



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

  
ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial  
y Diseño Industrial

Análisis de la dinámica de una vía de tren bajo una carga  
móvil utilizando el método de elementos finitos periódicos

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Mecánica

AUTOR/A: Aquilino Tarí, Francisco

Tutor/a: Gregori Verdú, Santiago

Cotutor/a: Gil Romero, Jaime

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024

# Resumen

El objetivo de este trabajo es resolver la dinámica de la vía ferroviaria cuando el tren avanza a cierta velocidad. Este problema lo resolvemos realizando un modelo de elementos finitos de la estructura, pero no un modelo de elementos finitos convencional, utilizaremos una formulación que se encarga de resolver problemas de estructuras periódicas con carga móvil a velocidad constante (Periodic Finite Element Method - PFEM). Se comienza realizando un modelo de elementos finitos de la parte de la vía que se repite (bloque) y, en los extremos se aplican condiciones de contorno de periodicidad en el dominio de la frecuencia. Para desarrollar el modelo se crea un modelo CAD realista del tramo de rail y la traviesa incluidos en el bloque, considerando las características de una vía existente. Mediante un software comercial de elementos finitos se crea el modelo del cual se obtienen las características para realizar un modelo simplificado en el cual el rail se modela con una viga de Euler-Bernoulli y la traviesa con un resorte lineal. Dicho modelo simplificado es el que finalmente se usa para resolver la dinámica con PFEM en un código implementado en Matlab. La rugosidad de la vía juega un papel importante en la dinámica y se incluye siguiendo las consideraciones de la norma de la irregularidad de la vía europea y, con esto, se genera una señal a partir de una función de densidad espectral de potencia. El vehículo se simplifica mediante un modelo de una masa concentrada y una rigidez para resolver la interacción dinámica con la vía.

**Palabras Clave:** Interacción dinámica, vehículo-vía, ferrocarril, contacto rueda-carril, interacción periódica

## Resum

L'objectiu d'aquest treball és resoldre la dinàmica de la via ferroviària quan el tren avança a certa velocitat. Aquest problema el resollem realitzant un model d'elements finits de l'estructura, però no un model d'elements finits convencional, utilitzarem una formulació que s'encarrega de resoldre problemes d'estructures periòdiques amb càrrega mòbil a velocitat constant (Periodic Finite Element Method - PFEM). Es comença realitzant un model d'elements finits de la part de la via que es repeteix (bloc) i, als extrems, s'apliquen condicions de contorn de periodicitat en el domini de la freqüència. Per a desenvolupar el model, es crea un model CAD realista del tram de rail i la travessa inclosos en el bloc, considerant les característiques d'una via existent. Mitjançant un programari comercial d'elements finits es crea el model del qual s'obtenen les característiques per a realitzar un model simplificat en el qual el rail es modela amb una biga d'Euler-Bernoulli i la travessa amb un ressort lineal. Aquest model simplificat és el que finalment s'usa per a resoldre la dinàmica amb PFEM en un codi implementat en Matlab. La rugositat de la via juga un paper important en la dinàmica i s'inclou seguint les consideracions de la norma de la irregularitat de la via europea i, amb això, es genera un senyal a partir d'una funció de densitat espectral de potència. El vehicle es simplifica mitjançant un model de masses concentrades i unes rigideses per a resoldre la interacció dinàmica amb la via.

**Paraules clau:** Interacció dinàmica, vehicle-via, ferrocarril, contacte roda-rail, interacció periòdica.

## Abstract

The objective of this work is to solve the dynamics of the railway track when the train advances at a certain speed. This problem is solved by creating a finite element model of the structure, but not a conventional finite element model. We will use a formulation designed to solve problems of periodic structures with moving loads at constant speed (Periodic Finite Element Method - PFEM). The process begins by creating a finite element model of the part of the track that repeats (block), and at the ends, periodic boundary conditions are applied in the frequency domain. To develop the model, a realistic CAD model of the rail section and the sleeper included in the block is created, considering the characteristics of an existing track. Using commercial finite element software, a model is created from which the characteristics are obtained to create a simplified model where the rail is modeled with an Euler-Bernoulli beam and the sleeper with a linear spring. This simplified model is the one ultimately used to solve the dynamics with PFEM in a code implemented in Matlab. The roughness of the track plays an important role in the dynamics and is included following the guidelines of the European track irregularity standard, generating a signal based on a power spectral density function. The vehicle is simplified using a model of concentrated masses and stiffnesses to solve the dynamic interaction with the track.

**Key words:** dynamic interaction, vehicle-track, railway, wheel-rail contact, periodic interaction.

# Índice de contenidos

<b>Resumen .....</b>	<b>1</b>
<b>Resum .....</b>	<b>2</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>3</b>
<b>1 Introducción.....</b>	<b>9</b>
1.1    Importancia del transporte ferroviario .....	9
1.2    Desafíos en la dinámica de la vía férrea .....	9
1.3    Objetivos del trabajo.....	9
1.4    Objetivos de desarrollo sostenible .....	10
<b>2 Descripción de la interacción vehículo-carril .....</b>	<b>11</b>
2.1    La vía ferroviaria .....	11
2.1.1    El carril .....	12
2.1.2    La traviesa y el balasto .....	13
2.1.3    Los esfuerzos en la vía.....	14
2.2    El vehículo ferroviario.....	17
2.2.1    La caja.....	17
2.2.2    Los bogies.....	17
2.2.3    Caja de grasa.....	17
2.2.4    Eje calado .....	18
2.2.5    Suspensión primaria .....	18
2.2.6    Suspensión secundaria.....	19
2.3    Rugosidad.....	19
2.3.1    Norma utilizada .....	20
2.3.2    Función de densidad espectral de potencia (PSD).....	21
2.3.3    Método de series trigonométricas.....	22
<b>3 Modelo de Elementos Finitos de la vía .....</b>	<b>24</b>
3.1    Método de elementos finitos (FEM).....	24
3.2    Componentes del modelo .....	24
3.3    Datos a implementar en el programa.....	26
<b>4 Modelos para la interacción dinámica .....</b>	<b>28</b>
4.1    Modelización de la vía.....	29
4.1.1    Teorías de vigas para modelar la vía .....	29
4.1.2    Ecuaciones para vigas Euler-Bernoulli .....	31
4.1.3    Formulación matricial de la viga Euler-Bernoulli.....	33
4.1.3.1    Funciones de forma .....	33

4.1.3.2	Ecuación gobernante en forma matricial .....	35
4.1.3.3	Matrices de masa y rigidez de la viga recta Euler-Bernoulli.....	37
4.2	Modelización del vehículo.....	38
4.2.1	Ecuaciones de movimiento .....	40
4.3	Contacto rueda-rail mediante el método del <i>penalty</i> .....	41
4.3.1	Descripción del método del <i>penalty</i> .....	42
4.3.2	Modelización del contacto.....	43
<b>5</b>	<b>Interacción dinámica con Periodic FEM .....</b>	<b>43</b>
5.1	Descripción del problema.....	44
5.1.1	Condición de periodicidad.....	44
5.2	Respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia .....	44
5.3	Solución del PFEM.....	48
<b>6</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>49</b>
6.1	Perfil de rugosidad de la vía .....	49
6.2	Respuesta dinámica de la vía y el vehículo .....	50
6.3	Desviación típica de la fuerza de contacto .....	50
<b>7</b>	<b>Conclusiones .....</b>	<b>51</b>
<b>8</b>	<b>Referencias de la memoria .....</b>	<b>53</b>
<b>9</b>	<b>Presupuestos .....</b>	<b>56</b>
9.1	Costes de mano de obra .....	56
9.2	Coste por licencias de <i>software</i> .....	56
9.3	Coste del hardware .....	57
9.4	Coste total .....	57
	<b>Referencias del presupuesto .....</b>	<b>58</b>
<b>10</b>	<b>Pliego de condiciones.....</b>	<b>59</b>
10.1	Objetivo del Pliego de condiciones .....	59
10.2	Condiciones legales y generales .....	59
10.3	Condiciones técnicas .....	60
10.3.1	<i>Hardware</i> empleado .....	60
10.3.2	<i>Software</i> empleado .....	60
10.3.3	Especificaciones del modelo .....	60
10.4	Plazo de ejecución .....	61
10.5	Condiciones de interpretación, uso de resultados y responsabilidades .....	61
<b>11</b>	<b>Anexos .....</b>	<b>62</b>
	ANEXO I. Planos del raíl y la traviesa .....	63

ANEXO II. Código Matlab función de rugosidad .....	66
ANEXO III. Código Matlab del análisis de elementos finitos de la vía.....	67
ANEXO III. Código Matlab del análisis de elementos finitos del vehículo.....	69
ANEXO IV. Código Matlab de la transformada de Fourier .....	70
ANEXO V. Código Matlab del programa principal de elementos finitos periódicos (PFEM) .....	71
ANEXO VI. Código Matlab de la desviación típica en función de la velocidad .....	74

# Índice de figuras

Figura 1.1. Objetivos de Desarrollo Sostenible. Fuente:[1] .....	10
Figura 2.1. Superestructura de la vía tradicional. Fuente:[2] .....	12
Figura 2.2. Dimensiones de los carriles UIC más habituales. Fuente:[2] .....	12
Figura 2.3. Posición de los componentes de la vía. Fuente: [2] .....	14
Figura 2.4. Esquema de fuerzas que se producen en la vía. Fuente:[2].....	15
Figura 2.5. Reparto de la carga vertical en las traviesas. Fuente: [2] .....	15
Figura 2.6. Criterio de descarrilo de Nadal. Fuente:[2].....	16
Figura 2.7. Cargas sobre el raíl. Fuente:[2] .....	16
Figura 2.8. Esquema de un bogie. Fuente:[4].....	17
Figura 2.9. Suspensión primaria. Fuente:[5] .....	19
Figura 2.10. División de la función espectral de potencia $psd(wk)$ . Fuente:[8].....	23
Figura 3.1. Raíl creado .....	25
Figura 3.2. Propiedades del acero AISI 1020 .....	25
Figura 3.3. Traviesa .....	26
Figura 3.4. Propiedades del hormigón pretensado .....	26
Figura 3.5. Análisis estático, medición de desplazamientos.....	27
Figura 3.6. Propiedades de la sección UIC-60 .....	28
Figura 4.1. Modelo de media vía continuo con traviesas uniformemente distribuidas. Fuente:[15] .....	29
Figura 4.2. Modelo de media vía discontinuo con traviesas discretas. Fuente:[15].....	29
Figura 4.3. Cinemática de una viga recta tipo Euler-Bernoulli. Fuente:[16] .....	30
Figura 4.4. Cinemática de una viga recta de Timoshenko. Fuente:[16] .....	31
Figura 4.5. Interacción vertical entre un vehículo ferroviario y la vía. Fuente:[17] .....	39
Figura 4.6. Modelo del vehículo simplificado.....	40
Figura 4.7. Método de contacto del penalty .....	42
Figura 4.8. Rigidez de contacto de la rueda/rail contra una fuerza normal de contacto. Fuente:[19] .....	43
Figura 5.1. Vía de tren como una estructura periódica.....	44
Figura 5.2. Tramo de la vía con los nodos izquierdo, internos y derechos. ....	45
Figura 6.1. Perfil de rugosidad de la vía.....	49
Figura 6.2. Representación de la fuerza de contacto $f$ a lo largo del bloque de vía. ....	50

Figura 6.3. Fuerza y rugosidad en el dominio de la frecuencia..... **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 6.4. Desviación estándar en función de la velocidad. .... 51

## Índice de tablas

Tabla 1. Espectros de rugosidad combinada de referencia representativos de los diferentes tipos de sistemas de frenado. Fuente:[10].....	21
Tabla 2. Inputs del programa .....	28
Tabla 3. Propiedades del acero AISI 1020.....	28
Tabla 4. Coste de mano de obra.....	56
Tabla 5. Coste de las licencias de Software.....	57
Tabla 6. Coste del hardware .....	57
Tabla 7. Importe total del servicio de ingeniería .....	57

# 1 Introducción

## 1.1 Importancia del transporte ferroviario

Los trenes han sido un medio de transporte fundamental desde la Revolución Industrial, gracias a que han facilitado el movimiento de personas y mercancías a través de largas distancias de manera eficiente. Con el avance de la tecnología y el incremento de la velocidad de los trenes, la dinámica ferroviaria ha adquirido una importancia crucial para garantizar la seguridad y el confort de los pasajeros, así como asegurar la integridad de la infraestructura ferroviaria.

## 1.2 Desafíos en la dinámica de la vía férrea

El estudio de la interacción entre el tren y la vía es esencial para entender y resolver los problemas derivados de las cargas móviles que afectan a la estructura de la vía.

Tradicionalmente, los modelos de elementos finitos han sido utilizados para analizar estas interacciones, pero los métodos convencionales pueden ser insuficientes para resolver estas estructuras periódicas y cargas móviles a velocidad constante.

En este contexto, el Método de Elementos Finitos Periódicos (PFEM) puede ser una solución avanzada para abordar estos desafíos. Este método permite modelar de manera precisa la repetición periódica de la vía y aplicar condiciones de contorno específicas para lograr un análisis dinámico más preciso.

## 1.3 Objetivos del trabajo

Este trabajo tiene como objetivo resolver la dinámica de la vía férrea bajo la influencia de un tren en movimiento, utilizando el PFEM. Para ello, se desarrolla un modelo CAD realista del tramo de riel y traviesa para obtener datos que después se usarán para crear un análisis de elementos finitos tanto de la vía como del vehículo mediante el software MATLAB y se representará la interacción dinámica en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Además, se considera la rugosidad de la vía siguiendo las normativas europeas, lo que añade realismo al modelo y permite generar señales a partir de funciones de densidad espectral de potencia. Hay que prestar atención en el contacto rueda-raíl que modela la interacción utilizando el método del *penalty* y a la condición de periodicidad de la vía que hace posible la aplicación del programa PFEM.

Finalmente, se simplifica la representación del vehículo ferroviario mediante un modelo de masa concentrada con rigidez, lo que facilita la resolución de la interacción dinámica

entre el tren y la vía. Este enfoque no solo proporciona una comprensión de la dinámica de la vía, sino que también ofrece una útil herramienta para el diseño y mantenimiento de infraestructuras ferroviarias más seguras y eficientes.

## 1.4 Objetivos de desarrollo sostenible

Los ODS (Objetivos de Desarrollo Sostenible) son una serie de objetivos propuestos por la ONU (Organización de las Naciones Unidas) para conseguir un futuro sostenible para todo el mundo. Los ODS se interrelacionan entre sí y nos muestran los desafíos a los que nos enfrentamos diariamente como son la desigualdad, el clima, la pobreza, la degradación ambiental, la paz, la justicia y la prosperidad. Estos objetivos están planeados para cumplirse antes del año 2030. Se puede observar cuales son los ODS en la siguiente figura:



Figura 1.1. Objetivos de Desarrollo Sostenible. Fuente:[1]

Todos los ODS están relacionados, lo que implica que la actuación en cualquiera de ellos afecta directamente a los demás. De entre los 17 ODS, en este trabajo de fin de grado podemos relacionar x de ellos:

- 9. Industria, Innovación e Infraestructura. Este objetivo busca desarrollar infraestructuras resilientes, promover la industrialización sostenible y fomentar la innovación. Este trabajo de fin de grado contribuye a mejorar las infraestructuras ferroviarias , optimizando su diseño, durabilidad y eficiencia.

- 11. Ciudades y comunidades sostenibles. Este objetivo pretende lograr que las ciudades y los asentamientos humanos sean inclusivos, seguros, resilientes y sostenibles. El transporte ferroviario es fundamental en las ciudades modernas y con este trabajo de fin de grado se puede optimizar la calidad de este medio de transporte, mejorando su seguridad, eficiencia y sostenibilidad, mejorando la calidad de vida de las personas.
- 13. Acción por el clima. Este objetivo busca métodos para combatir el cambio climático. El transporte ferroviario es un medio de transporte más sostenible que otros medios de transporte, en cuanto a emisiones de efecto invernadero. Mejorando la eficiencia del sistema ferroviario, se apoya a reducir la huella de carbono en el transporte.

## 2 Descripción de la interacción vehículo-carril

La dinámica ferroviaria se basa en el estudio del movimiento de los trenes y los diversos factores que afectan al comportamiento de sus vías. Es importante mencionar el sistema vehículo-carril, donde la interacción entre las ruedas y el raíl influye en la estabilidad del tren, el desgaste de los materiales, el ruido, las vibraciones y el confort.

La estructura del tren afecta directamente a cómo se transmiten las fuerzas al carril. Por otro lado, la geometría de la vía también es fundamental, ya que pueden haber irregularidades en el perfil de la vía que afecten a la estabilidad del vehículo, ya sea por vibraciones o fuerzas adicionales.

### 2.1 La vía ferroviaria

La superestructura de la vía tradicional está compuesta por los raíles, fijados sobre traviesas transversales que a su vez están apoyadas sobre un lecho que está diseñado con cierta elasticidad compuesto por el balasto (grava de ciertas características) y las capas inferiores (sub-balasto). [2]

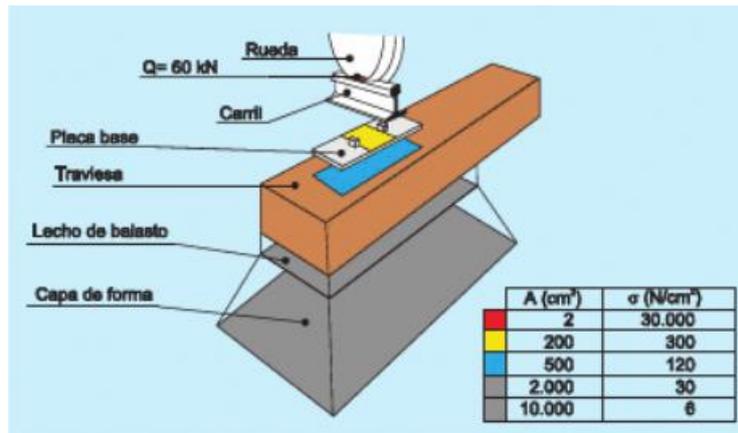


Figura 2.1. Superestructura de la vía tradicional. Fuente:[2]

El carril es el elemento que guía al tren y soporta las cargas que se transmiten a través de los cagones y las ruedas, que generalmente suelen ser llantas de acero. Por otro lado, las traviesas tienen como función mantener una distancia constante entre carriles y transmitir los esfuerzos que recibe el carril al balasto. Por último, el sub-balasto que su objetivo es repartir la carga que se recibe sobre el terreno y asegurar un buen drenaje del agua en caso de lluvias.

El ancho de vía se mide entre las caras inferiores de los carriles y en caso de la vía española es de 1.668 m según RENFE. [2]

### 2.1.1 El carril

El carril es el elemento de la superestructura que más soporta las cargas. Hay diversos tipos de carriles que se utilizan en la industria como se ve en la Figura 2.2. [3]

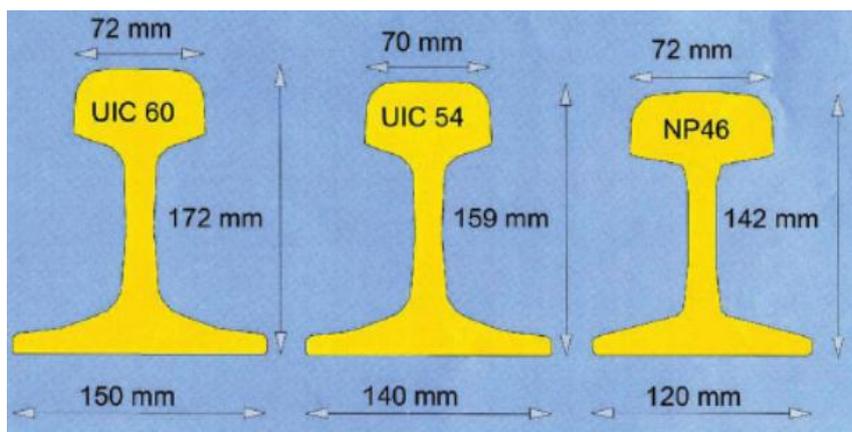


Figura 2.2. Dimensiones de los carriles UIC más habituales. Fuente:[2]

El carril tiene como funciones resistir y transmitir las cargas de las ruedas a los diferentes elementos de la vía; guiar a los vehículos y la adhesión a la vía en caso de frenado y aceleración; y conducir la corriente de electrificación y señalización.

El carril debe tener una superficie lisa y poco deformable, así como tener una rigidez que impida su flexión bajo la carga del tren. Por otro lado, cuanto mayor peso por metro mayor es la duración del carril, ya que será más resistente, estará sometido a menor flexión y soportará menor fatiga. Sin embargo, es más conveniente conseguir el menor peso por metro posible para que el coste se reduzca. [2]

En el anexo I se muestra el carril UIC-60 el cual me he basado para crear el modelo CAD. Consta de tres partes, la cabeza, el alma y el patín. La zona donde van apoyadas las ruedas es la banda de rodadura y esta debe encajar a la perfección con la rueda para asegurar la estabilidad.

