



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA


ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial
y Diseño Industrial

Simulación numérica directa en flujo turbulento en tuberías

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

AUTOR/A: Llorente Pérez, Álvaro

Tutor/a: Hoyas Calvo, Sergio

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024

Resumen

El flujo en tuberías es esencial en nuestra vida moderna. Aproximadamente un 2% de la energía total usada por la humanidad se gasta en mover líquidos por tuberías. Sin embargo, este tipo de flujos es todavía el gran olvidado en el estudio de la turbulencia por DNS debido a la dificultad de encontrar un método numérico preciso para la resolución de las ecuaciones en toda la tubería. Mediante el uso del código OpenPIPEflow, se han desarrollado varias simulaciones a alto número de Reynolds, donde se han estudiado la dinámica de este tipo de flujo. Durante el TFM se usaran aproximadamente 3M de Horas de CPU, generando bases de datos de cientos de Terabytes. Para poder analizar estos datos, se han realizado varios programas tanto en Fortran como en Matlab.

Abstract

Flow in pipes is essential in our modern life. Approximately 2% of the total energy used by humanity is spent on moving liquids through pipes. However, this flow type remains largely overlooked in the study of turbulence by Direct Numerical Simulation (DNS) due to the difficulty of finding an accurate numerical method for solving the equations throughout the entire pipe. Using the OpenPIPEflow code, several simulations at high Reynolds numbers were developed, and the dynamics of this flow type were studied. During the Master's Thesis project, approximately 3 million CPU hours will be used, generating databases of hundreds of terabytes. Several programs have been developed in Fortran and Matlab to analyse this data.

Resum

El flux en canonades és essencial en la nostra vida moderna. Aproximadament un 2% de l'energia total usada per la humanitat es gasta a moure líquids per canonades. No obstant això, aquest tipus de fluxos encara és el gran oblidat en l'estudi de la turbulència per DNS a causa de la dificultat de trobar un mètode numèric precís per a la resolució de les equacions en tota la canonada. Mitjançant l'ús del codi OpenPIPEflow, s'han desenvolupat diverses simulacions a alt número de Reynolds, on s'ha estudiat la dinàmica d'aquest tipus de flux. Durant el TFM s'utilitzaran aproximadament 3M d'hores de CPU, generant bases de dades de centenars de terabytes. Per a poder analitzar aquestes dades, s'han realitzat diversos programes tant en Fortran com en Matlab.

Glosario de símbolos y abreviaturas

ω	Vorticidad
U	Velocidad instantánea
$\langle U \rangle$	Promedio temporal de la velocidad
u	velocidad turbulenta
∇	Operador nabra
ρ	Densidad
δ	Espesor de la capa límite
U_{cl}	Velocidad en la línea media
Re_{τ}	Reynolds de fricción
τ_w	Esfuerzos viscosos en la pared
α	Longitud de la tubería adimensional
k	Energía cinética turbulenta
L	Longitud característica
μ	Viscosidad dinámica
ν	Viscosidad cinemática
η	Escala de Kolmogorov
Re_b	Reynolds de velocidad media
R	Radio
u_{τ}	Velocidad de fricción
L_z	Longitud de la tubería
T_{ϵ}	tiempo de decaimiento turbulento
T_{ν}	tiempo de decaimiento laminar
y	Distancia a la pared
K	Modos en dirección axial
M	Modos en dirección azimutal
λ	Longitud de onda
E_{ij}	Potencia espectral
Π_{ij}	Término de deformación de la presión del tensor de Reynolds
D_{ij}^P	Término de difusión depresión del tensor de Reynolds
D_{ij}^T	Término de difusión turbulenta del tensor de Reynolds
D_{ij}^{ν}	Término de difusión viscosa del tensor de Reynolds
ϵ_{ij}	Término de disipación turbulenta del tensor de Reynolds
P_{ij}	Término de producción turbulenta del tensor de Reynolds
C_{ij}	Término convectivo del tensor de esfuerzos de Reynolds

ODS	Objetivos de desarrollo sostenible
DNS	Direct Numerical Simulation
CFD	Computational Fluid Dynamics.
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
TKE	Turbulent Kinetic Energy
ETT	Eddy Turnover Time
Wo	Wash Out Time

Índice general

1. Introducción	1
2. Estado del arte	5
2.1. Naturaleza de la turbulencia	5
2.2. Modelos de turbulencia	7
2.3. Escalabilidad	9
3. Marco teórico	13
3.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	13
3.2. Conceptos clave	15
3.3. Modelo matemático	16
3.4. Resolución de la PPE	18
3.5. Método numérico	20
3.6. Ley de pared	21
3.7. Turbulent Budgets	22
4. Convergencia	27
4.1. Error de simulación	28
4.2. Validación	30
4.3. Correlaciones	33
5. Resultados	39
5.1. Escalado	40
5.2. Estadísticas	42
5.3. <i>Turbulent budgets</i>	46
5.4. Espectros de energía	50
6. Pliego de condiciones	53
6.1. Condiciones del puesto de trabajo	53
6.2. Condiciones de los recursos informáticos	54
7. Presupuesto	57
7.1. Coste de personal	57
7.2. Coste equipo informático	58
7.3. Presupuesto total	59
8. Conclusiones y trabajos futuros	61
Anexo I	63

Índice de figuras

2.1. Atractor de <i>Lorentz</i> : Wolfram COmmunity	6
2.2. Cascada autosimilar de vórtices en un flujo turbulento. Fuente: [1]	6
2.3. Descripción de Richardson de la turbulencia. Fuente: [5]	7
2.4. Espectro de energía turbulenta. Fuente: Altair Acusolve	8
2.5. Diferencia entre modelos de CFD en un flujon de cortadura libre. Fuente: Ideal Simulations	9
2.6. Tipos de turbulencia en un avión. Fuente: Isaac Newton Institute	10
2.7. Vórtices en un perfil aerodinámico. Fuente: Isaac Newton Institute	10
3.1. Descompsición de Reynolds. Siendo, u' la velocidad turbulenta, u la velocidad instantánea y \bar{u} la velocidad media. Fuente: Altair Acusolve	14
3.2. Coordenadas cilíndricas.	16
3.3. leyes de pared. Fuente: Fluid Mechanics 101	22
4.1. Relación entre la discretización radial y la escala de Kolmogorov, para todos los casos de estudio.	28
4.2. Errores de simulación para todos los casos de estudio.	29
4.3. Criterio de convergencia según la ecuación del momento.	29
4.4. Validación del caso $Re_\tau = 360$	30
4.5. Validación del caso $Re_\tau = 550$	31
4.6. Validación del caso $Re_\tau = 1000$	32
4.7. Correlaciones espaciales para el caso $Re_\tau = 1000$	33
4.8. Correlaciones temporales para el caso $Re_\tau = 1000$. Colores como en la figura 4.7.	34
4.9. Tiempo de coherencia para el caso $Re_\tau = 360$. Colores como en la figura 4.7.	34
4.10. Tiempo de coherencia para el caso $Re_\tau = 550$. Colores como en la figura 4.7.	35
4.11. Tiempo de coherencia para el caso $Re_\tau = 1000$. Colores como en la figura 4.7.	35
4.12. Distancia de coherencia para el caso $Re_\tau = 360$. Colores como en la figura 4.7.	36
4.13. Distancia de coherencia para el caso $Re_\tau = 550$. Colores como en la figura 4.7.	36
4.14. Distancia de coherencia para el caso $Re_\tau = 1000$. Colores como en la figura 4.7.	37
5.1. Plano radial de velocidad instantánea axial, caso: P360	39
5.2. Plano radial de velocidad instantánea axial, caso: P550	40
5.3. Plano axial de velocidad instantánea axial, caso: P1000	40
5.4. Escalado de eficiencia en Sirius para $Re_\tau = 550$	41
5.5. Escalado de eficiencia en Shaheen III $Re_\tau = 550$	41
5.6. Variación de la intensidad turbulenta axial con respecto a Re_τ	42
5.7. Variación del perfil de velocidad axial con respecto de Re_τ	42
5.8. Variación del indicador de ley logarítmica con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.	43
5.9. Ley de pared para el caso P1000 : 	43
5.10. Variación de la intensidad turbulenta axial con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.	44

5.11. Variación de la intensidad turbulenta radial con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.	44
5.12. Variación de la intensidad turbulenta azimutal con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.	45
5.13. Variación de la covarianza axial-radial con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.	45
5.14. Variación de presión media con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7. . .	46
5.15. Errores obtenidos en el cálculo de los <i>turbulent budgets</i> para todos los casos de estudio.	46
5.16. <i>turbulent budgets</i> de la componente $u_z u_z$, P1000	47
5.17. <i>turbulent budgets</i> de la componente $u_t u_t$, caso: P1000 . Colores como en la figura 5.16.	47
5.18. <i>turbulent budgets</i> de la componente $u_r u_r$, caso: P1000 . Colores como en la figura 5.16.	48
5.19. <i>turbulent budgets</i> de la energía cinética turbulenta.	48
5.20. Comparación entre producción y disipación de todos los casos de estudio.	49
5.21. Exceso producción de TKE sobre la disipación. Escala externa. Colores como en la figura 5.20.	49
5.22. Exceso producción de TKE sobre la disipación. Escala interna. Colores como en la figura 5.20.	50
5.23. Espectro de energía de la velocidad axial para el caso P1000	50
5.24. Espectro de energía de la velocidad radial para el caso P1000	51
5.25. Espectro de energía de la velocidad tangencial para el caso P1000	51
5.26. Espectro de energía 2D a una distancia $y^+ = 15$. Caso: P1000	52

Índice de cuadros

3.1. Regiones de pared y sus propiedades	21
4.1. Parámetros de las simulación	27
7.1. Costes de personal	57
7.2. Costes de equipo informático	58
7.3. Presupuesto total	59

1 | Introducción

A lo largo de la historia se ha observado que si los flujos son lo suficientemente rápidos se vuelven desordenados. El movimiento suave solo se puede mantener cuando es lo suficientemente lento o cuando ocurre en una escala lo suficientemente pequeña. De lo contrario, se vuelve inestable y aparecen fluctuaciones turbulentas. Si bien muchos factores contribuyen al inicio de las inestabilidades. Reynolds obtuvo en 1883 que los únicos parámetros relevantes en el caso canónico de un fluido newtoniano incompresible inicialmente suave son la geometría y el siguiente parámetro adimensional que, después, llevaría su nombre. [1]

$$Re_b = UL/\nu \tag{1.1}$$

donde U y L son la velocidad y longitud características y ν es la viscosidad cinemática. El umbral de transición varía de $Re \approx 10$ para flujos lejos de las paredes a $Re \approx 10^3$ en casos como en tuberías, donde la presencia de la pared tiende a inhibir las fluctuaciones.

La inestabilidad y el desorden resultante no son las únicas propiedades que definen la turbulencia. A mediados del siglo XIX quedó claro que los flujos laminares y turbulentos eran regímenes distintos que se diferenciaban en otros aspectos importante. Experimentos realizados por Darcy (1854) y Hagen (1854), quienes estaban interesados en temas de ingeniería, fueron sobre la caída de presión en tuberías y canales. El problema relacionado con la resistencia de un cuerpo que se mueve en un fluido había sido un tema recurrente en el área de hidráulica durante el siglo anterior y se sabía que tenía dos componentes: uno que varía aproximadamente linealmente con la velocidad del fluido y otro que varía cuadráticamente. Unos años atrás Hagen (1836) y Poiseuille (1846) habían estudiado el flujo a lo largo de capilares delgados y habían demostrado que el componente lineal de la resistencia era proporcional a una propiedad del fluido, que llamaron coeficiente de viscosidad. Lo que se demostró en 1854 por Hagen y Darcy fue que el componente cuadrático de la resistencia de un cuerpo y de la caída de presión en una tubería era independiente de la viscosidad.

El problema subyacente tiene que ver con la disipación de energía. Cuando un cuerpo se mueve y sufre una resistencia transmite energía al medio en una tubería el trabajo se realiza sobre el fluido debido al gradiente de presión.

Tomando las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Donde p es la presión, \mathbf{u} es el vector velocidad y ρ la densidad. Tomando una tubería de área constante A con un volumen V en la cual se ha alcanzado un equilibrio en el perfil de velocidades y es independiente de la velocidad axial, lo que se conoce como estadísticamente desarrollado. Ahora, para encontrar la evolución de la ecuación de energía cinética por unidad de masa $K = |\mathbf{u}|^2/2$ hay que multiplicar la ecuación (1.2) por \mathbf{u} e integrar en V .

$$\partial_t \int_V K d^3x = -\frac{\Delta p}{\rho} \int_A u d^2x - \nu \int_V |\nabla u|^2 d^3x \quad (1.3)$$

Si se median las variables para un tiempo suficientemente grande para poder despreciar las variaciones temporales el lado izquierdo de la ecuación desaparece. La caída de presión actúa como una fuente de energía, la cual se disipa gracias al término viscoso. Los resultados de Hagen y Darcy fueron por lo tanto paradójicos porque implicaban que, incluso si la disipación por unidad de masa se debía a fuerzas viscosas, era independiente del coeficiente de viscosidad.

$$\epsilon = -\frac{\Delta p}{\rho V} \int_A u d^2x = \frac{\nu}{V} \int_V |\nabla u|^2 d^3x \quad (1.4)$$

Ambos autores supusieron que esta disipación anómala estaba relacionada con la energía necesaria para mantener las fluctuaciones de velocidad que se observan típicamente en los flujos turbulentos.

Esta disipación adicional debida a la turbulencia es esencial y a un alto número de Reynolds supera a la del flujo laminar.

La disipación ϵ y la energía cinética K tiene un tiempo de decaimiento K/ϵ . Este se puede definir como el tiempo que tardaría un flujo en pararse si no hubiera una fuente de energía. Para tuberías rugosas el coeficiente de fricción c_f es constante y su tiempo de decaimiento turbulento es $T_\epsilon = R/U_b$, mientras que su tiempo de decaimiento laminar es $T_\nu = R^2/\nu$. T_ϵ es la única expresión dimensionalmente correcta que no involucra viscosidad. Por otro lado, la disipación laminar se debe a los movimientos moleculares que son responsables de la viscosidad. El movimiento macroscópico no está involucrado y T_ν es la única combinación dimensionalmente correcta en la que la velocidad macroscópica U_b no está presente. Una posible definición del número de Reynolds es el ratio de las dos escalas temporales:

$$Re = \frac{T_\nu}{T_\epsilon} \quad (1.5)$$

Lo que coincide con la ecuación (1.1) que nos muestra que el número de Reynolds es normalmente elevado y los flujos de pared rara vez son completamente turbulentos por debajo de $Re = 1000$. La ecuación (1.5) implica que las fluctuaciones de velocidad macroscópicas son más eficientes disipando energía que la difusión viscosa en un flujo turbulento.

Los flujos tienen tres propiedades con las cuales se entiende que es completamente turbulento: desorden, inestabilidad y disipación anómala. Con esta primera parte del capítulo se ha pretendido iniciar en lo que se conoce por turbulencia. Ahora es momento de hablar en que punto nos encontramos y los desafíos futuros.

La turbulencia es un fenómeno complejo que se caracteriza por su naturaleza caótica, multi-escala, su alta tasa de disipación de energía y por ser tridimensional. Comprender la turbulencia

es muy importante en diversos campos para dar soluciones a los problemas actuales, en lo que en ingeniería corresponde, el flujo de líquidos por tuberías es probablemente el problema industrial más básico y es importante estudiarlo ya que gran parte de las pérdidas energéticas vienen de la propia turbulencia. Sin embargo, este caso es uno de los más difíciles de simular, problema que se explicará en la sección 3.1. El objetivo es, por tanto, encontrar un método numérico que converja y calcule con precisión.

Aquí es donde entra en juego la simulación numérica directa (DNS). Es una técnica de simulación que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes completas sin ninguna simplificación. Esto permite una representación muy precisa del comportamiento del flujo turbulento, incluyendo todas las escalas.

En aeronáutica lo ideal sería poder realizar simulaciones DNS tanto de los sistemas (hidráulico, refrigeración, propulsivo) como de la aerodinámica externa, ya que los datos que proporcionarían este tipo de simulaciones permitiría hacer una buena optimización, sobre todo en zonas críticas. El desafío está en que la DNS presenta una alta demanda computacional que aproximadamente crece en un orden de magnitud de Re^3 . Debido a la naturaleza multiescala de la turbulencia se necesitan mallas extremadamente finas para capturar las escalas más pequeñas donde se produce la disipación de energía. Esto significa que requiere enormes cantidades de memoria y poder computacional.

Para hacer frente a este desafío se necesita el uso de la supercomputación. Los superordenadores con una capacidad de procesamiento gigante permiten realizar simulaciones DNS de flujos turbulentos a un nivel de detalle imposible de imaginar hasta su aparición en los años 70 con el famoso *Cray-1*. Su uso abre la puerta a la investigación de fenómenos turbulentos más complejos y realistas.

A pesar de los avances en la supercomputación la DNS sigue estando limitada en términos de tamaño de los problemas que puede abordar. Para casos de ingeniería que involucran grandes dimensiones la DNS es computacionalmente imposible. En estos casos los modelos de turbulencia siguen siendo necesarios pero la información obtenida de las simulaciones DNS es imprescindible para mejorar la precisión y el alcance de estos modelos.

Es por eso que se realizan simulaciones DNS de flujos canónicos. Estos flujos son lo suficientemente sencillos para poder realizar este tipo de simulaciones en un periodo y unos costes asumibles y la vez permiten poder entender la propia turbulencia y crear modelos que la intenten reflejar lo más fielmente posible para, posteriormente, utilizar estos modelos en casos de mayor complejidad.

Los flujos canónicos son tres: por una parte son capa límite y canal los cuales debido a las condiciones de contorno no existen en la vida real pero permiten aumentar “fácilmente” el número de Reynolds, por otra parte está la tubería la cual si existe en la vida real sin embargo, ha sido la menos estudiada debido a los errores numéricos que presenta debido a una singularidad que ocurre en el centro de la tubería, tema que se tratará en la sección 3.1

Estas dificultades se van a afrontar en este trabajo, así como una dificultad añadida, aprender Fortran y el estándar de *Message Passing Interface* (MPI), con el que van a poder realizar los cálculos de forma paralela entre los diferentes núcleos del ordenador.

Enumerando los objetivos de este trabajo, son los siguientes:

- Estudio de la memoria para encontrar los problemas del código y declarar toda las variables posibles como memoria dinámica.
- Modificación del código *OpenPipeFlow* para realizar un estudio de las estadísticas, correlaciones, espectros de frecuencia y *turbulent budgets*.
- Creación de subrutinas para guardar datos eficientemente mediante la tecnología HDF5 paralelo.
- Uso del superordenador Sirius de la Universidad Politécnica de Valencia para obtención de resultados de números de *Reynolds* moderadamente altos
- Realización de un estudio de escalado tanto en Sirius como en el superordenador Shaheen III de la universidad *King Abdullah University of Science and Technology* de Arabia Saudí para en un futuro obtener resultados al mayor *Re* posible.
- Creación de código de postproceso en MATLAB para graficar todos los resultados.

Sin embargo, el objetivo final de este proyecto es realizar una simulación con $Re_\tau = 10\,000$, esto es algo muy difícil y carísimo por los siguientes motivos:

- Cada archivo que se usa como copia de seguridad pesa cerca de 25 TB.
- Para manejar la memoria se necesitarán cerca de 100 000 núcleos
- Las horas de cálculo serán como mínimo $2\,000 \cdot 10^6$ CPU-h

2 | Estado del arte

En este capítulo se explicarán los conceptos teóricos de la turbulencia que ayudarán a la comprensión general del trabajo. [2] [3] [4]

Primero una pequeña definición de que es la turbulencia. La turbulencia no es una propiedad de los fluidos sino de los flujos, el cual es caótico y desordenado, caracterizado por cambios rápidos e impredecibles en velocidad y presión. Estos cambios se producen tanto en el tiempo como en el espacio a causa de la interacción entre las fuerzas viscosas e inerciales. La turbulencia permite una mezcla intensa de las partículas de fluido y una disipación de la energía cinética en calor en las escalas mas pequeñas.

2.1. Naturaleza de la turbulencia

Caótica

Un sistema caótico es: no lineal, altamente sensibles a las condiciones iniciales y pequeñas perturbaciones y aunque suene contradictorio, determinista. Esto dificulta enormemente la predicción del comportamiento a largo plazo de un flujo turbulento incluso conociendo las ecuaciones que lo resuelven ya que cualquier fallo en la elección de las condiciones iniciales va a implicar una predicción totalmente distinta a la esperada.

