



Fuerza resultante sobre una superficie plana sumergida. Centro de presiones. Resolución de un caso práctico

Apellidos, nombre	Gasque Albalate, María (mgasque@fis.upv.es) González-Pavón, César (csagonpa@fis.upv.es) Tarrazó-Serrano, Daniel (dtarrazo@fis.upv.es)
Departamento	Física Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica y del Medio Natural (ETSIAMN)

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se describe el procedimiento para el cálculo de la fuerza resultante (empuje) que actúa sobre una superficie plana sumergida, así como la determinación de su punto de aplicación (centro de presiones, o centro de empuje).

Con objeto de simplificar la comprensión y el entendimiento de los contenidos teóricos, además de potenciar la motivación y el proceso de aprendizaje, se aborda el caso práctico de una compuerta plana sumergida. Además de calcular la fuerza hidrostática resultante y el centro de presiones, se estudia el equilibrio de la compuerta.

Se propone finalmente otro caso práctico de nivel de dificultad similar con solución para facilitar el repaso y aplicación de los conceptos aquí tratados.

2 Objetivos

Después de leer detenidamente este documento y de analizar e intentar resolver los casos propuestos, el estudiante será capaz de:

- Plantear las expresiones que le permitan calcular la fuerza de empuje y el centro de presiones en una superficie plana sumergida en un fluido de densidad homogénea.
- Analizar el equilibrio estático de una compuerta plana sumergida sometida a la fuerza de empuje y a la acción de su propio peso.
- Utilizar su capacidad de abstracción para la aplicación de los conceptos a otros casos de nivel de dificultad similar.



Conocimientos previos.

Para abordar con soltura la lectura de este artículo y alcanzar los objetivos propuestos, son muy recomendables ciertos conocimientos previos. Además de nociones básicas de estática de fluidos (conceptos de presión, densidad, fluido en equilibrio) y estática del sólido rígido (ecuaciones de equilibrio: fuerzas y momentos), se aconseja revisar previamente el concepto de centro de gravedad y momento de inercia, así como la expresión del momento de inercia de un sistema continuo respecto de un eje definido en un sistema de referencia.

3 Introducción

La hidrostática es la parte de la mecánica que estudia los fluidos en reposo, y resulta esencial en la formación en ingenierías por sus numerosas aplicaciones. En el estudio de la estática de fluidos se presta especial atención al análisis de las fuerzas que ejercen fluidos en reposo sobre superficies planas sumergidas.

Una superficie plana de área S sumergida en un líquido de densidad uniforme ρ se encuentra sometida a un sistema de fuerzas originado por la presión que actúa sobre ella. Sobre cada uno de los elementos diferenciales de superficie (ds) situados a distintas profundidades (h_i) actúa una fuerza elemental (dF) normal a la superficie sumergida, constituyendo un sistema triangular plano de vectores paralelos (Figura 1).

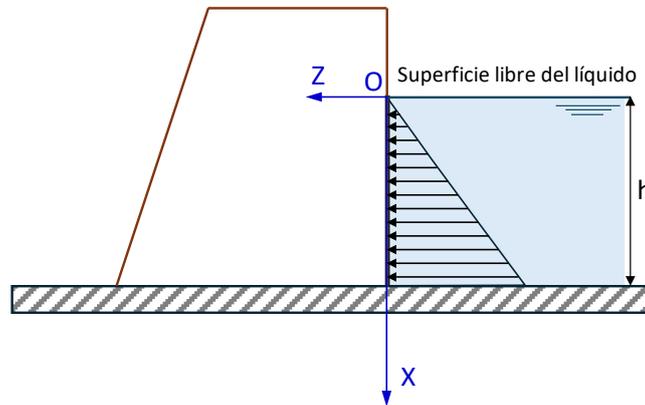


Figura 1. Distribución triangular del sistema de vectores paralelos formado por las fuerzas elementales que actúan sobre una superficie plana vertical sumergida

La resultante de este sistema de vectores (\mathbf{F}) calculada en módulo como $F = \int_S dF$, constituye el empuje total del líquido sobre la superficie plana y viene dada por la expresión:

$$F = \rho g h_G S \quad (1)$$

Donde \mathbf{g} es la aceleración de la gravedad y h_G la profundidad a la que se localiza el centro de gravedad de la superficie sumergida (\mathbf{G}).

