

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Instituto de Ingeniería Energética



**Metodología para el diagnóstico de averías en  
motores de inducción mediante el análisis de  
corrientes estáticas transitorias utilizando  
átomos tiempo-frecuencia.**

**Tesis Doctoral**

**Joan Pons Llinares**

Directores:  
Dr. Martín Víctor Riera Guasp  
Dr. José Alfonso Antonino Daviu

Valencia Febrero 2013



# Agradecimientos

Las personas, aunque vivimos el presente, miramos hacia el futuro y periódicamente recapitulamos el pasado. La reconstrucción de la propia historia es sin duda necesaria para poder contestar, a lo largo de la vida, esa pregunta fundamental: ¿quiénes somos? Éstas, las últimas líneas que se escriben en una tesis, favorecen y articulan un espacio para esa necesaria recapitulación: volviendo la mirada hacia atrás para recordar las personas que me han acompañado a lo largo de la elaboración de esta tesis doctoral, inevitablemente pienso en qué ha supuesto para mí, cuál ha sido el sentido de esta intensa etapa de mi vida.

Revisando el proceso que me ha llevado a finalizar este primer paso en la carrera investigadora, a menudo recuerdo la influencia de determinados profesores, que me inculcaron una manera de observar, desde la curiosidad, desnudando sencillamente la realidad; me inculcaron una manera de pensar que combina, el cuestionamiento de lo observado o lo expuesto como forma de aprendizaje, con el rigor científico, pero sin abandonar nunca el componente lúdico que termina sustentando nuestra labor. Recuerdo las clases del Sr. Soto: sentados ambos alrededor de una pequeña mesa camilla que el anciano profesor tenía en un extremo del comedor, pasamos estupendos ratos descubriendo yo y redescubriendo él las matemáticas, jugando con las formulas, y practicando la geometría, que él definía como el arte de interpretar bien dibujos mal hechos. Pero sobre todo, recuerdo la primera clase de física que me impartió mi tía, en aquella pequeña cocina mientras preparaba un delicioso arroz, con la Sierra de Aitana a nuestras espaldas, advirtiéndome de que, para adentrarse en el mundo de la ciencia, había que dejar atrás ideas preconcebidas y construir el conocimiento paso a paso, interrogándonos sobre lo observado en la realidad.

Cuando empecé el doctorado era un Ingeniero Industrial recién licenciado, un exalumno con mucha ilusión por empezar a investigar. Básicamente era una persona con muchas ganas de enfrentarse a un problema y tratar de darle una solución. Anteriormente había tenido algunas experiencias como investigador y para entonces ya sabía que nada es comparable a esa sensación que tenemos los investigadores cuando estamos a punto de descubrir algo y batallamos apasionadamente tratando de llegar hasta el final. Un final un tanto efímero, por otra parte, pues rápidamente recomienza el proceso.

¿Y ahora? La pasión por el trabajo es la misma, tengo la misma ilusión por continuar con mi labor como investigador, con la diferencia de la experiencia que, en el contexto del grupo que me acogió, he ido acumulando, descubriendo en las colaboraciones con mis compañeros las herramientas y los entresijos de este trabajo, que ayudan a realizarlo, pero no anulan el punto de incertidumbre que tiene, probablemente una de las claves de su interés.

Desde aquí deseo agradecer a todas las personas del Departamento de Ingeniería Eléctrica que en uno u otro momento y de una u otra forma me han ayudado a conseguir mi objetivo. En especial, el apoyo, los consejos y la orientación del Dr. José Roger Folch: fue la primera persona que me transmitió que la carrera académica con la que yo soñaba era posible, mostrándome el camino a seguir y preocupándose durante estos años de que no me desviara.

El trabajo del investigador, y del doctorando en particular, es esencialmente un trabajo en solitud, cuya intensidad sería por otra parte difícil de sobrellevar sin el apoyo de los directores de tesis. Recuerdo el primer artículo que escribí como primer autor, agotando, como siempre me sucede, el tiempo disponible para enviarlo. Y recuerdo a Martín, científico claro, calmado, reflexivo e incansable, ayudándome con ese artículo hasta el final, marchándose entrada la noche, cuando por fin estaba ya todo claro. Por su parte, José Alfonso, investigador prolífico, constante y resolutivo, me ha marcado y recordado en cada momento los pasos a seguir, erigiéndose en modelo reciente. En definitiva, les agradezco a mis dos directores de tesis, Dr. Martín Víctor Riera Guasp y Dr. José Alfonso Antonino Daviu, toda la dedicación prestada: su constante disponibilidad para escuchar mis ideas y analizarlas, realizando comentarios siempre positivos, animándome, corrigiendo con esmero mi trabajo, rectificando todo lo necesario y a la vez respetando el enfoque singular que permite que la tesis sea propia de su autor.

De la misma forma que se necesitan a los directores y compañeros que te ayudan desde dentro, desde la comprensión de tu investigación, resultan también fundamentales esas personas que te ayudan desde fuera, esas personas que sin poder estar donde tú estás, están: mi familia, mis padres y mi hermano, quienes me han ayudado a salvar las dificultades, escuchando, infundiendo calma y dando los consejos precisos en los momentos difíciles, así como compartiendo la alegría por los éxitos.

Y finalmente, Verónica, que al igual que en todas las facetas de esta vida que compartimos, me ha acompañado apasionada, escuchando, como si de su campo se tratara, las ideas que yo he ido trabajando, tratando de entender los fundamentos de esta metodología de diagnóstico de máquinas eléctricas que aquí se presenta.

Dedico esta tesis a mi tía, Ángela Llinares Llorca, quien me transmitió su vitalidad, sus valores, su curiosidad y su pasión por la ciencia.

# Índice

<b>Resumen de la tesis doctoral</b>	<b>11</b>
<b>1.- Introducción.</b>	<b>17</b>
1.1.- Antecedentes	18
1.2.- Objetivos.	19
1.3.- Estructura de la tesis.	21
<b>2.- Estado del arte.</b>	<b>25</b>
<b>2.1.- Componentes de las corrientes estatísticas de motores de inducción.</b>	<b>27</b>
2.1.1.- Componentes en la corriente de un motor de inducción sano.	27
2.1.2.- Componentes causadas por una rotura de barra.	28
2.1.3.- Componentes causadas por excentricidad.	29
2.1.4.- Conclusión.	30
<b>2.2.- Técnicas de diagnóstico en régimen estacionario.</b>	<b>31</b>
2.2.1.- Descripción.	31
2.2.2.- Inconvenientes.	32
2.2.3.- Soluciones y otras técnicas de diagnóstico en régimen permanente.	35
<b>2.3.- Técnicas de diagnóstico en régimen transitorio.</b>	<b>42</b>
2.3.1.- Necesidad de técnicas de diagnóstico en régimen transitorio.	42
2.3.2.- Fundamento físico y herramientas matemáticas.	42
2.3.3.- Discrete Wavelet Transform.	45
2.3.4.- Short Time Fourier Transform.	55
2.3.5.- Continuous Wavelet Transform.	57
2.3.6.- Wigner-Ville Distributions.	63
2.3.7.- Otras transformadas y otras técnicas en transitorio.	70
<b>2.4.- Recapitulación.</b>	<b>72</b>
<b>3.- Base teórica. Técnicas de análisis tiempo-frecuencia.</b>	<b>75</b>
<b>3.1.- La energía de una señal y su distribución en el plano tiempo-frecuencia.</b>	<b>77</b>
3.1.1.- Concepto de señal.	77
3.1.2.- Energía de una señal.	77
3.1.3.- Distribución de la energía en los dominios del tiempo y la frecuencia.	78
3.1.4.- Análisis de señales no estacionarias multicomponentes.	78
3.1.5.- Distribución de la energía en el plano tiempo-frecuencia.	79

<b>3.2.- Correlación con átomos tiempo-frecuencia.</b>	<b>81</b>
3.2.1.- Ejemplos de distribuciones de la energía.	81
3.2.2.- Definición y ejemplos de átomos tiempo-frecuencia.	83
3.2.3.- Cajas de Heisenberg y principio de incertidumbre.	87
3.2.4.- Correlación con átomos tiempo-frecuencia.	90
<b>3.3.- Short Time Fourier Transform.</b>	<b>93</b>
3.3.1.- Forma de las cajas de Heisenberg.	94
3.3.2.- Reconstrucción de la señal y su energía.	97
<b>3.4.- Transformada Wavelet.</b>	<b>99</b>
3.4.1.- Forma de las cajas de Heisenberg.	100
3.4.2.- Reconstrucción de la señal y su energía.	103
<b>3.5.- Matching Pursuit y Adaptative Gabor Transform.</b>	<b>106</b>
3.5.1.- Construcción de la familia de átomos mediante un método iterativo.	106
3.5.2.- Definición de la transformada Matching Pursuit.	111
3.5.3.- Formas de las cajas de Heisenberg.	112
3.5.4.- Reconstrucción de la señal y su energía.	113
3.5.5.- Recapitulación.	115
<b>3.6.- Otras transformadas.</b>	<b>116</b>
3.6.1.- Energía tiempo-frecuencia cuadrática. Wigner-Ville distributions.	116
3.6.2.- Transformadas discretas.	117
<b>4.- Metodología de diagnóstico propuesta.</b>	<b>119</b>
<b>4.1.- Componentes de las corrientes a analizar y su evolución.</b>	<b>123</b>
4.1.1.- Evolución de las componentes de un motor de inducción sano.	124
4.1.2.- Evolución de las componentes causadas por una rotura de barra.	129
4.1.3.- Evolución de las componentes causadas por excentricidad.	133
<b>4.2.- Elección del átomo tiempo-frecuencia. Criterio de la pendiente.</b>	<b>136</b>
4.2.1.- Concepto de pendiente de un átomo tiempo-frecuencia.	136
4.2.2.- Área de la caja de Heisenberg. Elección de las FBS: justificación.	138
4.2.3.- Asignando valores a $m$ y a $f_c$ .	138
4.2.4.- Criterio de la pendiente: asignando valores a $f_b$ .	140
<b>4.3.- Ventajas e inconvenientes de la STFT, la WT y el MP.</b>	<b>146</b>
4.3.1.- Short Time Fourier Transform.	146
4.3.2.- Wavelet Transform.	150
4.3.3.- Matching Pursuit.	156

<b>4.4.- Definición de la Adaptive Slope Transform.</b>	<b>158</b>
4.4.1.- Definición.	158
4.4.2.- Características comparando con el MP y la AGT.	159
4.4.3.- Limitaciones y soluciones de compromiso.	162
4.4.4.- Cajas de Heisenberg utilizadas al analizar la señal de ejemplo.	165
4.4.5.- Resultados.	168
<b>4.5.- Técnicas para mejorar la visualización.</b>	<b>172</b>
<b>4.6.- Método de cuantificación.</b>	<b>183</b>
4.6.1.- Cuantificación al alimentar directamente desde la red.	183
4.6.2.- Cuantificación al alimentar mediante un inversor.	188
<b>4.7.- Guía de aplicación de la metodología de diagnóstico.</b>	<b>194</b>
<b>5.- Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento a partir de la corriente.</b>	<b>201</b>
<b>5.1.- Obtención de la evolución de la frecuencia fundamental.</b>	<b>203</b>
5.1.1.- Cálculo de la STFT.	203
5.1.2.- Cálculo de máximos.	204
<b>5.2.- Obtención de la evolución del deslizamiento.</b>	<b>206</b>
5.2.1.- Cálculo de la STFT.	207
5.2.2.- Análisis de la primera parte del arranque.	208
5.2.3.- Análisis del resto del transitorio.	213
5.2.4.- Evolución temporal de la frecuencia del PSH.	216
5.2.5.- Cálculo del deslizamiento.	219
5.2.6.- Evoluciones temporales de las componentes de la corriente.	219
5.2.7.- Análisis de una corriente más compleja.	219
<b>6.- Frequency B-Splines.</b>	<b>225</b>
<b>6.1.- Definición de las Frequency B-Splines.</b>	<b>228</b>
6.1.1.- Definición.	228
6.1.2.- El parámetro de escalado y la constante de normalización.	228
6.1.3.- Definición en frecuencias angulares.	229
6.1.4.- Las FBS: un tipo de ventanas moduladas.	230
<b>6.2.- Introducción a la función seno cardinal.</b>	<b>232</b>
6.2.1.- Definición de la función seno cardinal.	232
6.2.2.- Propiedades de la función seno cardinal.	234
<b>6.3.- Estudio de las propiedades de la ventana utilizada.</b>	<b>237</b>

6.3.1.- Ventana real.	237
6.3.2.- Ventana par.	237
6.3.3.- Ventana Lebesgue integrable.	238
6.3.4.- Transformada de Fourier de la ventana.	239
6.3.5.- Energía de la ventana.	243
<b>6.4.- Cálculo de la pendiente de las Frequency B-Splines.</b>	<b>244</b>
6.4.1.- Recapitulación y uso de los resultados del apéndice matemático.	244
6.4.2.- Cálculo de las cajas de Heisenberg.	245
6.4.3.- Transformada de Fourier.	249
<b>6.5.- Comparación entre las Frequency B-Splines y las funciones de Gabor.</b>	<b>251</b>
<b>7.- Diagnóstico de barras rotas consecutivas.</b>	<b>267</b>
<b>7.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.</b>	<b>268</b>
7.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.	268
7.1.2.- Generación de la avería: rotura de una barra.	269
7.1.3.- Carga arrastrada y tipos de transitorios.	269
7.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.	270
7.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.	270
<b>7.2.- Aplicación de la metodología.</b>	<b>273</b>
7.2.1.- Captura de la corriente.	273
7.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.	273
7.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.	274
7.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.	275
7.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.	285
7.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.	285
7.2.7.- Cuantificación.	286
<b>7.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.</b>	<b>304</b>
7.3.1.- Diagnóstico visual (cualitativo).	304
7.3.2.- Cuantificación.	314
7.3.3.- Corrientes de motores de tipo B.	315
7.3.4.- Conclusiones del capítulo.	316
<b>8.- Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.</b>	<b>323</b>
<b>8.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.</b>	<b>324</b>
8.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.	324
8.1.2.- Generación de la avería: excentricidad por desalineamiento.	324
8.1.3.- Tipos de transitorios.	325

8.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.	326
8.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.	326
<b>8.2.- Aplicación de la metodología.</b>	<b>328</b>
8.2.1.- Captura de la corriente.	328
8.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.	328
8.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.	329
8.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.	329
8.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.	334
8.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.	338
8.2.7.- Cuantificación.	338
<b>8.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.</b>	<b>350</b>
8.3.1.- Corriente en régimen permanente.	350
8.3.2.- Corriente de arranque.	351
8.3.3.- Transitorio de variación de la frecuencia.	352
8.3.4.- Variación de la carga sin compensación del deslizamiento.	353
8.3.5.- Variación de la carga con compensación del deslizamiento.	354
8.3.6.- Conclusiones del capítulo.	355
<b>9.- Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por la red.</b>	<b>357</b>
<b>9.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.</b>	<b>358</b>
9.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.	359
9.1.2.- Generación de la avería: excentricidad por rodamiento defectuoso.	360
9.1.3.- Carga arrastrada y tipos de transitorios.	361
9.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.	362
9.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.	363
<b>9.2.- Aplicación de la metodología.</b>	<b>365</b>
9.2.1.- Captura de la corriente.	365
9.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.	365
9.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.	366
9.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.	368
9.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.	372
9.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.	373
9.2.7.- Cuantificación.	373
<b>9.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.</b>	<b>378</b>
9.3.1.- Diagnóstico visual (cualitativo).	378
9.3.2.- Cuantificación.	385
9.3.3.- Conclusiones del capítulo.	386

<b>10.- Aportaciones y conclusiones.</b>	<b>389</b>
<b>11.- Futuros trabajos.</b>	<b>395</b>
<b>Abreviaciones.</b>	<b>397</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>401</b>
<b>Listado de publicaciones.</b>	<b>409</b>
<b>Apéndice Matemático</b>	<b>411</b>
<b>AM 1.- Base matemática.</b>	<b>412</b>
<b>AM 2.- Ventanas moduladas.</b>	<b>416</b>
AM 2.1.- Construcción de ventanas moduladas.	417
AM 2.2.- Cálculo de la frecuencia central de una ventana modulada.	425
AM 2.3.- Cálculo de la caja de Heisenberg de una ventana modulada.	427
<b>AM 3.- Funciones de Gabor.</b>	<b>430</b>
AM 3.1.- Definición de las funciones de Gabor.	430
AM 3.2.- Recordatorio de la función gaussiana.	433
AM 3.3.- Estudio de las propiedades de la ventana utilizada.	434
AM 3.4.- Cálculo de la pendiente de las funciones de Gabor.	440

## Resumen de la tesis doctoral

Las técnicas de diagnóstico de máquinas eléctricas más utilizadas actualmente están basadas en el análisis de la corriente (debido a su carácter no invasivo) a través de la transformada de Fourier (FT). Su principal inconveniente es que no pueden utilizarse en aplicaciones que trabajan constantemente en régimen transitorio, como la generación eólica o la automoción eléctrica, entre otros campos de creciente importancia. Desde finales del siglo XX hasta la fecha, se han desarrollado algunas técnicas para el diagnóstico en regímenes transitorios; estas técnicas están basadas fundamentalmente en obtener la evolución temporal de las componentes armónicas de las corrientes causadas por averías, lo cual se consigue utilizando transformadas tiempo-frecuencia (t-f). Hasta el momento se han aplicado transformadas estándar no optimizadas para el diagnóstico de averías en máquinas eléctricas (e.g., FT de tiempo corto, transformada wavelet) las cuales permiten la detección de algunas componentes de avería en determinadas zonas del plano t-f. Por otra parte, existen transformadas de carácter adaptativo cuyo análisis se ajusta a la señal a analizar (e.g., Matching Pursuit), no utilizadas todavía en el campo del diagnóstico. Sin embargo, no permiten centrarse en obtener las componentes de avería e incurrir en tiempos de cálculo prohibitivos (semanas).

En la presente tesis se desarrolla una metodología original de análisis t-f, optimizada para el diagnóstico de averías en máquinas eléctricas, mediante el análisis de la corriente. La metodología propuesta se desarrolla teniendo en cuenta las particularidades de la señal analizada y los objetivos del diagnóstico; esto permite efectuar el seguimiento de múltiples componentes de falta a lo largo de amplios dominios del plano t-f con tiempos de procesamiento reducidos, lo que hace posible diagnósticos de gran fiabilidad. El desarrollo de la metodología implica las siguientes etapas: (i) Se caracterizan las evoluciones de las componentes de avería en el plano t-f; la tesis se centra en el diagnóstico de barras rotas y excentricidad en motores de inducción (MI). (ii) Con el objetivo de estimar dichas evoluciones para cada corriente capturada evitando el uso de sensores de velocidad, se desarrolla un método original para obtener la evolución del deslizamiento a partir de la corriente capturada, aún en presencia de averías. (iii) Se plantea la detección de las componentes de avería mediante la correlación de la corriente con una familia de átomos t-f (funciones cuya energía está concentrada alrededor de un punto del plano). (iv) Se seleccionan las Frequency B-Splines (FBS) como la familia óptima de átomos a utilizar, ya que son capaces de generar resultados con resoluciones tan elevadas como las obtenidas con las funciones de Gabor (las cuales llegan a la máxima concentración posible de la energía), pero con tiempos de cálculo más reducidos. (v) Se define la transformada de pendiente adaptativa, la cual, a diferencia de las anteriores, permite escoger la resolución en cada punto del plano t-f, pudiendo adecuar el análisis a cada corriente para obtener las evoluciones de las componentes de avería de forma óptima. Para ello se define el concepto de pendiente del átomo como el cociente entre la dispersión de su energía en frecuencia y en tiempo. La pendiente del átomo utilizado determina el cociente entre las resoluciones en tiempo y en frecuencia obtenidas. Seguidamente, se define el criterio de la pendiente: para obtener la resolución t-f óptima, la pendiente a utilizar en cada punto del plano debe ser igual a la pendiente de la evolución de la componente a detectar en dicho punto. (vi) Finalmente, se resuelve el problema de la cuantificación de este tipo de transformadas y se proponen técnicas de mejora de la visualización.

La metodología de diagnóstico se ha validado experimentalmente en la detección de barras rotas en MI alimentados desde la red y de excentricidad en MI alimentados tanto desde la red como desde un inversor.



## Resum de la tesi doctoral

Les tècniques de diagnòstic de màquines elèctriques més utilitzades actualment estan basades en l'anàlisi de la corrent (degut al seu caràcter no invasiu) a través de la transformada de Fourier (FT). El seu principal inconvenient es que no poden utilitzar-se en aplicacions que treballen constantment en règim transitori, com es el cas de la generació eòlica o l'automoció elèctrica, entre altres camps de creixent importància. Des de finals del segle XX fins l'actualitat, s'han desenvolupat algunes tècniques per al diagnòstic en règims transitoris; aquestes tècniques estan basades fonamentalment en obtenir la evolució temporal de les components harmòniques de les corrents causades per averies, cosa que s'aconsegueix utilitzant transformades temps-freqüència (t-f). Fins al moment s'han aplicat transformades estàndards no optimitzades per al diagnòstic d'averies en màquines elèctriques (e.g., FT de temps curt, transformada wavelet) les quals permeten la detecció d'algunes components d'averia en determinades zones del pla t-f. Per una altra banda, existeixen transformades de caràcter adaptatiu l'anàlisi de les quals s'ajusta a la senyal a analitzar (e.g., Matching Pursuit), no utilitzades encara en el camp del diagnòstic. No obstant, no permeten centrar-se en obtenir les components d'averia i incorren en temps de càlcul prohibitius (setmanes).

En la present tesi es desenvolupa una metodologia original d'anàlisi t-f, optimitzada per al diagnòstic d'averies en màquines elèctriques, mitjançant l'anàlisi de la corrent. La metodologia proposada es desenvolupa tenint en compte les particularitats de la senyal analitzada y els objectius del diagnòstic, permetent efectuar el seguiment de múltiples components de falta a lo llarg d'amplis dominis del pla t-f amb temps de processament reduïts, fent possible diagnòstics de gran fiabilitat. El desenvolupament de la metodologia implica les següents etapes: (i) Es caracteritzen les evolucions de les components d'averia en el pla t-f; la tesi es centra en el diagnòstic de barres trencades i excentricitat en motors d'inducció (MI). (ii) Amb l'objectiu d'estimar aquestes evolucions per a cada corrent capturada evitant l'ús de sensors de velocitat, es desenvolupa un mètode original per a obtenir la evolució del lliscament a partir de la corrent capturada, fins i tot en presència d'averies. (iii) Es planteja la detecció de les components d'averia mitjançant la correlació de la corrent amb una família d'àtoms t-f (funcions l'energia de les quals esta concentrada al voltant d'un punt del pla). (iv) Es seleccionen les Frequency B-Splines (FBS) com la família òptima d'àtoms a utilitzar, ja que son capaces de generar resultats amb resolucions tan elevades com les obtingudes amb les funcions de Gabor (les quals arriben a la màxima concentració possible de la energia), però amb temps de càlcul més reduïts. (v) Es defineix la transformada de pendent adaptativa, la qual, a diferència de les anteriors, permet escollir la resolució en cada punt del pla t-f, permetent l'adequació de l'anàlisi a cada corrent per a obtenir les evolucions de les components d'averia de forma òptima. Cercant aquest objectiu es defineix el concepte de pendent de l'àtom como el quocient entre la dispersió de la seva energia en freqüència y en temps. La pendent de l'àtom utilitzat determina el quocient entre les resolucions en temps i en freqüència obtingudes. Seguidament, es defineix el criteri de la pendent: per a obtenir la resolució t-f òptima, la pendent a utilitzar en cada punt del pla deu ser igual a la pendent de la evolució de la component a detectar en aquest punt. (vi) Finalment, es resol el problema de la quantificació d'aquest tipus de transformades i es proposen tècniques de millora de la visualització.

La metodologia de diagnòstic ha estat validada experimentalment en la detecció de barres trencades en MI alimentats des de la xarxa y de excentricitat en MI alimentats tant des de la xarxa como des d'un inversor.



## Thesis summary

The electric machines diagnosis techniques most commonly used nowadays are based on the analysis of the current (due to its noninvasive characteristic) through the Fourier Transform (FT). Its main drawback is that it cannot be used in applications constantly working in transient regime, such as windmills or electric vehicles, among other fields of growing interest. Since the late XX century to date, some techniques have been developed for the diagnosis in transient regimes; these techniques are basically based on obtaining the time evolution of the current harmonic components caused by the faults, which is achieved using time-frequency (t-f) transforms. Up to now, standard non optimized transforms have been applied for the fault diagnosis in electric machines (e.g., short time FT, wavelet transform) which enable the detection of some faulty components in certain zones of the t-f plane. On the other hand, there exist transforms with adaptive characteristics, whose analysis is adjusted to the analyzed signal (e.g., Matching Pursuit), that have not been used in the diagnosis field. Nevertheless, these transforms do not enable to focus in obtaining the faulty components, and consume too much computational time (weeks).

In the present thesis, a new methodology of t-f analysis is developed, optimized for the fault diagnosis in electric machines, via current analysis. The proposed methodology is developed taking into account the special features of the signal analyzed and the diagnosis objectives; these enables monitoring multiple faulty components throughout wide areas of the t-f plane consuming small computational times, which enables high reliability diagnosis. The development of the methodology comprises the following stages: (i) The faulty components evolutions in the t-f plane are characterized; the thesis is focused in the bar breakage and eccentricity diagnosis in induction motors (IM). With the aim of estimating these evolutions for each captured current avoiding the use of speed sensors, an original method is developed to obtain the slip evolution from the captured current, even in the presence of faults. (iii) The thesis proposes the detection of faulty components through the current correlation with a family of t-f atoms (functions whose energy is concentrated around a point of the plane). (iv) The Frequency B-Splines (FBS) are selected as the optimal atoms family to be used, since they are capable of generating results with resolutions as high as those obtained with the Gabor functions (which reach the highest energy concentration possible), but consuming lower computational times. (v) The adaptive slope transform is defined, which, on the contrary of the already mentioned transforms, enables choosing the resolution at each point of the t-f plane, being able to adapt the analysis to each current in order to optimally obtain the faulty components evolutions. To that end, the concept of atom slope is defined as the quotient between the dispersion of its energy in frequency and in time. The atom slope used determines the quotient between the resolutions obtained in time and in frequency. Next, the slope criterion is defined: in order to obtain the optimal t-f resolution, the slope to be used in each point of the plane has to be equal to the slope of the component evolution to be detected in that point. (vi) Finally, the problem of quantifying using this type of transforms is solved, and techniques for improving the components visual identification are proposed.

The diagnosis methodology has been experimentally validated through the detection of bar breakages in IM directly fed from the main and eccentricities in IM fed either from the main or from an inverter.



# **1.- Introducción.**

En este primer capítulo se realiza la introducción a la tesis a través de los antecedentes (1.1), se marca el objetivo final así como los objetivos parciales (1.2) y se comenta la estructura de la tesis (1.3). Cada uno de los capítulos de la tesis tienen una breve introducción inmediatamente posterior a su título como la presente, resumiendo seguidamente su índice parcial tal y como se muestra a continuación.

**1.1.- Antecedentes.**

**1.2.- Objetivos.**

**1.3.- Estructura de la tesis.**

## 1.1.- Antecedentes.

La presente tesis se ubica dentro del campo del diagnóstico de motores de inducción mediante el análisis de la corriente en regímenes transitorios. En el grupo de investigación en el que se ha desarrollado esta investigación, han sido presentadas tres tesis en este campo. En este trabajo de investigación se profundiza en los aspectos conceptuales y fundamentos de las técnicas de análisis de la señal utilizadas en el diagnóstico en régimen transitorio, con el fin de optimizarlas para este tipo de aplicaciones y conseguir mejoras en los resultados del diagnóstico. Entre otros aspectos se han analizado las limitaciones de las técnicas utilizadas hasta la fecha, observando que existen herramientas matemáticas modernas con un gran potencial que todavía no habían sido empleadas para el diagnóstico de máquinas eléctricas y cuya aplicación se investiga en el presente trabajo.

Aunque el diagnóstico de motores de inducción empezó realizándose mediante el análisis de vibraciones, desde finales de la década de los ochenta se empezó a explorar la posibilidad de detectar las averías a través del análisis de la corriente. Pronto se vio las ventajas que esta posibilidad tenía y se intentó perfeccionar la técnica primigenia, la cual estaba basada en el análisis del espectro de la corriente de línea obtenido mediante la transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT).

