y Diseño Industrial

Implementación en Python de un propagador orbital con
interfaz gráfica para el estudio de trayectorias espaciales:
Visitando NEOs.

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

AUTOR/A: Navarro Fernández, Juan José

Tutor/a: Moraño Fernández, José Antonio

Cotutor/a: Herrero Debón, Alicia

Cotutor/a: Moll López, Santiago Emmanuel

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

Implementación en Python de un propagador orbital con interfaz gráfica para el estudio de trayectorias espaciales: Visitando NEOs

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Autor:

Juan José Navarro Fernández

Tutor:

José Antonio Morano Fernández

Cotutores:

Alicia Herrero Debón

Santiago Emmanuel Moll López

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial
Universitat Politècnica de València

Julio 2024

Agradecimientos

A Víctor,
por tener un mejor amigo en un hermano.

A mis padres Consuelo y Roque,
por haberme dado todo y hacerme ser la persona que soy hoy.

Resumen

Los últimos años está proliferando notablemente el estudio de objetos cercanos a la Tierra (NEOs) por diversos motivos. Éstos pueden ser tanto de tipo científico (estos objetos pueden ser una ventana al pasado por el material inalterado que contienen) como de tipo tecnológico (estas misiones permiten probar nuevas tecnologías en entornos reales y cercanos) e incluso de seguridad (para evaluar posibles riesgos de colisión).

En este trabajo fin de máster se desarrolla un propagador orbital que permite la simulación de trayectorias espaciales. Para ello, se ha utilizado el lenguaje de programación Python incluyendo en el propagador las fuerzas de perturbación naturales más significativas y la posibilidad de aplicar impulsos mediante propulsión de abordó. Estas perturbaciones e impulsos pueden afectar al movimiento del vehículo, cuya trayectoria debe ser estudiada mediante algoritmos de solución numérica de ecuaciones diferenciales que son implementados en Python. Además del propagador, se incorpora una interfaz gráfica que permite facilitar la introducción de datos del problema y la selección de las posibles opciones para obtener como resultado la implementación del propagador y el diseño de la misión deseada.

Por último, se ha aplicado la herramienta diseñada al estudio y simulación de posibles trayectorias con destino a NEOs.

Palabras clave: propagador orbital; Python; interfaz gráfica; NEOs.

Abstract

Over the last years, the study of near-Earth objects (NEOs) has increased significantly due to different reasons. Such as, scientific causes (these objects can be a window to past ages due to unchanged materials in their composition), technological reasons (these kind of missions allow to try new methods in real environments), and even safety procedures (to evaluate potential collision threats).

In this master thesis, an orbital propagator is developed allowing simulations of space trajectories. To do this, Python has been used as programming language to include the most significant natural perturbation forces as well as the possibility of thrust application by onboard propulsion. These perturbations and thrusts can alter the spacecraft movement, and thus are studied using using algorithms implemented in Python that solve numerically differential equations. In addition, a graphic interface has been designed to ease the incorporation of the input data in a simpler way, and to select different output options to obtain the implementation of the orbital propagator for the requested mission.

Lastly, these tools have been applied to study and simulate possible trajectories with NEOs as destination.

Keywords: orbital propagator; Python; graphical interface; NEOs.

Resum

Els últims anys està proliferant notablement l'estudi d'objectes pròxims a la Terra (NEOs) per diversos motius. Estos poden ser tant de tipus científic (estos objectes poden ser una finestra al passat pel material inalterat que contenen) com de tipus tecnològic (estes missions permeten provar noves tecnologies en entorns reals i pròxims) i fins i tot de seguretat (per a avaluar possibles riscos de col·lisió).

En este treball fi de màster es desenvolupa un propagador orbital que permet la simulació de trajectòries espacials. Per a això, s'ha utilitzat el llenguatge de programació Python incloent en el propagador les forces de perturbació naturals més significatives i la possibilitat d'aplicar impulsos mitjançant propulsió d'aborde. Estes perturbacions i impulsos poden afectar el moviment del vehicle, la trajectòria del qual ha de ser estudiada mitjançant algorismes de solució numèrica d'equacions diferencials que són implementats en Python. A més del propagador, s'incorpora una interfície gràfica que permet facilitar la introducció de dades del problema i la selecció de les possibles opcions per a obtindre com a resultat la implementació del propagador i el disseny de la missió desitjada.

Finalment, s'ha aplicat la ferramenta dissenyada a l'estudi i simulació de possibles trajectòries amb destinació a NEOs.

Paraules clau: propagador orbital; Python; interfície gràfica; NEOs.

Índice general

Índice de figuras	III
Índice de tablas	V
I MEMORIA	1
1. Introducción	3
1.1 Motivación	3
1.2 Objetivos	6
2. Marco teórico	7
2.1 Problema de los dos cuerpos	7
2.1.1 Ecuaciones de movimiento en un marco inercial	7
2.1.2 Ecuaciones de movimiento relativo	8
2.2 Perturbaciones orbitales	9
2.2.1 Resistencia atmosférica	10
2.2.2 Efecto del achatamiento	13
2.2.3 Presión por radiación solar	16
2.2.4 Gravedad solar	18
2.2.5 Gravedad lunar	20
2.2.6 Gravedad planetaria	20
2.2.7 Propulsión espacial	21
2.3 Sistemas de propulsión	22
2.3.1 Propulsión química	22
2.3.2 Propulsión eléctrica	22
2.3.3 Propulsión sin motor	23
3. Metodología	25
3.1 <i>OrbitPropagator.py</i>	25
3.1.1 Integración numérica de ODEs	27
3.2 <i>tools.py</i>	27
3.2.1 COEs y vector estado	28
3.2.2 Algoritmos para perturbaciones	32
4. Propagador orbital	41
4.1 El Sol como cuerpo central - Sonda Solar Parker	42
4.2 La Tierra como cuerpo central - Satélite PAZ	45
4.3 Otro planeta como cuerpo central - Mars Express	51
5. Interfaz gráfica	55
6. Aplicación a la exploración de NEOs	65
6.1 Tipos de motores espaciales	65
6.1.1 Motor iónico - NEXT-C	65
6.1.2 Motor de efecto Hall - BHT-1500	66

6.1.3	Motor de plasma - VASIMR	67
6.2	NEO 2022 NX1	68
6.3	Descripción del problema y resultados obtenidos	69
6.3.1	Resultados obtenidos con el motor NEXT-C	71
6.3.2	Resultados obtenidos con el motor BHT-1500	73
6.3.3	Resultados obtenidos con el motor VASIMR	75
6.3.4	Comparación de resultados	77
7.	Conclusiones y trabajos futuros	79
	Bibliografía	81
II	PLIEGO DE CONDICIONES Y PRESUPUESTO	85
8.	Pliego de condiciones	87
8.1	Condiciones ambientales	87
8.2	Condiciones técnicas	88
9.	Presupuesto	89
9.1	Costes de personal	89
9.2	Costes de equipo informático	89
9.3	Costes de software	90
9.4	Costes totales	91
III	OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE	93
10.	Objetivos de desarrollo sostenible	95

Índice de figuras

1.1	Categorías de Objetos cercanos a la Tierra (NEOs) según su órbita (fuente: <i>Lahore Astronomical Society</i>).	4
1.2	Representación de las misiones espaciales Psyche y OSIRIS-REx de exploración de asteroides.	4
1.3	Escala de Turín. Clasificación del peligro de impacto asociado a los NEOs (fuente: <i>NTRS</i>).	5
1.4	Esquema de la misión DART que representa la nueva órbita del satélite Dimorphos alrededor del asteroide Didymos tras el impacto de la nave (fuente: <i>NASA</i>).	6
2.1	Comparación del efecto de diferentes perturbaciones para órbitas terrestres bajas (LEO) (fuente: <i>Fortescue</i> [21]).	10
2.2	Evolución de la densidad atmosférica frente a la altitud según el modelo <i>US Standard Atmosphere</i> 1976 (fuente: <i>United States Air Force</i>).	11
2.3	Esquema de sistema de coordenadas esférico (fuente: <i>Curtis</i> [16]).	13
2.4	Aceleraciones de perturbación por achatamiento calculadas para los cinco primeros armónicos (fuente: <i>Schaub</i> [44]).	16
2.5	Perturbación ejercida por un tercer cuerpo sobre la nave.	19
2.6	Ilustración del rango de empuje e impulso específico de diferentes sistemas de propulsión (fuente: <i>NASA</i>).	23
3.1	Diagrama que representa los elementos orbitales clásicos (COEs) de una órbita (fuente: <i>Wikimedia Commons</i>).	28
3.2	Diagrama que representa los ángulos de la anomalía excéntrica E , anomalía media M y anomalía verdadera ν (fuente: <i>Wikimedia Commons</i>).	29
3.3	(a) La línea AB cruza el cuerpo central C ($\theta_1 + \theta_2 \leq \theta$). (b) La línea AB es tangente al cuerpo central C ($\theta_1 + \theta_2 = \theta$) (fuente: <i>Curtis</i> [16]).	35
3.4	Paralelo horizontal lunar (HP , del inglés Horizontal Parallax) (fuente: <i>Curtis</i> [16]).	38
3.5	Esquema de órbita planetaria en el marco eclíptico heliocéntrico (fuente: <i>Curtis</i> [16]).	38
4.1	Interfaz de la aplicación web <i>Horizons System</i>	41
4.2	Misión Sonda Solar Parker de la NASA (fuente: <i>NASA</i>).	42
4.3	Escudo térmico de la Sonda Solar Parker formado por dos paneles de carbono-carbono reforzado [18] (fuente: <i>NASA</i>).	43
4.4	Línea de tiempo de la Sonda Solar Parker representando la velocidad y la distancia al Sol, desde su lanzamiento en 2018 hasta 2026 (fuente: <i>Wikimedia Commons</i>).	43
4.5	Propagación orbital de la Sonda Solar Parker <u>sin</u> perturbaciones aplicadas.	45
4.6	Propagación orbital de la Sonda Solar Parker <u>con</u> perturbaciones aplicadas.	46
4.7	Satélite radar español PAZ operado por Hisdesat (fuente: <i>Airbus</i>).	46
4.8	Órbita del satélite PAZ alrededor de la Tierra.	48
4.9	Propagación orbital del Satélite PAZ <u>sin</u> perturbaciones aplicadas.	49
4.10	Propagación orbital del Satélite PAZ <u>con</u> perturbaciones aplicadas.	50
4.11	Pérdida de órbita debida al rozamiento atmosférico.	50
4.12	Misión de exploración espacial Mars Express de la ESA (fuente: <i>ESA</i>).	51
4.13	Especificaciones de masa de los elementos de la nave Mars Express (fuente: <i>ESA</i>).	52
4.14	Propagación orbital de la nave Mars Express <u>sin</u> perturbaciones aplicadas.	53

4.15	Propagación orbital de la nave Mars Express <u>con</u> perturbaciones aplicadas.	54
5.1	Ventana completa de la interfaz gráfica para los datos de entrada del propagador orbital.	55
5.2	Interfaz gráfica: Datos de la nave y cuerpo central.	56
5.3	Interfaz gráfica: Estado inicial de la trayectoria.	56
5.4	Ejemplo de TLE del satélite Sentinel-1A (fuente: <i>CelesTrak</i>).	57
5.5	Interfaz gráfica: Perturbaciones orbitales y especificar objetivo.	60
5.6	Interfaz gráfica: Especificar motor e impulso.	60
5.7	Interfaz gráfica: Especificación de tiempo y opciones de salida.	61
6.1	Representación artística del motor NEXT-C durante la misión DART (fuente: <i>NASA</i>).	66
6.2	Motor de efecto Hall BHT-1500 (fuente: <i>Busek</i>).	67
6.3	Motor de plasma VASIMR (fuente: <i>Ad Astra Rocket Company</i>).	68
6.4	Ilustración del NEO 2022 NX1 junto a la Tierra (fuente: <i>Texas A&M University</i>).	69
6.5	Modelo 3D de la nave de la misión DART (fuente: <i>NASA</i>).	70
6.6	Trayectorias obtenidas en la propagación orbital con NEXT-C.	72
6.7	Evolución de la masa de la nave durante el tiempo de simulación para el motor NEXT-C.	72
6.8	Comparación de la distancia alcanzada al 2022 NX1 con el motor NEXT-C según la dirección aplicada.	73
6.9	Trayectorias obtenidas en la propagación orbital con BHT-1500.	73
6.10	Evolución de la masa de la nave durante el tiempo de simulación para el motor BHT-1500.	74
6.11	Comparación de la distancia alcanzada al 2022 NX1 con el motor BHT-1500 según la dirección aplicada.	75
6.12	Trayectorias obtenidas en la propagación orbital con VASIMR.	75
6.13	Evolución de la masa de la nave durante el tiempo de simulación para el motor VASIMR.	76
6.14	Comparación de la distancia alcanzada al 2022 NX1 con el motor VASIMR según la dirección aplicada.	76
6.15	Comparación de las masas finales para cada tipo de motor utilizado.	77
6.16	Comparación de la distancia alcanzada al 2022 NX1 con cada uno de los tres motores.	78

Índice de tablas

2.1	Valores de los armónicos zonales de la Tierra.	14
2.2	Segundo zonal armónico J_2 en el Sistema Solar.	15
2.3	Primeros polinomios de Legendre a partir de la fórmula de Rodrigues.	15
3.1	Coefficientes para calcular la posición de la Luna respecto a la Tierra.	37
3.2	Elementos orbitales planetarios y sus índices de cambio por siglo.	39
4.1	Datos de entrada seleccionados para la propagación orbital de la Sonda Solar Parker.	44
4.2	Datos de entrada seleccionados para la propagación orbital del Satélite PAZ.	48
4.3	Datos de entrada seleccionados para la propagación orbital de la nave Mars Express.	52
5.1	Línea de título del formato TLE.	57
5.2	Primera línea del formato TLE.	58
5.3	Segunda línea del formato TLE.	59
6.1	Especificaciones técnicas del motor iónico NEXT-C.	66
6.2	Especificaciones técnicas del motor de efecto Hall BHT-1500.	67
6.3	Especificaciones técnicas del motor de plasma VASIMR.	68
6.4	Datos de entrada seleccionados para la propagación orbital de la nave.	71
6.5	Estado inicial $[\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]$ de la nave en coordenadas heliocéntricas.	71
6.6	Comparación de las distancias mínimas con cada motor estudiado y cuándo se alcanzan.	78
8.1	Especificaciones técnicas del equipo informático.	88
8.2	Requisitos mínimos del sistema para implementación de Python.	88
9.1	Costes de personal desglosado por horas.	90
9.2	Costes de software desglosado por horas.	91
9.3	Resumen de los costes totales desglosados por categorías.	91
10.1	Grado de relación del trabajo con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS).	95

Parte I

MEMORIA

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Existen múltiples y diferentes tipos de cuerpos celestes en el universo. Según sus propiedades, como la composición, la masa y las atracciones gravitatorias que afectan sobre su órbita, se categorizan en diferentes familias. Los cuerpos principales, de los que se compone cualquier galaxia, son las estrellas, los planetas y los satélites naturales o lunas que orbitan a estos últimos. Sin embargo, en los sistemas planetarios como el Sistema Solar, existen otros objetos naturales menores que orbitan alrededor de la estrella central. Dependiendo de la trayectoria que siguen estos cuerpos y de su estructura, se pueden subdividir fundamentalmente en asteroides, cometas y meteoroides. A grandes rasgos, los asteroides son cuerpos rocosos relativamente pequeños que siguen trayectorias heliocéntricas; los cometas suelen estar compuestos por polvo y hielo, que se subliman al acercarse al Sol generando las comas y colas características de estos objetos; y los meteoroides son pequeños fragmentos de roca, los cuales adquieren la denominación de meteoros cuando alcanzan la atmósfera terrestre y de meteoritos cuando no se queman completamente y alcanzan la superficie de la Tierra.

El desarrollo y evolución en la exploración espacial de las últimas décadas ha implicado el descubrimiento y ratificación de diversos cuerpos celestes. Durante este tiempo, se ha confirmado la existencia de más de 600.000 asteroides y cometas dentro de los límites del Sistema Solar, de los cuáles, más de 20.000 son Objetos cercanos a la Tierra (NEOs, por sus siglas en inglés *Near-Earth Objects*). Se considera NEO a cualquier cuerpo menor que orbite alrededor del Sol siempre que cumpla la condición que dicta que su perihelio (la mayor aproximación al Sol en su órbita) no sea mayor de 1,3 veces la distancia de la Tierra al Sol (AU , Unidad Astronómica). Dependiendo de la trayectoria que siguen estos objetos, la cual puede variar con el tiempo, se pueden dividir los NEOs en tres clases diferentes (ver [Figura 1.1](#)) [49]:

- Asteroides Amor (*Amor Asteroids*): aquellos NEOs cuya órbita es completamente exterior a la terrestre manteniéndose dentro de las 1,3 AU .
- Asteroides Apolo (*Apollo Asteroids*): estos NEOs cruzan la órbita de la Tierra pero tienen una órbita cuyo semieje mayor es superior a la terrestre.
- Asteroides Atón (*Aten Asteroids*): son los NEOs que cruzan la órbita de la Tierra con un semieje mayor más pequeño que el de la órbita terrestre (1 AU). Cuando su órbita se encuentra totalmente contenida en la órbita terrestre, se consideran Asteroides Atira.

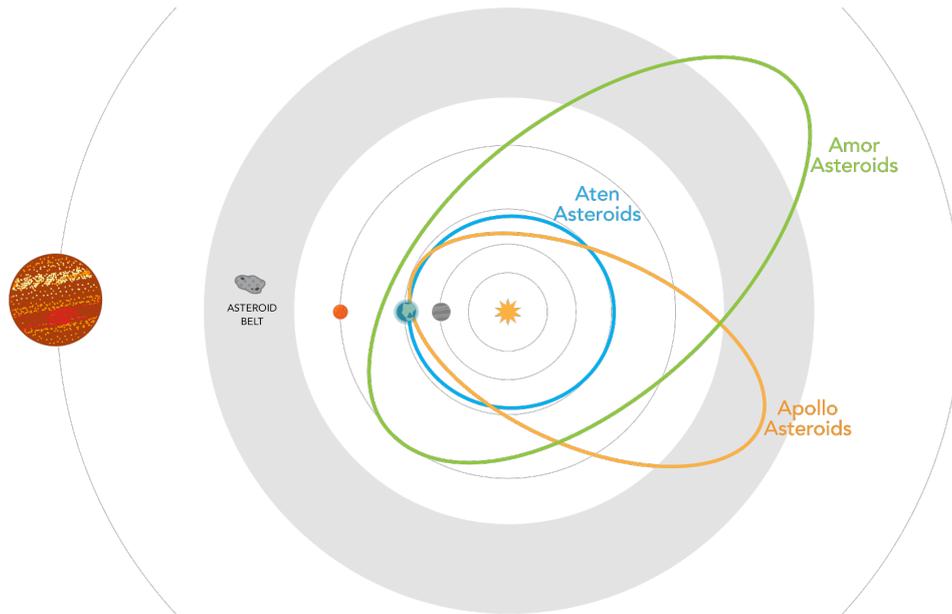
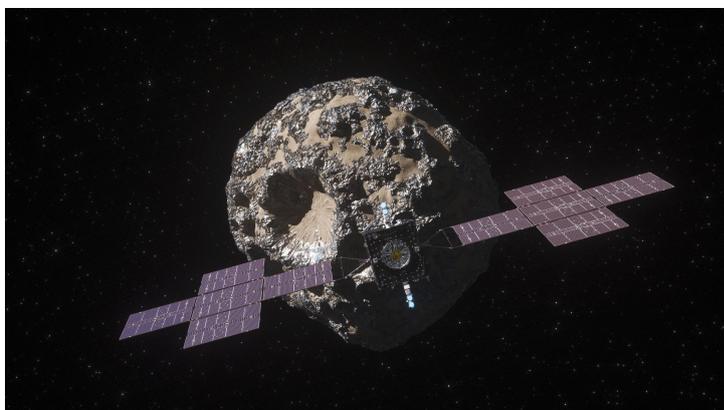


Figura 1.1: Categorías de Objetos cercanos a la Tierra (NEOs) según su órbita (fuente: *Lahore Astronomical Society*).

Estos Objetos cercanos a la Tierra son muy estudiados actualmente y su investigación puede ser interesante por diferentes motivos.

En primer lugar, son relevantes a nivel científico ya que muchos de ellos son cuerpos inalterados y tanto sus componentes como su estructura son elementos atractivos para su estudio que pueden revelar información sobre la historia del Sistema Solar y su formación. Además, algunos de ellos están compuestos por materiales poco comunes y valiosos. Es por esto que la minería de asteroides de este tipo es un campo actualmente emergente que podrá ser trascendental para la evolución de la industria espacial e incluso terrestre. Un ejemplo destacable que ilustra este carácter es el caso del asteroide Psyche ([Figura 1.2a](#)) que, aunque no es considerado un NEO debido a que se encuentra en el cinturón de asteroides entre Marte y Júpiter, es muy relevante ya que está compuesto por hierro y níquel. Y, según los datos obtenidos de la misión espacial de la NASA con el mismo nombre Psyche [2], estaría valorado en más de 10 trillones de dólares estadounidenses.



(a) Misión Psyche de la NASA que explora el asteroide Psyche (fuente: *NASA-JPL*).



(b) Representación de la nave de la misión OSIRIS-REx (fuente: *NASA*).

Figura 1.2: Representación de las misiones espaciales Psyche y OSIRIS-REx de exploración de asteroides.

Por otro lado, es destacable el impulso que genera el estudio de los NEOs al desarrollo de la tecnología, ya que el seguimiento e investigación de estos cuerpos fomenta la exploración y explotación de recursos espaciales que, a su vez, incita a la cooperación internacional. Misiones como la OSIRIS-REx (*Origins, Spectral Interpretation, Resource Identification, Security-Regolith Explorer*) [37], encargada de estudiar y recoger muestras del asteroide próximo a la Tierra Benu es un claro ejemplo del atractivo de estos cuerpos por su relativa cercanía que permite preparar a la humanidad para futuras misiones espaciales más lejanas (Figura 1.2b).

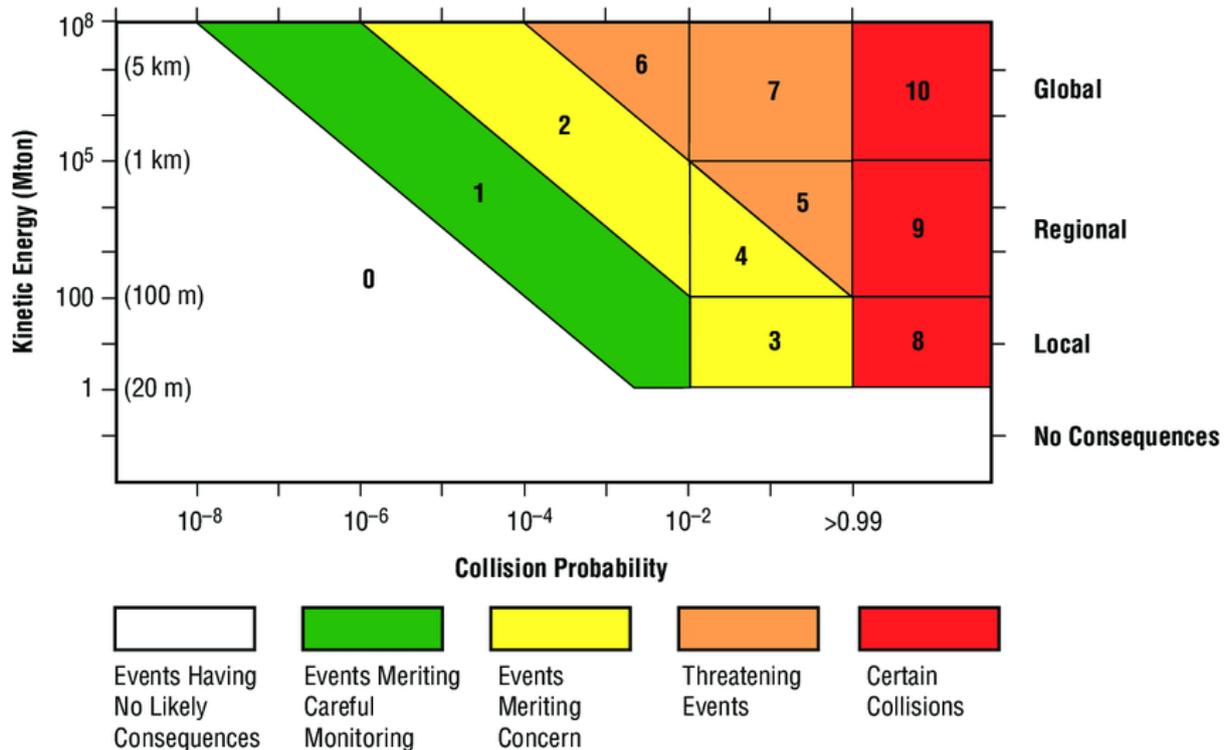


Figura 1.3: Escala de Turín. Clasificación del peligro de impacto asociado a los NEOs (fuente: NTRS).

Sin embargo, los NEOs no sólo son relevantes a nivel de exploración científica, sino que al ser objetos cercanos a la esfera de influencia terrestre, pueden suponer un riesgo considerable. Si un NEO cruza la órbita de la Tierra y es lo suficientemente grande, se considera un objeto potencialmente peligroso (PHO, del inglés *Potentially Hazardous Object*). Existen dos escalas de medida que clasifican el riesgo que presenta un NEO identificado basándose en las consecuencias que tendría su impacto con la Tierra: la escala de Turín más simple, representada en la Figura 1.3, y la escala de Palermo más compleja [20]. Un impacto significativo podría tener consecuencias catastróficas, ya sea a nivel regional como el llamado *Bólido de Tunguska* [4] que afectó a la zona de Siberia Oriental en 1908, o a nivel global como el famoso asteroide *Chicxulub* [31] que originó la extinción de los dinosaurios hace unos 66 millones de años. Por este motivo, el seguimiento y vigilancia de los NEOs es importante ya que conlleva la protección del planeta. En los últimos años se han desarrollado estrategias de defensa para desviar asteroides potencialmente peligrosos como la misión DART (*Double Asteroid Redirection Test*) [30], que colisionó deliberadamente contra el asteroide Dimorphos, satélite de Didymos, para probar si el impacto de una nave espacial podría desviar con éxito un asteroide en curso de colisión con la Tierra, cuyo esquema se representa en la Figura 1.4.

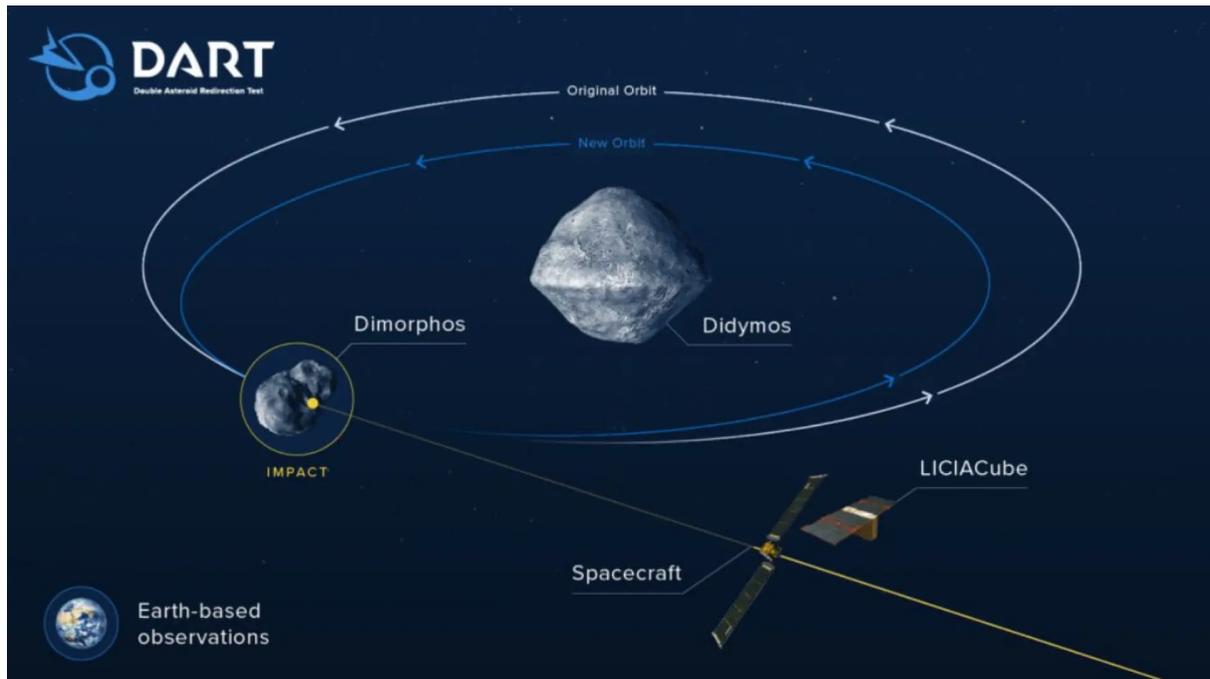


Figura 1.4: Esquema de la misión DART que representa la nueva órbita del satélite Dimorphos alrededor del asteroide Didymos tras el impacto de la nave (fuente: NASA).

1.2. Objetivos

Para el estudio tanto de los NEOs como de cualquier otro cuerpo celeste o nave espacial, es necesario calcular sus elementos orbitales en un instante futuro. Con este propósito, el objetivo principal de este trabajo de fin de máster consiste en desarrollar un propagador orbital que permita simular las trayectorias espaciales a partir de una época dada, utilizando el lenguaje de programación Python para implementar algoritmos de solución numérica de ecuaciones diferenciales. Con la finalidad de llevar a cabo este análisis computacional, es necesario tener en cuenta las perturbaciones más relevantes que afectan al movimiento de los cuerpos en el espacio debido a las fuerzas que son ejercidas sobre ellos. Aunque se comentarán con detalle a lo largo del documento, estas perturbaciones se pueden dividir en dos grandes grupos: naturales, que corresponden a las diferentes fuerzas que interactúan con el cuerpo de estudio de manera espontánea; y artificiales, que corresponden a los impulsos efectuados mediante propulsión de abordó o que generan empuje con algún tipo de motor.

Las misiones espaciales pueden ser muy diferentes entre sí y sus requisitos variar según la meta que se desee alcanzar. Para satisfacer estas condiciones, otro objetivo impuesto es el de desarrollar una interfaz gráfica utilizando Python que permita imponer los requerimientos necesarios para la misión. Se pretende que el programa sea capaz de introducir los datos de entrada necesarios para resolver el problema de estudio de una manera eficiente, así como elegir la información deseada para obtener por pantalla como resultado. Dependiendo del análisis que se quiera llevar a cabo, habrá que determinar los parámetros y las variables que se deban tener en consideración. Para ello, el propósito es conseguir que la interfaz sea amigable permitiendo una interacción detallada pero sencilla con el usuario.

Capítulo 2

Marco teórico

Para la elaboración del propagador orbital, se han de tener en cuenta las diferentes fuerzas que intervienen en la mecánica orbital y que afectan a la trayectoria que siguen los cuerpos que se mueven en el espacio. En este capítulo se recoge la explicación teórica de las leyes físicas y el desarrollo matemático que se han utilizado en la programación del propagador. Para ello, se han utilizado como principal referencia dos grandes libros de la tecnología espacial: *Orbital Mechanics for Engineering Students* de Howard D. Curtis [16] y *Fundamentals of Astrodynamics and Applications* de David A. Vallado [50].

2.1. Problema de los dos cuerpos

En el estudio de la mecánica orbital, se comienza con el problema clásico que determina el movimiento de dos cuerpos en el espacio teniendo sólo en cuenta la atracción gravitatoria entre ambos, sin ninguna otra fuerza externa.

2.1.1. Ecuaciones de movimiento en un marco inercial

En primer lugar, se parte de dos cuerpos independientes que tienen cierta masa y ocupan una posición relativa a un marco de referencia dado. Las coordenadas del centro de masas de cada uno de los cuerpos en un sistema de referencia XYZ serían

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= x_1\hat{\mathbf{I}} + y_1\hat{\mathbf{J}} + z_1\hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{r}_2 &= x_2\hat{\mathbf{I}} + y_2\hat{\mathbf{J}} + z_2\hat{\mathbf{K}}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Por tanto, para calcular la posición del vector del segundo cuerpo respecto del primero sería

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\tag{2.2}$$

El vector unitario que une los dos cuerpos se define entonces como

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}\tag{2.3}$$

siendo r la norma del vector posición \mathbf{r}

$$r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.4)$$

Teniendo en cuenta que al cuerpo 1 sólo es atraído gravitacionalmente por el cuerpo 2, la fuerza que ejerce el segundo respecto al primero es

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \quad (2.5)$$

donde m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos, G es la constante de gravitación universal y $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$ representa que el sentido de la fuerza va de m_1 a m_2 .

Aplicando la segunda ley de Newton sobre el cuerpo m_1 y combinándola con la ley de gravitación se obtiene

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \longrightarrow \quad m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \quad (2.6)$$

donde $\ddot{\mathbf{r}}_1$ es la aceleración absoluta que sufre m_1 .

Así mismo, siguiendo la tercera ley de Newton de acción-reacción, se define la fuerza \mathbf{F}_{21} que ejerce el cuerpo m_1 sobre m_2 como la contraria a la fuerza \mathbf{F}_{12} ($\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$). Por tanto,

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \quad (2.7)$$

2.1.2. Ecuaciones de movimiento relativo

Para conocer las ecuaciones del movimiento relativo entre los cuerpos se parte del vector de aceleración relativa. Para obtenerlo, derivando (2.2) respecto del tiempo

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (2.8)$$

Obteniendo la aceleración con (2.6) y (2.7) para los dos cuerpos

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{Gm_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{Gm_1}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Y sustituyendo para el movimiento relativo en (2.8), se obtiene

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \quad (2.10)$$

Para simplificar las variables constantes del problema, se define el parámetro de gravitación μ como

$$\mu = G(m_1 + m_2) \quad (2.11)$$

Se suele expresar el parámetro μ con la unidad de medida de kilómetros cúbicos por segundo al cuadrado (km^3/s^2). Sustituyendo en (2.10) se puede reescribir la ecuación de aceleración relativa como

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (2.12)$$

2.2. Perturbaciones orbitales

Se conocen como órbitas o trayectorias Keplerianas a los recorridos que siguen los objetos en el espacio asumiendo sólo la solución del problema de los dos cuerpos. Es decir, teniendo en cuenta simplemente la interacción mutua entre los cuerpos asumiendo campos gravitacionales esféricamente simétricos en ambos.