La dirección de \mathbf{F} será perpendicular a \mathbf{S} . Para facilitar la interpretación de estos resultados, se ha adoptado un sistema de ejes coordenados en el que el plano de la superficie sumergida coincide con el plano XY, estando el eje OY definido por la intersección del plano de \mathbf{S} con el de la superficie libre del líquido. Consecuentemente, la dirección de \mathbf{F} será la del eje OZ. En el caso representado (Figura 2), la expresión vectorial de la fuerza de empuje sería:

$$\vec{F} = F\vec{k} = \rho g h_G S \vec{k}$$

El punto de aplicación (\mathbf{C}) de la fuerza resultante se denomina centro de empuje o centro de presiones, y se calcula a partir del momento de cada una de las fuerzas elementales con respecto al punto O (punto de corte de la superficie sumergida con la superficie libre del líquido), que deberá ser igual al momento de la resultante, obteniéndose la expresión:

$$x_C = x_G + \frac{I_{YG}}{S x_G} \quad (2)$$

Donde I_{YG} es el momento de inercia respecto de un eje paralelo al eje OY que pase por el centro de gravedad de \mathbf{S} , x_C es la coordenada x del punto de aplicación de la fuerza resultante \mathbf{F} , y x_G es la coordenada x del centro de gravedad de la superficie sumergida.

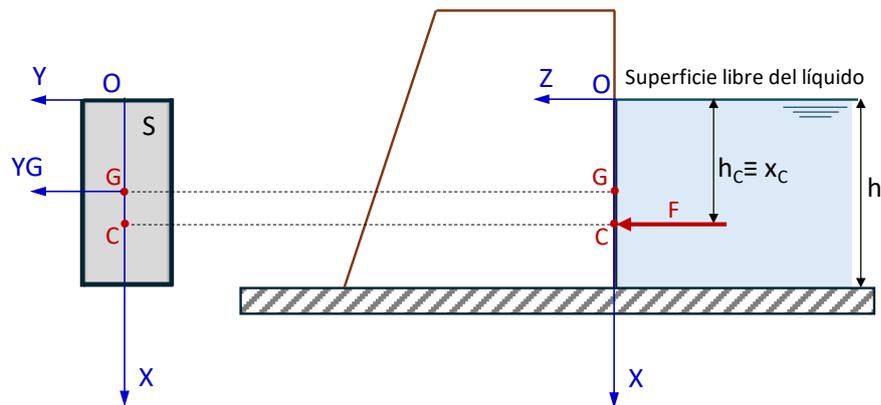


Figura 2. Fuerza resultante F (empuje) y punto de aplicación (C) o centro de presiones

El punto de aplicación de la fuerza resultante estará situado a mayor profundidad que el centro de gravedad de la superficie plana considerada.

En el caso de que la superficie S sea vertical (como el expuesto en la Figura 2), la coordenada x_C coincide con la profundidad a la que se encuentra el centro de presiones ($x_C = h_C$).

Para concluir, en el caso de que la superficie S esté inclinada un determinado ángulo θ respecto de la superficie libre del líquido (Figura 3) el valor de x_C no coincide con el de h_C . Se puede calcular entonces la posición del centro de presiones respecto a la profundidad a partir de la ecuación (3):

$$h_C = x_C \text{sen} \theta \quad (3)$$

Donde h_C es la profundidad del centro de presiones, punto de aplicación de F , y θ es el ángulo de inclinación de la superficie sumergida respecto de la horizontal.