Esta técnica ha sido y es hoy todavía muy utilizada. Sin embargo, tal y como se explica en el capítulo dedicado al estado del arte, presenta varios inconvenientes que no se han podido solucionar. Además, existen numerosas aplicaciones en las que los motores de inducción no funcionan en ningún momento en régimen permanente, condición necesaria para poder aplicar la técnica. Es por ello que durante los últimos años (principios y sobre todo finales de la primera década del siglo XXI), algunos investigadores han dedicado sus esfuerzos a desarrollar técnicas capaces de operar con corrientes capturadas durante regímenes transitorios, descubriendo además las ventajas que el diagnóstico durante este tipo de operación presenta.

Sin embargo, el campo apenas se ha empezado a explorar y todavía quedan muchos aspectos que analizar y problemas por resolver. Aunque existen variantes, la filosofía de diagnóstico en régimen transitorio es una extensión de la filosofía en régimen permanente. Así como en régimen permanente el diagnóstico se produce al localizar frecuencias en el espectro causadas por la presencia de una avería, en régimen transitorio el diagnóstico se produce cuando se localiza la evolución temporal de las frecuencias de las componentes vinculadas a averías. Al igual que en la técnica en permanente se utiliza una herramienta matemática, concretamente una transformada: la FFT, en régimen transitorio también se utilizan herramientas matemáticas: las transformadas tiempo-frecuencia. La efectividad para el diagnóstico de máquinas eléctricas de algunas de estas transformadas ha sido analizada en algunos artículos presentes en la literatura técnica. Por ejemplo, por una parte, siguiendo una determinada línea de trabajo se han utilizado las Wigner Ville Distributions (WVD). Siguiendo otra línea de trabajo, dentro de una misma familia de transformadas se ha probado la efectividad de la Short Time Fourier Transform (STFT) y la Continuous Wavelet Transform (CWT). Sin embargo, existen transformadas más potentes como el Matching Pursuit (MP) o la Adaptive Gabor Transform (AGT), cuyos resultados todavía están inexplorados. Las posibilidades que ofrecen estas transformadas y las ideas en las que se basan son el punto de partida de la presente tesis.

## 1.2.- Objetivos.

### Objetivo final.

En definitiva, el objetivo principal de la tesis es el de desarrollar una metodología de diagnóstico basada en el diseño de un análisis tiempo-frecuencia que logre obtener la evolución temporal completa y optimizada de las componentes vinculadas a averías presentes en las corrientes estatóricas de motores de inducción, y que por tanto permita desarrollar en una segunda etapa un método de cuantificación de la amplitud instantánea de las componentes de avería y proceder de esta forma al diagnóstico del motor de inducción. Más concretamente, las averías que se han tratado de diagnosticar en esta tesis son las asimetrías rotóricas y la excentricidad.

### Objetivos parciales.

Este objetivo final se puede dividir en un conjunto de objetivos parciales que se han ido alcanzando a lo largo del desarrollo de la tesis en los correspondientes capítulos indicados a continuación (en el siguiente apartado, 1.3, se describe con mayor detalle la estructura de la tesis):

1. Análisis de las técnicas de diagnóstico y transformadas tiempo-frecuencia presentes en el estado del arte (capítulos 2 y 3):
  - a. Recopilación del conjunto de técnicas de diagnóstico en transitorio presentes en el estado del arte, detectando sus ventajas e inconvenientes, y analizando cuáles son los avances a los que se puede aspirar con respecto a los resultados de diagnóstico obtenidos (capítulo 2).
  - b. Estudio en profundidad de las transformadas de análisis tiempo-frecuencia presentes en el estado del arte, resaltando aquellas particularidades que marcan las diferencias al aplicarlas al diagnóstico de máquinas eléctricas, y concluyendo por tanto cuál sería la herramienta más adecuada y su uso óptimo teniendo en cuenta la aplicación y los resultados deseados (capítulo 3).
2. Desarrollo de una metodología de diagnóstico centrada en la definición de una nueva transformada de análisis tiempo-frecuencia concebida para la obtención completa y óptima de la evolución de las componentes de avería y su posterior cuantificación (capítulos 4, 5 y 6):
  - a. Desarrollo de un método para, a través del análisis de la corriente estatórica capturada, y sin el uso de ningún sensor adicional, obtener la estimación de las componentes presentes en la corriente y su evolución, lo cual permite el planteamiento de un análisis tiempo-frecuencia óptimo adaptado a la captura definitiva de la evolución de las componentes de avería (inicio del capítulo 4 y capítulo 5).
  - b. Definición de una nueva transformada tiempo-frecuencia óptima para la captura completa de las evoluciones de las componentes de avería consumiendo además un tiempo de cálculo razonable (del orden de pocos minutos para un transitorio de un minuto de duración): la transformada de pendiente adaptable (Adaptive Slope Transform, AST) (parte central del capítulo 4).

## Capítulo 1.

- c. Comparación de la transformada propuesta con las transformadas ya existentes demostrando su capacidad superior para obtener el resultado deseado (parte central del capítulo 4).
  - d. Desarrollo de varias técnicas para mejorar la visualización de los resultados, mostrando las evoluciones de las componentes con gran nitidez (parte final del capítulo 4).
  - e. Desarrollo de un método de cuantificación de la presencia de las componentes a partir de la matriz obtenida como resultado de la transformada (parte final del capítulo 4).
  - f. Análisis y comparación de los posibles tipos de átomos tiempo-frecuencia a utilizar y en especial de las Frequency B-Splines: átomos finalmente seleccionados para construir la transformada (capítulo 6).
3. Validación: aplicación de la metodología de diagnóstico propuesta al diagnóstico de motores de inducción ensayados en distintas condiciones de alimentación y con distintos tipos de averías, obteniendo, trazadas de forma nítida en el plano tiempo-frecuencia, la evolución de las componentes de avería, y calculando posteriormente la cuantificación de su presencia (capítulos 7, 8 y 9):
- a. Diagnóstico de motores con barras rotas consecutivas alimentados directamente desde la red (capítulo 7).
  - b. Detección de excentricidad de motores alimentados desde un inversor (capítulo 8).
  - c. Detección de excentricidad de motores alimentados directamente desde la red (capítulo 9).

## **1.3.- Estructura de la tesis.**

### **Capítulo 2: Estado del arte.**

En el capítulo relativo al estado del arte se analizan en primer lugar las componentes de las corrientes del estator de motores de inducción, información que se utilizará posteriormente para conocer cuáles son las componentes de avería cuyas evoluciones la metodología de diagnóstico debe ser capaz de detectar y cuantificar, y cuáles son las componentes propias del estado sano que deben quedar adecuadamente filtradas.

Seguidamente se revisan de forma breve las técnicas de diagnóstico en régimen permanente, partiendo de la FFT de la corriente hasta técnicas más modernas, destacando sus ventajas e inconvenientes, y destacando también como, aun teniendo en cuenta los últimos avances en permanente, la industria tiene la necesidad de desarrollar técnicas de diagnóstico en régimen transitorio, pues existen importantes campos en los que las máquinas trabajan constantemente en régimen transitorio, como la generación eólica o la automoción eléctrica.

En el tercer punto de dicho capítulo (2.3, núcleo duro del estado del arte), se exploran las técnicas de diagnóstico en régimen transitorio descritas en la literatura, tanto respecto a sus ventajas como a sus inconvenientes, así como con respecto a los resultados alcanzados y sus limitaciones.

### **Capítulo 3: Base teórica. Técnicas de análisis tiempo-frecuencia.**

Seguidamente, en el capítulo 3 se han analizado en profundidad las distintas transformadas tiempo-frecuencia disponibles que pueden tratar de alcanzar el objetivo planteado. En primer lugar se repasan conceptos introductorios a este tipo de transformadas, como el de energía de una señal y su distribución en el plano tiempo-frecuencia, para seguir abordando la obtención de dicha distribución de la energía mediante la correlación con átomos tiempo-frecuencia. Se estudian finalmente las características de los tres tipos de transformadas basadas en la correlación con átomos tiempo-frecuencia: la STFT, la CWT y el MP/AGT. Finalmente se revisan el otro tipo de transformadas que tratan de alcanzar el mismo objetivo con distinta estrategia: las distribuciones de Wigner-Ville (WVD, Wigner-Ville Distributions), así como las versiones discretas como la transformada wavelet discreta (DWT). El conocimiento adquirido ha permitido sentar las bases para el desarrollo de una metodología específicamente diseñada para obtener la evolución de las componentes de avería, es decir, una metodología ajustada al objetivo del diagnóstico.

### **Capítulo 4: Metodología de diagnóstico propuesta.**

El diseño de la metodología de diagnóstico se plasma en el capítulo 4, el cual es el centro de la tesis, apoyándose a su vez en los capítulos 5 y 6. En primer lugar, se parte de una información que no se tiene en la aplicación del análisis de la señal a otros campos: se conocen las componentes de la señal a analizar y su evolución. Más concretamente, las componentes presentes en la corriente de un motor de inducción son conocidas gracias a estudios teóricos que pueden encontrarse en el estado del arte. Con lo que respecta a su evolución, la aplicación de los métodos novedosos expuestos en el

## Capítulo 1.

capítulo 5 (los cuales permiten obtener la evolución del deslizamiento y de la frecuencia fundamental sin más medida que la de la corriente estatórica), permiten conocer, tal y como se explica en el apartado 4.1, para cada corriente analizada, por qué puntos del plano tiempo-frecuencia evolucionarían las componentes vinculadas a fallos, en caso de estar presentes en la corriente. Esta información permite afinar el análisis tiempo-frecuencia en la captura de dichas evoluciones.

La metodología de diagnóstico desarrollada tiene como piedra angular una técnica de análisis tiempo-frecuencia diseñada a lo largo de la tesis, la cual se enmarca dentro del contexto de las transformadas basadas en la correlación de la señal a analizar con una familia de funciones llamadas átomos tiempo-frecuencia. Ejemplos de este tipo de transformadas son la STFT, la CWT, el MP y la AGT. La diferencia fundamental entre las distintas transformadas, y de la cual se derivan sus respectivas características, es el tipo de familia de átomos utilizada para calcular las distintas correlaciones. El primer paso tomado para desarrollar la metodología, plasmado en el apartado 4.2, es definir un criterio de selección de los átomos tiempo-frecuencia que conformarán la familia. Este criterio ha sido diseñado para cumplir con el objetivo de capturar de forma completa y optimizada las evoluciones de las componentes de avería que puedan estar presentes en la señal, priorizándolas por encima de otras componentes de mayor amplitud y relevancia dentro de la corriente como la componente fundamental.

Seguidamente, en el apartado 4.3 se demuestra cómo ninguna de las transformadas disponibles en el estado del arte cumple con el criterio diseñado, mostrándose los inconvenientes que esto plantea, con lo cual se hace necesario diseñar una nueva transformada, la transformada de pendiente adaptable (Adaptive Slope Transform, AST) que tiene como base dicho criterio. Esta transformada se presenta en el apartado 4.4, comparando los resultados obtenidos con los que se obtienen con las transformadas ya presentes en el estado del arte. Como mejora adicional, se han desarrollado técnicas que permiten, una vez obtenido el resultado de aplicar la transformada, mejorar la visualización de las evoluciones de las componentes (apartado 4.5). Finalmente, se ha propuesto un método de cuantificación, punto conflictivo y difícil de resolver al utilizar este tipo de transformadas.

### **Capítulo 5: Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento a partir de la corriente.**

Tal y como se ha avanzado, para poder aplicar la metodología propuesta se necesita estimar cuáles serán las evoluciones de las componentes de avería en caso de que dicha avería esté presente en el motor; siendo las averías a detectar barras rotas y excentricidad en un motor de inducción. Si el motor de inducción es alimentado desde la red, dichas evoluciones dependen de la frecuencia fundamental, la cual permanece constante, y del deslizamiento, el cual varía. Si el motor de inducción es alimentado desde un inversor, dichas evoluciones dependen de la frecuencia fundamental, la cual varía, y de la frecuencia de deslizamiento, la cual permanece constante en valores muy reducidos. Con el objetivo de prescindir de otros sensores además del sensor de corriente, en el capítulo 5 se presentan dos métodos novedosos que permiten obtener la evolución del deslizamiento cuando el motor es alimentado directamente desde la red y la evolución de la frecuencia fundamental cuando el motor es alimentado desde un inversor, sin más medida que la de la corriente estatórica. Esto permite obtener la estimación de las evoluciones de las componentes de avería.

## **Capítulo 6: Frequency B-Splines.**

El criterio de selección de los átomos tiempo-frecuencia parte de una preselección en la que se restringe el conjunto global de funciones a un determinado tipo llamadas Frequency B-Splines, las cuales todavía no habían sido utilizadas para el diagnóstico de máquinas eléctricas. En el capítulo 6 se han estudiado sus propiedades en profundidad, concluyendo que estas funciones son capaces de obtener resultados de calidad equivalente a otras funciones más conocidas como las funciones de Gabor, pero con un menor tiempo de cálculo, el cual es uno de los inconvenientes de este tipo de transformadas. Pero sobre todo, las conclusiones de este análisis han permitido explotar al máximo el potencial de las Frequency B-Splines y ajustar sus parámetros para obtener de forma óptima las evoluciones de las componentes al aplicar sobre este tipo de funciones el criterio de selección plasmado en el apartado 4.2. Todo el análisis matemático realizado en el capítulo 6 acerca de las Frequency B-Splines se apoya a su vez en el otro análisis matemático plasmado en el apéndice matemático, donde se presentan algunas definiciones y propiedades para el lector no experto, se estudian el tipo de funciones al que pertenecen tanto las Frequency B-Splines como las funciones de Gabor y se estudian las propiedades de estas últimas permitiendo la comparación entre ambas.

## **Capítulos 7, 8 y 9: Aplicación de la metodología y resultados experimentales.**

En definitiva, el análisis tiempo-frecuencia propuesto consiste en, siguiendo un criterio específicamente diseñado, generar una familia de átomos tiempo-frecuencia del tipo Frequency B-Splines, para calcular la correlación con la corriente en cada punto del plano, seleccionando los parámetros de las FBS de tal forma que se optimice la obtención de las evoluciones de las componentes vinculadas a averías, procediendo posteriormente a cuantificar midiendo la densidad de energía en cada uno de los puntos de la evolución de dichas componentes. Esta transformada, bautizada como AST, se utilizará a lo largo de la tesis para analizar cada una de las corrientes, obtener las evoluciones de las componentes de fallo, cuantificar su amplitud, y proceder finalmente al diagnóstico (capítulos 7, 8 y 9).

La metodología desarrollada en la tesis supone un avance en el campo del diagnóstico de máquinas eléctricas. Todos los trabajos de investigación anteriores se encuentran en niveles inferiores en cuanto a los análisis tiempo-frecuencia planteados, centrados en el uso de la STFT o como máximo de la transformada wavelet analítica (AWT, Analytic Wavelet Transform). Tal y como se analiza en el apartado 4.3, dichas transformadas no son capaces de capturar la evolución completa de las componentes de avería. En el trabajo de investigación realizado se ha ido mucho más allá, no solo analizando el MP, sino dando un paso más al desarrollar la metodología, tomando las ventajas del MP como base, y diseñando a su alrededor un criterio para generar una familia de átomos tiempo-frecuencia en la que se abandonan los aspectos poco adecuados del MP y se introducen otros nuevos que permiten obtener las evoluciones de las componentes vinculadas a averías en su totalidad y además optimizadas.

Las virtudes de la metodología de diagnóstico desarrollada se muestran en los capítulos 7, 8 y 9, dedicados a su validación mediante ensayos. En primer lugar, en el capítulo 7 se muestra la capacidad de la metodología para detectar roturas de barras consecutivas en motores de inducción alimentados directamente desde la red. Para ello

## Capítulo 1.

se han provocado roturas de barras en diversos motores de diferentes tipos, comparando el resultado del diagnóstico con el obtenido al analizar el motor sano. Se han capturado arranques y también transitorios más complejos como arranques seguidos de sucesivas variaciones de carga, llegando a analizar corrientes de hasta 50 segundos. La metodología es capaz de obtener la evolución completa y optimizada del amónico lateral inferior, resultado que no se había conseguido previamente. Además, se han capturado también las evoluciones de otras componentes causadas por la rotura de barra que todavía no habían sido exploradas en el estado del arte, llegando hasta 11 componentes analizadas, encontrando diferencias de entre 4 y 16 dB entre el índice de cuantificación del motor con una barra rota y el motor sano. La cuantificación de la presencia de hasta 11 componentes de rotura de barra, experimentando incrementos mínimos de 4 dB en cada componente, permite un diagnóstico muy fiable.

En segundo lugar, en el capítulo 8 se diagnostican motores con excentricidad alimentados mediante un inversor. Se han capturado corrientes propias de transitorios muy distintos: arranques, aumentos y disminuciones de la frecuencia asignada y variaciones de carga activando y desactivando la compensación del deslizamiento del inversor. Se ha comprobado que la metodología es capaz de detectar las evoluciones de las componentes creadas por la excentricidad en todas estas condiciones, adaptándose de forma óptima en función del transitorio capturado. Dichas evoluciones son únicas, características de la avería y del tipo de transitorio analizado, y aparecen en el plano tiempo-frecuencia revelando la presencia del fallo como si de una huella dactilar se tratara. Se ha cuantificado la amplitud de los armónicos de forma satisfactoria permitiendo el diagnóstico de la avería.

Finalmente, en el capítulo 9 se diagnostican motores con excentricidad alimentados directamente desde la red. En este caso, los transitorios son también complejos, comprendiendo arranques seguidos de múltiples oscilaciones de carga, con tiempos de captura elevados de 50 segundos. Los resultados muestran también las evoluciones de las componentes de avería, lo cual permite su posterior cuantificación con el método desarrollado. Además, en el mismo análisis realizado para detectar la excentricidad, la metodología consigue medir también la asimetría rotórica inherente del motor, abriendo la posibilidad a la detección de fallos dobles de forma simultánea.

Estas son algunas de las ventajas que aporta la metodología desarrollada, las cuales se observan sobre todo en los capítulos dedicados a los resultados experimentales y se resumen en el apartado final dedicado a las conclusiones.

### **Apéndice matemático.**

Al final del documento encontramos el apéndice matemático, sobre el cual se apoyan los distintos razonamientos matemáticos realizados a lo largo de la tesis y en especial los del capítulo 6. En primer lugar se recuerdan definiciones y propiedades varias que facilitan la lectura, en segundo lugar se introducen las ventanas moduladas analizando sus principales propiedades, las cuales se aplican a las Frequency B-Splines en el capítulo 6, y en tercer lugar se analizan las funciones de Gabor, con las cuales se comparan las Frequency B-Splines también en el capítulo 6.

## 2.- Estado del arte.

Tal y como ya se avanzó en la introducción, la presente tesis trata sobre la detección de averías en motores de inducción mediante el análisis de corrientes estatísticas en regímenes transitorios. La metodología de diagnóstico desarrollada se basa en la detección de las evoluciones temporales que describen las frecuencias de las componentes características de las averías presentes en las corrientes estatísticas.

Así pues, en el presente capítulo dedicado al estado del arte, se analizan en primer lugar (2.1) las distintas componentes que presenta la corriente de línea de un motor de inducción en estado sano así como las componentes que introducen las dos averías analizadas a lo largo de la tesis: roturas de barras y excentricidad. Se estudian particularmente las fórmulas que predicen las frecuencias de las componentes, las cuales dependen en términos generales del deslizamiento, la frecuencia de la componente fundamental y algunos parámetros de la máquina (número de pares de polos y número de ranuras del rotor).

Desde los inicios del diagnóstico de motores de inducción a través del análisis de su corriente de línea, las técnicas se han basado en la detección de las frecuencias de las componentes de avería, las cuales indican la presencia del fallo en el motor. Más concretamente, la primera técnica desarrollada consistía en la obtención del espectro de la corriente mediante la FFT y su posterior inspección en busca de las frecuencias vinculadas a averías (2.2.1). Sin embargo, a pesar de que la técnica resulta útil en numerosas circunstancias, y es la más utilizada actualmente en el entorno industrial, también es verdad que presenta inconvenientes que hacen muy difícil su aplicación en numerosas aplicaciones (2.2.2). Estos inconvenientes han tratado de solventarse mejorando algunos aspectos de la técnica clásica (2.2.3).

Sin embargo, aunque se llegara a una técnica en permanente perfecta, existen numerosas aplicaciones en las que el régimen permanente no acontece nunca, lo cual obliga a desarrollar técnicas aptas para analizar corrientes en régimen transitorio (2.3.1). A parte, el análisis en condiciones transitorias presenta ventajas, como una mayor amplitud de las componentes de falta. Es por ello que algunos investigadores en los últimos años han dedicado sus esfuerzos a desarrollar técnicas para el diagnóstico de motores de inducción en régimen transitorio (2.3).

Tal y como se analizará (2.3.2), la frecuencia de las componentes de avería cambia durante los procesos transitorios, trazando en el plano tiempo-frecuencia un patrón característico del tipo de avería, del transitorio y en el caso de la excentricidad del número de pares de polos de la máquina. Los distintos trabajos de investigación realizados están basados en el uso de herramientas matemáticas aptas para trabajar con señales no estacionarias con el objetivo de detectar en sus resultados patrones vinculados a la presencia de las componentes de avería. El objetivo más directo de este trabajo es el de obtener la evolución completa y optimizada de las componentes de avería.

Se han utilizado en primer lugar transformadas discretas como la Discrete Wavelet Transform (DWT, 2.3.3). La DWT es más sencilla de utilizar, rápida y con resultados más fáciles de procesar que sus hermanas las transformadas continuas. Sin

## Capítulo 2.

embargo, estas aportan una mayor información respecto de las componentes de la corriente y su evolución. Se han realizado trabajos utilizando la Short Time Fourier Transform (STFT, 2.3.4), la Continuous Wavelet Transform (CWT, 2.3.5) y las Wigner-Ville Distributions (WVD, 2.3.6). En sus respectivos apartados se analizan la calidad de los resultados obtenidos así como los inconvenientes de cada una de estas transformadas.

En el apartado final (2.4), se resumen las líneas de trabajo presentes en el estado del arte, con sus ventajas e inconvenientes. Se concluye que dentro de la línea del uso de las transformadas continuas, existe un paso natural que todavía no se ha dado, que es el de utilizar el Matching Pursuit (MP) (o la Adaptive Gabor Transform (AGT), caso particular del MP). Esta transformada se encuentra en la línea de la STFT y la CWT, en sentido ascendente de complejidad, aportando un potencial de las que las otras carecen, que permite obtener las evoluciones de las componentes de fallo de forma completa y optimizada. Se trata de una transformada que todavía no había sido utilizada en el campo del diagnóstico de máquinas eléctricas. Las posibilidades que esta transformada puede ofrecer son el punto de partida de la tesis.

### **2.1.- Componentes de las corrientes estáticas de motores de inducción.**

- 2.1.1.- Componentes en la corriente de un motor de inducción sano.
- 2.1.2.- Componentes causadas por una rotura de barra.
- 2.1.3.- Componentes causadas por excentricidad.
- 2.1.4.- Conclusión.

### **2.2.- Técnicas de diagnóstico en régimen estacionario.**

- 2.2.1.- Descripción.
- 2.2.2.- Inconvenientes.
- 2.2.3.- Soluciones y otras técnicas de diagnóstico en régimen permanente.

### **2.3.- Técnicas de diagnóstico en régimen transitorio.**

- 2.3.1.- Necesidad de técnicas de diagnóstico en régimen transitorio.
- 2.3.2.- Fundamento físico y herramientas matemáticas.
- 2.3.3.- Discrete Wavelet Transform.
- 2.3.4.- Short Time Fourier Transform.
- 2.3.5.- Continuous Wavelet Transform.
- 2.3.6.- Wigner-Ville Distributions.
- 2.3.7.- Otras transformadas y otras técnicas en transitorio.

### **2.4.- Conclusiones.**

## 2.1.- Componentes de las corrientes estáticas de motores de inducción.

Tal y como se avanzó en la introducción, el método clásico de detección de averías en motores de inducción consiste en analizar la corriente estática en régimen permanente mediante la FFT y medir en el espectro obtenido la amplitud de los armónicos vinculados a dichas averías. Además, todos los métodos novedosos centrados en el análisis de dicha corriente estática, tanto si realizan el análisis en régimen permanente como si lo realizan en régimen transitorio, se basan en el efecto que tiene sobre el análisis la presencia de las componentes vinculadas a averías. Por tanto, el primer paso a dar para poder entender el funcionamiento, resultados y comparación de estas técnicas de diagnóstico consiste en clarificar cuáles son las componentes de la corriente estática de un motor de inducción y cuáles son sus frecuencias. Esta información se muestra a continuación, sin entrar en los detalles de los procesos físicos que provocan su aparición.

### 2.1.1.- Componentes en la corriente de un motor de inducción sano.

La corriente estática de un motor de inducción sano tiene dos tipos de componentes: los armónicos de devanado (Winding Harmonics, WH), y los armónicos principales de ranura (Principal Slot Harmonics, PSH)<sup>1</sup> [1].

#### Winding Harmonics

Como es sabido, el campo magnético creado en el entrehierro no es nunca perfectamente sinusoidal, aunque el diseñador de la máquina trate de alcanzar esta situación ideal, pues el campo se genera a partir de conductores situados en ranuras puntuales: cada conjunto de conductores en una ranura introduce un incremento o decremento (en función del sentido de la corriente) de tensión magnética, dibujando una forma aproximadamente sinusoidal pero siempre con un contenido de armónicos pues está constituido a partir de los escalones finitos introducidos por las ranuras. Las componentes de corriente que el campo genera están asociadas a cada uno de los armónicos en los que se divide el campo total. De esta forma, si la componente fundamental del campo produce una determinada componente fundamental de la corriente de frecuencia  $f_{FC}$ , el armónico de campo de orden  $n$  produce una componente de la corriente de frecuencia  $nf_{FC}$ , pues por cada ciclo completado por la componente fundamental del campo, el armónico de orden  $n$  completa  $n$  ciclos, induciendo una frecuencia  $n$  veces mayor.

Estrictamente, los armónicos de la tensión de alimentación también introducen armónicos de corriente con las mismas frecuencias, a las cuales se les debería designar de otra forma distinta a armónicos de devanado, pues no son creados por el carácter no ideal del devanado. Sin embargo, en los análisis no se puede distinguir cuál es la fuente de estas frecuencias en la corriente: los armónicos de devanado o los armónicos de la tensión de alimentación. En cualquier caso, las componentes de la corriente con

---

<sup>1</sup> Se adopta la nomenclatura inglesa pues es la que se utiliza incluso en otras lenguas para referirse a las distintas componentes de la corriente.

## Capítulo 2.

frecuencias múltiplos de la fundamental se asocian normalmente a los armónicos del campo magnético, llamándose armónicos de devanado, pues la tensión de alimentación se supone perfectamente sinusoidal.

En definitiva, la frecuencia de un WH viene dada por la siguiente ecuación:

$$f_{WHn} = nf_{FC} \quad (2.1)$$

Donde  $f_{FC}$  es la frecuencia de la componente fundamental (Fundamental Component, FC, o WH de orden 1),  $n$  es el orden del WH analizado y  $f_{WHn}$  su frecuencia.

### Principal Slot Harmonics

Hasta aquí hemos hablado de los armónicos de campo magnético creados por los devanados del estator, sin tener en cuenta cómo influye el rotor. La jaula de ardilla también introduce componentes en el campo del entrehierro, los cuales a su vez inducen frecuencias en la corriente del estator. En este caso no resulta tan fácil deducir las frecuencias inducidas, pudiéndose encontrar una demostración en [2]. En la demostración citada, se visualiza el conjunto de corrientes de la jaula como una discretización de una distribución perfectamente sinusoidal de corrientes. Sin embargo, para realizar un razonamiento cualitativo podemos abordarlo de otra forma. En términos generales, los campos creados por el estator inducen corrientes en el rotor, las cuales introducen variaciones en la tensión magnética, provocando la aparición de nuevos armónicos de la corriente del estator llamados PSH. Así pues, la frecuencia de un PSH depende del campo que la induce, es decir, de los campos creados por las corrientes del rotor. Estos campos dependen en primer lugar de la constitución del devanado que los crea, la jaula de ardilla, y en concreto dependen del número de ranuras del rotor  $R$  y del número de pares de polos  $p$ . A su vez las frecuencias de los PSH dependen de la velocidad de giro de los campos creados por la jaula de ardilla. Como es sabido, esta velocidad de giro depende del número de pares de polos  $p$ , del deslizamiento  $s$ , de la frecuencia fundamental de la tensión de alimentación  $f_{FC}$ , y en el caso de las componentes de orden más elevado, depende también del orden  $\nu$  de los armónicos de dicha tensión.