Cualquier otro efecto que provoca una variación o desviación en la trayectoria Kepleriana, se conoce como perturbación. Existen diferentes fuerzas de perturbación que, según la situación de cada cuerpo, afectan más o menos al movimiento. Para representar el efecto de estas perturbaciones, se añade el vector \mathbf{p} a la ecuación principal (2.12) del movimiento relativo entre dos cuerpos.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{p} \quad (2.13)$$

El vector \mathbf{p} recoge todas las aceleraciones externas que pueden afectar a la trayectoria del cuerpo de estudio. Éstas pueden ser, entre otras: el efecto de la resistencia aerodinámica de la atmósfera, el achatamiento de los cuerpos, la presión ejercida por la radiación solar, la atracción gravitatoria debida a otros cuerpos celestes o las generadas por sistemas de propulsión. Dependiendo de la situación, algunas de ellas serán más importantes que otras que podrían llegar a despreciarse en comparación. Sin embargo, salvo a excepción de la resistencia aerodinámica a altitudes bajas, la fuerza más influyente será la producida por la atracción gravitatoria del cuerpo central en el sistema de estudio.

Los efectos de las perturbaciones suelen estar directamente relacionados con la distancia entre el objeto de estudio y el cuerpo que ejerce la perturbación, aunque existen otros factores como las masas o las superficies de los elementos del sistema. En la [Figura 2.1](#) se representa el efecto que ejercen distintas perturbaciones en función de la altitud de la nave tomando la Tierra como cuerpo central, extraído del libro *Spacecraft Systems Engineering* por *Peter Fortescue*, *Graham Swinerd* y *John Stark* [21].

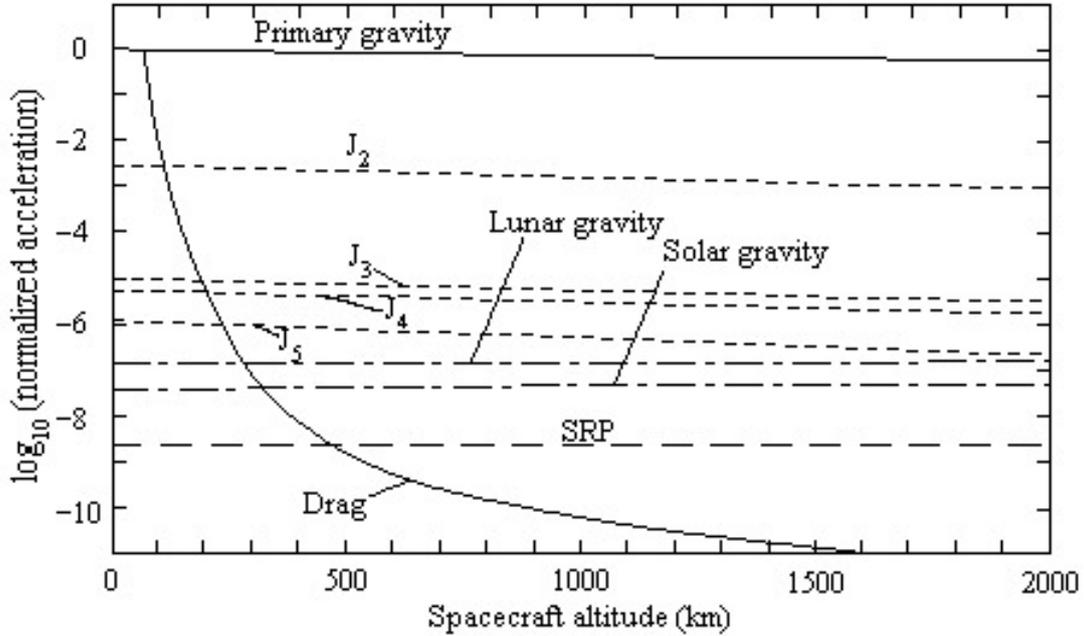


Figura 2.1: Comparación del efecto de diferentes perturbaciones para órbitas terrestres bajas (LEO) (fuente: Fortescue [21]).

Se aprecia, en primer lugar, cómo el drag atmosférico puede ser capaz de sacar de órbita un satélite a altitudes por debajo de 100 km. Sin embargo, su efecto decrece rápidamente hasta prácticamente desaparecer a altitudes por encima de los 1000 km. Por otro lado, los elementos J_k que aparecen en la figura corresponden a los armónicos zonales del planeta, aunque se comentarán más adelante, están relacionados con el achatamiento de la Tierra. Se aprecia cómo este achatamiento genera una perturbación muy relevante de un orden de $10^{-2}a_0$, siendo a_0 la aceleración que ejerce la gravitación primaria del sistema ($a_0 = \mu/r^2$). El efecto de la gravitación de otros cuerpos celestes notables como son para el sistema terrestre la Luna y el Sol, ejercen una aceleración perturbadora similar de orden de unos $10^{-7}a_0$. Y, aunque se comentará más adelante cómo cambia para otros casos de estudio, se puede ver que para este tipo de órbitas la presión ejercida por la radiación solar tiene un efecto menos destacable que otras perturbaciones, del orden de $10^{-9}a_0$.

A continuación, se verá el proceso de evaluación numérica para cada una de estas perturbaciones y cómo afectarán en el cálculo de la trayectoria del objeto de estudio. Además de qué elementos y parámetros son más relevantes para cada caso y los métodos matemáticos utilizados para la propagación orbital.

2.2.1. Resistencia atmosférica

La resistencia atmosférica o *drag* es el efecto de rozamiento que ejerce el aire sobre una nave o satélite. Este efecto será analizable sólo cuando la Tierra sea el cuerpo central del sistema de estudio, ya que es necesario conocer el comportamiento de la atmósfera y la densidad del aire para evaluar su impacto. La perturbación por resistencia atmosférica puede alterar la velocidad de la nave provocando una disminución de altitud en su órbita. De hecho, el rozamiento del aire

puede provocar que el satélite caiga de su órbita llegando a incrementar su temperatura hasta por encima de los 2000 °C.

En el caso de la Tierra, se acepta comúnmente que el espacio 'comienza' a los 100 km de altitud. Debido a que el 99,999 % de la atmósfera terrestre se encuentra por debajo de los 100 km, se considera que por encima de esa altitud la densidad del aire es suficientemente baja para que el rozamiento no provoque la pérdida total de la órbita de un satélite. Sin embargo, la densidad será un factor clave para determinar cómo afecta esta perturbación a la trayectoria orbital.

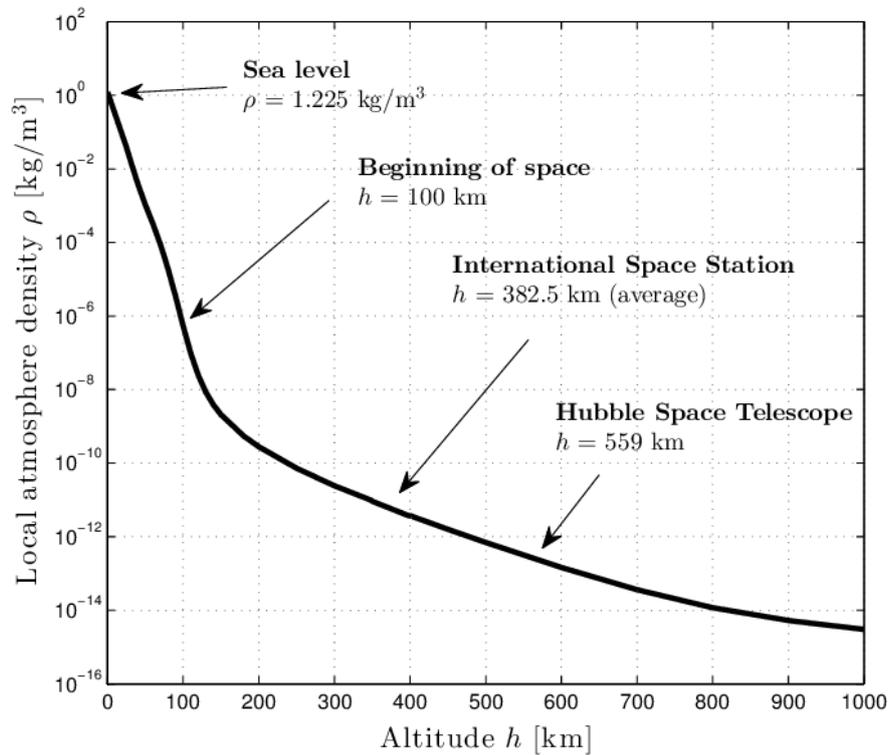


Figura 2.2: Evolución de la densidad atmosférica frente a la altitud según el modelo *US Standard Atmosphere 1976* (fuente: *United States Air Force*).

Existen diferentes métodos de cálculo de la variación de la densidad del aire según la altitud. En este trabajo se ha utilizado el modelo estándar estadounidense de 1976, mejor conocido del inglés como *US Standard Atmosphere 1976* (USSA76) [40]. Este modelo sigue un proceso exponencial que parte de los datos de densidades (ρ_i) para 28 altitudes (h_i) obtenidos de USSA76 con los que se interpola siguiendo la función

$$\rho(z) = \rho_i e^{-(z-z_i)/H_i} \quad (2.14)$$

donde $z_i \leq z \leq z_{i+1}$ y $H_i = -(z_{i+1} - z_i) / \ln(\rho_{i+1}/\rho_i)$.

En la [Figura 2.2](#) se muestra la evolución de la densidad del aire según este modelo atmosférico frente a la altitud destacando algunos puntos importantes. Sin embargo, cabe destacar que, siguiendo el USSA76, se asume que la atmósfera se comporta como una cáscara de gas

perfectamente esférica de 1000 km de grosor que envuelve al planeta. Y esto conlleva la asunción de que las propiedades atmosféricas se mantienen invariables y consistentes con un periodo de actividad solar moderado.

Una vez conocida la densidad a la altura de estudio, se puede calcular la perturbación debida a la resistencia aerodinámica. En primer lugar, hay que tener en cuenta que la atmósfera cuenta con una velocidad \mathbf{v}_{atm} , ya que se mueve con la rotación de la Tierra. Por tanto, para calcular la velocidad relativa de una nave respecto a la de la atmósfera sería

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{atm}} \quad (2.15)$$

siendo \mathbf{v} la velocidad de la nave en el marco inercial. Para conocer la velocidad relativa en cada punto de estudio, será necesario conocer el valor de \mathbf{v}_{atm} .

Se pueden diferenciar dos tipos de 'día' según el criterio: un día sidéreo es el tiempo que tarda la Tierra en completar una rotación sobre su eje relativa al espacio inercial (con las estrellas fijas), y un día sidónico corresponde al tiempo conocido de 24 h que aparentemente le lleva al Sol girar alrededor de la Tierra. Debido a que la Tierra se mueve en el espacio, no se puede considerar un día sidérico y un día sidónico iguales. Sin embargo, se conoce que la Tierra avanza $2\pi/365,26$ rad en su órbita alrededor del Sol en el tiempo que le lleva hacer un giro completo sobre su eje. Por tanto, se puede calcular su velocidad angular ω_E como

$$\omega_E = \frac{[2\pi + 2\pi/365,26]rad}{24h} \frac{1h}{3600s} = 7,29217 \cdot 10^{-5} rad/s \quad (2.16)$$

Imponiendo la velocidad angular de la atmósfera como vector $\omega_{\mathbf{E}} = [0, 0, \omega_E]$, se puede calcular la velocidad relativa de la ecuación (2.15) como

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v} - \omega_{\mathbf{E}} \times \mathbf{r} \quad (2.17)$$

donde \mathbf{r} corresponde al vector posición de la nave.

Por otro lado, dado que la fuerza de resistencia aerodinámica actúa en la dirección opuesta a la velocidad relativa de la nave, se puede escribir como

$$\mathbf{D} = -D\hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}} \quad (2.18)$$

donde $\hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{rel}}/v_{\text{rel}}$ es el vector unitario que indica la dirección de la velocidad relativa y D es un parámetro de drag que se define como

$$D = \frac{1}{2}\rho v_{\text{rel}}^2 C_D A \quad (2.19)$$

en el que ρ es la densidad atmosférica, C_D es el coeficiente de resistencia aerodinámica adimensional y A equivale al área frontal de la nave, es decir, el área normal a la dirección de su velocidad.

Tomando m como la masa de la nave, finalmente la aceleración de perturbación debida a la resistencia atmosférica sería

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{D}}{m} = -\frac{1}{2}\rho v_{rel} \left(\frac{C_D A}{m} \right) \mathbf{v}_{rel} \quad (2.20)$$

El término escrito entre paréntesis es importante, ya que determina la eficiencia aerodinámica de la nave de estudio, sin embargo no existe un acuerdo universal respecto al nombre que recibe. En este trabajo, siguiendo la notación tomada por *Howard D. Curtis* en su libro [16], se llamará este parámetro coeficiente balístico

$$B = \left(\frac{C_D A}{m} \right) \quad (2.21)$$

En otros documentos se habla simplemente del coeficiente aerodinámico C_D como parámetro de referencia que cuantifica la eficiencia en el rozamiento frente al aire y también puede encontrarse el coeficiente balístico definido de forma inversa a (2.21), es decir, $\left(\frac{m}{C_D A} \right)$.

2.2.2. Efecto del achatamiento

A menudo se suele asumir que los planetas y otros cuerpos celestes tienen forma perfectamente esférica. Sin embargo, la rotación de éstos puede provocar protuberancias que hacen que su forma se asemeje a un esferoide estirado por el ecuador y achatado por los polos. Debido al efecto centrífugo generado por la rotación, el campo gravitacional del cuerpo varía con la latitud y con el radio.

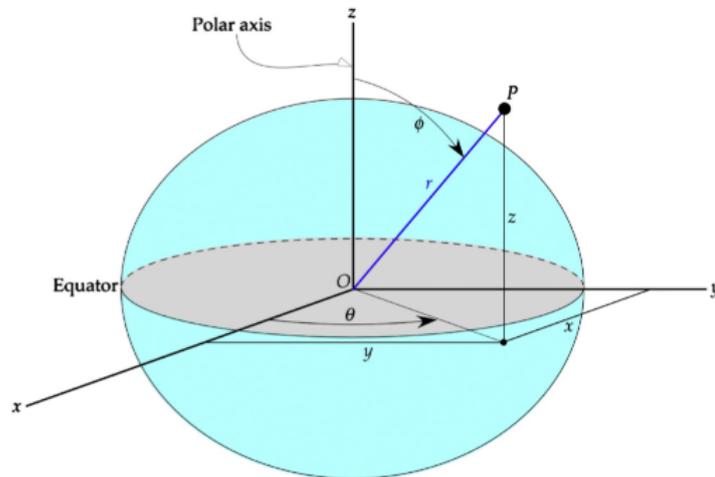


Figura 2.3: Esquema de sistema de coordenadas esféricas (fuente: Curtis [16]).

Para ver el efecto gravitacional del achatamiento, se parte de la representación del esferoide en coordenadas esféricas (ver [Figura 2.3](#)). El ángulo polar ϕ medido desde el eje z positivo hasta el eje radial r se calcula en función de las coordenadas cartesianas

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (2.22)$$

Teniendo en cuenta que el campo gravitacional es simétrico frente al eje de rotación del cuerpo, se asume que el ángulo azimutal θ no afecta a la perturbación. *Richard H. Battin* [9] define la perturbación gravitacional por achatamiento $\Phi(r, \phi)$ a partir de series infinitas

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r}\right)^k P_k(\cos \phi) \quad (2.23)$$

donde J_k son los armónicos zonales del cuerpo, R es el radio en el ecuador ($R/r \leq 1$) y P_k son los polinomios de Legendre.

Los armónicos zonales son valores adimensionales que se obtienen a partir de observaciones astronómicas. Es por este motivo que, dependiendo del cuerpo de estudio, se tendrán más o menos datos de estudio debido a la lejanía y otros factores que puedan entorpecer el análisis. Además, son únicos para cada planeta o cuerpo.

Vallado [50] recoge los valores de los cinco primeros armónicos zonales para la Tierra:

J_k	ARMÓNICOS ZONALES
J_2	$1082,63 \cdot 10^{-6}$
J_3	$-2,52 \cdot 10^{-6}$
J_4	$-1,61 \cdot 10^{-6}$
J_5	$-0,15 \cdot 10^{-6}$
J_6	$0,57 \cdot 10^{-6}$

Tabla 2.1: Valores de los armónicos zonales de la Tierra.

La enumeración comienza con $k = 2$ ya que $J_1 = 0$. Esto se debe a que el origen de coordenadas esféricas de los cuerpos de estudio se encuentra en su centro de masas. Se puede apreciar cómo J_2 es el valor más relevante y el que más afecta a la perturbación gravitacional, tal y como se adelantaba en la [Figura 2.1](#). Para valores de $k > 6$, todos los armónicos tiene órdenes de magnitud más de tres veces menores que J_2 .

Obviamente, la Tierra es el cuerpo más observado y, por tanto, del que más información se conoce respecto a su achatamiento y del que se tiene registrado un mayor número de datos de zonales armónicos. No obstante, se recogen en la [Tabla 2.2](#) los valores más relevantes del resto de planetas del Sistema Solar así como del mismo Sol, fundamental para la propagación de trayectorias heliocéntricas.

PLANETA	J_2
Mercurio	$60 \cdot 10^{-6}$
Venus	$4,458 \cdot 10^{-6}$
Marte	$1,96045 \cdot 10^{-3}$
Júpiter	$14,736 \cdot 10^{-3}$
Saturno	$16,298 \cdot 10^{-3}$
Urano	$3,34343 \cdot 10^{-3}$
Neptuno	$3,411 \cdot 10^{-3}$
(Sol)	$0,2 \cdot 10^{-6}$

Tabla 2.2: Segundo zonal armónico J_2 en el Sistema Solar.

Por otro lado, los polinomios de Legendre se pueden calcular a partir de la fórmula de su compatriota francés Rodrigues

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad (2.24)$$

De ella, se obtiene el número de polinomios de Legendre necesarios en función del número de armónicos zonales definidos para resolver la ecuación (2.23):

$P_k(x)$	POLINOMIOS DE LEGENDRE
$P_2(x)$	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x)$	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x)$	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
$P_6(x)$	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

Tabla 2.3: Primeros polinomios de Legendre a partir de la fórmula de Rodrigues.

Como ejemplo de cálculo y debido a que es el armónico más relevante, se representa la contribución del J_2 a la perturbación gravitacional por achatamiento

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu J_2}{r} \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) \quad (2.25)$$

donde se aprecia que $\Phi = 0$ cuando $\cos \phi = \sqrt{1/3}$. Se puede deducir que la perturbación será nula para unos ángulos de latitud de $\pm 35^\circ$. La franja que se forma entre estas latitudes refleja la protuberancia ecuatorial que, en cambio, resultará en el achatamiento de los polos.

Para calcular la aceleración obtenida por la perturbación gravitacional debida a este achatamiento, habrá que resolver el gradiente negativo de Φ ,

$$\mathbf{p} = -\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \quad (2.26)$$

Teniendo en cuenta que se parte de coordenadas esféricas, se calcula el gradiente mediante la regla de la cadena obteniendo las derivadas parciales requeridas. La aceleración de perturbación debida a J_2 será la más significativa, como se ha podido observar anteriormente. Sin embargo, el resto de armónicos pueden ser evaluados también, ya que pueden ser relevantes dependiendo del cuerpo de estudio y del número de valores de J_k conocidos. De *Analytical Mechanics of Space Systems* [44, p. 553] por *H. Schaub* y *J.L. Junkins*, se listan a continuación las aceleraciones de los cinco primeros armónicos, de J_2 a J_6 :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{J_2} &= -\frac{3}{2}J_2\left(\frac{\mu}{r^2}\right)\left(\frac{r_{\text{eq}}}{r}\right)^2 \begin{pmatrix} \left(1 - 5\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)\frac{x}{r} \\ \left(1 - 5\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)\frac{y}{r} \\ \left(3 - 5\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)\frac{z}{r} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_{J_3} &= \frac{1}{2}J_3\left(\frac{\mu}{r^2}\right)\left(\frac{r_{\text{eq}}}{r}\right)^3 \begin{pmatrix} 5\left(7\left(\frac{z}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{r}\right)\right)\frac{x}{r} \\ 5\left(7\left(\frac{z}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{r}\right)\right)\frac{y}{r} \\ 3\left(1 - 10\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{35}{3}\left(\frac{z}{r}\right)^4\right)\frac{z}{r} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_{J_4} &= \frac{5}{8}J_4\left(\frac{\mu}{r^2}\right)\left(\frac{r_{\text{eq}}}{r}\right)^4 \begin{pmatrix} \left(3 - 42\left(\frac{z}{r}\right)^2 + 63\left(\frac{z}{r}\right)^4\right)\frac{x}{r} \\ \left(3 - 42\left(\frac{z}{r}\right)^2 + 63\left(\frac{z}{r}\right)^4\right)\frac{y}{r} \\ \left(15 - 70\left(\frac{z}{r}\right)^2 + 63\left(\frac{z}{r}\right)^4\right)\frac{z}{r} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_{J_5} &= \frac{J_5}{8}\left(\frac{\mu}{r^2}\right)\left(\frac{r_{\text{eq}}}{r}\right)^5 \begin{pmatrix} 3\left(35\left(\frac{z}{r}\right) - 210\left(\frac{z}{r}\right)^3 + 231\left(\frac{z}{r}\right)^5\right)\frac{x}{r} \\ 3\left(35\left(\frac{z}{r}\right) - 210\left(\frac{z}{r}\right)^3 + 231\left(\frac{z}{r}\right)^5\right)\frac{y}{r} \\ \left(693\left(\frac{z}{r}\right)^6 - 945\left(\frac{z}{r}\right)^4 + 315\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 15\right)\frac{z}{r} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_{J_6} &= -\frac{J_6}{16}\left(\frac{\mu}{r^2}\right)\left(\frac{r_{\text{eq}}}{r}\right)^6 \begin{pmatrix} \left(35 - 945\left(\frac{z}{r}\right)^2 + 3465\left(\frac{z}{r}\right)^4 - 3003\left(\frac{z}{r}\right)^6\right)\frac{x}{r} \\ \left(35 - 945\left(\frac{z}{r}\right)^2 + 3465\left(\frac{z}{r}\right)^4 - 3003\left(\frac{z}{r}\right)^6\right)\frac{y}{r} \\ \left(245 - 2205\left(\frac{z}{r}\right)^2 + 4851\left(\frac{z}{r}\right)^4 - 3003\left(\frac{z}{r}\right)^6\right)\frac{z}{r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Figura 2.4: Aceleraciones de perturbación por achatamiento calculadas para los cinco primeros armónicos (fuente: *Schaub* [44]).

Es necesario señalar que en este trabajo se ha considerado por aproximación que el efecto de perturbación gravitacional por achatamiento varía sólo con la latitud ϕ . Sin embargo, debido a la geometría terrestre, el campo gravitacional cambiaría también longitudinalmente θ . Ésto incrementaría notablemente la complejidad matemática del cálculo de las perturbaciones, ya que habría que incluir el ángulo azimutal a la ecuación (2.23) obteniendo lo que se conoce como armónicos sectoriales. Sería relevante incorporar este nivel de precisión para predicciones orbitales de larga duración (ver *Vallado* [50] para más detalle).

2.2.3. Presión por radiación solar

La radiación emitida por el Sol está constituida por fotones que viajan a la velocidad de la luz. Aunque estos fotones se consideran partículas sin masa, sí cuentan con energía y momento generando una presión que actúa como perturbación. La energía de un fotón es hf , donde f es la frecuencia de su onda electromagnética y h es la constante de Planck ($h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s). El momento se define como hf/c , siendo c la velocidad de la luz ($c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s).

La superficie visible del Sol se conoce como fotosfera. Emite una radiación que abarca prácticamente todo el espectro electromagnético. Según la ley de Boltzmann, la intensidad de la potencia irradiada es σT^4 , donde T es la temperatura absoluta del cuerpo y σ es la constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$). La temperatura efectiva de la fotosfera es de 5777 K, por tanto la intensidad irradiada en la superficie solar es

$$S_0 = \sigma T^4 = 5,670 \cdot 10^{-8} (5777)^4 = 63,15 \cdot 10^6 W/m^2 \quad (2.27)$$

Para calcular la intensidad de radiación electromagnética a cierta distancia del Sol, se sigue la ley cuadrática inversa

$$S = S_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \quad (2.28)$$

donde R_0 es el radio de la fotosfera y R es la distancia al centro del Sol.

El radio de la fotosfera es un valor que se asume constante e igual a 696.000 km, mientras que la distancia al Sol dependerá del caso de estudio. Para la órbita de la Tierra, que se puede asumir prácticamente circular, la intensidad de radiación, conocida como constante solar, sería

$$S = 63,15 \cdot 10^6 \left(\frac{696.000}{1AU} \right)^2 = 1367 W/m^2 \quad (2.29)$$

siendo AU la Unidad Astronómica que separa la Tierra del Sol. Sin embargo, por ejemplo para el caso de una órbita heliocéntrica elíptica, la intensidad irradiada no se consideraría constante y dependería de la distancia al Sol en cada situación orbital (ver [Sección 4.1](#)).

Esta intensidad es el llamado flujo de energía, que transporta los fotones desde la superficie solar a la dirección irradiada. Para obtener el momento del flujo habrá que dividir la energía entre la velocidad de la luz, tal y como se ha descrito al principio del capítulo. A este momento se le conoce como presión por radiación solar,

$$P_{SR} = \frac{S}{c} \quad (2.30)$$

Con los datos de la órbita terrestre, la presión solar obtenida sería $P_{SR} = 4,56 \cdot 10^{-6} N/m^2 = 4,56 \mu Pa$. Comparándola con el valor de la presión atmosférica a nivel del mar ($101 kPa$), se puede apreciar que, para este caso, la presión ejercida por la radiación solar es ínfima (más de diez órdenes de magnitud).

La fuerza de perturbación por radiación solar sería entonces

$$\mathbf{F} = -\nu \frac{S}{c} C_R A_s \hat{\mathbf{u}} \quad (2.31)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es el vector unitario que apunta desde satélite hacia el Sol y, por tanto, el signo negativo indica que la presión irradiada ejerce una fuerza en sentido contrario, desde la estrella alejándose de ella. ν es la 'función de sombra', siendo igual a 0 si el satélite se encuentra en la sombra de otro cuerpo como la Tierra o $\nu = 1$ si no lo está. C_R es el coeficiente de presión por radiación y se mueve entre 1 y 2. Si el objeto de estudio se considera un cuerpo negro, absorberá todo el momento irradiado por el flujo solar y C_R será igual a 1. Por otro lado, si $C_R = 2$, la radiación incidente será reflectada y el flujo será revertido doblando la fuerza ejercida sobre la nave. A_s corresponde con el área de absorción del satélite.

Tomando m como la masa del satélite, la aceleración de perturbación debida a la radiación solar sería

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -p_{SR}\hat{\mathbf{u}} \quad (2.32)$$

siendo la magnitud de la perturbación por radiación

$$p_{SR} = \nu \frac{S}{c} \frac{C_R A_s}{m} \quad (2.33)$$

De la misma forma que ocurría con la resistencia atmosférica, la perturbación por radiación solar claramente depende de la relación entre el área afectada y la masa del satélite. Las naves de gran superficie y baja masa serán las más afectadas por la presión irradiada, como es el caso de las velas solares.

2.2.4. Gravedad solar

Otra perturbación a tener en cuenta a la hora de propagar órbitas en el entorno del Sistema Solar, será la gravedad ejercida por el Sol sobre el cuerpo de estudio. Este tipo de influencia gravitatoria se estudia como un sistema de tres cuerpos en el espacio: el cuerpo central del sistema (1), la nave de estudio (2) y el tercer cuerpo, en este caso, el Sol (3).

Para calcular la aceleración que afecta a cada uno, habrá que conocer las aceleraciones que ejercen los otros dos cuerpos sobre el tercero en este sistema. Siguiendo el procedimiento desarrollado en el problema de los dos cuerpos (ver [Sección 2.1](#)) con las leyes de Newton, se obtienen las aceleraciones gravitacional a las que está sometida cada cuerpo,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^3} \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3} \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|^3} + \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|^3} \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde \mathbf{r}_i corresponde al vector posición de cada cuerpo en el marco inercial.

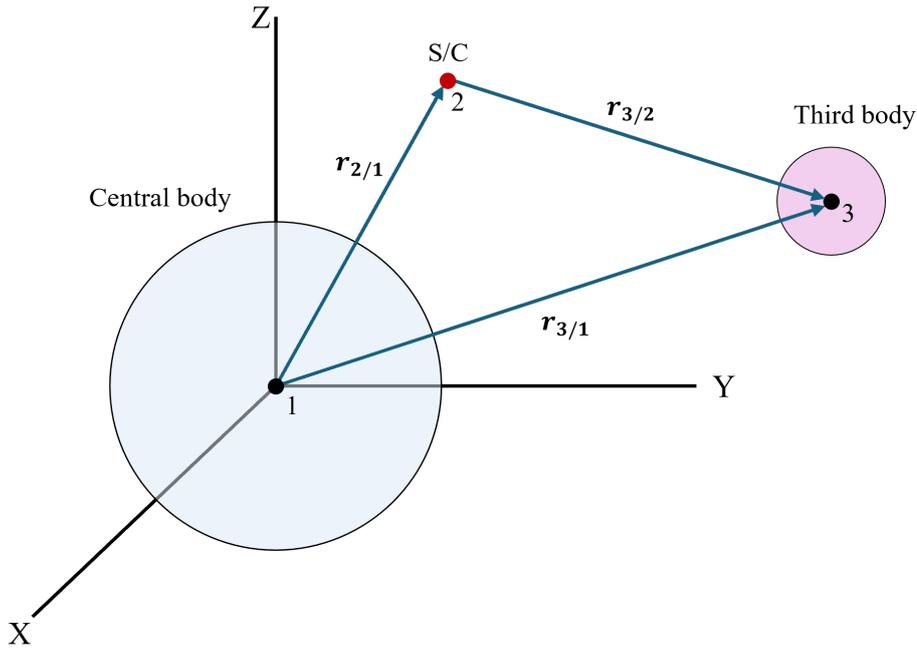


Figura 2.5: Perturbación ejercida por un tercer cuerpo sobre la nave.

De las aceleraciones obtenidas en (2.34), se puede calcular la aceleración de la nave (cuerpo 2) relativa al cuerpo central (cuerpo 1), $\mathbf{a}_{2/1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$,

$$\mathbf{a}_{2/1} = \left(\frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3} \right) - \left(\frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^3} \right) \quad (2.35)$$

Reagrupando términos y definiendo $\mu = G(m_1 + m_2)$ y $\mu_3 = Gm_3$, queda

$$\mathbf{a}_{2/1} = -\mu \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} + \mu_3 \left(\frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3} - \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^3} \right) \quad (2.36)$$

Este sería el caso general para el sistema definidos de tres cuerpos. En el caso de la perturbación por atracción gravitatoria del Sol se puede simplificar la notación de la siguiente manera:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, posición de la nave relativa al cuerpo central.

$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_{2/1}$, aceleración de la nave relativa al cuerpo central.

$\mathbf{r}_{\text{Sun}} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, posición del Sol relativa al cuerpo central.

$\mathbf{r}_{\text{Sun/s}} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$, posición del Sol relativa a la nave.

Reescribiendo con esta notación la ecuación (2.36) se llega a

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mu_{\text{Sun}} \left(\frac{\mathbf{r}_{\text{Sun/s}}}{r_{\text{Sun/s}}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\text{Sun}}}{r_{\text{Sun}}^3} \right) \quad (2.37)$$

donde μ es el parámetro gravitacional del cuerpo central del sistema y $\mu_{Sun} = 1,32712 \cdot 10^{11} km^3/s^2$ el del Sol. Se puede apreciar que esta ecuación es la aplicación a la perturbación por gravitación solar de la anteriormente definida (2.13). Por lo que el último término será

$$\mathbf{p} = \mu_{Sun} \left(\frac{\mathbf{r}_{Sun/s}}{r_{Sun/s}^3} - \frac{\mathbf{r}_{Sun}}{r_{Sun}^3} \right) \quad (2.38)$$

Si $\mathbf{p} = 0$, la ecuación pasaría a representar el movimiento fundamental Kepleriano de dos cuerpos desarrollado en (2.12).

Se ha de tener en cuenta que la aplicación de este proceso será sólo relevante para casos en los que el cuerpo central del sistema no sea el Sol. Si no, no tendría sentido el cálculo de la perturbación ya que en ese caso $\mathbf{r}_{Sun} = 0$. El Sol no estaría actuando como tercer cuerpo en el sistema, $\mathbf{r} = -\mathbf{r}_{Sun/s}$, y se estaría calculando doblemente el movimiento Kepleriano.

2.2.5. Gravedad lunar

Aunque el propagador orbital desarrollado en este trabajo no sólo está pensado para estudio de sistemas geocéntricos, sino que permite seleccionar otros cuerpos como objeto central del sistema, es obvio que la Tierra es uno de los cuerpos más relevantes. La gran mayoría de objetos enviados al espacio han orbitado o se encuentran orbitando a la Tierra. Por este motivo, se ha visto necesario y conveniente aplicar la perturbación provocada por la atracción gravitatoria de la Luna.

Para ello, se ha de seguir el mismo procedimiento llevado a cabo para el análisis de tres cuerpos con el que se ha obtenido la aceleración relativa en (2.36). Extrapolando e imponiendo que en este caso el tercer cuerpo sea la Luna, se puede reescribir la ecuación (2.38) de la perturbación por gravedad solar aplicado a la gravedad lunar

$$\mathbf{p} = \mu_m \left(\frac{\mathbf{r}_{m/s}}{r_{m/s}^3} - \frac{\mathbf{r}_m}{r_m^3} \right) \quad (2.39)$$

donde $\mu_m = 4903 km^3/s^2$ será el parámetro de gravitación de la Luna, $\mathbf{r}_{m/s}$ la posición de la Luna relativa a la nave y \mathbf{r}_m la posición de la Luna relativa al cuerpo central.

2.2.6. Gravedad planetaria

Otro tipo de perturbación relevante en el marco del Sistema Solar, será la atracción gravitatoria planetaria. Los planetas son los cuerpos más grandes y con mayor masa que orbitan alrededor del Sol y, por ello, la interacción gravitatoria que pueden ejercer debe de ser analizada.

Del mismo modo que ocurría con la gravedad solar, esta sección está desarrollada para tomar al planeta como un tercer cuerpo del sistema de estudio, con otro cuerpo como objeto central. Para

ello, el procedimiento llevado a cabo es el mismo que en (2.36) y la aceleración por perturbación planetaria sería entonces

$$\mathbf{p} = \mu_p \left(\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{p}/s}}{r_{p/s}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\mathbf{p}}}{r_p^3} \right) \quad (2.40)$$

donde μ_p será el parámetro de gravitación del planeta, $\mathbf{r}_{\mathbf{p}/s}$ la posición del planeta relativa a la nave y $\mathbf{r}_{\mathbf{p}}$ la posición del planeta relativa al cuerpo central.

Como en todas las perturbaciones debidas a la atracción gravitatoria, la distancia entre cuerpos y la masa del planeta son los parámetros a tener en cuenta. Por ejemplo, dependiendo del caso de análisis será relevante aplicar la perturbación planetaria de Júpiter debido a su gran masa o aplicar la de Venus porque la nave de estudio realiza un sobrevuelo.