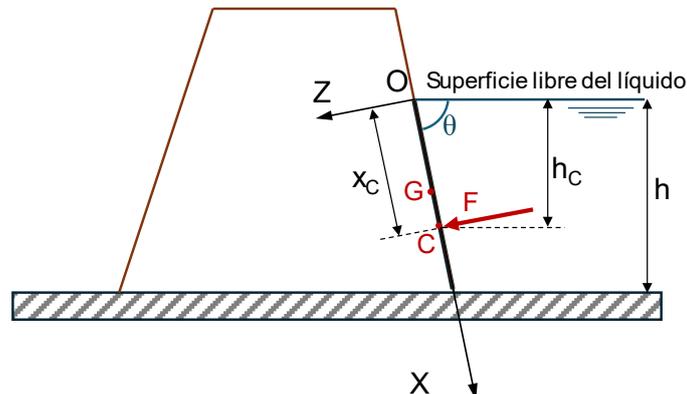


Figura 3. Empuje y centro de presiones en el caso de que la superficie sumergida esté inclinada

El desarrollo teórico pormenorizado que conduce a la obtención de las expresiones de la fuerza de empuje y centro de presiones se puede consultar en la bibliografía incluida en este artículo docente.

4 Desarrollo

El contenido presentado en este artículo puede ser de gran utilidad, dado que la resolución de un caso práctico concreto proporciona la metodología general para la resolución de un gran número de problemas con planteamientos similares

4.1 Enunciado del problema

La compuerta AB de la Figura 4, de sección rectangular $6 \times 4 \text{ m}^2$, está articulada en el punto D y forma 60° con la base de un depósito de aceite de densidad $\rho_a = 905 \text{ kg/m}^3$.

La compuerta es homogénea y su masa $M = 1300 \text{ kg}$.

Para mantener la compuerta cerrada cuando el depósito está lleno se aplica en B una fuerza horizontal F_B .

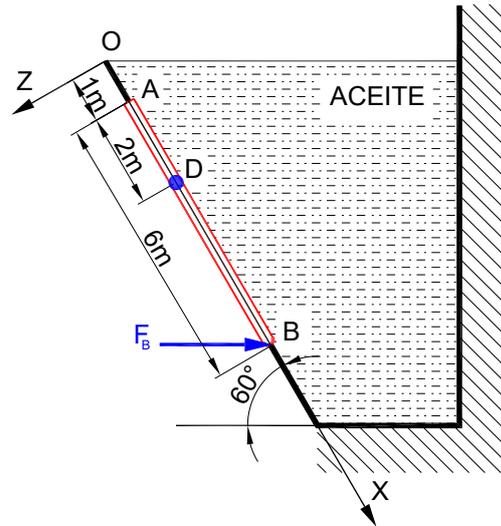


Figura 4. Figura esquemática del problema propuesto

Se pide:

- Valor de la profundidad del centro de gravedad de la compuerta (h_G) y de su coordenada x (x_G).
- Fuerza de empuje \vec{F}_a (vector) que el aceite ejerce sobre la compuerta.
- Valor de la profundidad de C, punto de aplicación de F_a (h_c) y de su coordenada respecto al eje x , (x_c), sabiendo que el momento de inercia de un rectángulo de base b y altura a respecto del eje paralelo a la base que pasa por su centro de gravedad es $I = \frac{ba^3}{12}$.
- Dibujar el diagrama de sólido libre de la compuerta, incluyendo la fuerza horizontal F_B aplicada en el punto B que mantiene la compuerta cerrada en la posición de equilibrio.
- Calcular el valor de F_B . Dar la expresión vectorial de \vec{F}_B .
- Calcular la reacción en la articulación en D (vector).

Suponer $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Utilizar dos cifras decimales para operar, realizar cálculos, y dar los resultados.

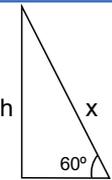
4.2 Posición del centro de gravedad de la compuerta

Al ser la longitud del tramo AB de la compuerta de 6 m ($d_{AB} = 6\text{ m}$), la distancia desde el punto A, al centro de gravedad de la compuerta es $d_{AG} = 3\text{ m}$, por lo que la coordenada x_G (Figura 5) será: $x_G = 1 + 3 = 4\text{ m}$.