En definitiva, la frecuencia de un PSH viene dada por la siguiente ecuación [1]:

$$f_{PSH} = \left[ k \frac{R}{p} (1-s) \pm \nu \right] f_{FC} \quad (2.2)$$

Donde  $k$  es un número natural ( $k \in \mathbb{N}$ ).

### 2.1.2.- Componentes causadas por una rotura de barra.

La aparición de armónicos en la corriente del estator de un motor de inducción debido a la rotura de una barra puede explicarse mediante la teoría propuesta por Deleroi [3] alrededor de 1982. Esta teoría consiste en analizar el comportamiento de la máquina mediante la superposición de dos estados, estando en ambos la máquina en estado sano, difiriendo tan solo su alimentación: en el primer estado la máquina es

alimentada normalmente desde la red y en el segundo el estator de la máquina se encuentra sin alimentar suponiendo la existencia de una fuente de corriente presente en la barra rota la cual produce una corriente igual pero de sentido contrario a la circulante por dicha barra en el primer estado. Así pues, las características de la fuente de corriente del segundo estado se obtienen del análisis del primer estado. Evidentemente, al superponer ambos estados, la corriente por la barra es nula, que es exactamente lo que sucede cuando se produce la fractura. Por otra parte, el método permite analizar los armónicos introducidos por el fallo, que son los producidos por el campo magnético generado en el entrehierro por la fuente de corriente del segundo estado, así como por la distribución de corrientes que aparece en las barras a su alrededor.

Las frecuencias de los armónicos introducidos por la rotura de una barra vienen dadas por las siguientes ecuaciones [3], [4], [5]:

$$\begin{aligned} f_{BBH} &= [1 \pm 2ks] f_{FC} \\ f_{BBH} &= \left[ \frac{k}{p} (1-s) \pm s \right] f_{FC} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde en la primera ecuación  $k$  es un número natural ( $k \in \mathbb{N}$ ) y en la segunda  $k/p = 1, 3, 5, \dots$ . Los dos armónicos de rotura de barra (Broken Bar Harmonics, BBH) principales: el armónico lateral inferior (Lower Sideband Harmonic, LSH) y el armónico lateral superior (Upper Sideband Harmonic, USH), se deducen de la primera ecuación tomando  $k=1$ , con el signo negativo y positivo respectivamente. Se obtiene también la frecuencia del LSH fijando  $k/p=1$  en la segunda fórmula y tomando el signo negativo.

### 2.1.3.- Componentes causadas por excentricidad.

Para establecer las frecuencias de las componentes en la corriente del estator de un motor de inducción causadas por un fallo de excentricidad, se plantea una demostración análoga a la utilizada para obtener las frecuencias de los PSH, pero en este caso se tiene en cuenta que la permeabilidad varía con la posición angular considerada [2]. Básicamente, la excentricidad se caracteriza por un entrehierro variable con la posición angular y en el caso de la excentricidad dinámica, variable también con el tiempo. Eso implica que las fuerzas aplicadas sobre la jaula de ardilla no están compensadas y no se traducen simplemente en el habitual par de rotación. Concretamente, la excentricidad, según sus características, provoca la aparición de distintos tipos de pares oscilantes, los cuales a su vez se traducen en la aparición de componentes del campo magnético del entrehierro, induciendo distintas frecuencias en la corriente del estator.

En definitiva, las frecuencias de los armónicos introducidos por la aparición de una excentricidad mixta vienen dadas por la siguiente ecuación [6], [7]:

$$f_{EH} = \left[ 1 \pm k \left( \frac{1-s}{p} \right) \right] f_{FC} \quad (2.4)$$

Donde  $k$  es un número natural ( $k \in \mathbb{N}$ ).

### **2.1.4.- Conclusión.**

La corriente es en definitiva la suma de una serie de componentes. Las componentes propias de la corriente de un motor en estado sano son en principio las descritas en el apartado 2.1.1. Sin embargo, hay que tener en cuenta que todas estas componentes no están presentes en todas las corrientes. Es decir, que una corriente siempre tiene WH y PSH, pero no tiene porqué tener todos los WH y los PSH descritos en 2.1.1. Por ejemplo, los WH de orden múltiplo de 3 son en principio cero en un motor de inducción trifásico ideal. Además, en caso de estar presentes, estas componentes no tienen todas la misma amplitud. Por ejemplo, la componente fundamental es siempre la de mayor amplitud. De la misma forma, todos los PSH no tienen la misma amplitud, teniendo algunos de ellos un papel importante en la corriente, mientras que otros son prácticamente imperceptibles.

Por otra parte, tal y como se ha visto en los apartados 2.1.2 y 2.1.3, las averías provocan la aparición de nuevas componentes en la corriente. Al igual que en el caso de las componentes de estado sano, un tipo de avería no provoca siempre la aparición de todas las componentes vinculadas a dicha avería. Por ejemplo, una rotura de barra no provoca siempre la aparición de todas las componentes indicadas en 2.1.2. Así pues, el LSH siempre aparece, y es el de mayor amplitud, pero hay componentes indicadas en 2.1.2 que aparecen con la rotura de barra de un tipo de motor, pero con otro no.

Las componentes vinculadas a averías son, como mínimo en los dos casos analizados (barra rota y excentricidad), distintas a las que la corriente del motor tenía ya en estado sano. Sin embargo, también pueden haber causas distintas a los de la propia avería que introduzcan armónicos parecidos, aunque con una amplitud mucho menor. Por ejemplo, una cierta asimetría rotórica provocada por un defecto de construcción (barras con diferencias relativamente sustanciales), produce la aparición de los mismos armónicos que una rotura de barra, pero con una amplitud mucho menor. En definitiva, la corriente de un motor sano siempre tiene algunas de las componentes vinculadas a averías debido a las tolerancias constructivas, pero con una amplitud muy baja, la cual aumenta si la avería está efectivamente presente.

El diagnóstico de motores de inducción consistente en el análisis de la corriente estatórica está pues basado en el hecho de que las averías introducen armónicos en la corriente que no estaban en estado sano, o como mínimo aumentan considerablemente su amplitud. El objetivo de una investigación en este campo debe ser el de desarrollar una metodología de análisis de la corriente en cuyos resultados se refleje de forma unívoca la presencia de las componentes de avería. Es decir, el método de diagnóstico ideal es aquel en cuyos resultados una avería produce un efecto perfectamente detectable en cualquier condición de operación de la máquina y que sólo puede haber sido producido por dicha avería, lo cual implica una vinculación efecto-causa directa, permitiendo el diagnóstico. Este objetivo no se ha logrado todavía, y por esta razón se investigan nuevas técnicas que mejoren a las anteriores.

## 2.2.- Técnicas de diagnóstico en régimen estacionario.

### 2.2.1.- Descripción.

El cálculo del espectro de una corriente estatórica estacionaria de un motor de inducción mediante la FFT es el método más conocido para detectar la presencia de armónicos vinculados a averías. También fue el primer método desarrollado basado en el estudio de la corriente. A día de hoy es ya un método clásico, aunque como se verá más adelante, en muchas aplicaciones presenta inconvenientes.

Una vez se ha obtenido el espectro, se analiza su contenido de armónicos. Si el espectro de la corriente contiene tan solo las componentes propias de un estado sano, o como mucho contiene componentes vinculadas a averías, pero con una amplitud tan baja que necesariamente deben haber sido generadas por causas distintas a dicha avería, entonces el motor se considera sano. Si por otra parte el espectro de la corriente contiene además de las componentes propias de un estado sano, componentes vinculadas a averías con una amplitud significativa, entonces se considera que el motor diagnosticado tiene precisamente estas averías.

Esta metodología, bautizada en inglés como Motor Current Signature Analysis (MCSA), ha sido utilizada con distintos tipos de averías, entre las cuales se encuentra la rotura de una barra de la jaula con el motor alimentado directamente desde la red [4] y la excentricidad rotórica tanto con el motor alimentado desde la red [6] como con el motor alimentado desde un inversor [8], [9]. A continuación se analizan ejemplos de estos tres casos.

En la Fig. 2.1 se observan los espectros de las corrientes estatóricas de dos motores de inducción distintos alimentados desde la red. El espectro de la izquierda pertenece a un motor en estado sano. El espectro de la derecha pertenece a un motor en estado averiado: concretamente una de las barras de su jaula está rota. Se observa como los dos espectros son muy parecidos. La única diferencia significativa es que en el espectro de la derecha aparecen dos armónicos que en el de la izquierda no están: uno alrededor de 47 Hz y el otro alrededor de 53 Hz aproximadamente. Se trata de los SH que indican la presencia de una barra rota en el rotor.

En la Fig. 2.2 se observan los espectros de las corrientes estatóricas de dos motores de inducción distintos alimentados desde la red. El espectro de la izquierda pertenece a un motor en estado sano. El espectro de la derecha pertenece a un motor en estado averiado: concretamente existe una excentricidad rotórica. Se observa cómo los dos espectros son muy parecidos. La única diferencia significativa es que en el espectro de la derecha aparecen dos armónicos que en el de la izquierda no están: uno alrededor de 25 Hz y el otro alrededor de 75 Hz aproximadamente. Se trata de los principales armónicos introducidos por una excentricidad, los cuales indican su presencia.

La Fig. 2.3 es una reproducción de la Fig. 7 de [9]. En ella se observan los espectros de las corrientes estatóricas de cuatro motores de inducción distintos todos ellos alimentados mediante un inversor. La frecuencia de consigna del inversor en los cuatro casos es de 50 Hz. En los dos espectros de la izquierda el inversor utilizado es de

## Capítulo 2.

la marca Telemecanique y en los de la derecha el inversor es de la marca Siemens. Los dos espectros superiores corresponden a dos motores con excentricidad. Los dos espectros inferiores corresponden a dos motores sanos. La diferencia fundamental entre los espectros de los motores en estado sano y los espectros de los motores con excentricidad es que estos últimos poseen un conjunto de armónicos que los primeros no tienen, producidos precisamente por el defecto de excentricidad: uno alrededor de 25 Hz y el otro alrededor de 75 Hz aproximadamente. La detección de estos armónicos permite el diagnóstico del motor. Se puede observar como además, el inversor de Siemens introduce algunos otros armónicos, debiendo por tanto considerarse el tipo de inversor utilizado y su comportamiento a la hora de analizar la corriente [9].

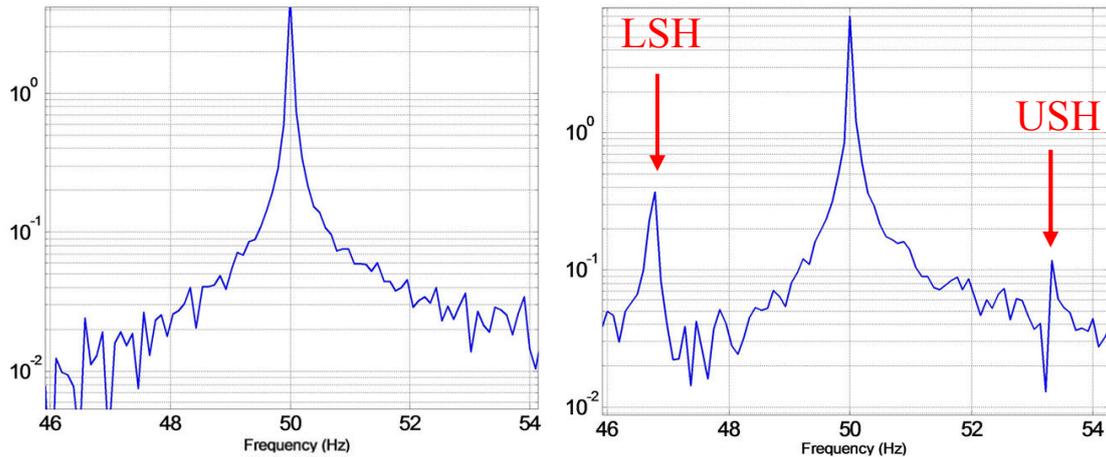


Fig. 2. 1 Espectros de la corriente estática de dos motores de inducción alimentados directamente desde la red: en estado sano (izquierda) y con una barra de la jaula de ardilla rota (derecha).

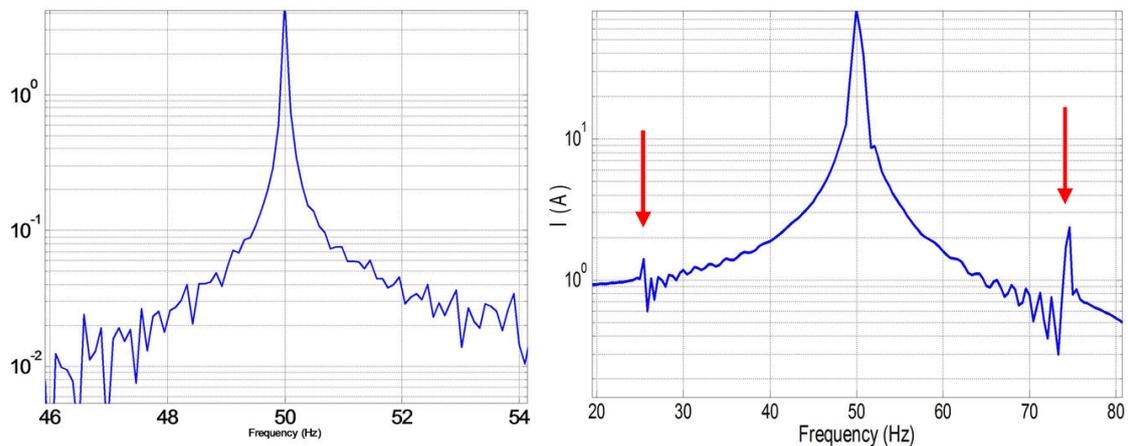


Fig. 2. 2 Espectros de la corriente estática de dos motores de inducción alimentados directamente desde la red: en estado sano (izquierda) y con una excentricidad rotórica (derecha).

### 2.2.2.- Inconvenientes.

El método clásico de diagnóstico de motores de inducción basado en el análisis del espectro de la corriente estática en régimen permanente obtenido aplicando la FFT, aunque resulta útil en muchas aplicaciones, tiene varios inconvenientes.

El principal inconveniente es que este método tan solo puede ser aplicado a motores funcionando en régimen permanente, lo cual en numerosas aplicaciones no

sucede nunca. Por ejemplo, cuando la carga cambia continuamente (como es el caso de plantas depuradoras, compresores de pistón o alternativos, moliendas de carbón en centrales térmicas o generación eólica), o en aplicaciones de velocidad variable (como es el caso de máquinas herramienta, bombas o cintas transportadoras) o en aplicaciones con carga y velocidad variables (automoción).

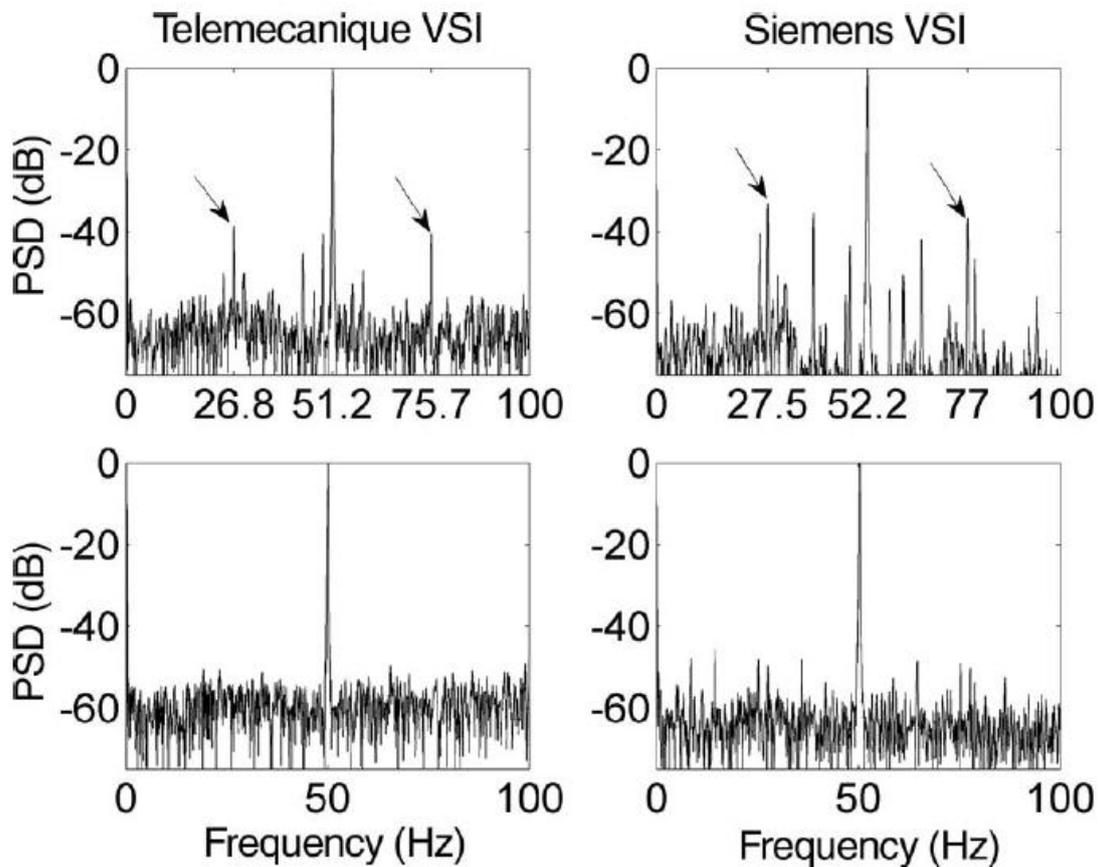


Fig. 2. 3 Reproducción de la Fig. 7 de [9]. Espectros de la corriente estática de cuatro motores de inducción alimentados mediante un inversor de Telemecanique (los dos de la izquierda) y de Siemens (los dos de la derecha). Dos motores están en estado sano (abajo) y dos tienen una excentricidad rotórica (arriba).

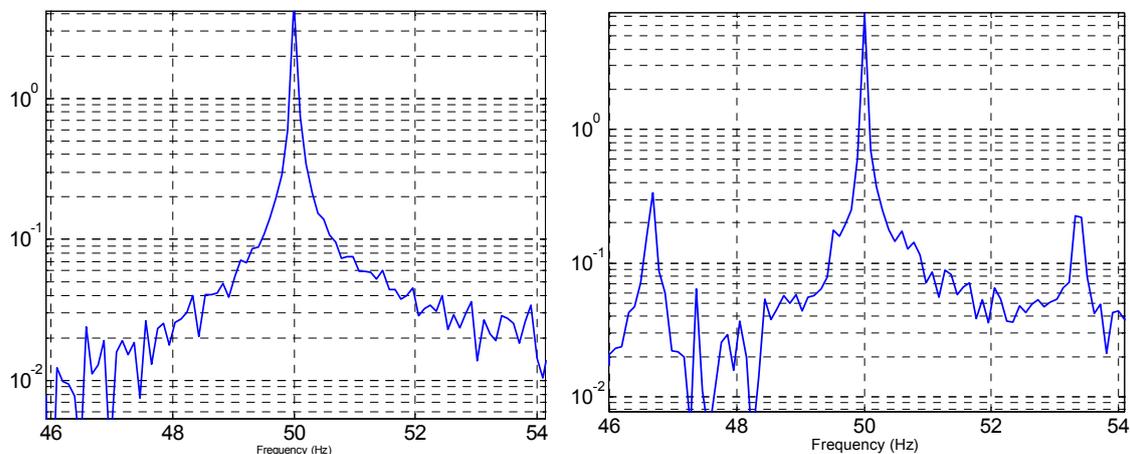
Por otra parte, los armónicos que aparecen en un espectro, nunca pueden ser representados por un conjunto de frecuencias puntuales: un armónico siempre abarca un pequeño intervalo de frecuencia en el espectro alrededor de su frecuencia real. Cuanto menor es el ancho de dicho intervalo, se dice que el espectro tiene una mayor resolución, pues es más fácil distinguir dos armónicos de frecuencias muy cercanas. Si la resolución no es suficientemente elevada, aparece el fenómeno conocido como dispersión espectral (spectral leakage), esto es, el armónico no queda representado por un pico claro y fino en el espectro, sino que su influencia se dispersa de forma significativa alrededor de su frecuencia real, ocupando una cierta banda de frecuencia, confundándose con otros armónicos a su alrededor.

Así pues, aun suponiendo que pueda resultar factible capturar una corriente estrictamente en régimen permanente, para poder distinguir bien cada uno de los armónicos que contiene la corriente, y poder de esta forma localizar posibles armónicos vinculados a fallos, se precisa generar un espectro con una elevada resolución y con poca dispersión espectral.

## Capítulo 2.

El fenómeno de la dispersión espectral resulta especialmente crítico en el caso del componente fundamental (FC, Fundamental Component), pues como los armónicos de rotura de barra se encuentran muy cerca del FC en el espectro, si el FC no queda representado por un pico claro sino que se dispersa ocupando una cierta banda, como su amplitud es mucho mayor a la amplitud de los Sideband Harmonics (SH: LHS y USH), los enmascara fácilmente. Esto ocurre sobre todo cuando los SH se encuentran especialmente cerca del FC, lo cual sucede según (2.3) cuando el deslizamiento es muy pequeño, como es el caso de motores funcionando con poca carga o motores de mucha potencia. En la Fig. 2.4 se observan dos espectros de corrientes estáticas de motores de inducción. El de la izquierda pertenece a un motor con dos barras rotas funcionando a bajo deslizamiento, el cual además ha sido obtenido con muy mala resolución espectral. Es por ello que el FC queda representado de forma muy dispersa y los dos SH quedan ocultos a su alrededor, llevando a un diagnóstico erróneo como máquina sana.

Además, existe la posibilidad de que en régimen permanente aparezcan armónicos con frecuencias muy parecidas a los armónicos provocados por averías, pero que en realidad están producidos por otras causas, eléctricas o mecánicas, como las fluctuaciones de tensión, oscilaciones del par de carga o elementos de transmisión como poleas o correas. La aparición de estos armónicos que se confunden con los introducidos por las averías pueden llevar a diagnósticos erróneos. Por ejemplo, el espectro de la derecha en la Fig. 2.4 pertenece a un motor sano arrastrando una carga pulsante. La carga pulsante introduce dos armónicos con frecuencias aproximadamente de 46.5 y 53.5 Hz. Estos armónicos, de frecuencias en régimen permanente muy parecidas a las de los SH, pueden llevar a determinar erróneamente que el motor tiene una o varias barras rotas.



**Fig. 2.4** Espectros de la corriente estática de dos motores de inducción alimentados directamente desde la red. Izquierda: espectro de un motor con dos barras rotas generado con muy mala resolución espectral. Derecha: espectro de un motor sano arrastrando una carga pulsante.

Para evitar que la dispersión espectral pueda enmascarar la presencia de armónicos vinculados a averías o que pueda confundir armónicos propios al funcionamiento sano con armónicos vinculados a averías, se debe intentar reducir dicha dispersión espectral al máximo. O lo que es lo mismo, se debe tratar de generar un espectro con la mayor resolución posible, de tal forma que se pueda distinguir entre dos armónicos aunque se encuentren muy juntos. Para ello se necesita capturar una corriente en régimen permanente durante un intervalo de tiempo muy elevado: cuanto mayor sea el intervalo de tiempo capturado, menor es la dispersión espectral y mayor la resolución

en frecuencia obtenida. Sin embargo, cuanto mayor es el tiempo de captura, mayores son las posibilidades de que alguna de las condiciones del ensayo cambie provocando que la corriente capturada ya no esté en régimen permanente. En otras palabras, si se alarga el tiempo del ensayo, resulta más fácil que aparezca una variación en las condiciones de alimentación o una variación en la carga. Si esto acontece, las frecuencias de los armónicos cambian al cambiar la condición de operación, y el espectro de la corriente capturada está totalmente emborronado, pues muestra las frecuencias de los armónicos en dos posiciones distintas a la vez: antes y después del cambio en las condiciones de operación.

Cuando se intenta detectar excentricidad en un motor de inducción alimentado mediante un inversor aparecen dificultades adicionales [9]. En primer lugar, la amplitud de los armónicos provocados por la excentricidad es inferior cuando se alimenta con el inversor que cuando se alimenta directamente desde la red, haciendo más difícil su identificación. En segundo lugar, en el caso de alimentación mediante un inversor, la amplitud depende además de la frecuencia asignada, con lo cual, a la hora de cuantificar se debe tener en cuenta la frecuencia a la que se trabaja. En tercer lugar, en función del tipo de inversor utilizado, éste introduce distintos armónicos que no se deben confundir con los armónicos propios de una avería, siendo necesario conocer si el inversor con el que se trabaja introduce armónicos, en qué condiciones de funcionamiento lo hace y cuáles son exactamente. Finalmente, el inversor introduce además un nivel de ruido que puede enmascarar los armónicos que se pretenden detectar.

La variación de la amplitud en función del tipo de inversor y de su frecuencia asignada no se resuelve con un análisis transitorio. Sin embargo, esta dificultad se puede resolver teniendo en cuenta el tipo de inversor utilizado y la frecuencia asignada a la hora de medir la amplitud de los armónicos detectados. Por otra parte, en el capítulo 8 se verá cómo la introducción de distintos armónicos y de un nivel de ruido en función del inversor sí resultan menos críticos al utilizar resultados propios de un análisis transitorio.

Finalmente, existen averías que no pueden ser detectadas en régimen permanente. Por ejemplo, la rotura de barras en la parte externa de una jaula doble [10]. Efectivamente, en régimen permanente la corriente circulando por las barras de la jaula externa es muy pequeña, encontrándose la mayor parte de la corriente en la jaula interna. Por lo tanto, en régimen permanente disminuye el efecto de una rotura de barra de la caja externa en la corriente del estator, así como en su correspondiente espectro. Sin embargo, durante el arranque la distribución es la inversa, y la rotura de barra induce en la corriente del estator componentes con la amplitud habitual.

### **2.2.3.- Soluciones y otras técnicas de diagnóstico en régimen permanente.**

Algunas de las dificultades que entraña el método basado en la FFT se han intentado resolver utilizando distintas técnicas. El conjunto de técnicas basadas en el análisis de la corriente estática de un motor de inducción en régimen permanente se han integrado dentro de la nomenclatura de MCSA.

En [11] se intenta resolver un caso complejo: diagnóstico de un motor de inducción de jaula, el cual acciona a una carga compuesta por una caja reductora de dos

## Capítulo 2.

etapas unida a un pulverizador de carbón. Por una parte, la caja reductora introduce armónicos en el espectro de la corriente estatórica de frecuencias:  $\pm 16.5$  Hz,  $\pm 3.58$  Hz y  $\pm 0.625$  Hz. Estos armónicos pueden llevar a un diagnóstico erróneo si son confundidos con los armónicos de rotura de barra. Por otra parte, el pulverizador de carbón es una carga oscilante, lo cual implica que no se dispone de un régimen permanente. La parte superior de la Fig. 2.5 (reproducción de la Fig. 10 de [11]) muestra la corriente estatórica del motor capturada, con las evidentes fluctuaciones. Al no disponer de un régimen estacionario, se propone como solución capturar la corriente en sucesivos intervalos de tiempo, calcular el espectro de cada uno de los fragmentos de corriente capturada y obtener el espectro final como su media. A esta técnica, evolución de la FFT, se la denomina espectro promediado (averaged spectrum).

En las partes central e inferior de la Fig. 2.5 (reproducciones de las figuras 11 y 12 respectivamente de [11]), se muestran dos de los espectros promediados, obtenidos al aplicar la técnica a la corriente mostrada en la parte superior de la figura. Esta técnica presenta dos problemas básicamente. En primer lugar, como la resolución del espectro final es la de cada uno de los espectros individuales promediados, y éstos han sido obtenidos durante un intervalo de tiempo relativamente corto, la resolución es baja. Por otra parte, como cada espectro individual está asociado a unas condiciones de funcionamiento, los armónicos presentan en cada uno de ellos una frecuencia diferente, y al calcular el espectro final promediando, cada armónico se encuentra en varias posiciones a la vez. Es por ello que en vez de picos hay directamente zonas del gráfico coloreadas de blanco, obteniendo un espectro emborronado. A este efecto se le denomina en inglés “smearing effect”. Aun así, en el espectro promediado mostrado en la parte central se aprecia, entre otros, el FC, así como 4 de los armónicos introducidos por la caja reductora de dos etapas. En el espectro promediado mostrado en la parte inferior, donde se ha intentado aumentar la resolución, se observan entre otros los dos armónicos restantes introducidos por la caja reductora. En principio no aparecen armónicos vinculados a una rotura de barra y el motor se considera sano, aunque la fiabilidad no es muy elevada por la dificultad de detectar armónicos claramente.