### 2.1.2 La traviesa y el balasto

La traviesa es el elemento transversal de la vía que se sitúa entre el balasto y el carril. Sirve para soportar a los carriles y mantiene el ancho de la vía. También se encarga de resistir los esfuerzos de la vía en las tres direcciones y transmitirlos al balasto.

En la antigüedad se utilizaban las traviesas metálicas, pero en la actualidad son de hormigón armado y pretensado o de madera. Dentro de las ventajas de las traviesas de madera encontramos, la resistencia mecánica y al deslizamiento, su capacidad para ser reutilizadas y su peso reducido que garantiza un fácil manejo de unos 80kg. Por el contrario, sus desventajas son el envejecimiento y deterioro, su combustibilidad y al tener un menor peso resulta en una menor estabilidad de la vía. Las ventajas de las traviesas de hormigón son que tienen una gran duración en servicio, dos o tres veces más que las de madera, mantienen a lo largo de toda su vida sus propiedades físicas y proporcionan mayor resistencia lateral a esfuerzos transversales. En su defecto, las desventajas es que frente a las traviesas de madera que son de peso reducido, las traviesas de hormigón tienen un peso de entre 180 y 350 kg, lo que dificulta su manejo. En nuestro caso, a la hora de asignar los materiales al modelo CAD hemos utilizado una traviesa de hormigón pretensado puesto que son las que más se están utilizando actualmente. [4] [2]

Por otro lado, tal y como se ha comprobado la mejor manera de repartir las cargas bajo las traviesas es colocando un material granular, llamado balasto, que es una capa de piedra partida que se coloca encima del sub-balasto envolviendo a la traviesa. De esta manera el balasto reparte y transmite las cargas para no superar las tensiones que las capas inferiores admiten. Impide el movimiento longitudinal empotrando las traviesas y el movimiento transversal debido a la fuerza centrífuga y el movimiento de lazo.

Los tipos de roca que según la normativa española son admitidos y que se usan son piedras silíceas, preferiblemente de origen ígneo, metamórfico o sedimentario. Estas rocas han de ser extraídas, machacadas y cribadas, tratando que las piedras se aproximen lo máximo posible a formas cúbicas y con aristas vivas para que se claven a la cara inferior de la traviesa. Las medidas aceptadas dentro de la normativa española van desde los 31,5 mm a los 63 mm. [2]

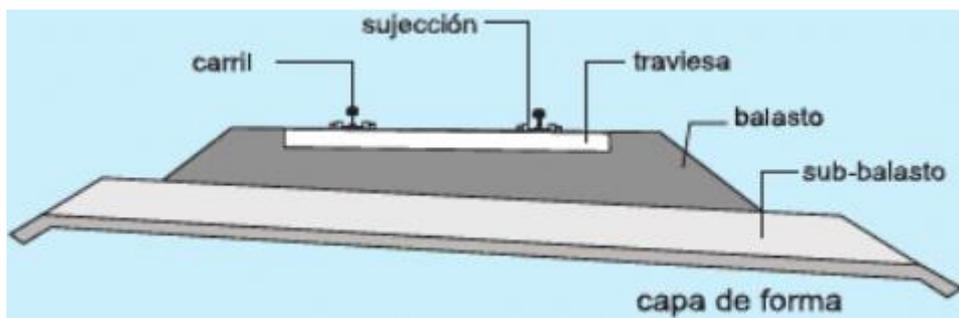


Figura 2.3. Posición de los componentes de la vía. Fuente: [2]

### 2.1.3 Los esfuerzos en la vía

En la vía se producen una serie de esfuerzos debido a las cargas, las tensiones verticales, horizontales y transversales.

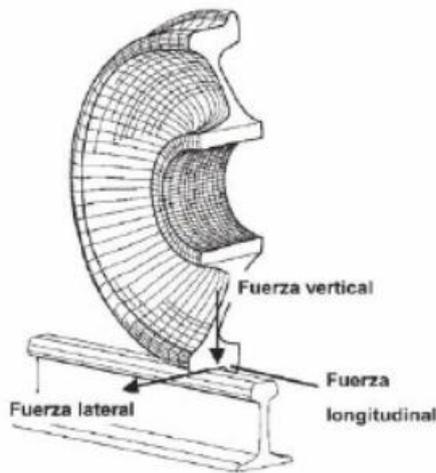


Figura 2.4. Esquema de fuerzas que se producen en la vía. Fuente: [2]

- Tensiones verticales

Las tensiones verticales son debidas principalmente a las cargas verticales que ejercen las ruedas sobre el carril. Se realizan cálculos por elementos finitos para obtener el momento flector en el carril y su variación a lo largo de toda su longitud. [2]

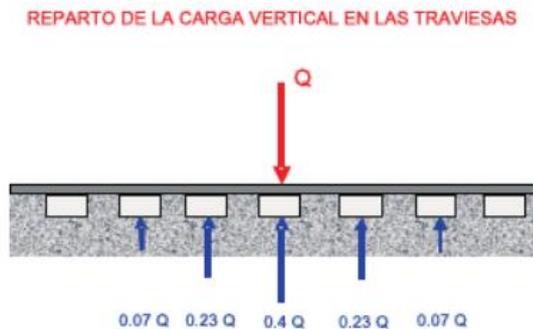


Figura 2.5. Reparto de la carga vertical en las traviesas. Fuente: [2]

- Tensiones longitudinales normales

Las tensiones longitudinales son la suma de cuatro componentes:

$$\sigma T = \sigma 1 + \sigma 2 + \sigma 3 + \sigma 4 \quad [2.1]$$

Donde  $\sigma 1$  es la flexión del carril considerando las cargas dinámicas;  $\sigma 2$  el la temperatura [  $\sigma 2 = E\alpha\Delta\theta$  ];  $\sigma 3$  es la tensión residual de laminación y  $\sigma 4$  es la tensión de colocación en curva.

- Tensiones transversales

Este tipo de esfuerzos pueden originar errores de alineación y son causados debido a esfuerzos de guiado en curvas, fuerzas centrífugas sin compensar y movimientos transversales (de lazo) que es un fenómeno producido debido a las vibraciones transversales que los trenes sufren a causa del diseño cónico de las ruedas, manifestándose en los tramos rectos al superar ciertas velocidades y provocando inestabilidad en el vehículo.[2], [5]

Las tensiones transversales afectan a la estabilidad transversal de la vía. Pueden producir criterio de ripado (acción de desplazar la vía lateralmente) y el criterio de descarrilo de Nadal, que relaciona la carga vertical de la rueda (Q) y el esfuerzo transversal (Y).

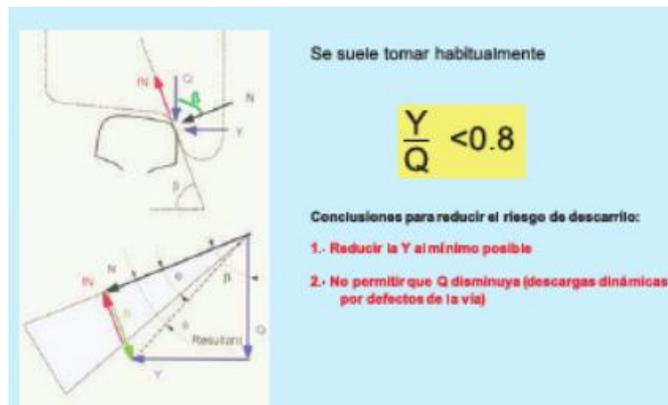


Figura 2.6. Criterio de descarrilo de Nadal. Fuente:[2]

Este tipo de cargas también pueden afectar al volcamiento del carril si se supera la resistencia de fijación de dicho carril.

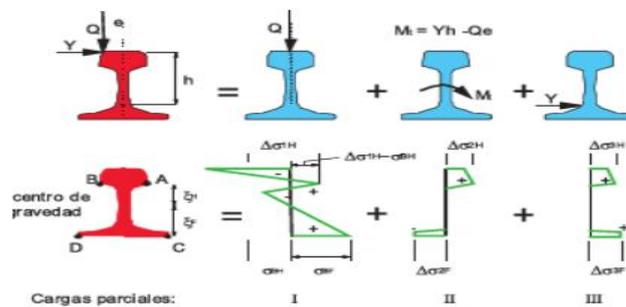


Figura 2.7. Cargas sobre el raíl. Fuente:[2]

## 2.2 El vehículo ferroviario

Un vehículo ferroviario es un sistema dinámico que ejerce cargas en movimiento. Está compuesto por una estructura y un chasis que engloba elementos como las ruedas, las cajas de grasa, la caja, la suspensión, los órganos de tracción y choque, los frenos y otros accesorios. [6]

### 2.2.1 La caja

La caja es el conjunto que engloba los equipos necesarios para que el vehículo funcione, donde se sitúan los pasajeros y la carga. La caja se apoya sobre los bogies gracias a distintos elementos de suspensión de los que se hablará en apartados próximos.[6]

### 2.2.2 Los bogies

Llamamos bogie al sistema compuesto por dos ejes unidos a un bastidor con una suspensión incorporada llamada suspensión secundaria. La suspensión primaria es la que relaciona el bogie y el bastidor. El bogie es la estructura rodante sobre la que están colocados los vagones, coches de ferrocarril y locomotoras. La caja del vehículo esta unida a la carrocería con la ayuda del pivote. [6]

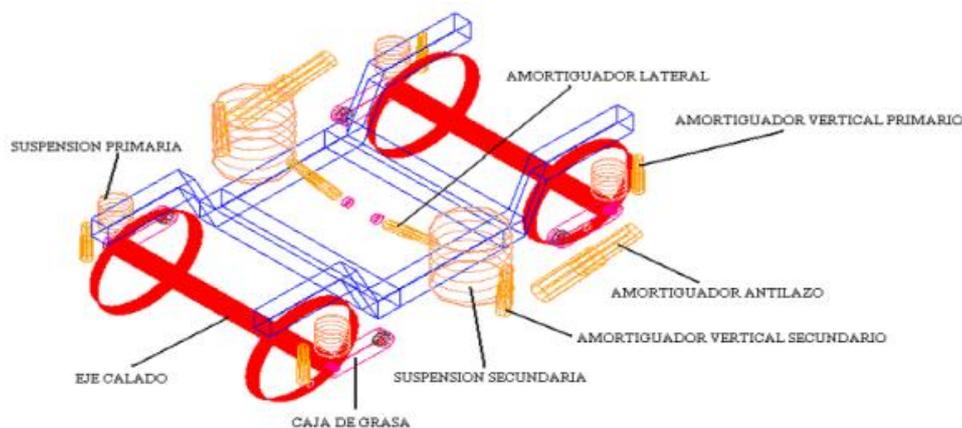


Figura 2.8. Esquema de un bogie. Fuente:[4]

El bogie cumple funciones de frenado, suspensión del tren y de tracción. Encontramos los bogies tractores y bogies portadores o remolcados. Los bogies tractores están equipados con un motor o con engranajes en caso de tracción indirecta. Los bogies remolcados no disponen de motor y sirven para asegurar la distribución de las cargas.[4]

### 2.2.3 Caja de grasa

La caja de grasa es un elemento que sirve para asegurar la unión entre los ejes y el bogie, aparte de facilitar la rodadura de los ejes y se coloca entre el eje de las ruedas y el

bastidor. Permite transmitir los esfuerzos de frenado desde los ejes a la masa del vehículo y lubricar las partes metálicas mientras se disminuye el rozamiento y el calentamiento del eje. Contiene los cojinetes que permiten el giro del eje, que se colocan en la zona del eje denominada mangueta. Transfieren el peso del vagón, coche o locomotora a las ruedas. [6]

#### 2.2.4 Eje calado

Este elemento consiste en dos ruedas fijas unidas por un eje común, lo que significa que ambas ruedas tengan la misma velocidad angular y mantengan una distancia constante. Las ruedas comienzan siendo cónicas con inclinaciones de 1/20 o 1/40, pero sufren un desgaste acelerado debido a su uso, algo que provoca que adquieran una curvatura transversal.

Durante muchos años se han desarrollado teorías e ideas sobre la conicidad de las ruedas y se ha investigado cómo afecta a los perfiles para definir cuánta banda de rodadura y cabeza han de tener. Es importante investigar sobre este fenómeno puesto que estos perfiles determinan el guiado de los vehículos y su situación espacial en cada punto del trazado de una línea ferroviaria.[6]

#### 2.2.5 Suspensión primaria

La suspensión primaria está situada entre los ejes y el bastidor del bogie como vemos en la *figura 2.9*. Esta suspensión se encarga de filtrar las vibraciones que se producen por irregularidades que se transmiten desde la vía a las ruedas, evitando que estas vibraciones se transmitan a las demás partes del vehículo. Aparte de esto, la suspensión primaria también asegura un correcto reparto del peso sobre las ruedas, evitando de esta manera la pérdida de contacto entre ambas, algo que puede generar serios problemas.

Para la implementación de la suspensión primaria, se utiliza un conjunto de muelle helicoidal y amortiguador en cada extremo del eje. El muelle helicoidal permite el movimiento con algo de rigidez en cada extremos, mientras que el amortiguador se encarga de reducir estos movimientos y transformar la energía del movimiento en calor para así disiparlo. También se encarga de asegurar el guiado en dirección longitudinal y transversal. [6]

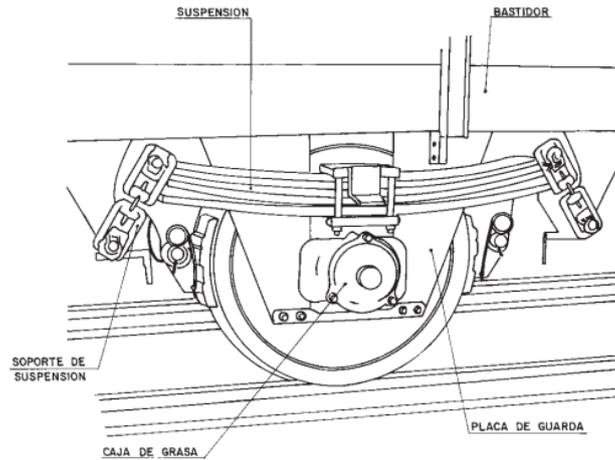


Figura 2.9. Suspensión primaria. Fuente:[5]

### 2.2.6 Suspensión secundaria

La suspensión secundaria se encarga de filtrar los movimientos del bogie respecto de la caja del vagón, por eso se encuentra entre estos dos elementos. Hay dos tipos de suspensión secundaria, compartiendo el mismo tipo de amortiguación. No obstante, encontramos la diferencia en el elemento de la rigidez, habiendo dos tipos: el muelle helicoidal común o un resorte neumático.

La configuración de los resortes helicoidales incluye un conjunto que ofrece flexibilidad vertical y lateral. Para mejorar esta última flexibilidad se colocan apoyos de caucho-metal en la base de los resortes helicoidales. Finalmente, se complementa la suspensión con amortiguadores hidráulicos que actúan en las direcciones verticales y laterales, garantizando así un mayor control sobre los movimientos.

Por otro lado, la configuración de resortes neumáticos garantiza la flexibilidad lateral y vertical gracias a los resortes. El amortiguamiento vertical se logra a través de un orificio que conecta el balón neumático con un depósito auxiliar, mientras que la amortiguación lateral se logra usando amortiguadores hidráulicos. [6]

## 2.3 Rugosidad

La rugosidad superficial hace referencia a las desviaciones o irregularidades en la textura de la superficie de un material. Se encarga de medir la altura y profundidad de las irregularidades de la superficie mediante el uso de varias técnicas ya sean con contacto o sin contacto. En este proyecto se va a simular y desarrollar un modelo de simulación de rugosidad superficial basado en un espectro de densidad de potencia

(PSD), utilizando un método de serie trigonométrica aleatoria e implementando un bucle que genere los perfiles de rugosidad que buscamos.

La rugosidad de la superficie juega un papel muy importante en la determinación del rendimiento, la durabilidad y la confiabilidad de las vías ferroviarias. Una superficie lisa reduce la fricción, mejora el rendimiento de la vía y minimiza su desgaste. Por el contrario, una superficie rugosa aumenta la fricción, el desgaste y reduce el rendimiento de los perfiles, además de generar vibraciones y ruidos.[7]

Debido al uso prolongado de las vías ferroviarias, aumenta la deformación acumulada de la estructura provocando varias irregularidades, como irregularidad en el perfil de la vía, irregularidad en el nivel transversal de la vía, irregularidad en la alineación de la vía y irregularidad en el ancho de la vía. Este tipo de irregularidades generan vibraciones perjudiciales entre el vehículo y la vía, deteriorando la calidad en la marcha del tren y causando daños a componentes del sistema rueda-carril o la vía. Este tipo de irregularidades se consideran un proceso aleatorio y por tanto, se procesan como un proceso aleatorio ergódico estacionario en el análisis de simulación de la estructura de la vía.[8]

Durante el contacto rueda-carril, la vibración es generada al entrar en contacto las superficies rugosas de los dos componentes. La vibración se transmite mecánicamente al terreno por medio de las traviesas, el balasto y la infraestructura generando así ruido. Para frecuencias menores a 500 Hz la mayor parte del ruido que se genera es por culpa de las traviesas, ya que vibran debido al contacto rueda-carril. Para velocidades comprendidas entre 60-250 km/h sabemos que la principal fuente de ruido se debe a la rugosidad de las superficies de la rueda y el carril, ya que para velocidades inferiores a 60 km/h la fuente principal de ruido es la propia maquinaria ferroviaria, y para velocidades superiores a 250 km/h la fuente principal de sonido es la componente aerodinámica. Por tanto, podemos afirmar que en ese intervalo de velocidades es donde la rugosidad tiene mayor impacto, por ello es interesante tenerla en cuenta.[9]

### 2.3.1 Norma utilizada

Para desarrollar el perfil de rugosidad de la vía me he basado en la norma europea EN 13979-1:2020 [10] que utiliza longitudes de onda adecuadas para la simulación buscada. Los datos de la tabla 1 presentan los niveles de rugosidad combinada en dB para longitudes de ondas distintas bajo tres tipos de bloques de freno. En el caso de este

proyecto, el tipo de rueda escogido no utiliza frenado de llanta (Not tread braked), teniendo sistemas de freno alternativos para que no afecte directamente a la superficie de la rueda que está en contacto con el carril, ayudando de esta manera a que no se produzca tanto desgaste, ruido y que se pueda analizar mejor el efecto de la rugosidad.

Wavelength (cm)	Combined roughness level (dB ref 1 $\mu\text{m}$ )		
	Composite brake blocks	Cast Iron brake blocks	Not tread braked
25	11,3	11,8	12,3
20	9,2	10,3	10,9
16	7,4	9,1	9,6
12	5,5	8,0	8,7
10	3,6	7,3	7,5
8	1,9	7,2	6,0
6,3	0,1	7,9	4,6
5	-1,6	7,6	3,2
4	-3,3	6,8	1,7
3,15	-4,1	5,6	0,5
2,5	-4,8	4,0	0,0
2	-5,5	1,6	-2,8
1,6	-6,1	-0,3	-3,4
1,25	-6,8	-1,7	-4,0
1	-7,5	-3,2	-4,5
0,8	-8,1	-4,9	0,5
0,63	-8,8	-6,5	0,4
0,5	-9,5	-8,1	0,4
0,4	-10,4	-9,6	0,3

Tabla 1. Espectros de rugosidad combinada de referencia representativos de los diferentes tipos de sistemas de frenado. Fuente:[10]

Con esta serie de datos de longitudes de onda y niveles de rugosidad en dB se consigue representar un conjunto de frecuencias presentes en el perfil de rugosidad. Con estos valores se interpola la densidad espectral de potencia que define el comportamiento de la superficie.[10]

### 2.3.2 Función de densidad espectral de potencia (PSD)

Se denomina espectro de irregularidad de la vía a la densidad espectral de potencia unilateral de la señal de irregularidad aleatoria de la estructura de la vía. La irregularidad de la vía se puede simular como una función aleatoria, que puede considerarse una onda armónica siendo la superposición de una serie de ondas armónicas con diferentes longitudes de onda, amplitudes y fases que cambian con la longitud de la vía.[8]

La función espectral de potencia (PSD) es la función estadística más empleada para expresar la irregularidad de la vía, tratada como un proceso aleatorio estacionario. Esto quiere decir que es un proceso donde las propiedades estadísticas como la media y la varianza no cambian con el tiempo y no presentan una dirección preferida. En el campo

de la ingeniería, el espectro de densidad de potencia se utiliza para describir cómo cambia la densidad espectral en función de la frecuencia. El diagrama espectral de la irregularidad de la vía se muestra normalmente en coordenadas espaciales, que muestran cómo cambia la irregularidad con la frecuencia. Por este motivo, para describir la irregularidad de la vía es conveniente usar la frecuencia espacial [ciclos/m] o el número de onda [rad/m].[8]

En particular, en el contexto de la rugosidad, nos permite comprender cómo las distintas longitudes de onda del apartado anterior contribuyen a crear el perfil de la superficie. Para ello, es preciso transformar los datos de rugosidad de la *tabla 1* medidos en dB a una escala lineal. La expresión será:

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P}{P_{ref}} \right)$$

$$P = P_{ref} \cdot 10^{\frac{dB}{10}}$$
[ 2.2]

Sabiendo que la potencia de referencia es 1  $\mu\text{m}$ , la función espectral de potencia será:

$$PSD = 10^{\frac{dB}{10}} \quad [\mu\text{m}^2/(\text{rad/m})]$$

Después calculamos el número de onda o frecuencia espacial, que indica cuantas veces se repite una onda por metro de superficie:

$$W_k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [\text{rad/m}]$$
[2.3]

Finalmente interpolamos el número de onda para conseguir frecuencias espaciales más exactas, lo cual permite trabajar con un espectro más detallado y obtener una representación más elaborada.