2.2.7. Propulsión espacial

El último tipo de perturbación impuesta es la provocada por un sistema de propulsión de abordó. Este tipo de perturbación, a diferencia de los anteriores, se considera artificial, ya que la fuerza la ejerce la propia nave y no es externa a ella.

La propulsión que sufrirá la nave dependerá del tipo de motor utilizado. El motor tiene dos parámetros relevantes a tener en cuenta: el empuje (T) que mide la fuerza generada en la propulsión en Newtons y el impulso específico (I_{sp}) que mide en segundos el tiempo que tarda en consumirse $1kg$ del combustible.

La aceleración producida por el empuje del motor, siendo m la masa de la nave, será entonces

$$\mathbf{p} = \frac{T}{m} \cdot 10^{-3} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}} \quad (2.41)$$

donde se realiza la multiplicación por 10^{-3} para pasar la aceleración de m/s^2 a km/s^2 y $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}$ es el vector unitario de la dirección en la que se aplica el empuje.

Otro factor a tener en cuenta en la propulsión espacial, es que el combustible se va consumiendo a medida que se aplica el impulso. Debido a ello, la masa de la nave dejará de considerarse constante y habrá que calcular la variación de la masa con el tiempo de aplicación. Considerando la definición del impulso específico del motor y reescribiendo la ecuación, se obtiene

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{I_{sp}g_0} \quad (2.42)$$

siendo g_0 la aceleración de la gravedad estándar a nivel del mar.

2.3. Sistemas de propulsión

La propulsión espacial consiste en toda aquella tecnología capaz de aplicar un impulso a una nave en el espacio. Tal y como se ha explicado anteriormente, el impulso es capaz de generar una aceleración en la trayectoria del vehículo para modificar su movimiento. Para ejercer este impulso, los sistemas de propulsión siguen el principio de acción-reacción de la tercera ley de Newton utilizando los conocidos como motores jet o motores de propulsión a chorro.

En las etapas de lanzamiento o de puesta en órbita de las misiones espaciales, se utiliza la propulsión mediante motor cohete. Este tipo de motor es capaz de generar un gran empuje mediante una reacción de combustión en la que se consumen grandes cantidades de combustible. Por medio de una tobera de propulsión que ejerce una energía calorífica para acelerar el escape del fluido combustible a grandes velocidades, los motores cohete son capaces de producir una relación muy alta de empuje/peso por la que se caracterizan. Sin embargo, para conseguir estas altas propiedades de empuje, este tipo de motores sacrifican sus condiciones de consumo específico. Es decir, para ser capaces de generar estas enormes cantidades de potencia los motores cohete necesitan consumir grandes cantidades de combustible, haciéndolos poco eficientes para realizar largos viajes en el espacio.

Debido a ello, se utilizan diferentes técnicas de propulsión espacial aplicadas a naves o satélites con menor peso. Su característica común principal es que no necesitan oxígeno atmosférico para poder operar en el espacio. Sin embargo, existen diferentes tipos de sistemas de propulsión dependiendo de la tecnología empleada [14].

2.3.1. Propulsión química

Los sistemas de propulsión química han sido los encargados de permitir las operaciones exteriores a la atmósfera desde que se comenzó a desarrollar la industria espacial y, por ello, ha sido probada reiteradamente su capacidad y fiabilidad. Este tipo de propulsión incluye sistemas basados en hidracina, sistemas mono-propelentes o bi-propelentes, híbridos, sistemas de gas frío y propelentes sólidos.

Los motores de propulsión química se suelen utilizar cuando son requeridas grandes cantidades de empuje o maniobras rápidas. Por ello, se siguen utilizando en las misiones espaciales para llevar a cabo procesos que pueden estar limitados por otros tipos de propulsión con menos potencia.

2.3.2. Propulsión eléctrica

Por otro lado, existe la propulsión eléctrica que ha ido evolucionando a grandes pasos en las últimas décadas. Históricamente, ha sido un sistema de propulsión con menor capacidad que la propulsión química en cuanto a impulso total generado. Esto se debe a los altos costes e inversiones necesarias en la investigación y desarrollo de estos motores. No obstante, generalmente un sistema de propulsión eléctrico puede producir unos niveles de empuje/potencia de alrededor de unos 75 mN/kW. Esto quiere decir que para una nave que sea capaz de importar

500 W de energía a su propulsor eléctrico, produciría algo menos de 38 mN de empuje. Por tanto, aunque el impulso total que pueden llegar a generar estos sistemas es alto, necesitan operar durante cientos o miles de horas para alcanzar unos niveles similares de impulso a los que pueden producir los sistemas de propulsión química en minutos o incluso segundos.

Aunque no puedan generar el mismo tipo de impulso que los motores químicos, la propulsión eléctrica se ha utilizado durante decenas de años para operaciones del tipo de mantenimiento orbital para contrarrestar la pérdida de trayectoria. Sin embargo, su capacidad de empuje junto a los altos niveles de impulso específico que pueden llegar a tener han sido motivos suficientes para que se haya seguido invirtiendo e investigando en estos sistemas. Debido a ello, en los últimos años se ha logrado desarrollar notablemente las capacidades eléctricas utilizando esta propulsión para aplicaciones específicas espaciales sustituyendo a propelentes químicos. Actualmente, los tipos de propulsión eléctrica más relevantes son la electrotérmica, electroespray, ionización de red, efecto Hall, plasma, arco en vacío y difusión ambipolar.

2.3.3. Propulsión sin motor

Para finalizar, los sistemas de propulsión sin motor son aquellos que, como su propio nombre indica, no necesitan de ningún tipo de combustible o propulsor para producir impulso. Estos sistemas utilizan fuerzas externas para generar un empuje sobre la nave. Algunos de ellos son las velas solares, que utilizan la presión por radiación solar; las ataduras espaciales, que generan empuje a partir de un campo magnético planetario; las velas eléctricas, que utilizan la presión del viento solar; o dispositivos de drag aerodinámico, los cuales se aprovechan de la resistencia atmosférica. No obstante, todos estos sistemas siguen actualmente investigándose y necesitan de más desarrollo para utilizarse a gran escala.

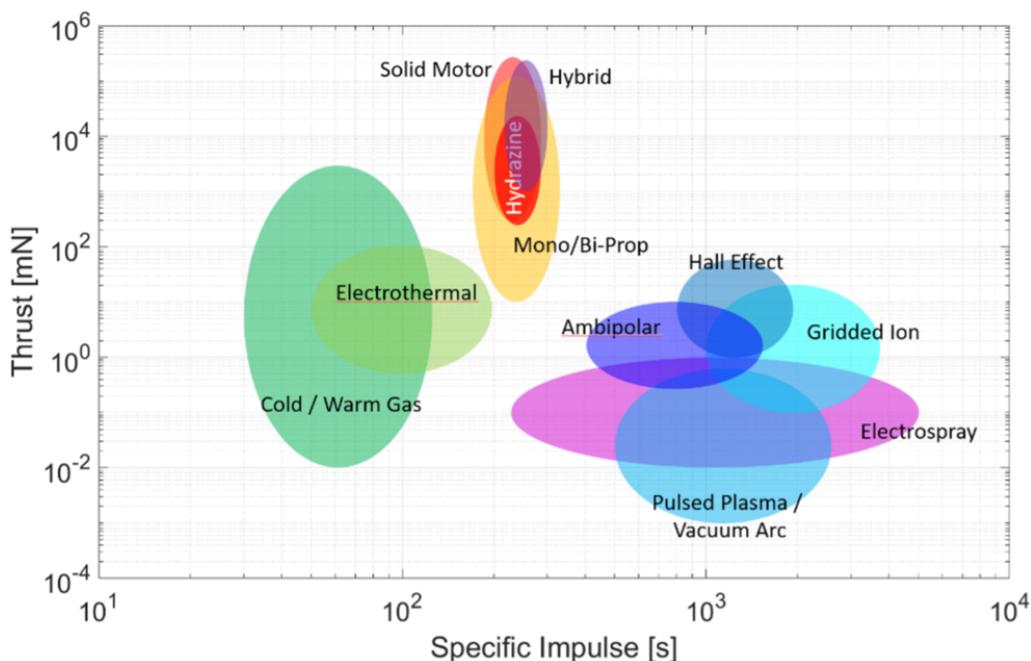


Figura 2.6: Ilustración del rango de empuje e impulso específico de diferentes sistemas de propulsión (fuente: NASA).

En la [Figura 2.6](#) se representan gráficamente los rangos tanto de empuje como de impulso específico de algunos de los sistemas de propulsión mencionados. Se puede observar que para los sistemas químicos se alcanza un mayor rango de empuje con menor impulso específico mientras que, de forma contraria, en los sistemas eléctricos el empuje es menor pero los rangos de impulso específico son mayores. Esto confirma lo descrito anteriormente. Los sistemas de propulsión químicos pueden conseguir grandes cantidades de empuje pero sacrifican impulso específico. Al contrario, los sistemas de propulsión eléctricos pueden alcanzar unos valores de impulso específico más elevados manteniendo unos rangos de empuje mediocres.

Por último, se ha de recalcar que no se han mencionado algunas categorías relevantes como la propulsión nuclear. Esto es debido a que este tipo de tecnologías aun se encuentran en desarrollo y cuentan con bajos TRLs (Niveles de madurez tecnológica, del inglés *Technological Readiness Levels*) [33], aunque se continúan investigando.

Capítulo 3

Metodología

Definido el marco teórico que se va a utilizar para el cálculo y desarrollo del propagador orbital, en este capítulo se describe la metodología utilizada.

En el desarrollo de esta trabajo se ha utilizado la versión Python 3.11. Python es un lenguaje de programación de código abierto que puede ser utilizado para diversas y muy diferentes aplicaciones. Este software implementa unas extensiones conocidas como bibliotecas o paquetes que cambian dependiendo del objetivo que se pretenda conseguir. En este trabajo las bibliotecas fundamentales utilizadas han sido *NumPy* [24] y *Math* [51], para el cálculo y análisis numérico llevado a cabo. Otro paquete utilizado ha sido *Matplotlib* [28], con el cual se permite representar los gráficos relevantes para el estudio.

Para exponer la metodología seguida, se ha dividido el capítulo siguiendo la descripción de los principales archivos de Python elaborados y los algoritmos desarrollados.

3.1. *OrbitPropagator.py*

Ésta es la clase principal en la que, fundamentalmente, se lleva a cabo la integración temporal del problema.

En primer lugar, se definen las variables a tener en cuenta y el estado inicial de los parámetros temporales para su posterior evaluación:

- $\mathbf{state}_0 = [\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]$, es el estado inicial de la órbita, donde \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 son el vector posición y el vector velocidad iniciales.
- $tspan$, es el periodo de tiempo durante el que se quiere integrar.
- dt , es el paso de tiempo en cada instante de integración.
- cb , es el central body o cuerpo central del sistema.
- $mass_0$, es la masa inicial de la nave.
- $time_0 = [\text{year month day hour minute second}]$, es el vector de fecha y tiempo inicial que incluye, en orden, [año mes día hora minuto segundo].
- $n_{steps} = tspan/dt$, es el número total de pasos llevados a cabo por el integrador.
- $perts$, es la lista de perturbaciones aplicadas al problema.

A continuación, se procede a la descripción del Algoritmo 3.1 utilizado para la resolución numérica del problema, obteniendo el vector estado del cuerpo de estudio dados los valores de su condición inicial. Con esto, se integra computacionalmente la ecuación (2.13) para obtener la posición y velocidad en cada instante de tiempo.

ALGORITMO 3.1

1. Se determina el vector estado con las condiciones iniciales de la posición, velocidad y masa, para el tiempo inicial t_0 ,

$$\mathbf{y}_0 = [\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, m_0] = [r_x^0, r_y^0, r_z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0, m_0]$$

2. Se define la función **dydt** que comprende la derivada temporal del vector estado, cuyas variables son el tiempo t y el vector \mathbf{y} . Por tanto, teniendo en cuenta la posición de la nave relativa al cuerpo central del sistema y su velocidad en la órbita, se llega a

$$\mathbf{dydt}(t, \mathbf{y}) = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{m}] = \left[v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z, \frac{dm}{dt} \right]$$

donde el vector $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ inicialmente corresponde a la aceleración principal ejercida por el cuerpo central, representando la trayectoria fundamental Kepleriana. Adicionalmente, se irán añadiendo a ésta las aceleraciones producidas por las perturbaciones seleccionadas en el análisis.

3. Para resolver el problema, se inicializa el 'solver' imponiendo el método de integración utilizado, las condiciones iniciales y la función con el sistema de ecuaciones diferenciales a integrar (ver [Subsección 3.1.1](#)),

$$\begin{aligned} \text{solver} &= \text{ode}(\mathbf{dydt}(t, \mathbf{y})) \\ \text{método de integración} &= \text{dopri5} \\ \text{condiciones iniciales} &= [\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, t_0 = 0] \end{aligned}$$

4. El propagador integra la función **dydt**(t, \mathbf{y}) para cada paso de tiempo $t + dt$ hasta que se alcanza el número de pasos establecidos, n_{steps} , obteniendo el vector

$$\mathbf{y} = [\mathbf{r}, \mathbf{v}, m] = [r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z, m].$$

5. Finalmente, del vector estado se obtienen los vectores posición y velocidad de la nave relativos al cuerpo central en cada instante de tiempo,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r_x \hat{\mathbf{i}} + r_y \hat{\mathbf{j}} + r_z \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v} &= v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

así como la masa de la nave, m , durante cada paso de integración.

3.1.1. Integración numérica de ODEs

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs, por sus siglas en inglés) son aquellas ecuaciones diferenciales que relacionan las derivadas de una función de una variable independiente con la propia función. En el caso del propagador orbital, la función a resolver sería $\mathbf{dydt}(t, \mathbf{y})$ y la variable independiente el tiempo t .

Para la resolución de ODEs, en Python se ha utilizado el módulo *ode* de la biblioteca SciPy (*scipy.integrate*) [52] que permite la integración numérica. Existen diferentes integradores que pueden ser seleccionados. Para este trabajo, se han utilizado dos de las opciones ofrecidas por la biblioteca de Python: *lsoda* y *dopri5*.

lsoda

Es un solver de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) con coeficientes variables en valores reales, con implementación de coeficiente fijo. Este integrador se caracteriza porque proporciona un cambio automático de método entre el método implícito de Adams (para problemas no rígidos) y un métodos basado en fórmulas de derivación hacia atrás (BDF, por sus siglas en inglés) (para problemas rígidos) [41]. Se considera un integrador híbrido, ya que puede cambiar automáticamente entre ambos métodos. Ver descripción del código *lsoda* en [25].

dopri5

El segundo integrador utilizado para la resolución de ODEs se basa en un método explícito de Runge-Kutta de orden 4 y 5 con control de tamaño del paso, concretamente el métodos de Dormand-Prince [17]. Es un solver de salto único, es decir, cuando se calcula $\mathbf{y}(t_n)$, sólo necesita la solución en el instante de tiempo inmediatamente anterior $\mathbf{y}(t_{n-1})$. Este integrador es el equivalente al *ode45* de MATLAB. Ver descripción del código *dopri5* en [23].

Se han probado los resultados obtenidos mediante la integración de numérica de los dos métodos descritos y el resultado ha sido muy similar, sin diferencias notables para la propagación orbital. Debido a ello y por la familiarización con su análogo en MATLAB, se ha utilizado de forma general el integrador *dopri5* en este trabajo. Además, las ecuaciones diferenciales a resolver en este estudio no son rígidas, por lo que el uso de la capacidad de hibridación del solver *lsoda* no es necesaria.

3.2. *tools.py*

Para mantener un orden en los códigos de Python desarrollados, se han almacenado las funciones necesarias para el propagador en un archivo común llamado *tools.py*. En esta sección se describen los algoritmos más relevantes para el desarrollo del trabajo con apoyo del marco teórico descrito en el capítulo anterior.

3.2.1. COEs y vector estado

Existen dos formas de identificar la trayectoria que describe un cuerpo: una es el vector estado ya mencionado que incluye los vectores posición \mathbf{r} y velocidad \mathbf{v} en su órbita; y otra es a través de los elementos orbitales clásicos (COEs, del inglés *Classical Orbital Elements*).

Los COEs son seis elementos que determinan la órbita que sigue el cuerpo y que vienen de las leyes de Kepler, por eso se conocen también como elementos Keplerianos. En la [Figura 3.1](#) se representa un modelo genérico de los elementos orbitales en una órbita de ejemplo de un cuerpo celeste frente a un plano de referencia. Para satélites que orbitan a la Tierra, este plano de referencia suele ser el plano ecuatorial, mientras que para órbitas heliocéntricas se suele tomar el plano eclíptico.

La intersección entre el plano de referencia y el plano de la órbita se conoce como línea de los nodos, ya que representa la línea que separa el cuerpo central del sistema con los nodos ascendente y descendente. Siendo el nodo ascendente (Ω) el punto donde el objeto celeste cruza del hemisferio sur al hemisferio norte; y el nodo descendente (Υ) donde cruza del hemisferio norte al hemisferio sur. El cuerpo central de referencia y el punto Aries o punto vernal (Υ) establecen la dirección de referencia y, junto al plano, el marco de referencia.

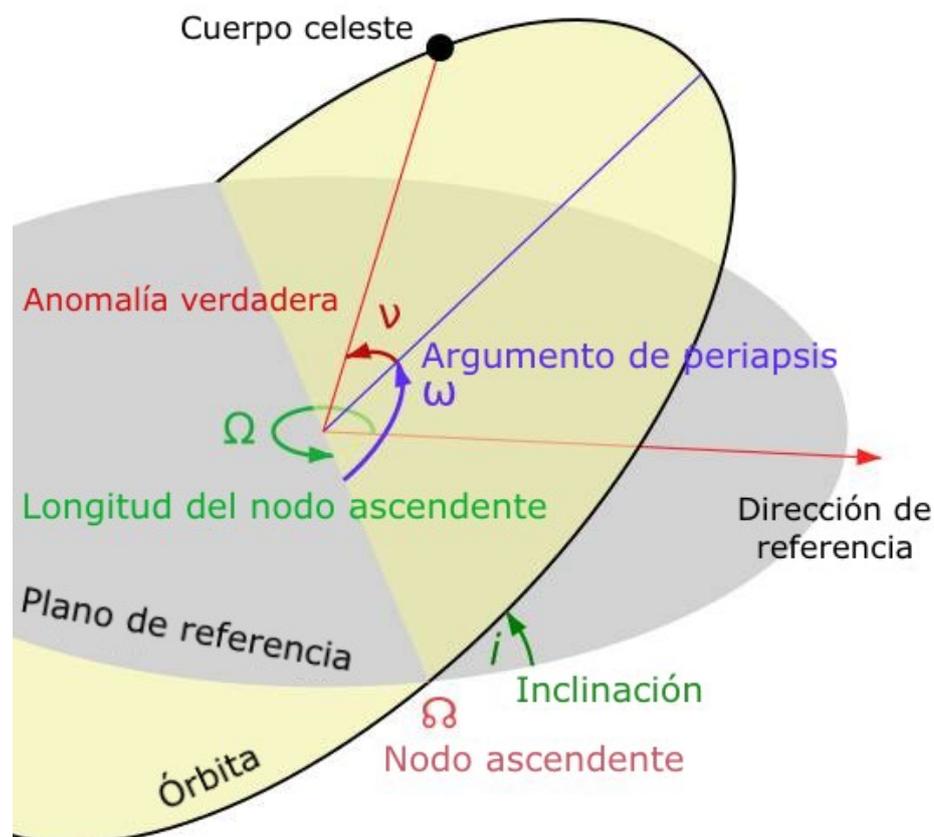


Figura 3.1: Diagrama que representa los elementos orbitales clásicos (COEs) de una órbita (fuente: *Wikimedia Commons*).

La definición de los elementos orbitales depende del tipo de parámetro que describa dentro del marco de referencia de la trayectoria que sigue el cuerpo.

Dos elementos definen el tamaño y la forma de la órbita:

- Semieje mayor (a) - la mitad de la distancia entre el apoapsis y el periapsis de la órbita, representado en morado en la figura.
- Excentricidad (e) - describe la forma de la elipse que sigue la órbita.

Dos elementos que definen la orientación del plano orbital:

- Inclínación (i) - ángulo de inclinación de la órbita respecto del plano de referencia, medido en el nodo ascendente.
- Longitud del nodo ascendente (Ω) - ángulo medido horizontalmente en el plano de referencia desde la dirección del punto vernal hasta el nodo ascendente.

Y los otros dos elementos restantes son:

- Argumento del periapsis (ω) - ángulo medido desde el nodo ascendente hasta el periapsis. Define la orientación de la elipse en el plano orbital.
- Anomalía verdadera (θ) - define la posición del cuerpo celeste en la órbita en un instante de tiempo, llamado época.

Los COEs son los parámetros más importantes en la órbita que sigue el cuerpo celeste, sin embargo, existen otros parámetros relacionados que pueden ser relevantes para el cálculo computacional llevado a cabo. Estos son (ver [Figura 3.2](#)):

- Anomalía excéntrica (E) - ángulo medido desde el centro de la elipse y su eje que forma la proyección del cuerpo sobre la circunferencia auxiliar.
- Anomalía media (M) - ángulo que forma con el eje de la elipse un cuerpo ficticio que gira sobre la circunferencia auxiliar. También se define como la fracción de periodo orbital transcurrido expresada como ángulo.

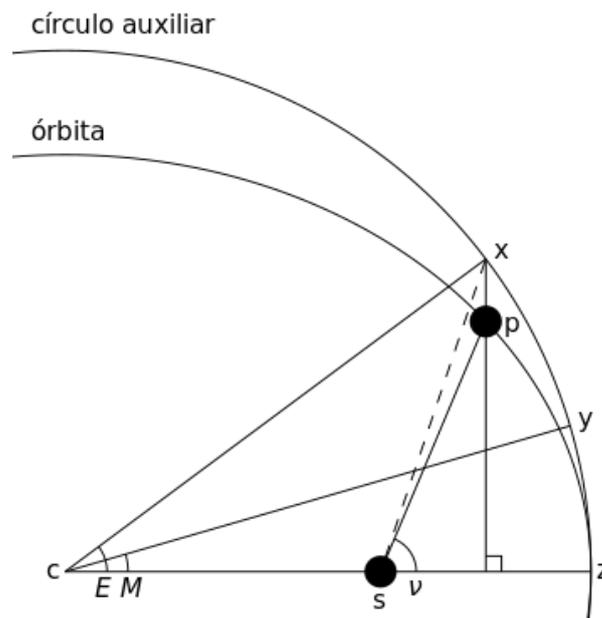


Figura 3.2: Diagrama que representa los ángulos de la anomalía excéntrica E , anomalía media M y anomalía verdadera ν (fuente: *Wikimedia Commons*).

Dependiendo de si se desea conocer la información orbital del cuerpo celeste mediante sus COEs o mediante su vector estado, habrá que poder transformar unos parámetros en otros. Para ello, en el Algoritmo 3.2 se transforman los elementos orbitales COEs en el vector estado.

ALGORITMO 3.2

Dados los elementos orbitales a , e , i , Ω , ω y θ , se calcula el vector estado \mathbf{r} , \mathbf{v} para el marco de referencia dado.

1. Se calcula la anomalía excéntrica (E) mediante una variación de la ecuación de Kepler,

$$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

2. Se calcula el vector posición $\{\mathbf{r}\}_{\bar{x}}$ en coordenadas perifocales

$$\{\mathbf{r}\}_{\bar{x}} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde h es la magnitud del momento angular específico de la órbita y el subíndice \bar{x} es la abreviación para el sistema de coordenadas perifocal $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

3. Se calcula el vector velocidad $\{\mathbf{v}\}_{\bar{x}}$ en coordenadas perifocales

$$\{\mathbf{v}\}_{\bar{x}} = \frac{\mu}{h} \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ e + \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. Se calcula la matriz $[\mathbf{Q}]_{\bar{x}X}$ de transformación de coordenadas perifocales $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ a coordenadas del marco de referencia inercial XYZ

$$[\mathbf{Q}]_{\bar{x}X} = \begin{bmatrix} -\sin \Omega \cos i \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega & -\sin \Omega \cos i \cos \omega - \cos \Omega \sin \omega & \sin \Omega \sin i \\ \cos \Omega \cos i \sin \omega + \sin \Omega \cos \omega & \cos \Omega \cos i \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix}$$

5. Se transforman los vectores $\{\mathbf{r}\}_{\bar{x}}$ y $\{\mathbf{v}\}_{\bar{x}}$ al marco de referencia inercial

$$\{\mathbf{r}\}_X = [\mathbf{Q}]_{\bar{x}X} \{\mathbf{r}\}_{\bar{x}}$$

$$\{\mathbf{v}\}_X = [\mathbf{Q}]_{\bar{x}X} \{\mathbf{v}\}_{\bar{x}}$$

obteniendo los vectores posición $\{\mathbf{r}\}_X$ y velocidad $\{\mathbf{v}\}_X$ en coordenadas XYZ .

Por el contrario, si se desea obtener los elementos orbitales partiendo del vector estado del cuerpo celeste, en el Algoritmo 3.3 se implementa la transformación opuesta.

ALGORITMO 3.3

Obtener los elementos orbitales a , e , i , Ω , ω y θ a partir del vector estado \mathbf{r} , \mathbf{v} para el marco de referencia dado.

1. Se calcula la norma de los vectores posición \mathbf{r} y velocidad \mathbf{v}

$$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$$

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

2. Se calcula la velocidad radial v_r

$$v_r = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r}$$

teniendo en cuenta que, si $v_r > 0$ el cuerpo se mueve desde el periapsis y, si $v_r < 0$, se mueve hacia el periapsis.

3. Se calcula el momento angular específico \mathbf{h} y su magnitud h

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$h = \sqrt{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}}$$

4. Se calcula el primer elemento orbital, la inclinación i

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{h_Z}{h} \right)$$

donde h_Z es el elemento en la coordenada Z del momento angular específico \mathbf{h} . La inclinación i debe encontrarse entre 0° y 90° , que corresponde con el rango de la función arcocoseno. Si i se encontrara entre 90° y 180° , el momento angular \mathbf{h} apuntaría en la dirección opuesta. En ese caso, la órbita se consideraría retrógrada, lo que quiere decir que el objeto orbitaría en sentido contrario a la rotación del cuerpo central.

5. Se calcula la línea de nodo \mathbf{N} y su magnitud N

$$\mathbf{N} = [0, 0, 1] \times \mathbf{h}$$

$$N = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}}$$

6. Se calcula la longitud del nodo ascendente Ω

$$\Omega = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{N_X}{N} \right) & (N_Y \geq 0) \\ 360^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{N_X}{N} \right) & (N_Y < 0) \end{cases}$$

siendo N_X y N_Y los elementos en X e Y , respectivamente, de la línea de nodo \mathbf{N} .

7. Se calcula el vector excentricidad \mathbf{e} y la excentricidad e

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu} \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{r} - r v_r \mathbf{v} \right], \quad e = \sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}$$

8. Se calcula el argumento del periapsis ω

$$\omega = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{N_e} \right) & (e_Z \geq 0) \\ 360^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{N_e} \right) & (e_Z < 0) \end{cases}$$

donde e_Z es el elemento en la coordenada Z del vector excentricidad \mathbf{e} .

9. Se calcula la anomalía verdadera θ

$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er} \right) & (v_r \geq 0) \\ 360^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er} \right) & (v_r < 0) \end{cases}$$

10. Se calcula el semieje mayor a

$$a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)}$$

11. Finalmente, se obtienen los seis elementos orbitales COEs

$$[a, e, i, \Omega, \omega, \theta]$$

3.2.2. Algoritmos para perturbaciones

Durante la [Sección 2.2](#) se ha desarrollado el marco teórico de las aceleraciones producidas por las diferentes perturbaciones orbitales. Para complementar esta explicación, en esta nueva sección se describen los algoritmos utilizados para la implementación de las perturbaciones en el propagador orbital.

En primer lugar, en el Algoritmo 3.4 se detalla el cálculo de la densidad atmosférica mediante la interpolación de los datos del modelo *US Standard Atmosphere 1976* siguiendo el procedimiento exponencial de la ecuación (2.14).

ALGORITMO 3.4

Obtener la densidad atmosférica ρ en kg/km^3 a partir de la interpolación exponencial que sigue el modelo USSA76.

1. Se determinan los valores de las 28 altitudes geométricas h_i en km entre los $0km$ y $1000km$

$$h_i = [0, 25, 30, 40, 50, 60, 70, \\ 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, \\ 150, 180, 200, 250, 300, 350, 400, \\ 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000]$$

2. De manera análoga, se definen las correspondientes densidades ρ_i en kg/m^3 siguiendo el modelo USSA76

$$\rho_i = [1,225, 4,008 \cdot 10^{-2}, 1,841 \cdot 10^{-2}, 3,996 \cdot 10^{-3}, 1,027 \cdot 10^{-3}, 3,097 \cdot 10^{-4}, \\ 8,283 \cdot 10^{-5}, 1,846 \cdot 10^{-5}, 3,416 \cdot 10^{-6}, 5,606 \cdot 10^{-7}, 9,708 \cdot 10^{-8}, 2,222 \cdot 10^{-8}, \\ 8,152 \cdot 10^{-9}, 3,831 \cdot 10^{-9}, 2,076 \cdot 10^{-9}, 5,194 \cdot 10^{-10}, 2,541 \cdot 10^{-10}, 6,073 \cdot 10^{-11}, \\ 1,916 \cdot 10^{-11}, 7,014 \cdot 10^{-12}, 2,803 \cdot 10^{-12}, 1,184 \cdot 10^{-12}, 5,215 \cdot 10^{-13}, \\ 1,137 \cdot 10^{-13}, 3,070 \cdot 10^{-14}, 1,136 \cdot 10^{-14}, 5,759 \cdot 10^{-15}, 3,561 \cdot 10^{-15}]$$

3. Se calculan las altitudes escaladas H_i en km mediante

$$H_i = -\frac{(h_{i+1} - h_i)}{\ln(\rho_{i+1}/\rho_i)}$$

4. Se imponen las altitudes z fuera del rango definido y el intervalo de interpolación

$$\text{Si } z > 1000 \longrightarrow z = 1000 \longrightarrow i = 28$$

$$\text{Si } z < 0 \longrightarrow z = 0$$

5. Se calcula la densidad ρ mediante la interpolación exponencial

$$\rho(z) = \rho_i e^{-(z-z_i)/H_i}$$

6. Finalmente se obtiene la densidad en función de la altitud $\rho(z)$ en kg/km^3

$$\rho(z) = \rho(z) \cdot 10^9$$

Para medir el paso de tiempo transcurrido entre dos hechos históricos, se pueden dar errores de cálculo teniendo en cuenta los cambios que ha habido en los calendarios de la diversas culturas a lo largo de los siglos. Debido a ello, el francés Joseph Scaliger creó una escala continua de tiempo en 1582. Ésta se conoce como día juliano (JD , del inglés) y se define como el número de días transcurridos desde el mediodía del 1 de enero del año 4713 a.C. En la mecánica orbital, es importante conocer el día juliano para saber la situación espacial de los cuerpos celestes relevantes para su estudio. Para conocer el JD a partir de la fecha ordinaria (año, mes, día) se implementa el Algoritmo 3.5.

ALGORITMO 3.5

Dada la fecha en sistema ordinario de año (y), mes (m), día (d) y hora (UT), obtener el día juliano JD .

1. Se calcula J_0 , el día juliano a las 0h UT (hora universal). Para ello, se sigue la fórmula de Boulet [11]

$$J_0 = 367y - INT\left(\frac{7[y + INT(\frac{m+9}{12})]}{4}\right) + INT\left(\frac{275m}{9}\right) + d + 1721013,5$$

donde el año y , el mes m y el día d tienen los siguientes rangos:

$$1901 \leq y \leq 2099$$

$$1 \leq m \leq 12$$

$$1 \leq d \leq 31$$

$INT(x)$ equivale a la aproximación a la parte entera del número, es decir, redondear al cero.

2. Para calcular el día juliano JD , se la fracción horaria del día a J_0

$$JD = J_0 + \frac{UT}{24}$$

Una vez conocido el procedimiento para obtener el día juliano a partir de una fecha ordinaria, es necesario conocer la situación espacial de los cuerpos espaciales relevantes del sistema solar para estudiar cómo afectan las perturbaciones en cada instante de tiempo propagado. Mediante actividades observacionales, se han obtenido unas efemérides de los cuerpos celestes relevantes del Sistema Solar que permiten conocer su situación respecto a la Tierra. Éstas efemérides se recogen en *The Astronomical Almanac* (traducido al español, El Almanaque Astronómico) [39] publicado por el Observatorio Naval de los Estados Unidos.

Para poder estudiar tanto la perturbación por atracción gravitatoria, descrita en la [Subsección 2.2.4](#), como por radiación, [Subsección 2.2.3](#); en el Algoritmo 3.6 se calcula la posición del Sol respecto al plano geocéntrico ecuatorial.

ALGORITMO 3.6

Dado el día juliano JD , obtener la oblicuidad de la eclíptica ϵ , la longitud de la eclíptica del Sol λ y el vector de la posición geocéntrica del Sol \mathbf{r}_S .

1. Se calcula n , el número de días julianos desde el $J2000$

$$n = JD - 2451545$$

siendo $J2000$ el día juliano que corresponde al 1 de enero de 2000 a las 12h.

2. Se calcula la anomalía media M del Sol

$$M = 357,529^\circ + 0,98560023^\circ n \quad (0^\circ \leq M \leq 360^\circ)$$

3. Se calcula la longitud media L del Sol

$$L = 280,459^\circ + 0,98564736^\circ n \quad (0^\circ \leq L \leq 360^\circ)$$

4. Se calcula la longitud eclíptica solar aparente λ

$$\lambda = L + 1,915^\circ \sin M + 0,0200^\circ \sin 2M \quad (0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ)$$

5. Se calcula la oblicuidad de la eclíptica ϵ

$$\epsilon = 23,439^\circ - 3,56 \cdot 10^{-7}n$$

6. Se calcula el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ que une el marco geocéntrico ecuatorial de la Tierra con el marco eclíptico geocéntrico del Sol

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos \lambda \hat{\mathbf{I}} + \sin \lambda \cos \epsilon \hat{\mathbf{J}} + \sin \lambda \sin \epsilon \hat{\mathbf{K}}$$

7. Se calcula la distancia r_S entre la Tierra y el Sol en función de la anomalía media,

$$r_S = (1,00014 - 0,01671 \cos M - 0,000140 \cos 2M)AU$$

siendo AU la unidad astronómica ($1AU = 149.597.870,691km$).