A partir de x_G , se obtiene h_G : $h_G = x_G \text{ sen } 60$, por lo que $h_G = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.46\text{ m}$



Relación entre la profundidad h y la coordenada x dada por la inclinación de la compuerta:

$$\text{sen } 60 = \frac{h}{x} \quad h = x \text{ sen } 60 \quad \Rightarrow \quad h = x \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$


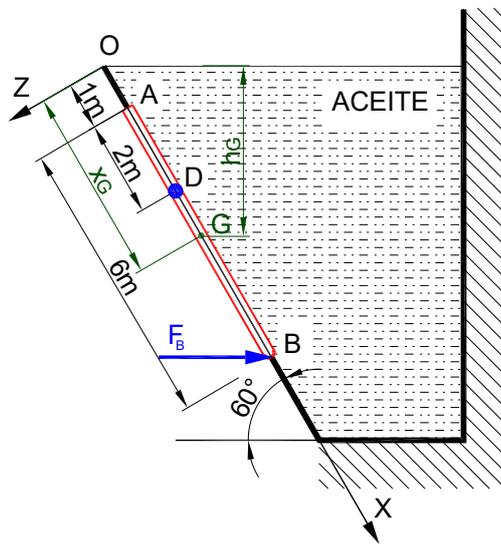


Figura 5. Posición del centro de gravedad de la compuerta (x_G y h_G)

4.3 Fuerza de empuje

La fuerza de empuje es perpendicular a la compuerta (Figura 6), y expresada vectorialmente en el sistema de referencia dado será: $\vec{F}_a = F_a \vec{k}$.

Utilizando la ecuación (1), se obtendrá el módulo: $F_a = \rho_a g h_G S$, donde:

- $\rho_a = 905 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$ es la densidad del aceite contenido en el depósito.
- $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ es la aceleración de la gravedad.
- $h_G = 3.46\text{ m}$ es la profundidad a la que se encuentra el centro de gravedad de la compuerta.
- $S = 24\text{ m}^2$ es el área de la superficie de la compuerta.

Sustituyendo esto valores resulta:

$$F_a = \rho_a g h_G S = 905 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3.46\text{ m} \cdot 24\text{ m}^2 = 737233.27\text{ N}$$

Por lo tanto, la fuerza de empuje \vec{F}_a (vector) que el aceite ejerce sobre la compuerta será:

$$\vec{F}_a = F_a \vec{k} = 737233.27 \vec{k} \text{ (N)}$$

4.4 Profundidad del centro de presiones (C), punto de aplicación de la fuerza de empuje

La coordenada x del centro de presiones, x_c , se obtiene a partir de la expresión (2):

$$x_c = x_G + \frac{I_{YG}}{S \cdot x_G}$$

Donde, en el caso de estudio:

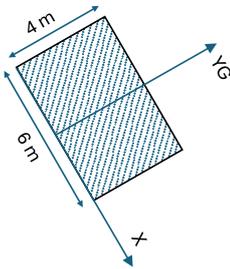
$x_G = 4 \text{ m}$ es la coordenada x del centro de gravedad de la compuerta

$S = 24 \text{ m}^2$ es el área de la superficie de la compuerta

I_{YG} es el momento de inercia respecto de un eje paralelo al eje Y que pasa por el centro de gravedad de la compuerta.



Sabiendo que el momento de inercia de un rectángulo de base b y altura a respecto del eje paralelo a la base que pasa por su centro de gravedad es $I = \frac{ba^3}{12}$, particularizando a las dimensiones de la compuerta del caso analizado:



$$I_{YG} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ m}^4$$

Sustituyendo en (2):

$$x_c = 4 \text{ (m)} + \frac{72 \text{ (m}^4\text{)}}{24 \text{ (m}^2\text{)} \cdot 4 \text{ (m)}}$$