### 2.3.3 Método de series trigonométricas

El último paso para generar el perfil de rugosidad de la vía es generar una señal, haciendo sumas de frecuencias, cada una generada con una fase aleatoria y una amplitud proporcional a la PSD. Para conseguir esto, empleamos el método de las series trigonométricas el cual es una técnica que permite modelar un proceso aleatorio estacionario como la suma de cosenos con amplitudes, frecuencias y fases en función de la PSD.[8]

La rugosidad superficial se puede aproximar de la siguiente manera:

$$z(x) = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \cos(w_k x + \varphi_k) \quad [2.4]$$

Donde sabemos que:

- $\varphi_k$  es una fase aleatoria que se genera uniformemente entre  $[0, 2\pi]$ .

$$\varphi_k = 2 \cdot \pi \cdot k \quad [2.5]$$

Siendo  $k = 1, 2, 3, 4, \dots, N$

- $a_k$  es una variable aleatoria Gaussiana de media 0 y desviación típica  $\sigma_k$ , que depende de la función espectral de potencia.

$$a_k = \sigma_k \cdot k \quad [2.6]$$

Siendo  $k = 1, 2, 3, 4, \dots, N$

- $w_k$  es el número de onda.
- $N$  es el número total de frecuencias consideradas.
- $x$  es el vector de posiciones a lo largo de la longitud de la superficie.

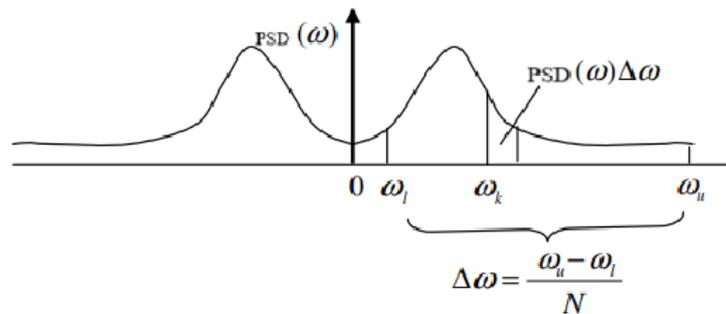


Figura 2.10. División de la función espectral de potencia  $psd(w_k)$ . Fuente: [8]

La desviación típica  $\sigma_k$  se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma_k^2 = 4 \cdot psd(w_k) \cdot \Delta w_k \quad [2.7]$$

- $psd(w_k)$  es el valor de la función espectral de potencia para el número de onda  $w_k$ .
- $\Delta w_k$  es el paso entre frecuencias.

De esta manera aplicando esta serie trigonométrica se obtiene el perfil de rugosidad de la vía.[8]

## 3 Modelo de Elementos Finitos de la vía

En este capítulo se va a describir el proceso de modelado de la vía ferroviaria utilizando el método de elementos finitos, aplicado a través del programa comercial SolidWorks y el fin de la creación de este modelo.

### 3.1 Método de elementos finitos (FEM)

Los métodos de elementos finitos o Finite Elements Methods (FEM) es una técnica numérica donde se realiza un mallado detallado sobre las estructuras que nos interesa analizar para dividirlos en un número finito de elementos y estudiar las características físicas que nos interesan de cada elemento. Esto permite convertir un sistema de infinitos grados de libertad en un sistema con finitos grados de libertad definidos por el número finito de parámetros asociados a ciertos puntos característicos, llamados nodos que son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes. El comportamiento en el interior de cada elemento queda especificado a partir del comportamiento de los nodos mediante las funciones de forma.[11], [12]

En definitiva, el FEM se basa en transformar un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado, proceso que se denomina discretización del modelo. Es una aproximación de ciertos valores gracias al conocimiento de un número determinado de puntos. Se puede entender el método como una generalización del cálculo matricial de estructuras, desde el punto de vista estructural, al análisis de sistemas continuos.[12]

### 3.2 Componentes del modelo

La creación del modelo de elementos finitos es una acción para implementar una serie de datos para realizar los cálculos por Matlab del análisis de elementos finitos periódicos.

El modelo creado se compone de un tramo de un carril de una vía de tren sobre una traviesa de concreto simplificada. Al ser la vía de tren simétrica, el modelo lo podemos dividir por la mitad para simplificar los cálculos. Los componentes son los siguientes:

- El rail

El rail creado que se muestra en la *figura 2.11* está basado en un perfil UIC-60-E1, que lo encontramos en el apartado *Planos* de la memoria, y es empleado normalmente en las vías ferroviarias españolas.



Figura 3.1. Rail creado

El material empleado se trata de acero AISI 1020, ya que presenta buenas propiedades de ductilidad , resistencia a la tracción y buena resistencia mecánica. Las propiedades del acero AISI 1020 se muestran en la

Propiedades	
Nombre:	AISI 1020
Tipo de modelo:	Isotrópico elástico lineal
Límite elástico:	351,571 MPa
Límite de tracción:	420,507 MPa
Módulo elástico:	200 GPa
Coefficiente de Poisson:	0,29
Densidad:	7.900 kg/m <sup>3</sup>
Módulo cortante:	77 GPa
Coefficiente de dilatación térmica:	1,5·10 <sup>-5</sup> 1/Kelvin

Figura 3.2. Propiedades del acero AISI 1020

- La traviesa

La traviesa que observamos en la *figura 3.3* creada es una simplificación de las traviesas propuestas en el apartado *Planos* de la memoria, ya que no se necesita una traviesa tan compleja para el tipo de resultado que queremos obtener, no influye en exceso. En la *figura 3.3* vemos como se encuentra la traviesa con la longitud original de 2600 mm y la sección de 1300 mm simplificada.



Figura 3.3. Traviesa

El material que se ha usado para modelar la traviesa es el hormigón pretensado. Se ha seleccionado este material ya que estas traviesas aseguran una gran durabilidad para los esfuerzos mecánicos y condiciones ambientales a las que estarán expuestas. Además son elementos que no requieren un gran mantenimiento y se colocan de forma mecanizada.

[13] Las propiedades del hormigón pretensado las observamos en la figura 3.4.

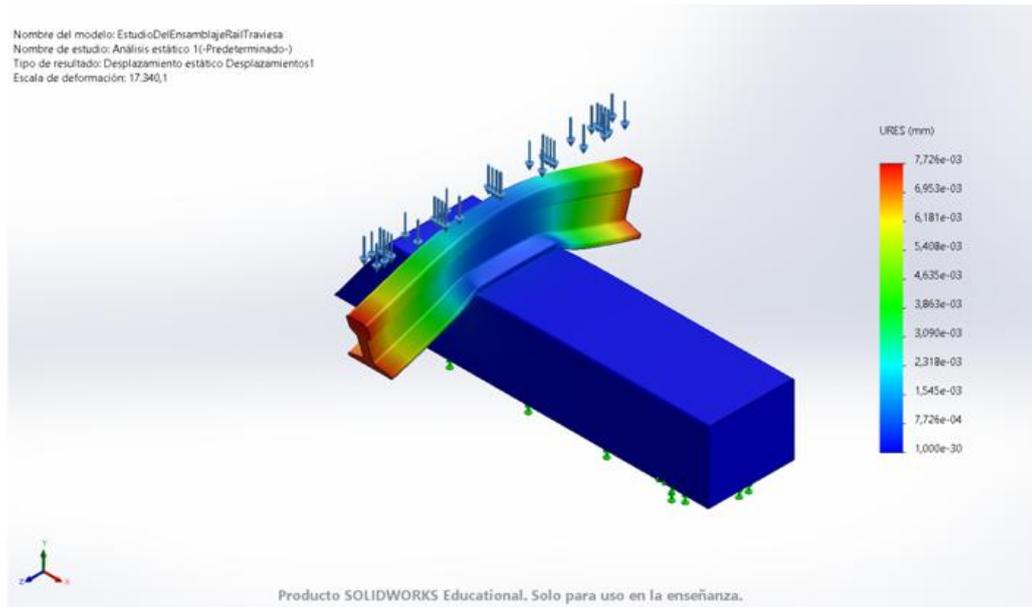
Propiedades	
Nombre:	Concreto (1)
Tipo de modelo:	Isotrópico elástico lineal
Límite elástico:	30 MPa
Límite de tracción:	5 MPa
Límite de compresión:	60 MPa
Módulo elástico:	5e0 GPa
Coefficiente de Poisson:	0,2
Densidad:	2.400 kg/m <sup>3</sup>
Módulo cortante:	2,08333·10 <sup>10</sup> N/m <sup>2</sup>

Figura 3.4. Propiedades del hormigón pretensado

### 3.3 Datos a implementar en el programa

El objetivo de la creación de este análisis de elementos finitos es para calcular datos que necesitamos implementar en Matlab como la inercia de la vía, el área de la sección y el coeficiente de rigidez que ejerce la traviesa tras el paso del tren. La rigidez de la vía es la capacidad de la estructura a resistir deformaciones bajo la influencia de cargas que afecta directamente a la interacción entre el tren y la vía.

Para calcular el coeficiente de rigidez realizamos el FEM aplicando una carga estática de 10000 N, que es el peso aproximado de un vagón y midiendo el desplazamiento de la vía. Sabiendo que el coeficiente de rigidez es medido como [N/m], sólo queda dividir la fuerza aplicada entre el desplazamiento. Este coeficiente de rigidez será aplicado en el código como una rigidez a tener en cuenta cuando haya que sacar la matriz de rigidez de la vía, tal y como comprobaremos en el capítulo 4.



Nombre	Tipo	Mín.	Máx.
Desplazamientos	URES: Desplazamientos resultantes	0 mm Nodo: 146942	0,007726 mm Nodo: 1078

Figura 3.5. Análisis estático, medición de desplazamientos.

En la figura 3.5 se observa como el desplazamiento máximo es de 0,007726 mm. Por tanto, la rigidez de la vía será de:

$$k = \frac{10000}{0.007726/1000} = 1294330831 \text{ [N/m]} \quad [3.1]$$

Finalmente, los inputs necesarios para realizar la interacción dinámica que se explicará en el capítulo 4 se calculan de la sección transversal del rail como vemos en la figura 3.6 o de las propiedades de los materiales que se han utilizado.

De la sección transversal se consiguen los siguientes datos:

Área	0.009982909686 m <sup>2</sup>
Inercia de la sección	0.000033758652846219004 m <sup>4</sup>
Longitud del tramo	0.9 m

Tabla 2. Inputs del programa

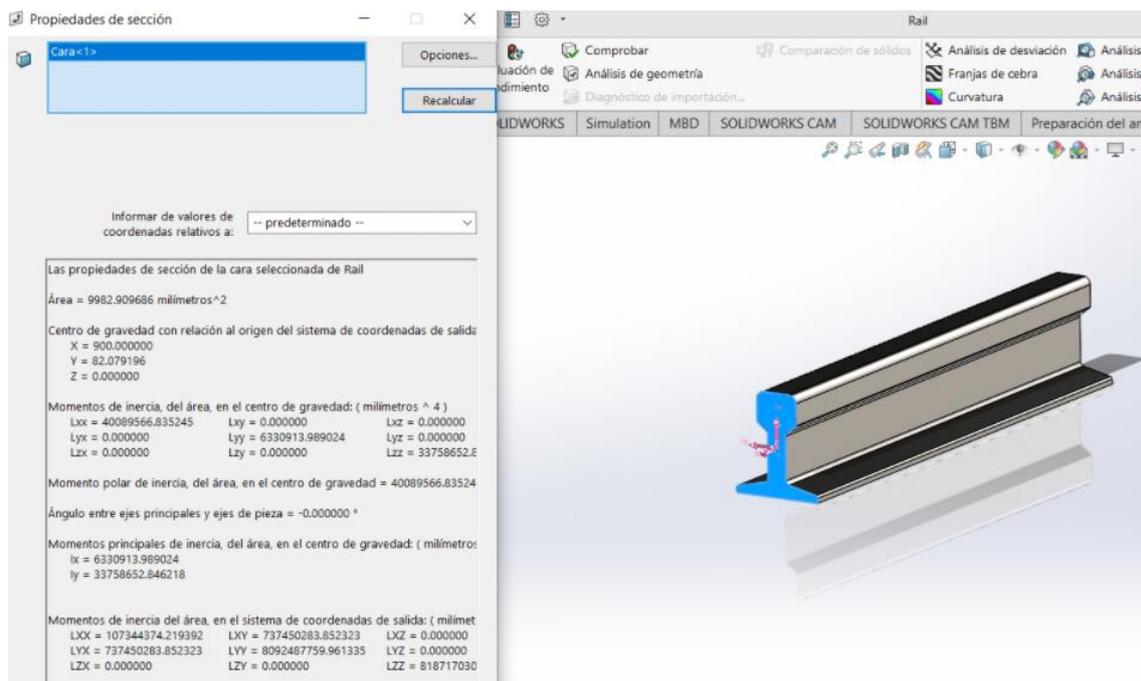


Figura 3.6. Propiedades de la sección UIC-60

La longitud del rail escogida es de 0.9 m ya que como comprobamos en [14] la separación máxima entre los ejes de las traviesas ronda unos 900 mm. El ancho de la traviesa es de 300 mm como comprobamos en el apartado *Planos*, por tanto de cada extremo de la traviesa sobresalen 300 mm hasta el punto medio del rail entre las traviesas, lo que hace una longitud final de 900 mm.

Las propiedades necesarias de los materiales son las siguientes:

Densidad	200.000.000.000 MPa
Módulo elástico	7900 kg/m <sup>3</sup>

Tabla 3. Propiedades del acero AISI 1020

## 4 Modelos para la interacción dinámica

Las interacciones dinámicas entre el vehículo, el conjunto de ruedas y la vía férrea han sido objeto de gran interés en investigaciones durante las últimas décadas. Desde el siglo XX, se han desarrollado un gran número de modelos teóricos para la interacción dinámica entre la rueda y la vía y se han realizado experimentos en muchos países. Se va a proceder en los siguientes apartados a describir un modelo numérico entre la vía y el vehículo.

## 4.1 Modelización de la vía

A la hora de modelar la vía la simplificamos a un modelo de media vía recta ya que al ser simétrica nos podemos quedar con la mitad, considerando sólo un carril. Para esto existen dos tipos de modelos, el modelo continuo y el modelo discreto de media vía que podemos observarlos en las *figuras 4.1 y 4.2*. [15]

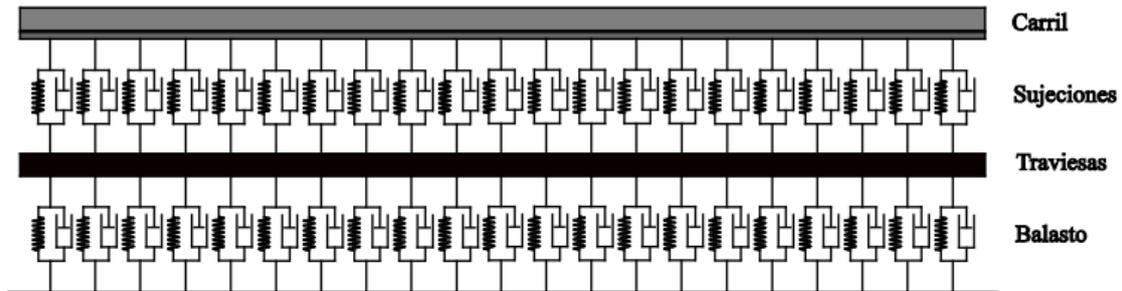


Figura 4.1. Modelo de media vía continuo con traviesas uniformemente distribuidas. Fuente:[15]

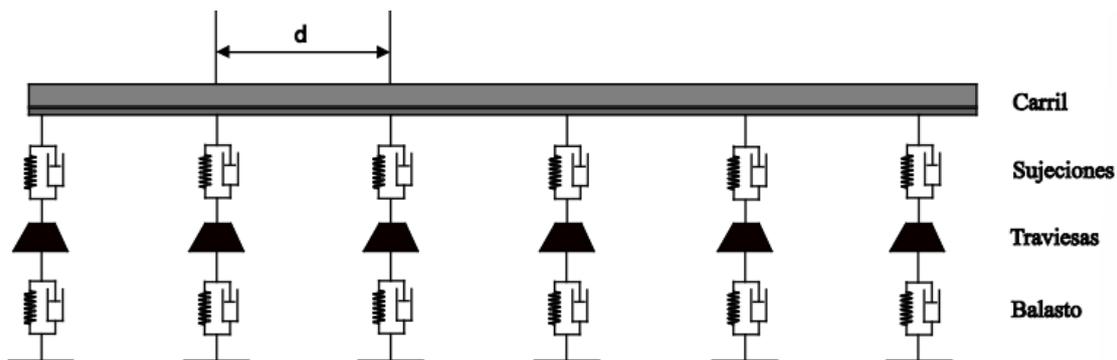


Figura 4.2. Modelo de media vía discontinuo con traviesas discretas. Fuente:[15]

El modelo continuo tiene en cuenta que parámetros de la vía como la rigidez de las fijaciones, el amortiguamiento, la masa de las traviesas, etc están distribuidos a lo largo de toda la vía, a modo de capas de rigidez, amortiguamiento o masa. Por otro lado, el modelo discreto se centra en considerar el carril soportado por elementos individuales que representan las fijaciones, las traviesas y el balasto, lo cual es más fácil modelizar el efecto de la distancia entre fijaciones o traviesas en el comportamiento de la vía. [15]

### 4.1.1 Teorías de vigas para modelar la vía

Para modelizar la vía podemos considerar que esta se puede ajustar con varios elementos tipo viga Euler-Bernoulli o Timoshenko. Se ha demostrado que no hay grandes diferencias entre ambos modelos si la frecuencia no supera los 800 Hz.[15]

En las vigas Euler-Bernoulli el plano de la sección transversal permanece perpendicular al eje de la viga durante la deformación. Esto hace que la rotación de la sección transversal de la viga sea igual que la pendiente del eje de la viga.

En este tipo de vigas las condiciones de continuidad entre dos elementos conectados en el eje de la viga (punto 0) requieren que el desplazamiento transversal ( $v$ ) y  $\frac{dv}{dx}$  sean continuos, tal y como vemos en la *Figura 2.11d*. [16]

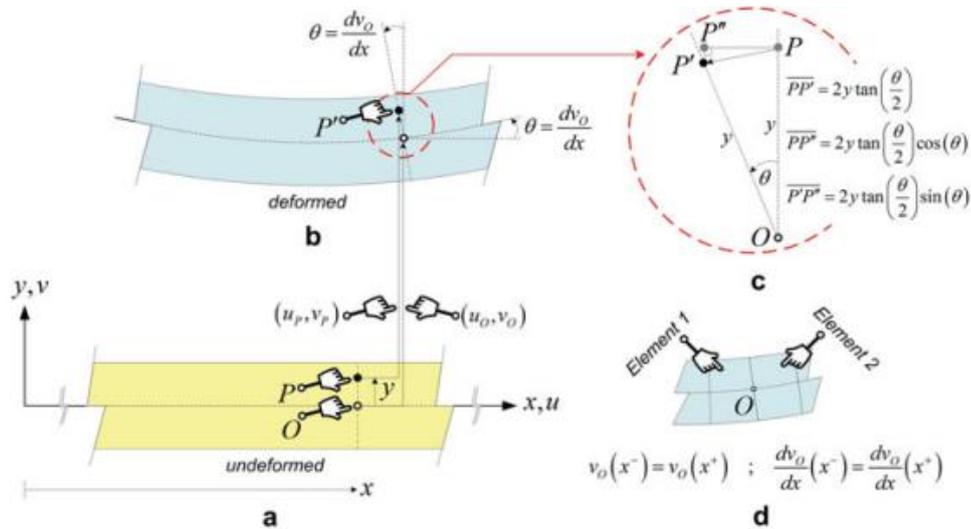


Figura 4.3. Cinemática de una viga recta tipo Euler-Bernoulli. Fuente:[16]

Suponiendo pequeños desplazamientos y aplicando las aproximaciones de que  $\text{sen}(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta$  y que  $\text{cos}(\theta) \approx 1$ ;  $\theta^2 \approx 0$ , observamos que durante la deformación de la viga (*Figura 2.b*) un punto aleatorio llamado  $P$  se desplaza y rota de acuerdo con los siguientes campos de desplazamiento:

$$\begin{aligned}
 u_p &= u_0 - 2 \cdot y \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \approx u_0 - 2 \cdot y \cdot \frac{\theta}{2} \cdot 1 \approx u_0 - y \cdot \theta \\
 v_p &= v_0 + y - y - 2 \cdot y \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}(\theta) \approx v_0 - 2 \cdot y \cdot \frac{\theta}{2} \cdot \theta \approx v_0
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Donde  $u_0$  y  $u_p$  son los desplazamientos horizontales de los puntos  $O$  y  $P$ .  $v_0$  y  $v_p$  son los desplazamientos transversales de dichos puntos. Las coordenadas del punto  $P$  antes de la deformación es  $x$  e  $y$ .  $\theta$  es la rotación de la sección transversal de la viga.