La evolución espacio-temporal del flujo carece de un patrón predecible. Si bien se pueden observar ciertas tendencias y características estadísticas, la naturaleza caótica del flujo impide una buena predicción de su comportamiento a largo plazo si no se conocen exactamente sus condiciones iniciales.

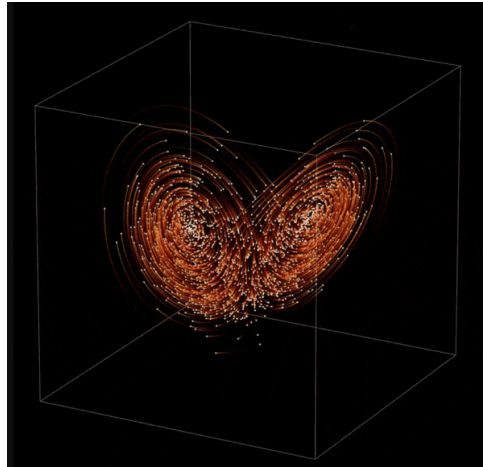


Figura 2.1. Atractor de *Lorentz*: [Wolfram CCommunity](#)

Multiescala

La turbulencia se caracteriza por la presencia de una amplia gama de estructuras y patrones de flujo que ocurren a diferentes escalas espaciales y temporales. Esto significa que los flujos turbulentos presentan comportamientos y características que se desarrollan en múltiples niveles de frecuencia espacial y temporal, desde las grandes estructuras de flujo hasta los pequeños torbellinos en la escala de Kolmogorov

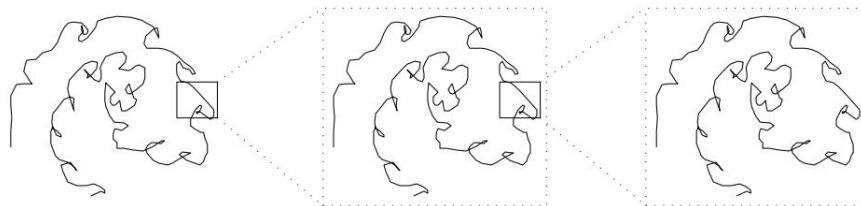


Figura 2.2. Cascada autosimilar de vórtices en un flujo turbulento. Fuente: [1]

vorticidad tridimensional

La turbulencia se caracteriza por la presencia de vorticidad, un fenómeno que no se da en los flujos laminares. Se define como el rotacional del campo vectorial de velocidades, es decir, $\omega = \nabla \times \mathbf{V}$. Si los gradientes de velocidad generan una deformación de un elemento de fluido alineado con la vorticidad (w) entonces la magnitud de la vorticidad aumenta proporcionalmente. Este fenómeno es conocido como estiramiento de vórtices.

En flujos bidimensionales el término de estiramiento de vórtices se anula. La única componente no nula de la vorticidad se convierte en una constante. La ausencia de estiramiento de vórtices hace que la turbulencia bidimensional sea cualitativamente diferente de la turbulencia tridimensional.

Disipativa

La energía es inyectada al sistema a través de la escala mas grande(escala integral) debido a efectos viscosos, esta energía se transmite a escalas mas pequeñas lo que se conoce como cascada de energía. una vez que se llega a la escala de Kolmogorov(escala disipativa), se transforma en

calor. Este flujo de energía es un proceso muy importante en los flujos turbulentos.

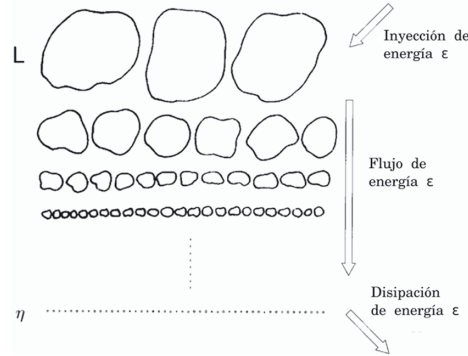


Figura 2.3. Descripción de Richardson de la turbulencia. Fuente: [5]

2.2. Modelos de turbulencia

Como se ha comentado en el capítulo 1, a través de la información obtenida mediante simulaciones DNS se pueden crear modelos de turbulencia. Estos modelos permiten estudiar la turbulencia de una forma simplificada y poder utilizarse en geometrías más complejas y sin la necesidad de tener un poder computacional desorbitado, principalmente son:

Reynolds averaged Navier-Stokes equations(RANS)

El método RANS es una técnica de modelado de la turbulencia que se basa en promediar las ecuaciones de Navier-Stokes en el tiempo. En el que en lugar de resolver directamente las ecuaciones para el campo de velocidades instantáneo resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas en el tiempo y después utiliza un modelo de turbulencia para representar los efectos turbulentos.

Este modelo es muy útil en ingeniería ya que disminuye drásticamente el coste computacional permitiendo poder usar un método de volúmenes finitos y poder mallar geometrías complejas.

Los modelos $k - \epsilon$ y $k - \omega$ son ejemplos típicos que describen la transferencia de energía y la disipación en turbulencia, estas nuevas ecuaciones se resuelven en conjunto con las de conservación de masa y cantidad de movimiento.

En este caso las ecuaciones de Reynolds se resuelven para el campo de velocidades medio. El tensor de Reynolds el cual aparece como incógnita tiene que ser modelado a través de la hipótesis de viscosidad turbulenta.

El tensor de Reynolds puede calcularse como:

$$\langle u_i u_j \rangle = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_T \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

Conociendo el campo de viscosidad turbulenta $\nu_T(x, t)$ la ecuación anterior proporciona un buen cierre para las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales entonces tienen la misma forma que las ecuaciones de Navier-Stokes. En caso de que se pueda aceptar esta hipótesis como aceptable para el flujo de estudio entonces solo queda conocer el valor de $\nu_T(x, t)$.

Large eddy simulation(LES)

En este modelo los movimientos turbulentos tridimensionales no estacionarios de mayor escala se calculan directamente, mientras que las escalas más pequeñas se modelan. El coste computacional está en un punto intermedio entre DNS y RANS.

Debido a que las grandes escalas que tienen un movimiento no estacionario se calculan explícitamente se espera que LES sea más preciso y confiable que los modelos RANS para flujos en los que las grandes escalas que varían con el tiempo sean significativas, como el flujo sobre cuerpos romos, que involucra la separación no estacionaria y el desprendimiento de vórtices.

Como se ha comentado en el capítulo 1, las simulaciones DNS solo se pueden aplicar en geometrías sencillas y de pequeño tamaño debido a la necesidad de resolver las escalas mas pequeñas. Sin embargo, en el LES únicamente la dinámica de las grandes escalas es calculada, la influencia de las pequeñas escalas son representadas por modelos simples, por lo que el problema del coste computacional se evita en gran medida.

Los principales pasos de un modelo LES, son los siguientes:

1. Se realiza una operación de filtrado para descomponer la velocidad $\mathbf{U}(x, t)$ en la suma las componente filtrada(o calculada) $\bar{\mathbf{U}}(x, t)$ y una componente residual(o sub escala) $\mathbf{u}(x, t)$. El campo de velocidades filtrados, representa el movimiento de los vórtices mas grandes.
2. Las ecuaciones de la evolución del campo de velocidades filtrado son obtenidas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esas ecuaciones están en la forma estándar, con la ecuación de momento conteniendo el tensor de esfuerzo residual que surge a partir de los movimientos de los residuales.
3. El cierre del problema se obtiene modelando el tensor de esfuerzos residual.
4. Las ecuaciones del campo de velocidades filtrado se resuelven numéricamente, dando

Resumiendo, los modelos anteriores y la DNS se pueden entender mejor mediante el espectro de energía.

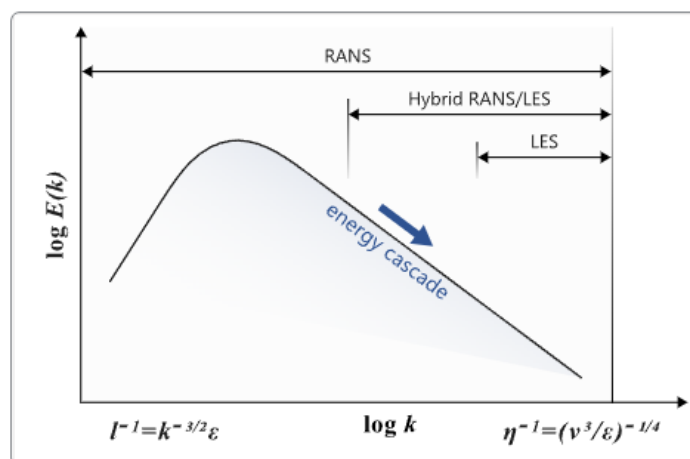


Figura 2.4. Espectro de energía turbulenta.Fuente: [Altair Acusolve](#)

Se puede apreciar como el modelo de turbulencia más sencillo es el RANS, el cual modela todas las escalas de la turbulencia obteniendo menos información pero reduciendo considerablemente el coste computacional.

El modelo LES, el cual resuelve las escalas mas grandes y modela las más pequeñas y mas costosas.

La simulación DNS, resuelve completamente todas las escalas teniendo un alto coste computacional y siendo solo útil para geometrías sencillas.

Si se quiere ver de otra forma, será mucho más fácil con la siguiente imagen.

En la que en el modelo RANS se obtiene un resultado mediado en el tiempo, con el modelo LES solo se aprecian las grandes estructuras y mediante una simulación DNS se pueden ver todas las escalas.

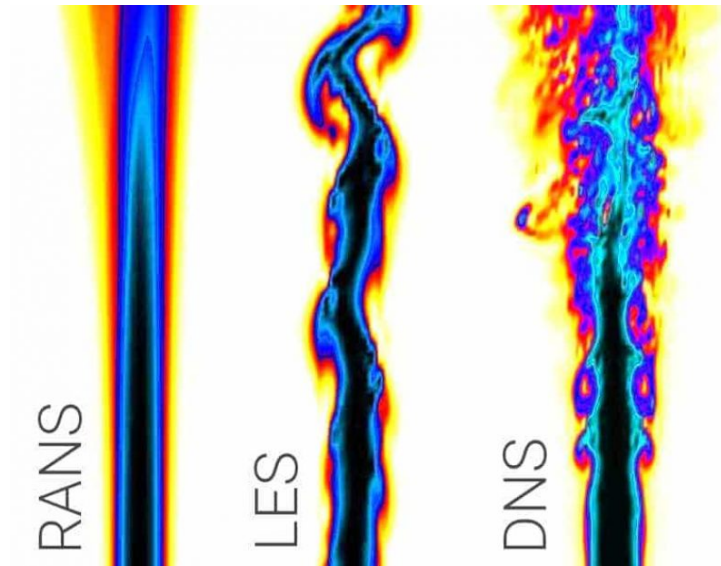


Figura 2.5. Diferencia entre modelos de CFD en un flujon de cortadura libre. Fuente: [Ideal Simulations](#)

2.3. Escalabilidad

Como ya se ha ido explicando el estudio de la turbulencia y en lo que a este trabajo se refiere, el estudio de la turbulencia en tuberías, es un campo importante tanto a nivel industrial como aeronáutico.

En un avión existen diferentes casos de turbulencia que hay que estudiar para realizar un buen diseño. Conocer los fenómenos turbulentos que ocurren en cada punto es fundamental, sin embargo, realizar una DNS en una avión es algo totalmente imposible.

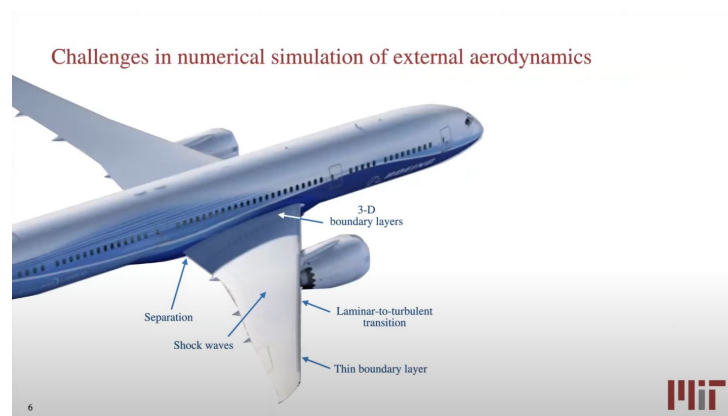


Figura 2.6. Tipos de turbulencia en un avión. Fuente: [Isaac Newton Institute](#)

Se va a mostrar una pequeña aproximación, que se encuentra en [2] para poder entender el orden de magnitud del que se está hablando.

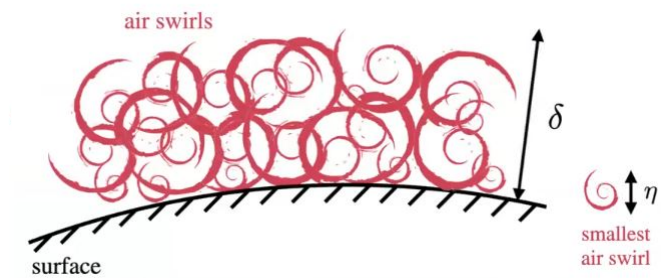


Figura 2.7. Vórtices en un perfil aerodinámico. Fuente: [Isaac Newton Institute](#)

Tomando un avión de pasajeros estándar que vuele a velocidad de crucero y a una altura de 10 km, se puede estimar el número de Reynolds del perfil alar.

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot c}{\mu} = 110\,000\,000 \quad (2.2)$$

El grosor de una capa límite turbulenta se puede aproximar de esta forma,

$$\delta \approx \frac{0,16}{Re^{1/7}} \approx 11,36 \text{ mm} \quad (2.3)$$

Ahora, para poder calcular el orden de magnitud de la escala de Kolmogorov, se necesitan unas aproximaciones encontradas en [2].

$$\frac{L}{\eta} \sim Re^{3/4} \rightarrow \eta \sim 7,45 \text{ } \mu\text{m} \quad (2.4)$$

La orden de magnitud que separa la escala más pequeña con la capa límite es,

$$\frac{\delta}{\eta} \sim 10^4 \quad (2.5)$$

Sin embargo, para realizar la simulación el dominio tiene que ser mucho mayor a la capa límite para obtener unos buenos resultados, así que conociendo la escala de Kolmogorov se puede estimar el número de celdas que se necesitarían para resolver una simulación de un avión completo.

$$N_{\text{puntos}} \sim \iiint_V \frac{dV}{\eta^3} \approx 4 \cdot 10^{20} \quad (2.6)$$

En cuanto almacenamiento de la memoria RAM, normalmente para este tipo de simulaciones es necesario doble precisión así que cada número ocupará 8 *bytes*, además, en cuanto a la multitud de variables que habría que guardar en cada instante temporal, sería necesario multiplicar por 13.5 en un código totalmente optimizado de un flujo canónico, para casos como éste sería mas preciso multiplicar por 20. Con todo esto se puede estimar que se necesitarían 640 millones de *Petabytes* de memoria RAM máxima y teniendo en cuenta que actualmente el almacenamiento mundial es de 7 millones de *Petabytes*, por esta parte es algo imposible.

Hasta ahora solo se ha hablado de un paso temporal, así que ahora es momento de estimar el número de pasos temporales necesarios para completar una simulación de estas dimensiones y cuanto tiempo de calculo se necesitaría.

Para ser preciso, es necesario que una partícula no recorra más de una celda en un instante temporal, para ello hay que cumplir que Δt sea inferior al número de Courant.

$$\frac{k^{1/2} \Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{20} \quad (2.7)$$

A principios de siglo, Pope [2] estimó que la duración de una simulación debería ser, cuatro veces la escala de tiempo turbulenta, $\tau = k/\epsilon$. Sin embargo, a lo largo de estos años se ha ido comprobando que no es del todo correcto, un valor más razonable sería de 10 veces la escala de tiempo turbulenta por lo que el número de pasos necesarios serían,

$$M = \frac{10\tau}{\Delta t} = 200 \frac{L}{\Delta x} = \frac{300}{\pi} \left(\frac{L}{\eta} \right) \sim \frac{120}{\pi} Re^{3/4} \approx 4,1 \cdot 10^7 \quad (2.8)$$

El número de operaciones de punto flotante necesarias para realizar la simulación por el número de modos y pasos temporales es de $N^3 M = 1,64 \cdot 10^{28}$

Suponiendo que hay que realizar 1000 operaciones por modo y paso temporal y se utilizara el mayores superordenador del mundo, se tendría una potencia de calculo de 1,2 *EFLOPS*, es decir $1,2 \cdot 10^{18}$ operaciones por segundo, se tardaría en torno a 90 *h* por iteración y para realizar la simulación entera se demoraría un poco más de 420 000 años.

3 | Marco teórico

3.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones no lineales que estudian el comportamiento de un fluido, en este caso incompresible y viscoso. Debido al dominio que se va a estudiar hay que utilizar las ecuaciones en coordenadas cilíndricas. [2] [3].

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & r \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = \\ & -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) - \frac{U_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & r \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) = \\ & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right) - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & r \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = \\ & -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se ha puesto de color rojo el radio en los términos que esta dividiendo, esto es debido a que estas ecuaciones en coordenadas cilíndricas presentan una mayor dificultad que las que se resuelven en coordenadas cartesianas.

Se debe a que en el centro de la tubería cuando r tiende a cero se produce una indeterminación del tipo $\frac{1}{0}$

Una forma de solventar en cierta manera este problema es aumentar la discretización cerca del centro tendiendo a cero Δr . Como se verá en la figura 4.1

La mejor forma de estudiar la turbulencia es tomándola como un proceso aleatorio al que hay que realizar un estudio estadístico, para ello hay que modificar las ecuaciones para estudiar estas nuevas variables. Se utiliza la descomposición de *Reynolds*, la cual se basa en descomponer la velocidad instantánea en velocidad media y turbulenta. [2]

$$\mathbf{U}(x, t) = \langle \mathbf{U}(x, t) \rangle + \mathbf{u}(x, t) \quad (3.5)$$

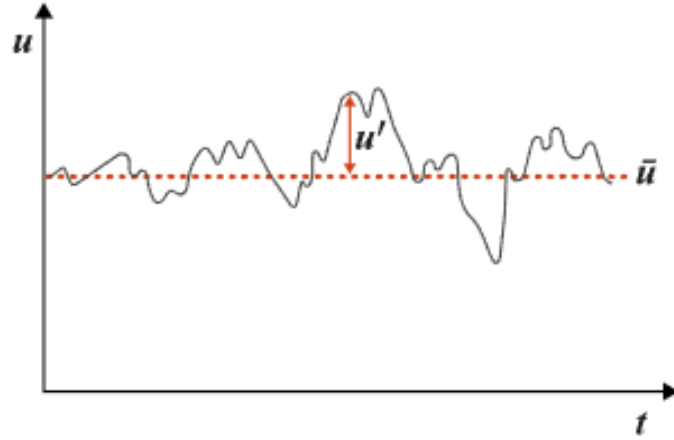


Figura 3.1. Descomposición de Reynolds. Siendo, u' la velocidad turbulenta, u la velocidad instantánea y \bar{u} la velocidad media. Fuente: [Altair Acusolve](#)

Con lo que despejando la velocidad turbulenta:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{U}(x, t) - \langle \mathbf{U}(x, t) \rangle \quad (3.6)$$

Si se toma la ecuación de continuidad. Ecuación (3.2)

$$\nabla \cdot \mathbf{U}(x, t) = \nabla \cdot (\langle \mathbf{U}(x, t) \rangle + \mathbf{u}(x, t)) = 0 \quad (3.7)$$

Tomando la ecuación de conservación del momento. Ecuación (3.2), se complica la descomposición debido al termino convectivo no lineal

$$\frac{DU_j}{Dt} = \frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i U_j) \quad (3.8)$$

Así que el valor medio es,

$$\left\langle \frac{DU_j}{Dt} \right\rangle = \frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle U_i U_j \rangle \quad (3.9)$$

Ahora es turno de realizar la descomposición para el termino no lineal $(U_i U_j)$.

$$\begin{aligned} \langle U_i U_j \rangle &= \langle (\langle U_i \rangle + u_i)(\langle U_j \rangle + u_j) \rangle \\ &= \langle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + u_i \langle U_j \rangle + u_j \langle U_i \rangle + u_i u_j \rangle \\ &= \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle u_i u_j \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Al final de la sección se hablará sobre la covarianza $\langle u_i u_j \rangle$, llamada tensor de *Reynolds*. Juntando las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{DU_j}{Dt} \right\rangle &= \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle u_i u_j \rangle) \\
 &= \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_j \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Según la ecuación (3.7), la derivada de una velocidad media es cero, así que finalmente la media de una derivada material de una variable cualquiera se puede expresar como,

$$\left\langle \frac{D\phi}{Dt} \right\rangle = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \langle \mathbf{U} \rangle \cdot \nabla \tag{3.12}$$

El tensor de *Reynolds*, forma parte del problema de cierre de las ecuaciones de *Navier-Stokes*, el cual se necesita conocer o modelar.

$$R_{ij} = \langle u_i u_j \rangle = \begin{pmatrix} \langle u^2 \rangle & \langle uv \rangle & \langle uw \rangle \\ \langle uv \rangle & \langle v^2 \rangle & \langle vw \rangle \\ \langle uw \rangle & \langle vw \rangle & \langle w^2 \rangle \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

3.2. Conceptos clave

A continuación, se mostrarán diferentes parámetros interesantes para el estudio de la turbulencia.