Otros autores proponen medir varias corrientes y tensiones para poder calcular señales con mayor separación entre las frecuencias de interés y las componentes restantes, evitando de esta forma la necesidad de conseguir una resolución espectral elevada, salvando las dificultades que esto entraña. Más concretamente, en [12] se demuestra que, así como una rotura de barra introduce en la corriente principalmente los SH de frecuencias  $[1 \pm 2s]f_{FC}$ , en la potencia instantánea de una fase en presencia de una barra rota aparecen armónicos de frecuencias  $2sf_{FC}$  y  $[2 \pm 2s]f_{FC}$ , mientras que en el caso de la potencia instantánea total y el par, el armónico principal introducido por la avería es de frecuencia  $2sf_{FC}$ . La ventaja de analizar un armónico de frecuencia  $2sf_{FC}$  tanto en el caso de la potencia instantánea de una fase, la potencia instantánea total y el par, es que no se encuentra cerca de ninguna componente importante (a diferencia de los SH, que se encuentran muy cerca del FC), y por tanto no puede ser enmascarada por un problema de dispersión espectral. Esto permite que la captura de un régimen permanente relativamente corto sea suficiente, pues no se precisa de una gran resolución espectral.

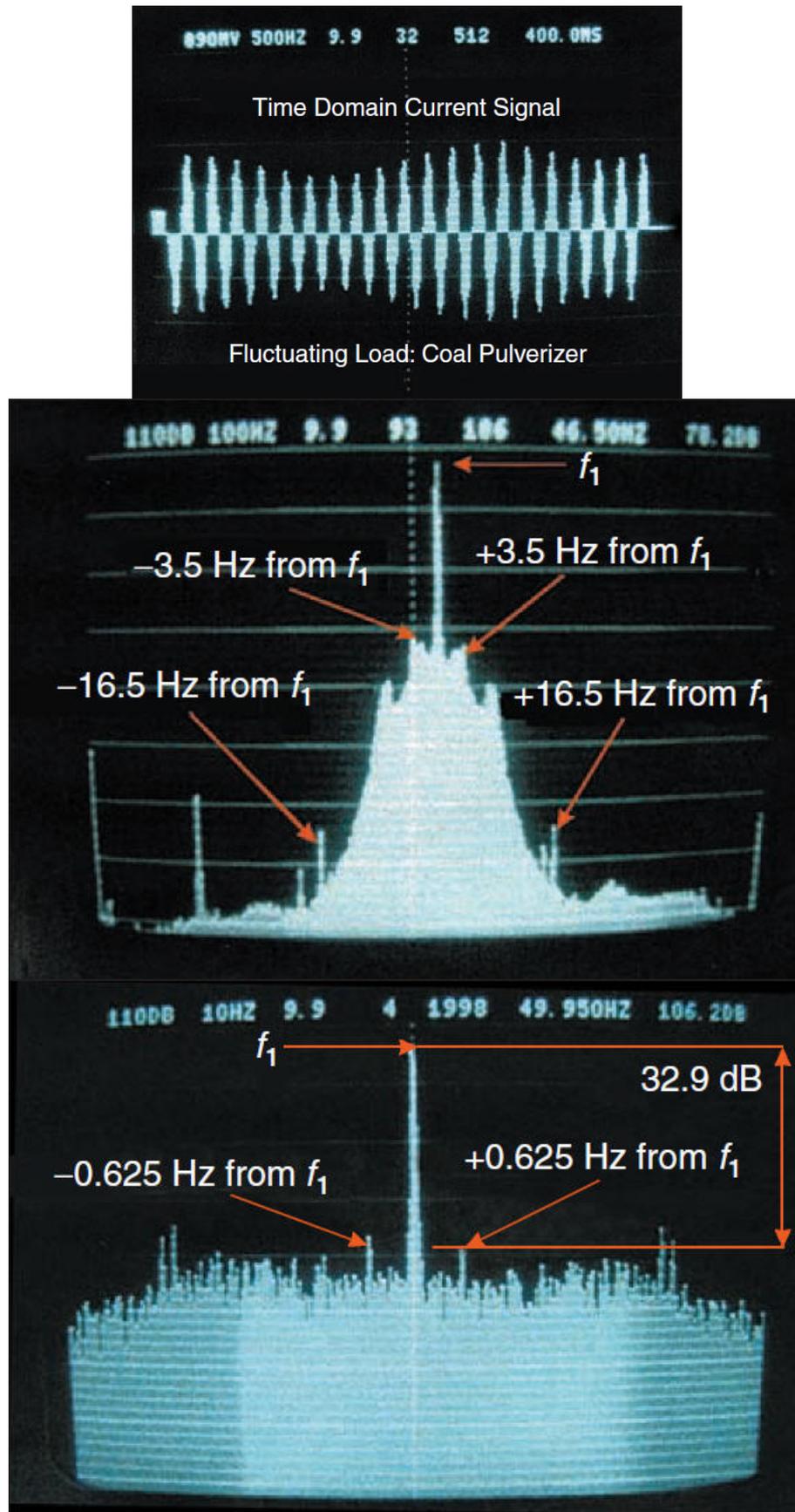


Fig. 2. 5 Reproducciones de las figuras 10, 11 y 12 de [11] respectivamente: corriente estática del motor de inducción a diagnosticar (superior), primer espectro promediado de la corriente estática (central) y segundo espectro promediado de la corriente estática con elevada resolución (inferior).

## Capítulo 2.

En la Fig. 2.6 (reproducciones de las figuras 3, 5, 6 y 7 de [12]), se muestran los espectros de la corriente estática del motor de inducción a diagnosticar (superior izquierda), la potencia instantánea de fase (superior derecha), la potencia instantánea total (inferior izquierda) y el par estimado (inferior derecha). En el espectro de la corriente se observan los dos SH, muy cerca del FC, de tal forma que si por ejemplo baja el nivel de carga, pueden verse fácilmente enmascarados por el FC. Sin embargo, en el espectro de la potencia de fase instantánea se observan, a parte de los dos armónicos análogos a los SH  $[2 \pm 2s]f_{FC}$ , el armónico  $2sf_{FC}$ , el cual no está cerca de ninguna otra componente importante, y por tanto no corre peligro de enmascararse por un problema de dispersión espectral. Lo mismo ocurre con los espectros de la potencia instantánea total y del par estimado. Los autores proponen finalmente utilizar la potencia de fase instantánea pues demuestra una mayor sensibilidad a la avería, teniendo el pico del armónico de falta una amplitud mayor que en las otras magnitudes analizadas (menor en dB).

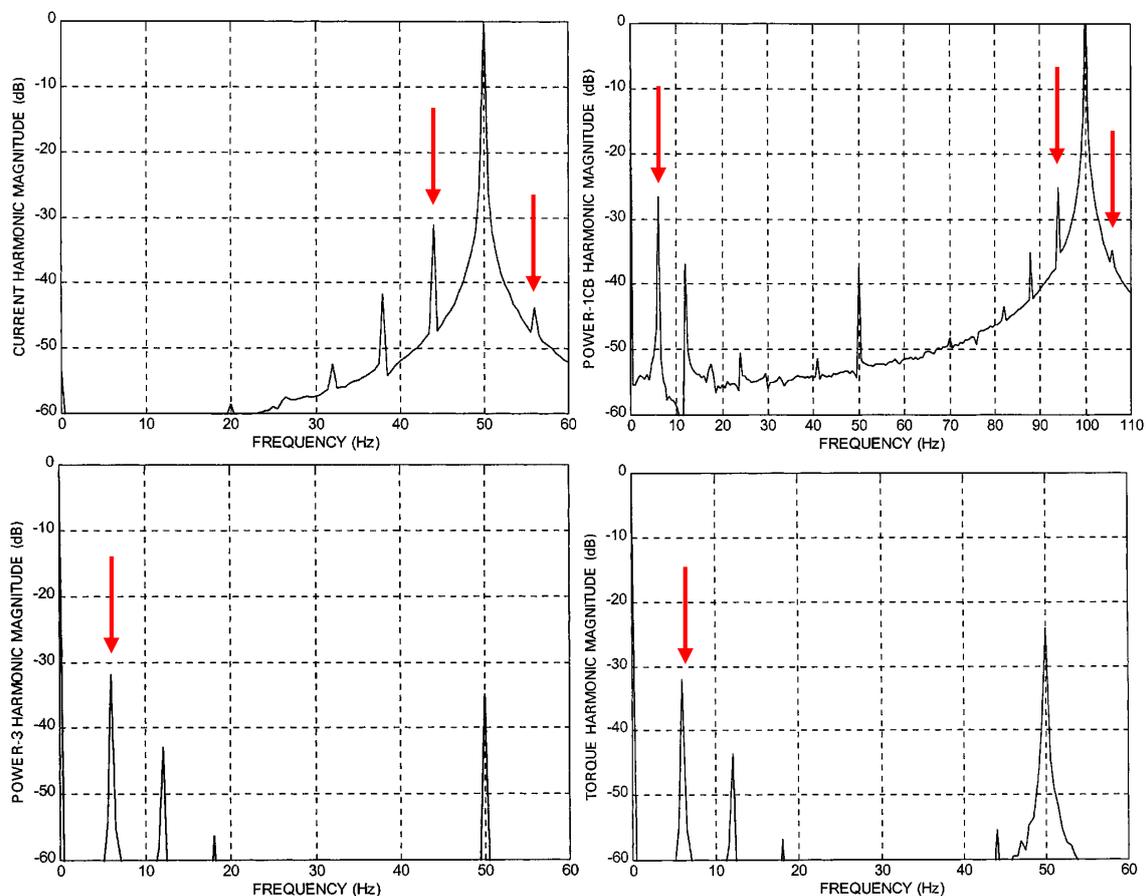
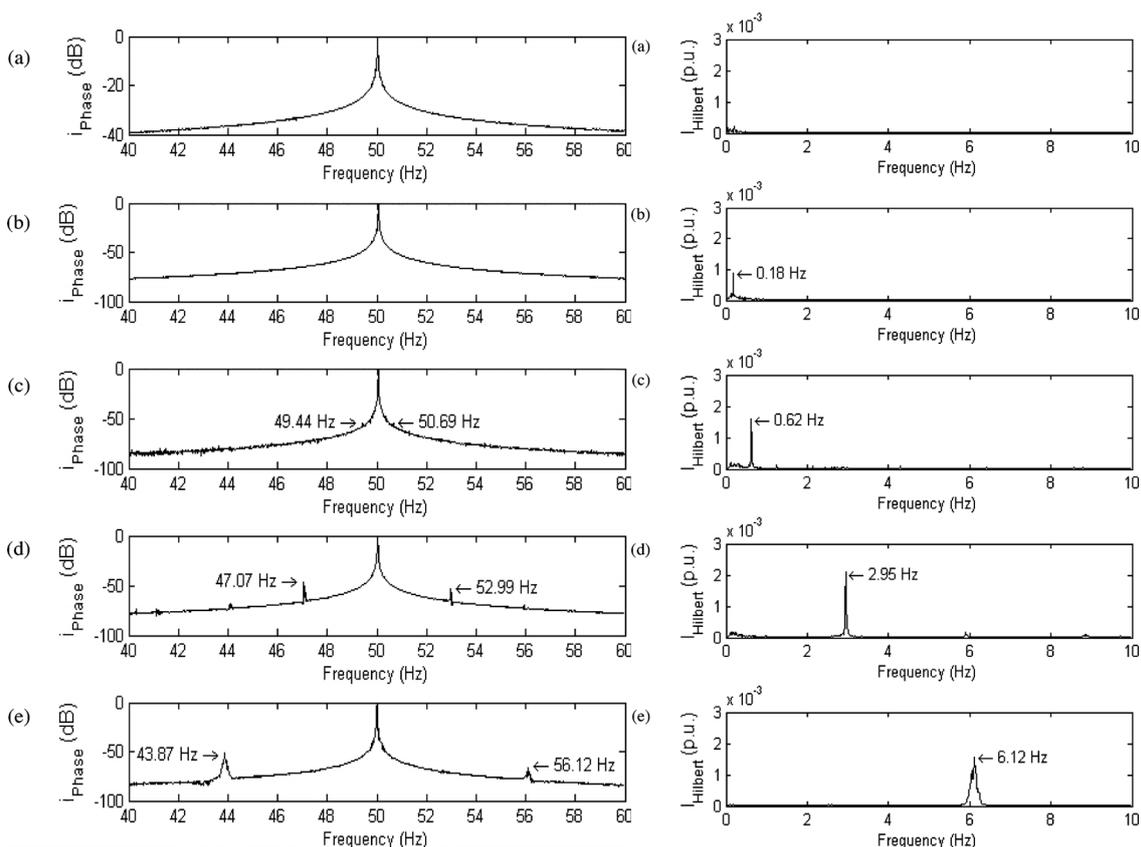


Fig. 2. 6 Reproducciones de las figuras 3, 5, 6 y 7 de [12]: espectros de la corriente estática del motor de inducción a diagnosticar (superior izquierda), la potencia de fase instantánea (superior derecha), la potencia instantánea total (inferior izquierda) y el par estimado (inferior derecha).

El inconveniente de utilizar la potencia de fase instantánea es que para calcularla no es suficiente con la medida de una sola corriente. En [13] se propone como alternativa analizar el espectro de la envolvente de la corriente estática, la cual se calcula fácilmente aplicando la transformada de Hilbert a la simple medida de la corriente. Se demuestra que la envolvente de la corriente no tiene una componente como la FC, siendo su principal componente una componente de continua, la cual puede ser filtrada fácilmente; por otra parte, la rotura de barra introduce armónicos de frecuencia

$2sf_{FC}$ , al igual que ocurre con la potencia instantánea total o el par estimado, con la ventaja de que tan solo hay que medir una corriente.

En la Fig. 2.7 (reproducciones de las figuras 3 (izquierda) y 4 (derecha) de [13]), se observan los espectros de la corriente estatórica (izquierda) y de la envolvente de dicha corriente tras eliminar su componente continua (derecha). Concretamente se analizan las corrientes y sus envolventes (extrayendo la componente de continua) de un motor de inducción en estado sano descargado (a) y con una barra rota descargado (b), en baja carga (c), en media carga (d) y en plena carga (e). Si se analiza un motor con una barra rota funcionando a plena carga (e), a pesar de la dispersión espectral se observan en el espectro de la corriente (izquierda) los dos picos asociados a los SH. Pero a medida que se descarga el motor ((d), (c) y (b)), estos armónicos se desplazan hacia el centro, y terminan por confundirse con el FC, hasta tal punto que no hay ninguna diferencia entre el espectro de la corriente (izquierda) del motor descargado con una barra rota (b) y el motor descargado sano (a). Sin embargo, en el espectro de la envolvente (derecha), el armónico producido por la rotura de barra se observa en cualquier condición, incluso cuando el motor se encuentra completamente descargado (b), pudiendo distinguirse perfectamente del caso sano (a).



**Fig. 2. 7 Reproducciones de las figuras 3 (izquierda) y 4 (derecha) de [13]: espectros de la corriente estatórica (izquierda) y de la envolvente de dicha corriente (derecha) del motor de inducción en estado sano descargado (a) y con una barra rota descargado (b), en baja carga (c), en media carga (d) y en plena carga (e).**

En [14], en vez de analizar la envolvente de una cualquiera de las corrientes del estator, se analiza la envolvente conjunta a las tres corrientes pertenecientes a las tres fases del estator. El proceso es más complejo pues se necesitan tres sensores de corriente y la envolvente no se puede calcular de forma tan inmediata como en el caso

anterior utilizando la transformada de Hilbert. Sin embargo, el diagnóstico en este caso se extiende de la detección de barras rotas a la de cortocircuitos.

En un intento de mejorar la resolución en frecuencia, se han propuesto otras técnicas basadas en el uso de la FFT: la transformada Zoom-FFT [15], la transformada Z chirp [16] o el método de la máxima covarianza [17], [18]. En vez de tratar de conseguir una buena resolución a lo largo de todo el espectro en frecuencia, estos métodos tratan de conseguir una buena resolución en la banda de interés (por ejemplo, alrededor del FC para detectar las roturas de barras).

Con la misma intención de mejorar la resolución del espectro obtenido, se ha propuesto el uso de métodos de cálculo del espectro basados en modelos auto-regresivos. En [19] se propone su utilización para la detección de fallos en rodamientos: primero se filtra la corriente capturada eliminando los armónicos no vinculados a fallos en rodamientos (armónicos que puedan producir confusión como los producidos por variaciones en la tensión de alimentación o variaciones cíclicas del par de carga), posteriormente se utiliza la corriente del estator filtrada proveniente del motor sano para entrenar un modelo auto-regresivo obteniendo un espectro base y finalmente se produce el diagnóstico cuando el espectro obtenido se distancia del espectro base obtenido durante el entrenamiento. A su vez, en [20] se demuestra la posibilidad de detectar barras rotas en motores de inducción a través del análisis de la corriente capturada con una baja frecuencia de muestreo utilizando un filtro pasa banda, la STFT (calculada tan solo en dos puntos) y la aplicación del modelo auto-regresivo.

Por otra parte, el método de clasificación de señales múltiples (multiple signal classification method, MUSIC) está especialmente indicado para disminuir la influencia del ruido, consiguiendo detectar componentes de baja amplitud en comparación con la relación entre la señal y el ruido [15]. Sin embargo, este método requiere un elevado tiempo de cálculo. En [15] se propone combinar el método MUSIC con las técnicas de zoom para reducir el tiempo de cálculo, definiendo así el Zoom-MUSIC. Se ha demostrado su capacidad para detectar barras rotas en motores de inducción a través del análisis de la corriente del estator, mostrando como la resolución del Zoom-MUSIC es mayor a la conseguida con la FFT e incluso a la conseguida con la transformada Zoom-FFT.

Otros autores proponen el uso de espectros de orden elevado o poli-espectros [21] para la detección de fallos en máquinas eléctricas [22], [23]. Concretamente, en [22] se ha mostrado la capacidad del bi-espectro para detectar barras rotas, cortocircuitos y excentricidad. A su vez, en [23] se ha utilizado el bi-espectro para detectar fallos en rodamientos.

Existen otras técnicas en régimen permanente que no están basadas en el cálculo del espectro. Por ejemplo, la técnica propuesta en [24], basada en la cancelación del “ruido”, según una definición amplia del término. Algunos autores denominan ruido [24], en términos generales, a cualquier armónico presente en la corriente que no esté vinculado con el fallo a detectar. Así pues, existen trabajos en los que se propone filtrar todo tipo de armónicos: desde la componente fundamental hasta los PSH. Esta estrategia resulta especialmente útil cuando se trata de detectar averías que introducen armónicos de muy baja amplitud en la corriente, como es el caso de los rodamientos. Más concretamente, cuando el defecto de un rodamiento es puntual e incipiente, éste

introduce armónicos específicos pero de amplitud demasiado baja para ser detectados. Sin embargo, cuando el fallo ha evolucionado, el defecto deja de ser puntual introduciendo un aumento de la densidad de energía espectral asociada, en vez de a una frecuencia, a una banda de frecuencia [25]. Por esta razón, para detectar fallos en rodamientos en [24] se propone, en vez de calcular el espectro de la corriente, entrenar un filtro de Wiener para que sea capaz de eliminar toda la parte de la corriente correspondiente al estado sano y analizar el resto con métodos estadísticos. Finalmente se observa como, en la presencia de un rodamiento defectuoso, la parte de la señal libre de ruido tiene un elevado nivel de variación en su amplitud, la cual se cuantifica con los mencionados métodos estadísticos.

Sin embargo, otros autores prefieren continuar trabajando con el espectro calculado con la FFT, aún al tratar de detectar fallos en rodamientos. Por ejemplo, en [26] proponen el diagnóstico a través del cálculo de la energía en una banda de frecuencia alrededor de la frecuencia teórica que produciría un efecto puntual. Más concretamente se integra la densidad de energía proporcionada por el espectro obtenido con la FFT y se normaliza dividiendo por el máximo en dicha banda. Por otra parte, se comparan los resultados al analizar el contenido de armónicos de la corriente y el de la velocidad obtenida mediante un estimador propuesto en el artículo.

Con lo que respecta a motores de inducción acoplados a cajas de engranajes, existen algunos trabajos al respecto [27], [28]. El análisis de los armónicos introducidos por una caja de engranajes en la corriente del estator de un motor de inducción se analiza en [27]. Más concretamente se estudia como la vibración torsional de la caja multiplicadora produce múltiples modulaciones de fase en la corriente del estator, las cuales dependen de las características de la caja y de la alimentación del motor. Las frecuencias características introducidas por la caja son detectadas tanto con la FFT como con el espectro de la frecuencia instantánea calculada con la transformada de Hilber-Huang (HHT). Por su parte, en [28] se utiliza un estimador del par electromagnético para detectar falta de lubricación en una caja multiplicadora: la amplitud de los armónicos introducidos por la caja de engranajes en la componente de alterna del par estimado aumenta en presencia del fallo, lo cual permite el diagnóstico. Se trata pues de otro ejemplo de uso de estimadores de variables mecánicas a partir de la medición de variables eléctricas para la detección de averías. El contenido de armónicos del par estimado se estudia en permanente utilizando la FFT, incluyendo además hacia el final del artículo un análisis del par estimado durante procesos transitorios mediante la STFT, siendo por consiguiente un artículo que se encuentra a caballo entre la presente sección dedicada al permanente y la siguiente dedicada al transitorio, sirviendo por tanto de enlace.

Estos son algunos ejemplos de los esfuerzos que la comunidad científica ha realizado para resolver los problemas inherentes a las técnicas basadas fundamentalmente en el cálculo del espectro de magnitudes eléctricas mediante la aplicación de la FFT. Algunos de los inconvenientes han sido solventados satisfactoriamente, y la técnica da buenos resultados en distintas aplicaciones. Aun así, todavía existen problemas no resueltos, y existe además el caso de aquellos motores utilizados en aplicaciones en las que nunca trabajan en régimen permanente. Es por ello que durante la última década han aparecido algunos trabajos que intentan diagnosticar el motor mediante el análisis de corrientes transitorias, lo cual se analiza en el siguiente punto.

## **2.3.- Técnicas de diagnóstico en régimen transitorio.**

En el presente apartado se analizan las técnicas de diagnóstico de motores de inducción en régimen transitorio desarrolladas hasta el momento. La metodología de diagnóstico desarrollada a lo largo de la tesis es un paso más en este sentido.

### **2.3.1.- Necesidad de técnicas de diagnóstico en régimen transitorio.**

Aun suponiendo que se pudiera desarrollar una técnica de análisis en régimen permanente capaz de solventar todos los problemas de la FFT, es necesario desarrollar técnicas capaces de diagnosticar máquinas en régimen transitorio pues, tal y como ya se ha comentado, existen muchos motores en la industria que nunca funcionan en régimen permanente, no resultando económicamente rentable desacoplarlos de sus condiciones normales de trabajo para poder conseguir un funcionamiento en permanente y aplicar la técnica correspondiente. Es por ello que en la última década (y en mayor medida en los últimos años), algunos investigadores del campo del diagnóstico de máquinas eléctricas han dedicado sus esfuerzos a desarrollar técnicas capaces de analizar magnitudes eléctricas de motores de inducción trabajando en régimen transitorio (especialmente corrientes de arranque) y proceder a diagnosticar dichos motores mediante la interpretación de los resultados obtenidos.

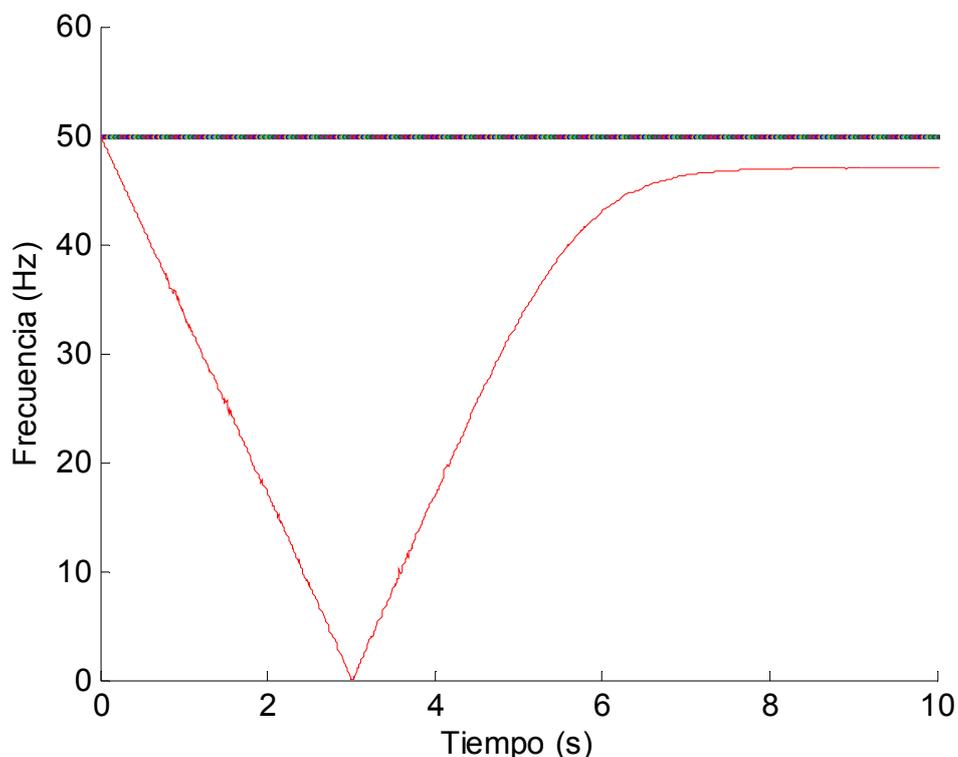
Además de que en algunos casos resulte obligatorio un análisis en transitorio, éste presenta ventajas con respecto al permanente. Por ejemplo, la amplitud de los armónicos de rotura de barra es mayor durante el arranque que en régimen permanente, resultando más fácil su detección. Por otra parte, resulta relativamente fácil que dos armónicos tengan frecuencias parecidas en régimen permanente, lo cual puede llevar a confundir armónicos propios de averías con armónicos pertenecientes a un estado sano (que en realidad están generados por causas eléctricas o mecánicas), pudiendo llevar a falsos diagnósticos. Pero aunque sus frecuencias en régimen permanente se parezcan, o incluso coincidan, es mucho más difícil que la evolución de sus frecuencias en un proceso transitorio (el valor de la frecuencia en cada uno de los instantes del transitorio), sea también la misma. Y lo que en permanente produce confusión (dos frecuencias muy parecidas), en transitorio no da lugar a dudas (dos trayectorias temporales de las frecuencias totalmente diferentes). Es por ello que las técnicas en transitorio basadas en obtener la evolución temporal de la frecuencia (la trayectoria de la componente de la corriente en el plano tiempo-frecuencia), conceptualmente resultan más fiables pues la detección de una trayectoria entera identifica de forma mucho más precisa y fiable a una componente que un pico en un espectro obtenido mediante la FFT.

### **2.3.2.- Fundamento físico y herramientas matemáticas.**

#### **Evolución temporal de las frecuencias de la corriente**

Las frecuencias de las componentes vinculadas a los fallos que se pretenden detectar, dependen de magnitudes variables durante procesos transitorios. Por ejemplo, tal y como se puede observar en (2.3), las frecuencias de las componentes vinculadas a roturas de barras dependen del deslizamiento y de la frecuencia fundamental. Si el motor es alimentado directamente desde la red, la frecuencia del FC no varía, pero el

deslizamiento sí presenta una amplia variación durante transitorios como un arranque, una parada o una variación de carga más general. Análogamente, tal y como indica (2.4), las frecuencias de las componentes vinculadas a excentricidad dependen también del deslizamiento y de la frecuencia del FC (así como de algunas características de la máquina). La frecuencia del FC varía sustancialmente durante transitorios cuando el motor se alimenta desde un inversor, mientras que la frecuencia de deslizamiento se mantiene en un valor bajo. En definitiva, como consecuencia de que las frecuencias de componentes vinculadas a fallos dependen de magnitudes que varían en procesos transitorios, dichas frecuencias describen una evolución en el tiempo a lo largo del transitorio que es característica del tipo de fallo y del transitorio (siendo independiente del tipo de máquina en el caso de barras rotas y con particularidades en función de las características de la máquina en el caso de excentricidad). Estas evoluciones se estudian en profundidad en el apartado 4.1. En la Fig. 2.8 se muestra como ejemplo las evoluciones temporales de las frecuencias del FC y el LSH durante el arranque de un motor de inducción hasta llegar al régimen permanente. Se puede observar como la frecuencia del LSH durante el arranque traza el característico patrón en V.