Por otro lado, la teoría de las vigas de Timoshenko considera que el plano de la sección transversal no es perpendicular al eje de la viga durante la deformación. Esto provoca que la rotación de la sección transversal no es igual a la pendiente del eje de la viga.

En las vigas de Timoshenko se tienen en cuenta los efectos en la deformación por cortante, la cual se considera como una acción de alivio de corte de la sección transversal deformada de la viga, es decir, como la reacción de la sección transversal que intenta rotar de nuevo desde la línea perpendicular al eje de la viga después de ser doblada (Figura 2.12).[16]

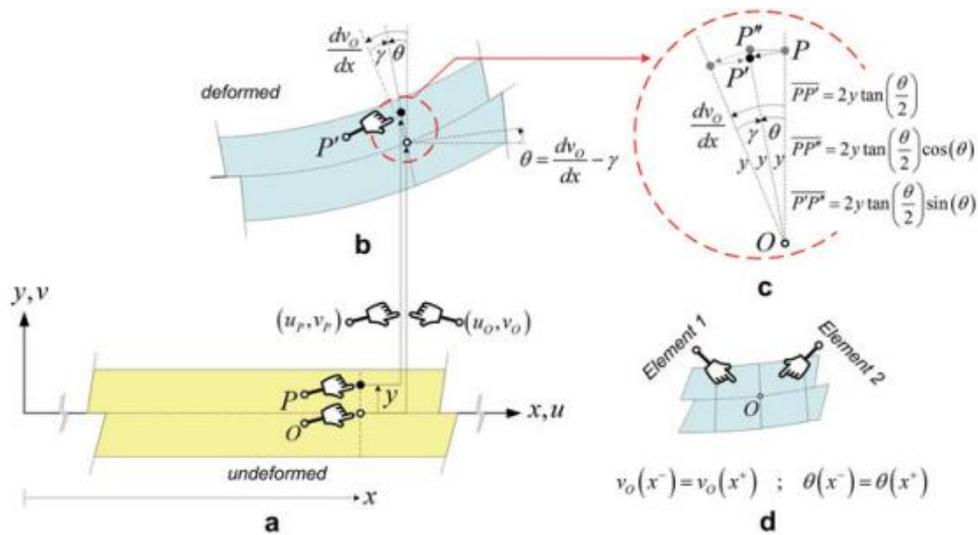


Figura 4.4. Cinemática de una viga recta de Timoshenko. Fuente:[16]

Durante la deformación de la viga , un punto arbitrario P se desplaza y rota de acuerdo con los siguientes campos de desplazamiento:

$$\begin{aligned}
 u_p &= u_0 - 2 \cdot y \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \approx u_0 - 2 \cdot y \cdot \frac{\theta}{2} \cdot 1 \approx u_0 - y \cdot \theta \\
 v_p &= v_0 + y - y - 2 \cdot y \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}(\theta) \approx v_0 - 2 \cdot y \cdot \frac{\theta}{2} \cdot \theta \approx v_0 \quad [4.2] \\
 \theta &= \frac{dv_0}{dx} - \gamma
 \end{aligned}$$

Donde  $\gamma$  es la deformación por cortante y el resto lo mismo que en la viga tipo Euler-Bernoulli.[16]

#### 4.1.2 Ecuaciones para vigas Euler-Bernoulli

En este trabajo de fin de grado se ha considerado la vía ferroviaria como una viga tipo Euler-Bernoulli para los cálculos dinámicos, por tanto nos vamos a centrar en este tipo de vigas.

Las ecuaciones gobernantes del elemento de viga se derivan basándose en una derivación del principio de trabajos virtuales para obtener las ecuaciones de equilibrio en un sistema dinámico, por esto las ecuaciones se pueden obtener para sistemas estáticos y dinámicos. [16]

Las ecuaciones diferenciales de movimiento que corresponden al desplazamiento generalizado son las siguientes:

$$\begin{aligned} \delta u: \quad & -EA \frac{d^2u}{dx^2} + \rho A \frac{d^2u}{dt^2} - p = 0 \\ \delta v: \quad & +EI \frac{d^4v}{dx^4} + \rho A \frac{d^2v}{dt^2} - q = 0 \end{aligned} \quad [4.3]$$

Donde E es el módulo elástico, A el área de la sección, I es el momento de inercia y los términos p y q representan las cargas axiales y transversales externas aplicadas a la viga.[16]

Las condiciones de contorno se dan como:

$$\begin{aligned} \delta u: \quad & P = EA \frac{du}{dx} - \rho A \frac{du}{dt} \\ \delta v: \quad & Q = -EI \frac{d^3v}{dx^3} + \rho A \frac{dv}{dt} \\ \delta \theta: \quad & M = EI \frac{d^2v}{dx^2} + \rho I \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad [4.4]$$

- **P** es la fuerza axial en los extremos de la viga. El término  $EA \frac{du}{dx}$  relaciona la fuerza axial con la deformación elástica del material bajo esa carga. La otra parte de la ecuación  $\rho A \frac{du}{dt}$  es el término inercial debido a la velocidad del desplazamiento axial  $u$ .
- **Q** es la fuerza cortante en los extremos de la viga. Este término  $EI \frac{d^3v}{dx^3}$  se refiere a la resistencia que ofrece la viga para resistir la flexión. Por otro lado,  $\rho A \frac{dv}{dt}$  es el término inercial debido a la velocidad de desplazamiento transversal  $v$ .
- **M** es el momento flector en los extremos de la viga. Relaciona  $EI \frac{d^2v}{dx^2}$  que representa el momento flector que surge debido a la flexión de la viga, relaciona la curvatura con la rigidez de la viga. Este otro término  $\rho I \frac{d\theta}{dt}$  se refiere a la

resistencia al cambio en la velocidad de rotación angular de la sección transversal.[16]

Consideramos que la viga parte de una longitud inicial  $x = 0$  hasta una longitud final de  $x = L$ .

### 4.1.3 Formulación matricial de la viga Euler-Bernoulli

Para resolver problemas relacionados con vigas, en el caso de este trabajo de una vía del tren considerada una viga, se emplea un método de integración numérica basado en el método de los elementos finitos. En los siguientes apartados se describirán las ecuaciones gobernantes y su representación en forma matricial y vectorial.

#### 4.1.3.1 Funciones de forma

Las funciones de forma son un elemento clave en el análisis de elementos finitos ya que nos permiten interpolar los desplazamientos y rotaciones a lo largo de la viga y nos permiten aproximar el comportamiento estructural de la viga en cualquier punto de un elemento, utilizando los grados de libertad nodales. En este caso de un tipo de viga Euler-Bernoulli, las funciones de forma se obtienen resolviendo las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la viga y van a depender de una coordenada local adimensional  $\xi = \frac{2x-L}{L}$  que varía entre los valores de -1 y 1 a lo largo de la viga.

- Desplazamiento axial

Para las funciones de forma para el desplazamiento axial  $u$  se asume que la deformación axial no es muy significativa, por tanto se puede considerar la siguiente ecuación, que despejándola nos daría las funciones de forma para los desplazamientos en los nodos 1 y 2:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= N_{u1}(\xi)u_1 + N_{u2}(\xi)u_2 \\ N_{u1}(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \quad ; \quad N_{u2}(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \end{aligned} \quad [4.5]$$

Esta ecuación interpola el desplazamiento axial entre los dos nodos de la viga.[16]

- Desplazamiento transversal

En el desplazamiento transversal la viga está sometida a flexión, por tanto cualquier punto se resuelve a partir de esta ecuación diferencial:[16]

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad [4.6]$$

Para resolver las funciones de forma del desplazamiento transversal  $v$ , nos basamos en la siguiente función de desplazamiento [4.7] donde los coeficientes se resuelven a partir de los grados de libertad de los nodos y las condiciones de contorno que se muestran en [4.8] y nos permiten expresar el desplazamiento transversal y la rotación nodal en función de las funciones de forma  $N(\xi)$  y los grados de libertad[16]:

$$v(\xi) = c_0 + c_1 \xi + \frac{c_2}{2} \xi^2 + \frac{c_3}{6} \xi^3 \quad [4.7]$$

$$v_1 = v_{\xi=-1}$$

$$\theta_1 = \frac{dv}{dx}_{\xi=-1} \quad [4.8]$$

$$v_2 = v_{\xi=+1}$$

$$\theta_2 = \frac{dv}{dx}_{\xi=+1}$$

$$v(\xi) = N_{v1} v_1 + N_{\theta1} \theta_1 + N_{v2} v_2 + N_{\theta2} \theta_2 \quad [4.9]$$

Las funciones de forma para los desplazamientos transversales se describen como [4.10]:

$$N_{vv1} = \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3)$$

$$N_{vv2} = \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^3)$$

$$N_{v\theta1} = \frac{L}{8} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

$$N_{v\theta2} = \frac{L}{8} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

La rotación nodal  $\theta$  se obtiene modificando la ecuación [4.7] como vemos en [4.11] y obteniendo las funciones de forma para la rotación nodal [4.12]:

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \frac{dv}{d\xi} = \frac{2}{L} \left( c_3 + c_4 \xi + \frac{c_5}{2} \xi^2 \right) \quad [4.11]$$

$$N_{\theta v1} = \frac{3}{2L} (-1 + \xi^2) \quad [4.12]$$

$$N_{\theta v2} = \frac{3}{2L} (1 - \xi^2)$$

$$N_{\theta\theta 2} = \frac{1}{4}(-1 - 2\xi + 3\xi^3)$$

$$N_{\theta\theta 1} = \frac{1}{4}(-1 + 2\xi + 3\xi^2)$$

Finalmente, en el análisis de elementos finitos los desplazamientos y rotaciones de cualquier punto de la viga se interpolan a partir de los grados de libertad de los nodos mediante las funciones de forma, como se puede comprobar en la siguiente ecuación [4.13], que es la matriz que nos permite conseguir interpolar dichos desplazamientos y rotaciones[16]:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & 0 & N_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{vv1} & N_{v\theta 1} & 0 & N_{vv2} & N_{v\theta 2} \\ 0 & N_{\theta v 1} & N_{\theta\theta 1} & 0 & N_{\theta v 2} & N_{\theta\theta 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad [4.13]$$

#### 4.1.3.2 Ecuación gobernante en forma matricial

Las matrices de masa y rigidez se logran integrando las funciones de forma y sus derivadas a lo largo de la viga. Son matrices básicas para obtener un modelo de elementos finitos de la viga. La ecuación de movimiento de la viga Euler-Bernoulli tendrá en cuenta dichas matrices, el vector de fuerzas externas y el vector de desplazamientos.[16]

La ecuación gobernante en forma matricial se puede obtener de la siguiente ecuación [4.14]:

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta S_E - \delta K_E - \delta W_E) dt = 0 \quad [4.14]$$

Si se iguala el instante  $t_1=t_2$  obtenemos la energía de deformación interna, la energía cinética y el trabajo externo de la viga en las ecuaciones [4.15], [4.16], [4.17] respectivamente:

$$S_E = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EA \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) + EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right\} dx \quad [4.15]$$

$$K_E = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left( \frac{du}{dt} \right) \left( \frac{du}{dt} \right) + \rho A \left( \frac{dv}{dt} \right) \left( \frac{dv}{dt} \right) + \rho A \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \right\} dx \quad [4.16]$$

$$W_E = \int_0^L \{ p u + q v + m \theta \} dx \quad [4.17]$$

Se obtienen las derivadas de los desplazamientos y rotaciones [4.18]:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= [N'_{u1} \quad N'_{u2}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= [N''_{vv1} \quad N''_{v\theta1} \quad N''_{vv2} \quad N''_{v\theta2}] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad [4.18]$$

$$\begin{aligned} N'_{u1} &= -\frac{1}{L} & N'_{u2} &= \frac{1}{L} \\ N''_{v1} &= \frac{3}{2L}(\xi^2 - 1) & N''_{v2} &= \frac{3}{2L}(-\xi^2 + 1) \\ N''_{\theta1} &= \frac{1}{4}(3\xi^2 - 2\xi - 1) & N''_{\theta2} &= \frac{1}{4}(3\xi^2 + 2\xi - 1) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación [4.18] en la ecuación de la energía de deformación interna, la ecuación de la energía cinética y la ecuación del trabajo externo de la viga, se transforman en [4.19],[4.20] y [4.21] respectivamente [16]:

$$S_E = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^T \int_0^L \begin{bmatrix} N'_u \\ N'_v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_u \\ N'_v \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad [4.19]$$

$$K_E = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}^T \int_0^L \begin{bmatrix} N'_u \\ N'_v \\ N'_\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_u \\ N'_v \\ N'_\theta \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad [4.20]$$

$$W_E = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} N_{u1}P_1 \\ N_{v1}Q_1 \\ N_{\theta1}M_1 \\ N_{u2}P_2 \\ N_{v2}Q_2 \\ N_{\theta2}M_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^T \int_0^L \begin{Bmatrix} N_{u1}p \\ N_{v1}q \\ N_{\theta1}m \\ N_{u2}p \\ N_{v2}q \\ N_{\theta2}m \end{Bmatrix} dx \quad [4.21]$$

Usando la teoría de la energía potencial mínima, es posible desarrollar la formulación de elementos finitos para la viga Euler-Bernoulli, donde la ecuación de movimiento de la viga vendrá dada por la ecuación [4.22]:

$$\frac{d^2}{dt^2} M \ddot{d} + K d = f \quad [4.22]$$

Finalmente, según [16] las matrices de rigidez, masa y el vector de fuerza vienen dados por:

$$\mathbf{K} = \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u \\ \mathbf{N}'_v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_u \\ \mathbf{N}'_v \end{bmatrix} dx \quad [4.23]$$

$$\mathbf{M} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_v \\ \mathbf{N}_\theta \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_v \\ \mathbf{N}_\theta \end{Bmatrix} dx \quad [4.24]$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} N_{u1}P_1 \\ N_{v1}Q_1 \\ N_{\theta1}M_1 \\ N_{u2}P_2 \\ N_{v2}Q_2 \\ N_{\theta2}M_2 \end{Bmatrix} + \int_0^L \begin{Bmatrix} N_{u1}p \\ N_{v1}q \\ N_{\theta1}m \\ N_{u2}p \\ N_{v2}q \\ N_{\theta2}m \end{Bmatrix} dx \quad [4.25]$$

#### 4.1.3.3 Matrices de masa y rigidez de la viga recta Euler-Bernoulli

Para modelar la interacción dinámica vehículo-vía, desde el punto de vista de la vía se ha utilizado una simulación con elementos finitos basada en la teoría de las vigas Euler-Bernoulli, ya que se puede simplificar un carril ferroviario como una viga Euler-Bernoulli, como ya se ha explicado. Para conseguir esto, es fundamental describir las matrices de masa y rigidez para este tipo de estructuras ya que nos dirán cómo se comportan estructuralmente.

##### - Matriz de masa $[\mathbf{M}]$

La matriz de masa tiene dos componentes, la primera está asociada a la inercia traslacional y la segunda a la inercia rotacional como vemos en la ecuación [4.26]. La matriz de masa especifica cómo se distribuye la masa del sistema y cómo interacciona con las fuerzas dinámicas [16].

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\rho A} + \mathbf{M}_{\rho I}$$

$$\mathbf{M}_{\rho A} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad [4.26]$$

$$\mathbf{M}_{\rho I} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez [**K**]

La matriz de rigidez relaciona la resistencia del material a la deformación producida por las cargas. La observamos en la ecuación [4.27]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad [4.27]$$

[16]

Los datos necesarios para calcular estas matrices fueron explicados en el capítulo 3 y hay que tener en cuenta la rigidez de la traviesa explicada.

## 4.2 Modelización del vehículo

El modelo del vehículo se ha simplificado para representar mejor las características dinámicas del vehículo sobre la vía. Como vemos en la *figura 4.5* el sistema representa la interacción entre un coche ferroviario y la vía. El coche consta de dos bogies de doble eje, cada uno compuesto por 2 ruedas y el sistema de amortiguadores y resortes que representan la suspensión primaria y secundaria. Se modela como un sistema de masas agrupadas que consta con 10 grados de libertad que son: el desplazamiento vertical y la

rotación de la carrocería, el desplazamiento vertical y la rotación de cada bogie y el desplazamiento vertical de cada rueda[17].

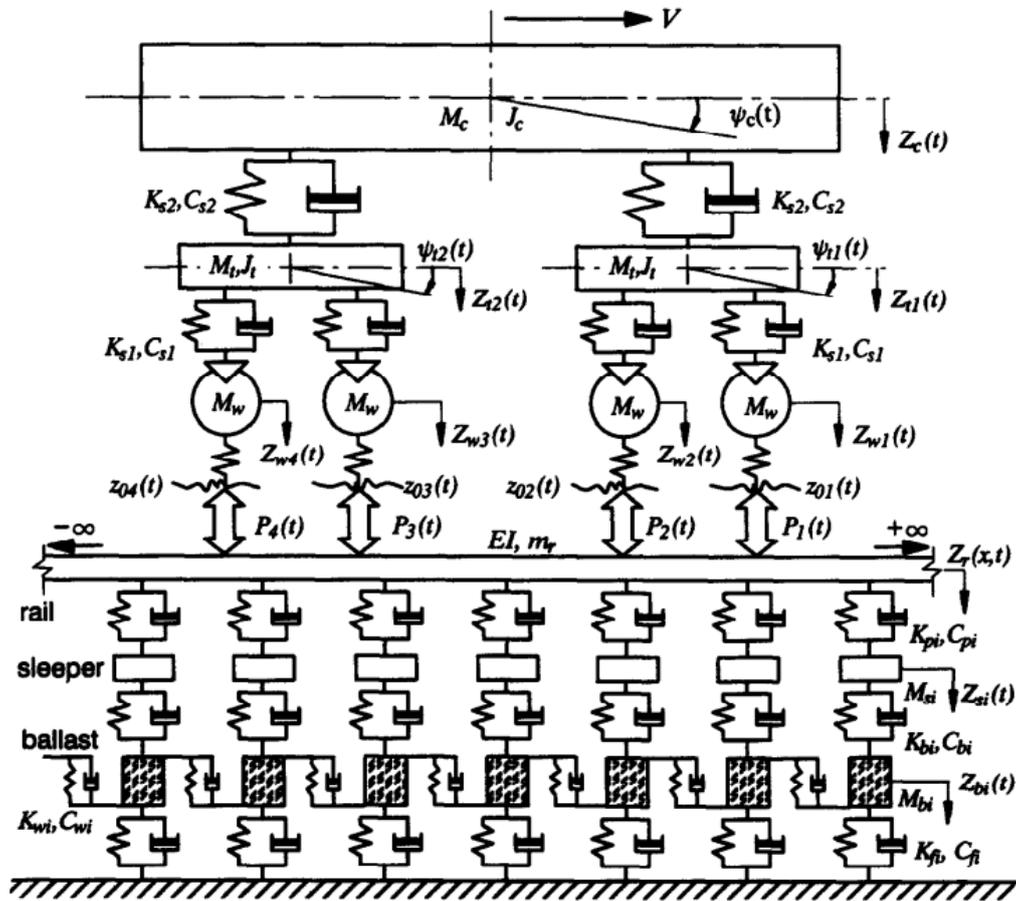


Figura 4.5. Interacción vertical entre un vehículo ferroviario y la vía. Fuente: [17]

Sin embargo, a la hora de modelar la interacción en el programa no se ha considerado un sistema tan complejo y con tantos grados de libertad. En el programa de Matlab se ha programado que el vehículo consiste en una masa de la carrocería, con una suspensión secundaria compuesta por un resorte y un amortiguador, una masa del bogie, con otra suspensión primaria compuesta por un resorte y un amortiguador y una rueda con su masa tal y como vemos en la figura 4.6. [17]. La nomenclatura es la siguiente:

- $M_c$ : masa del coche
- $\Psi_c$  : giro del coche
- $K_{s2}$  : rigidez de la suspensión secundaria
- $M_B$ : masa del bogie
- $\Psi_B$  : giro del bogie
- $Z_c$ : desplazamiento del coche
- $I_c$  : inercia del coche
- $C_{s2}$  : amortiguamiento de la suspensión secundaria
- $Z_B$ : desplazamiento del bogie
- $I_B$  : inercia del bogie

- $K_{s1}$  : rigidez de la suspensión primaria
- $M_W$  : masa de la rueda
- $l_B$  : distancia del bogie
- $f_c(t)$ : fuerza de contacto rueda/rail
- $C_{s1}$  : amortiguamiento de la suspensión primaria
- $Z_W$  : desplazamiento de la rueda
- $l_w$  : distancia de la rueda