Número de Reynolds medio

$$Re_b = \frac{R\rho U_b}{\mu} \tag{3.14}$$

Siendo U_b , la velocidad axial media del fluido.

Velocidad de fricción

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \tag{3.15}$$

Velocidad característica en turbulencia, es una forma de expresar el esfuerzo cortante en unidades de velocidad. Es una herramienta útil para adimensionalizar otras variables.

Eddy turnover time

Tiempo característico, el cual representa el tiempo que tarda un vórtice de gran escala en dar una vuelta completa sobre si mismo.

$$ETT = \Delta t \cdot Re_\tau \tag{3.16}$$

Wash out time

Tiempo característico conocido como periodo de limpieza, es decir cuanto tiempo tarda una partícula en recorrer axialmente todo el dominio completamente.

$$W_o = \Delta t \cdot \frac{U_{cl}}{L_z} \quad (3.17)$$

Siendo U_{cl} la velocidad en el centro de la tubería y L_z su longitud características.

Longitud adimensional

Parámetro adimensional que caracteriza la longitud de la tubería para el caso de condiciones periódicas.

$$\alpha = \frac{2\pi}{L_z} \quad (3.18)$$

Adimensionalización “en masas”

Para poder comparar todas las magnitudes importantes hay que adimensionalizarlas. Estas magnitudes se multiplican por el Reynolds de fricción en el caso de distancias y en el caso de velocidades se dividen por la velocidad de fricción.

3.3. Modelo matemático

El código *OpenPipeflows* [6] utiliza un modelo matemático basado en las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles, en la que se desprecian las fuerzas másicas y se toma flujo constante a través de una tubería de sección constante.

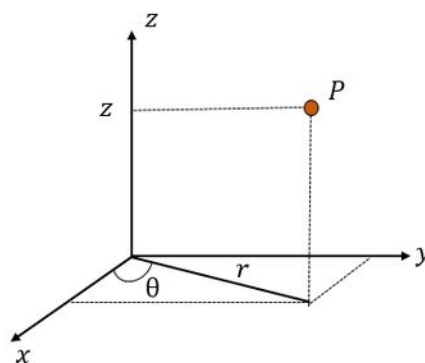


Figura 3.2. Coordenadas cilíndricas.

Se adimensionalizan las variables del problema utilizando el radio de la tubería, la velocidad del flujo en el centro de la tubería y el tiempo característico. Por tanto las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \frac{4}{Re_m}(1 + \beta)\hat{z} + \frac{1}{Re_m}\nabla^2 \mathbf{v} \end{cases} \quad (3.19)$$

además de,

$$(1 + \beta) = \frac{\langle dp/dz \rangle}{dP/dz} \quad (3.20)$$

El término $\frac{dp}{dz}$ hace referencia al gradiente medio de presión observado y $\frac{dP}{dz}$ al gradiente de presión laminar.

Hay que imponer el siguiente perfil de velocidades para el caso de estudio en el que se tiene un flujo constante en la dirección axial.

$$W(r) = 1 - r^2 \quad (3.21)$$

Por lo que el campo de velocidades tendrá la siguiente forma $\mathbf{v} = (U, V, W + W(r))$

Con todo esto, \mathbf{v} se puede escribir como $\mathbf{v} = W(r)\hat{z} + \mathbf{v}'$ y tomando la la forma rotacional de la ecuación (3.19) se tiene la ecuación para \mathbf{v}' y \mathbf{p}'

$$(\partial_t - \frac{1}{Re_m}\nabla^2)\mathbf{v}' = \mathbf{v}' \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}') - \frac{dW(r)}{dr}v'_r\hat{z} - W\partial_z\mathbf{v}' + \frac{4\beta}{Re_m}\hat{z} - \nabla p' \quad (3.22)$$

En el lado izquierdo de esta ecuación, el término laplaciano acopla el flujo en dirección $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$. para poder desacoplar las velocidades en U y V , hay que aplicar una descomposición de Fourier, utilizando el siguiente cambio de variable.

$$U_{\pm} = U \pm iV \quad (3.23)$$

Finalmente, se obtiene que,

$$U = \frac{1}{2}(U_+ + U_-)V = -\frac{i}{2}(U_+ - U_-) \quad (3.24)$$

Obteniendo las velocidades desacopladas para las tres componentes del flujo.

$$\begin{cases} (\partial_t + \nabla_{\pm}^2)U_{\pm} = N_{\pm} - (\nabla p)_{\pm} \\ (\partial_t + \nabla^2)W = N_z - (\nabla p)_z \end{cases} \quad (3.25)$$

Donde, $\nabla_{\pm}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \pm \frac{2i}{r^2}\partial_{\theta}$ y el término N son los términos no lineales agrupados. Para simplificar aún más el sistema de ecuaciones, se agrupan los términos lineales y no lineales. Luego, se aplica la divergencia a ambos lados de las ecuaciones. Este proceso nos lleva a una ecuación que se asemeja a la ecuación de *Poisson* para la presión (PPE). Esta ecuación es una herramienta

fundamental en la mecánica de fluidos computacional, especialmente para resolver problemas de flujo incompresible.

Un aspecto interesante de este enfoque es que la condición de divergencia nula del campo de velocidades $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, que representa la incompresibilidad del fluido, se sustituye por la PPE. A pesar de este cambio, la condición de flujo incompresible se mantiene garantizada a través de la PPE.

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} = L\mathbf{v} + \mathbf{N} - \nabla P \\ \nabla^2 P = \nabla \cdot \mathbf{N} \end{cases} \quad (3.26)$$

En esta ecuación, L representa un operador lineal que actúa sobre el campo de velocidades mientras que N , es un vector que agrupa todos los términos no lineales. Esta representación compacta simplifica la notación y facilita la manipulación de las ecuaciones.

Es importante hablar de las condiciones de contorno, en la pared de la tubería se aplica la condición de no deslizamiento lo que significa que la velocidad del fluido es cero $v = 0$. Explícitamente no hay ninguna condición de contorno para la presión, sin embargo, la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ debe cumplirse en todo el dominio de cálculo y por tanto también en la frontera. Es importante destacar que existen condiciones periódicas como se podrá comprobar en el apartado 3.5

3.4. Resolución de la PPE

$$\begin{cases} X\mathbf{v}^{q+1} = Y\mathbf{v}^q + \mathbf{N}^{q+1/2} - \nabla P \\ \nabla^2 P = \nabla \cdot (Y\mathbf{v}^q + \mathbf{N}^{q+1/2}) \end{cases} \quad (3.27)$$

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones se discretiza el dominio espacial de forma que se obtiene un conjunto de problemas unidimensionales en la dirección radial. Para ello se emplea un método numérico pseudoespectral. Este método combina la descomposición en modos de Fourier en las direcciones azimutal y axial, que son periódicas, con esquemas de diferencias finitas de alto orden en la dirección radial.

Gracias a la descomposición en modos de Fourier el problema tridimensional se reduce a un conjunto de problemas unidimensionales más sencillos distribuidos a lo largo de la coordenada radial, de esta forma son más fáciles de resolver numéricamente. El sistema de ecuaciones resultante tras la discretización y la aplicación del método pseudoespectral se presenta a continuación.

$$\begin{cases} X\bar{\mathbf{v}}^{q+1} = Y\bar{\mathbf{v}}^q + \mathbf{N}^{q+1/2} - \nabla P \\ \nabla^2 P = \nabla \cdot (Y\bar{\mathbf{v}}^q + \mathbf{N}^{q+1/2}) \end{cases} \quad (3.28)$$

Siendo q el instante temporal t_q y \mathbf{X} e \mathbf{Y} las matrices obtenidas de una discretización temporal implícita para los términos viscosos.

En primer lugar hay que resolver el siguiente sistema para encontrar la "bulk solution" $\{\bar{\mathbf{v}}, \bar{P}\}$

$$\begin{cases} X\bar{\mathbf{v}}^{q+1} = Y\bar{\mathbf{v}}^q + \mathbf{N}^{q+1/2} - \nabla P \\ \nabla^2 P = \nabla \cdot (Y\bar{\mathbf{v}}^q + \mathbf{N}^{q+1/2}) \end{cases} \quad (3.29)$$

Con la condición de contorno $\bar{\mathbf{v}} = 0$ y $\partial_r \bar{\mathbf{P}} = 0$

A esta solución aproximada hay que añadir una serie de términos que corrijan la solución permitiendo obtener la solución exacta en el siguiente instante temporal, $\bar{\mathbf{v}}^{q+1}$

$$\mathbf{v}^{q+1} = \bar{\mathbf{v}} + 4 \sum_{j=1}^4 a_j \mathbf{v}'_j \quad (3.30)$$

Para calcular el término \mathbf{v}'_j de la ecuación anterior es necesario el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} Xv' = -\nabla P' \\ \nabla^2 P' = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Tomando las condiciones de contorno $\mathbf{v}' = 0$ y $\partial_t \mathbf{P}' = 0$ en $r = R$

y,

$$Xv' = 0 \quad (3.32)$$

Tomando las condiciones de contorno $U'_\pm = 0$, $U'_z = i$ en $r = R$

La solución \mathbf{v}'_1 obtenida de la Ecuación (3.31) se puede añadir a $\bar{\mathbf{v}}$ sin alterar el lado derecho de la Ecuación (3.29), pero sí corrige el valor de \mathbf{v} para cumplir las condiciones de contorno a través de la Ecuación (3.31). De manera similar, la Ecuación (3.32) proporciona los valores de \mathbf{u}_j para $j = 2, 3, 4$, que se obtienen al aplicar las condiciones de contorno a \mathbf{U}'_\pm y \mathbf{U}'_z , respectivamente. Finalmente, la Ecuación (3.30) establece un nuevo sistema de ecuaciones para las incógnitas a_j , las cuales deben satisfacer las condiciones de contorno $\mathbf{v}^{q+1} = 0$ y la condición de incompresibilidad del fluido $\nabla \cdot \mathbf{v}^{q+1} = 0$.

Se define $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ como un vector de cuatro componentes que representa estas últimas cuatro condiciones de contorno y la de incompresibilidad. La característica clave de $g(v)$ es que se anula cuando se cumplen dichas condiciones. Si sustituimos esta definición en la Ecuación (3.30), obtenemos la siguiente expresión.

$$A\mathbf{a} = -g(\bar{\mathbf{v}}) \quad (3.33)$$

Donde A es una matriz 4x4 que depende de $g(\mathbf{v}')$, y \mathbf{a} es el vector que contiene los cuatro valores de a_j .

En resumen, al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de a_j , los cuales nos permiten calcular \mathbf{v}^{q+1} a través de la Ecuación (3.30)

una vez que se han resuelto todos los sistemas de ecuaciones anteriores, se puede calcular la presión en el espacio físico permitiendo obtener esta nueva variable para el estudio de las estadísticas del problema.

Teniendo \tilde{P} obtenida a partir de la "bulk solution" se puede reconstruir el campo de presiones en el espacio de Fourier (\bar{P})

$$\tilde{P} = \bar{P} + a_1 P' \quad (3.34)$$

Finalmente, se aplica la transformada inversa de Fourier a \tilde{P} para obtener la solución en el espacio físico. Finalmente se resta la presión dinámica del flujo de la solución obtenida:

$$P = \tilde{P} - \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \quad (3.35)$$

3.5. Método numérico

Ahora se describen las herramientas matemáticas que permiten calcular una solución numérica para las ecuaciones presentadas en la sección 3.3. Para empezar es necesario conocer la geometría del problema, la cual en este caso es un cilindro. Para facilitar la implementación del algoritmo de resolución, el dominio de cálculo se representa utilizando un sistema de coordenadas cilíndricas con el eje longitudinal como centro. Debido a la naturaleza cilíndrica del dominio es importante tener en cuenta los operadores matemáticos de las coordenadas cilíndricas. Como ya se mencionó en la sección 3.4, se utilizan métodos pseudoespectrales para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones. [2] [6]

Los métodos espectrales son técnicas computacionales que aproximan soluciones numéricas, por ejemplo de problemas matriciales como el que se analiza en este trabajo, mediante la aplicación de técnicas basadas en el análisis espectral. En este caso particular debido a que existen dos direcciones del dominio con condiciones de contorno periódicas se utiliza la descomposición modal de Fourier. Esta técnica permite transformar un problema complejo con ecuaciones acopladas en un conjunto de problemas de fácil resolución.

La principal diferencia entre los métodos espectrales y los métodos numéricos tradicionales como pueden ser los métodos de diferencias finitas o los métodos de elementos finitos, radica en que los métodos espectrales se enfocan en el comportamiento del espectro de la matriz de soluciones. Este espectro representa la descomposición de las componentes de la velocidad en una serie de Fourier, en otras palabras, los métodos espectrales estudian cómo se distribuyen las frecuencias de las soluciones en el dominio.

De las tres dimensiones principales del problema, solo la axial y la azimutal presentan condiciones periódicas. Por lo tanto no es posible aplicar un método espectral en la dirección radial. En su lugar se utilizan esquemas de diferencias finitas de alto orden. Es por esta razón que el método se llama pseudoespectral.

Las direcciones θ y z se descomponen en $M + 1$ y $2K + a$ modos. Siendo los modos M los que representan la dirección azimutal y es de tamaño $[0, M]$ y los modos K representando la dirección axial y es de tamaño $[-K, K]$

$$A(r, \theta, z) = \sum_{|k| < K} \sum_{|m| < M} A_{km} e^{i(\alpha kz + m\theta)} \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.36)$$

Este proceso nos lleva a un conjunto de problemas distribuidos en la dirección radial. Cada uno de estos problemas representa el problema original, pero desacoplado en las direcciones axial y azimutal. Añadir que el algoritmo utilizado en este código se basa en [7] y [8]

3.6. Ley de pared

Existen diferentes regiones de la pared en las cuales hay diferentes propiedades, son las siguientes: [2]

Región	Posición	Propiedades
Capa interna	$y/\delta < 0,1$	Determinado por u_τ y y^+
Región viscosa	$y^+ < 50$	la contribución viscosa al esfuerzo cortante es importante
Subcapa viscosa	$y^+ < 5$	El tensor de Reynolds es despreciable comparado con los esfuerzos viscosos
Capa externa	$y^+ > 50$	Efectos viscosos en u_z son despreciables
Región de superposición	$y^+ > 50, y/\delta < 0,1$	Región entre la capa interna y capa externa, a alto numero de Reynolds
Región de ley logarítmica	$y^+ > 30, y/\delta < 0,3$	Se cumple la ley logarítmica
Capa de amortiguación	$5 < y^+ < 30$	Región entre subcapa viscosa y la región de ley logarítmica

Tabla 3.1. Regiones de pared y sus propiedades

De todas las regiones, solo existen dos capas que pueden ser modeladas, la subcapa viscosa y la región logarítmica.

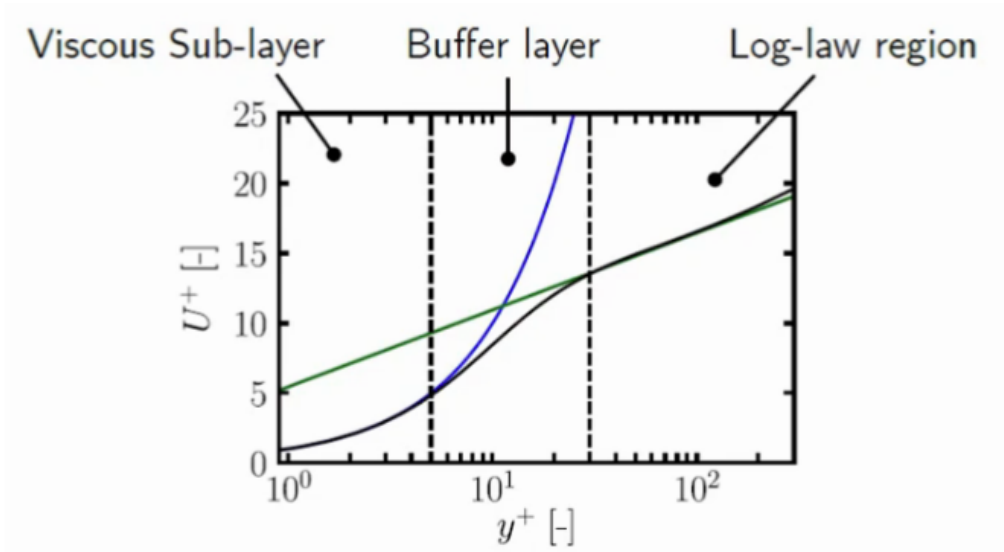


Figura 3.3. leyes de pared. Fuente: [Fluid Mechanics 101](#)

De acuerdo con lo que dice [2], la subcapa viscosa se puede modelar mediante una función lineal.

$$\langle Uz \rangle^+ = y^+ \quad (3.37)$$

y la región logarítmica mediante la siguiente función.

$$\langle Uz \rangle^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + C^+ \quad (3.38)$$

Siendo k la constante de *Von kármán* y C^+ una constante

La capa de amortiguamiento, es la transición entre ambas y no se conoce una ley que la modele claramente.

3.7. Turbulent Budgets

En el apartado 5.3, se estudiarán los resultados de resolver las ecuaciones de conservación de energía cinética turbulenta.

Son un conjunto de ecuaciones que describen cómo se produce, se transfiere y se disipa la energía cinética turbulenta en un flujo. Estas ecuaciones son fundamentales para comprender y modelar la turbulencia.