8. Se calcula el vector posición del Sol \mathbf{r}_S en coordenadas geocéntricas

$$\mathbf{r}_S = r_S \hat{\mathbf{u}}$$

Otro factor a tener en cuenta en relación al Sol, es cuándo la perturbación por presión debida a la radiación solar afecta a la nave o cuerpo de estudio. Para ello, se definió en la ecuación (2.31) del marco teórico el parámetro ν que indica si la nave se encuentra en sombra ($\nu = 0$) y, por tanto, la radiación no ejerce perturbación; o si, en cambio, sí que existe perturbación ($\nu = 1$). Para determinar si un satélite se encuentra en la sombra del cuerpo central del sistema, en el Algoritmo 3.7 se sigue el procedimiento formulado por Vallado [50].

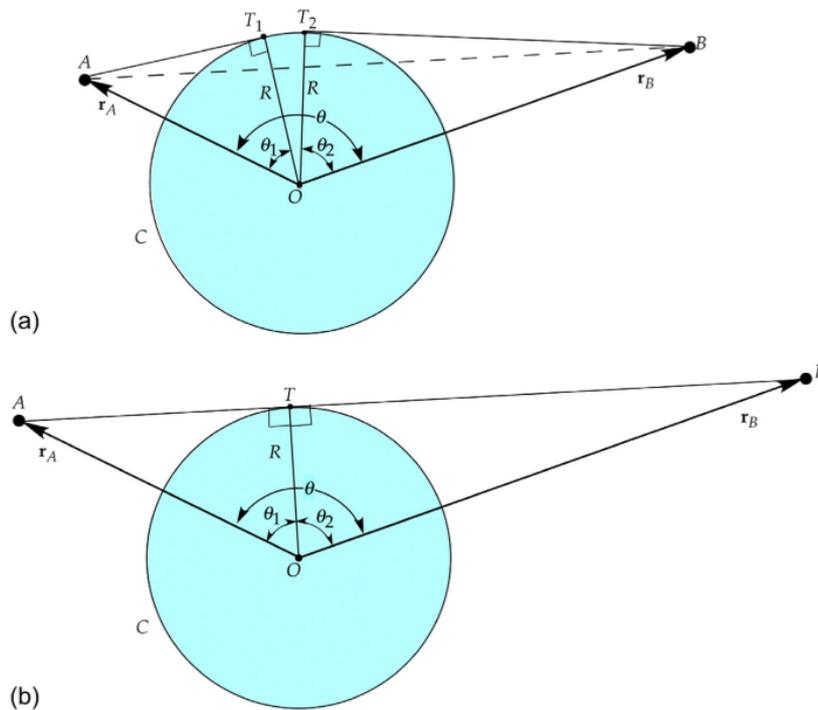


Figura 3.3: (a) La línea AB cruza el cuerpo central C ($\theta_1 + \theta_2 \leq \theta$). (b) La línea AB es tangente al cuerpo central C ($\theta_1 + \theta_2 = \theta$) (fuente: *Curtis* [16]).

ALGORITMO 3.7

Dado el vector posición \mathbf{r} de un satélite y el vector posición aparente del Sol \mathbf{r}_S en un mismo marco de referencia, determinar si el cuerpo central del sistema se encuentra en la línea de vista (*line of sight*) entre el satélite y el Sol (ver [Figura 3.3](#)). Es decir, calcular el valor del parámetro ν de sombra (0 o 1).

1. Se calcula la distancia del satélite r y del Sol r_S al cuerpo central

$$r = \|\mathbf{r}\|$$

$$r_S = \|\mathbf{r}_S\|$$

2. Se calcula el ángulo θ que forman los vectores posición del satélite \mathbf{r} y del Sol \mathbf{r}_S

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{r}_S \cdot \mathbf{r}}{r_S r} \right)$$

3. Se calcula θ_1 , el ángulo entre el vector posición del satélite \mathbf{r} y el radio R del cuerpo central en el punto de tangencia de una línea desde el satélite

$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{R}{r}$$

4. Se calcula θ_2 , el ángulo entre el vector posición del Sol \mathbf{r}_S y el radio R del cuerpo central en el punto de tangencia de una línea desde el Sol

$$\theta_2 = \cos^{-1} \frac{R}{r_S}$$

5. Determinar si el satélite está en sombra ($\nu = 0$) o no ($\nu = 1$)

$$\text{Si } \theta_1 + \theta_2 \leq \theta \longrightarrow \nu = 0$$

$$\text{Si } \theta_1 + \theta_2 > \theta \longrightarrow \nu = 1$$

Del mismo modo que se hizo para calcular la posición del Sol, las fórmulas presentes en *The Astronomical Almanac* [39] permiten conocer los parámetros necesarios para calcular la posición de la Luna respecto a la Tierra en coordenadas geocéntricas. En el Algoritmo 3.8 se enumeran los pasos a seguir para obtener la posición de la Luna en el marco geostacionario ecuatorial a partir de una fecha dada. Esto permitirá calcular la perturbación por atracción gravitatoria de la Luna descrita en la [Subsección 2.2.5](#).

ALGORITMO 3.8

Dado el día juliano JD , el vector de la posición geocéntrica de la Luna \mathbf{r}_m .

1. Se calcula T_0 , el número siglos julianos desde $J200$ hasta el día juliano dado JD

$$T_0 = \frac{JD - 2451545}{36525}$$

2. Se calcula la longitud eclíptica lunar λ en función de los coeficientes de la [Tabla 3.1](#)

$$\lambda = b_0 + c_0 T_0 + \sum_{i=1}^6 a_i \sin(b_i + c_i T_0) \quad (0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ)$$

3. Se calcula la latitud eclíptica lunar δ en función de los coeficientes de la [Tabla 3.1](#)

$$\delta = \sum_{i=1}^4 d_i \sin(e_i + f_i T_0) \quad (0^\circ \leq \delta \leq 360^\circ)$$

4. Se calcula el paralelo horizontal lunar HP en función de los coeficientes de la [Tabla 3.1](#) (ver [Figura 3.4](#))

$$HP = g_0 + \sum_{i=1}^4 g_i \cos(h_i + k_i T_0) \quad (0^\circ \leq HP \leq 180^\circ)$$

5. Se calcula la oblicuidad de la eclíptica ϵ , el ángulo de la órbita terrestre respecto a su ecuador

$$\epsilon = 23,439^\circ - 0,0130042T_0$$

6. Se calcula el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ que une el marco geocéntrico ecuatorial de la Tierra con el marco eclíptico geocéntrico de la Luna

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos \delta \cos \lambda \hat{\mathbf{I}} + (\cos \epsilon \cos \delta \sin \lambda - \sin \epsilon \sin \delta) \hat{\mathbf{J}} + (\sin \epsilon \cos \delta \sin \lambda + \cos \epsilon \sin \delta) \hat{\mathbf{K}}$$

7. Se calcula la distancia r_m de la Tierra a la Luna

$$r_m = \frac{R_E}{\sin HP}$$

siendo R_E el radio de la Tierra en el ecuador ($R_E = 6378km$).

8. Finalmente, se obtiene el vector posición de la Luna \mathbf{r}_m en coordenadas geocéntricas

$$\mathbf{r}_m = r_m \hat{\mathbf{u}}$$

i	Longitude λ			Latitude δ			Horizontal Parallax HP		
	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i	g_i	h_i	k_i
0	-	218.32	481267.881	-	-	-	0.958	-	-
1	6.29	135.0	477198.87	5.13	93.3	483202.03	0.0518	135.0	477198.87
2	-1.27	259.3	-413335.36	0.28	220.2	960400.89	0.0095	259.3	-413335.38
3	0.66	235.7	890534.22	-0.28	318.3	6003.15	0.0078	253.7	890534.22
4	0.21	269.9	954397.74	-0.17	217.6	-407332.21	0.0028	269.9	954397.70
5	-0.19	357.5	35999.05	-	-	-	-	-	-
6	-0.11	106.5	966404.03	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.1: Coeficientes para calcular la posición de la Luna respecto a la Tierra.

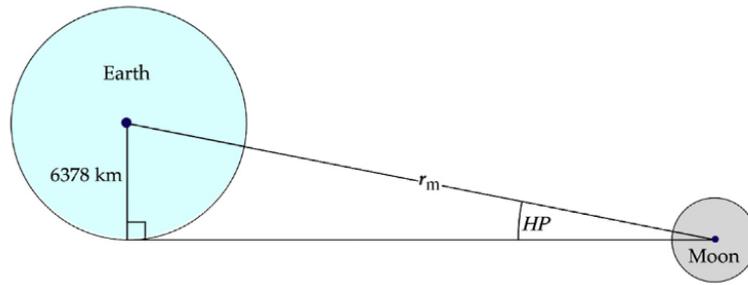


Figura 3.4: Paralelo horizontal lunar (HP , del inglés Horizontal Parallax) (fuente: *Curtis* [16]).

Llegados a este punto, se puede calcular computacionalmente la posición relativa del Sol y de la Luna respecto al plano de referencia geocéntrico ecuatorial. Sin embargo, para el propagador orbital, se debe conocer la posición de los cuerpos celestes respecto al cuerpo central seleccionado, sea cual sea. Con los algoritmos desarrollados hasta ahora, sólo se podría realizar la propagación orbital cuando la Tierra sea el cuerpo central del sistema. Además, por otro lado, para poder calcular numéricamente la perturbación originada por la atracción gravitatoria de otros planetas (Subsección 2.2.6), habrá que conocer la posición de los planetas del Sistema Solar relativa al marco de referencia del cuerpo central del estudio.

Con el fin de cumplir ambos requisitos, se deben conocer las efemérides planetarias para poder calcular tanto la posición relativa del Sol respecto a los planetas como la posición de los planetas relativa al cuerpo central del sistema. Para ello, en la [Tabla 3.2](#) se recogen los elementos orbitales de los planetas y sus índices de cambio por siglo (Cy) con respecto a la época $J2000$ (1 de enero de 2000 a las 12h UT). Los parámetros de esta tabla cubren el periodo de años comprendido entre 1800 y 2050, y se obtienen del artículo *Orbital Ephemerides of the Sun, Moon, and Planets* publicado por *EM Standish* y *JM Williams* [47].

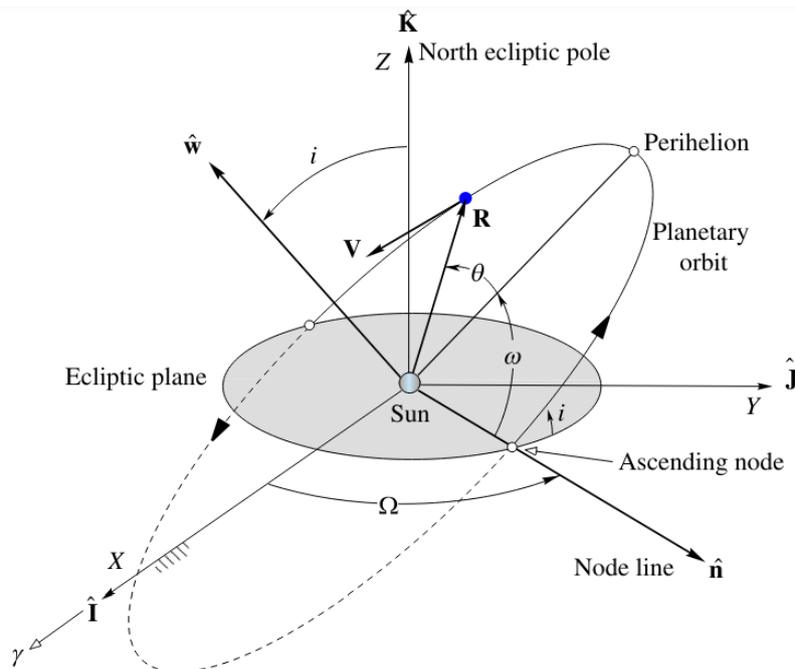


Figura 3.5: Esquema de órbita planetaria en el marco eclíptico heliocéntrico (fuente: *Curtis* [16]).

	a (AU)	e	i (°)	Ω (°)	$\bar{\omega}$ (°)	L (°)
	\dot{a} (AU/Cy)	\dot{e} (1/Cy)	\dot{i} (°/Cy)	$\dot{\Omega}$ (°/Cy)	$\dot{\bar{\omega}}$ (°/Cy)	\dot{L} (°/Cy)
Mercurio	0.38709927	0.20563593	7.00497902	48.33076593	77.45779628	252.25032350
	0.00000037	0.00001906	-0.00594749	-0.12534081	0.16047689	149,472.67411175
Venus	0.72333566	0.00677672	3.39467605	76.67984255	131.60246718	181.97909950
	0.00000390	-0.00004107	-0.00078890	-0.27769418	0.00268329	58,517.81538729
Tierra	1.00000261	0.01671123	-0.00001531	0.0	102.93768193	100.46457166
	0.00000562	-0.00004392	-0.01294668	0.0	0.32327364	35,999.37244981
Marte	1.52371034	0.09339410	1.84969142	49.55953891	23.94362959	-4.55343205
	0.0001847	0.00007882	-0.00813131	-0.29257343	0.44441088	19,140.30268499
Júpiter	5.20288700	0.04838624	1.30439695	100.47390909	14.72847983	34.39644501
	-0.00011607	0.00013253	-0.00183714	0.20469106	0.21252668	3034.74612775
Saturno	9.53667594	0.05386179	2.48599187	113.66242448	92.59887831	49.95424423
	-0.00125060	-0.00050991	0.00193609	-0.28867794	-0.41897216	1222.49362201
Urano	19.18916464	0.04725744	0.77263783	74.01692503	170.95427630	313.23810451
	-0.00196176	-0.00004397	-0.00242939	0.04240589	0.40805281	428.48202785
Neptuno	30.06992276	0.00859048	1.77004347	131.78422574	44.96476227	-55.12002969
	0.00026291	0.00005105	0.00035372	-0.00508664	-0.32241464	218.45945325
(Plutón)	39.48211675	0.24882730	17.14001206	110.30393684	224.06891629	238.92903833
	-0.00031596	0.00005170	0.00004818	-0.01183482	-0.04062942	145.20780515

Tabla 3.2: Elementos orbitales planetarios y sus índices de cambio por siglo.

Los elementos orbitales de los planetas son definidos respecto al marco de referencia eclíptico heliocéntrico, imponiendo el Sol como el cuerpo central del sistema (ver [Figura 3.5](#)), donde:

- a es el semieje mayor, medido en unidades astronómicas (AU).
- e es la excentricidad de la órbita.
- i es la inclinación de la órbita.
- Ω es la longitud del nodo ascendente relativa a la línea nodal.
- $\bar{\omega}$ es la longitud del perihelio.
- L es la longitud media.
- $\dot{a}, \dot{e}, \dot{i}, \dot{\Omega}, \dot{\bar{\omega}}, \dot{L}$ son los índices de cambio de sus respectivos elementos orbitales por siglo juliano Cy (1 Cy = 36525 días).

Partiendo de los elementos orbitales, el Algoritmo 3.9 determina los pasos a seguir para obtener el vector estado $[\mathbf{R}, \mathbf{V}]$ de cada planeta del Sistema Solar en coordenadas heliocéntricas. Sabiendo la posición de todos los planetas respecto al Sol, se pueden extrapolar los cálculos de la posición del Sol (Algoritmo 3.6) y de la Luna (Algoritmo 3.8) a cualquier cuerpo central seleccionado para el sistema de estudio.

ALGORITMO 3.9

A partir de las efemérides de la [Tabla 3.2](#), determinar el vector estado $[\mathbf{R}, \mathbf{V}]$ de un planeta dado el día juliano JD .

1. Se calcula T_0 , el número siglos julianos desde $J2000$ hasta el día juliano dado JD

$$T_0 = \frac{JD - 2451545}{36525}$$

2. Siendo Q la lista de los seis elementos orbitales de cada planeta, se calcula su valor para el día juliano JD dado

$$Q = Q_0 + \dot{Q}T_0$$

donde Q_0 es la lista de valores en la época $J200$ y \dot{Q} es la lista de índices de cambio de los elementos.

3. De Q se obtienen los valores del semieje mayor a en km , de la excentricidad e y de la inclinación i

$$a = Q(1) \cdot AU$$

$$e = Q(2)$$

$$i = Q(3)$$

4. Se calcula el momento angular h (paso no estrictamente necesario)

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$$

donde $\mu = 1,32712 \cdot 10^{11} km^3/s^2$ corresponde con el parámetro gravitacional del Sol.

5. Se impone que todos los ángulos se encuentren dentro del rango $0^\circ - 360^\circ$ y se calcula el argumento del perihelio ω y la anomalía media M

$$\omega = \bar{\omega} - \Omega$$

$$M = L - \bar{\omega}$$

6. Se obtiene la anomalía excéntrica E a partir de la ecuación de Kepler sustituyendo la excentricidad e y la anomalía media M

$$M = E - e \sin E$$

7. Se calcula la anomalía verdadera θ a partir de

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right)$$

8. Se utilizan los elementos orbitales para, finalmente, obtener el vector posición \mathbf{R} y el vector velocidad \mathbf{V} del planeta dado en coordenadas heliocéntricas utilizando el Algoritmo 3.2.

$$[a, e, i, \theta, \omega, \Omega] \longrightarrow \mathbf{R}, \mathbf{V}$$

Capítulo 4

Propagador orbital

Tras la descripción del marco teórico y la metodología seguida, el objetivo de este capítulo es el de demostrar el funcionamiento del propagador orbital por medio de resultados obtenidos. Para ello, se han desarrollado tres ejemplos de misiones espaciales con propósitos diferentes, en los que cada uno tendrá un marco de referencia propio según el cuerpo central del sistema. También, se hará una comparativa entre las perturbaciones relevantes según la misión de estudio.

Para obtener los datos iniciales de la trayectoria de los objetos estudiados, se ha utilizado fundamentalmente la web *Horizons System* [38] elaborada por el Laboratorio de Propulsión Jet (*JPL*, por sus siglas en inglés) del Instituto Tecnológico de California. *Horizons System* permite el acceso a las efemérides precisas de todo tipo de objetos del Sistema Solar que se van actualizando diariamente con la colaboración de la NASA estadounidense.

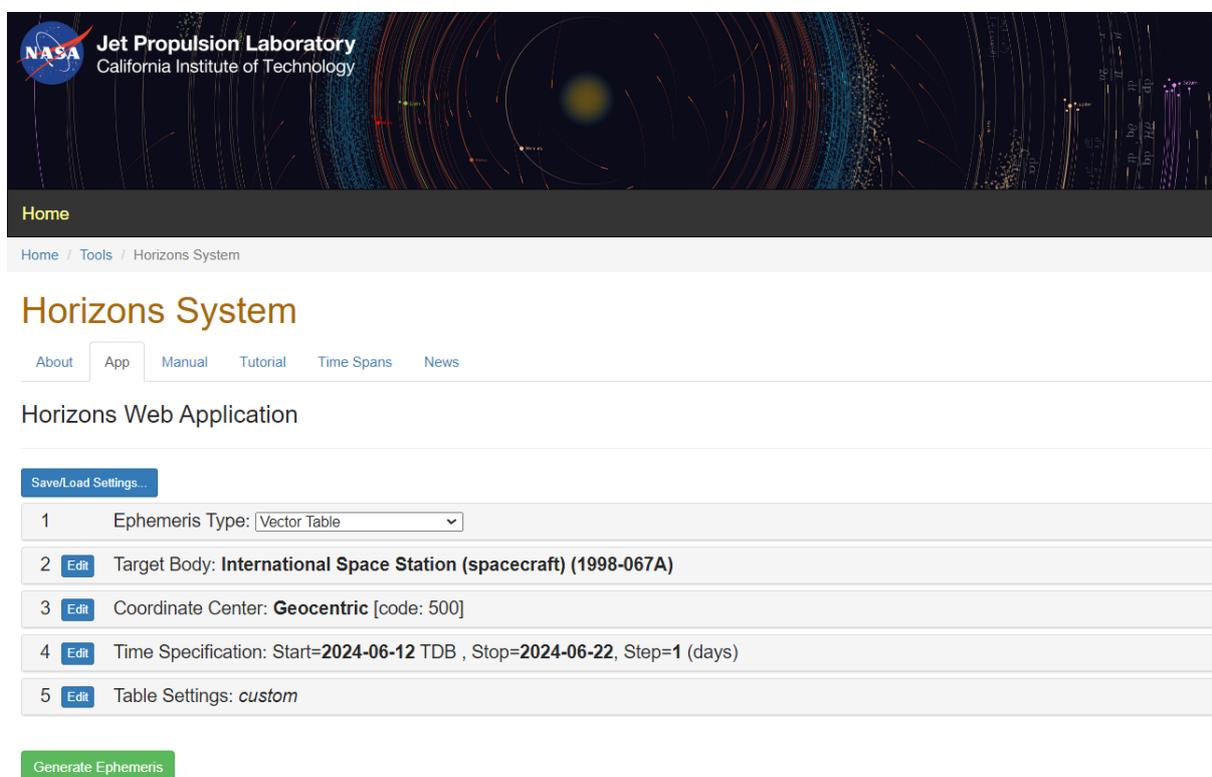
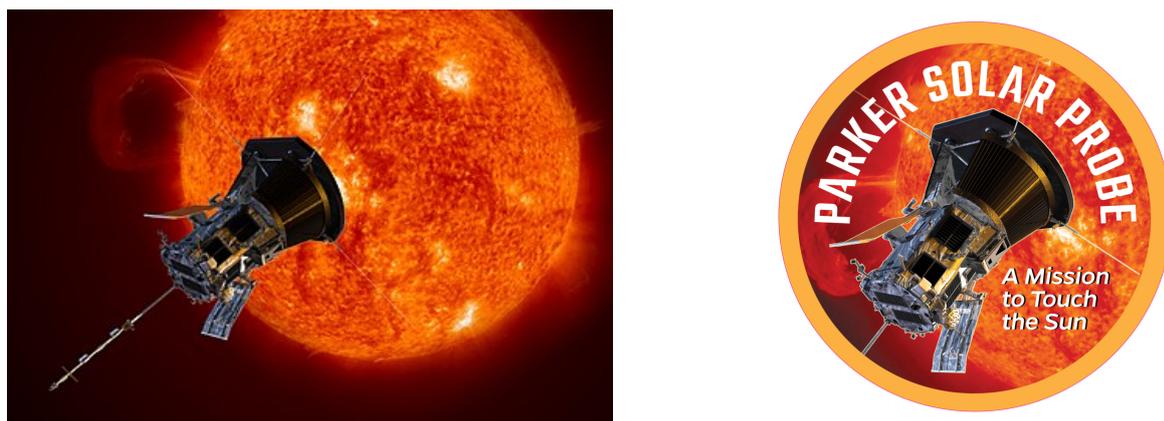


Figura 4.1: Interfaz de la aplicación web *Horizons System*.

Para ilustrar el funcionamiento de la web, en la [Figura 4.1](#) se muestra una captura de pantalla de su interfaz. En las diferentes pestañas se pueden seleccionar las opciones para el análisis, como el cuerpo del que se quieren obtener las efemérides (en la figura, la Estación Espacial Internacional), el centro de coordenadas de referencia (en la figura, la Tierra) o el tiempo de evaluación. Los datos generados por *Horizons System* son los más precisos de los que se disponen, por lo que se utilizarán como referencia para comparar los resultados obtenidos mediante el propagador orbital en Python.

4.1. El Sol como cuerpo central - Sonda Solar Parker

Para el primer ejemplo desarrollado, se ha seleccionado una misión que orbita alrededor del Sol tomando, por tanto, como sistema de referencia un marco heliocéntrico. Este es el caso de la Sonda Solar Parker (ver [Figura 4.2](#)), lanzada por la NASA en 2018 y cuya misión es la de estudiar el comportamiento del Sol y realizar observaciones de la corona solar exterior [3]. Es el objeto construido por el ser humano que más cerca ha estado del Sol, a unos 6,2 millones de kilómetros; y también el más rápido, viajando a casi 700.000 km/h en su perihelio más cercano.



(a) Representación artística de la Sonda Solar Parker.

(b) Insignia oficial de la Sonda Solar Parker.

Figura 4.2: Misión Sonda Solar Parker de la NASA (fuente: NASA).

Existen dos características principales que se pueden destacar de esta misión:

- Una es en relación a la radiación y al calor recibidos en la nave por parte del Sol. La intensidad de estos factores durante esta misión es de aproximadamente 520 veces mayor a la que sufriría un satélite en una órbita terrestre. Para contrarrestar esto y hacer viable el estudio observacional del Sol, la Sonda Parker cuenta con un protector solar de carbono reforzado con fibra de carbono de 11,4 cm de espesor. Este escudo (ver [Figura 4.3](#)) refleja la mayor energía posible procedente del Sol permitiendo soportar temperaturas de hasta 1650°C.
- En segundo lugar, es importante recalcar la trayectoria que sigue la Sonda Parker en su misión. Durante el tiempo total de la misión, se incluyen siete sobrevuelos a Venus que van reduciendo gradualmente su órbita elíptica alrededor del Sol hasta un periodo de 88 días (ver [Figura 4.4](#)).

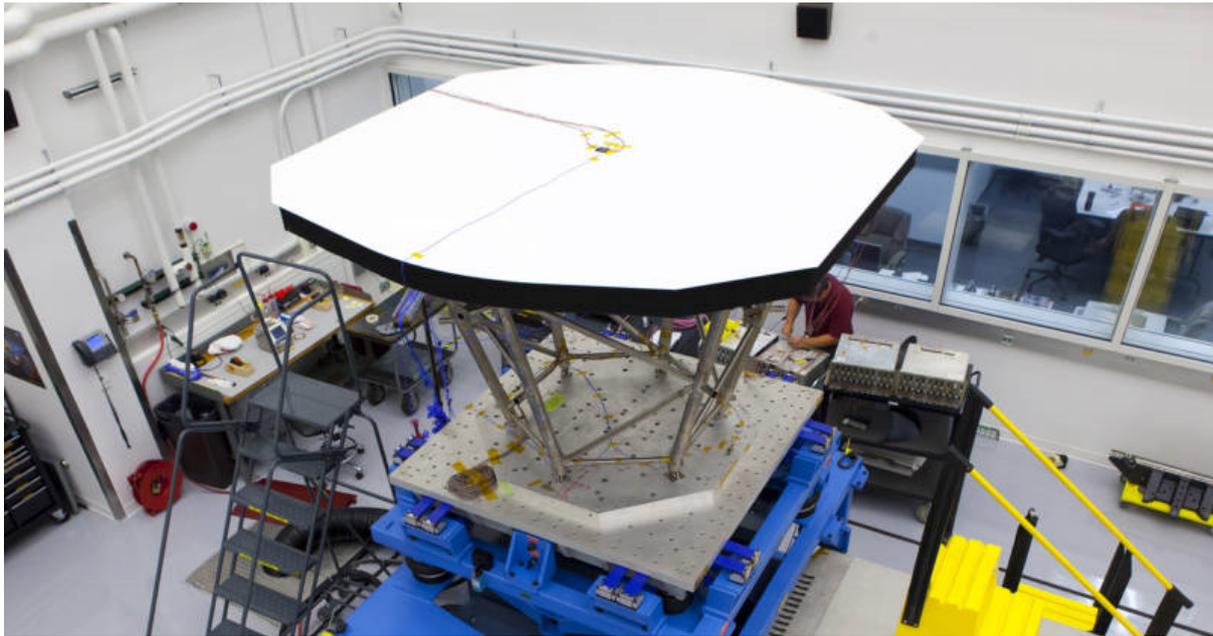


Figura 4.3: Escudo térmico de la Sonda Solar Parker formado por dos paneles de carbono-carbono reforzado [18] (fuente: NASA).

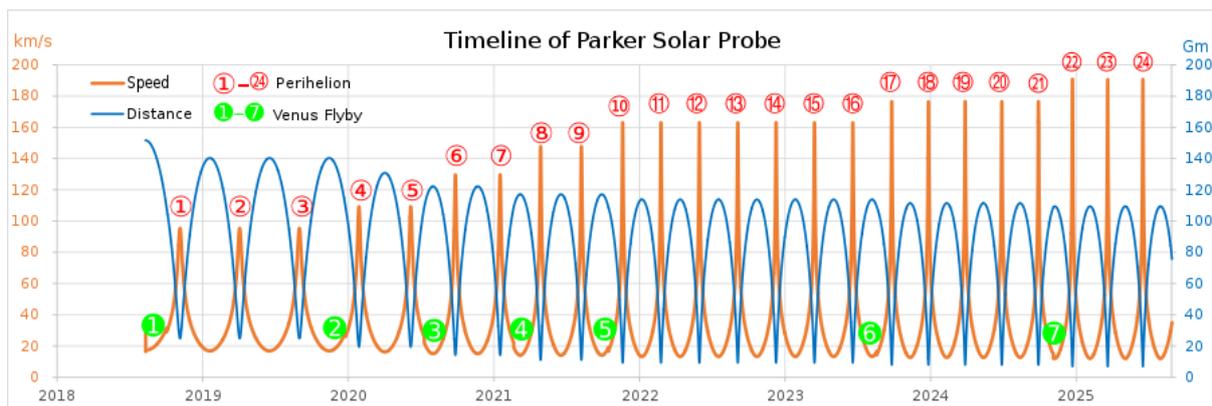


Figura 4.4: Línea de tiempo de la Sonda Solar Parker representando la velocidad y la distancia al Sol, desde su lanzamiento en 2018 hasta 2026 (fuente: *Wikimedia Commons*).

Debido a estas razones, se entiende que para la propagación orbital en Python será fundamental imponer las perturbaciones debidas tanto a la radiación solar como a la atracción gravitatoria de Venus. En cuanto a la presión por radiación solar, tal y como se vio en la [Subsección 2.2.3](#) del marco teórico, será necesario conocer los parámetros relevantes para su cálculo.

Para que los instrumentos de la sonda operen correctamente, deben encontrarse a temperaturas relativamente bajas. Para conseguir esto, la Sonda Parker viajará durante su trayectoria heliocéntrica con el escudo térmico enfocado en dirección al Sol, así que se puede considerar el área de absorción A_s de la nave como la superficie del escudo.

De [18] se sabe que el protector solar de la sonda tiene un diámetro de 2.4 m aunque se desconoce el valor del área total del escudo. Sin embargo, por aproximación directa a una superficie circular se obtiene

$$A_s = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{2,4m}{2}\right)^2 \approx 4,52m^2. \quad (4.1)$$

Por otro lado, respecto al coeficiente de radiación C_R , se estima que el escudo térmico debe tener una alta emisividad para reflejar la energía irradiada del Sol, lo cual es esencial para proteger los instrumentos de la sonda. Del informe sobre el estado del arte de la protección solar publicado por la NASA en 2018 [43], se obtiene que la emisividad ϵ de materiales de carbono-carbono reforzado como el del protector solar suele ser de aproximadamente 0,9. Aplicando esto como coeficiente de radiación a la ecuación de perturbación por radiación solar, se estima

$$\epsilon = 0,9 \longrightarrow C_R = 1,9. \quad (4.2)$$

Los datos de entrada impuestos para la propagación de la órbita de la Sonda Solar Parker, se recogen en la [Tabla 4.1](#). Tal y como se puede apreciar en la [Figura 4.4](#), se espera que el último sobrevuelo a Venus de la misión se de a finales del año 2024, concretamente en noviembre. Por ello, se ha seleccionado un periodo de tiempo para la simulación que incluya esta fecha para poder percibir el efecto gravitacional del planeta sobre la trayectoria de la sonda.

SONDA SOLAR PARKER		CUERPO CENTRAL	
Masa	685kg	SOL	
A_s	4,52m ²		
PERTURBACIONES ORBITALES		FECHA INICIAL	
Achatamiento	$J_2 = 2,0 \cdot 10^{-7}$ [42]	20/mayo/2024 0h UT	
Radiación solar	$C_R = 1,9$	TIEMPO DE SIMULACIÓN	
Gravedad planeta	Venus	1 año	

Tabla 4.1: Datos de entrada seleccionados para la propagación orbital de la Sonda Solar Parker.

La masa de la Parker [3] se ha considerado constante e igual a la de lanzamiento. Igualmente, el término ν se ha estimado siempre igual a 1, ya que la órbita de la nave no se ve afectada por ningún periodo de sombra relevante. Aunque realiza un sobrevuelo a Venus, la sombra que pueda ejercer el cuerpo sobre la sonda puede considerarse insignificante.

En primer lugar, se ha simulado en la [Figura 4.5](#) la propagación orbital de la Sonda Parker sin tener en cuenta los efectos de las perturbaciones, es decir, manteniendo las condiciones de la trayectoria fundamental Kepleriana. Se muestra la comparativa con la trayectoria generada por *Horizons System* (en azul). Al no tener en cuenta las aceleraciones que producen las perturbaciones, se puede ver cómo la órbita propagada en Python (en naranja) no cambia su trayectoria y se mantiene en una órbita elíptica constante alrededor del Sol, siendo éste el origen de coordenadas del sistema. Aunque quizás no se aprecie del todo correctamente en la figura, ambas trayectorias parten del mismo punto inicial (punto negro). Sin embargo, la órbita azul

Sonda Solar Parker SIN perturbaciones

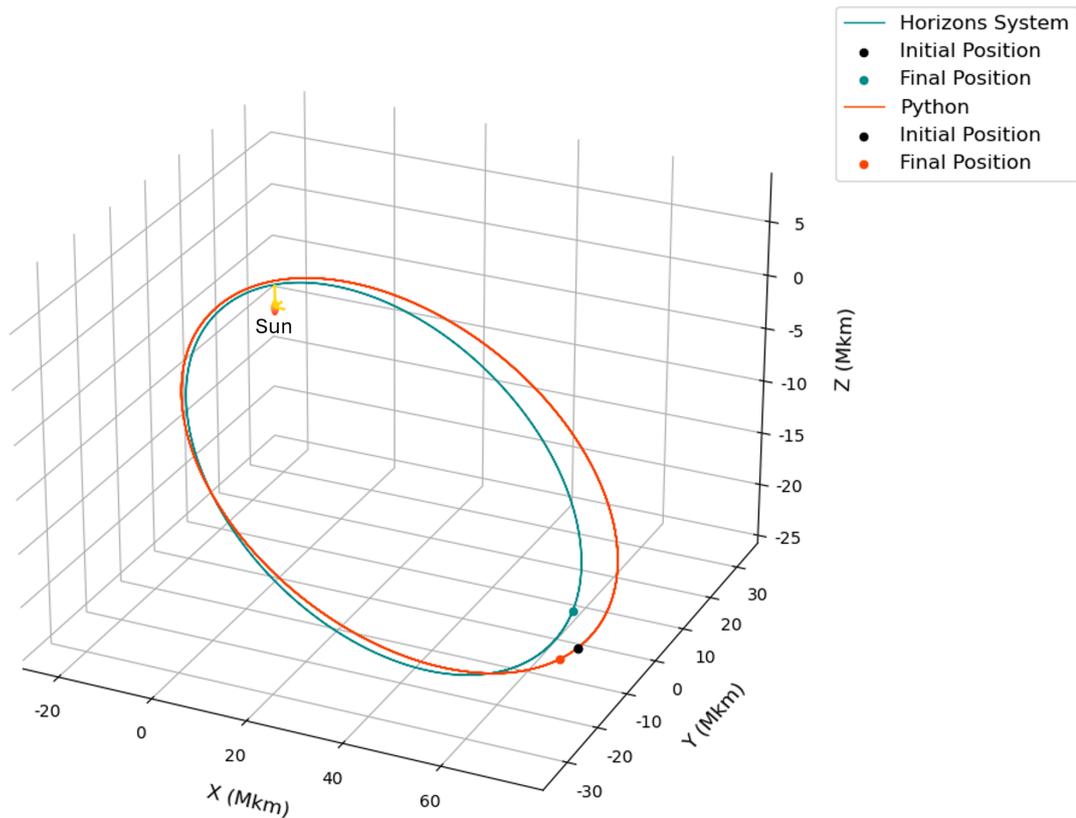


Figura 4.5: Propagación orbital de la Sonda Solar Parker sin perturbaciones aplicadas.

varía su trayectoria debido a las perturbaciones haciendo que la elipse se vuelva más pequeña, mientras que, como se ha comentado, la órbita naranja se mantiene estable.