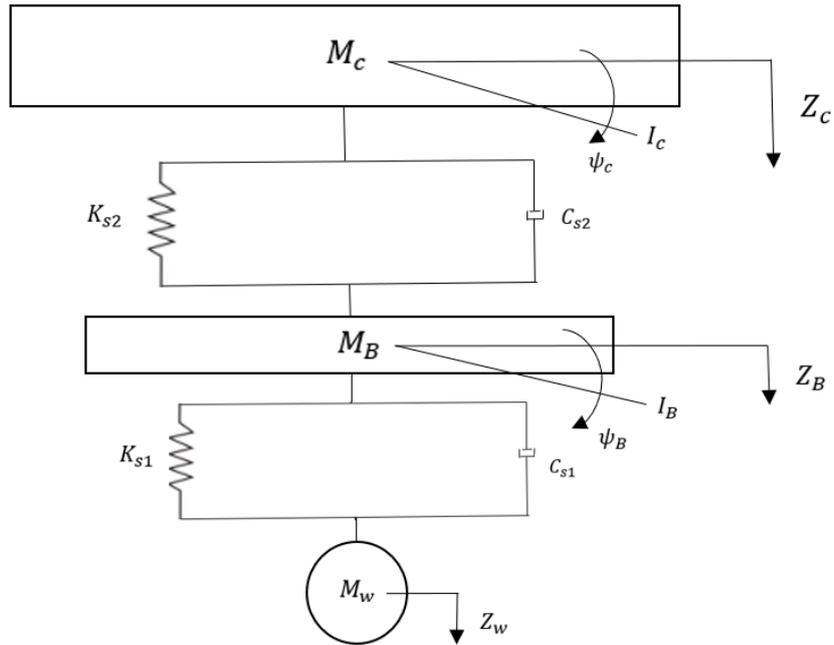


Figura 4.6. Modelo del vehículo simplificado

#### 4.2.1 Ecuaciones de movimiento

Para modelar el vehículo es necesario establecer unas ecuaciones que gobiernan los movimientos de rebote y la rotación de cabeceo, las cuales se obtienen aplicando el principio de D'Alembert, que relacionan las fuerzas resultantes en el sistema con la aceleración de sus grados de libertad.[17]

Las ecuaciones para nuestro sistema simplificado son las siguientes:

- Ecuación del movimiento de rebote del coche [4.28]:

$$M_c \ddot{Z}_c + C_{s2} \dot{Z}_c + K_{s2} Z_c - C_{s2} \dot{Z}_B - K_{s2} Z_B = 0 \quad [4.28]$$

- Ecuación de rotación de cabeceo del coche[4.29]:

$$I_c \ddot{\psi}_c + C_{s2} l_B^2 \dot{\psi}_c + K_{s2} l_B^2 \psi_c - C_{s2} l_B \dot{Z}_B - K_{s2} l_B Z_B = 0 \quad [4.29]$$

- Ecuación del movimiento de rebote del bogie [4.30]:

$$M_B \ddot{Z}_B + (C_{s2} + C_{s1}) \dot{Z}_B + (K_{s2} + K_{s1}) Z_B - C_{s1} \dot{Z}_w - K_{s1} Z_w - C_{s2} (\dot{Z}_c + l_B \dot{\psi}_c) - K_{s2} (Z_c + l_B \psi_c) = 0 \quad [4.30]$$

- Ecuación de rotación de cabeceo del bogie [4.31]:

$$I_c \ddot{\psi}_B + C_{s1} l_w^2 \dot{\psi}_B + K_{s1} l_w^2 \psi_B - C_{s1} l_w \dot{Z}_w - K_{s1} l_w Z_w = 0 \quad [4.31]$$

- Ecuación de movimiento de rebote de la rueda [4.32]:

$$M_w \ddot{Z}_w + C_{s1} (\dot{Z}_w - \dot{Z}_B) + K_{s1} (Z_w - Z_B) - C_{s1} l_w \dot{\psi}_w - K_{s1} l_w \psi_w + f_c(t) = 0 \quad [4.32]$$

Si expresamos las ecuaciones de movimiento en forma matricial llegamos a las ecuaciones empleadas en el análisis de elementos finitos del vehículo:

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{Z}_w \\ \ddot{Z}_B \\ \ddot{Z}_c \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \dot{Z}_w \\ \dot{Z}_B \\ \dot{Z}_c \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} Z_w \\ Z_B \\ Z_c \end{bmatrix} = f_c(t) \quad [4.33]$$

Siendo los coeficientes de las ecuaciones [4.34]:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_w & 0 & 0 \\ 0 & M_B & 0 \\ 0 & 0 & M_c \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{s1} & -C_{s1} & 0 \\ -C_{s1} & C_{s1} + C_{s2} & -C_{s2} \\ 0 & -C_{s2} & C_{s2} \end{bmatrix} \quad [4.34]$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{s1} & -K_{s1} & 0 \\ -K_{s1} & K_{s1} + K_{s2} & -K_{s2} \\ 0 & -K_{s2} & K_{s2} \end{bmatrix}$$

### 4.3 Contacto rueda-rail mediante el método del *penalty*

Analizar el contacto entre la rueda y el rail es un aspecto fundamental en la interacción dinámica, ya que las fuerzas que se generan en ese punto determinan las vibraciones y las tensiones en los dos sistemas. En el proyecto se ha utilizado el método del *penalty* para modelar este contacto, el cual introduce entre la rueda y el rail un resorte ficticio con rigidez  $K_c$ .

### 4.3.1 Descripción del método del *penalty*

El método del *penalty* es una técnica enormemente utilizada en problemas de contacto de dinámica estructural. En este método se asume la fuerza de contacto a partir de la rigidez de contacto y la distancia entre dos nodos que pertenecen a cuerpos separados. Existe un resorte entre los modelos en contacto cuya rigidez es  $K_c$  como vemos en la *figura 4.7*. La ventaja del método es que tiene en cuenta las restricciones de penetración directamente en la formulación, de forma que se puede modelar el problema sin ninguna restricción. Sin embargo, uno de los problemas del método es satisfacer la condición de no penetración, la cual se satisface totalmente si el penalizador de la restricción es finito, pero esto no siempre ocurre. [18]

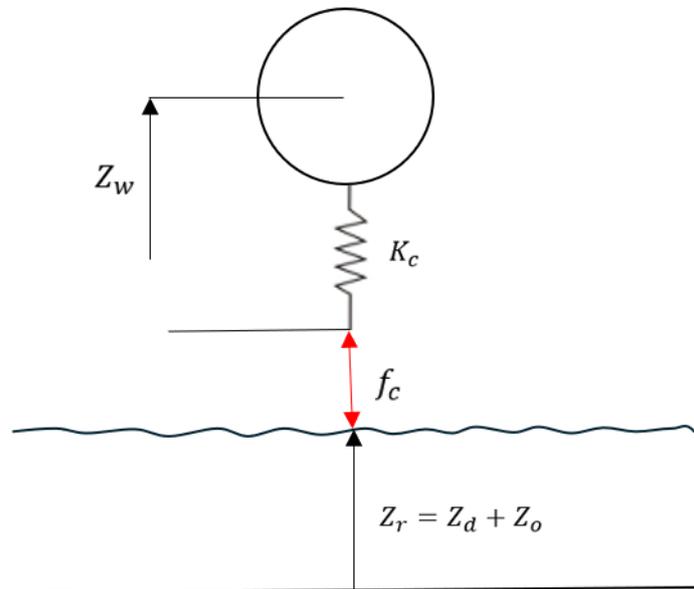


Figura 4.7. Método de contacto del *penalty*

Como vemos en la *figura 4.7* la fuerza de contacto entre la rueda y el rail se modela como la fuerza que ejerce el resorte:

$$f_c = K_c(Z_r - Z_w) \quad [4.35]$$

Siendo  $f_c$  la fuerza de contacto,  $Z_r$  el desplazamiento vertical del rail (que depende de la rugosidad  $Z_o$ ),  $Z_w$  es el desplazamiento vertical de la rueda y  $K_c$  la rigidez de contacto. Este resorte sólo actúa si existe una penetración entre la rueda y el rail.

### 4.3.2 Modelización del contacto

Como ya se ha mencionado, para modelar el contacto se introduce el resorte ficticio con rigidez  $K_c$ . En la ecuación [4.35] podemos observar cómo la fuerza de contacto es proporcional a la diferencia entre los desplazamientos de la rueda y el rail. Esto significa que durante el análisis se va calculando el desplazamiento de la rueda  $Z_w$  y el del rail  $Z_r$  y si el desplazamiento de la rueda  $Z_w$  es menor que el del carril  $Z_r$ , quiere decir que la rueda ha penetrado el rail, por tanto se activa el resorte de contacto y se calcula la fuerza de contacto  $f_c$ .

Finalmente la rigidez  $K_c$  se ha obtenido de la figura 4.8 donde sabemos que la fuerza que ejerce el vehículo sobre el carril será aproximadamente de 94 kN gracias a la segunda ley de Newton, ya que la masa del vehículo que se considera es de 9625 kg. El valor de la rigidez de contacto será aproximadamente de  $K_c=0.95 \cdot 10^9$  N/m. [17], [19]

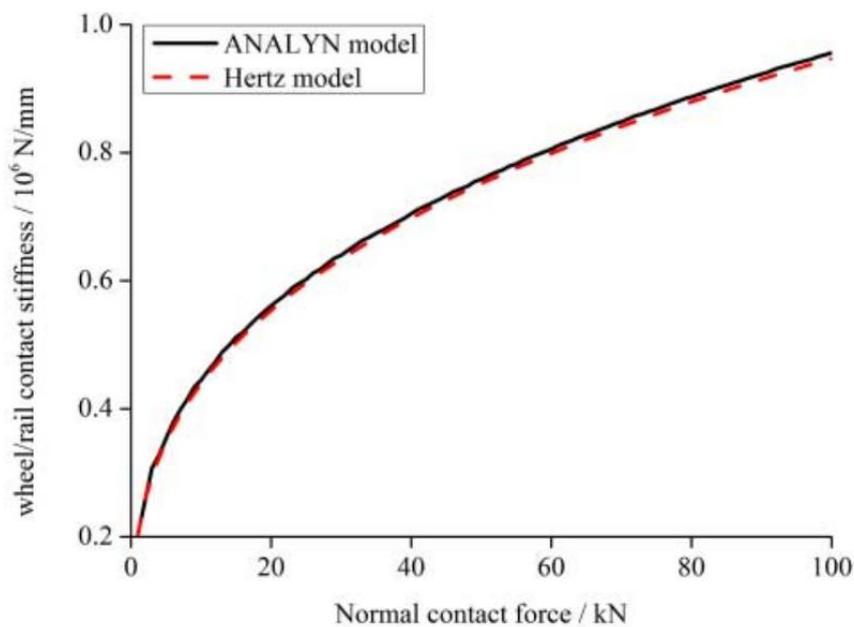


Figura 4.8. Rigidez de contacto de la rueda/rail contra una fuerza normal de contacto. Fuente:[19]

## 5 Interacción dinámica con Periodic FEM

La interacción dinámica entre el vehículo y la vía se puede abordar utilizando el método de elementos finitos periódicos (PFEM). Elegimos el FEM para modelar la vía y se asumen hipótesis de periodicidad, que es representativa para la mayor parte de la vía ferroviaria.

## 5.1 Descripción del problema

Se va a calcular la respuesta dinámica de la estructura, que consideramos como un bloque periódico de la vía en presencia de una rugosidad modelado por el método de los elementos finitos, sometida a una carga en movimiento, que consideraremos el vehículo ferroviario. El problema se traslada primero al dominio de la frecuencia, donde se le aplica la condición de periodicidad, y luego se obtiene la respuesta temporal.

En resumen, para obtener el PFEM buscado en este proyecto es necesario obtener el modelo FEM del bloque repetido de la estructura y posteriormente aplicar la formulación proporcionada.

### 5.1.1 Condición de periodicidad

Al ser una estructura periódica, la vía está formada por tramos de longitud  $L$ , que se repiten a lo largo de toda la vía como vemos en la *figura 5.1*. El tren circula a una velocidad  $V$  e interactuará con la vía se repetirá hasta que el vehículo frene. Por tanto, la carga externa de contacto aplicada a la vía es una carga periódica en movimiento con un periodo de  $T = \frac{L}{V}$  y cada fuerza que se aplique en cada bloque  $b$  se aplicará consecuentemente en todos los bloques  $b \in [-\infty, +\infty]$  conforme avance el tren.[20]

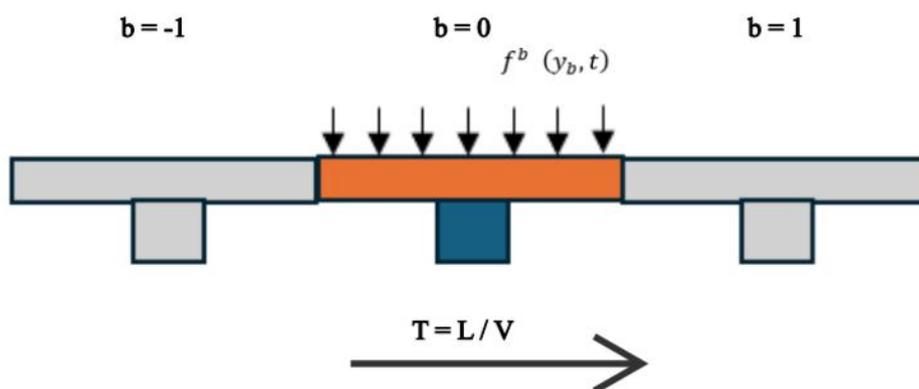


Figura 5.1. Vía de tren como una estructura periódica

## 5.2 Respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia

La formulación de la interacción dinámica del vehículo y la vía puede ser un asunto complejo de obtener. Para simplificarlo, se calcula la respuesta dinámica de la vía en el

dominio de la frecuencia, ya que gracias a la condición de periodicidad se formula más fácil.

Es posible conocer la respuesta al impulso producida por una secuencia de impulsos unitarios  $f^b(y_b, t)$  que se aplican periódicamente en cada bloque  $b$  en los puntos  $y_b$  y en el momento  $t = bT$ . La secuencia de impulsos unitarios que define la respuesta al impulso es [5.1] donde  $\delta$  es la función de Dirac y se aplica a todos los bloques  $b$  en la coordenada global  $y_b = y + bL_e$ . [21]

$$f^b(y_b, t) = \delta(t - bT) \quad b = -\infty, \dots, \infty \quad [5.1]$$

La respuesta estacionaria de la vía se repetirá en cada bloque, por tanto la condición de periodicidad será [5.2]:

$$u(t, x, y) = u(t - bT, x + bL_e, y) \quad [5.2]$$

Siendo:

- $u(t, x, y)$ : la respuesta de la vía en función del tiempo  $t$  y las posiciones  $x$  e  $y$ .
- $bT$ : el periodo de repetición en el tiempo.
- $bL_e$ : el desplazamiento espacial en el eje  $x$ . [21]

Para pasar el problema del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia se necesita encontrar la función de respuesta en frecuencia (FRF), que relaciona el desplazamiento del punto  $x$  con una fuerza armónica unitaria de frecuencia  $\omega$  que se aplica en el punto  $y$ . Se escogen como incógnitas los desplazamientos del nodo del borde izquierdo  $u_l(t)$ , del borde derecho  $u_r(t)$  y de los nodos internos  $u_i(t)$ . [21]

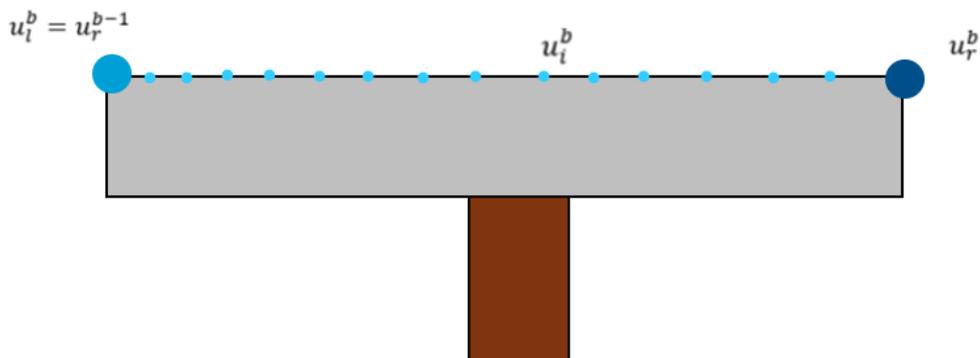


Figura 5.2. Tramo de la vía con los nodos izquierdo, internos y derechos.

Los desplazamientos de los nodos izquierdos tienen que cumplir con la condición de periodicidad, por lo tanto se obtiene [5.3] y si se le aplica la Transformada de Fourier se llega a la ecuación [5.4]:

$$u_l(t) = u_r(t + T) \quad [5.3]$$

$$U_l(\omega) = e^{i\omega T} U_r(\omega) \quad [5.4]$$

El vector de la fuerza externa nodal F también se puede dividir en grados de libertad nodales izquierdos, internos y derechos, donde aplicamos de nuevo la transformada de Fourier y obtenemos la ecuación [5.5]:[21]

$$F_l(\omega) = e^{i\omega T} F_r(\omega) \quad [5.5]$$

La función de respuesta en frecuencia (FRF) se puede visualizar en la ecuación [5.6] donde M es la matriz de masa, K la matriz de rigidez y C la matriz amortiguamiento. El vector de fuerza de reacción R aplicado a los nodos de borde izquierdo y derecho R = [R<sub>l</sub>, 0, R<sub>r</sub>]<sup>T</sup>. [21]

$$D(\omega)U = F + R$$

$$D(\omega) = K + i\omega C - \omega^2 M \quad [5.6]$$

$$\begin{bmatrix} D_{ll} & D_{li} & D_{lr} \\ D_{il} & D_{ii} & D_{ir} \\ D_{rl} & D_{ri} & D_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_l \\ U_i \\ U_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_l \\ F_i \\ F_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_l \\ 0 \\ R_r \end{Bmatrix}$$

Si volvemos a tener en cuenta la condición de periodicidad y el principio de acción-reacción, obtenemos el vector de las reacciones en el nodo izquierdo y derecho:

$$R_l(\omega) = -e^{i\omega T} R_r(\omega) \quad [5.7]$$

Relacionando las ecuaciones anteriores, se llega a la ecuación [5.8] donde I es la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} D_{li} & D_{lr} + e^{i\omega T} D_{ll} & e^{i\omega T} I \\ D_{ii} & D_{ir} + e^{i\omega T} D_{il} & 0 \\ D_{ri} & D_{rr} + e^{i\omega T} D_{rl} & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_r \\ R_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega T} I \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_i \\ F_r \end{Bmatrix} \quad [5.8]$$

Finalmente, relacionamos los desplazamientos nodales con las fuerzas nodales del bloque mediante la función de respuesta en frecuencia H(ω) donde  $\widehat{H}_l(\omega)$  y  $\widehat{H}_r(\omega)$  son las dos primeras filas de H(ω): [21]

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ U_r \\ R_r \end{Bmatrix} = \widehat{H}(\omega) \begin{Bmatrix} F_i \\ F_r \end{Bmatrix} \quad [5.9]$$

$$\widehat{H}(\omega) = \begin{bmatrix} D_{li} & D_{lr} + e^{i\omega T} D_{ll} & e^{i\omega T} I \\ D_{ii} & D_{ir} + e^{i\omega T} D_{il} & 0 \\ D_{ri} & D_{rr} + e^{i\omega T} D_{rl} & -I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega T} I \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad [5.10]$$

$$\begin{Bmatrix} U_l \\ U_i \\ U_r \end{Bmatrix} = H(\omega) \begin{Bmatrix} F_i \\ F_r \end{Bmatrix} \quad [5.11]$$

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} e^{i\omega T} \widehat{H}_r(\omega) \\ \widehat{H}_l(\omega) \\ \widehat{H}_r(\omega) \end{bmatrix}$$

Buscamos conocer el desplazamiento del punto  $x$  producido por una fuerza armónica  $F_u$  aplicada en un punto en la vía. El operador  $N(x) = [N_l(x), N_i(x), N_r(x)]$  es una matriz compuesta de funciones de forma de cada nodo que convierte los desplazamientos nodales en desplazamientos en un punto en una determinada dirección. Con este vector se pueden escribir las fuerzas nodales relativas a la fuerza unitaria  $F_u$  como [21]:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i(y)^T \\ N_r(y)^T + e^{-i\omega T} N_l(y)^T \end{Bmatrix} \quad [5.12]$$

Utilizando el operador  $N(x)$  y sustituyendo en la ecuación [5.9] y añadiendo la última ecuación obtenemos el desplazamiento armónico del punto  $x$  cuando la fuerza unitaria actúa en  $y$ :

$$I(\omega, x, y) = N(x)H(\omega) \begin{Bmatrix} N_i(y)^T \\ N_r(y)^T + e^{-i\omega T} N_l(y)^T \end{Bmatrix} \quad [5.13]$$

Como la estructura se modela con el método de elementos finitos, la ecuación anterior se calcula para un conjunto discreto de frecuencias  $N_f$  con un incremento de frecuencias como  $\omega_k = k \Delta\omega$  donde  $k = 0, 1, \dots, N_f-1$ . El tiempo también se discretiza como un incremento de tiempo de manera que  $t_n = n \Delta t$ .