**Fig. 2. 8 Evoluciones temporales de las frecuencias del FC y el LSH durante el arranque de un motor de inducción hasta llegar al régimen permanente.**

Así pues, en régimen permanente, cada una de las componentes de la corriente vinculada a fallos tiene una frecuencia, pero en régimen transitorio, dicha frecuencia varía, tomando un valor distinto en cada instante de tiempo, trazando una trayectoria característica en el plano tiempo-frecuencia. En términos generales, durante procesos transitorios todas las frecuencias de las componentes de la corriente trazan evoluciones temporales. Si al analizar el régimen permanente el análisis más directo es obtener las frecuencias de las distintas componentes presentes en la corriente, al analizar el régimen transitorio el análisis más lógico es el de obtener la evolución temporal de dichas frecuencias, su trayectoria en el plano tiempo-frecuencia.

## Técnicas de análisis tiempo-frecuencia

Al igual que para obtener el espectro de la corriente en régimen permanente se utiliza una herramienta matemática, la transformada rápida de Fourier (FFT), para obtener las evoluciones temporales de las frecuencias de las componentes de la corriente durante un proceso transitorio se necesita también una herramienta matemática, una transformada tiempo-frecuencia. Existen varias transformadas que realizan análisis tiempo-frecuencia, tratando de obtener la evolución temporal de las frecuencias de la señal analizada. Por una parte se encuentran las transformadas basadas en la correlación de la señal a analizar con un tipo de señales llamadas átomos tiempo-frecuencia: se trata de la Short Time Fourier Transform (STFT), la Wavelet Transform (WT) y el Matching Pursuit (MP). En el capítulo 3 se realiza un análisis profundo de este tipo de transformadas, estudiando las características de las tres transformadas mencionadas, utilizando un enfoque especialmente apropiado para entender la metodología desarrollada en la presente tesis, la cual está basada en este tipo de transformada. Por otra parte se tienen las Wigner-Ville Distributions (WVD), las cuales están basadas en correlacionar la señal con una traslación en el tiempo y en frecuencia de ella misma. Se estudian también al final del capítulo 3. Sin perjuicio de la lectura de dicho capítulo, en el presente estado del arte se introducirán brevemente y de forma cualitativa las transformadas para que el lector pueda seguir los razonamientos realizados.

Existen otras estrategias que tienen también como objetivo detectar durante procesos transitorios la presencia de componentes vinculadas a averías, pero no mediante la obtención de la evolución temporal de su frecuencia. Se trata por ejemplo de la Discrete Wavelet Transform (DWT), cuyos fundamentos se analizan también al final del capítulo 3. Esta transformada es la versión discreta de la WT. Aunque aporta menos información que la versión continua, tiene una propiedad muy interesante que la WT no tiene: permite dividir la corriente a analizar en un conjunto de subseñales cada una de las cuales está asociada a una banda de frecuencia distinta. De esta forma, si se conoce la banda de frecuencia dentro de la cual evoluciona el armónico vinculado a la avería que se pretende detectar, basta con medir un incremento de energía en la subseñal asociada a dicha banda para detectar la presencia del armónico [29]. Sin embargo, el mayor inconveniente que tiene es que no se puede asegurar con toda certeza que si la subseñal en cuestión aumenta su energía, este aumento sea de forma unívoca debido a la presencia del armónico de avería y no a otra componente, como puede ser la introducida por un elemento propio del funcionamiento normal (una polea), o incluso un componente vinculado a otro tipo de avería distinta a la que se pretende detectar. La DWT consiste en un proceso de cálculo más simple y rápido, generando un resultado menos complejo y más manejable, pero a costa de aportar una menor información. Como se verá a continuación, se trata de una de las primeras transformadas utilizadas para el diagnóstico de máquinas eléctricas en régimen transitorio.

A continuación se exponen las publicaciones de la comunidad científica en torno al diagnóstico de máquinas eléctricas mediante el análisis de magnitudes eléctricas transitorias (sobre todo la corriente), utilizando transformadas tiempo-frecuencia. Las distintas técnicas han sido clasificadas en función del tipo de transformada utilizada, de menor a mayor complejidad de la transformada, y por tanto también de los resultados y la información que generan. Este tipo de técnicas reciben el nombre de Transient Motor Current Signature Analysis (TMCSA).

### 2.3.3.- Discrete Wavelet Transform.

#### Diagnóstico mediante los coeficientes de la DWT

Uno de los primeros trabajos de investigación en el que se propone aplicar la DWT para diagnosticar máquinas eléctricas es el presentado en [30]. Concretamente se estudia la posibilidad de detectar barras rotas en motores de inducción de jaula de ardilla a través de los coeficientes de la DWT de la corriente de arranque del motor.

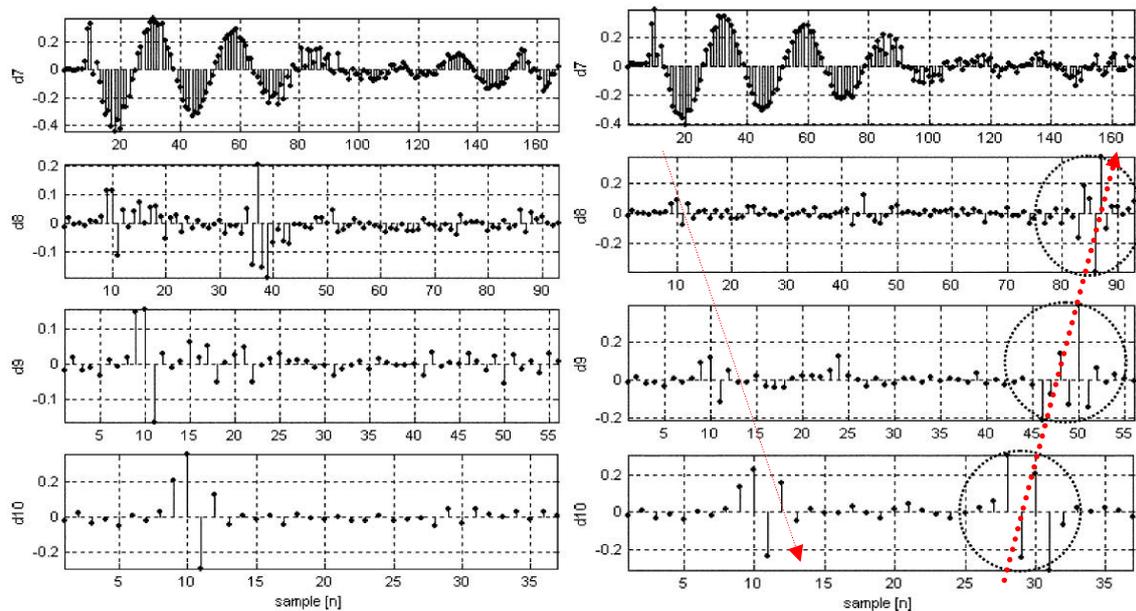
Tal y como se estudia al final del capítulo 3, la DWT es una versión discreta de la CWT. Es decir, en vez de calcular el resultado de la WT en tantas frecuencias como el usuario crea necesario dentro de la banda de frecuencia a analizar, la DWT calcula el resultado de la WT tan solo en un conjunto de frecuencias predefinidas siguiendo una escala diádica. La DWT se debe aplicar de tal forma que los cálculos se realicen a las frecuencias en las que se encuentra el armónico vinculado a la avería durante el proceso transitorio analizado. Si esto es así, los coeficientes resultado de calcular la DWT deben aumentar con la presencia del armónico, permitiendo de esta forma detectar el fallo. En términos generales, tal y como se explica detalladamente en el capítulo 3, el resultado de la DWT en un punto del plano tiempo-frecuencia tendrá un valor elevado si en la señal analizada existe alguna componente cuya frecuencia tenga una evolución temporal que pase por ese punto del plano.

Este es el procedimiento que se plantea en [30]. Más concretamente, se aplica la DWT a la corriente de arranque de dos motores de inducción: el primero sano y el segundo con barras rotas. La DWT se calcula en cada uno de los instantes de tiempo en los que la corriente ha sido muestreada y a unas determinadas frecuencias dictadas por la escala diádica, de tal forma que algunas de estas frecuencias se encuentran entre 0 y 50 Hz, que es, tal y como se ve en la Fig. 2.8, la banda de frecuencia que cubre el LSH durante el arranque. Efectivamente, los coeficientes de detalle  $d_{10}$ ,  $d_9$  y  $d_8$  se encuentran asociados a frecuencias  $f_{d_{10}}$ ,  $f_{d_9}$ , y  $f_{d_8}$  tales que  $0 < f_{d_{10}} < f_{d_9} < f_{d_8} < 50$  Hz, de tal forma que, si el LSH se encuentra presente en la corriente, dichos coeficientes deben aumentar en determinados instantes de tiempo. Teniendo en cuenta el típico patrón en V que describe el LSH durante el arranque mostrado en la Fig. 2.8, los coeficientes de cada uno de los detalles deben incrementarse alrededor de dos instantes: uno durante la primera mitad del arranque y otro durante la segunda, exactamente en los dos instantes en los que el LSH toma la frecuencia asociada al detalle correspondiente.

Al comparar los resultados de motor sano y motor averiado en la Fig. 2.9 izquierda y derecha respectivamente (reproducciones de las figuras 9 y 10 de [30] respectivamente), se observa que los coeficientes de detalle  $d_{10}$ ,  $d_9$  y  $d_8$  aumentan en instantes correspondientes a la parte final del transitorio para el caso de la figura de la derecha, indicando la presencia del LSH. A medida que la frecuencia del detalle considerado es mayor, los instantes en los que aumentan los coeficientes se encuentran más hacia el final, lo cual corresponde a la segunda parte de la evolución en V del LSH (la cual ha sido marcada por encima de la figura original con una flecha roja gruesa en sentido ascendente).

Sin embargo, en los primeros coeficientes de cada detalle debería haber también un incremento, (siguiendo la flecha roja en sentido descendente y de menor grosor). Probablemente no se aumenta el valor debido a que la wavelet utilizada, una

Daubechies de orden 8 (Db8), no resulta adecuada para filtrar el transitorio electromagnético (TEM), presente al principio del arranque. Al utilizar esta wavelet, que tampoco es capaz de filtrar bien el FC, los autores se ven obligados a extraerlo previamente de la corriente a analizar, para que no empañe los resultados. Esta operación la realizan utilizando un algoritmo de extracción basado en un criterio de error por mínimos cuadrados. En trabajos de investigación sucesivos se observa como, si la wavelet utilizada es la adecuada, no hace falta realizar esta operación de extracción del FC.



**Fig. 2. 9 Reproducciones de las figuras 9 (izquierda) y 10 (derecha) de [30]: coeficientes de la DWT correspondientes a los niveles de descomposición 7, 8, 9 y 10 de la corriente de un motor sano (izquierda) y un motor con una barra rota (derecha).**

### Diagnóstico mediante las señales de aproximación y detalle

Aunque en [30] se demuestra que los coeficientes obtenidos al aplicar la DWT pueden utilizarse para detectar la presencia de un componente de la señal, el verdadero potencial de la DWT está en utilizar estos coeficientes para calcular las llamadas señales de aproximación y detalle. Tal y como ya se ha avanzado, los coeficientes de un determinado detalle de la DWT que están asociados a una determinada frecuencia se pueden utilizar para calcular una subseñal asociada a una banda de frecuencia alrededor de la frecuencia asociada a los coeficientes del detalle correspondiente. De esta forma se obtienen un conjunto de subseñales, llamadas aproximación y detalles, que cubren todo el espectro, de tal forma que sumándolas se recupera la señal original. En otras palabras, la DWT permite dividir la señal en subseñales, cada una conteniendo las trayectorias de las componentes en su correspondiente banda de frecuencia.

En [31] se plantea dividir la corriente de arranque del motor de inducción en un número de señales de aproximación y detalle de tal forma que cada señal esté asociada a una banda de frecuencia diferente. Concretamente, se obtiene la señal de aproximación a8 y las señales de detalle d8 y d7 de tal forma que las bandas de frecuencia que cubre cada una de ellas son las sucesivas bandas que atraviesa el LSH durante el arranque:

- Señal de aproximación a8: 0 – 9.76 Hz.

- Señal de detalle d8: 9.76 – 19.53 Hz.
- Señal de detalle d7: 19.53 – 39.06 Hz.

En la Fig. 2.10 (reproducción de las figuras 2a (superior) y 3a (inferior) de [31]), se observa la señal original en la parte superior seguida de la señal de aproximación a8 y las señales de detalle d8 y de7 para los casos de un motor de inducción sano (superior) y un motor de inducción con dos barras rotas (inferior). En la parte superior de la figura (motor sano), en las señales que cubren las bandas que cubre el LSH durante el arranque del motor, no se aprecia nada, no hay ninguna componente. Sin embargo, en la parte inferior de la figura (motor con dos barras rotas), se pueden ver, en el caso de a8, unas oscilaciones en el centro del transitorio, en el caso de d8, unas oscilaciones a izquierda y derecha de dicho centro y en el caso de d7 unas oscilaciones al principio y al final del transitorio. Estas oscilaciones son creadas por la presencia del LSH. Al principio se encuentra en d7, después, al bajar su frecuencia aparece en d8 y a mitad del transitorio se encuentra en a8. Seguidamente hace el trayecto inverso. Como las señales en la figura se han ordenado de abajo a arriba de mayor a menor frecuencia, el típico patrón en V de la Fig. 2.8 aparece aquí invertido.

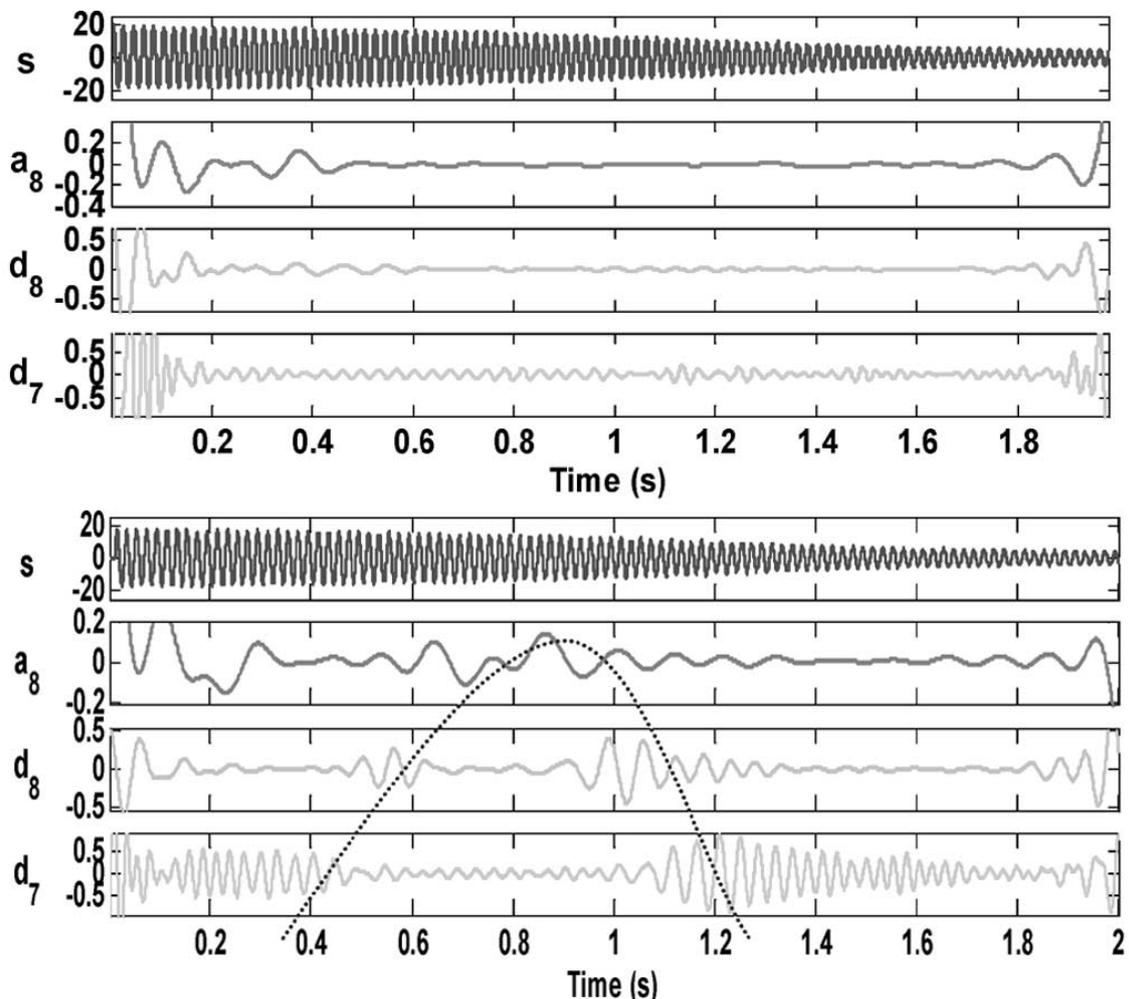


Fig. 2. 10 Reproducciones de las figuras 2a (superior) y 3a (inferior) de [31]: corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (superior) y con dos barras rotas (inferior) seguidas de sus respectivas descomposiciones en las señales de aproximación a8 y los detalles d8 y d7.

En este artículo se compara además la técnica de diagnóstico propuesta con la FFT, analizando las condiciones de funcionamiento en los que la FFT presenta

problemas o no consigue realizar el diagnóstico (máquina descargada, con fluctuación periódica en la tensión de alimentación, con par periódico fluctuante), viendo como la DWT, mediante la información obtenida con el análisis transitorio, consigue diagnosticar en las situaciones difíciles sin producir falsos diagnósticos.

En [32] se amplía el trabajo realizado en [31] estudiando la optimización de los parámetros que se deben fijar para calcular la DWT. En primer lugar se analiza la influencia de la frecuencia de muestreo de la corriente sobre las bandas de frecuencia asociadas a las señales de aproximación y detalle. En segundo lugar se estudia el tipo de wavelet a elegir para obtener la transformada, concluyendo que las wavelets de Daubechies son una buena elección, siempre y cuando su orden sea elevado (40 por ejemplo). Finalmente se estudia en cuántos niveles de detalle se debe dividir la corriente original.

En [33] se realiza un profundo análisis del LSH y su evolución durante el arranque, desarrollando un método que permite su simulación. El resultado de la simulación para un motor de inducción determinado se muestra en la Fig. 2.11 (reproducción de la Fig. 2 de [33]). La técnica de diagnóstico propuesta consiste en, utilizando la DWT, extraer el LSH de la corriente de arranque y compararlo con el resultado de la simulación: si la comparación da un resultado positivo, entonces es que efectivamente el LSH se encontraba presente en la corriente y el motor tiene una barra rota.

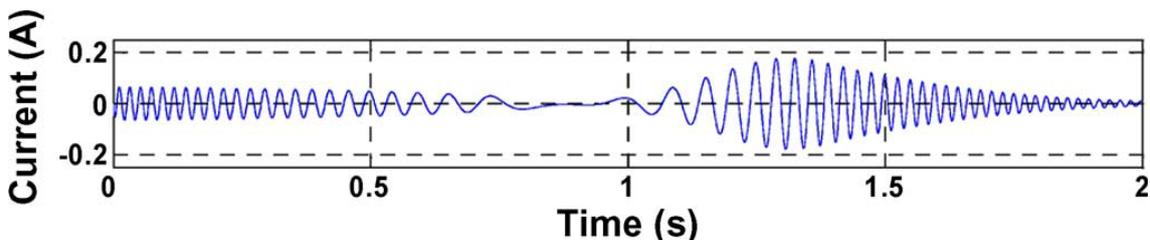


Fig. 2. 11 Reproducción de la figura 2 de [33]: simulación de la evolución del LSH durante el arranque.

Para extraer el LSH se utiliza la DWT, descomponiendo la señal de arranque en un número de niveles de tal forma que la señal de aproximación cubre la banda de frecuencia 0 – 39 Hz, que es prácticamente la banda de frecuencia que cubre el LSH durante el arranque: 0 – 50 HZ. Teniendo en cuenta que en dicha banda la única componente que tiene una presencia significativa es el LSH (a parte del TEM al principio del arranque y el principio de algún armónico principal de ranura), obtener la señal de aproximación supone extraer el LSH de la corriente de arranque (si es que el LSH está presente en la corriente). Si el motor está en estado sano, el resultado será una señal de aproximación sin casi ningún contenido. Pero si el motor tiene alguna barra rota, la señal de aproximación contendrá al LSH casi en su totalidad, pareciéndose mucho el resultado al mostrado en la Fig. 2.11.

En la Fig. 2.12 (reproducción de las figuras 4 y 5 de [33]), se muestran trazadas en rojo las corrientes de arranque de un motor de inducción sano (superior) y de un motor de inducción con una barra rota (inferior), así como sus correspondientes señales de aproximación de sexto nivel trazadas en azul. En el caso de la señal de aproximación del motor sano, tan solo se observan unas oscilaciones al principio del arranque provocadas por el TEM. En el caso de la señal del motor con una barra rota, la señal de aproximación contiene al LSH casi en su totalidad, lo cual viene confirmado por la

comparación con la Fig. 2.11, siendo ambas señales muy parecidas. A parte del diagnóstico cualitativo por comparación, los autores proponen un diagnóstico cuantitativo basado en el cálculo de la energía de la señal de aproximación en relación a la energía de la corriente completa.

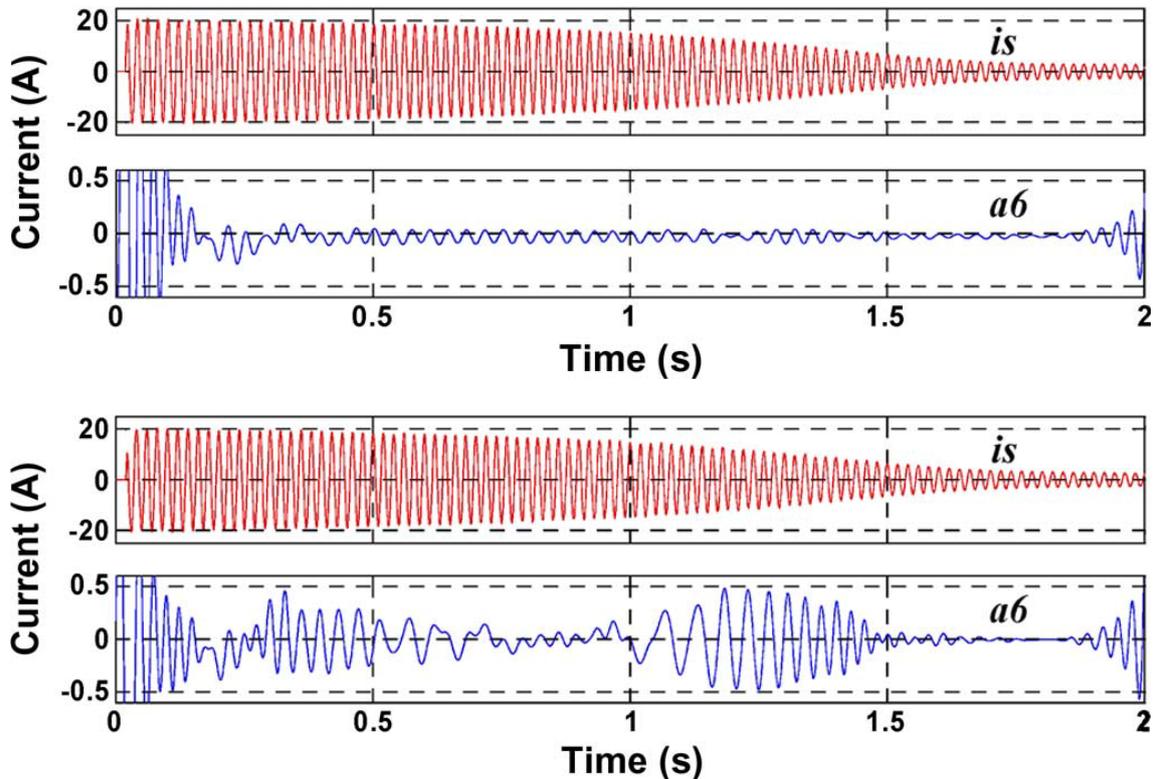


Fig. 2. 12 Reproducciones de las figuras 4 (superior) y 5 (inferior) de [33]: corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (superior) y con dos barras rotas (inferior) seguidas de sus respectivas señales de aproximación  $a_6$ .

En [34] la metodología de diagnóstico basada en el uso de las señales de aproximación y detalle generadas con la DWT se expande, de su aplicación a la detección de barras rotas, a la detección de excentricidad mixta, analizando señales provenientes tanto de ensayos experimentales como de simulación mediante un modelo de elementos finitos, estudiando motores con distintos grados de excentricidad. Entre otros aspectos, se estudia la evolución durante un arranque de las dos principales componentes introducidas por una excentricidad mixta. Al igual que en la Fig. 2.8 se observa como el LSH durante un arranque evoluciona de 50 a 0 y vuelta a 50 Hz, las dos principales componentes de una excentricidad mixta evolucionan de 50 a 25 Hz y de 50 a 75 Hz en motores de 2 pares de polos. Tal y como se observa en el artículo, estas dos componentes consiguen ser extraídas mediante la DWT, de igual forma a como se hacía con el LSH.

En [29] la metodología se generaliza de forma teórica a la detección en motores de inducción de cualquier tipo de avería que introduzca componentes en la corriente dependientes del deslizamiento. La base de la metodología es la extracción de partes de las evoluciones de las componentes de avería mediante la división de la corriente transitoria capturada en un conjunto de aproximaciones y detalles asociadas a distintas bandas de frecuencia. En particular se analizan los resultados de ensayos experimentales con motores de inducción con barras rotas y excentricidad mixta, analizando tanto arranques como paradas mediante la inversión del sentido de giro. Se presenta una guía

para la fácil aplicación de la metodología dividida en cuatro pasos: captura de la corriente transitoria (con una frecuencia de muestreo que permita una división en bandas adecuada para el diagnóstico), aplicación de la DWT (atendiendo en especial a la wavelet madre elegida y los niveles de descomposición), análisis de las señales de aproximación y detalle (detectando en una primera etapa cualitativa las evoluciones de las componentes y computando su energía en una segunda etapa cuantitativa) y diagnóstico (decisión final en función de los resultados obtenidos).

En la Fig. 2.13 se observan la descomposición en la señal de aproximación  $a_5$  y los detalles  $d_5$  y  $d_4$  de las corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (superior) y con excentricidad mixta (inferior). En la parte inferior se observa cómo la presencia de las dos componentes introducidas por la excentricidad mixta aparecen en las señales de aproximación  $d_4$  (primera componente evolucionando de 50 a 75 Hz) y  $a_5$  (segunda componente evolucionando de 50 a 25 Hz).