En cambio, en la [Figura 4.6](#) se representa la propagación orbital de la Sonda Parker en Python con las perturbaciones aplicadas. Se observa claramente cómo la trayectoria seguida en la simulación (naranja) se aproxima de forma notable a la trayectoria generada por *Horizons System* (azul). Esto, como era esperable, se debe a la imposición de las aceleraciones producidas principalmente por la radiación solar y por el sobrevuelo a Venus. Para apreciar el efecto que tiene la atracción gravitatoria de Venus y cómo afecta a la trayectoria de la sonda su sobrevuelo, se ha añadido la órbita del planeta (en gris) a la figura.

4.2. La Tierra como cuerpo central - Satélite PAZ

En este otro ejemplo, se ha realizado el estudio de un satélite que orbita alrededor de la Tierra con un marco de referencia geocéntrico. El seleccionado es el satélite PAZ [26], lanzado en 2018 y operado por la empresa Hisdesat. PAZ (ver [Figura 4.7](#)) es un satélite radar del Programa Nacional de Observación de la Tierra por Satélite (PNOTS) creado por el Ministerio de Defensa y el Ministerio de Industria, Comercio y Turismo de España. Siendo el primer satélite radar

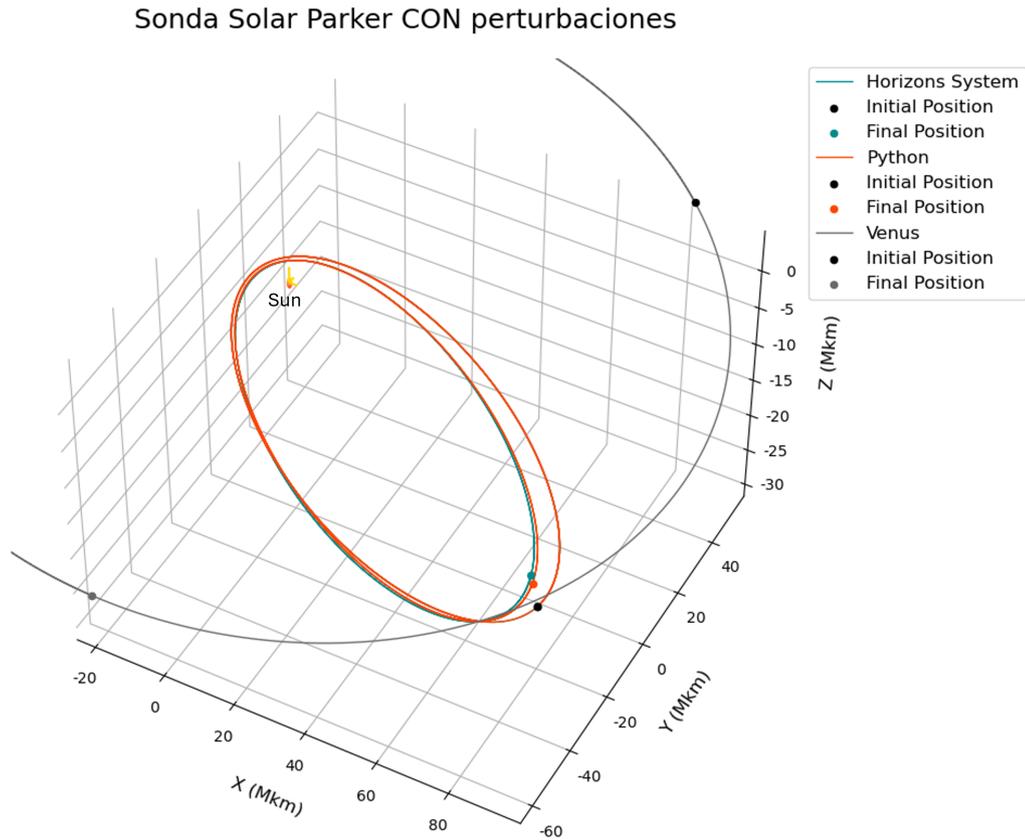
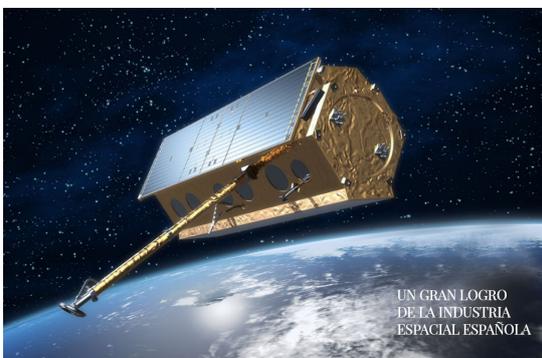


Figura 4.6: Propagación orbital de la Sonda Solar Parker con perturbaciones aplicadas.

español puesto en órbita, utiliza un Radar de Apertura Sintética (SAR, por sus siglas en inglés) para tomar imágenes de la Tierra tanto de uso gubernamental como comercial.

Se encuentra en una órbita LEO (Orbita Terrestre Baja) heliosíncrona a unos 514 km sobre la superficie de la Tierra, lo que le permite cubrir más de 300.000 kilómetros cuadrados al día. A esta altitud, tal y como se adelantó en la [Figura 2.1](#) donde se comparaba el efecto de las diferentes perturbaciones, se espera que la principal alteración de la trayectoria Kepleriana se deba al achatamiento del planeta. Sin embargo, a parte de ésta, se impondrán otras perturbaciones para tratar de conseguir que la propagación orbital sea lo más precisa posible.



(a) Representación artística del satélite PAZ.



(b) Plano detalle del satélite PAZ.

Figura 4.7: Satélite radar español PAZ operado por Hisdesat (fuente: Airbus).

En primer lugar, como se puede apreciar más detalladamente en la [Figura 4.7b](#), el satélite tiene una forma peculiar de prisma hexagonal. De la información técnica publicada por Hisdesat [26], sólo se conoce que tiene una longitud de 5 metros y un diámetro de 2.4 metros, por lo que se han realizado una serie de aproximaciones matemáticas para calcular los parámetros geométricos necesarios.

Suponiendo un hexágono regular y conociendo el dato del diámetro de la circunferencia circunscrita, se puede calcular el perímetro P y la apotema Ap para obtener finalmente el área frontal del satélite mediante

$$A = \frac{P \cdot Ap}{2} \approx \frac{7,2m \cdot 1,04m}{2} \approx 3,74m^2 \quad (4.3)$$

Esta área frontal A será la utilizada para la perturbación por resistencia atmosférica, ya que es el área normal relativa al movimiento del satélite. Por otro lado, para calcular el área de absorción A_s para la radiación solar, se ha estimado que aproximadamente la mitad del tronco del satélite estará cara al Sol en todo momento. Por ello, se calcula el área de tres de los seis rectángulos que componen el prisma hexagonal con la fórmula

$$A_s = 3(L \cdot l) = 3(5m \cdot 1,2m) = 18m^2 \quad (4.4)$$

donde $L = 5m$ es la longitud total del satélite y $l = 1,2m$ es la longitud del lado de la cara frontal, con forma de hexágono.

De la información conocida respecto a los materiales de la estructura [27], se sabe que el satélite cuenta con un revestimiento de Kapton sobre una estructura Aluminio. Este tipo de recubrimiento se suele hacer mediante capas siguiendo el método de aislamiento térmico MLI (Multi-Layer Insulation). Siguiendo los datos facilitados por el fabricante norteamericano *Design1st* [1], la emisividad de las películas de Kapton sobre Aluminio pueden variar aproximadamente entre 0,2 y 0,8 dependiendo de diferentes parámetros como el grosor o el número de capas. El valor del coeficiente de radiación C_R se ha estimado como un valor medio y razonable en relación a los datos obtenidos sobre la composición de la superficie del satélite. Por esta razón, se impuso un $C_R = 1,5$.

Respecto al coeficiente de resistencia atmosférica o coeficiente de drag C_D , no se dispone de ningún tipo de información de la que se pueda obtener este dato concreto para el satélite PAZ. Por ello, se sigue la estimación establecida por Vallado [50, p.551] en la que se estipula que el coeficiente de drag para satélites en la atmósfera superior puede aproximarse a $C_D = 2,2$.

De la misma manera que se hizo para el caso heliocéntrico, se muestran en la [Tabla 4.2](#) los datos de entrada impuestos para la propagación orbital del satélite PAZ. En este caso, al ser una órbita LEO cercana a la Tierra, el tiempo de simulación se ha impuesto de 5 días. Suficiente para poder apreciar los efectos de la perturbación por achatamiento.

Al tratarse este caso de un sistema geocéntrico con la Tierra como cuerpo central, se utilizan todos los armónicos zonales J_k disponibles en la [Tabla 2.1](#) para la perturbación producida por

SATÉLITE PAZ		CUERPO CENTRAL	
Masa	1400kg	TIERRA	
A (frontal)	3,74m ² (4.3)		
A _s (absorción)	18,0m ² (4.4)		

PERTURBACIONES ORBITALES		FECHA INICIAL	
Achatamiento	J ₂ , J ₃ , J ₄ , J ₅ , J ₆	13/junio/2024 0h UT	
Resistencia atmosférica	C _D = 2,2	TIEMPO DE SIMULACIÓN	
Radiación solar	C _R = 1,5	10 días	
Gravedad lunar	✓		
Gravedad solar	✓		
Gravedad planeta	Júpiter		

Tabla 4.2: Datos de entrada seleccionados para la propagación orbital del Satélite PAZ.

el achatamiento. También, debido a que el satélite orbita en una órbita terrestre LEO, se ha impuesto la atracción gravitatoria de la Luna, además de la del Sol que, como se vio anteriormente en la [Figura 2.1](#), serán de un orden similar. Por último, se ha añadido la perturbación por gravedad planetaria de Júpiter, ya que es el planeta del Sistema Solar de mayor dimensión (~ 70000km) y con mayor masa (~ 2 · 10²⁷kg).

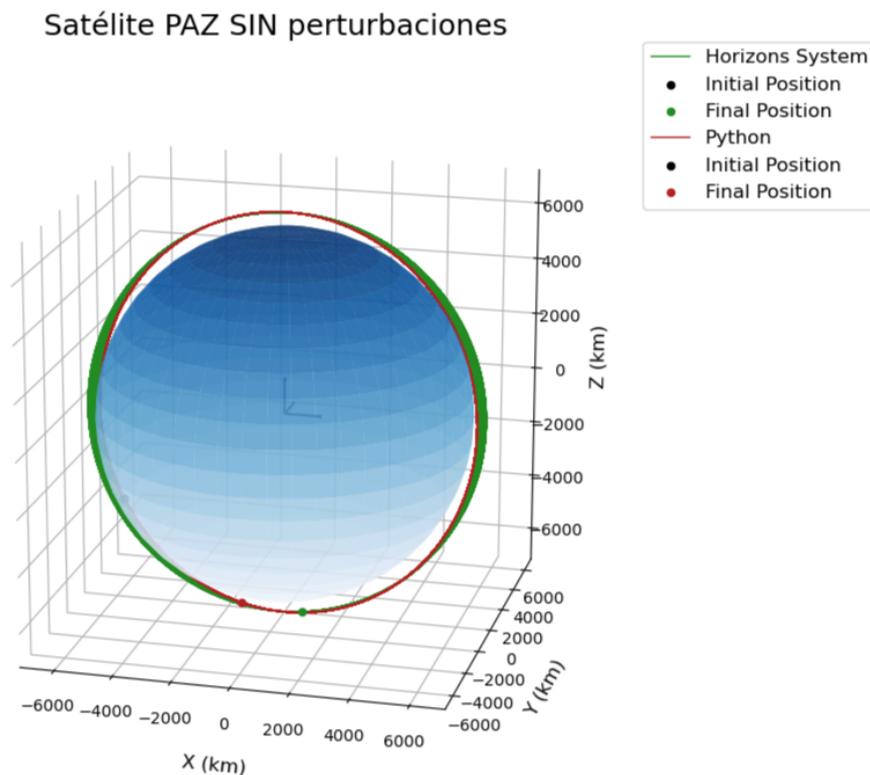


Figura 4.8: Órbita del satélite PAZ alrededor de la Tierra.

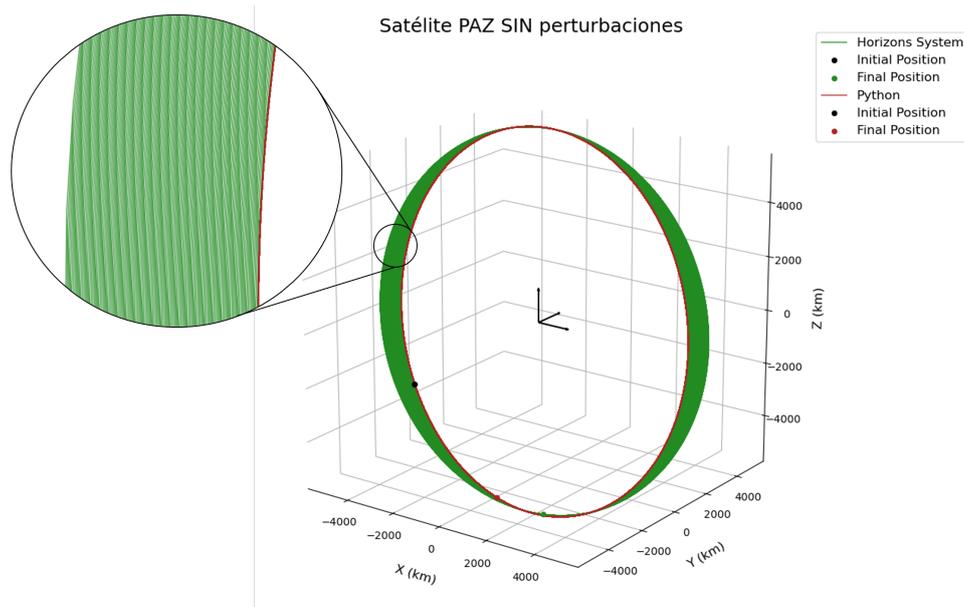


Figura 4.9: Propagación orbital del Satélite PAZ sin perturbaciones aplicadas.

Cuando se representa gráficamente la solución obtenida con la propagación orbital, se reproduce en forma de esfera el cuerpo central del sistema junto con los ejes de coordenadas, como se pudo ver con el Sol en el caso heliocéntrico y como se puede apreciar en la [Figura 4.8](#) con la Tierra. Esta esfera se representa según las dimensiones del cuerpo central seleccionado. Sin embargo, en este caso, al tratarse de una órbita baja LEO, se representarán los casos de estudio sin el cuerpo central en la figura para poder comentar los resultados con más detalle.

En la [Figura 4.9](#) se representan las órbitas del Satélite PAZ para los datos de entrada seleccionados sin tener en cuenta los efectos de las perturbaciones. En verde, se muestra la órbita obtenida a partir de la web *Horizons System* y, en rojo, la órbita propagada con Python. Se puede apreciar cómo, al no estar aplicadas las perturbaciones, la órbita roja se mantiene constante durante los 10 días simulados.

En cambio, cuando se tienen en cuenta los efectos por las perturbaciones, se obtiene la [Figura 4.10](#). En ella, se puede apreciar cómo, en este caso, sí que existe una variación en la órbita que sigue el satélite, la cual se asemeja en mayor medida a la obtenida con los datos de *Horizons*. La perturbación a la que se debe esta alteración es el achatamiento terrestre, como era de esperar. Al imponer las ecuaciones dictaminadas por los zonales armónicos, la órbita que sigue el Satélite PAZ se ve modificada. Las principales consecuencias que provoca el achatamiento de la Tierra sobre este tipo de órbitas son dos:

- El avance o retroceso de los nodos, lo que causa que la longitud del nodo ascendente Ω se incremente o decrezca.
- El avance o retroceso del perigeo. De la misma forma el argumento del perigeo ω de la órbita se verá alterado.

La discrepancia que se da en los grados de diferencia que existen sobre las posiciones finales de las dos órbitas representadas, se achaca a las aproximaciones numéricas que se han tenido que hacer para introducir los datos del satélite al programa.

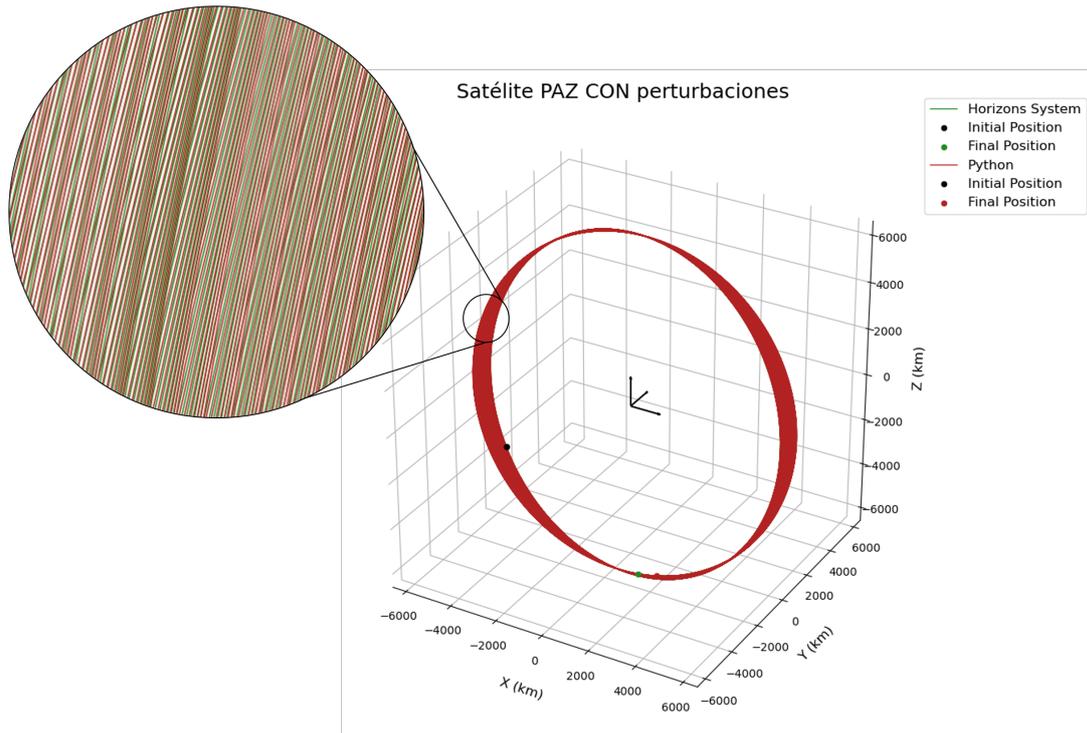


Figura 4.10: Propagación orbital del Satélite PAZ con perturbaciones aplicadas.

La órbita del satélite PAZ está seleccionada debidamente para que pueda operar correctamente a esa altitud y no existan problemas por rozamiento atmosférico según sus especificaciones técnicas. A modo de enfatizar el efecto que puede tener el drag sobre un satélite en una órbita terrestre a baja altitud, en la Figura 4.11 se representa la propagación orbital del Satélite PAZ si éste se hubiese establecido a una altitud aproximadamente 100 kilómetros más baja.

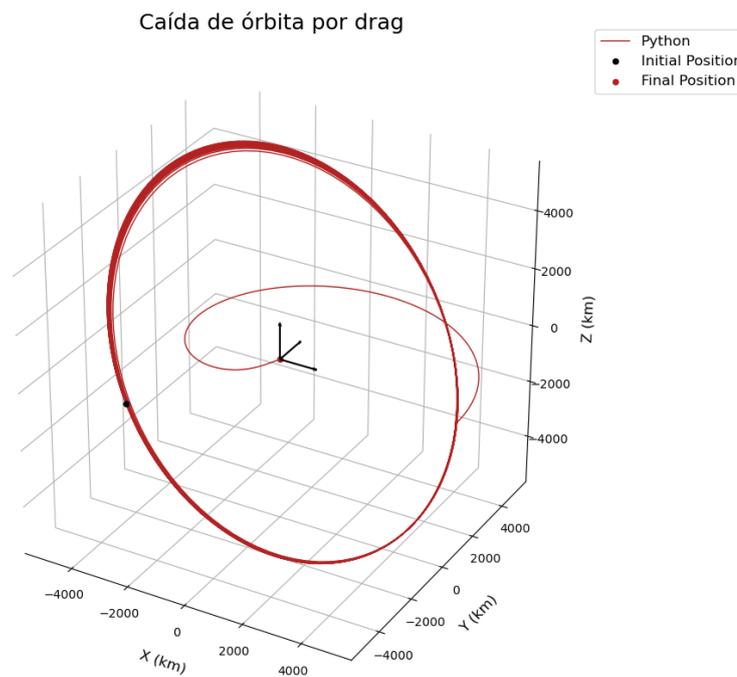


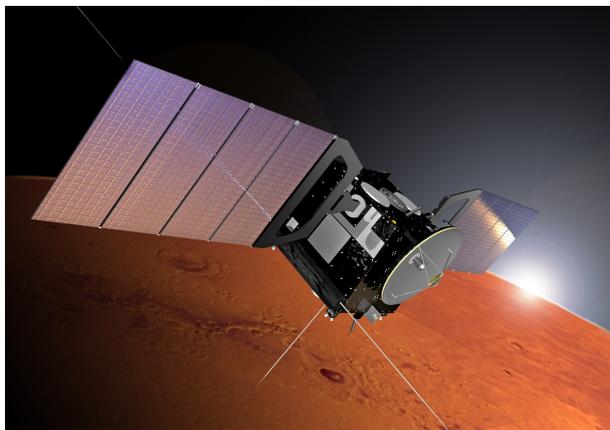
Figura 4.11: Pérdida de órbita debida al rozamiento atmosférico.

Con las mismas especificaciones técnicas de tamaño y peso, la órbita del satélite iría disminuyendo hasta caer por la fuerza de la atracción gravitatoria de la Tierra. Por este motivo, incluso en su altitud 'correcta', los satélites en órbitas LEO deben realizar maniobras de corrección de órbita periódicamente debido a los efectos del rozamiento aerodinámico sobre su estructura.

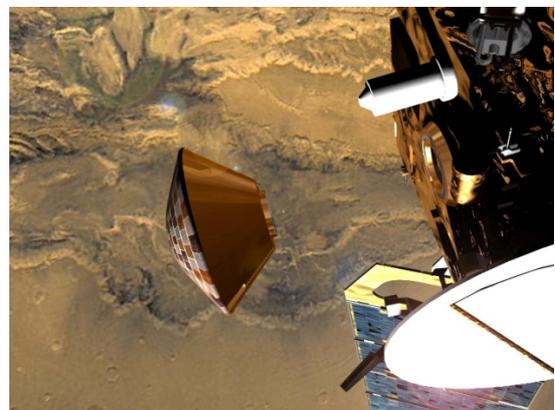
4.3. Otro planeta como cuerpo central - Mars Express

Como último ejemplo, en esta sección se desarrolla el estudio de un satélite que no orbite directamente al Sol ni a la Tierra. Por tanto, se realizará la propagación orbital para un sistema en el que el cuerpo central sea otro planeta del Sistema Solar. En este caso, se ha seleccionado la misión de exploración espacial Mars Express [6], cuyo lanzamiento se ejecutó en 2003 a cargo de la Agencia Espacial Europea (ESA, del inglés *European Space Agency*).

La misión de la nave Mars Express consistía en la observación en órbita de Marte además de un aterrizador, el Beagle-2, diseñado para investigar la biología y geología en la superficie del planeta (ver Figura 4.12b). Sin embargo, el Beagle-2 falló en su proceso de aterrizaje por lo que no se pudo utilizar como fuente de estudio. En cambio, el vehículo en órbita de la Mars Express (ver Figura 4.12a) se mantiene desde entonces analizando la superficie marciana. Mediante el uso de instrumentación avanzada, la observación del planeta por parte de la misión de la ESA ha conseguido logros destacados como un mapeo detallado y tridimensional del terreno, la evidencia de agua congelada bajo la superficie o la detección de metano en su atmósfera.



(a) Representación artística del orbitador de la misión Mars Express.



(b) Beagle-2 abandonando la Mars Express tras la inserción orbital.

Figura 4.12: Misión de exploración espacial Mars Express de la ESA (fuente: ESA).

El orbitador de la Mars Express se encuentra en una trayectoria elíptica con una excentricidad de $\sim 0,9$ que equivale a una altitud de $\sim 300km$ en el periastro y $\sim 10000km$ en el apoastro, lo que permite una observación duradera del planeta en cada órbita.

Según los datos técnicos de la nave facilitados por la ESA en [7], el orbitador tiene unas dimensiones de $1,5 \times 1,8 \times 1,4m$ además de un superficie de paneles solares de $11,42m^2$. Suponiendo que prácticamente el total de la energía solar irradiada es absorbida por los paneles,

se aproxima el área de absorción de la nave a $A_s = 11,42m^2$. Además, del mismo modo que el impacto de la radiación solar en una órbita terrestre LEO es de un orden muy bajo (Figura 2.1), para una órbita a Marte, como es el caso, será ínfimo en relación a otras perturbaciones.

Siguiendo este patrón, para la estimación del coeficiente de radiación de la Mars Express, se ha utilizado el valor de la emisividad de las células fotovoltaicas [48]. El cual, según la inclinación del panel respecto al Sol incidente, varía entre 0,5 y 0,9. Siguiendo esta información y tras la aproximación realizada previamente, se ha seleccionado un coeficiente $C_R = 1,6$, teniendo en cuenta que el segmento principal de la nave también recibe radiación solar.

Spacecraft Item	Mass at Launch
Spacecraft Bus	439 kg
Lander	71 kg
Payload	116 kg
Propellant	427 kg
Launch Mass	1223 kg

Figura 4.13: Especificaciones de masa de los elementos de la nave Mars Express (fuente: ESA).

En relación a la masa de la Mars Express, se ha utilizado los valores compartidos por la ESA en sus especificaciones técnicas (ver Figura 4.13). Estos valores se dividen entre los distintos elementos de la nave. Para la estimación de la masa utilizada, se han seguido una serie de valoraciones:

En primer lugar, debido a que el Beagle-2 (lander) fue desprendido del orbitador, su masa es ignorada para este caso. Por otro lado, los valores facilitados son los relativos al lanzamiento de la misión. Debido a que la simulación se está realizando para más de 10 años después de la inserción en órbita de la nave, no se contempla la totalidad del combustible especificado. Por estos motivos, finalmente se ha aproximado el valor de la masa de la Mars Express a $m = 900kg$.

MARS EXPRESS		CUERPO CENTRAL
Masa	900kg	MARTE
A_s	11,42m ²	
PERTURBACIONES ORBITALES		FECHA INICIAL
Achatamiento	$J_2 = 1,96045 \cdot 10^{-3}$ (Tabla 2.2)	04/junio/2024 0h UT
Radiación solar	$C_R = 1,6$	TIEMPO DE SIMULACIÓN
Gravedad solar	✓	20 días
Gravedad planeta	Tierra, Júpiter	

Tabla 4.3: Datos de entrada seleccionados para la propagación orbital de la nave Mars Express.

En la [Tabla 4.3](#) se recogen los datos de entrada impuestos para la propagación orbital de la Mars Express. Además de la atracción gravitatoria producida por el Sol, se ha añadido la gravedad tanto de la Tierra como de Júpiter por ser los planetas más cercanos. También, se ha seleccionado un tiempo de simulación de 20 días con el fin de observar varias órbitas de la nave alrededor de Marte. Respecto a la resistencia aerodinámica, no se ha aplicado ya que no se conocen los datos relativos a la atmósfera de Marte. No obstante, según los estudios realizados, la exosfera de Marte comienza a unos 200 km de altitud y el periastro de la órbita de la Mars Express se da a unos 300 km. Por lo que no se esperarían grandes variaciones en la trayectoria debidas a la resistencia atmosférica.

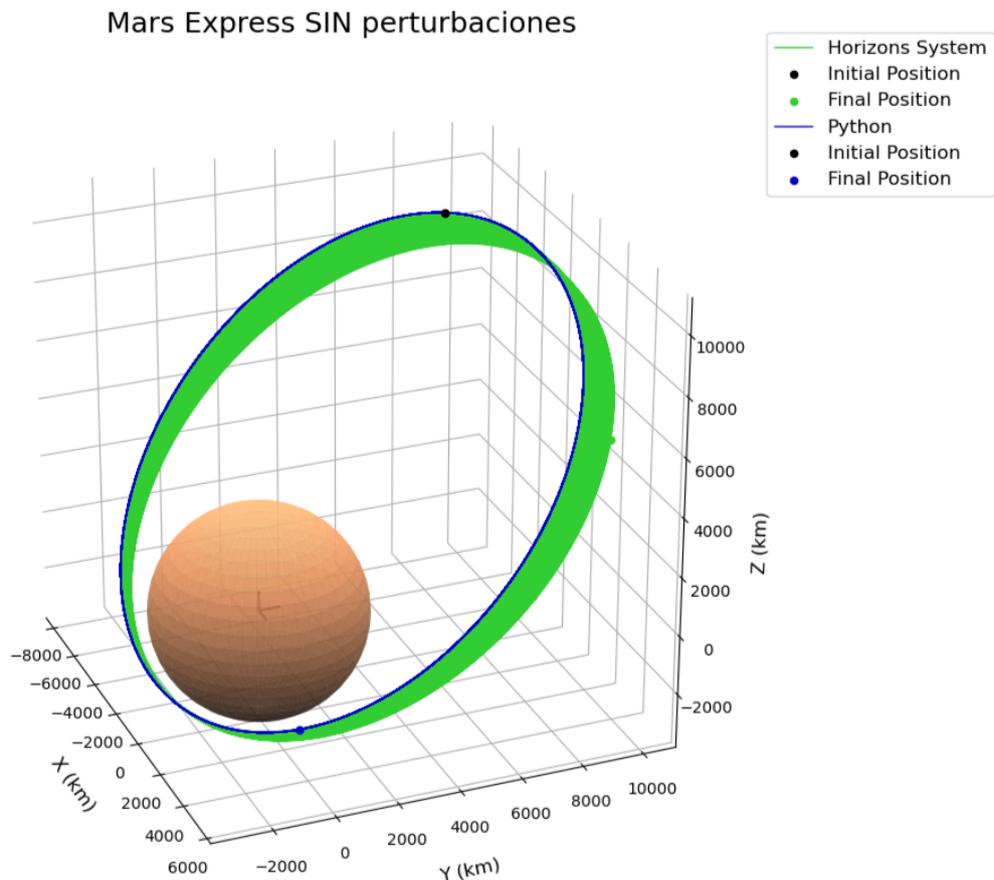


Figura 4.14: Propagación orbital de la nave Mars Express sin perturbaciones aplicadas.

Siguiendo el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores, en primer lugar se muestra en la [Figura 4.14](#) la propagación de la órbita de la Mars Express para los datos de entrada seleccionados sin tener en cuenta el efecto de las perturbaciones. De nuevo, se observa una trayectoria elíptica Kepleriana que no varía con el periodo de tiempo simulado, distando de la trayectoria generada por *Horizons System*.

En cambio, si se consideran los efectos de todas las perturbaciones aplicadas, se obtiene la propagación orbital representada en la [Figura 4.15](#). Fijándose en el detalle de la figura, se puede apreciar como la órbita simulada en Python (en azul) sigue una trayectoria muy similar a la obtenida por *Horizons* (en verde). De la misma manera que sucedía en el ejemplo con la Tierra

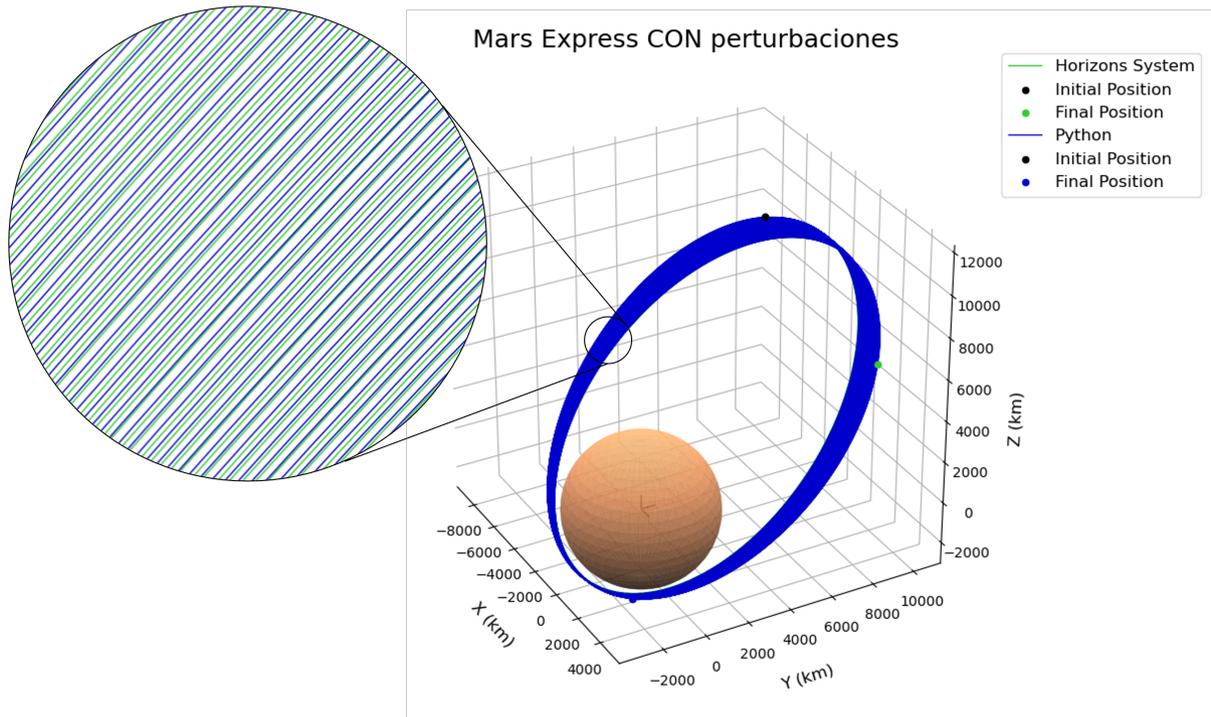


Figura 4.15: Propagación orbital de la nave Mars Express con perturbaciones aplicadas.

como cuerpo central, se ve cómo la órbita varía debido principalmente al efecto producido por el achatamiento del planeta. A diferencia del caso terrestre, para Marte sólo se dispone del armónico J_2 y, por este motivo, ha sido el único de los aplicados.