Finalmente aplicando la transformada inversa de Fourier, obtenemos la respuesta al impulso en el paso del tiempo  $t_n$  :

$$h(t_n, x, y) = \sum_{k=0}^{N_f-1} a_k \operatorname{Re}(I(\omega_k, x, y) e^{i\omega_k n \Delta t}) \Delta \omega \quad [5.14]$$

siendo  $a_k = 2$  si  $k \neq 0$  o  $a_k = 1$  si  $k = 0$ . [21]

### 5.3 Solución del PFEM

El programa de los elementos finitos periódicos emplea unas matrices que representan el desplazamiento del vehículo  $I_{cveh}$  y el desplazamiento de la vía  $I_{cc}$ . Estas matrices describen cómo el sistema responde a las fuerzas aplicadas .

La matriz  $I_{cveh}$  se elabora a partir de la receptancia del vehículo, que muestra cómo el vehículo responde a las fuerzas aplicadas a distintas frecuencias, y depende del programa de elementos finitos creado, matriz de masa, rigidez y amortiguamiento. La matriz describe cómo el vehículo se desplaza ante una excitación dinámica. Sobre el vehículo afecta una fuerza en sentido contrario que a la vía, por eso tendrá signo negativo. El desplazamiento del vehículo vendrá dado por la ecuación matricial [5.15]:

$$Z_w = -I_{cveh} \cdot f \quad [5.15]$$

Por otro lado, la matriz que representa el desplazamiento de la vía ante las excitaciones dinámicas  $I_{cc}$ , al igual que la del vehículo, también se calcula a partir de la receptancia de la vía y describe cómo la vía se desplaza y deforma ante las cargas que se aplican sobre ella. También depende del programa de elementos finitos creado, matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, y además de la rugosidad espectral de la vía  $Z_o$ . El desplazamiento de la vía se obtiene de la ecuación [5.16]:

$$Z_r = Z_o + I_{cc} \cdot f \quad [5.16]$$

Finalmente, sabiendo que el desplazamiento de la vía y el del vehículo han de ser iguales, podemos acoplar ambas ecuaciones [5.15] y [5.16] igualando los desplazamientos:

$$\begin{aligned} Z_r &= Z_w \\ Z_o + I_{cc} \cdot f &= -I_{cveh} \cdot f \\ (I_{cc} + I_{cveh}) \cdot f &= Z_o \end{aligned} \quad [5.17]$$

Llegando a obtener  $f$  que representa la fuerza dinámica de contacto entre el vehículo y la vía, la ecuación será [5.18]:

$$f = (I_{cc} + I_{ccveh})^{-1} \cdot Z_o \quad [5.18]$$

Y añadiéndole la fuerza inicial del sistema nos queda [5.19]:

$$f = (I_{cc} + I_{ccveh})^{-1} \cdot Z_o + f_o \quad [5.19]$$

## 6 Resultados

En este capítulo se van a comentar los resultados obtenidos en la simulación del modelo de interacción dinámica con el método de elementos finitos periódicos (PFEM), así como se ilustrará el perfil de rugosidad de la vía que es un complemento que el programa PFEM necesita. Se van a comentar las gráficas obtenidas en el dominio del tiempo y la desviación estándar de la fuerza de contacto en función de la velocidad.

### 6.1 Perfil de rugosidad de la vía

La figura [6.1] muestra un ejemplo del perfil de rugosidad que el análisis PFEM utiliza como entrada para analizar la interacción dinámica entre el vehículo y la vía. El eje x representa la longitud del bloque de vía modelado y el eje y el desplazamiento vertical en micrómetros. El desplazamiento vertical explica cómo varía la superficie del carril a lo largo de la longitud del bloque, representando las irregularidades de la vía frente a varios factores.

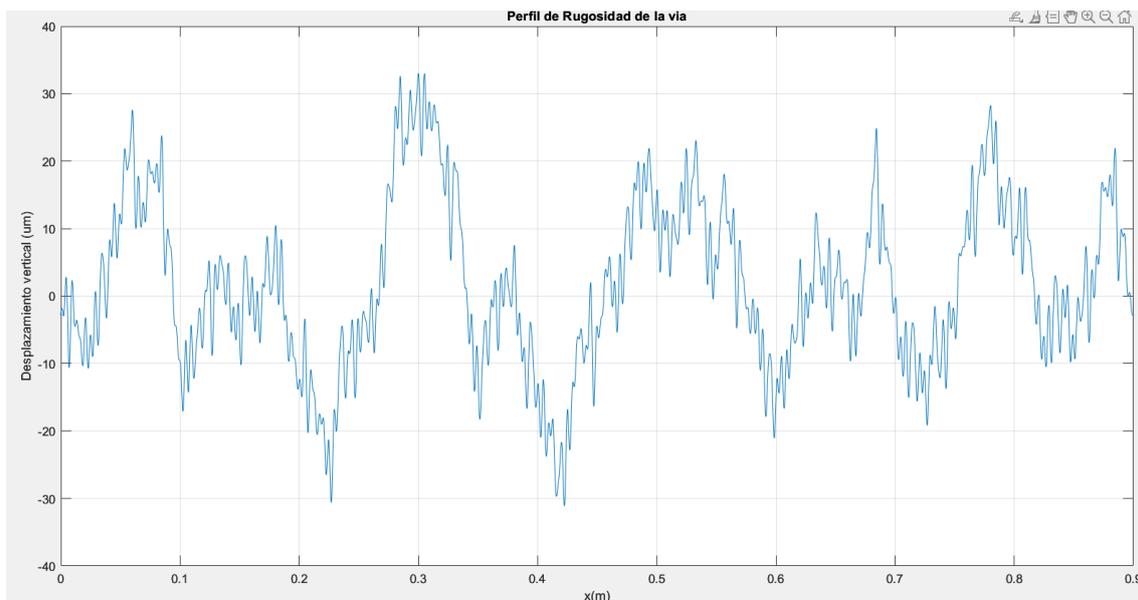
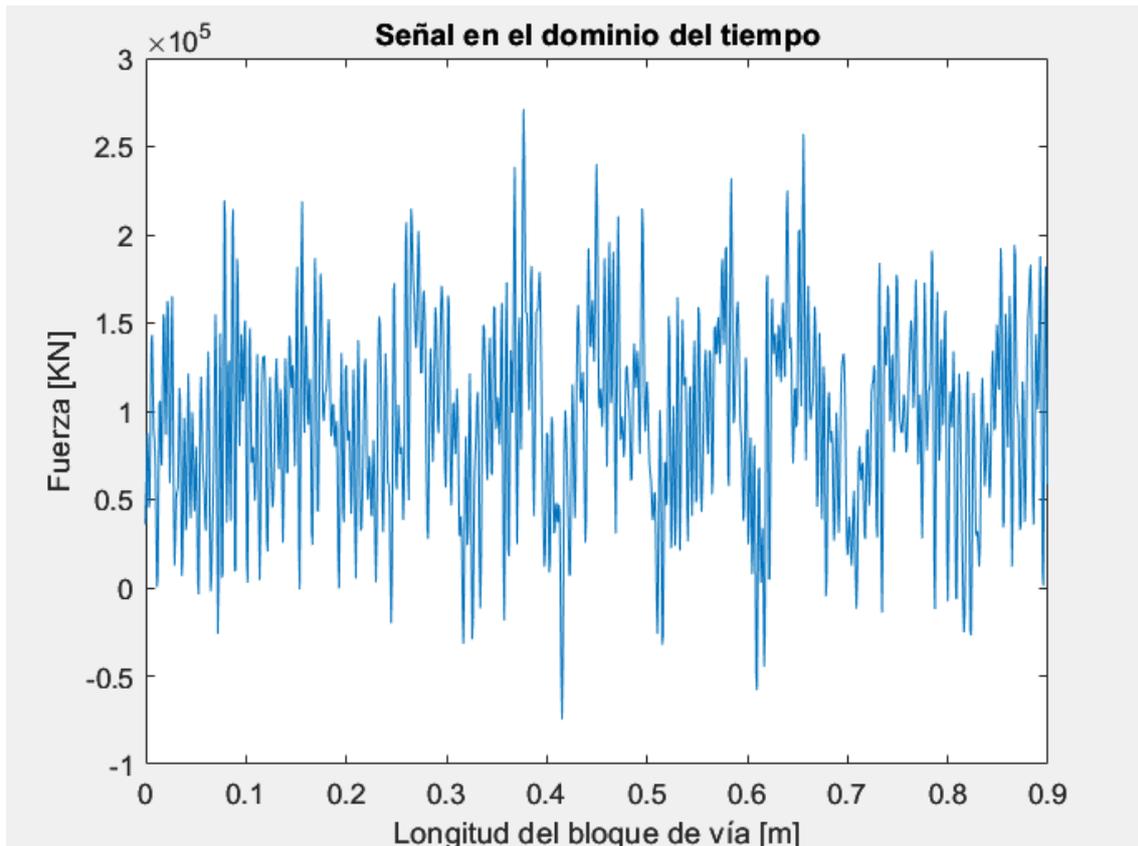


Figura 6.1. Perfil de rugosidad de la vía.

## 6.2 Respuesta dinámica de la vía y el vehículo

A partir del programa PFEM se consigue representar la fuerza de contacto dinámica entre la vía y la rueda. La *figura 6.2* muestra cómo la fuerza de contacto varía debido a la rugosidad de la vía mientras el tren se mueve a una velocidad de 200 km/h. Las oscilaciones representan las vibraciones en la fuerza, debidas a la rugosidad e irregularidades de la vía.



*Figura 6.2. Representación de la fuerza de contacto  $f$  a lo largo del bloque de vía.*

En la imagen se observan en algunos puntos fuerzas de contacto negativas, lo cual significa que hay micropérdidas de contacto entre la rueda y el carril, algo que es un pequeño error del modelado y se solucionaría creando un modelo no lineal. También es posible solucionar este problema aumentando la masa del vehículo.

## 6.3 Desviación típica de la fuerza de contacto

La desviación estándar es una variable estadística que sirve para calcular la variación en la que puntos de datos difieren de la media [22]. La *figura [6.4]* grafica la desviación estándar de las fuerzas de contacto en función de la velocidad del vehículo.

El gráfico muestra que a velocidades bajas las fuerzas de contacto varían menos y conforme la velocidad del vehículo aumenta la desviación típica de las fuerzas aumenta, ya que las fuerzas fluctúan más a velocidades más altas debido a la interacción con la rugosidad de la vía. A velocidades muy altas las irregularidades de la vía influyen más en la fuerza de contacto, por tanto se generan más variaciones como se ve en la *figura [6.4]*.

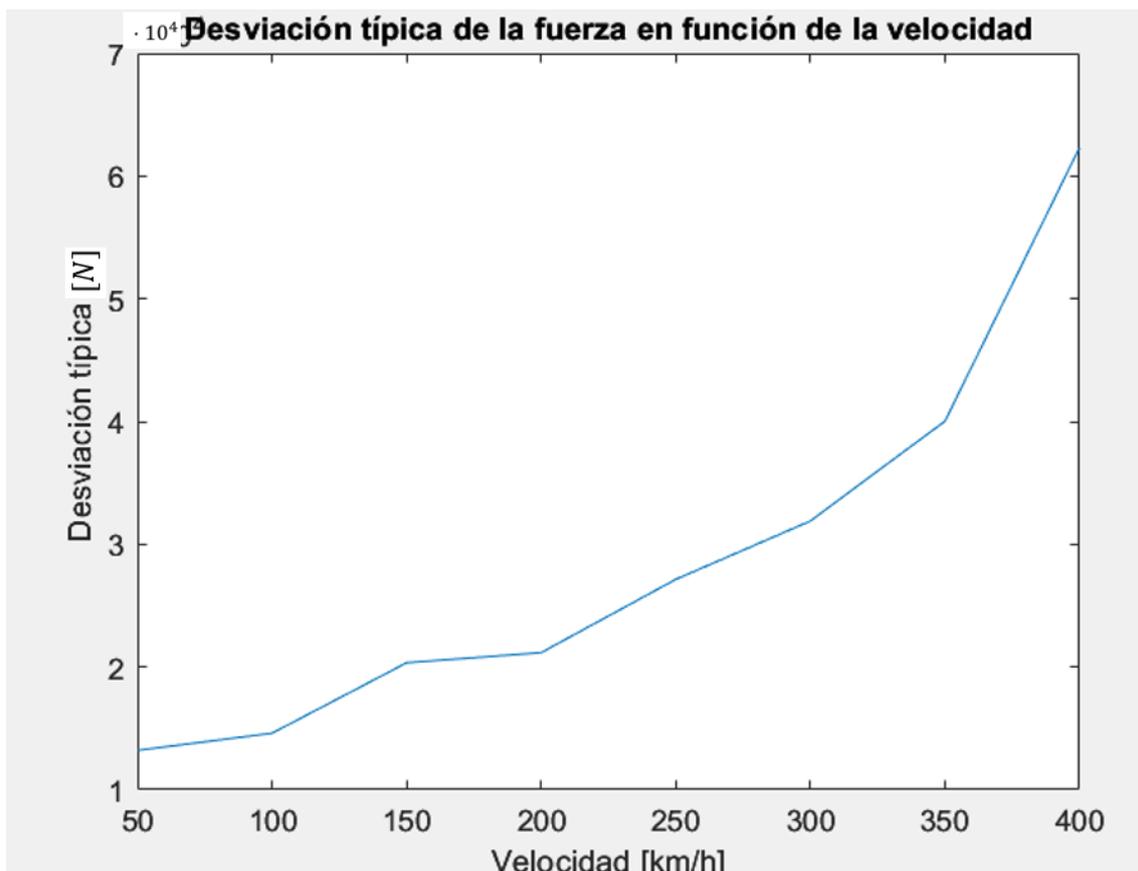


Figura 6.3. Desviación estándar en función de la velocidad.

## 7 Conclusiones

El trabajo de fin de grado ha consistido en desarrollar un modelo de interacción dinámica entre el tren y la vía ferroviaria utilizando el método de elementos finitos periódicos. La viga se ha modelado siguiendo las características de una viga Euler-Bernoulli, teniendo en cuenta las propiedades mecánicas del carril y las fuerzas de contacto entre la rueda y el carril utilizando el método del *penalty*. El vehículo

ferroviario se ha modelado como sistema de masas con rigideces, considerando la suspensión primaria y secundaria y el bogie. Además, se ha explicado cómo la presencia de rugosidad en la vía afecta a la obtención de la respuesta dinámica del sistema.

Gracias a las simulaciones se ha obtenido la fuerza de contacto entre el vehículo y la vía y la desviación típica de esta fuerza en función de la velocidad. Se ha llegado a la conclusión, que para ciertas velocidades el sistema presenta mayor estabilidad variando menos las fuerzas de contacto y por tanto, menos vibraciones. Esta estabilidad se altera a partir de los 250 km/h, donde se observan mayores variaciones en la fuerza de contacto. También, se ha analizado el comportamiento de la fuerza de contacto en función de la distancia del bloque de vía que se ha considerado, viendo cómo cambia la fuerza de contacto debido a la rugosidad de la vía.

El uso del método de elementos finitos periódicos (PFEM) se ha dado gracias a la implementación de matrices de elementos finitos tanto de la vía como del vehículo, de la función de la rugosidad del bloque repetitivo de vía, que influye en el comportamiento dinámico del sistema y la condición de periodicidad, lo que hace que esta formulación sea válida para cualquier estructura periódica que se quiera estudiar.

En este estudio se han realizado algunas simplificaciones para facilitar los cálculos. Por ejemplo, para obtener los datos de la rigidez de la vía se ha considerado un modelo CAD simplificado de rail con traviesa, eliminando sujeciones o placas de asiento que podrían alterar levemente las simulaciones. Asimismo, en el modelo del vehículo se ha considerado una estructura simplificada, sin incluir sistemas de amortiguación más complejos o más ruedas, bogies o suspensiones. También, se ha establecido la condición de periodicidad de la vía, lo cual puede no ser aplicable a todos los tramos de una vía ferroviaria real.

Por último, para mejorar el estudio es posible realizar mejoras en la modelización del vehículo con un modelo más preciso y realista, en la vía incluyendo las partes simplificadas y utilizando un sistema no lineal de contacto rueda-rail para evitar errores de pérdida de contacto. También es interesante realizar pruebas o ensayos en infraestructuras e instalaciones reales midiendo las fuerzas de contacto y compararlas con los resultados del modelo para mejorarlo y solucionar fallos.

## 8 Referencias de la memoria

- [1] M. J. Gamez, «Objetivos y metas de desarrollo sostenible», Desarrollo Sostenible. Accedido: 14 de septiembre de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/>
- [2] F. J. González Fernández y J. Fuentes Losa, *Ingeniería ferroviaria*. Madrid, SPAIN: UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2010. Accedido: 20 de agosto de 2024. [En línea]. Disponible en: <http://ebookcentral.proquest.com/lib/bibliotecaupves-ebooks/detail.action?docID=3199358>
- [3] T. Am, «SUPERESTRUCTURA TRAVIESAS», 2017.
- [4] A. López Pita, *Infraestructuras Ferroviarias*, Edicions UPC, 2006. Universitat Politècnica de Catalunya, 2010. Accedido: 28 de agosto de 2024. [En línea]. Disponible en: [https://www.academia.edu/73258273/Infraestructuras\\_Ferroviarias\\_Andr%C3%A9s\\_L%C3%B3pez\\_Pita?auto=download](https://www.academia.edu/73258273/Infraestructuras_Ferroviarias_Andr%C3%A9s_L%C3%B3pez_Pita?auto=download)
- [5] F. J. G. Gutiérrez, «TÍTULO: DISEÑO DE UN SISTEMA COMPLETO DE MEDIDA PARA MOVIMIENTO DE LAZO EN TRENES».
- [6] J. Álvarez Rodríguez, «Parametrización del gálibo de material ferroviario», Tesis doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, 2006.
- [7] «Comprensión De La Rugosidad De La Superficie», FasterCapital. Accedido: 10 de septiembre de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://fastercapital.com/keyword/comprensión-de-la-rugosidad-de-la-superficie.html>
- [8] X. Lei, *High Speed Railway Track Dynamics: Models, Algorithms and Applications*. en *Advances in High-speed Rail Technology*. Singapore: Springer Singapore, 2022. doi: 10.1007/978-981-16-4593-8.
- [9] J. Orta i Roca, J. Cardona, y A. Sanchez, «INFLUENCIA DE LA RUGOSIDAD DEL CARRIL EN LA GENERACIÓN DE VIBRACIONES EN INFRAESTRUCTURAS FERROVIARIAS».
- [10] *Railway applications - Wheelsets and bogies - Monobloc wheels - Design assessment procedure - Part 1: Forged and rolled wheels*, febrero de 2017.
- [11] R. Bayona Salvador, «Modelos simplificados de carril con soportes discretos para el estudio de problemas relativos a la dinámica ferroviaria», Trabajo de fin de

- grado, Universidad Politécnica de Valencia, 2019. [En línea]. Disponible en:  
<http://hdl.handle.net/10251/125740>
- [12] E. Frias Valero, «Aportaciones al estudio de las máquinas eléctricas de flujo axial mediante la aplicación del método de los elementos finitos», Tesis doctoral, 2004. [En línea]. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10803/6294>
- [13] «Elementos constructivos. Edificación». [En línea]. Disponible en: [chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.andece.org/images/MAS-STER/descripcion\\_traviesas.pdf](chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.andece.org/images/MAS-STER/descripcion_traviesas.pdf)
- [14] J. M. Fernández Pareja, «Influencia de la separación de las traviesas ferroviarias en el comportamiento mecánico de la vía», Trabajo de fin de grado, Universidad de Cantabria, 2022.
- [15] A. Zougari, «Estudio del comportamiento vibratorio de vías ferroviarias mediante simulación numérica», Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya. Departament d'Enginyeria Mecànica, 2014. [En línea]. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10803/311432>
- [16] B. S. Gan, *An Isogeometric Approach to Beam Structures*. Cham: Springer International Publishing, 2018. doi: 10.1007/978-3-319-56493-7.
- [17] W. Zhai y Z. Cai, «Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track», *Computers & Structures*, vol. 63, n.º 5, pp. 987-997, jun. 1997, doi: 10.1016/S0045-7949(96)00401-4.
- [18] L. E. Vicente Alonso, «Estudio de la influencia de los parámetros de contacto de ANSYS en la resolución de problemas de interacción mecánica superficial.», Trabajo de fin de grado, Universidad de Sevilla, 2011. [En línea]. Disponible en: <https://biblus.us.es/bibing/proyectos/abreproy/4937/>
- [19] P. Wang, X. Ma, J. Xu, J. Wang, y R. Chen, «Numerical investigation on effect of the relative motion of stock/switch rails on the load transfer distribution along the switch panel in high-speed railway turnout», *Vehicle System Dynamics*, vol. 57, n.º 2, pp. 226-246, feb. 2019, doi: 10.1080/00423114.2018.1458992.
- [20] J. Gil Romero, M. Tur, S. Gregori, A. Correcher, y F. J. Fuenmayor, «Finite element periodic catenary model to perform HIL pantograph tests considering non-linear dropper behaviour», 2022, [En línea]. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2022.103816>

- [21] J. Gil, M. Tur, S. Gregori, A. Correcher, y F. J. Fuenmayor, «Finite element periodic catenary model to perform HIL pantograph tests considering non-linear dropper behaviour», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 210, p. 103816, nov. 2022, doi: 10.1016/j.finel.2022.103816.
- [22] C. Ortega, «Desviación estándar: Qué es, usos y cómo obtenerla», QuestionPro. Accedido: 13 de septiembre de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://www.questionpro.com/blog/es/desviacion-estandar/>

## 9 Presupuestos

En este apartado se va a tratar de calcular los precios de realización de este trabajo como si lo hubiera realizado un ingeniero junior con un sueldo acuerdo a su puesto. Los costes vendrán principalmente del desarrollo e implementación de los modelos vehículo-vía.