De donde la coordenada de C respecto al eje x: $x_c = 4.75 \text{ m}$

A partir de x_c se obtiene el valor de la profundidad de C (h_c):

$$h_c = x_c \text{ sen } 60 \quad \text{por lo que } h_c = 4.75 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.11 \text{ m}$$

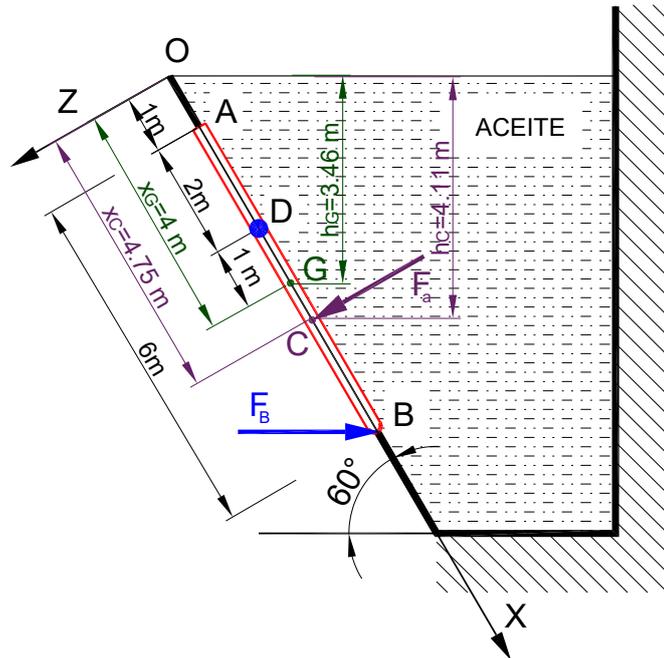
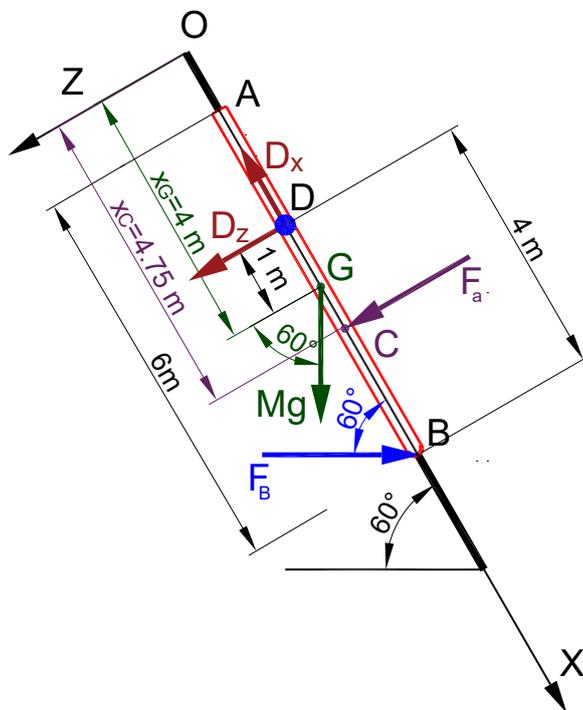


Figura 6. Fuerza resultante (F_a) y punto de aplicación (x_c y h_c)

4.5 Diagrama de sólido libre de la compuerta

El Diagrama de sólido libre de la compuerta se muestra en la Figura 7.



La expresión vectorial de las distintas acciones y reacciones es:

$$\vec{F}_B = F_B \cos 60 \vec{i} - F_B \sin 60 \vec{k}$$

$$\vec{F}_a = F_a \vec{k} = 737233.27 \vec{k}$$

$$M\vec{g} = Mg \sin 60 \vec{i} + Mg \cos 60 \vec{k}$$

$$\vec{D} = -D_x \vec{i} + D_z \vec{k}$$

Figura 7. Diagrama de sólido libre de la compuerta



El diagrama del sólido libre se utiliza para analizar el equilibrio de un sistema. En el caso propuesto sirve para estudiar el equilibrio estático de la compuerta.

Para ello se representa la compuerta aislada mediante un esquema de su contorno y se indica el sistema de referencia en el que se va a trabajar.