3.7.1. Energía cinética turbulenta

La contribución total del tensor de Reynolds en generar energía (TKE) cinética turbulenta se estudiará en esta sección. La ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta es [9]:

$$\begin{aligned}
 C_k &= - \left\{ \overline{U_z} \frac{\partial k}{\partial x} + \overline{V_r} \frac{\partial k}{\partial r} - \overline{V_\theta} \frac{\overline{v_\theta v_r}}{r} + \overline{V_r} \frac{\overline{v_\theta^2}}{r} \right\} \\
 D_k^P &= - \left\{ \frac{\partial \overline{p u_z}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{p v_r}}{\partial r} \right\} \\
 D_k^T &= - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \overline{u_z q^2}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{v_r q^2}}{\partial r} \right\} \\
 D_k^\nu &= \frac{1}{Re_b} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_z^2}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{v_r v_r}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{\partial \overline{u_z v_r}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{v_r^2}}{\partial r} - \frac{\overline{v_\theta^2}}{r} \right) \right\} \\
 P_k &= - \overline{u_z^2} \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial x} - \overline{u_z v_r} \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial r} - \overline{u_z v_r} \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial x} - \overline{v_r^2} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial r} - \overline{u_z v_\theta} \frac{\partial \overline{V_\theta}}{\partial x} - \overline{v_r v_\theta} \frac{\partial \overline{V_\theta}}{\partial r} \\
 \epsilon_k &= - \frac{1}{Re_b} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 - 2 \frac{v_r^2}{r^2} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{Re_b} \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Siendo $k = \overline{q^2}/2 = (\overline{u_z^2} + \overline{v_\theta^2} + \overline{v_r^2})/2$

Una forma de validad es sumar cada término, esta suma debe dar cero. Obviamente esto nunca va a ocurrir porque existen errores numéricos en la simulación.

$$0 = C_k + D_k^P + D_k^T + D_k^\nu + P_k + \epsilon_k \tag{3.40}$$

3.7.2. Tensor normal de Reynolds

La ecuación de transporte para el primer término de la traza del tensor de Reynolds $\overline{u u}$ es dada por [9]:

$$\begin{aligned}
 C_{uu} &= - \left\{ \overline{U_z} \frac{\partial \overline{u_z^2}}{\partial x} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{u_z^2}}{\partial r} \right\} \\
 \Pi_{uu} &= 2p \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} \\
 D_{uu}^P &= -2 \frac{\partial \overline{p u_z}}{\partial x} \\
 D_{uu}^T &= - \frac{\partial \overline{u_z^3}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{u_z^2 v_r}}{\partial r} \\
 D_{uu}^\nu &= \frac{1}{Re_b} \left\{ \frac{\partial^2 \overline{u_z^2}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{u_z^2}}{\partial r} \right) \right\} \\
 P_{uu} &= -2 \overline{u_z^2} \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial x} - 2 \overline{u_z v_r} \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial r} \\
 \epsilon_{uu} &= - \frac{2}{Re_b} \left\{ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

La ecuación de transporte para el segundo término de la traza del tensor de Reynolds $\overline{v_r v_r}$ es dada por [9]:

$$\begin{aligned}
 C_{v_\theta v_\theta} &= - \left\{ \overline{U_z} \frac{\partial \overline{v_\theta^2}}{\partial x} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{v_\theta^2}}{\partial r} + 2 \overline{V_r} \frac{\overline{v_\theta^2}}{r} \right\} \\
 \Pi_{v_\theta v_\theta} &= \frac{2}{r} \overline{p} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
 D_{v_\theta v_\theta}^P &= 0 \\
 D_{v_\theta v_\theta}^T &= - \frac{\partial \overline{u_z v_\theta^2}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{r v_r v_\theta^2}}{\partial r} - 2 \frac{\overline{v_r v_\theta^2}}{r} \\
 D_{v_\theta v_\theta}^\nu &= \frac{1}{Re_b} \left\{ \frac{\partial^2 \overline{v_\theta^2}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{v_\theta^2}}{\partial r} \right) - 2 \left(\frac{\overline{v_\theta^2}}{r^2} - \frac{\overline{v_r^2}}{r^2} \right) \right\} \\
 P_{v_\theta v_\theta} &= -2 \overline{u_z v_\theta} \frac{\partial \overline{V_\theta}}{\partial x} - 2 \overline{v_r v_\theta} \frac{\partial \overline{V_\theta}}{\partial r} - 2 \overline{v_r v_\theta} \frac{\overline{V_\theta}}{r} \\
 \epsilon_{v_\theta v_\theta} &= - \frac{2}{Re_b} \left\{ \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\overline{v_r}}{r} \right)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

La ecuación de transporte para el segundo término de la traza del tensor de Reynolds $\overline{v_\theta v_\theta}$ es dada por [9]:

$$\begin{aligned}
 C_{v_r v_r} &= - \left\{ \overline{U_z} \frac{\partial \overline{v_r^2}}{\partial x} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{v_r^2}}{\partial r} - 2 \overline{V_\theta} \frac{\overline{v_r v_\theta}}{r} \right\} \\
 \Pi_{v_r v_r} &= 2 \overline{p} \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
 D_{v_r v_r}^P &= \frac{2}{r} \frac{\partial \overline{r p v_r}}{\partial r} \\
 D_{v_r v_r}^T &= - \frac{\partial \overline{u_z v_r^2}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{r v_r^3}}{\partial r} + 2 \frac{\overline{v_r v_\theta^2}}{r} \\
 D_{v_r v_r}^\nu &= \frac{1}{Re_b} \left\{ \frac{\partial^2 \overline{v_r^2}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{v_r^2}}{\partial r} \right) + 2 \frac{1}{r^2} (\overline{v_\theta^2} - \overline{v_r^2}) \right\} \\
 P_{v_r v_r} &= -2 \overline{u_z v_r} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial x} - 2 \overline{v_r^2} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial r} + 2 \overline{v_r v_\theta} \frac{\overline{V_\theta}}{r} \\
 \epsilon_{v_r v_r} &= - \frac{2}{Re_b} \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\overline{v_\theta}}{r} \right)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Estas ecuaciones explican que ocurre con la energía cinética turbulenta, en este caso promedias en el tiempo, pero falta explicar el significado de cada uno de los términos [2] [10]. Se pueden dividir en dos categorías:

Trabajos de transporte, como su nombre indica están involucrados en el transporte de la TKE en el dominio y entre términos del tensor de Reynolds

- **Convección:** Transporte de la TKE gracias a la velocidad media del flujo, no debido a la turbulencia.

- **Difusión de presión:** Representa el mecanismo de las fluctuaciones de presión para redistribuir la TKE desde lugares donde la energía es recientemente generada a sitios donde hay una falta de esa TKE, es decir ayuda al campo turbulento a ser mas homogéneo.
- **deformación de presión:** Es el responsable de redistribuir la TKE entre las distintas componentes del tensor normal de Reynolds, es decir, transfiere energía entre las distintas componentes turbulentas, por lo que es el primer mecanismo para alcanzar un proceso isótropo desde una turbulencia anisótropa normalmente vista en flujos cortantes turbulentos.
- **Difusión turbulenta:** Mecanismo para redistribuir la energía turbulenta en el dominio mediante la propia turbulencia, es decir, los vórtices aceleran el proceso de mezcla del campo fluido.
- **Difusión viscosa:** Mecanismo para redistribuir la TKE mediante la viscosidad del fluido con la pared.

Trabajos de deformación, están involucrados en la transferencia de energía de las escalas más grandes a las más pequeñas, es decir, los vórtices más grandes interactúan con los más pequeños transfiriéndoles energía.

- **Producción:** Proceso por el cual se aumenta la TKE debido a inestabilidades en el fluido, transfiriendo energía del flujo medio al flujo turbulento.
- **Disipación:** Mecanismo en el que las escalas más pequeñas de la turbulencia, transfieren su energía cinética en calor.

4 | Convergencia

Como ya se ha mencionado la turbulencia son procesos aleatorios por lo que para poder estudiarla se necesita realizar un estudio estadístico. Este estudio solo tiene sentido si la simulación está estadísticamente desarrollada, para comprobarlo hay diferentes métodos que afirman que la simulación ya está convergida

Los tiempos de simulación los tres casos de estudio han sido los siguientes:




Casos	Línea	Re_τ	Re_b	Nº puntos de Fourier	ETT	WO	ϵ
P360		360	11700	$25,17 \cdot 10^6$	50,45	33,04	0,0015
P550		550	19000	$67,10 \cdot 10^6$	32,88	22,73	0.0027
P1000		1000	38000	$30,19 \cdot 10^7$	19,44	14,58	0.0103

Tabla 4.1. Parámetros de las simulación

Todas las mallas de las simulaciones tienen una longitud de $10\pi R$, se puede considerar los suficientemente grande para capturar todas las estructuras relevantes.

Para obtener unos buenos resultados y poder estudiar todas las escalas de la turbulencia se necesita un mallado muy fino. Esta discretización tiene que aumentar a medida que aumenta el Re_τ

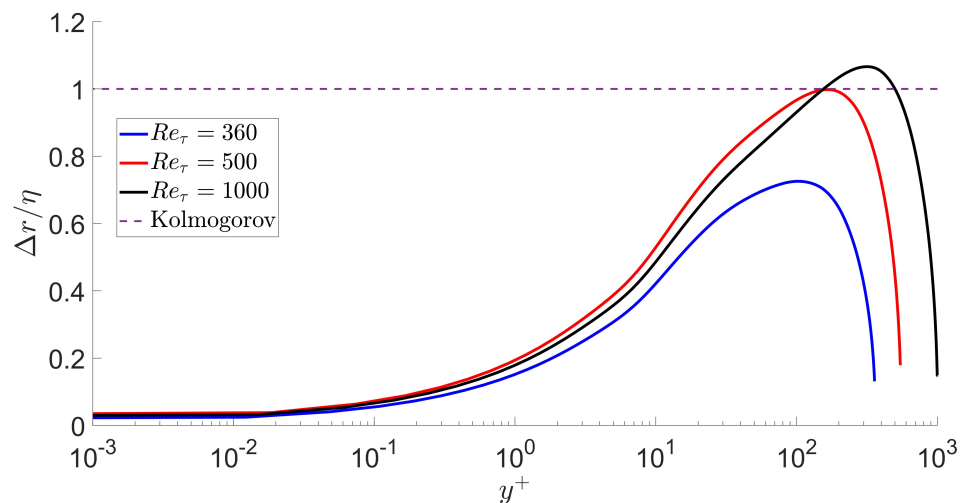


Figura 4.1. Relación entre la discretización radial y la escala de Kolmogorov, para todos los casos de estudio.

En este caso se muestra la relación entre la discretización y la escala de Kolmogorov. En las simulaciones realizadas se cumple con creces el requisito de tener celdas más pequeñas que la escala de Kolmogorov.

En el malla utilizado, el tamaño de las celdas no es constante sino que aumenta conforme se alejan de la pared, ya que como se sabe, es importante malla muy fina cerca de la pared para capturar todos los fenómenos importantes y al aumentar el tamaño de las celdas lejos de la pared se consigue reducir el coste computacional.

4.1. Error de simulación

La forma más sencilla es comprobar las covarianzas de velocidad $\langle u_r u_t \rangle$ y $\langle u_r u_z \rangle$, estas para caso de flujo axial estadísticamente desarrollado deben tender a cero.

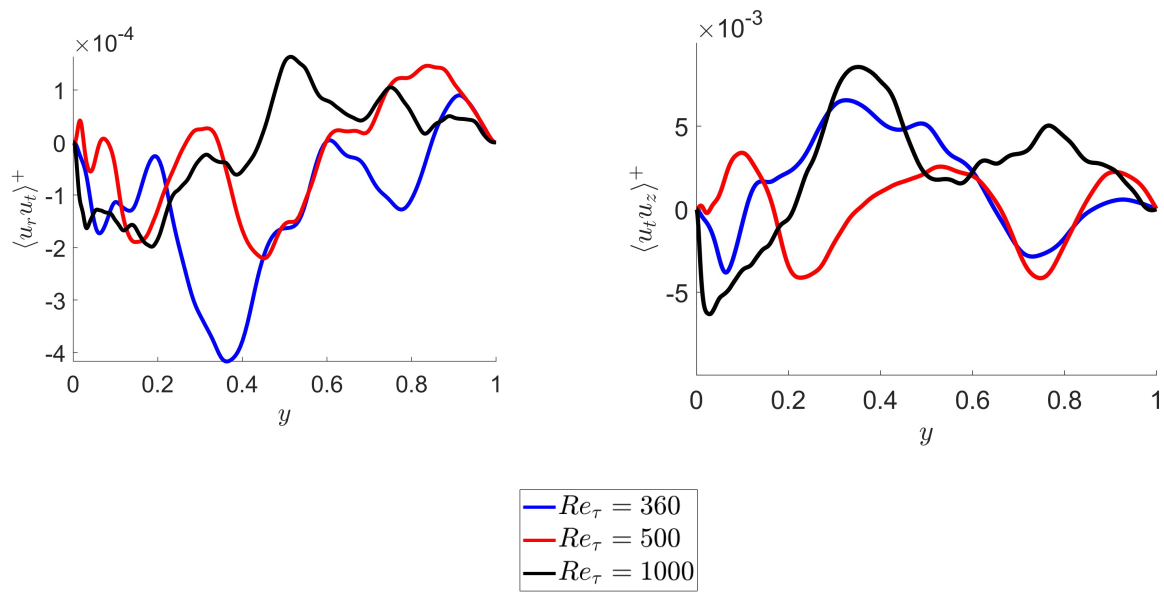


Figura 4.2. Errores de simulación para todos los casos de estudio.

Otra forma obtener el error de la simulación es igualando las dos partes de la ecuación del momento, quedando de esta forma:

$$\varepsilon_R(y^+) = \left| \frac{\partial \bar{U}^+}{\partial y^+} - \langle u_r u_\theta \rangle^+ - 1 + y^+ \right| \quad (4.1)$$

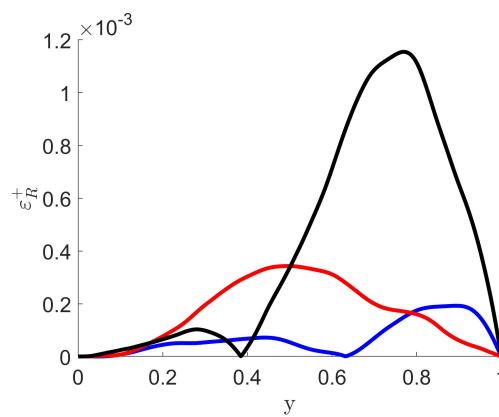


Figura 4.3. Criterio de convergencia según la ecuación del momento.

y si se quiere calcular la suma total de error habría que calcular la integral.

$$\varepsilon = \left(\int_0^R \varepsilon_R(v^+)^2 dy^+ \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

Los datos de los errores se encuentran en la Tabla 4.1

4.2. Validación

Para poder validar los resultados, una forma interesante es compararla con la bases de datos de otros investigadores que hayan realizado el mismo caso.

Para el caso $Re_\tau = 360$ se va a validar con la base de dato de El Khoury et al. [11]

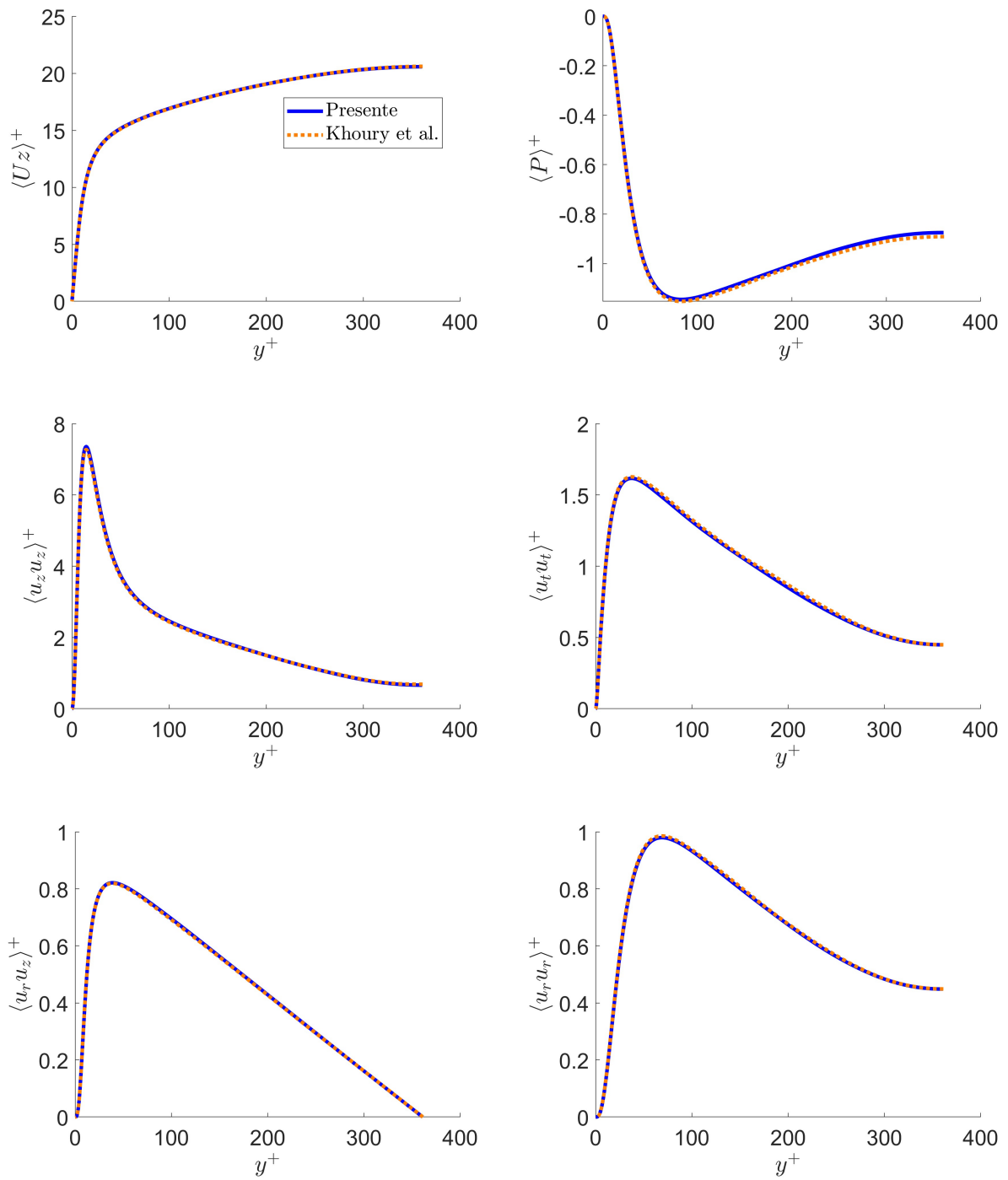


Figura 4.4. Validación del caso $Re_\tau = 360$

Para el caso de $Re_\tau = 550$ se va a validar con respecto la base de datos de Yao et al. [12]

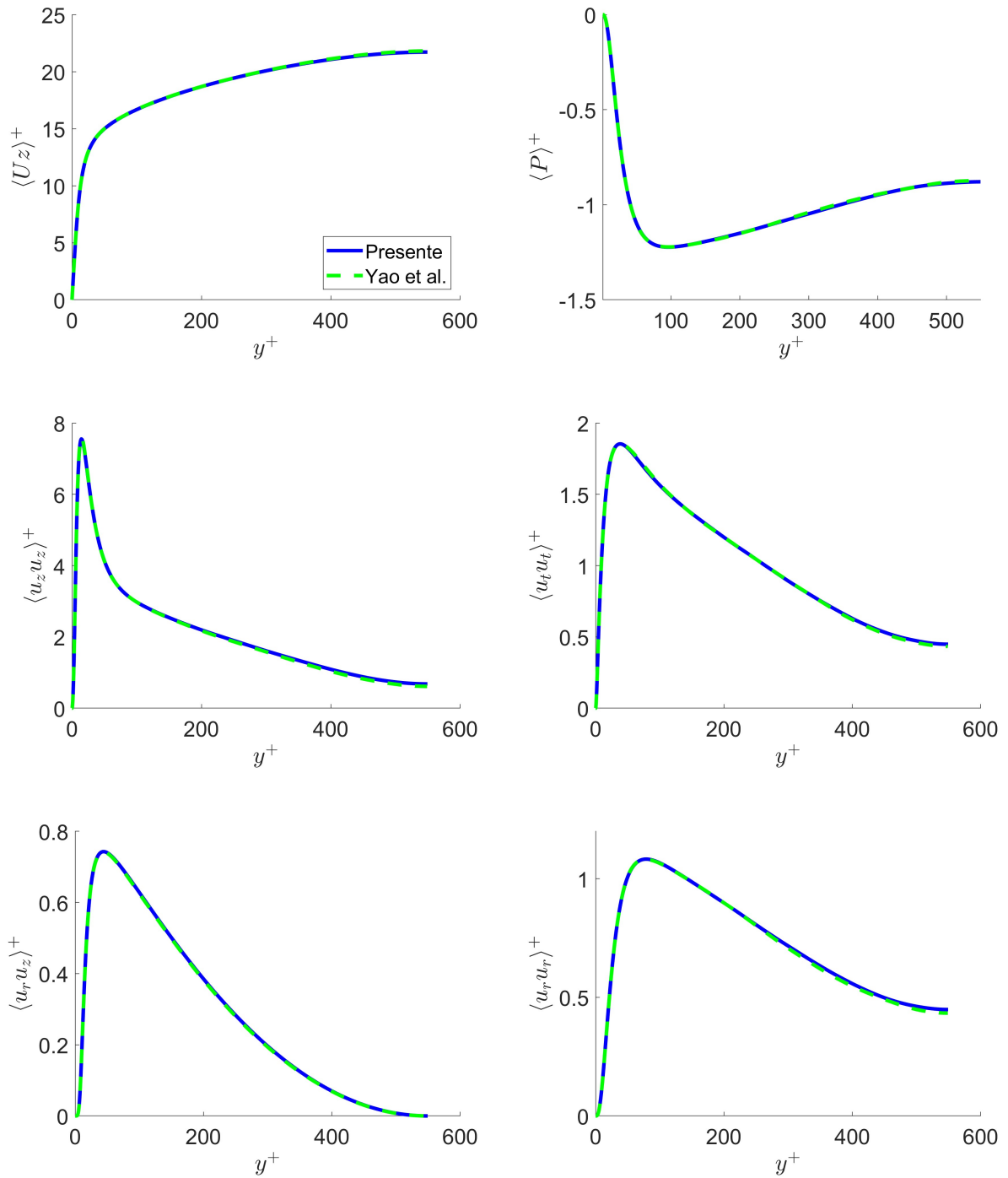


Figura 4.5. Validación del caso $Re_\tau = 550$

Para el caso de $Re_\tau = 1000$ se va a validar con respecto la base de Yao et al. [12] y El Khoury et al. [11]