Se han considerado los costes de mano de obra, el coste del hardware y los costes de los programas utilizados como, el software *Matlab*, el software *SolidWorks* y el paquete de *Microsoft Office*.

### 9.1 Costes de mano de obra

La mano de obra es principalmente del tutor y el alumno. Se tratan de la formación teórica, búsqueda de información, creación de los análisis de SolidWorks, la creación de los códigos complementos al programa principal de Matlab, el análisis de resultados, la redacción del proyecto y la supervisión del proyecto.

Se va a establecer un precio de 8 €/hora a los costes que genera el alumno, considerado ingeniero junior y a un precio de 19 €/hora a la labor del tutor como ingeniero superior investigador.

Referencia	Unidad	Realización	Descripción	Nº horas	Precio €/horas	Coste total (€)
h1	Horas	Alumno	Formación teórica	59	8	472,00 €
h2	Horas	Alumno	Creación del análisis de SolidWorks	55	8	440,00 €
h3	Horas	Alumno	Creación de los códigos Matlab	90	8	720,00 €
h4	Horas	Alumno	Análisis de Resultados	52	8	416,00 €
h5	Horas	Alumno	Redacción del proyecto	67	8	536,00 €
h6	Horas	Alumno	Preparación de la presentación	30	8	240,00 €
h7	Horas	Tutor	Supervisión y tutorías	20	19	380,00 €
					Coste total sin IVA	3.204,00 €
					IVA 21%	672,84 €
					<b>Coste Total Mano de obra (€)</b>	<b>3.876,84 €</b>

Tabla 4. Coste de mano de obra

El coste asciende a 3876,84 €.

### 9.2 Coste por licencias de software

En este apartado se van a detallar los costes que se han tenido debido a las licencias durante la realización del proyecto. Para estudiantes de la UPV las licencias se pueden obtener gratuitamente, sin embargo, estamos bajo el supuesto de que el presupuesto es para una empresa, por tanto se han detallado los precios de los programas para las empresas. (Pricing and Licensing, s.f.) (Precios de licencias SOLIDWORKS, s.f.)

(Compara todos los planes de Microsoft 365 (anteriormente Office 365): Microsoft Store, s.f.)

Referencia	Unidad	Software Informático	Precio (€/año)	Meses trabajando	Precio por mes (€/mes)	Coste de la licencia (€)
m1	Meses	Matlab R2022b	900,00 €	5	75,00 €	375,00 €
m2	Meses	SolidWorks	3.495,00 €	1	291,25 €	291,25 €
m3	Meses	Paquete Office	67,20 €	3	5,60 €	16,80 €
					Coste total sin IVA	683,05 €
					IVA	143,44 €
					<b>Coste total licencias</b>	<b>826,49 €</b>

Tabla 5. Coste de las licencias de Software

El coste del software asciende a 826,49 €.

### 9.3 Coste del hardware

En este apartado se detallan los dispositivos físicos utilizados para realizar este trabajo. Se ha utilizado un ordenador portátil ASUS y un ratón inalámbrico.

Referencia	Unidad	Dispositivo	Precio (€)	Vida útil (años)	Meses trabajando	Coste del dispositivo
r1	meses	Ordenador portátil ASUS ROG	1.800,00 €	6	5	125,00 €
r2	meses	Ratón inalámbrico	15,00 €	6	5	1,04 €
					Coste total sin IVA	126,04 €
					IVA	26,47 €
					<b>Coste Total Hardware</b>	<b>152,51 €</b>

Tabla 6. Coste del hardware

El coste del hardware asciende a 152,51 €.

### 9.4 Coste total

El coste total se calcula sumando los demás costes:

Descripción	Coste (€)	IVA 21%	Coste total (€)
Mano de obra	3.204,00 €	672,84 €	3.876,84 €
Software	683,05 €	143,44 €	826,49 €
Hardware	126,04 €	26,47 €	152,51 €
<b>Presupuesto total del proyecto sin IVA</b>			<b>4.013,09 €</b>
<b>Presupuesto total del proyecto con IVA</b>			<b>4.855,84 €</b>

Tabla 7. Importe total del servicio de ingeniería

Finalmente, el coste final de realización de este trabajo de fin de grado es de **CUATRO MIL OCHOCIENTOS CINCUENTA Y CINCO EUROS CON OCHENTA Y CUATRO CÉNTIMOS.**

## Referencias del presupuesto

*Compara todos los planes de Microsoft 365 (anteriormente Office 365): Microsoft Store.* (s.f.). Obtenido de <https://www.microsoft.com/es-es/microsoft-365/buy/compare-all-microsoft-365-products>

*Precios de licencias SOLIDWORKS.* (s.f.). Obtenido de <https://www.cimworks.es/precios-solidworks-3dexperience/>

*Pricing and Licensing.* (s.f.). Obtenido de Matlab: <https://it.mathworks.com/pricing-licensing.html>

## 10 Pliego de condiciones

### 10.1 Objetivo del Pliego de condiciones

El Pliego de Condiciones es, desde el punto de vista legal y contractual, el documento más importante del proyecto a la hora de su ejecución material. El ámbito de aplicación de este documento se extiende a sistemas ferroviarios y mecánicos que forman parte de la estructura de la vía. Se van a recoger en esta sección las normativas, las especificaciones técnicas de hardware o software, el plazo de ejecución y las condiciones de interpretación y uso de resultados.

### 10.2 Condiciones legales y generales

- Los programas de simulación utilizados en este proyecto, como Matlab y SolidWorks están sujetos a licencias específicas de uso y cualquier redistribución fuera del ámbito académico debe cumplir con las normativas impuestas por el creador del software.
- Durante la realización del proyecto se cumplirán todas las normativas relativas a la seguridad y salud en el ámbito académico y de investigación, cumpliendo con la Ley 31/1995, de 8 de noviembre, de Prevención de Riesgos Laborales.
- El proyecto se enmarca dentro de la Agenda 2030 y contribuye a los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), especialmente en cuanto a innovación e industria, a objetivos de transporte sostenible en ciudades y asentaciones humanas y en objetivos de lucha contra el cambio climático.
- El desarrollo del modelo y las simulaciones están sujetos a las normativas ferroviarias nacionales e internacionales, como la normativa UIC (Unión Internacional de Ferrocarriles) y las normativas UNE de calidad y seguridad de la vía ferroviaria.
- El proyecto se realizará siguiendo la norma UNE-EN 13848-1:2020 de aplicaciones ferroviarias.
- Las disposiciones mínimas de seguridad y salud para la utilización por los trabajadores de equipos que incluyan pantallas de visualización son establecidos por el Real Decreto 488/1997 del 14 de abril.

## 10.3 Condiciones técnicas

Las simulaciones de este proyecto se han obtenido mediante técnicas computacionales únicamente, lo que incluye los componentes físicos computacionales (*hardware*) y los programas y licencias informáticas (*software*).

### 10.3.1 *Hardware* empleado

El *hardware* utilizado para realizar las debidas simulaciones ha de tener mínimo las siguientes características:

- Procesador: Intel Core i7 9th Gen.
- Memoria: 16 GB de memoria RAM.
- Almacenamiento: 500 GB de espacio libre en disco duro para datos de simulación.
- Tarjeta gráfica: NVIDIA GTX 1650 para las simulaciones de SolidWorks.

### 10.3.2 *Software* empleado

Las licencias de los programas computacionales han sido adquiridas a través de la Universidad Politécnica de Valencia gracias a las licencias que la misma universidad proporciona a sus estudiantes, por tanto la utilización sólo tiene carácter educativo, nunca profesional ni comercial. Se han utilizado los siguientes programas:

- MATLAB R2022b. Lenguaje de programación de múltiples paradigmas y un entorno de computación numérica desarrollado por MathWorks.
- Microsoft Office 365. Formado por varios servicios, aplicaciones y herramientas desarrollada por Microsoft. Dentro de este paquete se ha utilizado Microsoft Word, procesador de texto usado para crear los documentos; Microsoft Excel, hoja de cálculo usada para crear los presupuestos; Microsoft PowerPoint, herramienta usada para crear la presentación para la defensa.
- SolidWorks. *Software* de diseño CAD 3D para modelar piezas y ensamblajes que ofrece un amplio abanico de soluciones para cubrir los aspectos implicados en el proceso de desarrollo del producto., marca propiedad de Dassault Systèmes.
- Zotero. Aplicación gratuita para gestionar las referencias bibliográficas.

### 10.3.3 Especificaciones del modelo

- Bloque de vía de longitud de 0.9 metros. Rail de acero AISI 1020 con límite elástico de 351,571 MPa, límite de tracción de 420,507 MPa, módulo elástico de

200 GPa, coeficiente de Poisson de 0,9, densidad de  $7900 \text{ kg/m}^3$ , módulo cortante de 77 GPa y coeficiente de dilatación térmica de  $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/Kelvin}$ .  
Traviesa de hormigón pretensado monobloque con límite elástico de 30 MPa, límite de tracción de 5 MPa, límite de compresión de 60 MPa, módulo elástico de 5 GPa, coeficiente de Poisson de 0,2, densidad de  $2400 \text{ kg/m}^3$  y módulo cortante de  $2,08333 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

- El vehículo está basado en un bogie ferroviario estándar con suspensión primaria y secundaria.
- La rugosidad es implementada de acuerdo a la norma UNE-EN 13848 de aplicaciones ferroviarias.

#### 10.4 Plazo de ejecución

El proyecto se ha llevado a cabo durante 5 meses dedicando 1 mes a la fase de investigación y conocimientos previos, 1 mes para el desarrollo del modelo FEM, 2 meses para la creación e implementación de los modelos en Matlab y 1 mes para redacción de la memoria y presentación.

#### 10.5 Condiciones de interpretación, uso de resultados y responsabilidades

El autor de este trabajo declara que el código PFEM ha sido proporcionado por el tutor debido a su dificultad y el trabajo de fin de grado consiste en la creación de los programas y funciones necesarias para garantizar el buen funcionamiento del código y así, valorar los resultados obtenidos.

Se han simplificado ciertos modelos para facilitar la realización de este proyecto, por lo que pueden haber pequeños errores en los resultados finales. La validación de estos resultados deberá estar sujeta a estudios experimentales en un entorno seguro y controlado.

El estudiante se compromete al desarrollo completo del modelo de elementos finitos tanto de la vía como del vehículo, además de otras funciones relevantes en este estudio, a la ejecución de las simulaciones y al análisis de resultados.

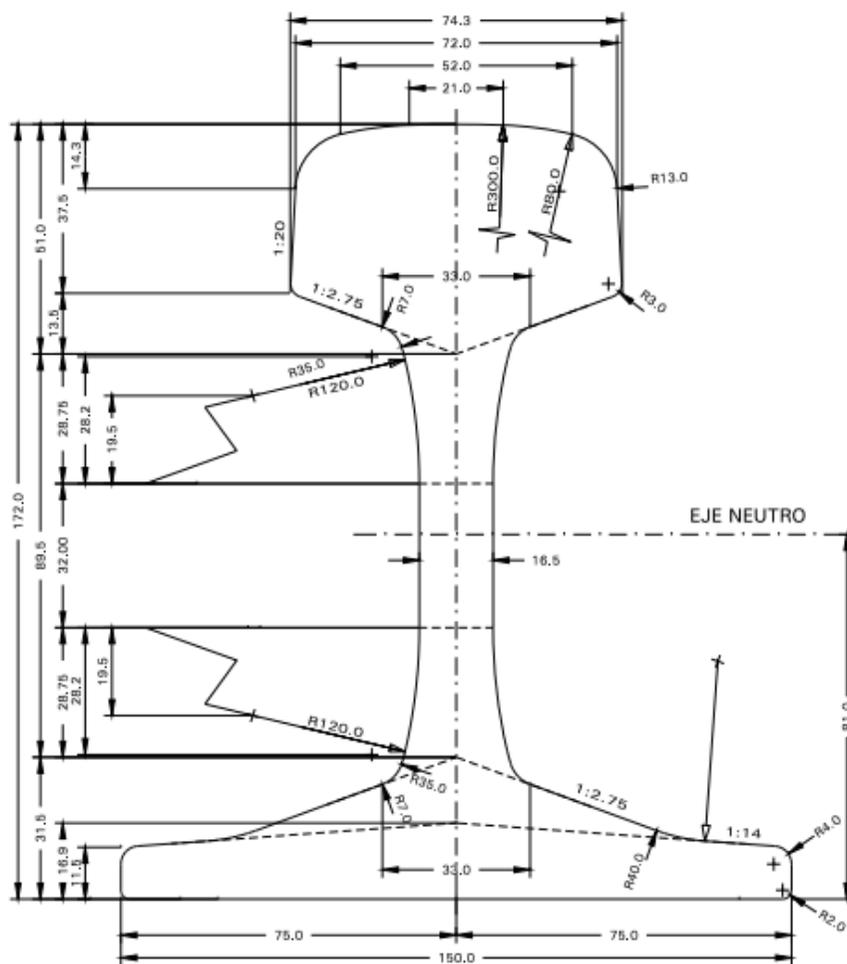
El tutor se compromete a la supervisión y revisión del progreso del proyecto, asegurando el cumplimiento de los objetivos.

# 11 Anexos

# ANEXO I. Planos del raíl y la traviesa

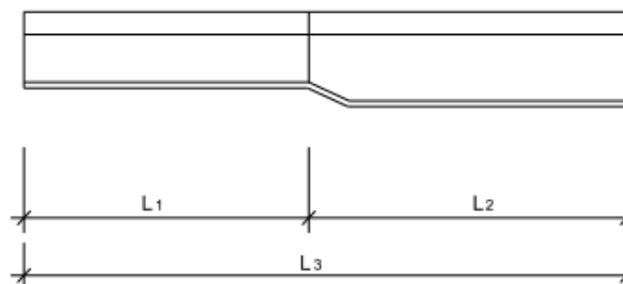
### CARRIL UIC-60-E1

COTAS EN MILÍMETROS



### DETALLE DE CUPON MIXTO

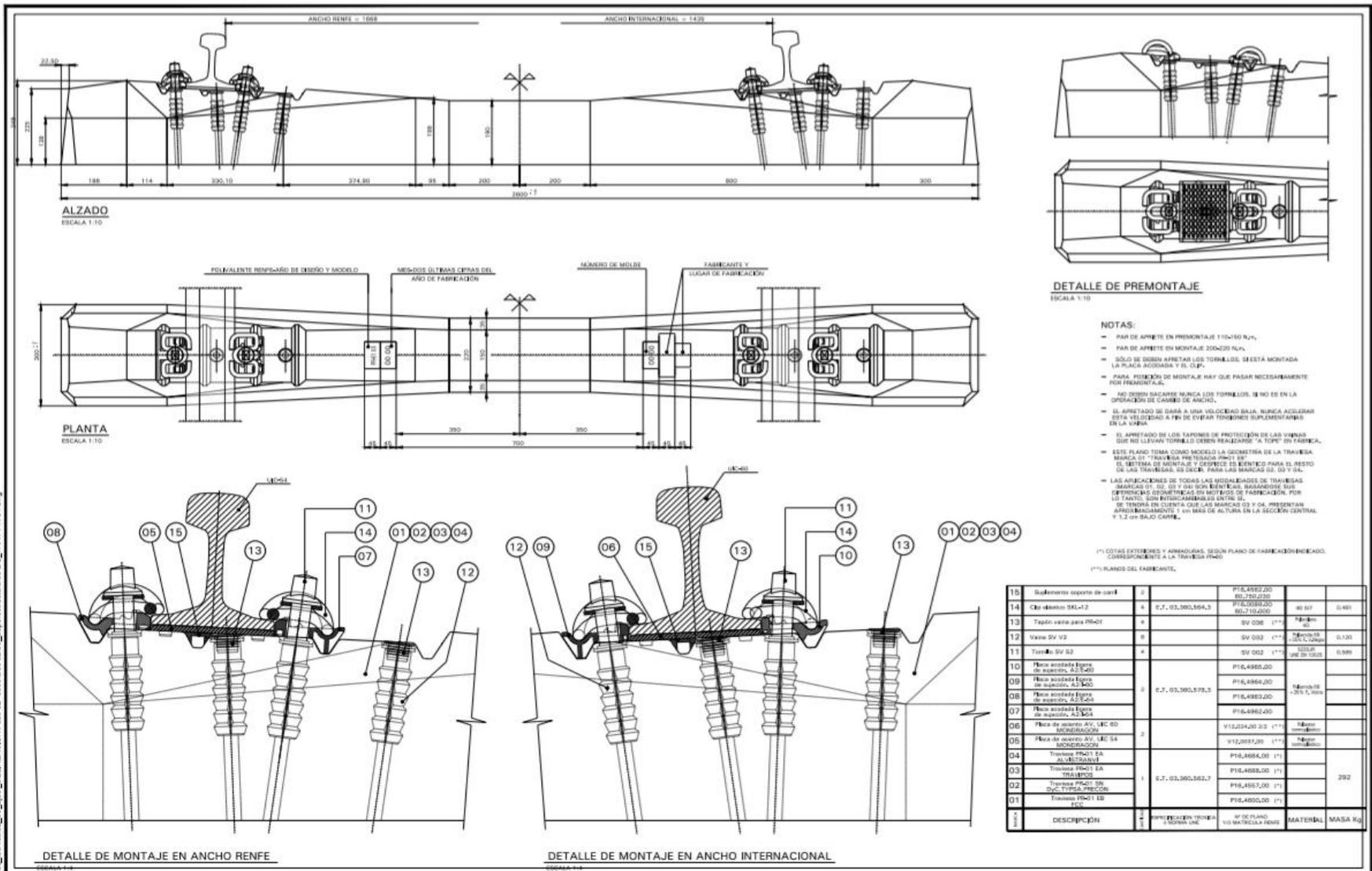
SIN ESCALA



VÍA 54/60				
MATRICULA	LONGITUDES			HILO ACTIVO
	L1	L2	L3	
60.109.650	2.997	2.997	5.994	DERECHO
60.109.651	2.997	2.997	5.994	IZQUIERDO
60.109.656	2.997	6.012	9.009	DERECHO
60.109.657	2.997	6.012	9.009	IZQUIERDO
60.109.662	2.997	6.680	9.677	DERECHO
60.109.663	2.997	6.680	9.677	IZQUIERDO
60.109.668	2.997	7.212	10.209	DERECHO
60.109.669	2.997	7.212	10.209	IZQUIERDO
60.109.680	9.189	7.329	16.518	DERECHO
60.109.681	9.189	7.329	16.518	IZQUIERDO
60.109.686	10.305	7.329	17.634	DERECHO
60.109.687	10.305	7.329	17.634	IZQUIERDO
60.109.692	2.997	16.190	19.187	DERECHO
60.109.693	2.997	16.190	19.187	IZQUIERDO

Nota: Los cupones mixtos 60.109.650 y 60.109.651 no podrán utilizarse con carácter general, debiendo ser aprobada su utilización por el director de obra

P:\2017\10466002\_Exc\_Incisa02\_01\_Exc1\_DELINEACION\DWG\Exc-0007\Doc\0208\_Superestructura051\_CARRIL\_04-1.dwg



**DETALLE DE PREMONTAJE**  
ESCALA 1:10

- NOTAS:**
- PAR DE APRIETE EN PREMONTAJE 110±10 N.m.
  - PAR DE APRIETE EN MONTAJE 20±200 N.m.
  - SÓLO SE DEBEN APRIETAR LOS TORNILLOS, SE ESTÁ MONTADA LA PLACA AJUSTADA Y EL CLIP.
  - PARA EL MONTAJE DE MONTAJE HAY QUE PASAR NECESARIAMENTE POR PREMONTAJE.
  - NO DEBEN SACARSE NUNCA LOS TORNILLOS, SE NO ES EN LA OPERACIÓN DE CAMBIO DE ANCHO.
  - EL APRIETADO DE GARA A UNA VELOCIDAD BAJA, NUNCA ACELERAR ESTA VELOCIDAD A FIN DE EVITAR TENSIONES SUPLEMENTARIAS EN LA VÍA.
  - EL APRIETADO DE LOS TAPONES DE PROTECCIÓN DE LAS VÍAS QUE NO LLEVAN TORNILLO DEBEN REALIZARSE "A TORX" EN FABRICA.
  - ESTE PLANO TIENE COMO MODELO LA GEOMETRÍA DE LA TRAVIESA MARCA 01 "TRAVIESA PRETENSADA P10-1 1B". EL SISTEMA DE MONTAJE Y DESMONTAJE ES IDENTICO PARA EL RESTO DE LAS TRAVIESAS, ES DECIR, PARA LAS MARCAS 02 Y 04.
  - LAS APLICACIONES DE TODAS LAS MEDIANZAS DE TRAVIESAS (MARCAS 01, 02, 03 Y 04) SON BREVETAS. BASÁNDOSE EN SUS DEFINICIONES GEOMÉTRICAS DE MOTORES DE FABRICACIÓN, POR LO TANTO, SON INDETERMINADOS ENTRE SE SE TIENEN EN CUENTA QUE LAS MARCAS 02 Y 04, PRESENTAN APROXIMADAMENTE 1 cm MÁS DE ALTURA EN LA SECCIÓN CENTRAL Y 1,2 cm BAJO CARRIL.