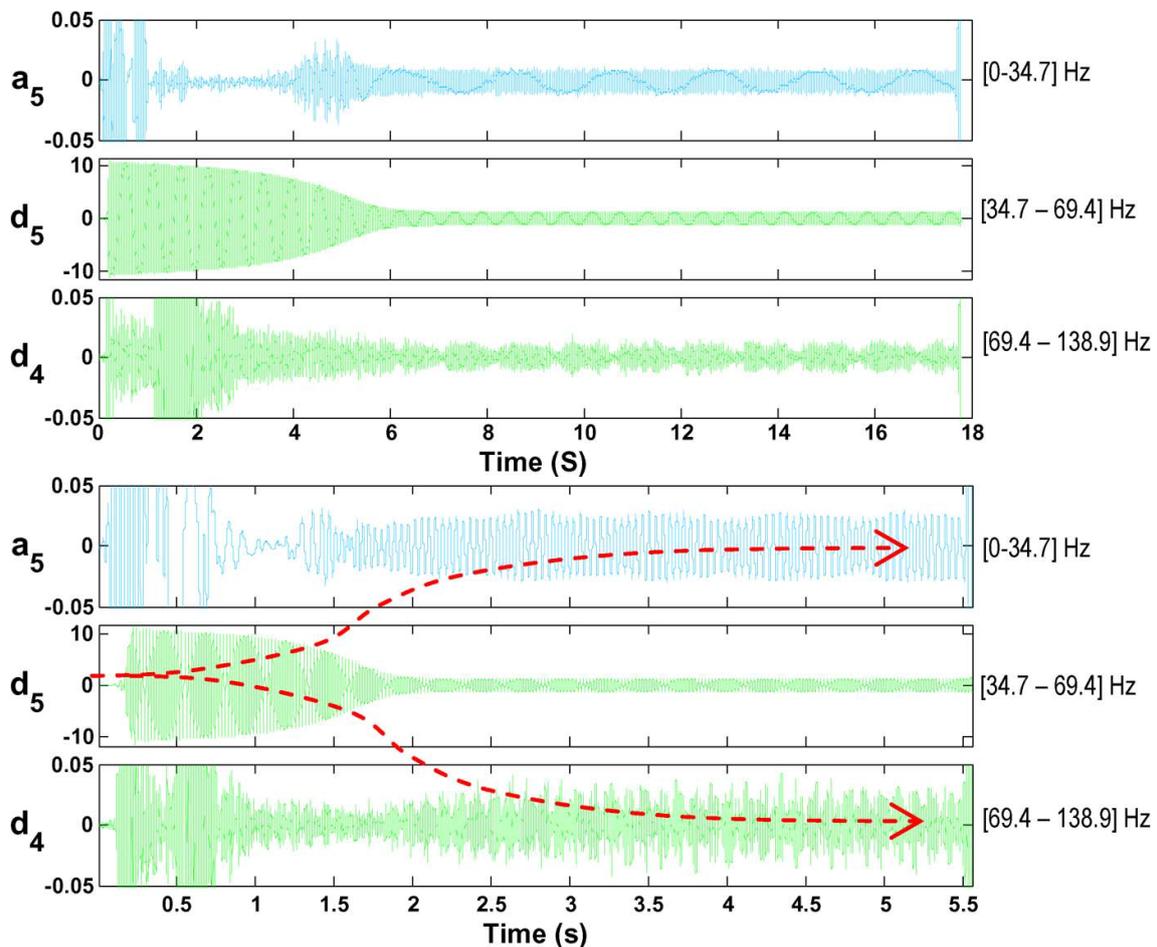


Fig. 2. 13 Reproducciones de las figuras 12 (superior) y 13 (inferior) de [29]: descomposición en la señal de aproximación  $a_5$  y los detalles  $d_5$  y  $d_4$  de las corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (superior) y con excentricidad mixta (inferior).

La mayoría de los artículos de diagnóstico de máquinas eléctricas se centran en presentar una técnica y validar su funcionamiento mediante la detección de una única avería. En algunos casos se valida la capacidad de la técnica para detectar más de una avería, pero no de forma simultánea. Sin embargo, en un contexto industrial pueden aparecer múltiples averías en una misma máquina al mismo tiempo. Así pues, en [35] se analiza la capacidad de la metodología presentada en [29] para detectar fallos dobles:

roturas de barras combinadas con excentricidad mixta y roturas de barras combinadas con cortocircuitos entre espiras o entre bobinas.

En la Fig. 2.14 (reproducción de la Fig. 14 de [35]), se analiza la corriente estatórica de arranque y posterior permanente de un motor de inducción con una barra rota y un cortocircuito entre bobinas (habiendo 8 bobinas por fase distribuidas en dos ramas en paralelo con 4 bobinas en serie por rama). La descomposición de la corriente mediante la DWT muestra el patrón de barra rota en la parte superior así como un incremento de energía en la parte inferior a lo largo de la trayectoria del PSH (en especial en las señales de detalle 2, 3 y 4). Como cada avería produce un efecto en una señal de descomposición distinta, las averías pueden ser detectadas de forma conjunta a través de un único análisis.

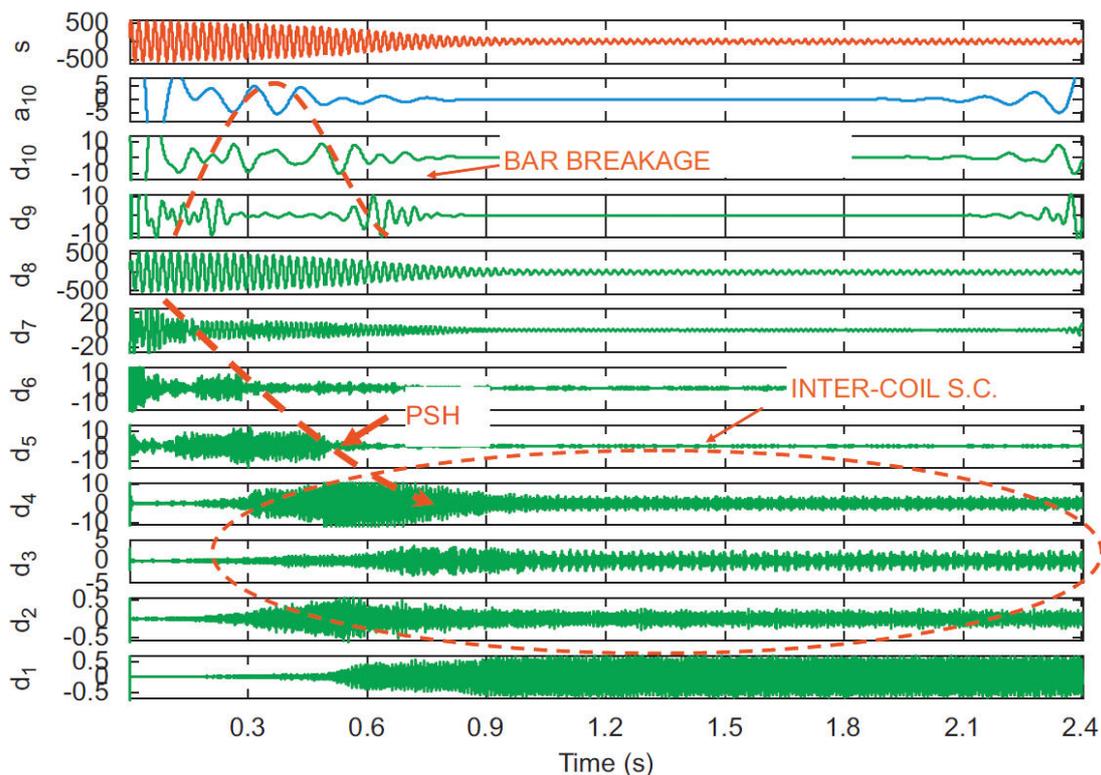
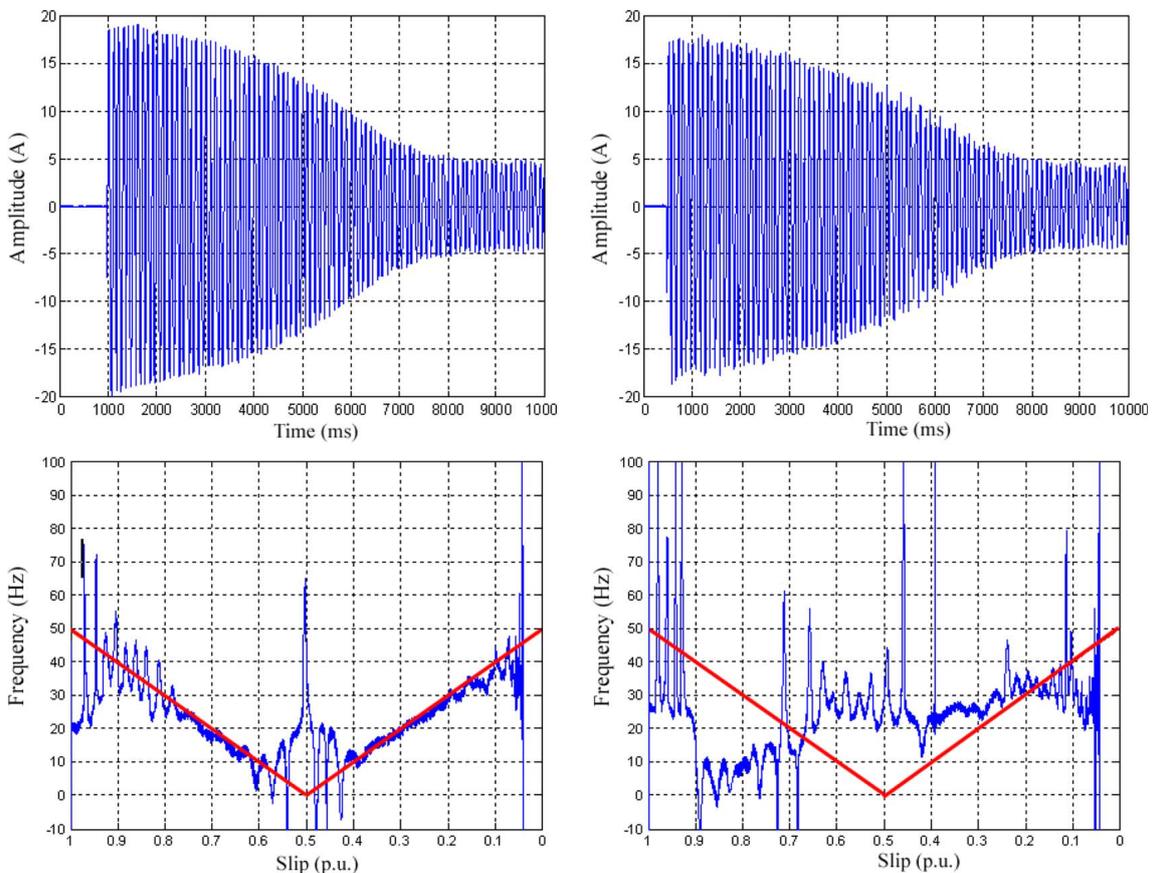


Fig. 2. 14 Reproducción de la Fig. 14 de [35]: descomposición mediante la DWT de las corrientes de fase de un motor de inducción con una barra rota y un cortocircuito entre bobinas del estator.

Otros trabajos de investigación en los que se utiliza la DWT para el diagnóstico son [36], [37] y [38]. Tomando como base los artículos previamente comentados, en [36] se propone un algoritmo online automático para la detección de barras rotas en motores de inducción. La DWT se ha utilizado para diagnosticar otro tipo de máquinas: en [37] se utiliza para analizar motores sincrónicos de imanes permanentes y en [38] se diagnostica el estado de actuadores hidráulicos.

Una vez se ha extraído el LSH de la corriente de arranque mediante la señal de aproximación de la DWT tal y como se explica en [33], se puede dar un paso más para tratar de obtener la evolución temporal de su frecuencia. Para ello, en [39] se propone utilizar la frecuencia instantánea de la señal, definida en [40] como la derivada de la fase de la correspondiente señal analítica. Se demuestra que, en el caso de señales mono-componentes, esta magnitud describe la evolución temporal de la frecuencia de la

componente. Así pues, una vez extraído el LSH, tan solo hay que calcular la frecuencia instantánea de la señal de aproximación para obtener la evolución temporal de la frecuencia del LSH. En la Fig. 2.15 (reproducción de la Fig. 16 de [39]), se representan las corrientes de arranque de dos motores de inducción con dos barras rotas (superior izquierda) y sano (superior derecha), así como la frecuencia instantánea (inferior azul) de las respectivas señales de aproximación de las dos corrientes de la parte superior de la figura. Las frecuencias instantáneas obtenidas (inferior azul), se comparan con la evolución teórica de la frecuencia del LSH durante el arranque (inferior rojo), representando ambas con respecto al deslizamiento. La evolución trazada en rojo es análoga a la trazada en la Fig. 2.8, pero en vez de representarla con respecto al tiempo se representa con respecto al deslizamiento, de tal forma que la evolución teórica pasa a ser una V perfecta. En el caso del motor averiado, la frecuencia instantánea obtenida sigue perfectamente la evolución teórica, lo cual indica la presencia del LSH.



**Fig. 2. 15 Reproducción de la Fig. 16 de [39]: corrientes de arranque de dos motores de inducción con dos barras rotas (superior izquierda) y sano (superior derecha), frecuencia instantánea (inferior azul) de las respectivas señales de aproximación comparada con la evolución teórica de la frecuencia del LSH durante el arranque (inferior rojo) representadas ambas respecto al deslizamiento.**

El método puede presentar dos inconvenientes. En primer lugar, tal y como está planteada la extracción del LSH con la señal de aproximación, la evolución de su frecuencia obtenida se restringe a la banda de frecuencia entre 0 y 39 Hz (que es la cubierta por la señal de aproximación). Así pues, no se logra obtener la evolución completa. Esto se observa en la parte inferior izquierda de la Fig. 2.15, en la que la frecuencia instantánea obtenida no corresponde bien con la frecuencia teórica del LSH al principio y al final del arranque. Por otra parte, hay que tener en cuenta que al calcular la frecuencia instantánea de una señal multi-componente, esta da como resultado en cada instante de tiempo la frecuencia de la componente de mayor amplitud.

Por lo tanto, si en la señal de aproximación se introduce otra componente importante, se puede ver alterado el resultado.

El trabajo de investigación [41], en vez de aplicar la DWT directamente a la corriente del estator del motor de inducción, se propone analizar los valores instantáneos de la magnitud al cuadrado, tanto de la corriente, como del vector espacial de corriente (optando finalmente por la primera señal, pues ambas dan buenos resultados pero en el primer caso se necesita un único sensor). En el artículo se aborda el diagnóstico de barras rotas en un motor funcionando en régimen permanente. Esta avería introduce componentes en las señales analizadas alrededor de 0 Hz, análogas a las componentes que introduce en la envolvente de la corriente del estator (al fin y al cabo, el valor instantáneo de la magnitud de la corriente es precisamente la envolvente de dicha corriente). La DWT permite obtener una subseñal que abarca una banda de frecuencia con límite inferior 0 Hz. Análogamente a técnicas anteriores centradas en otras subseñales, la presencia de la avería produce un aumento en la energía de dicha subseñal, permitiendo su detección.

Se diagnostica el motor funcionando en régimen permanente mediante una técnica diseñada para analizar señales transitorias. Los autores justifican el uso de la DWT en vez de la FFT argumentando que como la subseñal abarca una banda suficientemente amplia, no es necesario conocer el deslizamiento como sucede al utilizar la FFT, pues en cualquier caso el armónico de avería se encontrará dentro de dicha banda y su presencia provocará el aumento de energía mencionado. Esto no es del todo correcto pues la estimación del deslizamiento al utilizar la FFT sirve para localizar de forma precisa el armónico y de esta forma poder distinguirlo de otros armónicos similares producidos por otras causas, evitando falsos diagnósticos. Pero con la DWT, si existe un armónico similar comprendido en la banda de frecuencia asociada a la subseñal, producirá un aumento de la energía utilizada como índice conduciendo también a un falso diagnóstico, igual que sucede con la FFT al no obtener el deslizamiento. Este es de hecho un inconveniente inherente a la DWT: al observar el incremento en la energía asociada a una subseñal no se sabe con precisión cuál es la componente que provoca dicho incremento. Cuanto mayor es la banda de frecuencia abarcada por la subseñal, mayor es la imprecisión. Es por ello que muchos autores proponen diagnosticar utilizando varias subseñales de forma conjunta, pues esto permite tratar de ver una evolución de la componente de avería y no solo el simple aumento de la energía en una banda de frecuencia.

Seguidamente, en [42] y [43] se profundiza en la técnica propuesta en [41], analizando fallos incipientes en el rotor y el estator de motores de inducción de rotor bobinado. Las asimetrías en ambos devanados se han provocado insertando resistencias en serie con las respectivas fases. Al contrario del trabajado presentado en [41], en estos dos trabajos se analizan regímenes transitorios provocados por fluctuaciones de carga. Estas fluctuaciones producen la aparición de una componente de continua de amplitud variable, lo cual produce un aumento del índice de cuantificación: la energía de la subseñal. Para evitar un falso diagnóstico, se propone utilizar un lazo cerrado de fase numérico que permite eliminar la componente de continua antes de aplicar la DWT, lo cual por otra parte produce un aumento en el tiempo de cálculo. En el caso del fallo estático, se propone además el diagnóstico a través del análisis de la corriente del rotor.

## Capítulo 2.

Otro de los problemas que puede presentar la DWT es que las bandas de frecuencia analizadas, cada una asociada a una subseñal diferente, vienen impuestas por la frecuencia de muestreo de la corriente capturada y el número de niveles de descomposición seleccionados. Por tanto, el usuario no tiene total libertad para escoger las bandas que quiere analizar. Esta libertad se consigue utilizando transformadas continuas (comentadas en los siguientes apartados) pero a costa de pagar un doble precio: el tiempo de cálculo aumenta dramáticamente y el resultado obtenido es una matriz en vez de un conjunto de subseñales, la cual es bastante más difícil de manipular para obtener un índice de cuantificación.

Algunos autores resuelven el problema de la libertad para escoger la banda de frecuencia analizada utilizando los paquetes wavelet, que permiten divisiones en un mayor número de bandas que la versión original de la DWT. Otros autores, como es el caso de [44] – [49], proponen aplicar un procesado de la señal a analizar de tal forma que las componentes de avería se trasladen en el dominio de frecuencia pasando de su ubicación original a estar contenidas dentro de una de las bandas cuyo análisis impone la DWT. Más concretamente, se propone multiplicar la corriente capturada por una exponencial compleja (como es sabido, la multiplicación de una señal en el dominio temporal por una exponencial compleja provoca una traslación en el dominio de frecuencia dictada por el exponente de la exponencial). Este método, bautizado como deslizamiento en frecuencia (frequency sliding), ha sido aplicado para la detección de asimetrías tanto rotóricas [44], [45] como estáticas [46] en máquinas de inducción doblemente alimentadas. Con respecto a la cuantificación, los autores proponen calcular la energía de la subseñal analizada, pero en vez de dividirla por la energía total de la corriente la dividen por el número de muestras capturadas, obteniendo por tanto un índice que no es independiente de las características de la máquina y del ensayo pues no está normalizado.

La investigación de los resultados obtenidos al aplicar el deslizamiento en frecuencia continúa en [47], [48] y [49]. En [47] continúan analizándose las asimetrías rotóricas en máquinas de inducción doblemente alimentadas, pero en este caso el rotor es alimentado mediante un convertidor estático con el objetivo de controlar la potencia activa y reactiva que el generador inyecta a la red eléctrica. Los autores concluyen que es mejor analizar las tensiones en vez de las corrientes. Por otra parte, en [48] se aplica la metodología a la detección de barras rotas en motores de inducción. Finalmente, en [49] profundizan en el diagnóstico de asimetrías rotóricas a través del análisis de la corriente del estator. Entre otros aspectos, analizan dos subseñales, cada una vinculada a una componente de avería, sumando sus energías y, esta vez sí, normalizando por la energía de la componente fundamental. Los resultados obtenidos a lo largo de estos trabajos publicados se condensan en [50].

El potencial de la DWT todavía no se ha terminado de explotar. Es por ello que continúan realizándose investigaciones al respecto, como muestran los trabajos recientemente publicados en [51], [52], [53] y [54]. En [51] se plantea un método para diagnosticar cortocircuitos entre espiras en motores de inducción a través del análisis de las tres corrientes del estator. El método se valida utilizando corrientes obtenidas mediante simulación. En [52], con el objetivo de prescindir de un experto que analice los resultados de aplicar la DWT, se propone un algoritmo para el diagnóstico automático de roturas de barras. Partiendo de los resultados obtenidos aplicando la metodología presentada en [29], se procesan las subseñales obtenidas al emplear la

DWT para generar imágenes en 2D que contienen el característico patrón en V del LSH, pero invertido. La subsiguiente aplicación de la transformada de escala permite obtener un resultado independiente de las características de la máquina. El diagnóstico final se obtiene correlacionando la matriz resultado con matrices características del estado sano y del averiado. Por otra parte, en [53] se comparan los resultados de la FFT aplicada a corrientes en permanente con los resultados de la DWT aplicada a corrientes transitorias. Además, se propone el uso de los paquetes wavelet: una evolución de la DWT que permite una mayor libertad al descomponer la corriente analizada en señales de aproximación y detalle. Las averías analizadas son roturas de barras, roturas de anillos de cortocircuito y la pérdida de una fase del estator. Finalmente, en un artículo publicado recientemente [54], se propone el uso de la DWT para la detección de barras rotas en los devanados amortiguadores de generadores sincrónicos.

### **2.3.4.- Short Time Fourier Transform.**

La STFT es la más simple de las herramientas matemáticas que trata de obtener la evolución temporal de la frecuencia de las componentes de una corriente. En esencia, así como la FFT obtiene la distribución de energía de la señal en el dominio de la frecuencia, la STFT trata de obtener la distribución de energía de la señal en el plano tiempo-frecuencia. En otras palabras, la FFT indica, para cada frecuencia del espectro, la densidad de energía de la señal en dicha frecuencia: si es elevada, la señal tiene una componente en dicha frecuencia, si es insignificante, la señal no tiene ninguna componente en dicha frecuencia. Análogamente, la STFT indica, para cada punto del plano, la densidad de energía de la señal en dicho punto, dando un resultado elevado si existe alguna componente de la señal que en el instante de tiempo del punto analizado toma la frecuencia del punto analizado. O lo que es lo mismo, el resultado es elevado si la evolución temporal de la frecuencia de una componente pasa por el punto del plano analizado. Representando en el plano tiempo-frecuencia la densidad de energía en cada uno de los puntos del plano obtenida mediante la STFT se obtienen las evoluciones temporales de las frecuencias de las componentes. Este gráfico se denomina espectrograma.

Al igual que en la FFT se tiene una resolución frecuencial que indica la capacidad para distinguir dos componentes muy juntas en el espectro, en la STFT se tienen dos resoluciones: una en el tiempo que indica la capacidad para distinguir dos componentes muy próximas en el tiempo, y otra en frecuencia que indica la capacidad para distinguir dos componentes muy próximas en frecuencia.

Sin embargo, así como la resolución en frecuencia de la FFT se puede aumentar indefinidamente con el único problema de tener que capturar un régimen permanente de más larga duración, si se aumenta la resolución en frecuencia de la STFT, su resolución en el tiempo disminuye proporcionalmente. Este es su mayor inconveniente: el usuario de la transformada debe escoger un compromiso entre la resolución en frecuencia y la resolución en el tiempo. Además, dicho compromiso es constante para todos los puntos del plano. Es decir, no se puede ajustar a un valor en una determinada zona del plano y cambiar al analizar otra: las resoluciones son por tanto constantes e independientes del punto analizado, al igual que la resolución en frecuencia de la FFT no depende de la frecuencia analizada. En el capítulo 3 se explica de forma más extensa y detallada el funcionamiento de esta transformada, con especial enfoque para la comprensión del trabajo de investigación realizado en la presente tesis.

## Capítulo 2.

Existen pocos trabajos de investigación en los que se haya planteado el uso de la STFT para detectar las evoluciones de las componentes provocadas por averías. En [55] se utiliza el espectrograma para obtener la evolución de las frecuencias de los SH durante una variación del par de carga aplicado a un motor de inducción con 4 barras rotas. El resultado se observa en la Fig. 2.16 (reproducción de la Fig. 6 de [55]). Paralelamente al FC (la componente de mayor amplitud) se encuentran los SH, cuyas frecuencias se separan en el momento en el que aumenta el par de carga, aumentando también su amplitud. Se observa un cuarto armónico producido probablemente por la asimetría rotórica.

Los autores desestiman el uso de esta herramienta argumentando un elevado tiempo de computación. A lo largo de la tesis se verá como dicho tiempo puede reducirse considerablemente, aunque no resulta crítico en el diagnóstico de fallos de lenta progresión como la rotura de barras o la excentricidad. En cualquier caso, en el capítulo 4 también se analizará cómo esta transformada es incapaz de obtener las evoluciones completas de las componentes de avería, siendo necesario utilizar transformadas más complejas como el MP o la AGT, en las cuales se basa la metodología de diagnóstico desarrollada en la presente tesis.

En [55] se plantea también el diagnóstico de cortocircuitos entre espiras del devanado del estator, comparando el uso del espectrograma con la metodología basada en el uso de las señales de aproximación y detalle presentada en artículos anteriores: la STFT da una mayor información acerca de las componentes presentes en la señal y su evolución pero a costa de un mayor tiempo de computación y una mayor complejidad tanto en el cálculo como en la cuantificación de la avería.

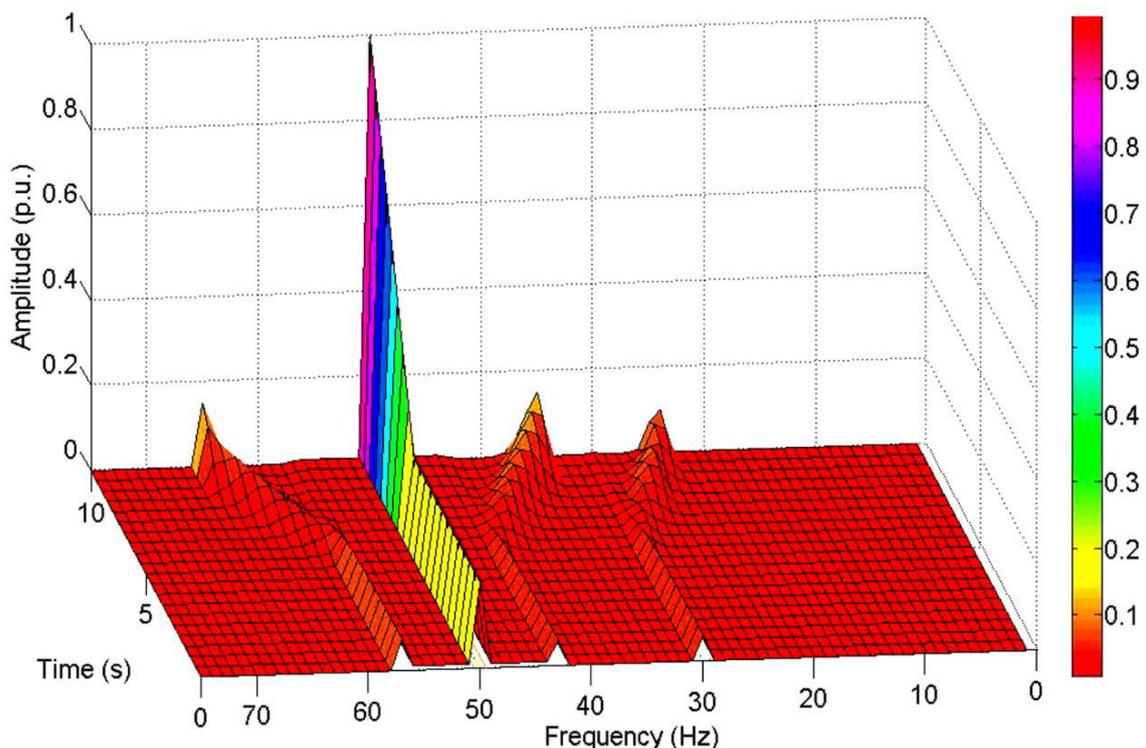


Fig. 2. 16 Reproducción de la Fig. 6 de [55]: espectrograma de la corriente estática de un motor de inducción con cuatro barras rotas durante un aumento del par de carga.

Por otra parte, en [28], tal y como se comentó previamente al final de la sección 2.2.3, se propone un estimador del par electromagnético para detectar falta de lubricación en una caja multiplicadora: la amplitud de los armónicos introducidos por la caja en la componente de alterna del par estimado aumenta en presencia del fallo. El fallo es diagnosticado en régimen permanente utilizando la FFT. Por otra parte, durante dos ensayos de aceleración y deceleración se utilizan tanto la STFT como el cálculo de las crestas del espectrograma (spectrogram ridges) para captar la evolución de las componentes introducidas por la caja. El cálculo de las crestas del espectrograma es un algoritmo que, en vez de calcular el espectrograma en un conjunto denso de puntos del plano (a lo largo de los instantes muestreados de la señal analizada y cubriendo una determinada banda de frecuencia), trata de localizar mediante un proceso iterativo aquellos puntos del plano en los que el cálculo de la STFT da un resultado elevado y obtener dicho resultado. Si funciona correctamente, el resultado debe mostrar las evoluciones de las principales componentes de la señal. Sin embargo, en la práctica presenta problemas para distinguir las evoluciones de componentes muy cercanas, mostrando en general como máximo la evolución de las dos componentes principales. Efectivamente, al analizar la componente de alterna del par mediante la STFT, se observan las evoluciones de las frecuencias de rotación del piñón y la rueda, así como componentes con frecuencias múltiplo de las anteriores. Sin embargo, el resultado de calcular las crestas del espectrograma muestra tan solo la evolución de la frecuencia de rotación de la rueda.