De nuevo, se detecta una discrepancia entre ambas órbitas en el punto final su la trayectoria debido a las aproximaciones numéricas realizadas en el análisis.

Capítulo 5

Interfaz gráfica

Para facilitar la interacción con el programa de propagación orbital, se ha desarrollado una interfaz gráfica o GUI (*Graphical User Interface*) que permita introducir los datos necesarios para el estudio y realizar los análisis de manera más intuitiva. Python cuenta con diferentes bibliotecas para llevar a cabo una interfaz gráfica. En este caso se ha utilizado *CustomTkinter* [45], un paquete basado en otra biblioteca para GUIs, *Tkinter* [32], que permite una mayor personalización en los elementos que pueden implementarse en la interfaz.

Una interfaz gráfica o GUI permite introducir diferentes elementos como pueden ser etiquetas, botones o interruptores, con la capacidad de interactuar con ellos para, en este caso, implementar los datos de entrada del problema para su posterior resolución. En este capítulo se realiza la descripción de la interfaz desarrollada para el propagador orbital, comenzando con una vista general de la ventana y , después, comentando con mayor detalle las diferentes secciones en las que se ha dividido la GUI según su función.

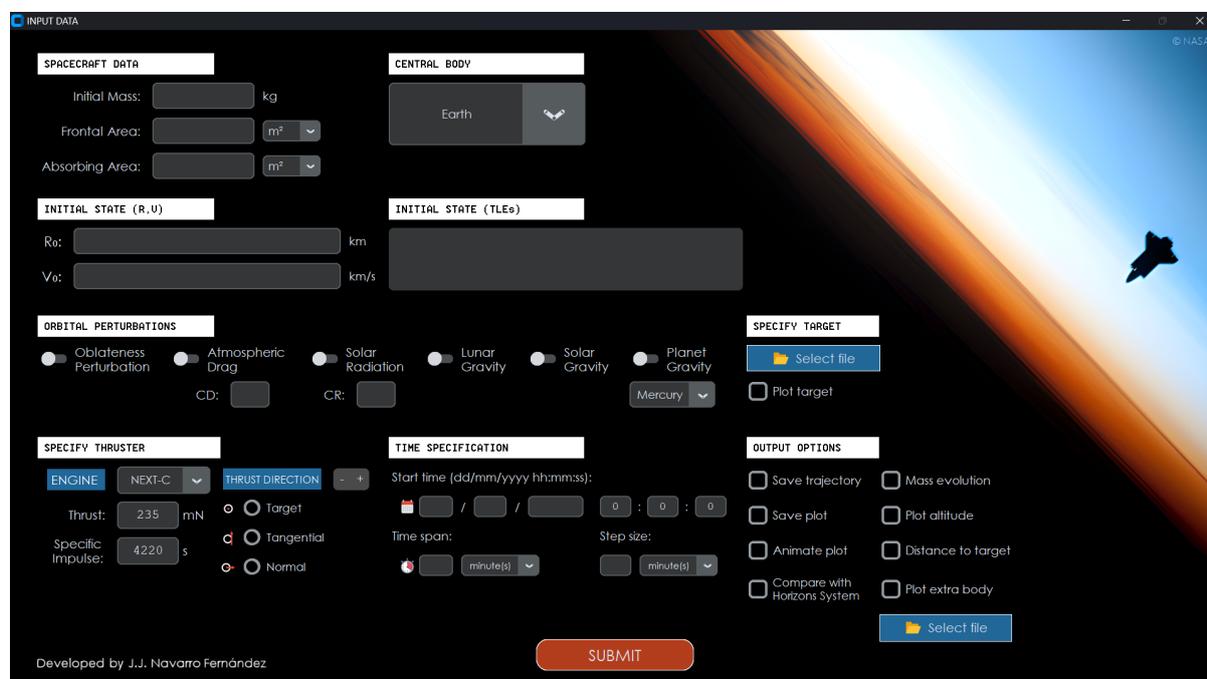


Figura 5.1: Ventana completa de la interfaz gráfica para los datos de entrada del propagador orbital.

Al ejecutar el código del propagador orbital, se abre la ventana de la interfaz gráfica que se muestra en la [Figura 5.1](#). Se ha utilizado como fondo una imagen con el transbordador espacial Endeavour [35] cruzando la línea de Kármán, publicada por la NASA. La línea de Kármán [34]

se define popularmente como el límite que separa la atmósfera y el espacio exterior. Se llama así por Theodore von Kármán [22], físico-matemático que calculó este límite en la década de los 1950s, y actualmente la FAI (Fédération Aéronautique Internationale) define la línea de Kármán a una altitud de 100km sobre el nivel del mar.

A continuación, se va ir ampliando la ventana de la interfaz por secciones para realizar comentarios según su elaboración y funcionalidad.

The image shows a dark-themed GUI with two main sections. The left section, titled 'SPACECRAFT DATA', contains three input fields: 'Initial Mass:' followed by a text box and 'kg', 'Frontal Area:' followed by a text box and a dropdown menu showing 'm²', and 'Absorbing Area:' followed by a text box and a dropdown menu showing 'm²'. The right section, titled 'CENTRAL BODY', features a large button labeled 'Earth' with a small icon of a planet and a dropdown arrow on its right side.

Figura 5.2: Interfaz gráfica: Datos de la nave y cuerpo central.

Para comenzar, en la Figura 5.2 se muestra los dos primeros marcos de los que se compone la GUI. A la izquierda de la imagen se muestran las entradas de datos de la nave para la que se pretende realizar la propagación orbital. En la casilla superior se introduce al valor de la masa inicial de la nave en kilogramos, seguida de los valores de las áreas relevantes para el problema. En primer lugar, el área frontal que representa el valor del área A para el cálculo de la perturbación por resistencia atmosférica (2.20) y, por otro lado, el área de absorción que representa el valor del área A_s necesario para calcular la perturbación debida a la presión por radiación solar (2.23). Para las dos áreas se han implementado sendas casillas desplegadas que permiten seleccionar las unidades entre metros cuadrados m^2 y kilómetros cuadrados km^2 . Aunque el propagador orbital está pensado principalmente para simular la trayectoria de naves espaciales, también se puede utilizar para integrar temporalmente la posición de cuerpos más grandes, como planetas o satélites naturales. Por este motivo, se ha decidido añadir también la opción de seleccionar las áreas en unidades de km^2 .

En la parte derecha de la figura, se puede ver la casilla disponible para seleccionar el cuerpo central del sistema, con el que se establece el centro de coordenadas y marco de referencia del estudio. Además de la Tierra, impuesta como cuerpo predeterminado, se pueden seleccionar como opciones el Sol y cualquier otro planeta del Sistema Solar.

The image shows a dark-themed GUI with two sections for initial state data. The left section, titled 'INITIAL STATE (R,U)', contains two input fields: 'R₀:' followed by a text box and 'km', and 'V₀:' followed by a text box and 'km/s'. The right section, titled 'INITIAL STATE (TLEs)', contains a large, empty text box for inputting TLE data.

Figura 5.3: Interfaz gráfica: Estado inicial de la trayectoria.

En la segunda fila de la interfaz gráfica, tal y como se muestra en la Figura 5.3, se deben imponer los datos necesarios para conocer el estado inicial de la trayectoria de nave. Son dos

opciones diferentes existentes, pero ambas con el mismo propósito. La parte izquierda permite introducir el estado inicial de la nave según los vectores iniciales de posición R_0 y velocidad V_0 en kilómetros km y kilómetros por segundo km/s , respectivamente. Esta información es aquella que se puede obtener directamente de los datos generados por la aplicación de *Horizons System*. Otra opción implementada en la interfaz gráfica, y no comentada anteriormente, es la de introducir el estado inicial de la trayectoria de la nave mediante TLEs.

Un set TLE es un formato de datos codificado que incluye la lista de elementos orbitales de un cuerpo, además de otra información relevante, como la época en la que se han tomado los datos o identificadores internacionales. Se llama así por sus siglas en inglés *Two-Line Element set* (TLEs), ya que el formato de estos datos se expone en dos líneas. La versión estándar utilizada de los TLEs ha sido desarrollada por el ejército de los Estados Unidos y la NASA. Concretamente, el formato actual que se utiliza de los TLEs, es el impuesto por el Mando Norteamericano de Defensa Aeroespacial (NORAD, del inglés *North American Aerospace Defense Command*). Para la obtención de los TLEs se utiliza la web *CelesTrak* [29], creada en 1985 por Dr. T.S. Kelso. Esta web actualiza diariamente las últimas situaciones orbitales de diferentes objetos celestes y permite obtener la información de los elementos en formato NORAD TLE.

Para la descripción del modelo de TLEs, se ha utilizado a modo de ejemplo el Sentinel-1A (ver [Figura 5.4](#)), el primer satélite lanzado por el programa Copernicus de la ESA [5]. Es un satélite radar que se encarga de la observación terrestre para el control de la superficie, vegetación y gestión de desastres.

```
SENTINEL-1A
1 39634U 14016A    24171.13915696 .00000292 00000+0 71696-4 0 9997
2 39634  98.1791 178.2069 0001379  89.3227 270.8130 14.59201451543876
```

Figura 5.4: Ejemplo de TLE del satélite Sentinel-1A (fuente: *CelesTrak*).

A continuación, se detalla el significado de cada término con el número de columnas para cada línea, destacando el caso de ejemplo.

Línea de título

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
SENTINEL-1A																																																																					
1																																																																					

Casilla	Columna(s)	Contenido	Ejemplo
1	1-24	Nombre del satélite	SENTINEL-1A

Tabla 5.1: Línea de título del formato TLE.

La línea inicial del formato TLE se considera la línea de título. En ella, como se puede apreciar en el ejemplo de la [Tabla 5.1](#), sólo aparece el nombre del satélite. En algunos modelos, a esta línea se le llama línea 1 y el formato pasa a conocerse como 3LE (*Three-Line Element set*). Además, no siempre se utiliza la línea de título y es común encontrar el formato TLE sólo con las siguientes dos líneas. Relacionándolo con el caso anterior, a este formato se le conoce a veces como 2LE (*Two-Line Element set*).

Línea 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69																																																																		
1	3	9	6	3	4	U			1	4	0	3	6	A				2	4	1	7	1	.	1	3	9	1	5	6	9	6			.	0	0	0	0	0	2	9	2			0	0	0	0	0	+	0			7	1	6	9	6	.	4			0		9	9	9	7																																																																		
1		2		3		4	5	6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18		19		20		21		22		23		24		25		26		27		28		29		30		31		32		33		34		35		36		37		38		39		40		41		42		43		44		45		46		47		48		49		50		51		52		53		54		55		56		57		58		59		60		61		62		63		64		65		66		67		68		69

Casilla	Columna(s)	Contenido	Ejemplo
1	1	Número de línea	1
2	3-7	Número de catálogo del satélite	39634
3	8	Clasificación (U: no clasificado, C: clasificado, S: secreto)	U
4	10-11	Designador Internacional (últimos dos dígitos del año de lanzamiento)	14
5	12-14	Designador Internacional (número de lanzamiento del año)	016
6	15-17	Designador Internacional (parte del lanzamiento)	A
7	19-20	Año de época (últimos dos dígitos del año)	24
8	21-32	Época (día del año y la parte proporcional del día)	171.13915696
9	34-43	Derivada primera del movimiento medio	.00000292
10	45-52	Derivada segunda del movimiento medio (se asume decimal inicial)	00000+0
11	54-61	B^* , término de drag o coeficiente aerodinámico (se asume decimal inicial)	71696-4
12	63	Tipo de efeméride (siempre cero; sólo se utiliza en datos TLE sin distribuir)	0
13	65-68	Número de set de elemento. Aumenta cuando se genera un nuevo TLE para este objeto.	999
14	69	Suma de verificación	7

Tabla 5.2: Primera línea del formato TLE.

En la [Tabla 5.2](#) se indica el significado de la serie de número que aparecen en la primera fila del formato TLE. Esta línea da la información del satélite relacionada con la designación y la clasificación del mismo. También se representan la época en la que se han obtenido los datos y otros parámetros relacionados con las efemérides y el formato de TLE.

En la casilla 11, se muestra el término B^* , conocido como el término de drag o coeficiente aerodinámico. Este parámetro está relacionado con el coeficiente balístico B (2.21) utilizado para estimar la resistencia atmosférica del satélite. Sin embargo, para extraer el coeficiente C_D de este término es necesario utilizar procedimientos internos de propagación orbital del NORAD. A veces, por procesos de cálculo, el término B^* puede ser incluso negativo. Lo cual no tendría mucho sentido para el coeficiente de drag.

3. Se calcula el módulo 10 del total:

$$167 \% 10 = 7$$

Por tanto, efectivamente tal y como se muestra en la tabla correspondiente, el valor de la suma de verificación de la línea 1 del ejemplo sería igual a 7.

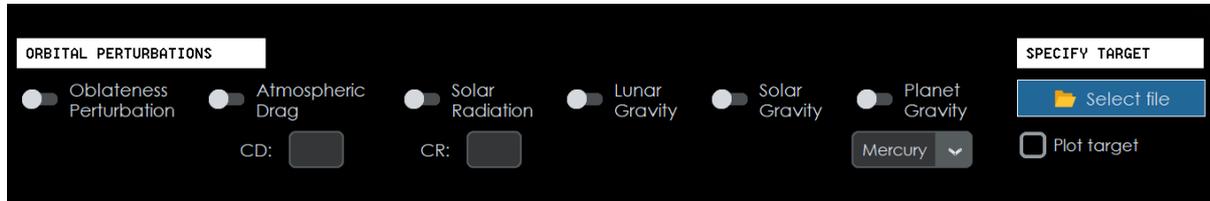
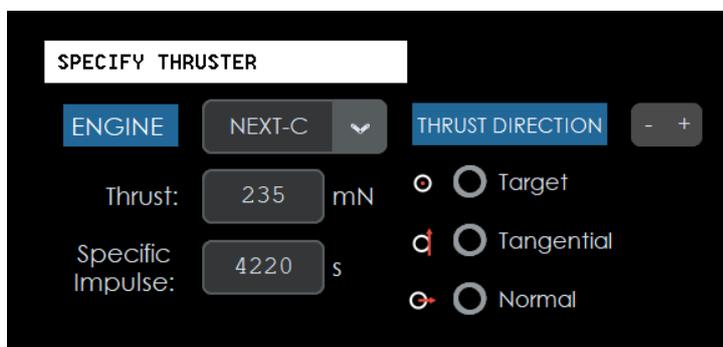


Figura 5.5: Interfaz gráfica: Perturbaciones orbitales y especificar objetivo.

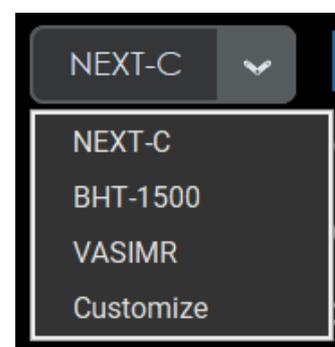
Continuando con la descripción de la interfaz gráfica, en la [Figura 5.5](#) se muestran las implementaciones de las perturbaciones orbitales y de un posible cuerpo objetivo que se desea establecer.

Para la aplicación de las perturbaciones orbitales desarrolladas en la [Sección 2.2](#), se han creado unos interruptores que indican si se 'activa' el efecto de cada una de ellas. De izquierda a derecha se han incluido la perturbación por achatamiento, la resistencia atmosférica, la radiación solar, la gravedad lunar, la gravedad solar y la gravedad planetaria. En el caso de la perturbación por resistencia atmosférica y por radiación solar, se han añadido unas entradas de datos para los coeficientes aerodinámico C_D y de radiación C_R , respectivamente. Así mismo, se ha incluido una pestaña para seleccionar el planeta del que se desea conocer la atracción gravitatoria de entre todas las opciones del Sistema Solar.

En el caso de que se quiera implementar un cuerpo objetivo para el sistema de estudio, se ha añadido una sección para especificar su trayectoria. El botón azul permite cargar un archivo en formato '.txt' que incluya la posición del cuerpo respecto al centro de coordenadas impuesto para cada instante de tiempo. Idealmente, este archivo se descargará de la aplicación web *Horizons System* imponiendo las mismas condiciones de marco de referencia y de tiempo que para el propagador orbital. Seleccionando la casilla inferior, 'Plot target', se incluirá la representación gráfica de la trayectoria del cuerpo objetivo.



(a) Especificar motor y dirección de impulso



(b) Opciones de motores.

Figura 5.6: Interfaz gráfica: Especificar motor e impulso.

Como se ha comentado a lo largo del trabajo, además de las perturbaciones orbitales naturales, se puede modificar la trayectoria de una nave utilizando un sistema de propulsión de abordó. En la [Figura 5.6](#) se muestran las opciones incluidas en la GUI para introducir los parámetros de impulso que se desean utilizar.

En la columna de la izquierda se puede seleccionar el tipo de motor que se quiere aplicar. Se han introducido unas opciones de motores existentes predeterminadas para poder seleccionar directamente (ver [Figura 5.6b](#)), cada uno de ellos con unas especificaciones técnicas de empuje e impulso específico determinadas. Según la opción elegida, se actualizará el valor de las casillas de empuje, en miliNewtons (mN), y de impulso específico, en segundos (s), para cada motor. Si se selecciona la opción 'Customize' se podrán personalizar los valores de estos parámetros. Los motores que se han introducido tienen diferentes características y se podrá utilizar uno u otro según el objetivo que se quiera perseguir. Las especificaciones técnicas de éstos y su argumentación se desarrollan en el siguiente capítulo (ver [Sección 6.1](#)).

Una vez especificado el motor, en la columna derecha se debe seleccionar la dirección que se desea dar al impulso. Se han incluido tres opciones diferentes a este respecto: de arriba hacia abajo, apuntando al cuerpo objetivo (si se ha agregado alguno), en dirección tangencial a la órbita y en dirección normal. Con la dirección seleccionada, utilizando los botones adyacentes se especifica el sentido que se le aplicará al empuje, positivo si se selecciona '+' y negativo si se selecciona '-'. Si no se marca ninguna dirección ni sentido, el programa simulará la trayectoria de la nave de estudio sin aplicar ningún impulso.

Se ha de destacar que la implementación de un sistema propulsivo de este tipo, equivale a ejercer una fuerza de empuje constante durante la propagación completa de la trayectoria. Es decir, se asume que el impulso del motor se aplica al 100%, en la misma dirección y sentido, para el tiempo de análisis establecido.

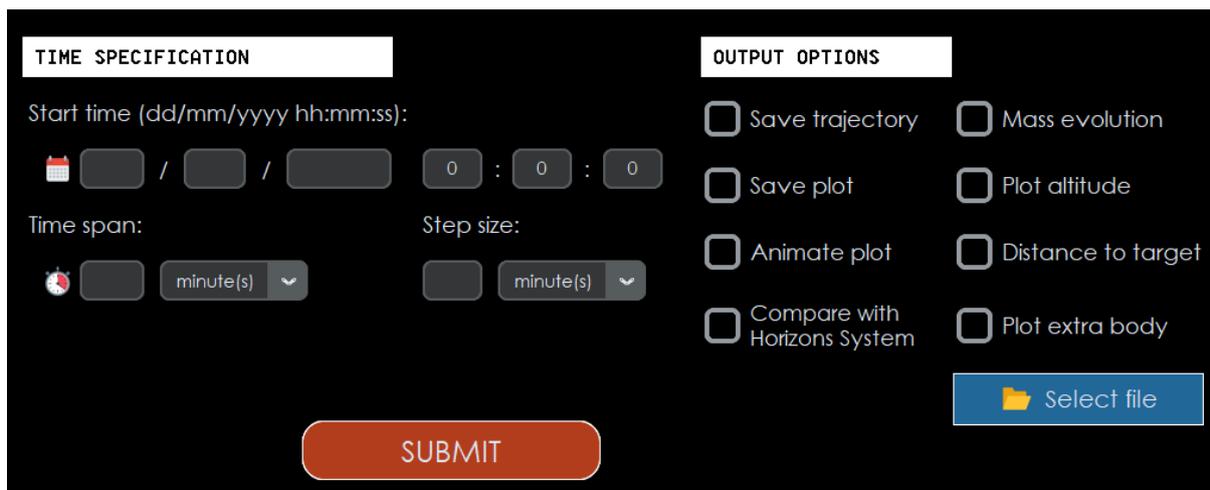


Figura 5.7: Interfaz gráfica: Especificación de tiempo y opciones de salida.

Para finalizar, en la [Figura 5.7](#) se muestran las últimas opciones que incluye la interfaz gráfica.

En el primer cuadro se deben especificar las condiciones relevantes para el tiempo de estudio. Arriba se indica la fecha de inicio de la simulación con el formato determinado de día/mes/año

hora:minuto:segundo. En la fila inferior, se especifica el tiempo de duración y el tamaño del paso para la integración. Para estos últimos se han añadido unas pestañas que permiten seleccionar las unidades de tiempo entre minutos, horas, días y años.

En el caso de que se introduzca el estado inicial de la trayectoria mediante TLEs, como se ha visto antes, este formato designa la época de los datos generados. Por lo que, inicialmente, si se utilizan TLEs, no se podría imponer una fecha inicial a la simulación ya que ésta sería la impuesta por los datos del set. Para solucionar esto, en Python se ha añadido la siguiente condición de cálculo por si el estado inicial es introducido mediante TLEs:

1. Se calcula la diferencia entre la época en la que se han generado los datos TLE y la fecha inicial impuesta para la simulación.
2. Para esa condición de tiempo, la trayectoria se propaga 'hacia atrás' o 'hacia delante', hasta alcanzar el estado de la órbita para la fecha inicial seleccionada.
3. Una vez conocido el estado de la trayectoria para el tiempo inicial impuesto, el propagador orbital actúa de forma habitual, simulando la trayectoria durante el tiempo establecido.

Hay que señalar que, para llevar a cabo este procedimiento, las perturbaciones que se utilizarán en la simulación serán también aplicadas durante la propagación hasta la fecha inicial para conseguir que la trayectoria sea lo más precisa posible.

Por otro lado, en el cuadro de la derecha aparecen las diferentes opciones de salida que se han implementado en la interfaz gráfica. Todas ellas cuentan con una casilla de selección que será marcada si se desea obtener esa opción al ejecutar el programa. De arriba a abajo y de izquierda a derecha son las siguientes:

- 'Save trajectory': guarda la trayectoria de la nave, es decir, el vector posición en cada instante de tiempo en un archivo '.txt'.
- 'Save plot': guarda el gráfico obtenido como imagen en formato '.png' y, si es una animación, lo guarda en formato '.gif'.
- 'Animate plot': si se selecciona, las trayectorias obtenidas en forma de gráfico se generarán como una animación.
- 'Compare with Horizons System': con esta opción se compara la trayectoria obtenida con Python con la generada por *Horizons System*. El archivo de la trayectoria del cuerpo estudiado que se desea comparar debe estar previamente guardado en formato '.txt'.
- 'Mass evolution': representa el gráfico de la masa a lo largo del tiempo de simulación. Está pensado para utilizarse cuando se aplique un sistema de propulsión que hará que la masa de la nave disminuya al consumir combustible.
- 'Plot altitude': representa un gráfico que indica la altura de la órbita que sigue la nave respecto al cuerpo central del sistema, a lo largo del tiempo. Se puede observar cuándo se alcanza el periapsis y el apoapsis en cada órbita.
- 'Distance to target': con esta opción se muestra la distancia entre la nave y el cuerpo objetivo durante el tiempo de simulación (siempre que se haya seleccionado un cuerpo objetivo previamente). Permite apreciar en qué instante se encuentran a mayor proximidad.

- 'Plot extra body': permite cargar un archivo en formato '.txt' con la trayectoria de un cuerpo extra que sea relevante para el estudio. Por ejemplo, el planeta Venus en el estudio de la Sonda Solar Parker para apreciar el sobrevuelo. Seleccionando esta opción, se añadirá esta trayectoria al gráfico obtenido al ejecutar el programa.

De base, si no se selecciona ninguna opción, el propagador orbital generará la representación gráfica de la trayectoria de la nave con el cuerpo central del sistema. Cualquier otra trayectoria que desee incluir, como la de un cuerpo objetivo o un cuerpo extra, se añadirá a esta representación en la misma figura.

Por último, una vez que se han introducido todos los datos de entrada necesarios además de las opciones deseadas, pulsando el botón naranja de 'SUBMIT' se ejecutará el programa con los requisitos seleccionados.

Capítulo 6

Aplicación a la exploración de NEOs

Con el propagador orbital desarrollado y la interfaz gráfica implementada, a continuación se aplica todo ello para estudiar la trayectoria de una nave hacia objetos cercanos a la Tierra (NEOs). Para llevar a cabo este tipo de misiones, además de las perturbaciones orbitales naturales relevantes, será necesario implementar un sistema de propulsión que permita alterar la trayectoria de la nave para aproximarse al cuerpo objetivo.

En este capítulo se compararán diferentes tipos de motores espaciales, con distintas especificaciones técnicas, con el objetivo de acercarse a un NEO. Para ello, se parte de una órbita de parking terrestre inicial donde se aplicará un impulso bajo determinadas condiciones de dirección. Finalmente, se contrastarán los resultados obtenidos según las circunstancias impuestas, analizando las diferentes opciones.

6.1. Tipos de motores espaciales

Para llevar a cabo el estudio, se han seleccionado tres tipos de motores espaciales, con especificaciones técnicas diferentes de empuje e impulso específico. En este caso, la fuerza de propulsión ejercida por el motor sobre la nave se asumirá constante durante el tiempo de simulación. Es decir, se asume que el motor trabaja al 100 % de su capacidad, aplicando el empuje máximo posible cuando el sistema propulsivo sea activado, sin reducirse ni detenerse.

Se han valorado los diferentes sistemas de propulsión descritos en la [Sección 2.3](#). Debido a la naturaleza de la misión que se desea llevar a cabo y por su buena relación empuje/impulso específico, se han utilizados tres motores de propulsión eléctrica. Sin embargo, para tratar de conseguir una mayor variedad en los resultados obtenidos, los motores escogidos cuentan con tecnologías diferentes entre sí y están diseñados para distintas aplicaciones.

6.1.1. Motor iónico - NEXT-C

El primer motor seleccionado ha sido el NEXT-C [36], un motor de tipo iónico. Su nombre viene del inglés *NASA's Evolutionary Xenon Thruster-Commercial* (NEXT-C) y fue el utilizado en la misión DART (*Double Asteroid Redirection Test*) [30] del programa de defensa estadounidense (ver [Figura 6.1](#)). Como indican sus siglas, se trata de un motor que utiliza xenón como propulsor, el cual es ionizado y, posteriormente, acelerado mediante un campo eléctrico.

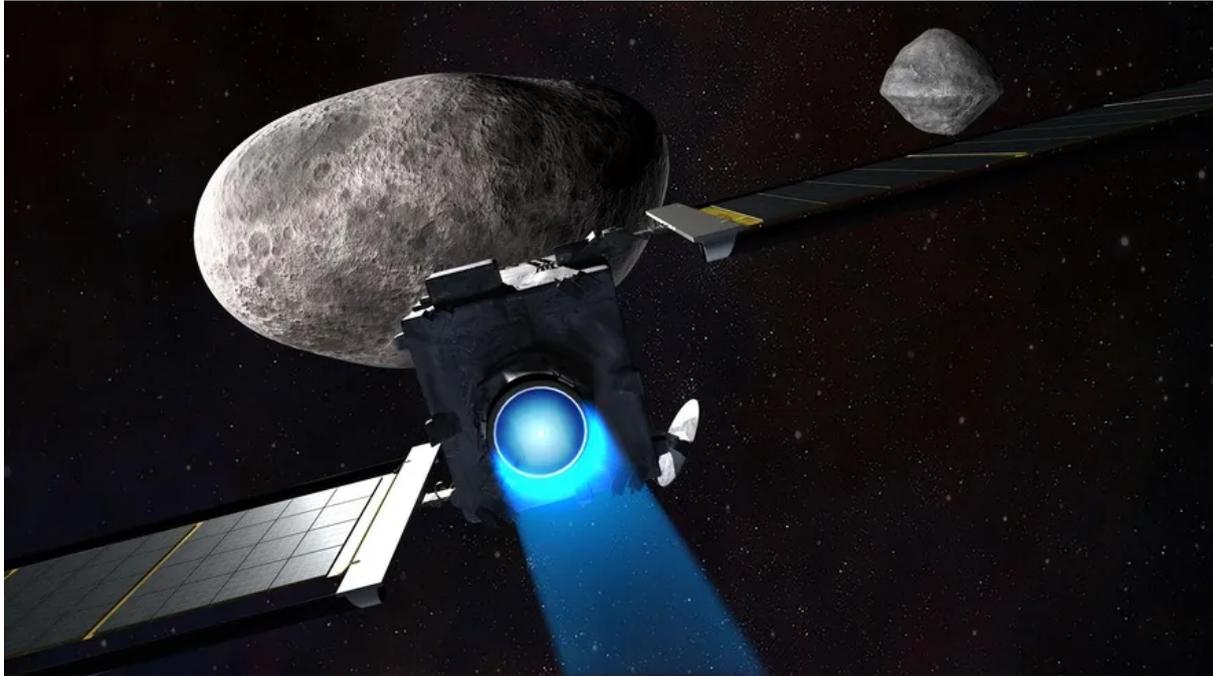


Figura 6.1: Representación artística del motor NEXT-C durante la misión DART (fuente: NASA).

El NEXT-C es la evolución mejorada del motor NSTAR (*NASA's Solar Electric Propulsion Technology Application Readiness*) [10] con hasta tres veces mayor potencia. Se utiliza en satélites y en sondas espaciales para misiones de exploración.

De las especificaciones técnicas publicadas por la NASA [46], en la [Tabla 6.1](#) se recogen los valores máximos de empuje y de impulso específico que alcanza el motor.

NEXT-C	
Empuje (T)	$235mN$
Impulso específico (I_{sp})	$4220s$

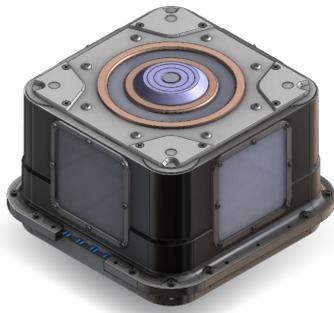
Tabla 6.1: Especificaciones técnicas del motor iónico NEXT-C.

6.1.2. Motor de efecto Hall - BHT-1500

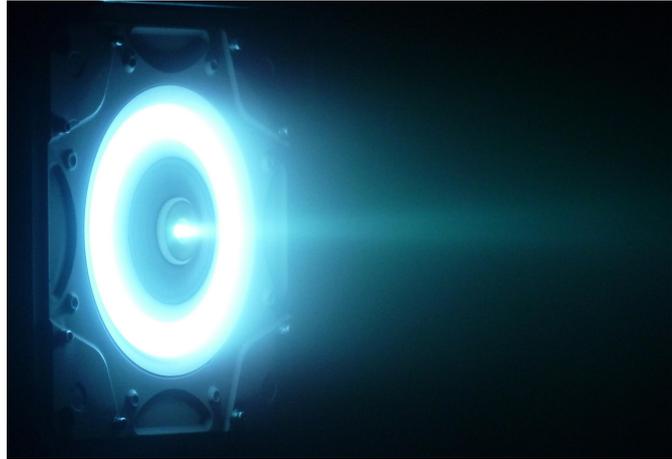
Otro motor seleccionado, ha sido el BHT-1500 (*Busek Hall Thruster*) [12] de efecto Hall. Al igual que el NEXT-C, este motor utiliza xenón como propulsor. El xenón es ionizado y los iones atraviesan un campo eléctrico, pero a diferencia del motor iónico, la aceleración se logra mediante el uso de un campo magnético (efecto Hall). También se han realizado pruebas con kriptón, incrementando el impulso específico pero empeorando la eficiencia.

El BHT-1500 cuenta con un cátodo en el centro del motor (ver [Figura 6.2](#)) que minimiza la divergencia del haz, evitando la pérdida de rendimiento.

Este tipo de motor se ha utilizado principalmente para mantenimiento de órbita en satélites de telecomunicaciones. Proporciona un empuje moderado pero con un consumo eficiente de combustible, por ello es adecuado para maniobras orbitales y misiones de satélites.



(a) Busek BHT-1500.



(b) Motor BHT-1500 operando en una cámara de vacío.

Figura 6.2: Motor de efecto Hall BHT-1500 (fuente: *Busek*).

Las especificaciones del motor se han obtenido de la ficha técnica facilitada por su fabricante Busek [13]. En la [Tabla 6.2](#) se muestran los valores para el empuje y el impulso específico utilizados.

BHT-1500	
Empuje (T)	$101mN$
Impulso específico (I_{sp})	$1710s$

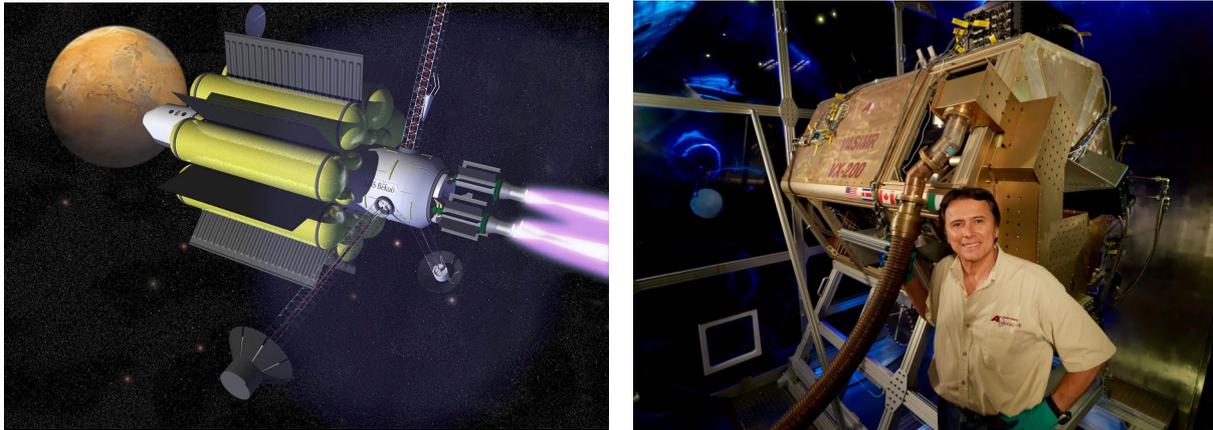
Tabla 6.2: Especificaciones técnicas del motor de efecto Hall BHT-1500.

Como se adelantaba, el empuje producido el motor BHT-1500 es moderado. Bajo en comparación al NEXT-C, cuyo valor es más del doble. Por este motivo, se utiliza principalmente en operaciones orbitales.