Al aislar, se suprimen los enlaces, en este caso la articulación en D, que se sustituye por las reacciones de enlace (D_x y D_z). También se representan todas las acciones: la Fuerza F_B que mantiene cerrada la compuerta, el empuje F_a y el peso Mg . Por último, se representan distancias y ángulos.

Las fuerzas conocidas se dibujan como vectores con su módulo, dirección y sentido. Las fuerzas desconocidas se dibujan como vectores con la magnitud o dirección desconocida indicada como incógnita. Si el sentido del vector es desconocido, se le supone arbitrariamente. Una magnitud negativa en la resolución indica que el sentido real es contrario al supuesto. Los sentidos y signos asignados a las magnitudes hay que mantenerlos posteriormente cuando se apliquen y resuelvan las ecuaciones de equilibrio.

4.6 Cálculo de la fuerza horizontal necesaria para mantener la compuerta cerrada. Reacciones en la articulación



Ecuaciones de equilibrio

La posición de equilibrio de la compuerta, al estar definida en un plano (plano $y = 0$), y estar todas las fuerzas (acciones y reacciones) contenidas en este plano, queda determinada a partir de 3 parámetros independientes, que se pueden obtener con las 3 ecuaciones de equilibrio, dos ecuaciones de fuerzas en el plano de la Figura 7, y una de

$$\text{momentos: } \begin{cases} F_x = 0 \\ F_z = 0 \\ M_y = 0 \end{cases}$$

Si las fuerzas que actúan sobre la compuerta son conocidas estas 3 ecuaciones nos permiten calcular, la posición de equilibrio.

Si la posición de equilibrio se conoce, como en el caso propuesto, estas ecuaciones nos permiten determinar 3 incógnitas entre las fuerzas que actúan sobre la compuerta: D_x , D_z y F_B .

Se aplicarán las ecuaciones de equilibrio a la compuerta. A partir de la ecuación de momentos se obtendrá F_B , y a partir de las ecuaciones de fuerzas se obtendrá la reacción en la articulación.

Ecuación de momentos:

$$\begin{aligned} M_{y,D} = 0; \quad M_D (Mg \cos 60) + M_D (F_a) + M_D (F_B \sin 60) &= 0 \\ - Mg \cos 60 \cdot 1 - F_a \cdot 1.75 + F_B \sin 60 \cdot 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$F_B = \frac{Mg \cos 60 + F_a \cdot 1.75}{4 \sin 60} = \frac{1300 \cdot 9.81 \cdot \frac{1}{2} + 737233.27 \cdot 1.75}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 374277.34 \text{ N}$$

Expresión vectorial de \vec{F}_B : $\vec{F}_B = F_B \cos 60 \vec{i} - F_B \sin 60 \vec{k}$

$$\vec{F}_B = (187138.67 \vec{i} - 324133.68 \vec{k}) \text{ N}$$

Ecuaciones de fuerzas:

$$F_x = 0; -D_x + Mg \sin 60 + F_B \cos 60 = 0$$

$$-D_x = -Mg \sin 60 - F_B \cos 60 = -1300 \cdot 9.81 \cdot \sin 60 - 187138.67$$

$$D_x = 198183.09 \text{ N}$$

$$F_z = 0; D_z + Mg \cos 60 + F_a - F_B \sin 60 = 0$$

$$D_z = -Mg \cos 60 - F_a + F_B \sin 60 = -1300 \cdot 9.81 \cdot \cos 60 - 737233.27 + 324133.68$$

$$D_z = -419476.09 \text{ N}$$

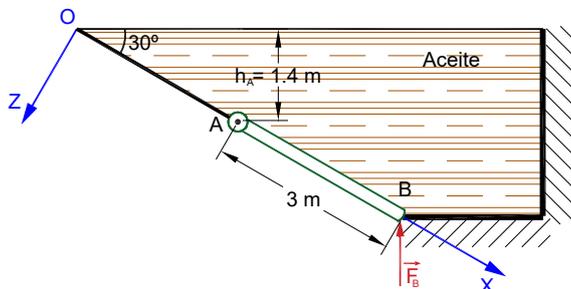
Expresión vectorial de \vec{D} : $\vec{D} = -D_x \vec{i} + D_z \vec{k} = (-198183.09 \vec{i} - 419476.09 \vec{k}) \text{ N}$