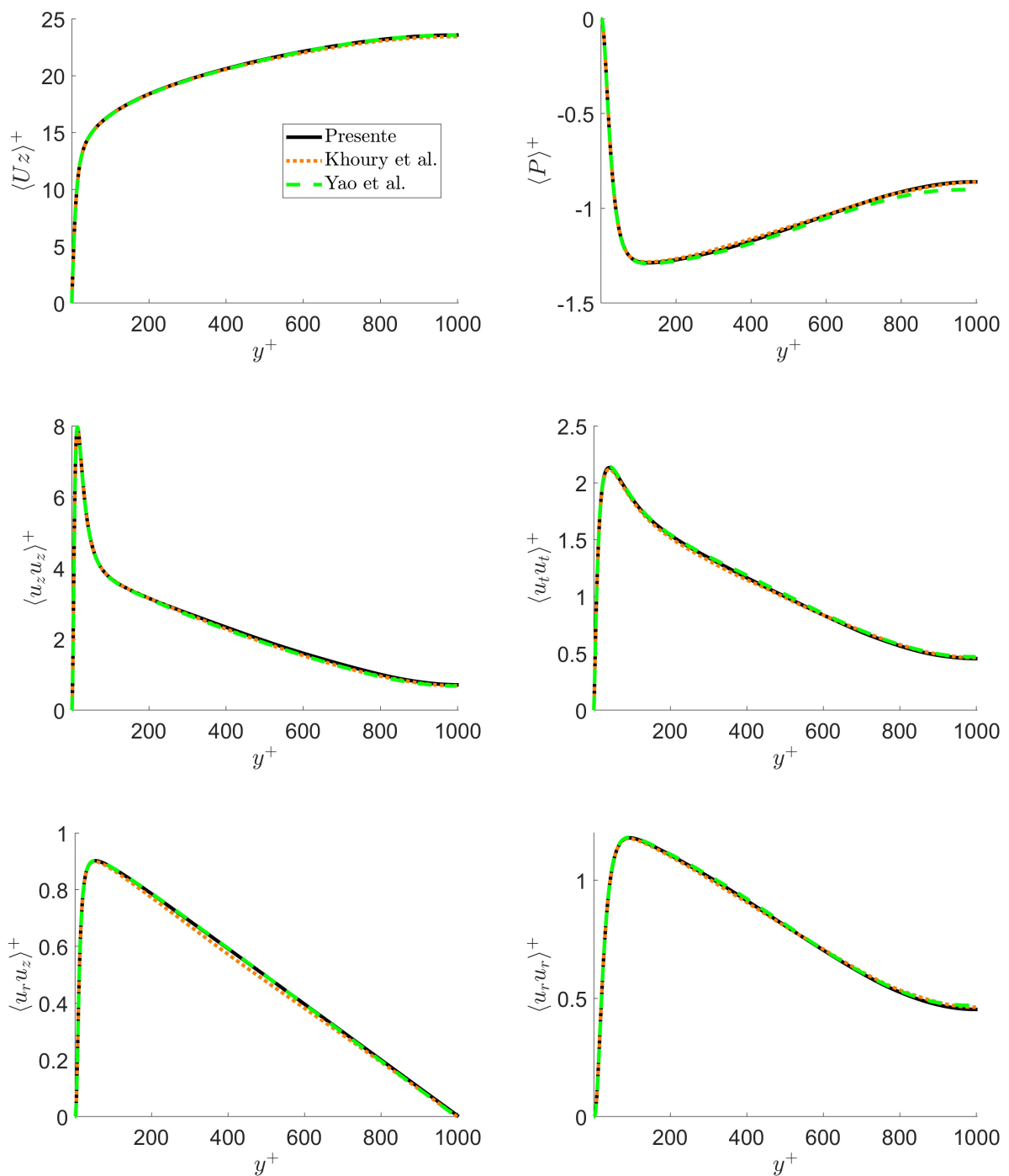


Figura 4.6. Validación del caso $Re_\tau = 1000$

No se encuentran errores significativos en las tres simulaciones, así que se podría decir que por esta parte el trabajo está bien hecho. Sin embargo, si que hay pequeñas diferencias, principalmente en la presión media, esto puede deberse a 3 problemas:

- Al usarse otro código distinto, en este caso, *Openpipeflow* y en el caso de los datos de El Khoury et al., *nek5000*, puede haber una diferencia al interpolar las velocidades.
- Para este trabajo se ha utilizado un malla relativamente gruesa. Habiendo una reducción

de un 19,5% para el caso P360 y de un 60% para el caso P1000 con respecto a los datos de *El Khoury*.

- El tiempo de simulación no sea lo suficientemente alto comparado con las bases de datos utilizadas

Con estos datos, se puede dar por validado el modelo y la simulación, así que se puede pasar en el siguiente capítulo a obtener los resultados.

4.3. Correlaciones

Las correlaciones no son mas que una función que relaciona una variable con otra mostrando como se parecen. Esto es interesante porque al tratar con fluidos turbulentos, los cuales son aleatorios por naturaleza, las correlaciones deberían tender a cero rápidamente.

Se van a estudiar tanto correlaciones espaciales como temporales para los tres casos.

Las correlaciones espaciales hacen referencia a como se parece la velocidad en un punto a una distancia cualquiera de la pared con el resto de puntos axiales de esa distancia y las correlaciones temporales a como se parece un punto radial en un instante temporal con el resto de instantes temporales de la simulación.

Primero se van a mostrar las correlaciones completas para el caso $Re_\tau = 1000$, para poder ver su comportamiento

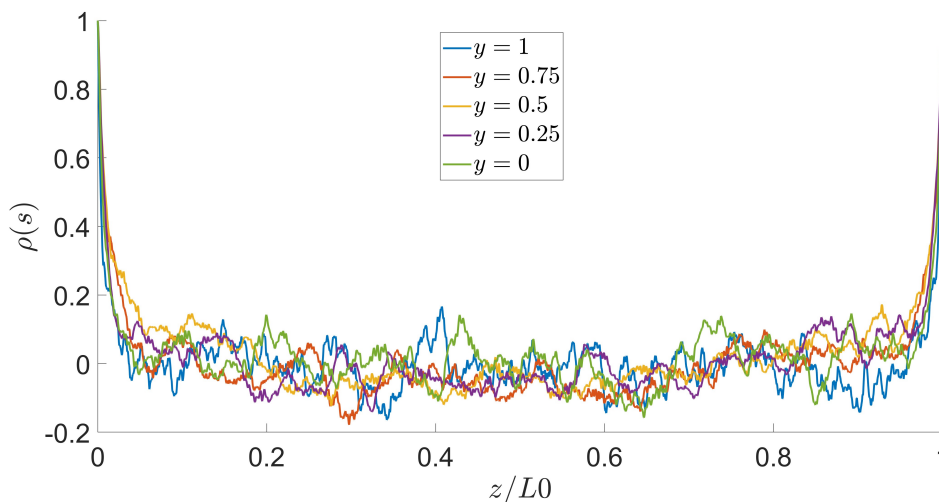


Figura 4.7. Correlaciones espaciales para el caso $Re_\tau = 1000$

Es interesante comentar que en esta grafica se ve perfectamente las condiciones periódicas que existen en el eje z comentadas en la sección 3.3, con lo que al final $\rho(1) = 1$

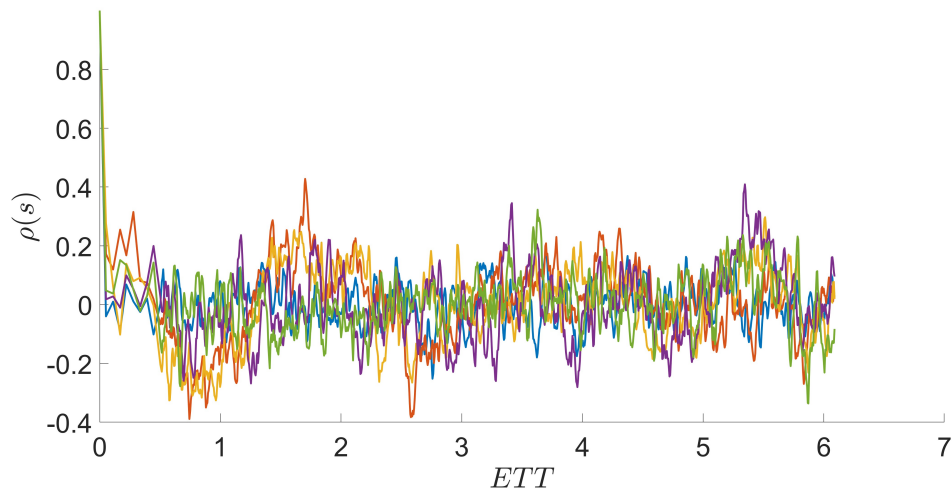


Figura 4.8. Correlaciones temporales para el caso $Re_\tau = 1000$. Colores como en la figura 4.7.

Se puede comprobar la naturaleza caótica de la simulación, en la cual sus correlaciones tienden a cero rápidamente y durante toda la simulación oscilan entorno a cero.

Ahora se va a analizar un nuevo concepto, distancia/tiempo de coherencia, es decir, cuanto tiempo o cuanta distancia tarda la turbulencia en olvidarse de donde viene. Esto se obtiene viendo cuanto tarda $\rho(s)$ en tender a cero.

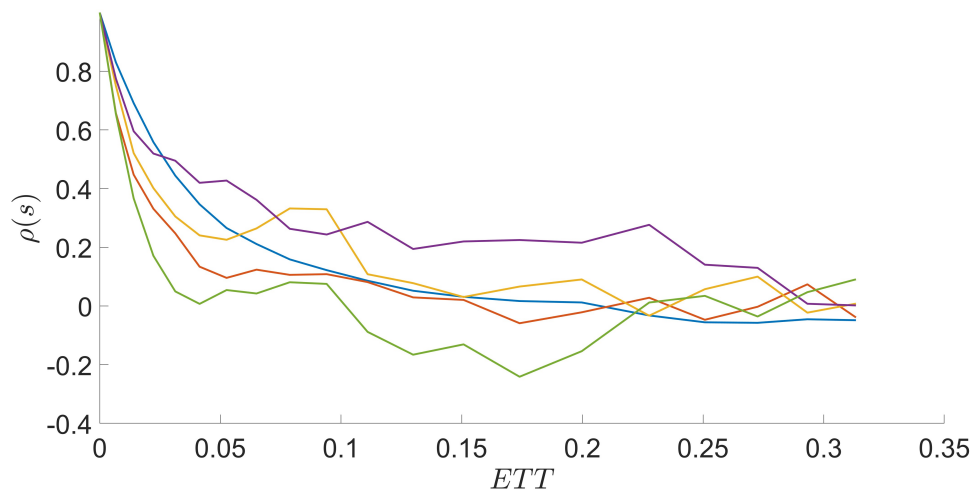


Figura 4.9. Tiempo de coherencia para el caso $Re_\tau = 360$. Colores como en la figura 4.7.

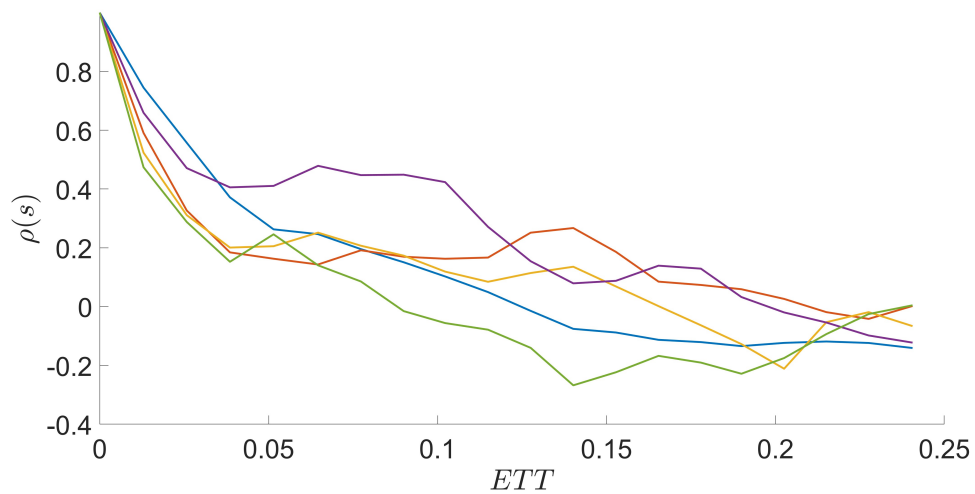


Figura 4.10. Tiempo de coherencia para el caso $Re_\tau = 550$. Colores como en la figura 4.7.

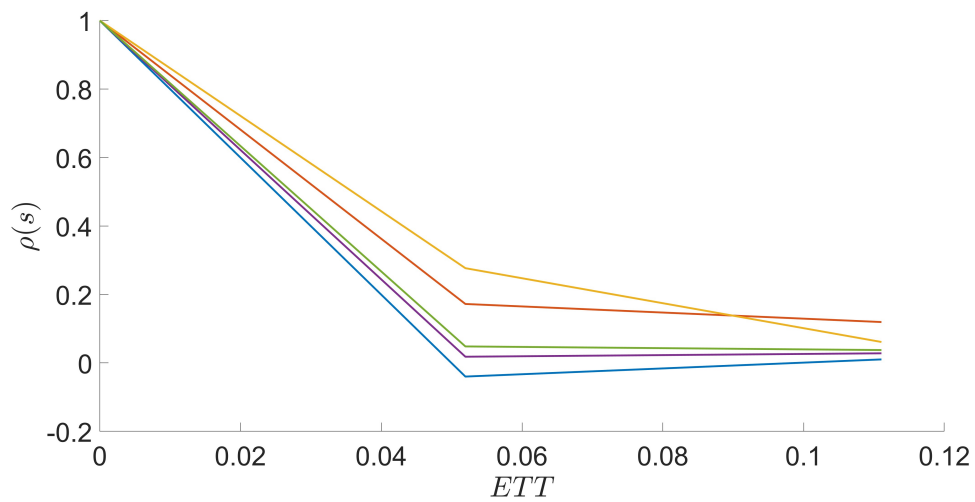


Figura 4.11. Tiempo de coherencia para el caso $Re_\tau = 1000$. Colores como en la figura 4.7.

Se puede concluir que el tiempo de coherencia disminuye con el aumento de la turbulencia, algo que se esperaba ya que mayor turbulencia significa mayor difusividad y por tanto mayor es el fenómeno de transporte.

Analizando las correlaciones temporales:

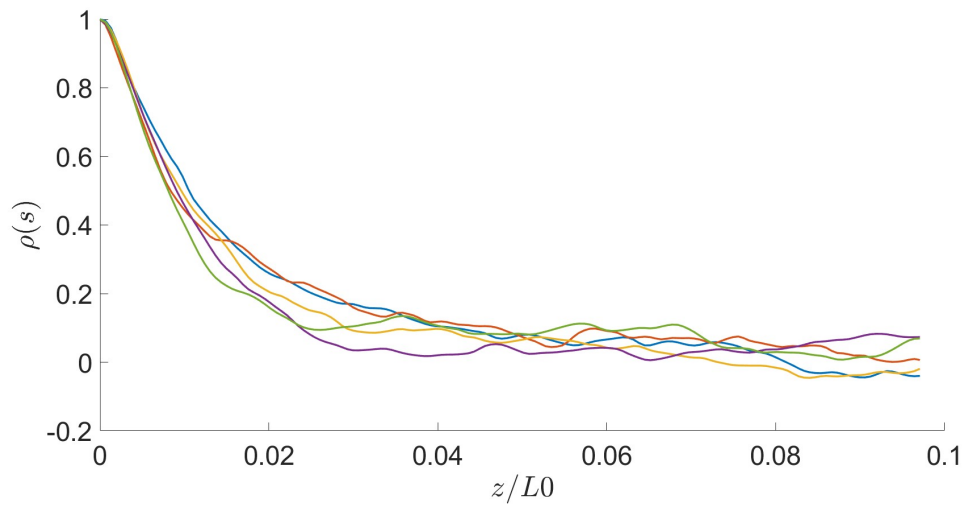


Figura 4.12. Distancia de coherencia para el caso $Re_\tau = 360$. Colores como en la figura 4.7.

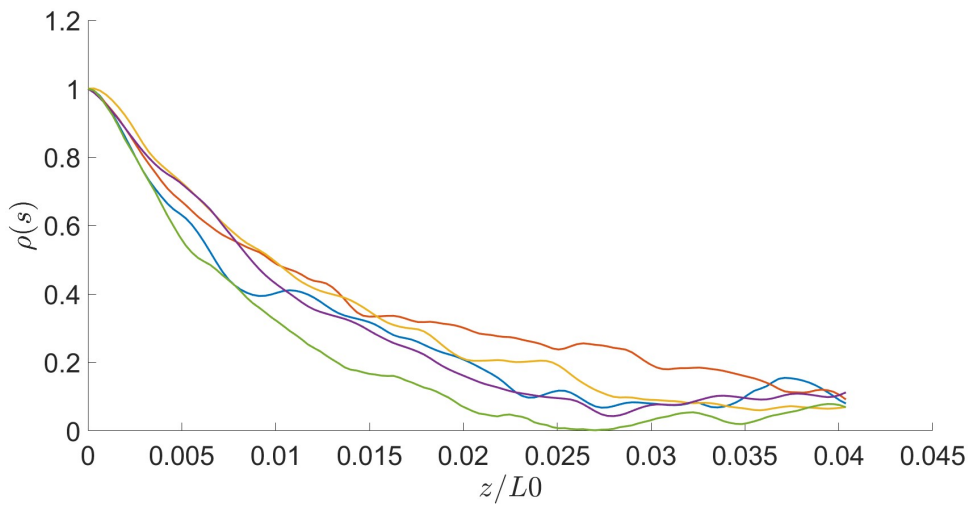


Figura 4.13. Distancia de coherencia para el caso $Re_\tau = 550$. Colores como en la figura 4.7.

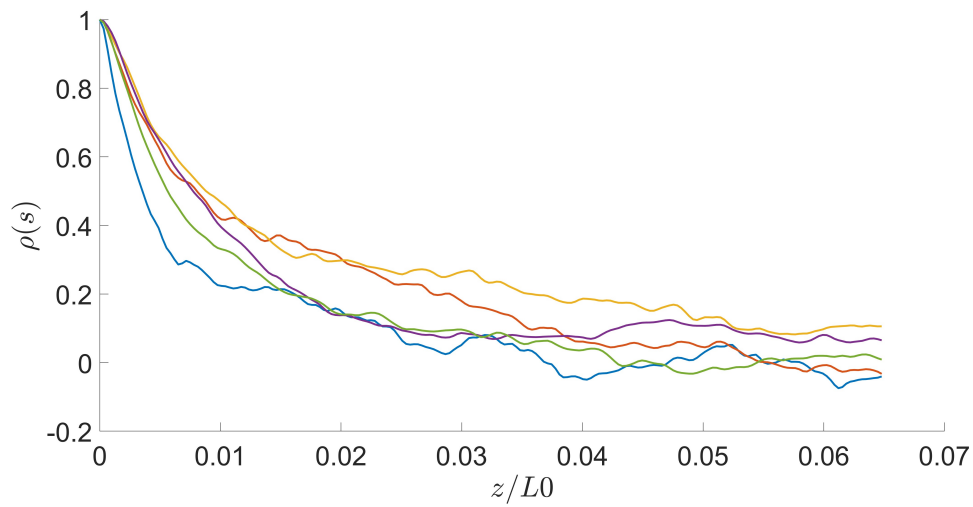


Figura 4.14. Distancia de coherencia para el caso $Re_\tau = 1000$. Colores como en la figura 4.7.

En la distancia de coherencia no hay una correlación clara en su disminución con el aumento de Re_τ esto puede ser debido a que los tiempos de simulación entre casos son distintos, lo que significa que el promediado de los campos temporales va a variar. Aun así la distancia a la que llega la función de correlación a cero es suficientemente pequeña como para que esa falta de correlación tenga importancia.

Como conclusión se puede decir que el tiempo y distancia de coherencia es muy pequeña, con lo que se puede confirmar que la simulación es totalmente turbulenta.

5 | Resultados

Conforme se aumenta el Re_τ se va a ir aumentando la intensidad turbulenta en el dominio, antes de pasar a gráficas que a veces pueden ser difíciles de entender, lo mas sencillo es observar un plano físico de la velocidad predominante del flujo.