6.1.3. Motor de plasma - VASIMR

El último motor propuesto es el Motor de magnetoplasma de impulso específico variable (VASIMR, del inglés *VARIABLE Specific Impulse Magnetoplasma Rocket*). Es un motor a base de plasma producido por la empresa Ad Astra Rocket Company, fundada por el exastronauta Franklin Chang Díaz [15]. Es el proyecto insignia de la compañía y actualmente aun se encuentra en desarrollo.

El objetivo de este motor es el de conseguir un impulso específico alto y variable para conseguir una mayor eficiencia de combustible en comparación con los motores químicos tradicionales. Por este motivo, lo hace un motor muy versátil con la capacidad de utilizarse para diversos proyectos. Uno de estos, es el de utilizar esta tecnología para un posible viaje tripulado a Marte realizando el trayecto 10 veces más rápido que en la actualidad (ver [Figura 6.3a](#)).



(a) Ilustración de un trayecto interplanetario a Marte con un motor de plasma. (b) Motor VASIMR y su creador Franklin Chang Díaz.

Figura 6.3: Motor de plasma VASIMR (fuente: *Ad Astra Rocket Company*).

Durante la última década, se han realizado pruebas significativas en laboratorio en colaboración con la NASA con resultados prometedores, aunque aun se trabaja en su implementación para casos reales.

De los datos publicados por la propia compañía Ad Astra Rocket, utilizando Argón como combustible, se han seleccionado las especificaciones técnicas del motor de plasma que se indican en la [Tabla 6.3](#).

VASIMR	
Empuje (T)	2000mN
Impulso específico (I_{sp})	5000s

Tabla 6.3: Especificaciones técnicas del motor de plasma VASIMR.

Como se puede observar, los valores tanto de empuje como de impulso específico son muy altos y mucho mayores que los especificados para los otros dos motores. Por ello, este tipo de motor podría llegar a ser implementado en misiones de exploración espacial con resultados incomparables.

6.2. NEO 2022 NX1

El objeto cercano a la Tierra (NEO) seleccionado como cuerpo objetivo de la misión es el 2022 NX1 [53], llamado así por el año en el que fue descubierto. Este NEO orbita alrededor del Sol aunque hace aproximaciones periódicas al sistema Tierra-Luna. Cuando se observó por primera vez, el asteroide se encontraba bajo la esfera de influencia de la Tierra, atrapado temporalmente en una órbita geoestacionaria elíptica desde el 11 de junio de 2022 hasta el 3 de julio de 2022.

La esfera de influencia de la Tierra se estima en unos 1.5 millones de kilómetros. Cuando objetos de este tipo son 'atrapados' por la atracción gravitatoria terrestre y orbitan alrededor del planeta, reciben la calificación de 'minilunas'. Debido a su proximidad a la Tierra, pueden

ser cuerpos potencialmente peligrosos. Por ello, cuando son observados, su trayectoria es monitorizada para contemplar cualquier riesgo de impacto con el planeta.



Figura 6.4: Ilustración del NEO 2022 NX1 junto a la Tierra (fuente: *Texas A&M University*).

Actualmente, el 2022 NX1 se encuentra en una órbita heliocéntrica alrededor del Sol aunque próxima a la Tierra. Su último acercamiento previo a 2022 fue en 1981 cuando llegó a aproximarse a unos 600.000 km en su perigeo. Se espera que vuelva a convertirse en una 'miniluna' terrestre temporalmente en el año 2051.

Tras las observaciones realizadas al asteroide, se estima que su tamaño oscila entre los 5 y los 15 metros, considerando su espectro de reflectividad. En relación a esto, el Centro para estudios de objetos cercanos a la Tierra (CNEOS, por sus siglas en inglés *Center for Near-Earth Object Studies*) recopila los datos relevantes del 2022 NX1 respecto a la peligrosidad de colisión con el planeta. Siguiendo los valores obtenidos de la escalas de Turín y Palermo (ver [Figura 1.3](#)), entre los años 2075 y 2121 existe un riesgo de impacto máximo del 0.27 %, según cálculos realizados con un arco de observación de 142 días en 2022 [19].

Estos datos reflejan la atracción científica por el NEO 2022 NX1 y, por estos motivos, ha sido seleccionado como cuerpo objetivo para el estudio con el propagador orbital.

6.3. Descripción del problema y resultados obtenidos

El análisis realizado consiste en la simulación de la trayectoria de una nave con el propagador orbital desarrollado en Python utilizando los sistemas de propulsión propuestos y comparándolos entre sí. Para equiparar los resultados, se aplicarán unas condiciones iniciales comunes en el problema.

En primer lugar, se ha utilizado una nave de estudio con las características de la nave utilizada

para la misión DART [30], debido a la similitud con la misión de exploración espacial que se pretende llevar a cabo en este caso. Según las especificaciones técnicas publicadas en la base de datos de la NASA [8], tiene forma de cubo con dos paneles solares a los lados y con una masa inicial de 670 kilogramos.

La estructura principal de la nave tiene unas dimensiones de 1.8 metros de largo, 1.9 metros de ancho y 2.6 metros de alto. Además de dos paneles solares de aproximadamente 8 metros de longitud cada uno cuando se encuentran totalmente desplegados (ver Figura 6.5).

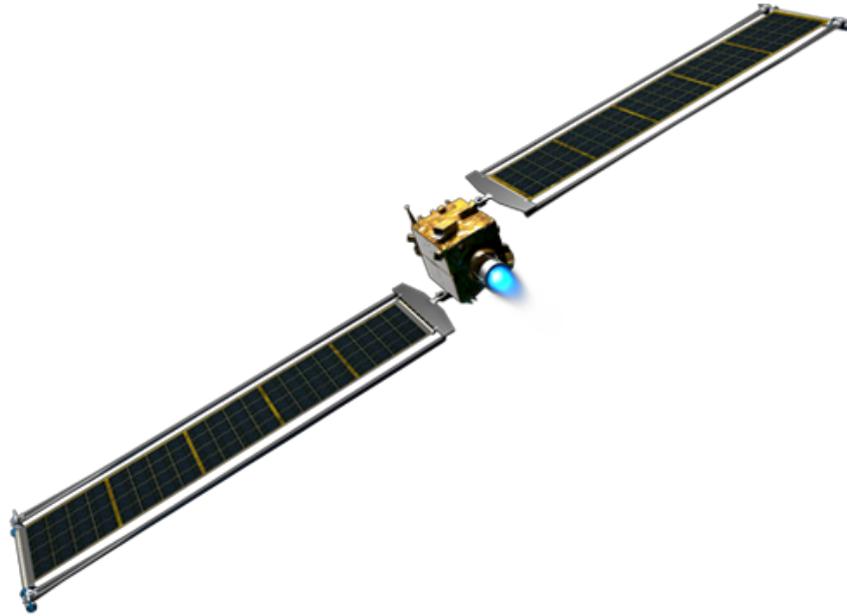


Figura 6.5: Modelo 3D de la nave de la misión DART (fuente: NASA).

Siguiendo el mismo procedimiento de cálculo que para el ejemplo de propagación orbital de la Mars-Express en la Sección 4.3, se asume que el área de absorción A_s de la nave será aproximadamente el de la superficie total de los paneles solares, debido a su gran tamaño en comparación a la estructura principal. Por tanto, realizando el cálculo, se obtiene

$$A_s = 2(8m \cdot 1,8m) = 28,8m^2. \quad (6.1)$$

Además, siguiendo este razonamiento, se impone un coeficiente de presión por radiación solar estimado de $C_R = 1,6$.

Por otro lado, el sistema de estudio será en coordenadas heliocéntricas, tomando el Sol como cuerpo central, debido a la trayectoria del asteroide 2022 NX1. Sin embargo, como posición inicial de la nave, se ha seleccionado una órbita de parking alrededor de la Tierra. Para mitigar los efectos de rozamiento producidos por la resistencia atmosférica así como del achatamiento terrestre, se ha tomado como órbita inicial una órbita geoestacionaria.

En la Tabla 6.4 se recogen los datos de entrada impuestos para la propagación orbital de la nave. Además de la atracción gravitatoria producida por el Sol, se han incluido las perturbaciones gravitatorias tanto de la Tierra como de la Luna por proximidad.

DATOS NAVE		CUERPO CENTRAL	
Masa	670kg	SOL	
A_s	28,8m ²		
PERTURBACIONES ORBITALES		FECHA INICIAL	
Achatamiento	$J_2 = 2,0 \cdot 10^{-7}$ [42]	29/marzo/2050 0h UT	
Radiación solar	$C_R = 1,6$	TIEMPO DE SIMULACIÓN	
Gravedad lunar	✓	150 días	
Gravedad planeta	Tierra		

Tabla 6.4: Datos de entrada seleccionados para la propagación orbital de la nave.

Respecto a la época en la que se ha realizado la simulación, se ha seleccionado el año 2050 previniendo el acercamiento del NEO a la órbita de la Tierra que se pronostica para 2051. Para comparar la distancia de aproximación al asteroide según el tipo de motor utilizado, se propaga la simulación durante un tiempo de 150 días.

Los valores estimados para el vector posición \mathbf{r}_0 y velocidad \mathbf{v}_0 de la nave en el instante inicial de la propagación orbital, se muestran en la [Tabla 6.5](#) en coordenadas heliocéntricas. Para estas condiciones iniciales de la nave, se ha utilizado una órbita geoestacionaria a una altitud de 35.779 km sobre la Tierra.

	X	Y	Z
\mathbf{r}_0 (km)	$-1,47989 \cdot 10^8$	$-2,02625 \cdot 10^7$	$4,10849 \cdot 10^3$
\mathbf{v}_0 (km/s)	1,36935	$-3,31276 \cdot 10^1$	$1,28592 \cdot 10^{-3}$

Tabla 6.5: Estado inicial $[\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]$ de la nave en coordenadas heliocéntricas.

A continuación, se exponen las representaciones gráficas obtenidas para cada uno de los motores utilizados. Para la dirección del impulso aplicada, se han comparado los resultados para las tres direcciones opciones incluidas en la interfaz gráfica desarrollada: hacia el cuerpo objetivo, tangencial y normal (ver [Figura 5.6a](#)). Siempre en sentido positivo, debido a que el semieje mayor de la órbita inicial terrestre respecto al Sol es menor que la órbita de destino del asteroide 2022 NX1.

6.3.1. Resultados obtenidos con el motor NEXT-C

En primer lugar, en la [Figura 6.6](#) se representan las trayectorias seguidas en la propagación orbital de la nave, en naranja, para cada una de las tres direcciones aplicadas con el motor NEXT-C. En verde, se representa la trayectoria del NEO 2022 NX1 y, en azul, la órbita de la Tierra alrededor del Sol.

De izquierda a derecha, en la primera imagen se representa la trayectoria de la nave durante los 150 días de simulación asumiendo que el sistema de propulsión está dirigido hacia la posición del asteroide 2022 NX1 para cada instante de tiempo. En la imagen central, la dirección aplicada

al impulso es la de la velocidad tangencial de la nave y, en la imagen de la derecha, se impone la dirección normal que va desde el cuerpo central (el Sol) hacia la nave.

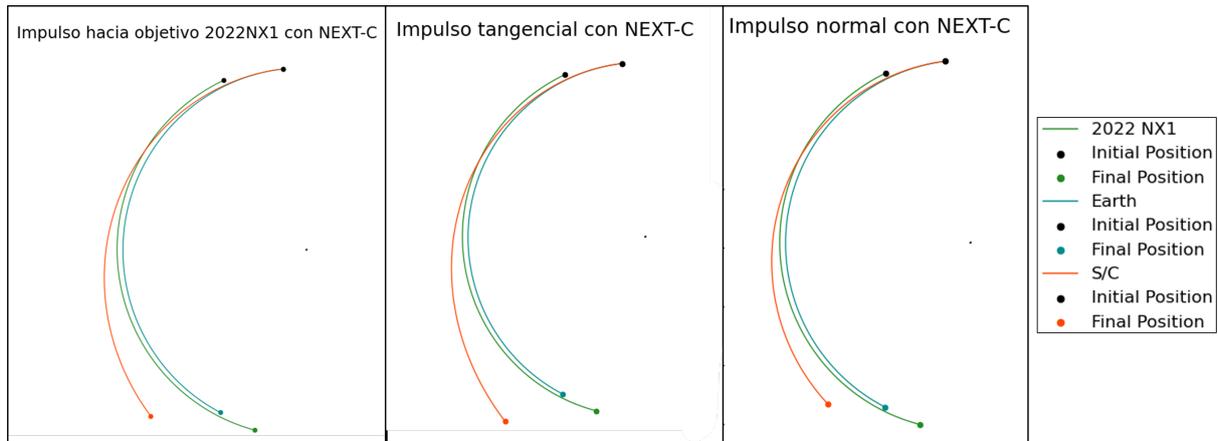


Figura 6.6: Trayectorias obtenidas en la propagación orbital con NEXT-C.

Teniendo en cuenta las especificaciones técnicas de impulso específico del motor NEXT-C, en la [Figura 6.7](#) se representa la evolución temporal de la masa de la nave durante la simulación asumiendo un empuje constante. Se aprecia que durante el tiempo de la propagación, se consume más de 70 kg de combustible.

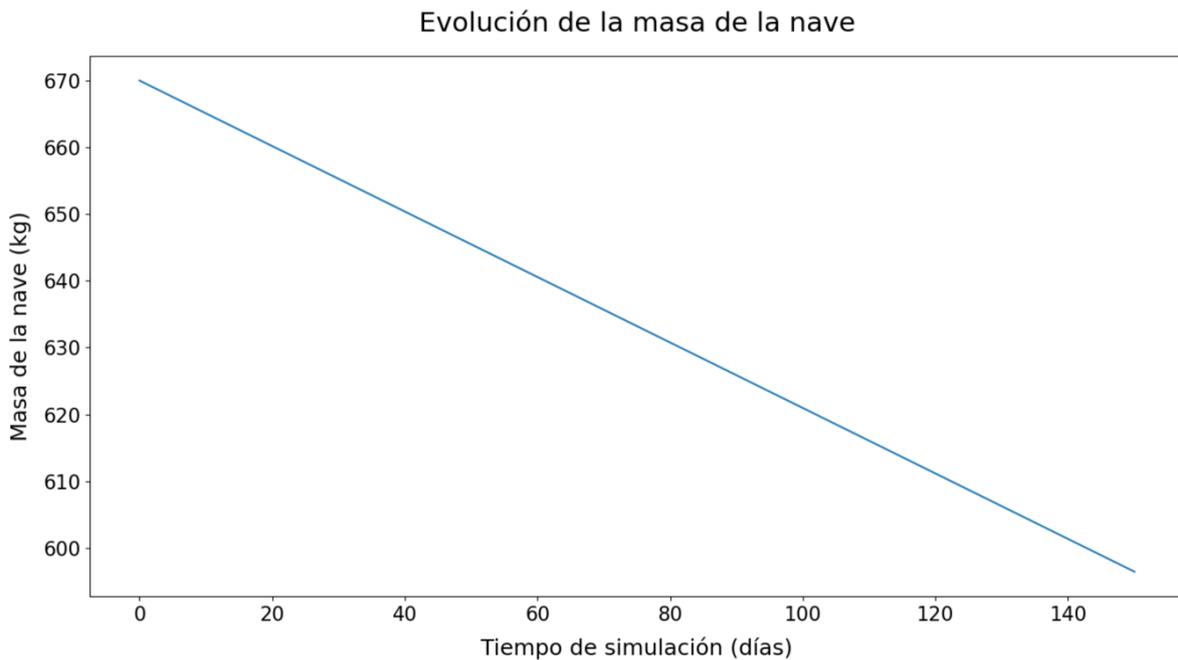


Figura 6.7: Evolución de la masa de la nave durante el tiempo de simulación para el motor NEXT-C.

Por último, en la [Figura 6.8](#) se representa la distancia de la nave al cuerpo objetivo, el asteroide 2022 NX1, para cada dirección aplicada con el motor NEXT-C.

En azul, se muestra la distancia de la nave cuando ésta apunta hacia el objetivo. Se aprecia que el acercamiento máximo se da para el día 60 de la simulación, cuando la nave se encuentra por debajo de los 45 millones de kilómetros. Por otro lado, en naranja se especifica la aproximación obtenida con un impulso tangencial. Aunque en este caso la distancia mínima se da entre los

días 70 y 80 de la propagación, se obtiene un mejor resultado que para las otras dos opciones de dirección de empuje de unos 35 millones de kilómetros. En verde, se puede ver la evolución de la distancia de la nave para una propulsión normal a su trayectoria para la que se obtiene un resultado similar a la curva azul, alcanzado una distancia de aproximadamente 45 millones de kilómetros.

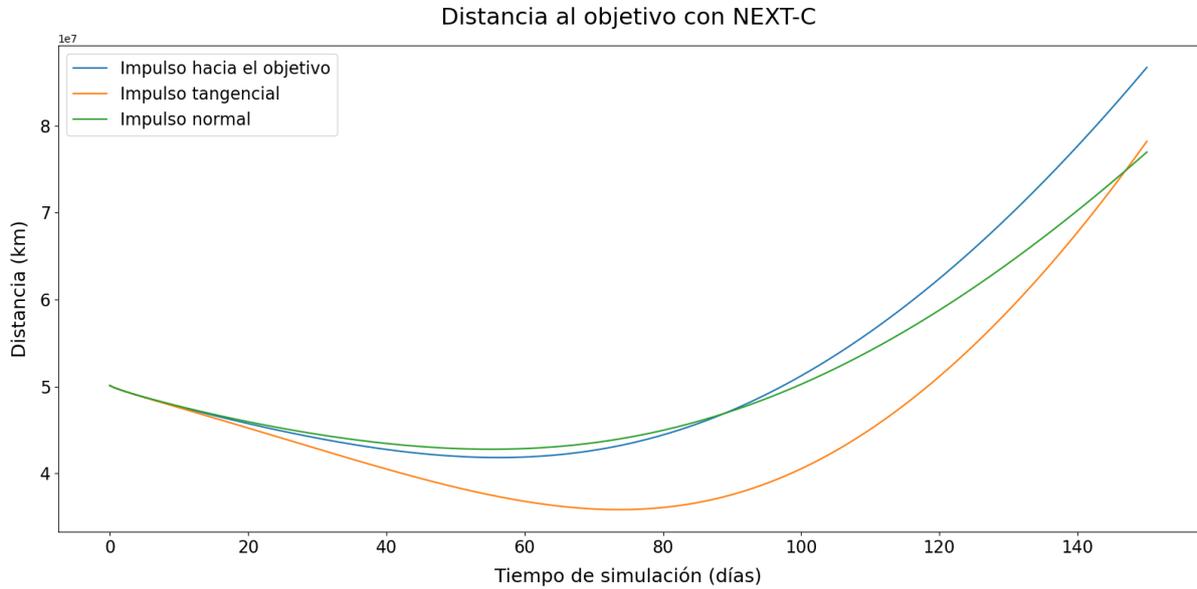


Figura 6.8: Comparación de la distancia alcanzada al 2022 NX1 con el motor NEXT-C según la dirección aplicada.

6.3.2. Resultados obtenidos con el motor BHT-1500

La principal característica del motor BHT-1500, es que tiene una capacidad de empuje moderada en comparación a los otros dos motores implementados. Debido a ello, como se puede apreciar en la [Figura 6.9](#), la trayectoria de la nave (en naranja) sigue una órbita más cerrada que con el motor NEXT-C para el mismo tiempo de simulación.

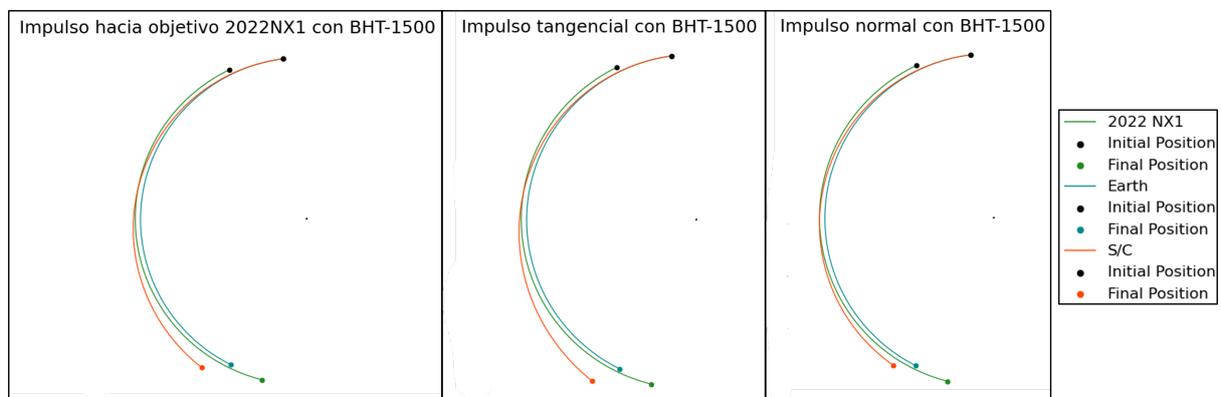


Figura 6.9: Trayectorias obtenidas en la propagación orbital con BHT-1500.

En cambio, debido a la relación entre las especificaciones técnicas de empuje y de impulso específico del motor BHT-1500, la masa final de la nave tras el tiempo total de simulación es

similar a la obtenida con el NEXT-C. En la [Figura 6.10](#) se puede ver que la masa final de la nave es algo mayor de 590 kg, muy parecida a la alcanzada al final de la propagación con el primer motor.

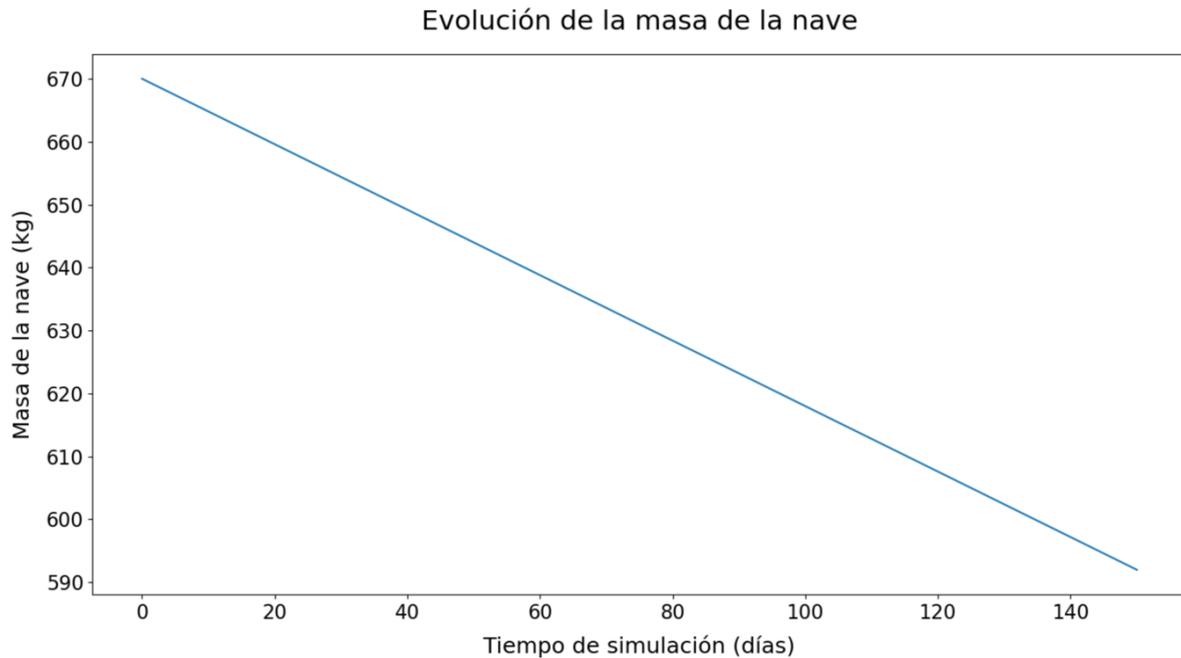


Figura 6.10: Evolución de la masa de la nave durante el tiempo de simulación para el motor BHT-1500.

Haciendo la comparativa ahora con la distancia al asteroide 2022 NX1 alcanzada por la nave para cada dirección de impulso, en la [Figura 6.11](#) se representa la evolución temporal con el motor BHT-1500. Si se equipara con los resultados análogos del motor iónico NEXT-C de la [Figura 6.8](#), en primer lugar se aprecia que la variación de la distancia entre la nave y el objetivo a lo largo de la simulación es menor. Al final del tiempo de propagación, las trayectorias de la nave obtenidas con el primer motor se alejan considerablemente del NEO. En cambio, con la propulsión ejercida por el BHT-1500, las distancias entre ambos cuerpos al finalizar los 150 días simulados son similares a la existente en el instante inicial. Esto se debe al empuje moderado que produce el motor de efecto Hall. Por este mismo motivo, los acercamientos máximos de la nave para este segundo caso, se dan más tarde en el tiempo que con el NEXT-C.

Con la dirección tangencial (en naranja) se obtiene, de nuevo, el mejor resultado en cuanto a mínima distancia conseguida respecto al 2022 NX1. El valor alcanzado es inferior a los 40 millones de kilómetros frente a los, aproximadamente, 42 millones de kilómetros obtenidos con el impulso direccionado al cuerpo objetivo (en azul) y con el impulso en dirección normal a la órbita de la nave (en verde). Tanto la curva verde como la naranja alcanzan su punto mínimo entre los días 80 y 90 de la simulación, mientras que la curva azul lo hace antes de esta fecha.

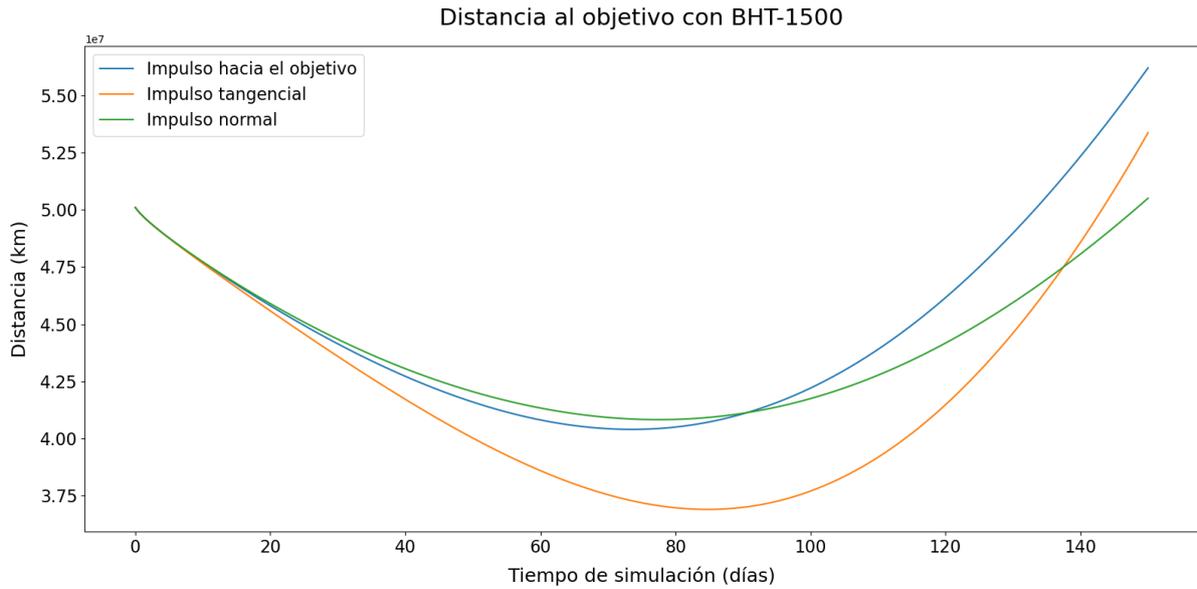


Figura 6.11: Comparación de la distancia alcanzada al 2022 NX1 con el motor BHT-1500 según la dirección aplicada.

6.3.3. Resultados obtenidos con el motor VASIMR

Por último, se exponen los resultados obtenidos para el motor VASIMR. Al contrario de lo que sucedía con el motor BHT-1500, debido a su tipo de propulsión de plasma, este motor se caracteriza por producir un empuje considerablemente alto comparado a la competencia. Esto se puede ver ilustrado en la [Figura 6.12](#), donde se representan las trayectorias que sigue la nave durante la simulación. Se puede apreciar cómo, para todos los casos de direcciones aplicadas, la nave se aproxima inicialmente a la órbita del asteroide 2022 NX1, pero rápidamente se aleja al incrementar su aceleración constantemente con un impulso elevado.

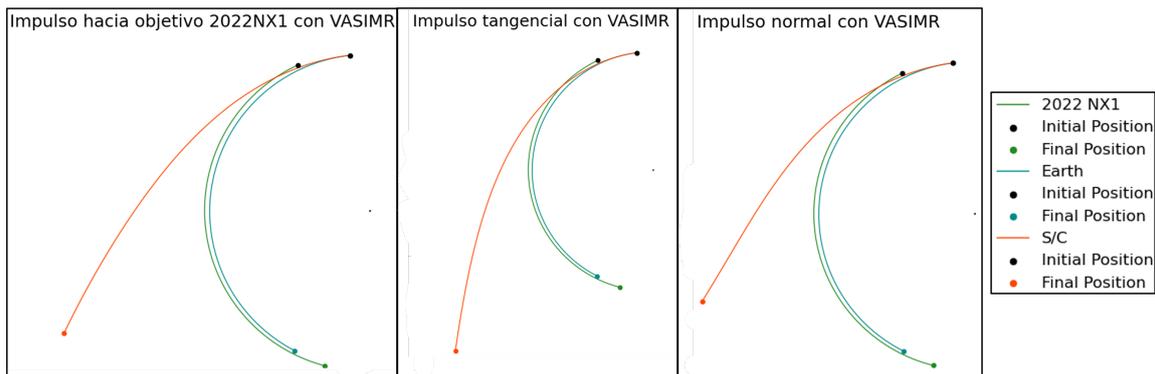


Figura 6.12: Trayectorias obtenidas en la propagación orbital con VASIMR.

Siguiendo con esta argumentación, en la [Figura 6.13](#) se muestra la evolución de la masa de la nave durante el tiempo de propagación. En el instante final, esta masa se reduce hasta casi los 400 kilogramos, una disminución notable considerando la masa inicial de 670 kilogramos. Comparando estos resultados para el motor VASIMR con las otras dos opciones de propulsión, se aprecia la inmensa diferencia en la cantidad de combustible consumida. En el caso del motor de plasma se queman casi 200 kg más que con los motores NEXT-C y BHT-1500.

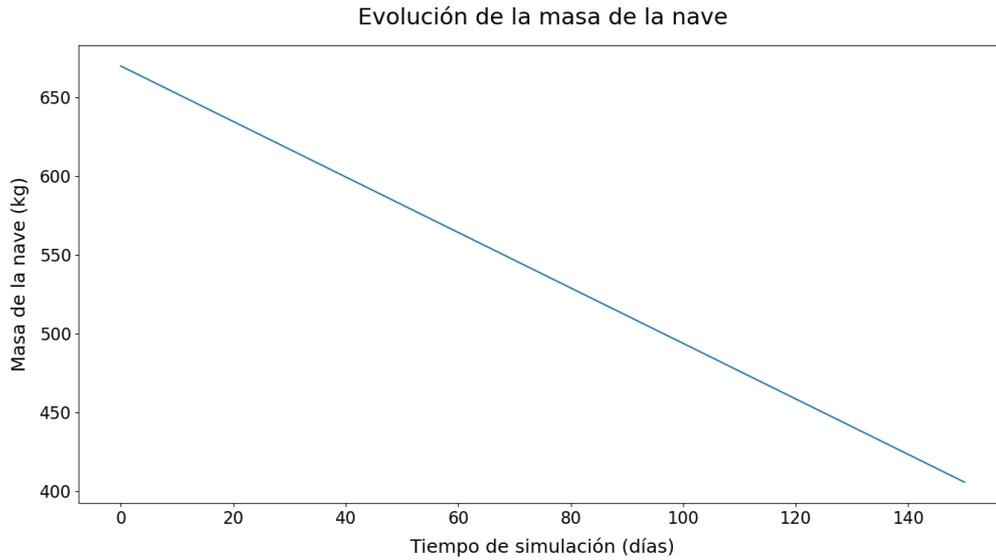


Figura 6.13: Evolución de la masa de la nave durante el tiempo de simulación para el motor VASIMR.

Las distancias entre las trayectorias de la nave y el NEO objetivo para las tres direcciones aplicadas se representan en la [Figura 6.14](#). De nuevo, se puede apreciar la propagación exponencial que sigue la nave alejándose de la órbita del asteroide. Con los impulsos aplicados en la dirección dirigida al objetivo (en azul) y en dirección normal a la trayectoria (en verde), se alcanza la mínima distancia entre los cuerpos antes de los 40 días de simulación. La nave se aproxima por debajo de los 50 millones de kilómetros y, posteriormente, ambas trayectorias se distancian del 2022 NX1 hasta cerca de los 250 millones de kilómetros ($\sim 1,7AU$) al final de la simulación. Con la implementación del empuje en dirección tangencial a la trayectoria de la nave (en naranja), se vuelve a conseguir el mejor resultado en cuanto al acercamiento al NEO objetivo. Con este tipo de impulso, a los 60 días de la propagación, la nave se sitúa a una distancia de alrededor de 30 millones de kilómetros para luego alejarse siguiendo el mismo comportamiento que las curvas adyacentes.

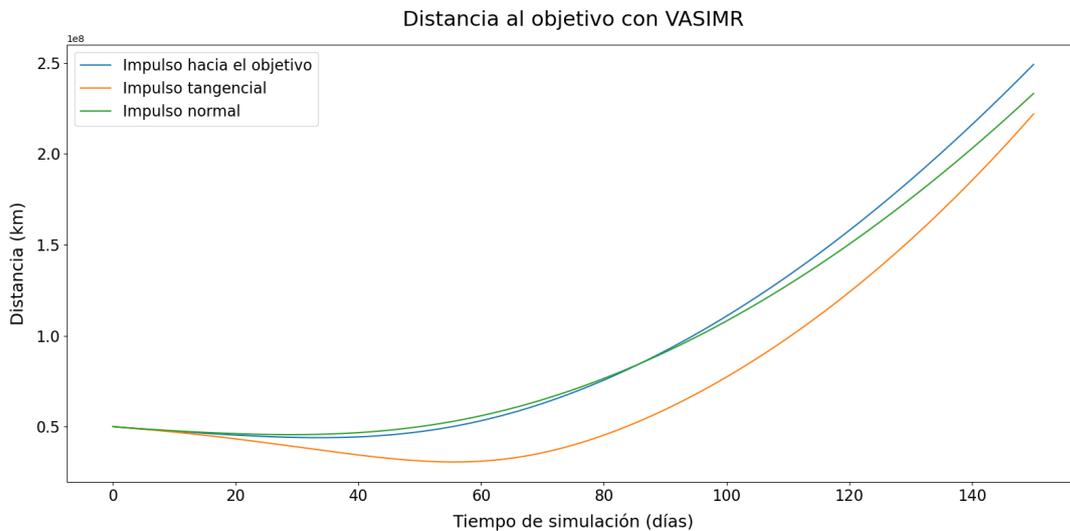


Figura 6.14: Comparación de la distancia alcanzada al 2022 NX1 con el motor VASIMR según la dirección aplicada.