5 Cierre

El contenido de este documento puede resultar muy útil y beneficioso para incentivar el aprendizaje del estudiantado, dado que la resolución pormenorizada de un problema concreto acompañado de los conceptos teóricos necesarios proporciona un enfoque general para la resolución de otros casos similares.

Para repasar y afianzar los conceptos trabajados en este documento, se propone a continuación un ejercicio con solución.

La compuerta rectangular de la figura, con una superficie $S = 6 \text{ m}^2$, cierra un depósito de aceite de densidad $\rho = 940 \text{ kg/m}^3$, tiene una masa $M = 1200 \text{ kg}$, y está articulada en el punto A. La pared del depósito donde se encuentra la compuerta está inclinada 30° con respecto al plano horizontal.



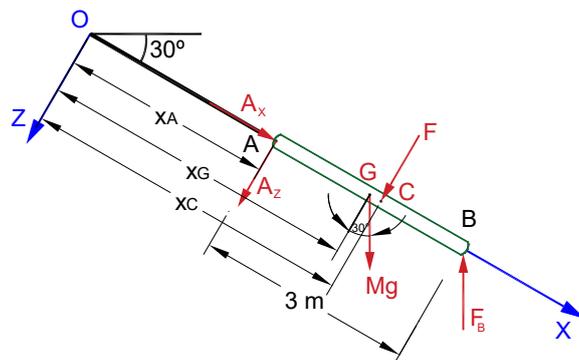
Considerando el valor de $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, y expresando los resultados con dos cifras decimales cuando sea necesario, se pide calcular:

- Coordenada x del punto A de la compuerta, x_A .
- Valor de la profundidad de G (h_G), y de su coordenada x_G .

- c) Fuerza resultante o empuje F que el aceite ejerce sobre la compuerta. Expresarla vectorialmente.
- d) Coordenada x_c del punto de aplicación C de la fuerza resultante F sobre la compuerta, y su profundidad h_c , sabiendo que el Momento de Inercia de un rectángulo de base b y altura a respecto del eje paralelo a la base que pasa por su centro de gravedad es $I = \frac{ba^3}{12}$.
- e) Aislar la compuerta y dibujar el diagrama de sólido libre teniendo en cuenta la fuerza vertical \vec{F}_B que se aplica en su extremo B para mantener la compuerta cerrada y en equilibrio estático cuando el depósito está lleno de aceite.
- f) Valor de \vec{F}_B . Expresarla vectorialmente conforme al sistema de referencia indicado en la figura.
- g) Reacciones en la articulación en A .

SOLUCIÓN: $x_A = 2.8 \text{ m}$; $x_G = 4.3 \text{ m}$; $h_G = 2.15 \text{ m}$; $\vec{F} = 118956.06 \vec{k}(\text{N})$;
 $x_C = 4.47 \text{ m}$; $h_C = 2.24 \text{ m}$

Diagrama de sólido libre:



$$\vec{F}_B = -41174.49 \vec{i} - 71316.3 \vec{k} (\text{N}); \quad A_x = 35288.49 \text{ N}; \quad A_z = 61121.45 \text{ N}$$

6 Bibliografía

6.1 Libros:

Arviza Valverde, J.; Balbastre Peralta, I.; González Altozano, P. (2002). Ingeniería Rural: Hidráulica. Editorial Universitat Politècnica de València. REF.: 2002.781.

De Juana Sardon, J.M. (2000). Física General, 1. Alhambra Universidad.

Gálvez, F.J.; López, R.; Llopis, A.; Rubio, C. (1998). Física. Curso teórico práctico de Fundamentos Físicos de la Ingeniería. Tebar Flores.