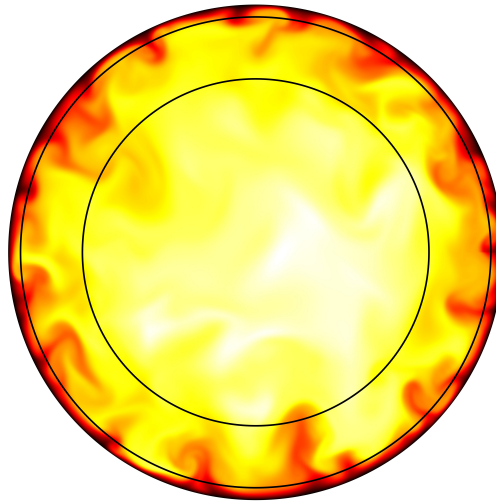


Figura 5.1. Plano radial de velocidad instantánea axial, **caso: P360**

Hay tres grandes zonas diferenciadas, la zona central de flujo no perturbado, donde el fluido va prácticamente a su velocidad máxima, la zona exterior en la cual el fluido está totalmente perturbado por la pared y una zona intermedia de mezcla donde se produce el pico de intensidad turbulenta en el que se transfiere momento lineal de una zona a otra.

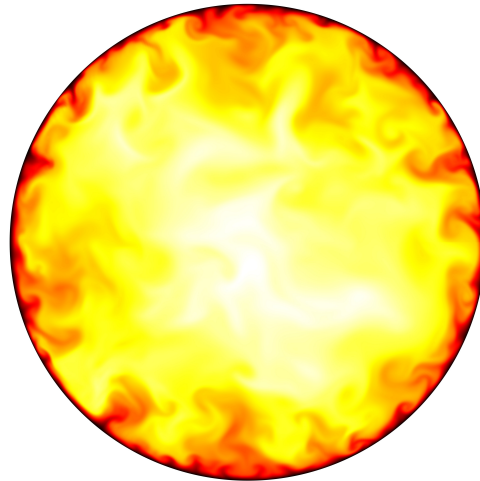


Figura 5.2. Plano radial de velocidad instantánea axial, caso: **P550**

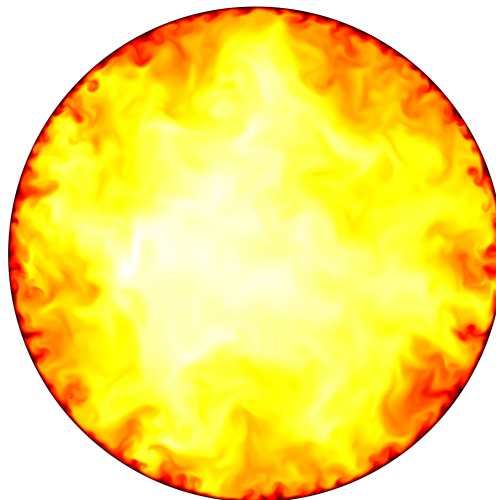


Figura 5.3. Plano axial de velocidad instantánea axial, caso: **P1000**

5.1. Escalado

Teóricamente si se dobla el número de procesadores la eficiencia también debería multiplicarse por dos, es decir, el tiempo por paso calculado debería ser la mitad. Sin embargo esto no ocurre, principalmente por los tiempos de comunicación entre procesadores. Es decir aumentar el número núcleos es algo muy caro pero totalmente necesario para escalar las simulaciones.

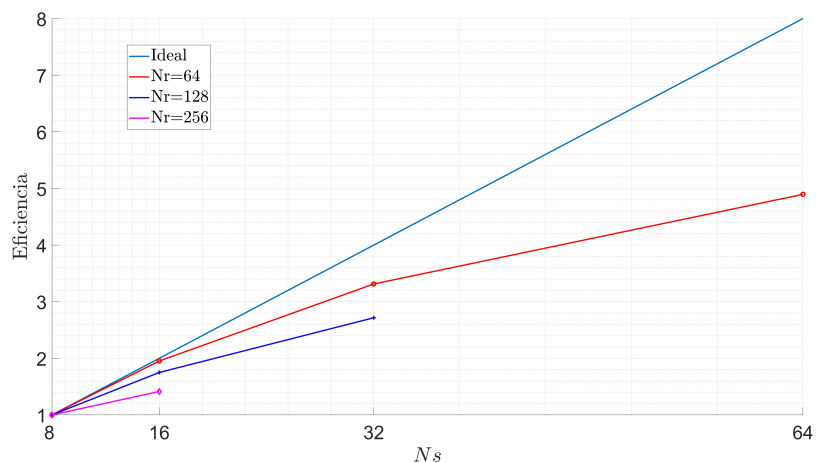


Figura 5.4. Escalado de eficiencia en Sirius para $Re_\tau = 550$

Como se observa se reduce bastante incluso la pendiente de escalado también se ve afectada, esto es seguramente porque se están utilizando varias secciones de Sirius, lo que afecta gravemente a la eficiencia.

Ahora se muestra el escalado realizado en Shaheen III, trabajo totalmente necesario para realizar simulaciones a gran escala.

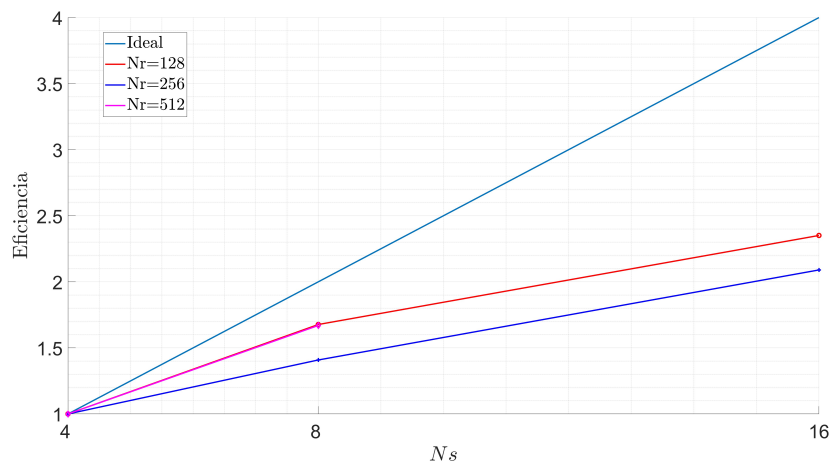


Figura 5.5. Escalado de eficiencia en Shaheen III $Re_\tau = 550$

En cuanto a los resultados obtenidos se encuentra una falta de eficiencia a números altos de procesadores, incluso reduciéndose la pendiente. Estos datos se tendrán que tomar en cuenta para analizar si merece la pena aumentar el número de procesadores, aunque debido a la necesidad de memoria para simulaciones de gran tamaño no habrá otra opción mas que tener que utilizarlos.

Sirius usa como compilador GFortran y en Shaheen III se usa como compilador Cray-Fortran, comparando ambos superordenadores se puede concluir que el primero es más eficiente.

5.2. Estadísticas

Las bases de datos para la obtención de la figura 5.6 son las siguientes: Yao et al. [12], El Khoury et al. [11] y Pirozzoli et al. [13]

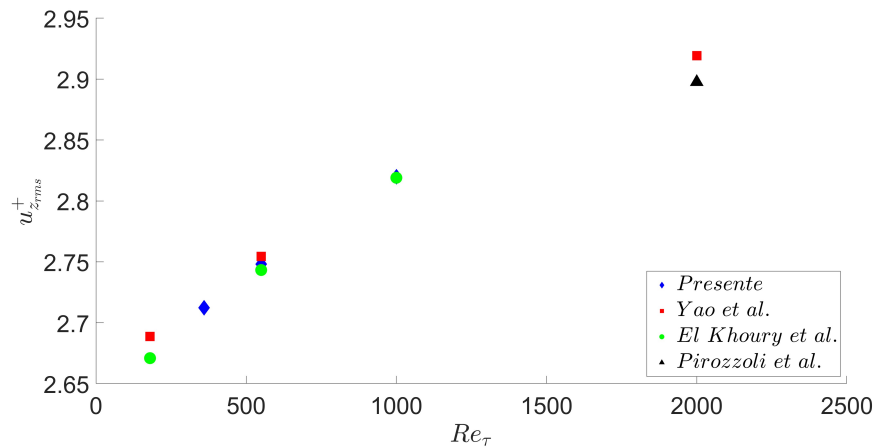


Figura 5.6. Variación de la intensidad turbulenta axial con respecto a Re_τ

Desde el inicio de la turbulencia hasta un $Re_\tau = 2000$, se sabe que hay una clara tendencia en el aumento de esta variable. Además, los resultados de este proyecto cumplen esta correlación. Sin embargo, a partir de $Re_\tau = 2000$ no está clara esta tendencia y los investigadores están todavía discutiendo cual es la tendencia correcta, si una ley de crecimiento logarítmica o de potencia $1/4$ aunque parece que la que está mas cerca de ser correcta en esta última.[14] [15]

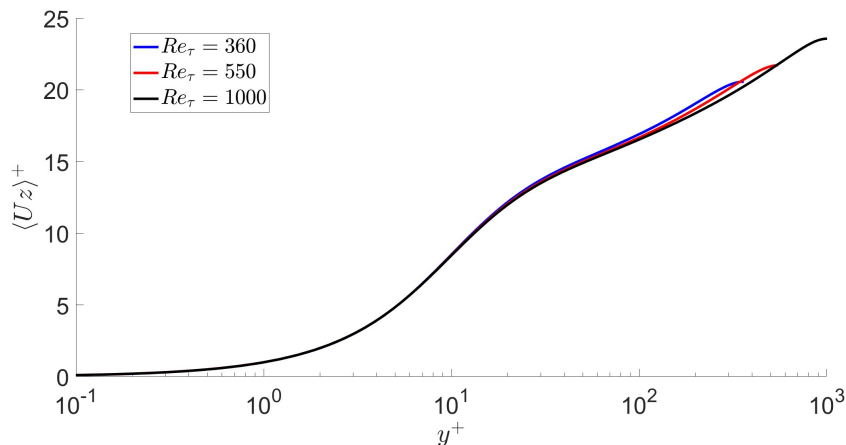


Figura 5.7. Variación del perfil de velocidad axial con respecto de Re_τ

Esta gráfica es interesante porque permite ver perfectamente el diferente comportamiento del fluido cerca de la pared dependiendo de la capa en la que se encuentre. Además, para todos los números de Reynolds las funciones colapsan en la subcapa viscosa, esto es debido a que el esfuerzo cortante de Reynolds es despreciable en comparación con el esfuerzo viscoso, es decir, la subcapa viscosa está gobernada principalmente por la viscosidad, no por la turbulencia

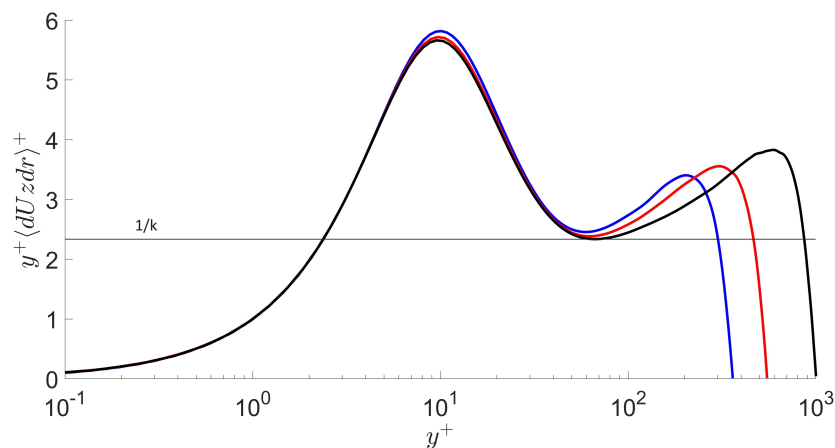


Figura 5.8. Variación del indicador de ley logarítmica con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.

La función de indicador de ley logarítmica se utiliza para evaluar la calidad de las simulaciones numéricas (DNS) de flujos turbulentos. Si la función se comporta de acuerdo con la ley logarítmica en la región logarítmica entonces se considera que la simulación es precisa. Además, tomando el valor en y del mínimo local se puede encontrar la constante de Von kármán, con la cual se podrá calcular la ley de pared que se rige en la región logarítmica.

Es interesante estudiar las leyes de pared, para eso se tomará la función de $\langle U_z \rangle^+$ para el caso **P1000**.

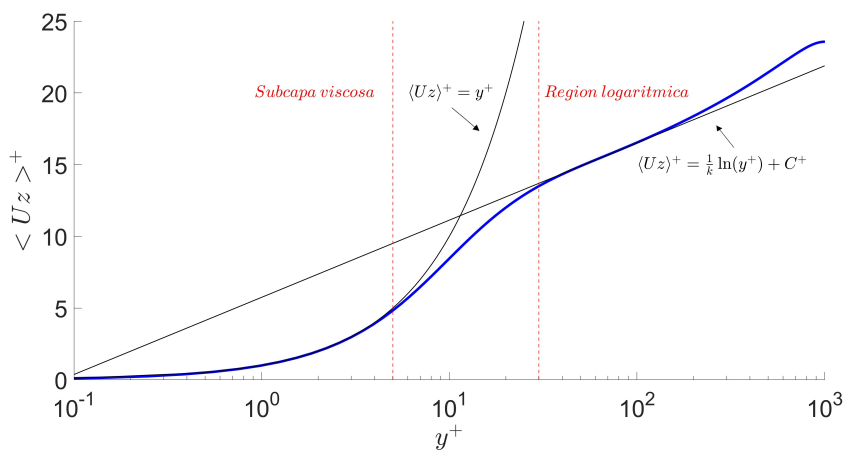


Figura 5.9. Ley de pared para el caso **P1000**: —

Mediante la obtención de la constante de Von kármán en la figura 5.8, con un valor de $K = 0,428$, se pueden modelar las leyes de pared explicadas en la sección 3.6

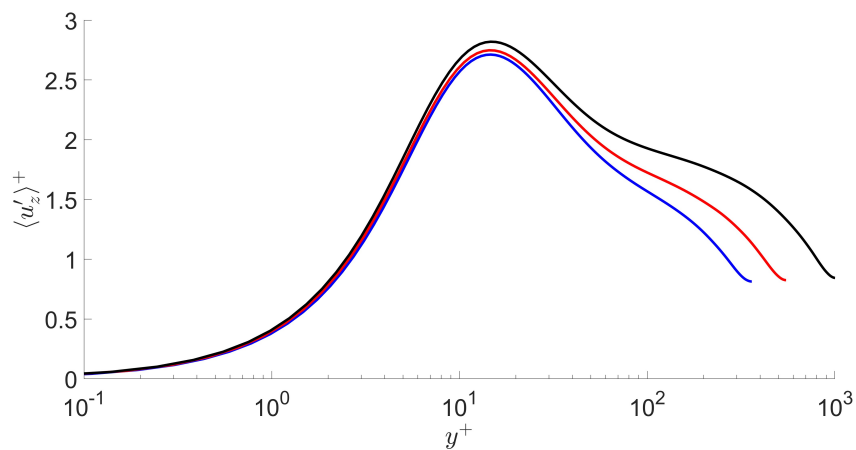


Figura 5.10. Variación de la intensidad turbulenta axial con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.

En cuanto a la intensidad turbulenta de la velocidad axial, se observa como crece el máximo en torno a $y^+ = 15$, algo muy característico en ese tipo de simulaciones.

Este pico se encuentra en una zona clave, la capa de amortiguamiento, en la que tanto los efectos viscosos como turbulentos son importantes, en esta capa se generan y se desarrollan muchas de las estructuras que impulsan la turbulencia como pueden ser los *streaks*. Por tanto en esta región la turbulencia se genera y se desarrolla.

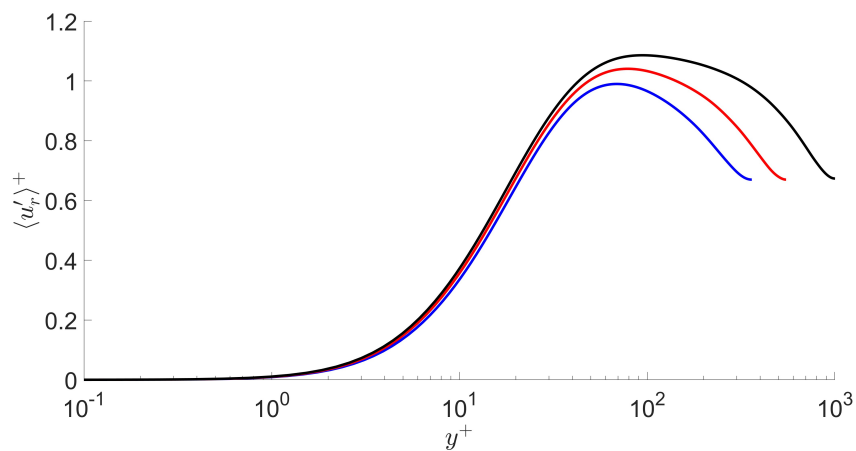


Figura 5.11. Variación de la intensidad turbulenta radial con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.

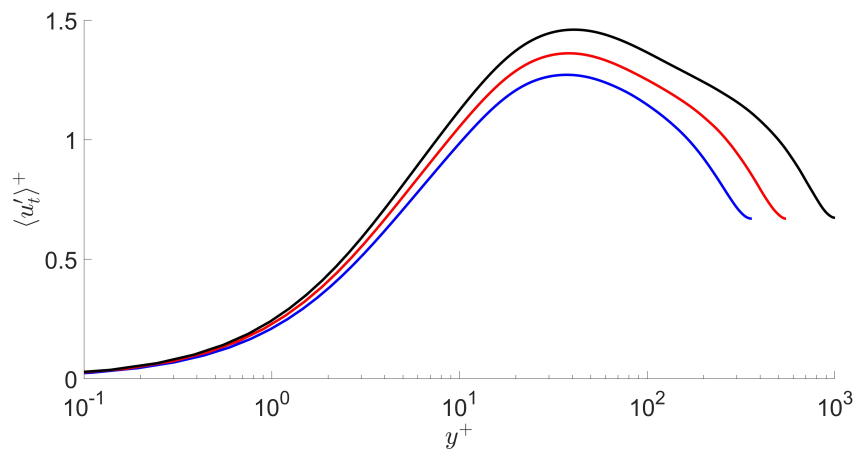


Figura 5.12. Variación de la intensidad turbulenta azimutal con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.

Las intensidades turbulentas en estas dos direcciones son menos importantes. De igual forma el máximo crece conforme se aumenta el Re_τ y comparado con la intensidad turbulenta axial este pico se encuentra alejado de la pared, en la capa externa donde los efectos viscosos son despreciables

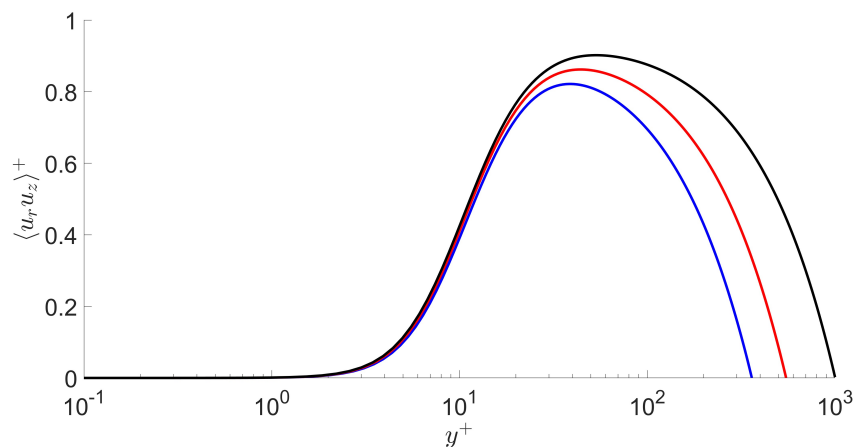


Figura 5.13. Variación de la covarianza axial-radial con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.

En esta gráfica lo que se puede explicar es que tanto cerca de la pared como en el centro de la tubería la diferencia de velocidades en dirección radial y axial es cero y toda la energía del flujo está centrada en el transporte axial.