Finalmente, en [56] se utiliza la STFT para detectar fallos en un cable de acero acoplado a un motor de inducción mediante el análisis de la corriente y del par medido del motor. Básicamente, en el momento en el que la parte del cable dañada pasa por la polea, introduce en las señales mencionadas incrementos de energía localizados en determinadas zonas del plano tiempo-frecuencia. Dichos incrementos son detectados mediante el análisis proporcionado por la STFT, permitiendo así el diagnóstico.

### **2.3.5.- Continuous Wavelet Transform.**

La CWT y la STFT son transformadas muy parecidas. Ambas proporcionan, para cada punto del plano, una medida de la densidad de energía de la señal analizada en dicho punto. La mayor diferencia entre ambas es que, así como la relación entre la resolución en los dominios del tiempo y de la frecuencia es independiente del punto analizado en el caso de la STFT, en el caso de la CWT esta relación varía con la frecuencia analizada: la resolución en frecuencia es mayor a bajas frecuencias disminuyendo a medida que la frecuencia analizada aumenta y la resolución en el tiempo es menor a bajas frecuencias aumentando a medida que la frecuencia analizada aumenta.

La representación de la densidad de energía obtenida mediante la CWT se llama escalograma, análogamente al espectrograma de la STFT, pero partiendo de la palabra escala, pues en un origen el cálculo de la CWT se realiza para un conjunto de escalas, en vez de para un conjunto de frecuencias, aunque luego sea mucho más útil representar los resultados en el plano tiempo-frecuencia en vez de en el plano tiempo-escala.

En vez de calcular la CWT en la forma habitual se pueden calcular las llamadas “crestas wavelets” (wavelet ridges). Se trata de un algoritmo análogo a las crestas del espectrograma: en vez de calcular el escalograma en un conjunto denso de puntos del

## Capítulo 2.

plano (a lo largo de los instantes muestreados de la señal analizada y cubriendo una determinada banda de frecuencia), trata de localizar de forma iterativa aquellos puntos del plano en los que el cálculo de la WT da un resultado elevado y obtener dicho resultado. Si funciona correctamente, las crestas wavelet deben mostrar las evoluciones de las principales componentes de la señal. Sin embargo, las crestas wavelets presentan problema para distinguir las evoluciones de componentes muy cercanas, mostrando en general como máximo la evolución de dos componentes de la señal.

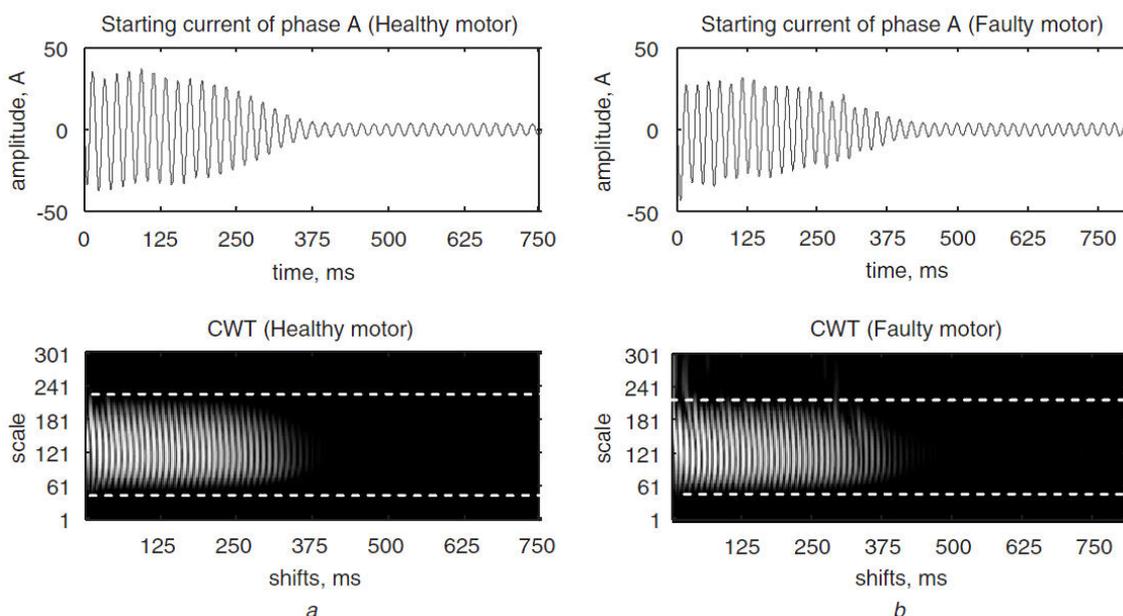
Tal y como se analiza con detalle en el capítulo 3, esta transformada es adecuada para capturar la evolución temporal de la frecuencia de chirps hiperbólicos, y aunque puede dar buenos resultados al analizar corrientes con fines de diagnóstico, no resulta ideal, siendo más conveniente para obtener la evolución completa de las frecuencias el uso de transformadas como el MP o la AGT, lo cual se analiza a lo largo de la tesis y en especial en el capítulo 4.

Uno de los primeros trabajos en el que se aplica la WT al campo de las máquinas eléctricas [57] propone utilizar el algoritmo de las crestas aplicado tanto a la STFT como a la WT para, a partir del análisis de la corriente del estator de una máquina de alterna, realizar una estimación de la velocidad, permitiendo el ahorro de un sensor de velocidad (encoder). La idea básica consiste en, siguiendo la idea de métodos anteriores de estimación de la velocidad en régimen permanente a partir de un análisis espectral en el que se localiza la frecuencia del PSH de mayor amplitud, extraer de la corriente la evolución de dicho PSH calculando seguidamente la evolución de la velocidad.

En primer lugar se captura la corriente del estator de un motor de inducción alimentado mediante un inversor con un control directo del par. En segundo lugar, se filtra la corriente utilizando un filtro digital pasa-banda de Butterworth de segundo orden ajustado para filtrar la banda 50-500 Hz para eliminar la FC así como otras componentes como las que puede introducir el inversor. En tercer lugar se aplica el algoritmo de cálculo de crestas tanto a la STFT como a la WT obteniendo las evoluciones temporales de las principales frecuencias de la corriente filtrada. Si se consigue obtener la evolución del PSH de mayor amplitud, esto permite calcular la evolución de la velocidad.

En condiciones normales las principales frecuencias en la corriente filtrada son las de los PSH. Sin embargo, el algoritmo de crestas puede presentar varios problemas prácticos. Primero, se obtienen las evoluciones de dos frecuencias no presentando los autores ningún criterio automático para decidir qué evolución seguir para calcular la velocidad. Segundo, se tienen áreas del plano sin información o saltos en las evoluciones obtenidas. Tercero, el algoritmo de crestas trata de representar las evoluciones de las mayores componentes en la banda analizada, pero no asegura que la evolución capturada sea la del PSH, pues pueden aparecer otras componentes de amplitud parecida, en especial en presencia de averías. Finalmente, no se propone un método para seguir automáticamente la evolución del PSH entre las distintas obtenidas ni una conversión a la información final: la evolución de la velocidad. Entre la STFT y la WT los autores se decantan por la WT pues aseguran que con un tiempo de cálculo 40% menor se obtienen mejores resultados (menores áreas sin información y menores saltos en las evoluciones).

Existen algunos trabajos publicados en la literatura técnica que proponen la generación del escalograma de la corriente de línea de un motor asíncrono durante su arranque para detectar barras rotas. En primer lugar, en [58] se propone utilizar una wavelet del tipo Daubechies de orden 8, es decir 'db8'. La Fig. 2.17 (reproducción de la Fig. 2 de [58]), muestra las corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (superior izquierda) y con cuatro barras rotas (superior derecha) y sus respectivos escalogramas generados con la wavelet 'db8'. Esta wavelet presenta, alrededor de 50 Hz, una localización frecuencial de su energía muy mala. Como consecuencia, la resolución en frecuencia que se obtiene con este tipo de wavelets alrededor de 50 Hz es muy baja. Al generar el escalograma de la corriente de arranque con este tipo de wavelets, el FC afecta a una región muy grande alrededor de 50 Hz. En otras palabras, la wavelet utilizada no consigue filtrar adecuadamente al FC. Esto imposibilita visualizar la evolución temporal de los armónicos producidos por la rotura de barra, el LSH y el USH, los cuales quedan enmascarados por el FC. Por otra parte, no se utiliza ninguna técnica para mejorar la visualización de las componentes de poca amplitud, como el uso de escala logarítmica, haciendo todavía más difícil la detección de los SH frente a la fuerte presencia del FC. Además, los autores no se han preocupado por convertir los resultados en frecuencia en vez de en escala, lo cual dificulta la interpretación.

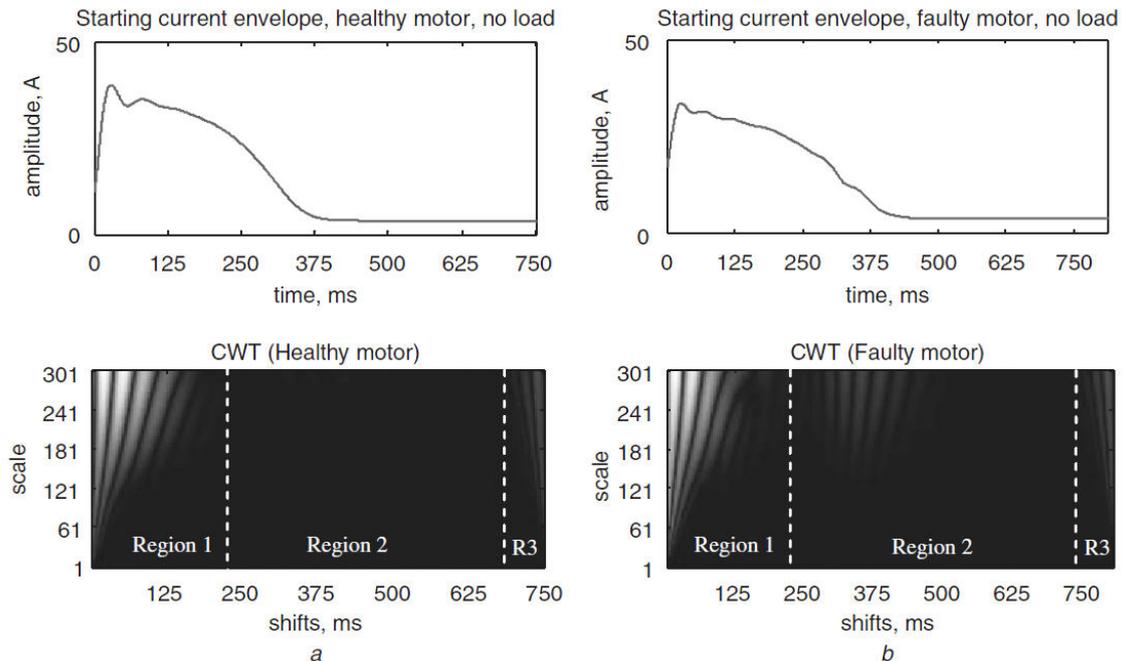


**Fig. 2. 17 Reproducción de la Fig. 2 de [58]: corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (superior izquierda) y con cuatro barras rotas (superior derecha) y sus respectivos escalogramas generados con la wavelet 'db8'.**

Para intentar desprenderse del efecto nocivo del FC, se propone en el artículo analizar la envolvente de la corriente de arranque. La Fig. 2.18 (reproducción de la Fig. 4 de [58]), muestra las envolventes de las corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (superior izquierda) y con cuatro barras rotas (superior derecha) y sus respectivos escalogramas generados con la wavelet 'db8'. El primer error en este segundo análisis es que no varía la franja de escalas analizadas con respecto al análisis anterior. Por tanto, se centra en escalas muy bajas correspondientes a frecuencias muy elevadas sin tener en cuenta que al analizar la envolvente los SH no se encuentran alrededor de 50 Hz sino junto a la componente de continua, la cual se encuentra hacia

## Capítulo 2.

escalas más elevadas no analizadas en la figura. Así pues, los resultados obtenidos son muy pobres, a pesar de analizar una avería muy grave (cuatro barras rotas).



**Fig. 2. 18 Reproducción de la Fig. 4 de [58]: envolturas de las corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (superior izquierda) y con cuatro barras rotas (superior derecha) y sus respectivos escalogramas generados con la wavelet 'db8'.**

En definitiva, aunque se aprecia un cierto incremento de la energía de la señal en la parte central superior del escalograma de la derecha en la Fig. 2.18 con respecto al de la izquierda, en ninguno de los dos casos se consigue el objetivo de generar un escalograma: obtener la evolución temporal de la frecuencia de las componentes presentes en la señal analizada.

En segundo lugar, en vez de utilizar la 'db8', en [59] se diseña una wavelet cuya forma es parecida a la del LSH. El escalograma obtenido se muestra en la Fig. 2.19 (reproducción de la Fig. 6 de [59]), para el caso de un motor sano (izquierda) y un motor con una barra rota (derecha).

Tal y como se explica en el capítulo 3, la CWT consiste en correlacionar la señal a analizar con un conjunto de funciones llamadas wavelets. Se parte de una wavelet original centrada en el origen a la que se escala, comprimiéndola para analizar altas frecuencias (factor de escala elevado) o expandiéndola para analizar bajas frecuencias (factor de escala reducido). Posteriormente se traslada del origen, centrándola en distintos instantes de tiempo. Combinando traslación y escalado se consigue analizar todos los puntos del plano.

Como la wavelet diseñada tiene una forma parecida a la del LSH, al realizar el escalado de la wavelet, existe una escala para la cual la wavelet coincide bastante bien con el LSH, no solo en forma sino también en tamaño. Cuando se calcula la WT a dicha escala, se produce un pico muy elevado en el escalograma si la corriente de arranque analizada pertenece a un motor con barras rotas (derecha). Este efecto no aparece cuando la corriente analizada pertenece a un motor sin barras rotas (izquierda). Esto permite detectar la presencia del LSH. Aun así, la transformada está infrutilizada, pues

aplicada correctamente es capaz de obtener la evolución temporal de la frecuencia del LSH (tal y como se verá en el capítulo 4 de la presente tesis), y no simplemente un pico a una determinada escala.

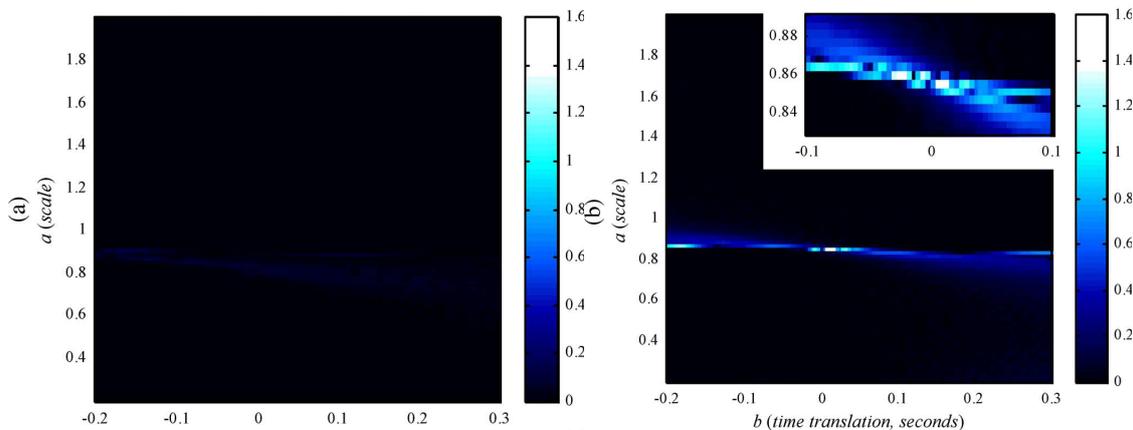


Fig. 2. 19 Reproducción de la Fig. 6 de [59]: escalogramas de las corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (izquierda) y con una barra rota (derecha) generados con la wavelet diseñada específicamente.

En tercer lugar, en [60] se propone dar un paso más, y en vez de utilizar la WT para generar el escalograma de la corriente de arranque, se utiliza para obtener las “crestas wavelets”. En la Fig. 2.20 (reproducción de las figuras 7 (izquierda) y 9 (derecha) de [60]), se muestran los resultados obtenidos al calcular las crestas wavelet de la segunda mitad de las corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (izquierda) y con una barra rota (derecha) generados tomando como wavelet una función de Gabor. En el caso del motor sano, las crestas wavelet consiguen captar la evolución del FC: una evolución rectilínea horizontal, propia de la frecuencia constante del FC. En el caso del motor con una barra rota (derecha), se deberían obtener las evoluciones del FC y el LSH. Pero el algoritmo tan solo consigue capturar, para cada instante, una de las dos evoluciones: al principio se observa la evolución del LSH, y cuando éste se encuentra demasiado cerca del FC, el algoritmo no consigue distinguir entre ambos y capta tan solo la evolución rectilínea del FC. En definitiva, capta la evolución del LSH durante un tramo de la segunda parte del patrón en V invertido. El patrón aparece invertido pues se representa en función de la escala en vez de la frecuencia. La Fig. 2.21 muestra el resultado ideal (superior), así como el esquema de los resultados obtenidos en [60] para el caso sano (medio) y con una barra rota (inferior), representando la evolución de la frecuencia con respecto al deslizamiento.

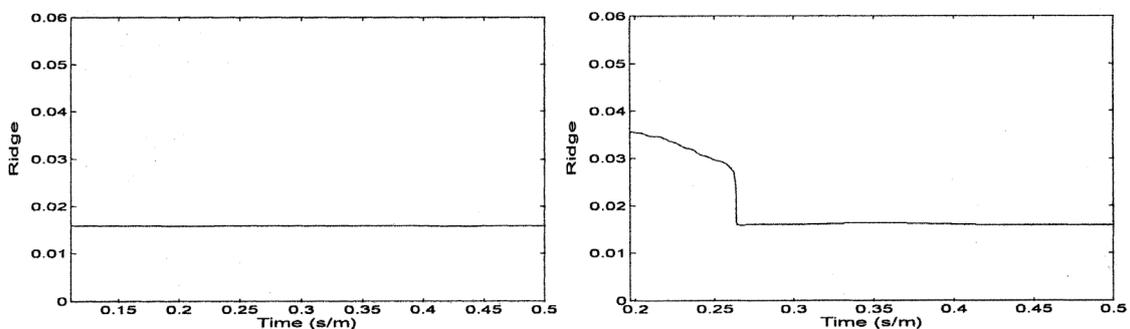
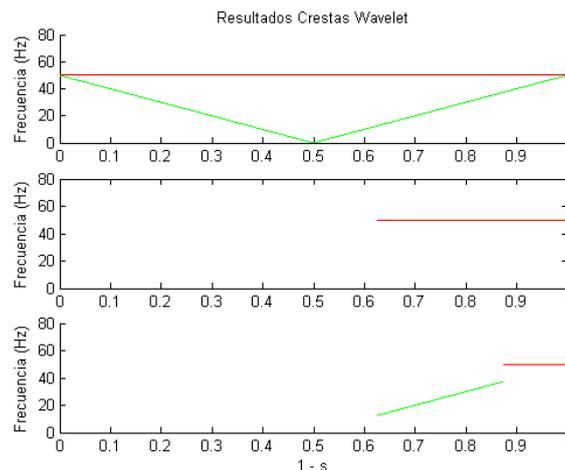


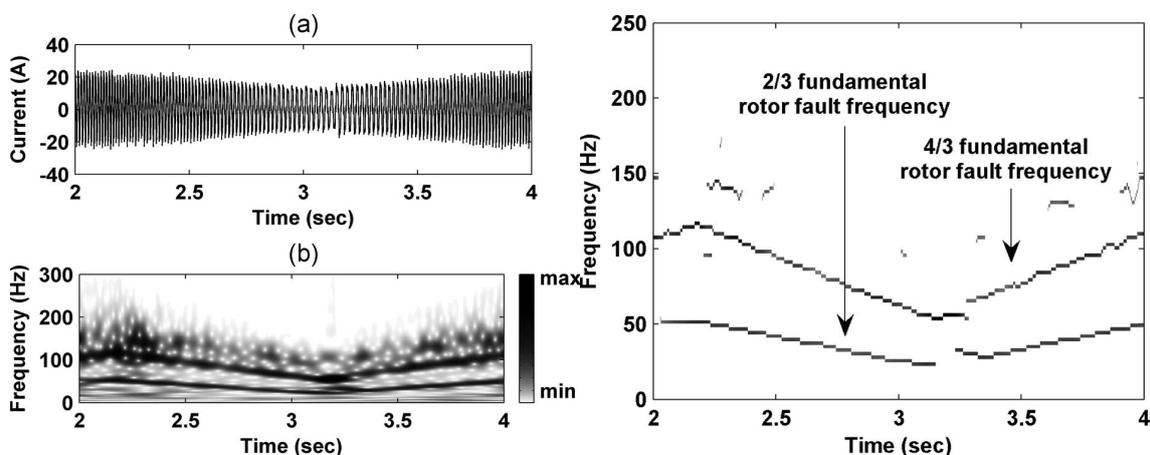
Fig. 2. 20 Reproducción de las figuras 7 y 9 de [60]: crestas wavelet de la segunda mitad de las corrientes de arranque de dos motores de inducción sano (izquierda) y con una barra rota (derecha) generados con una función de Gabor.



**Fig. 2. 21** Resultado ideal de las crestas wavelet (superior), y esquemas de los resultados obtenidos en [60] para el caso del motor sano (medio) y con una barra rota (inferior) representando la frecuencia en función del deslizamiento.

En definitiva, como mínimo tal y como han sido utilizadas en [60], las crestas wavelet se encuentran muy lejos de conseguir representar la evolución completa del LSH 50-0-50 Hz, consiguiendo obtener tan solo la porción ascendente entre 22-29 Hz, sin ni tan siquiera considerar la posibilidad de representar la evolución de otras componentes provocadas por la rotura de barra.

En [61] se utilizan también las crestas wavelet, pero en este caso para detectar excentricidad dinámica en motores de continua sin escobillas. Se analiza la corriente estática del motor funcionando con una referencia de velocidad triangular de 5 Hz. Previamente al cálculo de las crestas wavelet se filtra la corriente del estator eliminando la presencia del FC, evitando de esta forma que el algoritmo no logre captar la evolución de las componentes introducidas por la excentricidad debido a su pequeña amplitud frente a la del FC. La wavelet utilizada es también una función de Gabor. La Fig. 2.22 (reproducción de las figuras 6 (izquierda) y 7 (derecha) de [61]) muestra la corriente capturada (izquierda a), el escalograma de la corriente (izquierda b) y las correspondientes crestas wavelet.



**Fig. 2. 22** Reproducción de las figuras 6 (izquierda) y 7 (derecha) de [61]: corriente estática de un motor de corriente continua sin escobillas con excentricidad dinámica y referencia de velocidad triangular de 5 Hz (izquierda a), escalograma de la corriente (izquierda b) y las correspondientes crestas wavelet generadas con una función de Gabor (derecha).

Los resultados obtenidos son de una calidad mucho mayor a los de trabajos de investigación anteriores en los que se utilizó la CWT. Además, los autores han presentado los resultados con respecto a la frecuencia en vez de con respecto a la escala, lo cual facilita mucho su interpretación. En definitiva, se consigue el objetivo de aplicar las crestas wavelet: se observa con bastante claridad la evolución de las componentes introducidas por la excentricidad, permitiendo de esta forma el diagnóstico.

Aun así, en el capítulo 4 se analizará cómo esta transformada es incapaz de obtener las evoluciones completas de las componentes de avería, siendo necesario utilizar transformadas más complejas como el MP o la AGT, en las cuales se basa la metodología de diagnóstico desarrollada en la presente tesis.

### **2.3.6.- Wigner Ville Distributions.**

Tal y como hemos visto, más exactamente en los trabajos [55] en el caso de la STFT (Fig. 2.16) y en [61] en el caso de la CWT (Fig. 2.22 izquierda b), estas transformadas permiten obtener una medida de la densidad de la energía en distintos puntos del plano tiempo-frecuencia, lo cual se consigue correlacionando la señal a analizar con familias de funciones (wavelets en el caso de la CWT, cada una centrada en un punto del plano), reflejando las figuras citadas las evoluciones de las componentes de la señal. El problema de estas transformadas es que la resolución en los dominios del tiempo y de la frecuencia no puede aumentar de forma simultánea indefinidamente, debiendo escoger si queremos tener más resolución temporal o más resolución frecuencial. En el caso de la STFT la relación entre ambas resoluciones es la misma en todos los puntos del plano analizados y en el caso de la CWT varía con la frecuencia analizada.

En un intento de obtener la distribución de la energía en el plano tiempo-frecuencia sin pérdida de resolución, se definió la Wigner-Ville distribution (WVD): una densidad de energía tiempo-frecuencia calculada correlacionando la señal con una traslación en el tiempo y en frecuencia de ella misma (el lector puede consultar 3.6.1 para más información). Por tanto, el resultado de la WVD tan solo depende de la señal analizada, no interviniendo ningún tipo de parámetro que se deba fijar para realizar el análisis y que influya en los resultados, no debiendo elegir en cada punto entre la resolución temporal o la frecuencial.

A pesar de tener propiedades remarcables, pues en determinadas condiciones la densidad de energía obtenida con éste método alcanza la mejor resolución tiempo-frecuencia posible, esta densidad de energía tiene también un inconveniente importante: los llamados términos de interferencia. Cuando aplicamos la WVD a una señal multicomponente (como es el caso de las corrientes de máquinas eléctricas), la densidad de energía obtenida tiene un término por cada componente igual al que obtendríamos si pudiésemos analizar esta componente por separado, pero además aparecen términos extra, un término de interferencia por cada par de componentes. Estos términos de interferencia cruzados (cross-terms), no reflejan ninguna característica de la señal y hacen aumentar la energía en puntos del plano donde la señal no posee ninguna componente, falseando el resultado final. Estas interferencias pueden ser eliminadas promediando la WVD con una función llamada núcleo (kernel). Distintos autores han propuesto el uso de distintos tipos de núcleos, dando lugar a numerosas versiones de la WVD, como por ejemplo: Pseudo WVD (PWVD), Choi Williams Distributions (CWD),

Zhao-Atlas-Marks Distributions (ZAMD). Los resultados obtenidos con un núcleo u otro dependerán de las características de la señal analizada.

Este tipo de distribuciones se utilizaron por primera vez para analizar corrientes de máquinas eléctricas con el objetivo de proporcionar una medida de la velocidad siguiendo la evolución del PSH de mayor amplitud, evitando el uso de un sensor. Al igual que en régimen permanente puede calcularse la velocidad de giro a partir de la frecuencia exacta de un PSH obtenida mediante el espectro de la corriente, en [62] se propone obtener la evolución temporal de la frecuencia de un PSH para calcular la evolución de la velocidad angular. Para ello se propone el uso de la WVD y se estudian las diferencias entre los distintos posibles núcleos a utilizar, comparando específicamente los resultados al aplicar WVD y la distribución de Page, optando finalmente por la WVD, la cual introduce términos cruzados pero tiene menor tiempo de cálculo.

El planteamiento se valida analizando corrientes generadas por simulación. La Fig. 2.23 (reproducción de la Fig. 5 de [62]) muestra la WVD de la corriente del estator del motor de inducción simulado. Se observa la evolución temporal de la frecuencia de dos PSH, además de dos términos cruzados.