6.3.4. Comparación de resultados

Para finalizar, se comparan los resultados obtenidos con los tres motores diferentes de los parámetros más relevantes en este estudio. El objetivo de esta equiparación es conocer cuál de estos motores sería más adecuado según el propósito que se desea alcanzar.

En la [Figura 6.15](#) se representan las masas finales de la nave para cada uno de los tres motores utilizados. Como se ha observado anteriormente en las figuras de evolución de la masa con el tiempo, la masa final de la nave con el motor NEXT-C (en azul) es similar a la obtenida con el motor BHT-1500 (en naranja). Recordando que la masa inicial de la nave en la propagación orbital es de 670 kg, se aprecia cómo para el motor de plasma VASIMR (en verde) se consumen más de 265 kg en total, siendo éste el caso más extremo de los tres estudiados.

Observando los resultados finales expuestos en la figura, en el caso de que estrictamente el objetivo de la misión fuese consumir la menor cantidad de combustible posible, sería recomendable seleccionar el motor NEXT-C o, en su defecto, el motor BHT-1500.

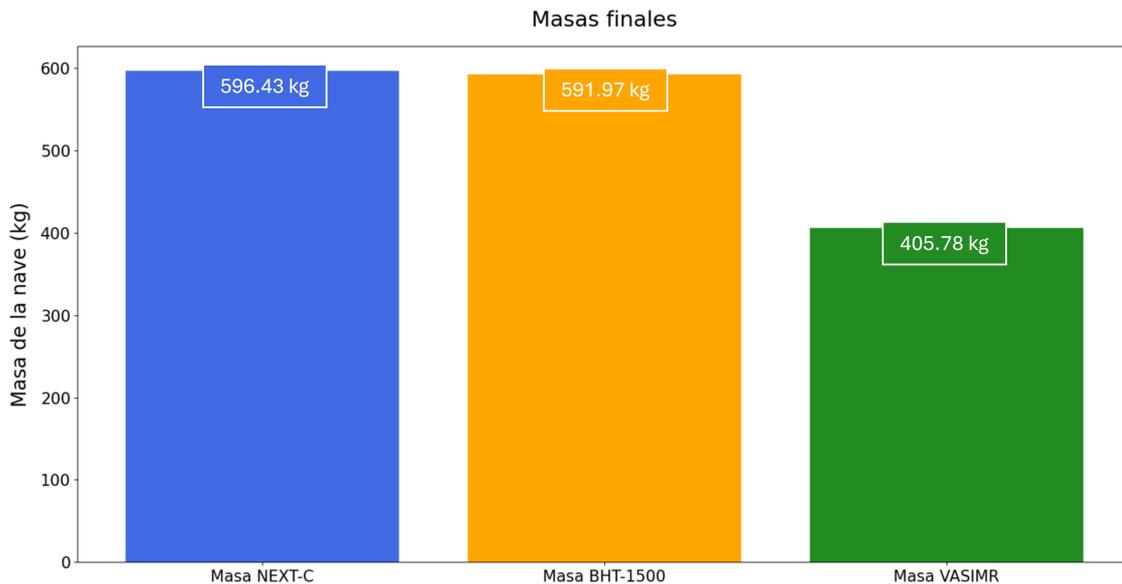


Figura 6.15: Comparación de las masas finales para cada tipo de motor utilizado.

Si la característica más importante a tener en cuenta para la misión de exploración del NEO 2022 NX1 es el acercamiento mínimo alcanzado por la nave, se puede ver en los resultados obtenidos en las secciones anteriores que la dirección de impulso más adecuada es la tangencial, para todos los casos. En relación a esto, la [Figura 6.16](#) muestra la evolución temporal de la distancia al objetivo con cada uno de los tres motores de estudio aplicando el impulso en dirección tangencial a la trayectoria. Tal y como se ha comentando anteriormente, el motor VASIMR (en verde), al otorgar un mayor empuje a la nave, consigue la mayor proximidad al asteroide antes que los otros motores, aunque rápidamente se aleja del objetivo de forma exponencial. En cambio, con los motores NEXT-C (en azul) y BHT-1500 (en naranja) se llega a la distancia mínima más tarde, aunque durante el tiempo total de 150 días de simulación la nave se mantiene en un rango de distancias más comprimido que en el caso del motor de plasma.

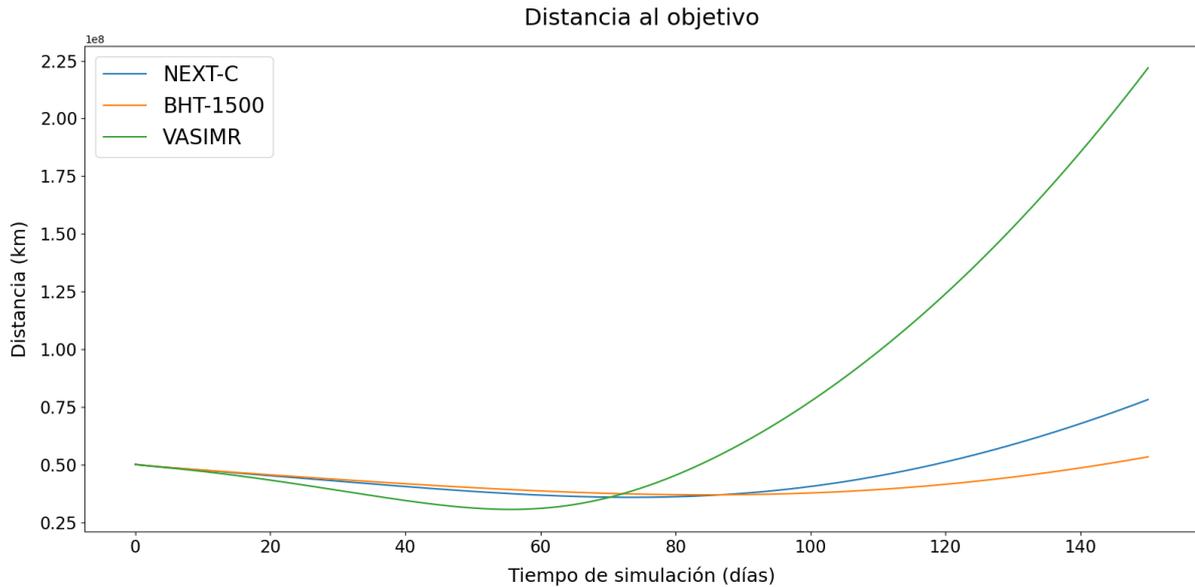


Figura 6.16: Comparación de la distancia alcanzada al 2022 NX1 con cada uno de los tres motores.

Así mismo, en la [Tabla 6.6](#) se comparan los valores de proximidad máxima alcanzados con cada uno de los motores utilizados. Completando la evolución temporal de la figura anterior, se puede ver que la distancia mínima se alcanza con el motor VASIMR, llegando a 30,57 millones de kilómetros del cuerpo objetivo 2022 NX1. En cambio, con el motor iónico NEXT-C se alcanzan los 35,83 millones de kilómetros, y con el motor de efecto Hall BHT-1500 se obtiene el peor resultado a este respecto con 36,91 millones de kilómetros.

Además, se muestra el día en el que se alcanzan las distancias mínimas para cada tipo de motor. De nuevo, se observa el motor de plasma alcanza rápidamente la distancia mínima en el día 55, mientras que con los motores NEXT-C y BHT-1500 habrá que esperar hasta el día 73 y 84 de simulación, respectivamente.

	NEXT-C	BHT-1500	VASIMR
Distancia mínima (km)	$35,83 \cdot 10^6$	$36,91 \cdot 10^6$	$30,57 \cdot 10^6$
Tiempo (día)	73	84	55

Tabla 6.6: Comparación de las distancias mínimas con cada motor estudiado y cuándo se alcanzan.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

El propósito de este trabajo ha sido elaborar un propagador orbital con Python que permita estudiar las trayectorias de cuerpos en el espacio teniendo en cuenta diferentes condiciones aplicadas. La implementación de la interfaz gráfica permite analizar diversas situaciones impuestas por el usuario, facilitando la accesibilidad y la interacción con el programa y los algoritmos elaborados.

A lo largo del documento se ha podido comprobar el funcionamiento del software. Primero, contrastando los resultados obtenidos con datos de misiones espaciales reales y, posteriormente, estudiando trayectorias interplanetarias mediante la implementación de un sistema de propulsión que permite alterar el recorrido natural de la nave.

Como se ha visto, el propagador orbital desarrollado utiliza diversos métodos matemáticos numéricos para simular las múltiples fuerzas de perturbación que actúan sobre un cuerpo y que afectan a su trayectoria en el espacio. El objetivo perseguido en la elaboración del trabajo ha sido el de conseguir las aproximaciones más fidedignas en los valores obtenidos. No obstante, al fin y al cabo estos procedimientos utilizados siguen siendo estimaciones numéricas frente a resultados más precisos de fuentes oficiales como *Horizons System*. Debido a este motivo, además de por las consideraciones realizadas para los datos de entrada del problema, las soluciones obtenidas en el [Capítulo 4](#) difieren en algunos aspectos frente las comparaciones realizadas. Pese a ello, se observan unos resultados notablemente rigurosos en los elementos temporales, que verifican las capacidades del propagador orbital desarrollado.

Se ha realizado también un estudio para implementar el programa en un proceso de direccionamiento de una nave hacia un cuerpo objetivo. La finalidad del problema propuesto en el [Capítulo 6](#), es la de demostrar que el propagador orbital permite aplicar un sistema de propulsión para alterar la trayectoria de la nave mediante una aceleración impulsiva. Se han expuesto los resultados obtenidos para tres tipos diferentes de motores espaciales, con tres opciones de orientación de empuje para este objetivo. Los motores incluidos se han implementado a modo de ejemplo, con principios de funcionamiento diferentes y pensados para distintas aplicaciones. Adicionalmente, con la interfaz gráfica se pueden cambiar y fijar las especificaciones técnicas deseadas para la propulsión de la nave, así como seleccionar el cuerpo objetivo.

Por tanto, se puede concluir que los objetivos impuestos en el trabajo se han cumplido. Se ha desarrollado un programa de propagación orbital con Python que permite simular y analizar trayectorias espaciales mediante la solución numérica de ecuaciones diferenciales aplicando las perturbaciones relevantes. Además, se ha diseñado una interfaz gráfica amigable que permite

introducir por pantalla las variables y parámetros requeridos para el estudio, así como seleccionar la información de salida que se desea obtener.

Tal y como se ha descrito a lo largo del trabajo, la implementación de la propulsión ha sido incluida con ciertas limitaciones. Se ha establecido que el impulso del motor se ejerce de manera constante en el tiempo y al 100 % de la capacidad de empuje impuesta. Es decir, el programa no permite variar la intensidad del empuje ejercida por el sistema propulsivo, ni tampoco encender o apagar el motor a voluntad. Además, la dirección seleccionada para el impulso de la nave se establece como su orientación definitiva y permanente, sin la capacidad de ser modificada. En relación a esto, se proponen una serie de propuestas para trabajos futuros para llevar a cabo con el propagador orbital.

La trayectoria que debe seguir una nave para alcanzar un objeto en el espacio suele ser difícil de determinar. Esto se debe a que los cuerpos celestes se encuentran permanentemente en movimiento y atraídos por diferentes fuerzas que pueden variar repetidamente su comportamiento orbital. Además, la nave es influida también por distintas perturbaciones que han de tenerse en consideración. Por este motivo, se podrían implementar diversos tipos de optimización para calcular la trayectoria que debería de seguir la nave según las condiciones del sistema. Conociendo el recorrido del cuerpo objetivo, se podría resolver el problema con el que se alcanzase el destino requerido optimizando ciertas variables, como pueden ser: la época final de la propagación orbital, el tiempo mínimo posible para la trayectoria de la nave o el empuje necesario que debe aplicar el motor.

Ligado a esto, se propone también un estudio sobre la implementación de un sistema propulsivo variable. Se podría incluir al propagador orbital la capacidad de aplicar un motor que permita modificar el empuje que ejerce, así como la orientación de su impulso. Esto permitiría alterar la trayectoria de la nave de forma más precisa para alcanzar un cuerpo objetivo, pudiendo cambiar el sentido de propulsión para acelerar o decelerar su movimiento, e incluso detener el motor y reactivarlo cuando fuera requerido.

Por último, Python utiliza doble precisión de manera predeterminada para el cálculo numérico, lo que proporciona una mayor exactitud y rango de valores que la precisión simple. Sin embargo, se propone realizar el análisis con precisión extendida (que típicamente utiliza +80 bits) o precisión cuádruple (que utiliza 128 bits). Lo cual sería relevante para mejorar los resultados obtenidos arrastrando un mayor número de dígitos, sobre todo en estudios de trayectorias a largo plazo.

Bibliografía

- [1] Design 1st. Emissivity values. URL https://www.design1st.com/Design-Resource-Library/engineering_data/ThermalEmissivityValues.pdf.
- [2] The National Aeronautics and Space Administration. Psyche - NASA Science, . URL <https://science.nasa.gov/mission/psyche/>.
- [3] The National Aeronautics and Space Administration. Parker Solar Probe, . URL <https://science.nasa.gov/mission/parker-solar-probe/>.
- [4] The National Aeronautics and Space Administration. 115 Years Ago: The Tunguska Asteroid Impact Event - NASA, 2023. URL <https://www.nasa.gov/history/115-years-ago-the-tunguska-asteroid-impact-event/>.
- [5] European Space Agency. S1 mission. URL <https://sentiwiki.copernicus.eu/web/s1-mission>.
- [6] European Space Agency. Mars express, 2000. URL <https://web.archive.org/web/20210307042939/https://sci.esa.int/web/mars-express>.
- [7] European Space Agency. Mars express fact sheet, 2020. URL <https://web.archive.org/web/20210421234207/https://sci.esa.int/web/mars-express/-/47364-fact-sheet>.
- [8] NASA Space Science Data Coordinated Archive. Double asteroid redirection test, 2022. URL <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=2021-110A>.
- [9] Richard H Battin. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. Aiaa, 1999.
- [10] TA Bond and JA Christensen. Nstar ion thrusters and power processors. Technical report, 1999.
- [11] Dan L. Boulet. *Methods of Orbit Determination for the Micro Computer*. Willmann-Bell, Incorporated, 1991. ISBN 0943396344.
- [12] Busek. Bht-1500, . URL <https://www.busek.com/bht1500>.
- [13] Busek. Bht-1500 datasheet, . URL https://static1.squarespace.com/static/60df2bfb6db9752ed1d79d44/t/61292a6a6a852874bb123c23/1630087786826/BHT_1500_v1.0.pdf.
- [14] Sonja Caldwell-NASA. State-of-the-art of small spacecraft technology, 2024. URL https://www.nasa.gov/smallsat-institute/sst-soa/in-space_propulsion/.

- [15] Ad Astra Rocket Company. The vasimr[®] engine. URL <https://www.adastrarocket.com/our-engine/>.
- [16] H.D. Curtis. *Orbital Mechanics: For Engineering Students*. Aerospace Engineering. Elsevier Science, 2015. ISBN 9780080470542. URL <https://books.google.es/books?id=6a09aGNBAGIC>.
- [17] J.R. Dormand and P.J. Prince. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1):19–26, 1980. ISSN 0377-0427. doi: [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0771050X80900133>.
- [18] Jessica Evans. Traveling to the Sun: Why Won't Parker Solar Probe Melt?, 2018. URL <https://www.nasa.gov/solar-system/traveling-to-the-sun-why-wont-parker-solar-probe-melt/>.
- [19] Center for Near Earth Object Studies. (2022 nx1) – earth impact risk summary. URL <https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/details.html#?des=2022%20NX1>.
- [20] Center for Near Earth Object Studies (CENEOS). Torino Impact Hazard Scale. URL https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/torino_scale.html.
- [21] P. Fortescue, G. Swinerd, and J. Stark. *Spacecraft Systems Engineering*. Wiley, 2011. ISBN 9781119978367. URL https://books.google.es/books?id=cYP0rVR_IEC.
- [22] Sydney Goldstein. Theodore von kármán, 1881-1963. *Biogr. Mem. Fellows R. Soc.*, 12: 334–365, November 1966.
- [23] Ernst Hairer, Syvert Norsett, and Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, volume 8. 01 1993. ISBN 978-3-540-56670-0. doi: 10.1007/978-3-540-78862-1.
- [24] Charles R. Harris, K. Jarrod Millman, Stéfan J. van der Walt, Ralf Gommers, Pauli Virtanen, David Cournapeau, Eric Wieser, Julian Taylor, Sebastian Berg, Nathaniel J. Smith, Robert Kern, Matti Picus, Stephan Hoyer, Marten H. van Kerkwijk, Matthew Brett, Allan Haldane, Jaime Fernández del Río, Mark Wiebe, Pearu Peterson, Pierre Gérard-Marchant, Kevin Sheppard, Tyler Reddy, Warren Weckesser, Hameer Abbasi, Christoph Gohlke, and Travis E. Oliphant. Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825): 357–362, September 2020. doi: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [25] A. C. Hindmarsh. ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers. In R. S. Stepleman, editor, *Scientific Computing*, pages 55–64, Amsterdam, 1983. North-Holland.
- [26] HisdeSAT. PAZ. URL <https://www.hisdesat.es/paz/>.
- [27] EMILIO AMADE (ElMundo) HisdeSAT. PAZ, un 'espía' español en el espacio, 2018. URL <https://www.elmundo.es/ciencia-y-salud/ciencia/2018/02/17/5a871693e2704efb5a8b461d.html>.

- [28] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3):90–95, 2007. doi: 10.1109/MCSE.2007.55.
- [29] Dr. T.S. Kelso. Celestrak. URL <https://celestrak.org/NORAD/elements/>.
- [30] The Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory. DART. URL <https://dart.jhuapl.edu/>.
- [31] Lunar and Planetary Institute. Chicxulub Impact Event, 2020. URL <https://www.lpi.usra.edu/science/kring/Chicxulub/regional-effects/>.
- [32] Fredrik Lundh. An introduction to tkinter. URL: *www.pythonware.com/library/tkinter/introduction/index.htm*, 1999.
- [33] John C Mankins et al. Technology readiness levels. *White Paper, April*, 6(1995):1995, 1995.
- [34] Jonathan McDowell. The edge of space: Revisiting the karman line. *Acta Astronautica*, 151, 07 2018. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.07.003.
- [35] Jeanne Ryba NASA. Space shuttle overview: Endeavour, 2013. URL <https://web.archive.org/web/20200222025959/https://www.nasa.gov/centers/kennedy/shuttleoperations/orbiters/endeavour-info.html>.
- [36] Timothy Reckart NASA. Gridded ion thrusters (next-c), 2023. URL <https://www1.grc.nasa.gov/space/sep/gridded-ion-thrusters-next-c/>.
- [37] The University of Arizona Lunar and Planetary Laboratory. OSIRIS-REx mission, 2017. URL <https://www.asteroidmission.org/>.
- [38] Solar System Dynamics Group of the Jet Propulsion Laboratory. Horizons System — ssd.jpl.nasa.gov. URL <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/>.
- [39] United States Naval Observatory. Nautical Almanac Office, Great Britain. Nautical Almanac Office, Engineering Research Council (Great Britain), Science Research Council (Great Britain), Rutherford Appleton Laboratory, Council for the Central Laboratory of the Research Councils (Great Britain), United States. Department of the Navy, and Great Britain. Hydrographic Office. *The Astronomical Almanac*. US Government Printing Office, 2011.
- [40] United States Committee on Extension to the Standard Atmosphere. *U.S. Standard Atmosphere, 1976*. NOAA - SIT 76-1562. National Oceanic and Atmospheric Administration, 1976. URL <https://books.google.es/books?id=x488AAAAIAAJ>.
- [41] Linda Petzold. Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 4(1):136–148, 1983. doi: 10.1137/0904010. URL <https://doi.org/10.1137/0904010>.
- [42] S. Pireaux. *Astrophysics and Space Science*, 284(4):1159–1194, 2003. ISSN 0004-640X. doi: 10.1023/a:1023673227013. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1023673227013>.

- [43] Mark A. Nurge Robert C. Youngquist. Solar Surfing: Final Report on a Phase I NASA Innovative Advanced Concepts Study. Technical Report HQ-E-DAA-TN58826, NASA, April 2018. URL <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20180006588/downloads/20180006588.pdf>.
- [44] H. Schaub and J.L. Junkins. *Analytical Mechanics of Space Systems*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Incorporated, 2014. ISBN 9781624102400. URL <https://books.google.es/books?id=JD3MngEACAAJ>.
- [45] Tom Schimansky. Customtkinter. URL <https://customtkinter.tomschimansky.com/>.
- [46] Rohit Shastry, Robert Edward Thomas, George C Soulas, Marcelo Calixto Gonzalez, Michael J Patterson, and Carol M Tolbert. Nasa’s evolutionary xenon thruster-commercial (next-c). In *Double Asteroid Redirection Test (DART) Mission*, 2021.
- [47] E Myles Standish, James G Williams, et al. Orbital ephemerides of the sun, moon, and planets. *Explanatory supplement to the astronomical almanac*, pages 279–323, 1992.
- [48] Indra Subedi, Timothy J Silverman, Michael G Deceglie, and Nikolas J Podraza. Emissivity of solar cell cover glass calculated from infrared reflectance measurements. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 190:98–102, 2019.
- [49] International Astronomical Union. Near earth objects. URL <https://www.iau.org/public/themes/neo/>.
- [50] D.A. Vallado and W.D. McClain. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Fundamentals of Astrodynamics and Applications. Microcosm Press, 2001. ISBN 9781881883128. URL <https://books.google.es/books?id=OckGmwEACAAJ>.
- [51] Guido Van Rossum. *The Python Library Reference, release 3.8.2*. Python Software Foundation, 2020.
- [52] Pauli Virtanen, Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, Matt Haberland, Tyler Reddy, David Cournapeau, Evgeni Burovski, Pearu Peterson, Warren Weckesser, Jonathan Bright, Stéfan J. van der Walt, Matthew Brett, Joshua Wilson, K. Jarrod Millman, Nikolay Mayorov, Andrew R. J. Nelson, Eric Jones, Robert Kern, Eric Larson, C J Carey, İlhan Polat, Yu Feng, Eric W. Moore, Jake VanderPlas, Denis Laxalde, Josef Perktold, Robert Cimrman, Ian Henriksen, E. A. Quintero, Charles R. Harris, Anne M. Archibald, Antônio H. Ribeiro, Fabian Pedregosa, Paul van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020. doi: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- [53] Wikipedia. 2022 nx1, 2023. URL https://en.wikipedia.org/wiki/2022_NX1.

Parte II

**PLIEGO DE CONDICIONES Y
PRESUPUESTO**

Capítulo 8

Pliego de condiciones

El presente capítulo incluye el pliego de condiciones que establece los requisitos imprescindibles para llevar a cabo la realización de este trabajo de fin de máster. El objetivo es el de garantizar las condiciones óptimas para el desarrollo del proyecto, como son el bienestar y la seguridad del trabajador encargado para desempeñar esta labor.

Para ello, se detallan las especificaciones tanto técnicas, para la ejecución eficiente del trabajo, como de entorno, que deben ser consideradas para establecer un ambiente laboral adecuado y saludable. Garantizar estas condiciones es fundamental para favorecer y contribuir a la integridad y eficacia del proyecto.

8.1. Condiciones ambientales

El entorno en el que se realiza el trabajo descrito en este documento debe cumplir ciertos requisitos mínimos de seguridad y de salud. Las especificaciones ambientales que certifican unas condiciones de trabajo adecuadas son estipuladas por el Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales de España en el Real Decreto 486/1997, publicado en el BOE (Boletín Oficial del Estado).

Esencialmente, se debe mantener una temperatura en el entorno laboral de aproximadamente 20°C , sin llegar a superar los 14°C en invierno ni los 27°C en verano. Será necesario, también, garantizar unas condiciones de humedad y ventilación adecuadas. Con esto, se pretende asegurar el confort tanto térmico como respiratorio del trabajador, lo que favorecerá a que la labor que lleve a cabo sea más efectiva.

Por otro lado, debido a la naturaleza del trabajo a desarrollar que requiere de largos periodos de tiempo frente a una pantalla, habrá que conseguir un estado apropiado de iluminación que permita proteger la salud del operario. Además, se deben tomar medidas para limitar la exposición al ruido que favorezca a un ambiente de concentración óptimo.

Para conseguir estas condiciones en el ambiente laboral, habrá que hacer uso de sistema eléctricos o de protección adecuados, así como establecer procedimientos para actuar en caso de emergencia. Todos los equipos utilizados deben ser seguros y estar en condiciones óptimas de funcionamiento, siguiendo las normativas técnicas y de seguridad establecidas.

8.2. Condiciones técnicas

En esta sección se describen las condiciones técnicas necesarias para la realización del trabajo. El objetivo es de exponer las características de software utilizadas, así como los requerimientos mínimos imprescindibles para el desarrollo del proyecto.

Se ha empleado fundamentalmente un equipo informático portátil Lenovo V15-IIL, que cuenta con las especificaciones técnicas mostradas en la [Tabla 8.1](#).

EQUIPO INFORMÁTICO	
Fabricante	Lenovo
Modelo	V15-IIL Laptop - Type 82C5
Procesador	Intel(R) Core(TM) i5-1035G1 CPU @ 1.00GHz
Memoria RAM	16 GB DDR4-2667
Sistema Operativo	Windows 11 Pro 64 bits
Disco duro	256 GB SSD
Gráficos	Intel UHD Graphics

Tabla 8.1: Especificaciones técnicas del equipo informático.

En relación a los softwares empleados, principalmente se ha utilizado el lenguaje de programación Python en la versión 3.11. Para su implementación, se ha importado la herramienta Anaconda que incluye una gran colección de paquetes científicos preinstalados como NumPy, SciPy o Matplotlib, además de permitir la capacidad de gestión de los mismos. Para el desarrollo de los scripts, se ha utilizado el entorno integrado Spyder (Scientific Python Development Environment), ya que proporciona una interfaz gráfica intuitiva y una consola interactiva para la edición de comandos y la visualización de resultados. En la [Tabla 8.2](#) se recogen los requisitos del sistema mínimos para la implementación de estas herramientas.

REQUISITOS DEL SISTEMA MÍNIMOS	
Procesador	CPU Doble Núcleo
Memoria RAM	2 GB
Sistema Operativo	Windows 7 o posterior, macOS o Linux
Disco duro	2-3 GB

Tabla 8.2: Requisitos mínimos del sistema para implementación de Python.

Todas estas aplicaciones para Python son libres y de código abierto, así como la propia licencia del lenguaje de programación en cuestión.

Adicionalmente, se ha utilizado Microsoft PowerPoint para elaborar presentaciones y el editor de LaTeX online Overleaf para la redacción de documentos.

Capítulo 9

Presupuesto

Para garantizar la disposición de los recursos necesarios y adecuados que lleven a cabo los procedimientos propuestos en el trabajo, en este capítulo se realiza la estimación del presupuesto total para el desarrollo del proyecto. Se van a exponer los costes de personal desglosados por horas de trabajo, así como los costes de los equipos informáticos y de los programas de software empleados.

9.1. Costes de personal

A la hora de tener en cuenta el presupuesto total, se ha de considerar el personal implicado en el desarrollo de este trabajo. En este caso, se tiene en cuenta la intervención del conjunto de recursos humanos que incluye al alumno que ha realizado el proyecto y los tres tutores académicos del Departamento de Matemática Aplicada. De los tres tutores, dos de ellos tienen el cargo de Profesor Titular de Universidad y el tercero de Profesor Permanente Laboral. De las tablas retributivas del portal de la Universitat Politècnica de València se obtienen los salarios de profesorado funcionario en base a la ley de presupuestos para el ejercicio 2024:

$$\begin{aligned} \text{Profesor Titular de Universidad} &\longrightarrow \frac{2770,52 \text{ €/mes}}{150 \text{ h/mes}} = 18,47 \text{ €/h} \\ \text{Profesor Permanente Laboral} &\longrightarrow \frac{2532,21 \text{ €/mes}}{150 \text{ h/mes}} = 16,88 \text{ €/h} \end{aligned}$$

Atribuyendo al alumno el sueldo medio nacional de ingeniero en prácticas en España de 4,67 €/h, en la [Tabla 9.1](#) se recogen los costes de personal desglosados en horas de trabajo.

9.2. Costes de equipo informático

Por otro lado, habrá que estimar el coste del equipo informático utilizado para la realización del trabajo. Para ello, habrá que calcular la devaluación que ha sufrido el sistema durante los años de uso, además del tiempo de uso empleado en el desarrollo del proyecto.

El equipo informático utilizado es un Lenovo V15-IIL adquirido en el año 2020. Su coste fue de 600 €y ha sido amortizado durante casi 4 años. Aproximando el valor residual del sistema

			Tiempo [h]	Importe [€]
COSTES DE PERSONAL	Programación en Python	Ingeniero en prácticas	250	1167.50
	Redacción de la memoria	Ingeniero en prácticas	80	373.60
	Estudio bibliográfico	Ingeniero en prácticas	30	140.10
	Tutorías y consultas	Tutor	25	461.75
		Ingeniero en prácticas		116.75
	Reuniones	Tutores	15	807.30
		Ingeniero en prácticas		70.05
TOTAL			400	3137.05

Tabla 9.1: Costes de personal desglosado por horas.

en unos 350 € en función de las condiciones actuales y la demanda del mercado, el cálculo de la devaluación se ha calculado mediante la fórmula:

$$\text{devaluación} = \frac{\text{coste} - \text{valor residual}}{\text{vida útil}} = \frac{600 - 350}{4} = 62,5 \text{ €/año}$$

Estimando que el equipo informático se utiliza durante aproximadamente 1800 horas al año, el coste diario será de 0,035 €/h. Por tanto, para 400 horas de trabajo en las que será necesario el uso del ordenador, **el coste del equipo informático será de 14.00 €.**

9.3. Costes de software

Para desglosar los costes de los softwares empleados, habrá que tener en cuenta las licencias necesarias para su implementación.

Como se ha mencionado anteriormente, tanto Python como las bibliotecas y herramientas empleadas para su uso son gratuitos y de código libre. El editor de LaTeX Overleaf también es una aplicación web sin coste, por lo que sólo habrá que tener en cuenta en el presupuesto de software la licencia de Microsoft Office para el uso de PowerPoint. Sabiendo que esta licencia tiene un coste anual de 70 €, se puede estimar el coste por hora del programa asumiendo las horas de trabajo de un ingeniero en prácticas a tiempo completo:

$$\text{Coste unitario PowerPoint} = \frac{5,83 \text{ €/mes}}{150 \text{ h/mes}} = 0,039 \text{ €/h}$$

Conociendo el presupuesto que habría que invertir las licencias de software necesarias, en la [Tabla 9.2](#) se recoge el desglose de los costes para cada programa utilizado.

		Tiempo [h]	Coste unitario [€/h]	Importe [€]
COSTES DE SOFTWARE	Python	250	0	0
	Anaconda/Spyder		0	0
	Overleaf	60	0	0
	Microsoft Office	20	0.039	0.78
	TOTAL	330	0.039	0.78

Tabla 9.2: Costes de software desglosado por horas.

9.4. Costes totales

Por último, a los costes calculados hasta ahora se les añaden unos costes indirectos, que serán de aproximadamente el 15% para cubrir gastos extra como electricidad, internet o sistemas para garantizar las condiciones ambientales de trabajo. En la [Tabla 9.3](#) se muestran los costes totales para la realización del proyecto separados por las categorías involucradas.

	Importe [€]	
COSTES TOTALES	Costes de personal	3137.05
	Costes de equipo informático	14.00
	Costes de software	0.78
	TOTAL BASE	3151.83
	Costes indirectos (15%)	472.77
	TOTAL	3624.60

Tabla 9.3: Resumen de los costes totales desglosados por categorías.

Por lo tanto, el presupuesto total estimado para la realización de este Trabajo de Fin de Máster es de **TRES MIL SEISCIENTOS VEINTICUATRO EUROS Y SESENTA CÉNTIMOS (3624.60 €)**

Parte III

OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE

Capítulo 10

Objetivos de desarrollo sostenible

En el presente capítulo, se describen los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de la agenda 2030 y la implicación del trabajo elaborado con ellos. Para representar este propósito, en la [Tabla 10.1](#) se enumeran los ODS indicando el grado de relación de cada uno con este proyecto.

OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE	Alto	Medio	Bajo	No Procede
ODS 1. Fin de la pobreza.				✓
ODS 2. Hambre cero.				✓
ODS 3. Salud y bienestar.				✓
ODS 4. Educación de calidad				✓
ODS 5. Igualdad de género.				✓
ODS 6. Agua limpia y saneamiento				✓
ODS 7. Energía asequible y no contaminante.				✓
ODS 8. Trabajo decente y crecimiento económico.				✓
ODS 9. Industria, innovación e infraestructura.	✓			
ODS 10. Reducción de las desigualdades.				✓
ODS 11. Ciudades y comunidades sostenibles.		✓		
ODS 12. Producción y consumo responsable.				✓
ODS 13. Acción por el clima.		✓		
ODS 14. Vida submarina.				✓
ODS 15. Vida de ecosistemas terrestres.				✓
ODS 16. Paz, justicia e instituciones sólidas.				✓
ODS 17. Alianzas para lograr objetivos.	✓			

Tabla 10.1: Grado de relación del trabajo con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS).

A continuación, se presenta el grado de contribución y la relación justificada del trabajo para cada ODS relevante:

1. ODS 9. Industria, innovación e infraestructura. - Alto

El desarrollo de un propagador orbital y su aplicación a la investigación y exploración espacial fomenta la innovación tecnológica, así como la participación en la evolución de infraestructuras científicas. Más concretamente, contribuye a la industria aeroespacial y a la capacidad de monitorización y estudio de objetos cercanos a la Tierra.

2. ODS 11. Ciudades y comunidades sostenibles. - Medio

La investigación de NEOs puede ayudar a la prevención de posibles impactos con la Tierra que afectan directa o indirectamente a la preservación de ciudades y comunidades. Con el desarrollo de tecnologías para monitorear y prever amenazas de objetos espaciales, se contribuye a la seguridad y sostenibilidad de las comunidades.

3. ODS 13. Acción por el clima. - Medio

La implementación de un propagador orbital puede ser aplicado a satélites para la observación y análisis de datos climáticos y ambientales terrestres. Esto contribuye indirectamente a la acción climática.

4. ODS 17. Alianzas para lograr objetivos. - Alto

Para finalizar, la investigación espacial y, más concretamente, la investigación de NEOs suele requerir de colaboración internacional así como del intercambio de conocimiento y datos relevantes. La cooperación con otras instituciones favorece a la consecución de objetivos abordando desafíos comunes.