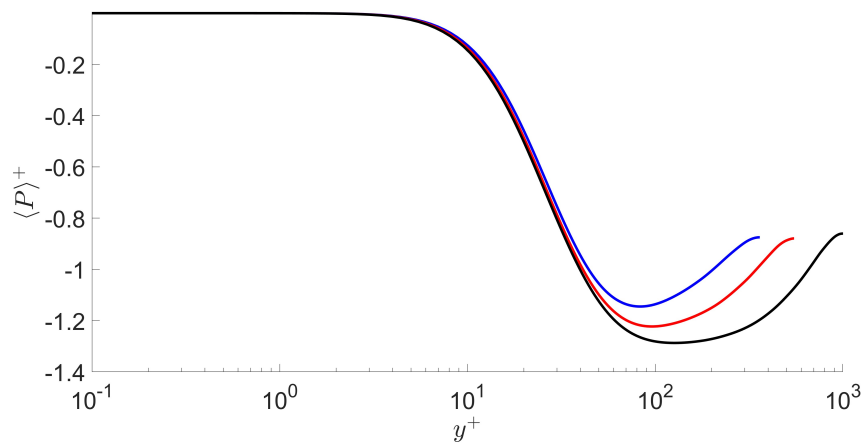


Figura 5.14. Variación de presión media con respecto a Re_τ . Colores como en la figura 5.7.

Debido a las condiciones de contorno explicadas en la sección 3.3, se observa que la presión media en la pared es cero y conforme aumenta la velocidad se produce este gradiente de presión.

5.3. *Turbulent budgets*

Lo primero es validar los resultados obtenidos en el caso **P1000**, para ello se grafica la ecuación (3.40)

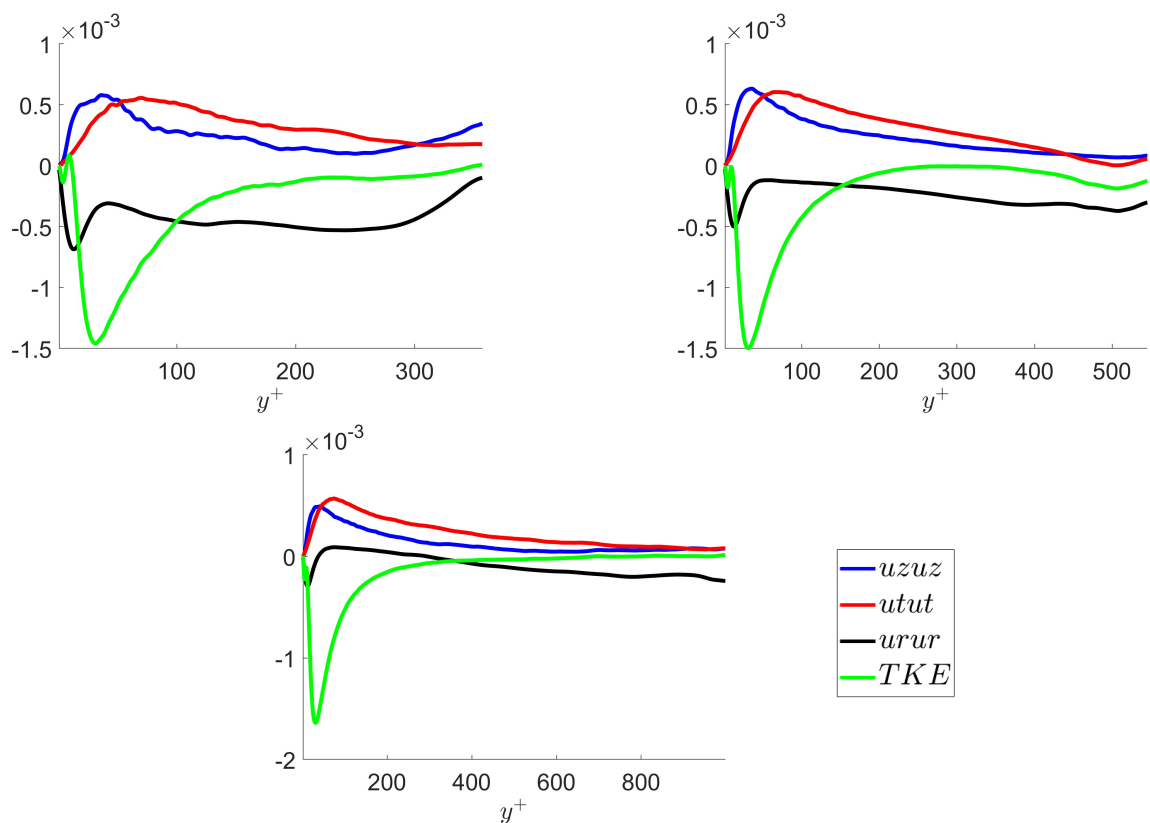


Figura 5.15. Errores obtenidos en el cálculo de los *turbulent budgets* para todos los casos de estudio.

Estos errores son totalmente asumibles y que difícilmente se puedan mejorar ya que probablemente son debidos a como se está calculando la presión y se están interpolando las variables en el código.

Ahora se analizará la dinámica de la turbulencia para el caso, **P1000**, ya que a números de Reynolds moderadamente altos, la turbulencia se comporta de forma similar.

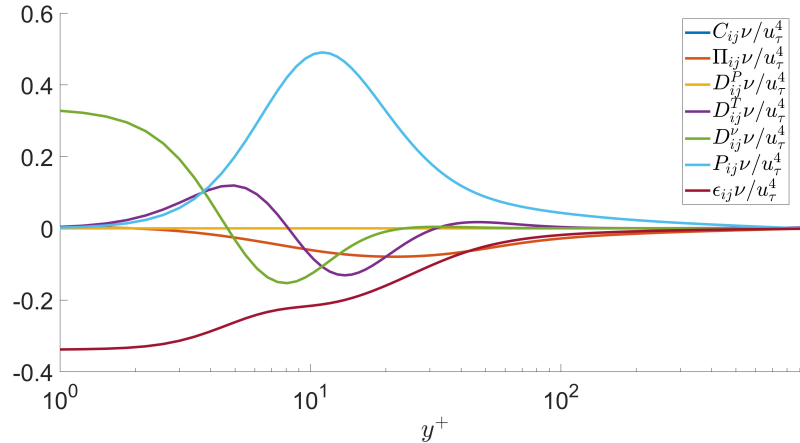


Figura 5.16. *turbulent budgets* de la componente $u_z u_z$, **P1000**

Como era de esperar el pico de producción coincide con el pico de intensidad turbulenta visto en la figura 5.10. La disipación es mayor en la pared confirmando la existencia de una mayor cantidad de vórtices de pequeña escala. Si se habla de la difusión viscosa, esta actúa mayormente en la pared debido a que su mecanismo de basa principalmente en la interacción de la pared con el fluido.

Una mayor cantidad de vórtices cerca de la pared acelera el proceso de mezclado por lo que el término de difusión turbulenta tiende a crecer. Finalmente, el término de correlación presión-deformación crece hasta alcanzar un máximo en torno a $y^+ = 10$, lugar donde habrá un aumento de la energía cinética turbulenta (TKE).

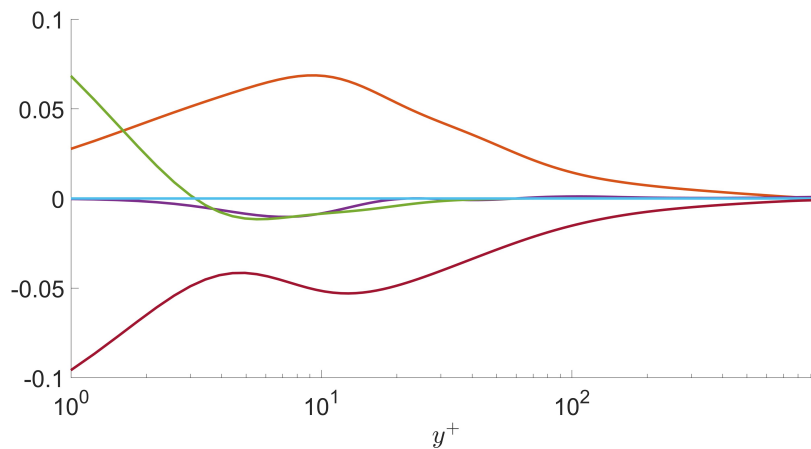


Figura 5.17. *turbulent budgets* de la componente $u_t u_t$, caso: **P1000**. Colores como en la figura 5.16.

Lo primero que hay que destacar es que los valores absolutos para los términos de $u_r u_r$ y

$u_t u_t$ van a ser menores con respecto a $u_z u_z$ debido a que la intensidad turbulenta en estas dirección son mucho menores. De igual forma la disipación es máxima en la pared y disminuye conforme se aleja de la pared.

En el término $u_z u_z$ la correlación presión-deformación era negativa, este caso es positivo absorbiendo energía turbulenta. La difusión turbulenta de igual forma es positiva cerca de la pared. Finalmente se puede afirmar que la producción de TKE es cero debido a que la intensidad turbulenta de esta componente son muy bajas comparadas con la intensidad turbulenta de la velocidad axial.

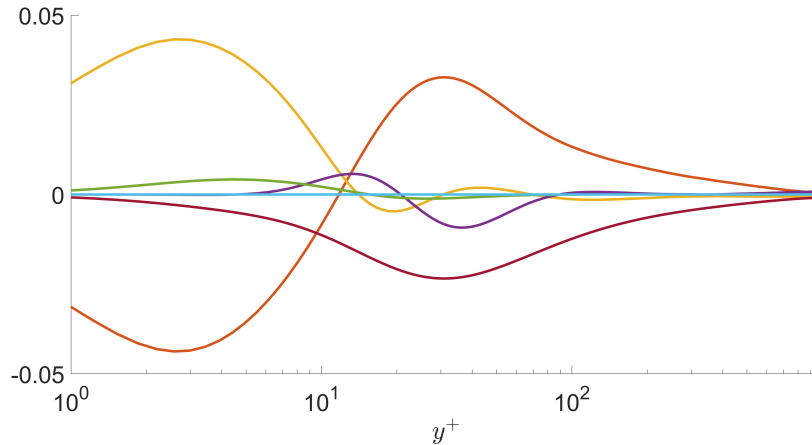


Figura 5.18. *turbulent budgets* de la componente $u_r u_r$, caso: **P1000**. Colores como en la figura 5.16.

Se puede apreciar como en la componente radial la disipación tiene su pico en torno a $y^+ = 20$ lo que la diferencia de las componentes anteriores.

Es interesante observar que cerca de la pared, hay una igualdad de transferencia de energía entre la transportada por la presión en esta misma componente y la redistribución de esta energía hacia otras componentes gracias a la presión. La producción de energía es cero otra vez confirmando que toda la producción turbulenta es únicamente debido a las perturbaciones axiales del flujo.

Finalmente, se analizará la suma de las componentes.

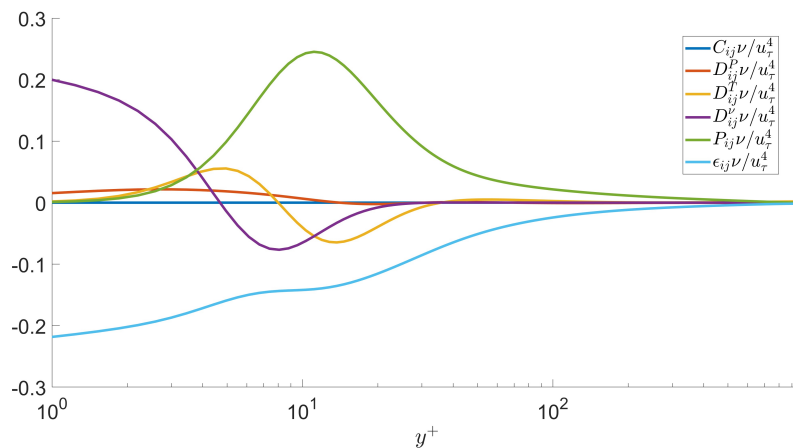


Figura 5.19. *turbulent budgets* de la energía cinética turbulenta.

En este caso el término presión-deformación desaparece debido que al representar la suma de las tres componentes no es posible por su propio significado que haya un transporte entre componentes.

Tras haber visto la dinámica de la turbulencia se va a pasar a analizar como varían los dos términos más importantes (producción y disipación) conforme se aumenta el Re_τ .

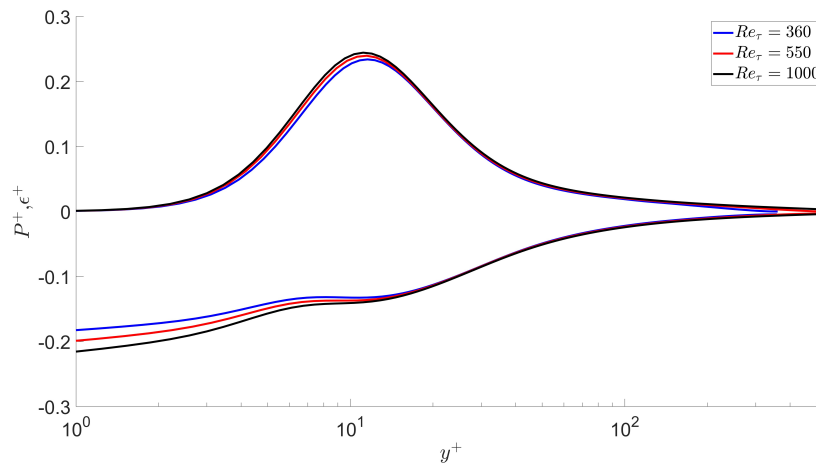


Figura 5.20. Comparación entre producción y disipación de todos los casos de estudio.

Lo más importante es que para todos los casos el término de producción colapsa en la misma línea. Sin embargo, en la disipación no es así, esto dificulta gravemente la creación de modelos como por ejemplo el modelo de turbulencia $k - \epsilon$.

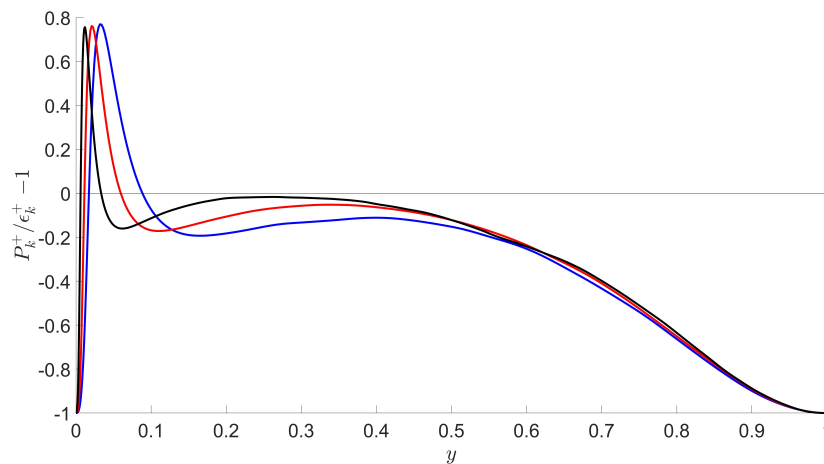


Figura 5.21. Exceso producción de TKE sobre la disipación. Escala externa. Colores como en la figura 5.20.

Analizando la escala externa se puede ver como el exceso de producción turbulenta se encuentra muy cerca de pared. Es interesante ver como en estas unidades de distancia (y), cuanto más aumenta Re_τ más cerca de la pared se produce el exceso de producción y menos porcentaje de sección transversal ocupa.

Añadir que en esta gráfica se pueden observar los puntos donde no hay exceso de producción, lugar donde los modelos RANS van a funcionar mejor.

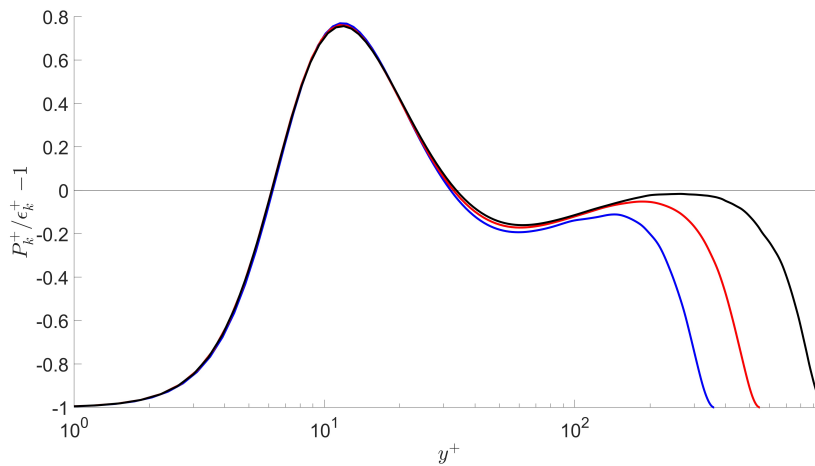


Figura 5.22. Exceso producción de TKE sobre la disipación. Escala interna. Colores como en la figura 5.20.

En la escala interna se pueden encontrar resultados mas interesantes y es que para todos los casos, las funciones colapsan obteniéndose un exceso de producción desde $y^+ = 5$ hasta $y^+ = 30$, es decir durante la *buffer layer*

5.4. Espectros de energía

Mediante la transformada de Fourier de un plano de velocidades se puede conseguir la energía que contiene cada frecuencia del espectro. Esto permite conocer cuanta energía contiene cada escala es decir cada tamaño de vórtice.

Añadir que para la presentación de estos resultados no se va a aplicar ningún filtro a los datos, por tanto es normal que haya ruido, esto se podría mejorar tanto añadiendo un filtro como obteniendo una mayor cantidad de datos.

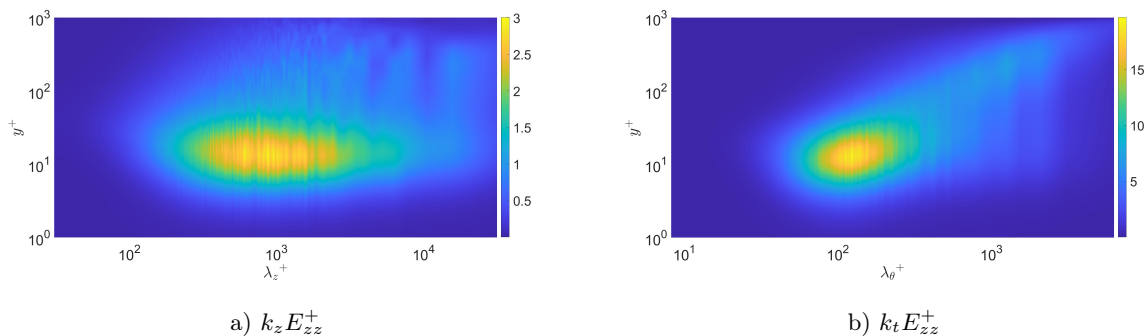


Figura 5.23. Espectro de energía de la velocidad axial para el caso **P1000**.

Se observa el pico de energía en $y^+ = 15$, distancia que se ha ido viendo a lo largo de todos los resultados ya que es la distancia en la que se encuentra el pico de intensidad turbulenta. Aunque las estructuras mas energéticas se encuentran en torno a $\lambda_z^+ = 1000$, se siguen capturando estructuras del tamaño de la tubería aunque con menos energía. En el plano radial ocurre un comportamiento parecido pero estas grandes estructuras tienden a estar más cerca del centro de la tubería que cerca de la pared.

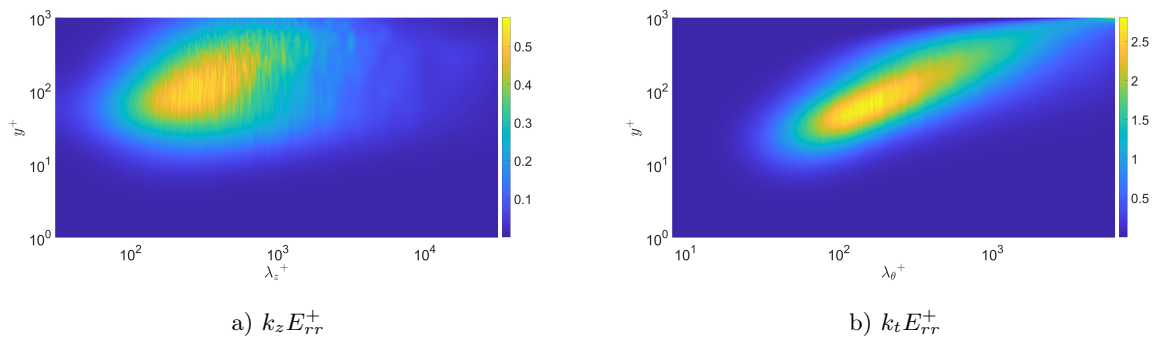


Figura 5.24. Espectro de energía de la velocidad radial para el caso **P1000**.