(\*) COTAS EXTERNAS Y ARMADURAS, SEGÚN PLANO DE FABRICACIÓN INDICADO, CORRESPONDIENTE A LA TRAVIESA P10-0.

(\*\*) PLANOS DEL FABRICANTE.

ID	DESCRIPCIÓN	CANTIDAD	UNIDAD	REFERENCIA	NOTAS	MATERIAL	MASA Kg
15	Suplemento soporte de carril	3		P16.4992,20 60-750/030			
14	Cilindro ovalado ØxL=12	4		E.T. 03.360,566,3			0,481
13	Tapón cónico para P10-01	4		SV 008 (**)			
12	Vano SV V2	4		SV 002 (**)			0,130
11	Tornillo SV S3	4		SV 002 (**)			0,999
10	Placa anclada figura de superior, A2-145	4		P16.4992,20			
09	Placa anclada figura de superior, A2-145	4		P16.4994,20			
08	Placa anclada figura de superior, A2-145	4		E.T. 03.360,578,3			1,25 / 1,969
07	Placa anclada figura de superior, A2-145	4		P16.4992,20			
06	Placa de soporte AV, ØxL=60	3		V13.204,20 2/3 (**)			
05	Placa de soporte AV, ØxL=60	3		V13.204,20 2/3 (**)			
04	Tornillo P10-1 EA ALUBRITANAL	1		P16.4994,00 (**)			
03	Tornillo P10-1 EA TRAVIESAS	1		P16.4992,00 (**)			292
02	Tornillo P10-1 2B ØxL=100x100	1		E.T. 03.360,562,7			
01	Tornillo P10-1 2B ØxL=100x100	1		P16.4992,00 (**)			
00	DESCRIPCIÓN	4		RF DE PLANO V/O MATRÍCULA RENFE			

<p>MINISTERIO DE FOMENTO</p>	<p>SECRETARÍA GENERAL DE INFRAESTRUCTURAS</p>	TÍTULO DEL PROYECTO:	AUTOR DEL PROYECTO:	ESCALA ORIGINAL A3	FECHA:	Nº DE PLANO:	TÍTULO DE PLANO:
		ESTUDIO INFORMATIVO DE LA LÍNEA DE ALTA VELOCIDAD BURGOS - VITORIA	ineco	INDICADAS 0	2017	9.2.2	SUPERESTRUCTURA TRAVIESAS TRAVIESA PR-01
				NUMÉRICA		Nº DE HOJA:	
						HOJA	DE 1

P:\2017\1704\06\02\_dgc\_infrast\02\_03\_Estudios\02\_03\_0000\Doc\0209\_Superestructura\09.2.2\_TRAV-PR-01.dwg

## ANEXO II. Código Matlab función de rugosidad

```
function z=roughness(L,Nstp)

%norma
wavelength= [ 25      20  16  12  10  8  6.3  5  4  3.15  2.5  2
1.6 1.25  1  0.8  0.63  0.5  0.4 ]';%en centimetros
dB=        [ 12.3 10.9 9.6 8.7 7.5 6 4.6 3.2 1.7 0.5 0 -2.8
-3.4 -4 -4.5 0.5 0.4 0.4 0.3 ]';%respecto a 1 um

%calcular amplitud, numero de onda y fase
PSD=10.^(dB./10);% um^2/(rad/m)
Wk=2*pi./(wavelength./100);%numero de onda rad/m

%numero de onda a interpolar
wk=2*pi/L:2*pi/L:2*pi/(wavelength(end)/100);
wk=wk(wk>Wk(1));
N=length(wk);
inc_wk=wk(2)-wk(1);
psd=interp1(Wk,PSD,wk);

%% Trigonometric series method

sigma_k=sqrt(4*psd*inc_wk);

phi_k = 2 * pi * rand(1,N);
a_k = sigma_k .* randn(1,N);

% Para utilizar siempre la misma rugosidad-----
% save('roughness.mat','phi_k','a_k')
% load('roughness.mat','phi_k','a_k')
%-----

% espacio
x = linspace(0, L, Nstp+1);
x = x(1:end-1)';

% Serie trigonométrica
z = zeros(length(x),1);
for k = 1:N
    z = z + a_k(k) * cos(wk(k) * x + phi_k(k));
end

z=z*10^-6;
end
```

## ANEXO III. Código Matlab del análisis de elementos finitos de la vía

```

Function
[M,C,K,FF,Ngdl]=FEM_block(L_total,rho,A,E,I,k_eq,alpha_r,beta_r,c_eq,N,Nstp)

% Este programa crea un modelo de EF de un trozo de via (bloque)
% El modelo consta de una viga modelada con elementos viga de Euler
Bernouilli apoyada entre dos resortes k_eq/2
% Se definen Nstp puntos discretos de excitación a lo largo del bloque

%% MATRICES %%%%%%%%%%%

%Longitud de cada elemento
Le = L_total/N;

% Matriz de rigidez de un elemento
Ke = E * I / Le^3 * [12 6*Le -12 6*Le; 6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2; -12 -6*Le 12
-6*Le; 6*Le 2*Le^2 -6*Le 4*Le^2];

% Matriz de Masa (Inercia traslacional)
Me_trans = rho * A * Le/420 * [156 22*Le 54 -13*Le; 22*Le 4*Le^2 13*Le -
3*Le^2; 54 13*Le 156 -22*Le; -13*Le -3*Le^2 -22*Le 4*Le^2];
% Matriz de masa (Inercia rotacional)
Me_rot = rho * I / (30 * Le) * [36 3*Le -36 3*Le; 3*Le 4*Le^2 -3*Le -Le^2;-36
-3*Le 36 -3*Le; 3*Le -Le^2 -3*Le 4*Le^2];
% Matriz de Masa de un elemento
Me = Me_trans + Me_rot;

%% Ensamblaje
% Grados de libertad
Ngdl = 2 * (N + 1);
K = zeros(Ngdl);
M = zeros(Ngdl);

for i = 1:N
    gdl = (i-1)*2+[1 2 3 4];
    K(gdl, gdl) = K(gdl, gdl) + Ke;
    M(gdl, gdl) = M(gdl, gdl) + Me;
end

%amortiguamiento
C=alpha_r*M+beta_r*K;

%Ensamblaje del resorte que sustituye a la traviesa
K(1, 1)=K(1, 1)+k_eq/2;
K(end-1, end-1)=K(end-1, end-1)+k_eq/2;
C(1, 1)=C(1, 1)+c_eq/2;
C(end-1, end-1)=C(end-1, end-1)+c_eq/2;

%% FUNCIONES DE FORMA %%%%%%%%%%%

```

```

%Las funciones de forma se evaluan en Nstp puntos discretos a lo largo de la
via
% Se crea una matriz que incluye las funciones de forma de cada uno de los
grado de libertad globales en cada punto

FF=zeros(Ngd1,Nstp);

X=0:Le:L_total;%X de los nodos
dx=L_total/Nstp;% dx entre puntos de excitacion
x=0:dx:(Nstp-1)*dx; % x de los puntos de excitación

for stp = 1:Nstp
    i=find(x(stp)<X,1)-1;%indice del elemento que se aplica la excitacion
    gd1 = (i-1)*2+[1 2 3 4]; %indice de los grados de libertad de ese
elemento

    Eps = (x(stp)-X(i))/Le; %cordenada local correspondiente al punto de
excitacion
    N1 = 1 - 3*Eps.^2 + 2*Eps.^3;
    N2 = Le * (Eps - 2*Eps.^2 + Eps.^3);
    N3 = 3*Eps.^2 - 2*Eps.^3;
    N4 = Le * (-Eps.^2 + Eps.^3);
    FF(gd1,stp)=[N1;N2;N3;N4]; %Matriz Funciones de forma

end

% %representacion
% figure
% plot((FF(1:2:end,:))')%funciones de forma de desplazamiento
% figure
% plot((FF(2:2:end,:))')%funciones de forma de giro

end

```

## ANEXO III. Código Matlab del análisis de elementos finitos del vehículo

```
function [M2 , C2 ,K2,kc ,f0] = FEM_veh

kc= 0.95*10^9; %de la figura 4.8 del correspondiente a 94 kN
(77000/4/2*9.81/1000)
k1 = 2.14*10^6/2;
k2 = 5.32*10^6/2/2;
k3 = 200;
%- Valores de amortiguamiento:
c1 = 4.9*10^4/2;
c2 = 7*10^4/2/2;
c3 = 0;
%- Valores de las masas:
m1 = 1200/2;
m2 = 1100/2/2;
m3 = 77000/4/2;
%MATRICES
M2=[ m1 0 0; 0 m2 0; 0 0 m3];
C2=[ c1 -c1 0; -c1 c1+c2 -c2; 0 -c2 c2+c3];
K2=[ k1 -k1 0; -k1 k1+k2 -k2; 0 -k2 k2+k3];%no incluye kc

f0=m3*9.81;
end
```

## ANEXO IV. Código Matlab de la transformada de Fourier

```
function [F,w]=fourier_trasform(f,t)
% transformada de fourier
dt=t(2)-t(1);
F=fft(f);
N=length(F);

dw=2*pi/(N*dt);

if mod(N,2)==0 %par
    F=F(1:N/2+1)/N ;
    F(2:N/2)=2*F(2:N/2);
else %impar
    F=F(1:(N+1)/2)/N ;
    F(2:end)=2*F(2:end);
end

w=0:dw:(length(F)-1)*dw;

end
```

## ANEXO V. Código Matlab del programa principal de elementos finitos periódicos (PFEM)

```

%% INPUTS

% Parametros mecanicos de la via
L = 0.9; % Longitud total
rho = 7900; % Densidad [kg/m^3]
A = 0.009982909686; % Área [m^2]
E = 200e9; % Módulo elástico [Pa]
I = 0.000033758652846219004; % Inercia [m^4]
k_eq = 1348254011; % Rigidez equivalente [N/m]
c_eq = 100; %amortiguamiento equivalente
alpha_r=0.1; %amortiguamiento rayleigh del carril
beta_r=10^-4;

% Parametros mecanicos del vehiculo
% Definidos en FEM_veh.m

% Parametros simulación
v=200/3.6; % m/s

%Parametros de la discretización (estudio de convergencia)
Nele = 5; %Número de elementos
dx=0.8* 10^-3; %distancia entre puntos de integración (m)
D_ejes= 6;%Distancia entre eje (al asumir excitacion periodico por la DFT)(m)
wmax=1800;%maxima frecuencia incluida en la DFT (rad/s)

%% Parametros indirectos
Nstp=round(L/dx);
dx=L/Nstp; %correccion de dx
N= round(D_ejes/dx); %numero de terminos de la DFT
dt=dx/v; %incremento de tiempo
dw=2*pi/N/dt;% incremento de frecuencia rad/s
wmax=min(wmax,pi/dt);% correccion de la frecuencia maxima para que no exceda
la maxima de la DFT
w=0:dw:wmax;%frecuencias

%% FEM model of the block
[M,C,K,Ft_unit,Ngd1]=FEM_block(L,rho,A,E,I,k_eq,alpha_r,beta_r,c_eq,Nele,Nst)
;

%% FEM model of the vehicle
[M2 , C2 ,K2,k0,f0] = FEM_veh;
f0=f0*ones(Nstp,1);

%% Rugosidad
z0=roughness(L,Nstp);

%% PFEM %%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%% VEHICLE MODEL

%frecuencias
dw2=2*pi/L*v;
Nc=(floor(Nstp/2))+1;
w2=0:dw2:(Nc-1)*dw2;

%Matriz I
ng=0:Nstp-1;
n=(0:Nstp-1)';
k=0:Nc;
ak=2*ones(Nc);
ak(1)=1;
ak(end)=1;
Iccveh=zeros(Nstp);
Hp=zeros(1,Nc);
for Iw=1:Nc
    %receptancia
    kp_din= K2 - M2*w2(Iw)^2 + 1i*w2(Iw)*C2;
    Hp_din=inv(kp_din);
    Hp_din=Hp_din(1,1);
    Hp(Iw)=Hp_din+1/k0;%incluye el resorte k0
    %matriz I
    Iccveh=Iccveh+real(1/Nstp*ak(Iw)*Hp(Iw)*exp(2*pi*1i*k(Iw)/Nstp.*(n-ng)));
end

%% TRACK MODEL

%Nodos segun tipo
gd1L=1:2;      N1=2;
gd1I=3:Ngd1-2;  Ni=Ngd1-4;
gd1R=Ngd1-1:Ngd1;  Nr=2;

%% Receptancia de la via acoplada
H=zeros(Ngd1,Ngd1-Nr,length(w));
for Iw=1:length(w)
    W=w(Iw);

    %CALCULO RIGIDEZ DINAMICA (RESPUESTA EN FRECUENCIA)
    D=K+1i*W*C-W^2*M;

    %calculo H infinita periodica moving load
    Hext=[ zeros(Nr,Ni)   eye(Nr)*exp(1i*W*L/v); ...
           eye(Ni)       zeros(Ni,Nr); ...
           zeros(Nr,Ni)   zeros(Nr)];
    A=[   D(:,gd1I)      D(:,gd1R)+exp(1i*W*L/v)*D(:,gd1L)
        [eye(Nr)*exp(1i*W*L/v); zeros(Ni,Nr); -eye(Nr)]   ];
    HH=A\Hext;

    H(:, :, Iw)=[exp(1i*W*L/v)*HH(Ni+1:Ni+Nr, :); HH(1:Ni+Nr, :)];
    %(gd1_out(l i r),gd1_exc (int | dr) , w)

end

```

```

%% Funcion impulsional de la via

H=permute(H,[2 1 3]);%H %(gdl_exc (int | dr), gdl_out(1 i r), w )

%multiplicacion de H por el desfase de nodos left
w=permute(w,[3 1 2]);
He=[H(Ni+1:Ni+Nl, :, :).*exp(-1i*w*L/v);H(1:Ni+Nl, :, :)];%(gdl_exc , gld out, w)

% Impulsos %%%%%%%%%%
stps=1:Nstp;

Icc=zeros(Nstp,Nstp);

for Iw=1:length(w)
    a=(Iw==1)+(Iw~=1)*2;

    %calculo de ICC
    I=Ft_unit'*He(:,1:Ni+2*Nl,Iw)*Ft_unit;%(ng , n)
    IFT=1/N*exp(1i*w(Iw).*((stps-1)-(stps-1)')*dt);%(ng , n)
    Icc=Icc+a*real(IFT.*I);%(ng , n)
end

Icc=Icc';%(n,ng)

%% Solution

%matrices sistema
A= Icc+Iccveh;
B= z0-Icc*f0;

%solucion
f=A\B+f0;

%representacion
x=(0:Nstp-1)*dx;
figure
plot(x,f)
xlabel('Longitud del bloque de vía [m]');
ylabel('Fuerza [KN]');
title('Señal en el dominio del tiempo');

%% contenido en frecuencia
t=(0:Nstp-1)*dt;
[F,w]=fourier_trasform(f,t);
[Z,~]=fourier_trasform(z0,t);
figure
plotyy(w/2/pi,abs(F),w/2/pi,abs(Z))

```

## ANEXO VI. Código Matlab de la desviación típica en función de la velocidad

```
velo = [50,100,150,200,250,300,350,400];

for ind = 1:length(velo)
    %% INPUTS

    % Parametros mecanicos de la via
    L = 0.9; % Longitud total
    rho = 7900; % Densidad [kg/m^3]
    A_area = 0.009982909686; % Área [m^2]
    E = 200e9; % Módulo elástico [Pa]
    I = 0.000033758652846219004; % Inercia [m^4]
    k_eq = 117375763290; % Rigidez equivalente [N/m]
    c_eq = 100*(1+0.05*v); % Amortiguamiento equivalente, con (1+0.05*v) se
    aumenta el amortiguamiento a bajas velocidades
    alpha_r = 0.1/(1+0.01*v); % Amortiguamiento Rayleigh del carril, con
    (1+0.01*v) se disminuye el efecto de amortiguamiento a altas velocidades
    beta_r = 10^-4;

    % Parametros simulacion
    v = velo(ind) / 3.6; % Convertir km/h a m/s

    % Parametros de la discretización
    Nele = 5; % Número de elementos
    dx = 0.8 * 10^-3; % Distancia entre puntos de integración (m)
    D_ejes = 6; % Distancia entre ejes (m)
    wmax = 1800; % Máxima frecuencia (rad/s)

    %% Parametros indirectos
    Nstp = round(L / dx);
    dx = L / Nstp; % Corrección de dx
    N = round(D_ejes / dx); % Número de términos de la DFT
    dt = dx / v; % Incremento de tiempo
    dw = 2 * pi / N / dt; % Incremento de frecuencia rad/s
    wmax = min(wmax, pi / dt); % Corrección de la frecuencia máxima
    w = 0:dw:wmax; % Frecuencias

    %% FEM model of the block
    [M, C, K, Ft_unit, Ngdl] = FEM_block(L, rho, A_area, E, I, k_eq, alpha_r,
    beta_r, c_eq, Nele, Nstp);

    %% FEM model of the vehicle
    [M2, C2, K2, k0, f0] = FEM_veh;
    f0 = f0 * ones(Nstp, 1);

    %% Rugosidad
    z0 = roughness(L, Nstp)*(0.1+0.005*v);% se reduce el impacto de la
    velocidad a velocidades bajas.

    %% VEHICLE MODEL
    dw2 = 2 * pi / L * v;
    Nc = (floor(Nstp / 2)) + 1;
```

```

w2 = 0:dw2:(Nc - 1) * dw2;

% Matriz I del modelo del vehículo
ng = 0:Nstp - 1;
n = (0:Nstp - 1)';
k = 0:Nc;
ak = 2 * ones(Nc);
ak(1) = 1;
ak(end) = 1;
Iccveh = zeros(Nstp);
Hp = zeros(1, Nc);
for Iw = 1:Nc
    kp_din = K2 - M2 * w2(Iw)^2 + 1i * w2(Iw) * C2;
    Hp_din = inv(kp_din);
    Hp_din = Hp_din(1, 1);
    Hp(Iw) = Hp_din + 1 / k0; % Incluir el resorte k0
    Iccveh = Iccveh + real(1 / Nstp * ak(Iw) * Hp(Iw) * exp(2 * pi * 1i *
k(Iw) / Nstp .* (n - ng)));
end

%% TRACK MODEL
gd1L = 1:2; N1 = 2;
gd1I = 3:Ngd1 - 2; Ni = Ngd1 - 4;
gd1R = Ngd1 - 1:Ngd1; Nr = 2;

% Receptancia de la vía acoplada
H = zeros(Ngd1, Ngd1 - Nr, length(w));
for Iw = 1:length(w)
    W = w(Iw);
    D = K + 1i * W * C - W^2 * M;

    % Cálculo de H infinita periódica con carga en movimiento
    Hext = [zeros(Nr, Ni), eye(Nr) * exp(1i * W * L / v); ...
            eye(Ni), zeros(Ni, Nr); ...
            zeros(Nr, Ni), zeros(Nr)];
    A_sys = [D(:, gd1I), D(:, gd1R) + exp(1i * W * L / v) * D(:, gd1L),
[eye(Nr) * exp(1i * W * L / v); zeros(Ni, Nr); -eye(Nr)]];
    HH = A_sys \ Hext;

    H(:, :, Iw) = [exp(1i*W*L/v)*HH(Ni + 1:Ni + Nr, :); HH(1:Ni+Nr, :)];
end

% Funcion impulsional de la via
H = permute(H, [2 1 3]);

w = permute(w, [3 1 2]);
He = [H(Ni + 1:Ni + N1, :, :) .* exp(-1i * w * L/v); H(1:Ni + N1, :, :)];

% Impulsos
stps = 1:Nstp;
Icc = zeros(Nstp, Nstp);

for Iw = 1:length(w)
    a = (Iw == 1) + (Iw ~= 1) * 2;
    I = Ft_unit' * He(:, 1:Ni + 2 * N1, Iw) * Ft_unit;
    IFT = 1 / N * exp(1i * w(Iw) .* ((stps - 1) - (stps - 1)') * dt);
    Icc = Icc + a * real(IFT .* I);
end

```

```

Icc = Icc';

%% Solution
A_sys = Icc + Iccveh;
B = z0 - Icc * f0;

% Solución del sistema
f = A_sys \ B + f0;

%% Desviación estándar
STD(ind) = std(f);
end

%% Graficar resultados
plot(velo, STD)
xlabel('Velocidad [km/h]');
ylabel('Desviación típica');
title('Desviación típica de la fuerza en función de la velocidad');

```