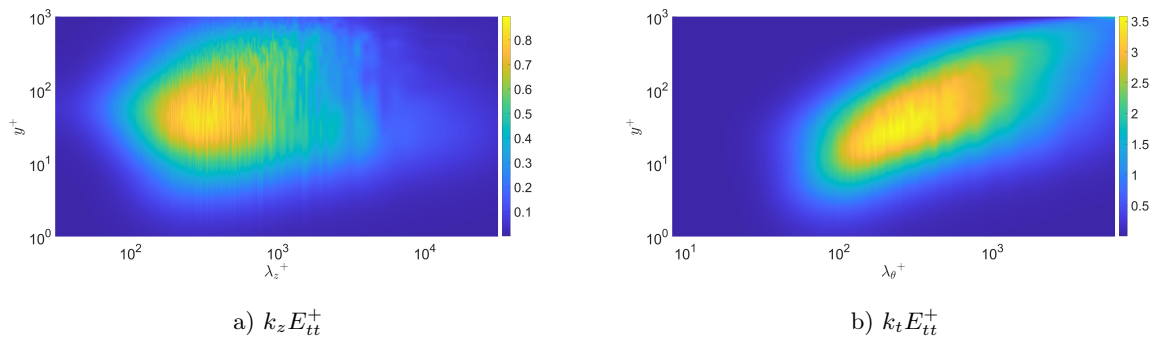


Figura 5.25. Espectro de energía de la velocidad tangencial para el caso **P1000**.

Debido a la similitud de los espectros de energía de la velocidad radial y tangencial, se van a comentar juntos.

En este caso las estructuras asociadas a estas velocidades tienen una magnitud de energía mucho menor, algo esperable debido a que el valor de la velocidad es menor. En cuanto a su posición, se encuentran a una mayor distancia de en torno a $y^+ = 100$.

Para poder estudiar el tamaño de estas estructuras es necesario calcular un espectro de energía 2D.

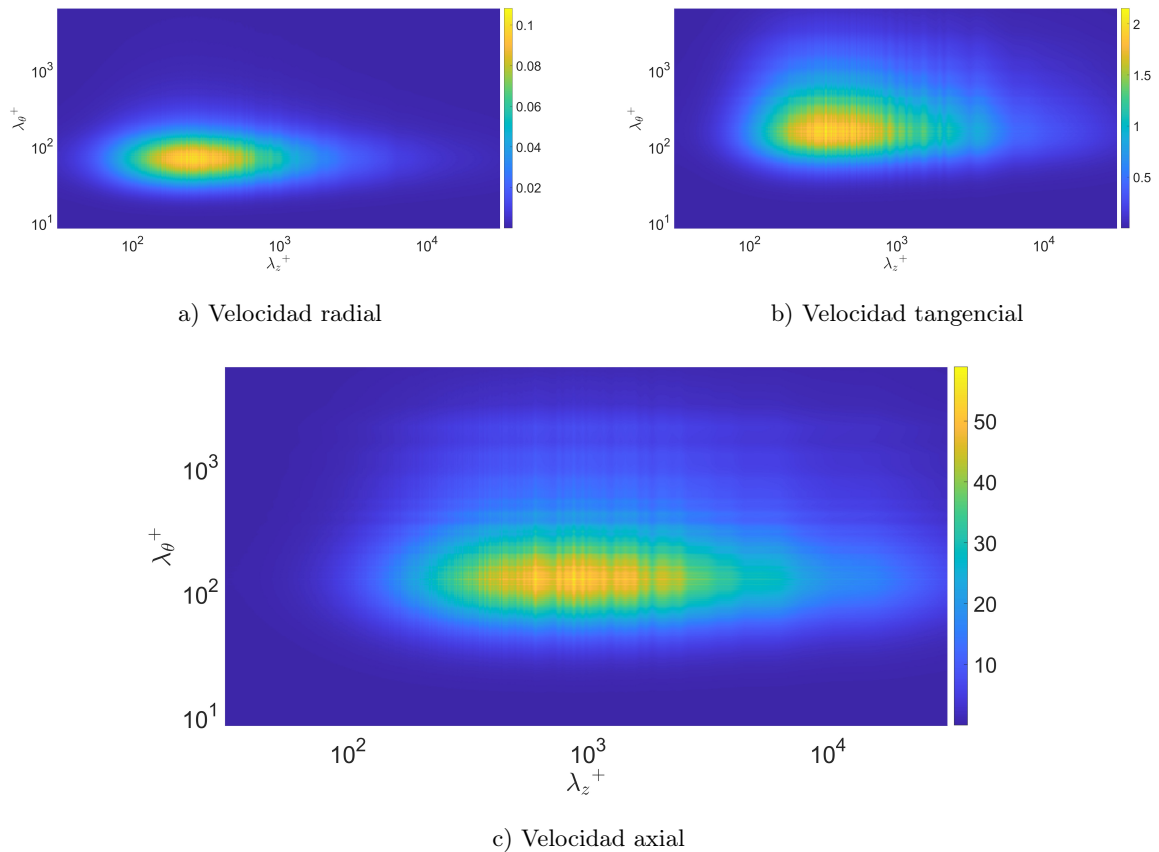


Figura 5.26. Espectro de energía 2D a una distancia $y^+ = 15$. Caso: **P1000**.

En cuanto a la velocidad predominante del flujo, en el plano axial las estructuras más energéticas tienen una mayor longitud de onda, es decir, de un mayor tamaño comparando con el plano radial que son de un menor tamaño.

Observando las velocidades tangencial y radial, se puede ver que estructuras de mayor energía tienen un menor tamaño comparado con las vistas en la figura 5.26 c).

En resumen, se puede decir que las estructuras asociadas a la velocidad axial tienen un mayor tamaño comparado con las otras velocidades en concreto tienen una mayor longitud en la dirección axial que en la azimutal, es decir, tienen una forma alargada. En cambio las estructuras asociadas a la velocidad radial y tangencial son más pequeñas y tienen una forma más cuadrada.

6 | Pliego de condiciones

En este capítulo se establecen las condiciones que deben cumplirse obligatoriamente para asegurar la correcta ejecución del Trabajo de Fin de Máster en Ingeniería. Estas condiciones se organizan en dos grandes bloques. Por un lado, se detallan las circunstancias relacionadas con el trabajo de oficina, garantizando que el trabajador pueda realizar sus tareas sin comprometer su salud. Por otro lado, se especifican los requerimientos técnicos de carácter informático necesarios para el desarrollo del proyecto. De esta forma, el primer apartado se enfoca en preservar la salud del trabajador, mientras que el segundo detalla las especificaciones de software y hardware requeridas.

6.1. Condiciones del puesto de trabajo

A continuación, se presentan las condiciones que garantizan las prácticas correctas en la realización de un trabajo de oficina, con el objetivo de prevenir riesgos laborales mediante el cumplimiento de la Ley 31/1995 de Prevención de Riesgos Laborales. Esta ley define las garantías y responsabilidades necesarias para mantener un nivel adecuado de seguridad y protección de la salud del trabajador durante su labor. En particular, se hace referencia al Real Decreto 488/1997, de 14 de abril, que establece las disposiciones mínimas de seguridad y salud relacionadas con el trabajo con equipos que incluyen pantallas de visualización. Asimismo, se considera el Real Decreto 486/1997, de 14 de abril, que establece las disposiciones mínimas de seguridad y salud en los lugares de trabajo.

6.1.1. Equipo

La seguridad y bienestar de los trabajadores es un factor fundamental en cualquier entorno laboral. En este sentido, la utilización de equipos de trabajo no debe generar riesgos para la salud. En esta sección se analizarán las especificaciones clave para los componentes principales de un puesto de trabajo, buscando minimizar la fatiga y prevenir una posibles lesión

- **Pantalla:** debe producir imágenes nítidas y estables. La pantalla debe ser orientable y reclinable, permitiendo al usuario ajustarla a su postura para evitar tensiones en el cuello y espalda.
- **Teclado:** debe ser independiente de la pantalla, permitiendo al trabajador adoptar una postura cómoda y evitar el cansancio en las articulaciones de las muñecas y manos. Se necesita espacio suficiente en la mesa para apoyar cómodamente brazos y manos. Los caracteres del teclado deben ser legibles y fácilmente identificables.

- **Mesa:** Debe tener dimensiones suficientes para tener la pantalla, teclado, documentos y material necesario para el desarrollo del trabajo. La colocación de los materiales debe facilitar un flujo de trabajo eficiente y minimizar movimientos innecesarios.
- **Silla:** El asiento debe ser estable y firme, la altura del asiento y el respaldo debe ser regulable para poder adaptarse al usuario.

6.1.2. Entorno

El entorno de trabajo desempeña un papel fundamental en la seguridad, la salud y el rendimiento de los trabajadores. Este entorno se compone de varios elementos interrelacionados:

- **Espacio:** El puesto de trabajo debe tener dimensiones suficientes para permitir cambios de postura y movimientos libres, evitando posiciones forzadas y fatiga
- **Iluminación:** La iluminación general y especial (lámparas, LEDs o flexos) deben combinarse para garantizar niveles suficientes de luz, evitando la fatiga visual.
- **Reflejos:** Las fuentes de luz natural no deben producir deslumbramientos directos o reflejos en las pantallas, ya que pueden causar molestias y fatiga visual, si se producen deslumbramientos, se deben implementar dispositivos de cobertura regulables para mitigar el problema.
- **Ruido:** El ruido generado por los equipos debe ser controlado para evitar la distracción, la interrupción de la comunicación verbal y sobre todo evitar fatiga debido al ruido.
- **Calor:** Los equipos instalados no deben generar un calor adicional que cause molestias o afecte la temperatura ambiente.
- **Emisiones:** La radiación, fuera del espectro visible, debe mantenerse a niveles insignificantes y dentro de los límites permitidos para proteger la salud de los trabajadores.
- **Humedad:** La humedad ambiental debe mantenerse en niveles aceptables.

6.2. Condiciones de los recursos informáticos

En este apartado se muestran las especificaciones técnicas para el desarrollo del proyecto. Al ser un trabajo con alta demanda computacional, equipo necesario tiene que ser de alta calidad.

6.2.1. *Hardware*

Se han empleado varios ordenadores, dependiendo de las necesidades de cada una de las tareas.

- **Ordenador portátil**
 - CPU: AMD Ryzen 5 5600H 3.30 GHz, 6 núcleos
 - RAM: 16 GB DDR4 a 3200 MHz
 - GPU: Nvidia Gforce RTX 3050
- **Ordenador de sobremesa, Hyperloop**
 - CPU: Intel(R) Xeon(R) Gold 6148 CPU 2.40GHz, 80 núcleos
 - RAM: 192 GB
- **Superordenador Sirius, UPV**
 - CPU: Intel(R) Xeon(R) Platinum 8480+, 5940 núcleos
 - RAM: 370 GB
- **Superordenador Shaheen, KAUST**
 - CPU: AMD EPYC 965 96C 2.4GHz, 877 824 núcleos
 - RAM: 370 GB

6.2.2. *Software*

El *software* empleado se divide en tres categorías categorías,

- **Cálculo**
 - Fortran 90
 - Microsoft Visual Studio Code
- **Post-procesado**
 - MATLAB R2023b
- **Redacción**
 - LATEX

7 | Presupuesto

Se presenta a continuación el presupuesto estimado para la realización de este Trabajo de Fin de Máster. Sería el coste que hubiera supuesto si se hubiera realizado por la vía privada. También se deben contabilizar los recursos utilizados, tanto de personal como materiales, incluyendo el número de horas de uso, el coste de utilización y de adquisición si lo hubiese. Todo ello se expone a lo largo de este capítulo.

7.1. Coste de personal

El coste de personal se corresponde con el del autor de este trabajo y el del tutor académico. Este coste es proporcional a las horas dedicadas al proyecto por parte del autor, abarcando las horas invertidas en la realización de los diferentes estudios, incluyendo la redacción de la memoria del Trabajo de Fin de Máster. Sabiendo que el TFM abarca 13,5 créditos, y que según el Plan Bolonia cada crédito equivale a 25 horas de trabajo, el total de horas invertidas en el proyecto suponen 337,5 horas. Estas horas se pueden dividir de la siguiente forma:

- **Entendimiento y desarrollo de software:** 240 h
- **Post-proceso:** 70 horas
- **Redacción** 27,5 horas

En la Tabla se muestran los costes obtenidos a partir del sueldo medio de un ingeniero junior y de un doctor.

Personal	Tiempo [h]	Sueldo [€/h]	Importe[€]
Ingeniero	337.5	33.75	11390.6
Doctor	30	50	1500
COSTE TOTAL			12890.6

Tabla 7.1. Costes de personal

7.2. Coste equipo informático

Esta sección se centrará en los costes tanto de hardware como de software. Los precios de compra de los equipos de oficina (ordenador portátil y de Hyperloop) fueron respectivamente 1 060 € y 6 000 €, teniendo en cuenta que el tiempo de amortización de este tipo de equipos es de 5 años, se puede calcular su coste en el proyecto.

Concepto	Importe [€]
Matlab	900
Microsoft Visual Studio Code	0
LATEX	0
Paraview	0
Ordenador portátil	106
Hyperloop	500
Sirius	28 675
Shaheen III	67.2
COSTE TOTAL	30248.2

Tabla 7.2. Costes de equipo informático

Los costes de Sirius, se ha tomado de acuerdo con la información dada por el Centro Nacional de Supercomputación se toma 1 céntimo de euro por hora y procesador y utilizándolo 2 867 520 CPU-h.

Suponiendo los mismos costes en Shaheen III por hora y procesador, se han utilizado 6 720 CPU-h.

7.3. Presupuesto total

Tipo de gasto	Importe[€]
Personal técnico	12 890,6
Equipo informático	30 248,2
Gastos indirectos (15 %)	6 470,8
Beneficio industrial (6 %)	2 588,3
COSTE SIN IVA	52 197,9
IVA (21 %)	10 961,6
COSTE TOTAL	63 159

Tabla 7.3. Presupuesto total

Por tanto, el presupuesto total para la realización de este Trabajo de Fin de Máster asciende a una cantidad de **SESENTA Y TRES MIL CIENTO CINCUENTA Y NUEVE (63 159 €)**

8 | Conclusiones y trabajos futuros

Se han logrado todos los objetivos propuestos al inicio de este proyecto, entre ellos son:

- Comprensión de la física que se encuentra en la turbulencia para su posterior análisis de los resultados
- Desarrollo de código para la obtención de datos que han permitido ser analizadas durante el post-proceso dejando el código preparado para lanzarlo en simulaciones mucho más grandes.
- Realización de un código de post-proceso en Fortran para el cálculo de los *turbulent budgets* y de esta forma mejorar la eficiencia del código.
- Aprendizaje del lenguaje Fortran enfatizando en las librerías MPI para cálculo paralelo y HDF5 para guardar datos eficientemente y de forma universal.
- Se ha tenido la oportunidad de trabajar de forma remota en sistemas operativos Linux, tanto en estaciones de trabajo relativamente pequeñas como en grandes superordenadores.
- Se han obtenido los resultados clásicos de este tipo de simulaciones permitiendo conocer las dificultades que esto supone.
- Se ha realizado una prueba de escalado de la simulación permitiendo conocer la pérdida de eficiencia en grandes simulaciones y las necesidades de optimización del código.

Finalmente, añadir que se han visto las dificultades de este tipo de simulaciones en las que un aumento de Re_τ supone un incremento totalmente desmesurado tanto en memoria RAM como en almacenamiento o tiempo de cálculo. Con todo esto incidir en que en este tipo de simulaciones el factor limitante es el almacenamiento en memoria el cual se está llegando a su límite. En cambio los tiempos de cálculo aunque son elevados son asumibles.

En cuanto a trabajos futuros, se proponen los siguientes:

- Realizar una comprensión total del algoritmo de resolución para encontrar los picos máximos de memoria y aprovechando la memoria dinámica borrar memoria que no se esté usando.
- Encontrar la manera de mejorar la eficiencia de las grandes simulaciones, de igual forma, introduciéndose muy dentro del código.
- Lanzar un código desarrollado durante este proyecto que obtiene la vida media de las estructuras turbulentas a partir de los campos fluidos obtenidos con estas simulaciones.

Bibliografía

- [1] J. Jiménez. *Turbulence and vortex dynamics*. 2004.
- [2] S. B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] H. Tennekes y J. L. Lumley. *A first course in turbulence*. The MIT Press, 1972.
- [4] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 1967.
- [5] Carlos Granero Belinchón. “Turbulencia y multifractalidad ochenta años después de la teoría de Kolmogorov 1941”. En: *Revista Española de Física* 35.1 (2021). URL: <https://revistadefisica.es/index.php/ref/article/view/2706>.
- [6] Ashley Willis. “The Openpipeflow Navier–Stokes Solver”. En: *SoftwareX* 6 (mayo de 2017). DOI: [10.1016/j.softx.2017.05.003](https://doi.org/10.1016/j.softx.2017.05.003).
- [7] Hwar C. Ku, Richard S. Hirsh y Thomas D. Taylor. “A Pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations”. En: *Journal of Computational Physics* 70.2 (1987), págs. 439-462. DOI: [10.1016/0021-9991\(87\)90190-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90190-2).
- [8] J. P. Pulicani y J. Ouazzani. “A Fourier-Chebyshev pseudospectral method for solving steady 3-D Navier-Stokes and heat equations in cylindrical cavities”. En: *Computers Fluids* 20.2 (1991), págs. 93-109. DOI: [10.1016/0045-7930\(91\)90014-9](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90014-9).
- [9] Pravin Kadu et al. “Budgets of Turbulent Kinetic Energy and Reynolds Normal Stresses in Coaxial Jets with and Without Swirl: A Numerical Study”. En: *Journal of Energy and Environmental Sustainability* 9 (ene. de 2020). DOI: [10.47469/JEES.2020.v09.100096](https://doi.org/10.47469/JEES.2020.v09.100096).
- [10] Xiaofeng Liu y Joseph Katz. “Pressure–Rate-of-Strain, Pressure Diffusion, and Velocity–Pressure-Gradient Tensor Measurements in a Cavity Flow”. En: *AIAA Journal* 56 (ago. de 2018), págs. 1-18. DOI: [10.2514/1.J056168](https://doi.org/10.2514/1.J056168).
- [11] George Khoury et al. “Direct Numerical Simulation of Turbulent Pipe Flow at Moderately High Reynolds Numbers”. En: *Flow, Turbulence and Combustion* 91 (jun. de 2013), págs. 475-495. DOI: [10.1007/s10494-013-9482-8](https://doi.org/10.1007/s10494-013-9482-8).
- [12] Jie Yao et al. “Direct numerical simulations of turbulent pipe flow up to $Re_\tau \approx 5200$ ”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 956 (feb. de 2023). DOI: [10.1017/jfm.2022.1013](https://doi.org/10.1017/jfm.2022.1013).
- [13] Sergio Pirozzoli et al. “One-point statistics for turbulent pipe flow up to”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 926 (nov. de 2021). DOI: [10.1017/jfm.2021.727](https://doi.org/10.1017/jfm.2021.727).
- [14] Sergio Hoyas et al. “Wall turbulence at high friction Reynolds numbers”. En: *Physical Review Fluids* 7 (ene. de 2022). DOI: [10.1103/PhysRevFluids.7.014602](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.7.014602).
- [15] Hassan Nagib, Ricardo Vinuesa y Sergio Hoyas. “Utilizing indicator functions with computational data to confirm nature of overlap in normal turbulent stresses: logarithmic or quarter-power”. Jun. de 2024.

Anexo I. Relación del trabajo con los objetivos de desarrollo sostenible de la agenda 2030

Objetivos de Desarrollo Sostenibles	Alto	Medio	Bajo	No Procede
ODS 1. Fin de la pobreza			✓	
ODS 2. Hambre cero			✓	
ODS 3. Salud y bienestar			✓	
ODS 4. Educación de calidad				✓
ODS 5. Igualdad de género				✓
ODS 6. Agua limpia y saneamiento			✓	
ODS 7. Energía asequible y no contaminante		✓		
ODS 8. Trabajo decente y crecimiento económico			✓	
ODS 9. Industria, innovación e infraestructuras	✓			
ODS 10. Reducción de las desigualdades			✓	
ODS 11. Ciudades y comunidades sostenibles		✓		
ODS 12. Producción y consumo responsables			✓	
ODS 13. Acción por el clima		✓		
ODS 14. Vida submarina				✓
ODS 15. Vida de ecosistemas terrestres			✓	
ODS 16. Paz, justicia e instituciones sólidas				✓
ODS 17. Alianzas para lograr objetivos		✓		

ODS 9. Industria, innovación e infraestructuras

La realización de simulaciones para la investigación y posterior desarrollo de nuevas tecnologías, se relaciona directamente con la mejora industrial, la innovación y desarrollo de infraestructura.