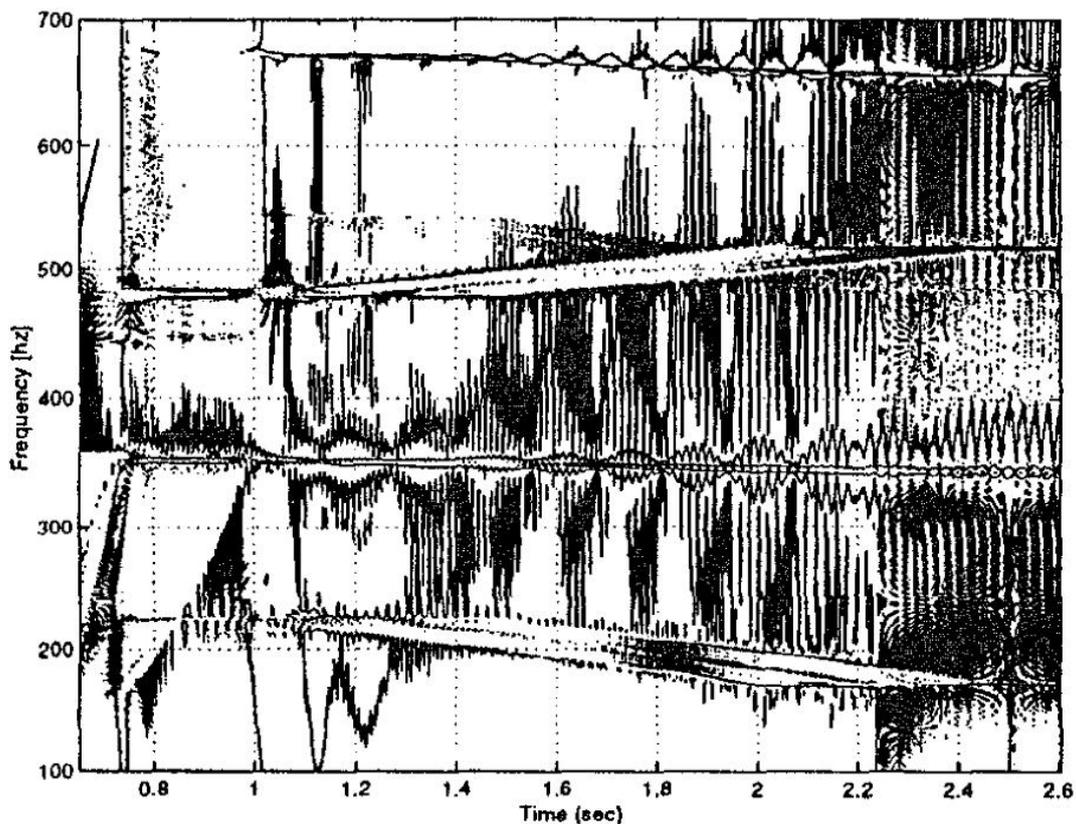


Fig. 2. 23 Reproducción de la Fig. 5 de [62]: WVD de la corriente del estator del motor de inducción simulado.

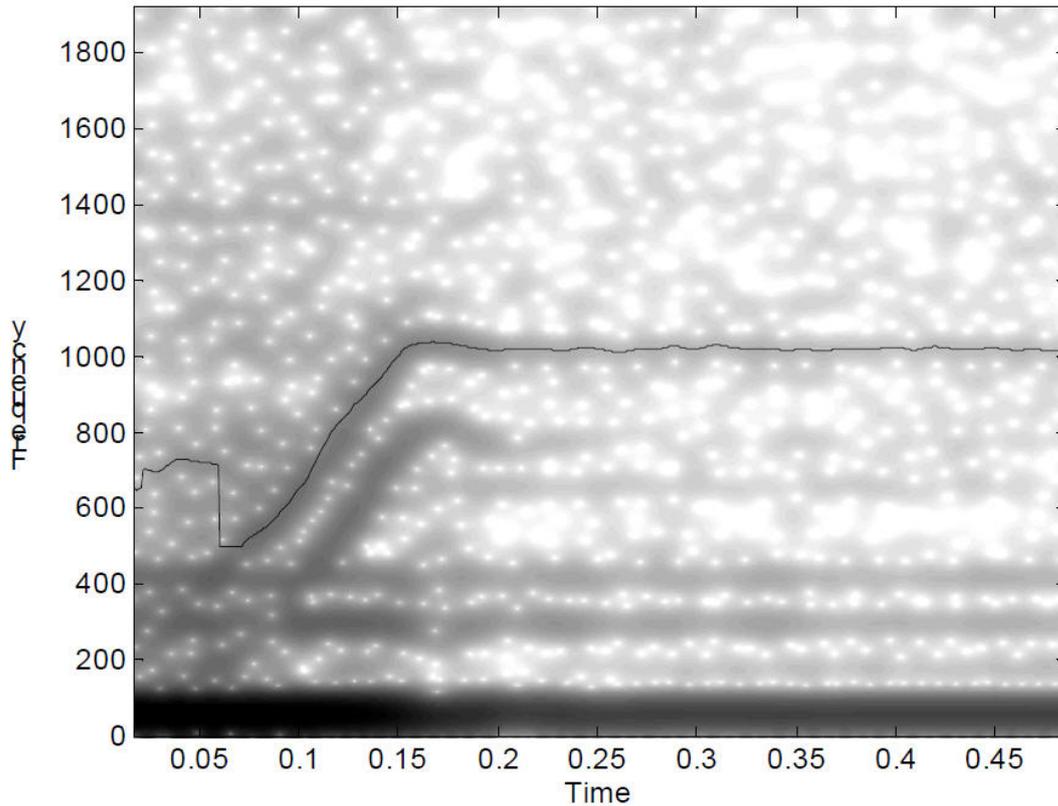
La técnica presenta algunos inconvenientes: la precisión podría mejorarse significativamente, no obtiene la evolución de la velocidad en todo el transitorio y sobre todo, los autores omiten explicar cómo pasar del resultado de aplicar las distribuciones (la matriz de puntos representada en la Fig. 2.23 donde se observan las evoluciones de dos PSH) a capturar de forma automática la evolución del PSH, debiendo el algoritmo

desarrollado enfrentarse al problema de seguir al PSH adecuado de entre los dos representados y que además los dos términos de interferencia no perturben su funcionamiento.

El siguiente trabajo de los mismos autores en esta línea [57], comentado ampliamente en el apartado relativo a la WT, tiene como objetivo utilizar el algoritmo de cálculo de crestas aplicado a la STFT y la WT para reducir el tiempo de cálculo y poder realizar una estimación en tiempo real. Sin embargo, aun reduciendo el tiempo de cálculo, uno de los mayores inconvenientes de este tipo de método resaltado por los autores es que para analizar la densidad de energía en un punto del plano se necesita conocer la señal a analizar un intervalo de tiempo después, lo cual complica su uso para medir la velocidad en tiempo real, pues necesariamente existirá un retardo.

El mismo problema se trata de resolver en [63] comparando esta vez los resultados de la WVD, la WVD tras filtrar los términos cruzados y la STFT. En definitiva, se propone capturar la corriente estatística del motor de inducción, calcular su espectrograma utilizando la STFT y establecer un algoritmo automático para capturar la evolución del PSH de mayor amplitud. El objetivo final de la investigación no es estimar la evolución de la velocidad, sino obtener las curvas de comportamiento del motor de inducción sin necesidad de realizar todos los ensayos que normalmente se requerirían. Para ello se utiliza este algoritmo de obtención de la curva de velocidad conjuntamente con un método para estimar la curva de par mediante la medida de dos corrientes y dos tensiones. El método se implementa en un DSP. En la Fig. 2.24 (reproducción de la Fig. 6 de [63]) podemos observar el espectrograma de la corriente de línea del motor mostrando superpuesto el resultado del algoritmo de captura automática del PSH. Dicho algoritmo consiste en calcular el valor máximo en una determinada ventana en la zona de alta frecuencia. Una vez se tiene este tramo de evolución, el algoritmo se desplaza hacia bajas frecuencias.

La evolución del PSH se observa más nítidamente en el resultado mostrado en la Fig. 2.24 que en el resultado de la Fig. 2.23. Aun así, la precisión todavía se puede mejorar sustancialmente. Los autores de [63] comparan la WVD y la STFT destacando que la WVD no mejora excesivamente la resolución e introduce términos cruzados, siendo necesario utilizar un prefiltrado, lo cual por otra parte supone eliminar información importante en algunas zonas. Con respecto a la STFT, se destaca la imposibilidad de obtener la evolución durante la primera parte del arranque, tal y como se observa en la Fig. 2.24. Esto es debido a que el algoritmo tiene problemas para capturar la evolución del PSH en zonas donde existen otras componentes con amplitudes del orden del PSH, como los WH de orden 3 y 5 o componentes introducidas por averías. Para resolver este inconveniente, estiman la evolución de la velocidad en este tramo construyendo un modelo dinámico del motor de inducción. Por otra parte, los autores no explican en qué consiste el algoritmo automático (parte clave del método), más allá de mencionar el cálculo de máximos en una ventana de 1 Hz, pero sin especificar más detalles como dónde se sitúa la ventana o cómo se pasa de los puntos capturados a los siguientes a analizar. Tampoco se establece el criterio para determinar cuando la evolución obtenida es errónea y realizar la estimación basada en el modelo. Finalmente, los autores destacan que con determinadas combinaciones de ranuras en el estator y en el rotor el contenido de PSH en la corriente disminuye significativamente, dificultando la aplicación del método. El análisis de este problema se amplía en [64].



**Fig. 2. 24 Reproducción de la Fig. 6 de [63]: Espectrograma de la corriente de línea del motor mostrando el comportamiento del algoritmo de captura automática del PSH.**

A mediados de la pasada década, las distribuciones cuadráticas empezaron a ser utilizadas para la detección y evaluación de componentes de avería en corrientes de máquinas eléctricas. El diagnóstico de rotores mecánicamente descompensados, así como la detección de excentricidades dinámicas en motores de corriente continua sin escobillas ha sido ampliamente estudiada en [65], [61] y [66]. Diferentes técnicas son utilizadas para obtener las evoluciones de las componentes de avería: las crestas de la STFT comparadas con la PWVD suavizada [65], las crestas wavelet [61] y la STFT comparada con la WVD aplicada utilizando núcleos tiempo-frecuencia de reciente definición como el ZAM [66]. Según los autores, por una parte las crestas STFT consumen un menor tiempo de cálculo que la PWVD suavizada, pero también se consigue una menor resolución. Por otra parte, en [66] el núcleo ZAM muestra su comportamiento superior comparado con el de la STFT.

En los tres artículos [65], [61] y [66], los autores consiguen el objetivo: obtener las evoluciones de las componentes de avería. El trabajo presentado en [61] ha sido comentado detalladamente en el apartado dedicado a la WT. En su trabajo anterior [65], los autores proponen el uso de la WVD, filtrando la señal antes de muestrearla, utilizando un filtro adaptativo analógico implementado mediante Hardware. Tras este pretratamiento, la corriente es procesada utilizando un filtro FIR para obtener la señal analítica y finalmente calcular la PWVD suavizada. Finalmente, en el artículo donde se obtienen según los autores los mejores resultados [66], la solución se plantea a través del uso de WVD, comparando el uso de distintos tipos de núcleos. De entre los ejemplos anteriormente mencionados (PWVD, CWD, ZAMD), los autores concluyen que la distribución que mejor suprime los términos de interferencia para el tipo de corriente analizada es la ZAMD. Posteriormente comparan los resultados con los

obtenidos mediante la STFT. La única diferencia con la señal analizada en [61] es la referencia de velocidad: en la parte superior de la Fig. 2.25 se muestra el resultado de aplicar la ZAMD (izquierda) y la STFT (derecha) cuando la referencia de velocidad es triangular de 10 Hz y en la parte inferior se muestran idénticos resultados cuando la referencia de velocidad es sinusoidal de 15 Hz. La Fig. 2.25 es una reproducción de las figuras 10 (superior izquierda), 11 (superior derecha), 12 (inferior izquierda) y 13 (inferior derecha) de [66]. Según los autores, como conclusión del análisis de los resultados mostrados en la Fig. 2.25, la ZAMD permite detectar mejor la evolución de las componentes que la STFT pues ésta última tiene una mala resolución en el dominio de frecuencia. Por otra parte, el tiempo de cálculo al utilizar la ZAMD es 100 veces mayor que al utilizar la STFT.

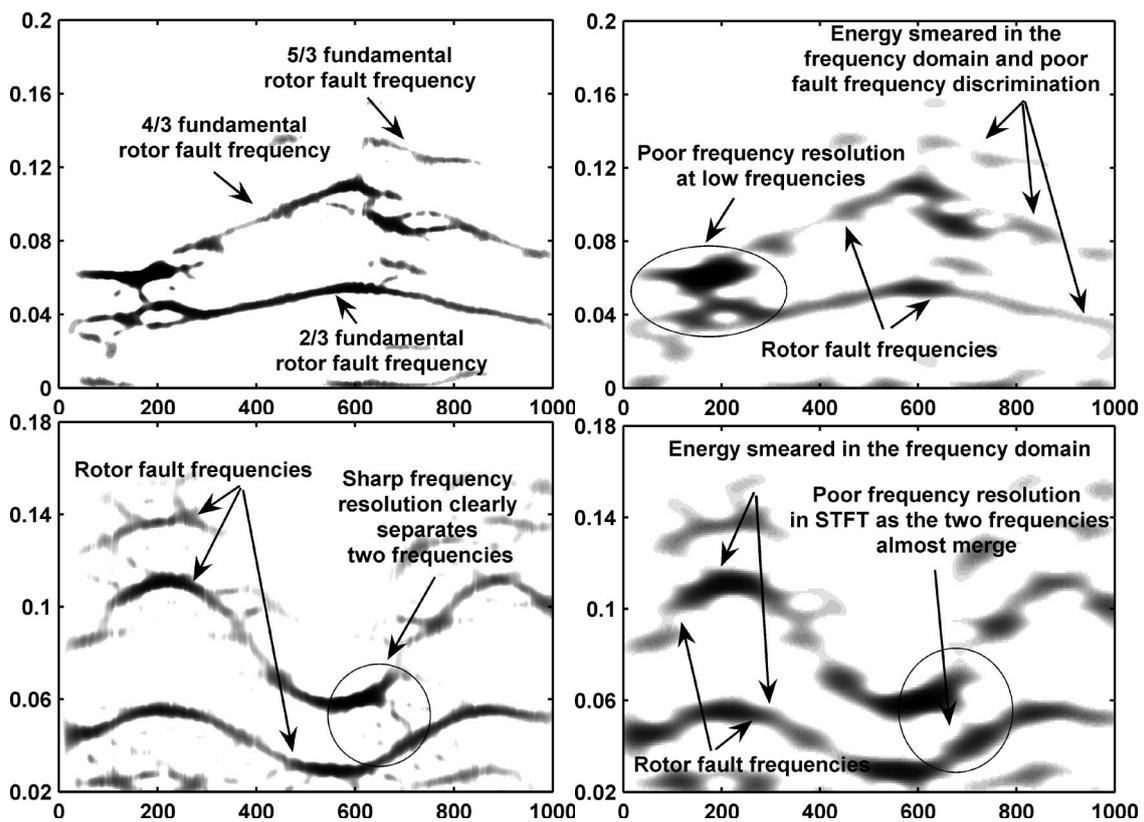


Fig. 2. 25 Reproducción de las figuras 10 (superior izquierda), 11 (superior derecha), 12 (inferior izquierda) y 13 (inferior derecha) de [66]: ZAMD (izquierda) y STFT (derecha) de la corriente estática de un motor de corriente continua sin escobillas con excentricidad dinámica y referencia de velocidad triangular de 10 Hz (superior) y referencia de velocidad sinusoidal de 15 Hz (inferior).

Otros autores utilizan el núcleo ZAM con fines de diagnóstico de motores sincrónicos de imanes permanentes (MSIP) [67], [68], [69]. Por ejemplo, en [67] se evita el filtro adaptativo utilizado en [65], filtrando la corriente mediante el modo de descomposición empírico (Empirical Mode Decomposition, EMD). La técnica se aplica a la detección de cortocircuitos en el estator de MSIP. Seguidamente, tanto la WVD suavizada como la ZAMD son aplicadas. En el caso de la ZAMD, el método presenta una complejidad matemática relativamente elevada si se quiere detectar el cortocircuito de forma incipiente. Sin embargo, los autores argumentan que DSP avanzados de 32 bits pueden calcular el algoritmo para la detección del fallo más rápido de lo que tarda en propagarse. A su vez, en [68] se analiza la detección de cortocircuitos entre espiras en MSIP utilizando también la ZAMD pero sin ningún tipo de pretratamiento. El método presentado está basado en la medida de la energía del armónico de diente del

## Capítulo 2.

estator, cuya frecuencia se encuentra por encima de 1 kHz para la velocidad de giro de las máquinas testeadas. Los autores argumentan que es necesario un análisis en transitorio pues es difícil encontrar periodos de permanente en este tipo de motor, siendo la ZAMD capaz de evaluar correctamente la energía de este armónico. Finalmente, en [69], con el objetivo de detectar fallos en rodamientos en MSIP, se analizan los problemas derivados de utilizar la ZAMD: aunque se trata de una distribución indicada para eliminar términos cruzados en señales cuyas componentes son prácticamente paralelas en la dirección de la frecuencia, no se puede recuperar la energía de la señal analizada integrando el resultado obtenido. En general, la componente fundamental de un MSIP no puede ser filtrada pues su frecuencia varía, lo cual complica el uso de la WVD.

Otros autores se centran en la aplicación de la WVD para la detección de fallos mecánicos en motores de inducción a través del análisis de la corriente estatórica [70], [71], [72]. En [70] se combina la PWVD con la HT aplicada a la corriente del estator de un motor de inducción sometido a una oscilación del par de carga con el objetivo de detectar la modulación de fase que dicha oscilación introduce. Por otra parte, en [71] se tratan de detectar oscilaciones del par de carga y desequilibrios de carga durante transitorios de velocidad, implementando el método en un DSP. A pesar de tratarse de un análisis de la corriente estatórica de un motor de inducción trabajando en régimen permanente, en [72] se muestra el potencial de este tipo de distribuciones cuadráticas. La PWVD es utilizada en este caso para analizar la corriente y diferenciar excentricidad dinámica de oscilación de par. A pesar de que en principio ambos fenómenos introducen componentes laterales muy similares alrededor de la componente fundamental, el trabajo de investigación propone discriminarlos analizando la diferencia de fase entre los SH. Seguidamente, los autores proponen un índice de cuantificación.

Otros autores proponen técnicas basadas también en el uso de estas distribuciones cuadráticas, aprovechando la información que aportan al analizar la corriente, pero tratando de disminuir el coste computacional evitando calcular los diagramas completos que muestran la distribución de la energía de la señal [73],[74], [75]. En [73], con el objetivo de detectar y clasificar las principales averías de un motor de inducción, se propone el análisis de su corriente mediante la función característica de la WVD: la función de ambigüedad. El cálculo se limita a determinadas cajas del plano de ambigüedad. Sin embargo, los autores no evalúan el método propuesto en aplicaciones reales. Otro trabajo en el que se propone utilizar la función de ambigüedad es [74], donde tratando de detectar barras rotas en motores de inducción se filtra la banda de frecuencia que contiene la evolución del LSH utilizando la DWT, para posteriormente aplicar la transformada de fase polinomial. El método no necesita calcular la transformada en todo el plano tiempo-frecuencia. Finalmente, en [75] se aplica la transformada de Fourier fraccional para aislar las componentes de avería en bajas frecuencias. Esta transformada representa como picos componentes cuyas frecuencias varían linealmente con el tiempo. Este tipo de evolución lineal se observa en el arranque de motores de inducción. En el caso de que la evolución no sea lineal con respecto al tiempo, si se representa la corriente con respecto al deslizamiento la evolución entonces es perfectamente lineal y por cada componente presente en la corriente la transformada representa un pico. Tan solo queda evaluar la amplitud del pico de la componente vinculada al fallo para cuantificar la presencia de la avería.

Aunque las WVD permiten teóricamente alcanzar la máxima resolución tiempo-frecuencia, esta propiedad se pierde al aplicar un determinado núcleo para minimizar la presencia de los términos de interferencia cruzados. Es por ello que otros autores [76], [77], con el objetivo de no perder esta resolución máxima, han optado por no aplicar ningún núcleo y desarrollar una estrategia alternativa. Más concretamente, en [76] se propone en primer lugar aplicar una serie de filtros antes de calcular la WVD de la corriente estática del motor de inducción cuya excentricidad mixta se quiere detectar. Una vez se conoce la banda de frecuencia a analizar, se aplican filtros Butterworth paso alto y paso bajo, de tal forma que se conserva tan solo dicha banda, evitando términos de interferencia cruzados con componentes presentes en otras bandas. Seguidamente se utilizan filtros de Chebyshev y filtros elípticos para eliminar las componentes de frecuencia constante (tanto el FC como otros armónicos de devanado), lo cual elimina términos cruzados y permite analizar componentes de más alta frecuencia. Finalmente, se calcula la señal analítica de la corriente filtrada. Con ello se consigue conservar tan solo las frecuencias positivas y eliminar los términos de interferencia de estas con las negativas, que aparecerían en caso contrario al calcular la WVD en el último paso.

En este trabajo se analizan señales tanto simuladas como experimentales, durante el arranque de un motor de inducción, en distintas condiciones de funcionamiento, y con distintos niveles de excentricidad mixta. La Fig. 2.26 (reproducción de la Fig. 10 de [76]), muestra el resultado del análisis de un motor de inducción descargado durante su arranque con un 37% de excentricidad mixta. En la figura se pueden observar las evoluciones de las dos componentes principales tendentes a 75 y 25 Hz en régimen permanente, así como las evoluciones de otras componentes de elevada frecuencia causadas por la excentricidad.

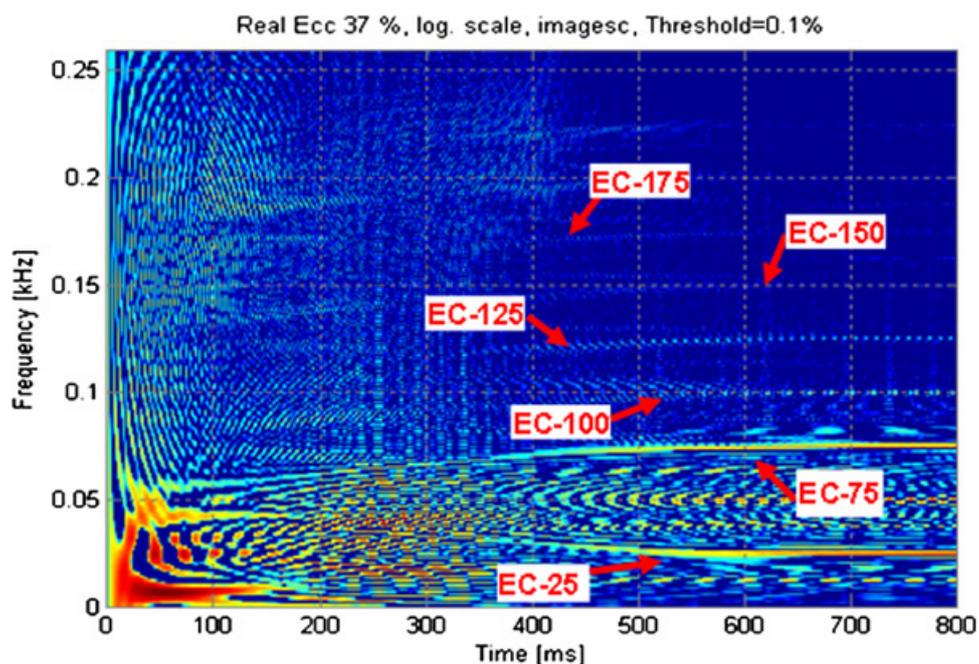


Fig. 2. 26 Reproducción de la Fig. 10 de [76]: WVD de la corriente estática de arranque de un motor de inducción con un 37% de excentricidad mixta, previo filtrado y cálculo de su señal analítica.

Además, los autores comparan las WVD con la DWT. Se observa cómo la DWT condensa la información, presentándola de forma más compacta en las señales de aproximación y detalle. Éstas permiten observar cómo sus amplitudes se incrementan con la presencia de las componentes, pero no reflejan su evolución. En definitiva, la

DWT es más fácil de aplicar, resulta más fácil operar con los resultados obtenidos (en especial para cuantificar), pero aportan una menor información, no pudiendo por ejemplo detectar los armónicos de excentricidad de mayor frecuencia.

### **2.3.7.- Otras transformadas y otras técnicas en transitorio.**

Existen otras transformadas de análisis tiempo-frecuencia, así como otras técnicas que han sido propuestas para el diagnóstico de motores de inducción operando en régimen transitorio. Por ejemplo, en [78], [79], [80], se utiliza la transformada de Hilbert-Huang (HHT) [81] para tratar de detectar averías en motores de inducción. Concretamente, en [78] la HHT se aplica para detectar fallos en rodamientos. A su vez, en [79] se compara la HHT con la DWT para la detección de barras rotas. Finalmente, en el trabajo presentado en [80] se consigue detectar, en algunas zonas del plano tiempo-frecuencia, la presencia de la componente próxima a 25 Hz causada por la excentricidad, pero no se obtiene su evolución completa. Además, recientemente la HHT ha sido aplicada para la detección de barras rotas en generadores sincrónicos [82]. Sin embargo, tal y como se indica en [79], la falta a priori de una relación entre las funciones modales intrínsecas y la frecuencia de las componentes cuya presencia reflejan, dificulta establecer una formulación general para el uso de esta transformada. En un artículo reciente [83] se compara la STFT, la CWT, la WVD y la HHT para la detección de fallos en aerogeneradores. Concretamente, se detectan barras rotas en generadores de jaula de ardilla, observándose ciertas trazas de los SH en todos los resultados presentados, siendo la densidad de energía más clara la obtenida mediante la STFT.

Otro planteamiento basado en el trabajo de investigación presentado en [84], analiza la tensión inducida en los devanados del estator por las corrientes residuales en el rotor tras la desconexión del motor, con el objetivo de detectar barras rotas. Al desconectar el motor, las corrientes en el estator se extinguen rápidamente, induciéndose una tensión como consecuencia de las corrientes que siguen circulando por el rotor. Esta tensión es predominantemente sinusoidal, con una cierta modulación producida por la discretización de la corriente de la jaula de ardilla. La rotura de una barra altera esta forma de onda, induciendo componentes fácilmente detectables [85]. Así pues, se ha propuesto [86] analizar el vector espacial de tensiones inducidas en el estator después de la desconexión utilizando el MUSIC pseudo-espectro. Sin embargo, este planteamiento presenta determinadas desventajas. En primer lugar, es necesario establecer un valor base para una máquina sana en cada máquina. Además, el método no permite discriminar claramente entre una o varias barras rotas [87]. Sin embargo, el método se ha mejorado utilizando la STFT [88] y recientemente se ha extendido el planteamiento aplicándolo a la detección de excentricidad dinámica y a moderados niveles de excentricidad estática [89].

Entre las técnicas basadas en el modelado de un motor de inducción, el método de diagnóstico de Viena [90] puede detectar fallos a través del análisis de arranques, incluso cuando son cortos. Se aplica también a máquinas alimentadas mediante un inversor. Siguiendo otro planteamiento, en [91] se propone una técnica de diagnóstico basada en la demodulación mediante la traslación en frecuencia, especialmente indicada para aplicaciones de tracción.

Por otra parte, en [92] se propone un método basado en la correlación de una señal de referencia con la corriente del estator. La señal de referencia y la componente de fallo que se pretende detectar deben tener la misma frecuencia, de tal forma que el resultado de la correlación sea elevado cuando el fallo está presente en la máquina eléctrica. El cálculo es mucho menor que el realizado al obtener una transformada como la STFT o la CWT en la que se deben calcular numerosas correlaciones con señales para obtener la densidad de energía en los puntos del plano analizado. Según los autores, debido a la poca potencia de cálculo requerida, se trata de un método especialmente diseñado para ser implementado en un DSP (además de para poder trabajar en condiciones de ruido significativo). Sin embargo, existen precedentes de la implementación en un DSP de técnicas del tipo STFT, con lo cual esto no supondría una ventaja. Además, cabría analizar si es una técnica apropiada para el régimen transitorio pues en estas condiciones la frecuencia de la componente de fallo es cambiante y la de la señal de referencia sigue siendo única.

Finalmente, otra tendencia importante en el campo del diagnóstico de averías en máquinas eléctricas es la utilización de técnicas de inteligencia artificial (redes neuronales, algoritmos genéticos, etcétera). Por ejemplo, en [93] se propone el uso de una red neuronal artificial para detectar excentricidades en un motor de inducción alimentado mediante un inversor en bucle cerrado. Teniendo en cuenta que las amplitudes de las componentes de fallo cambian con la carga, la red neuronal es entrenada para estimar el límite de decisión vinculado a las condiciones de operación. Se trata de una técnica que se aparta totalmente del planteamiento más directo de obtener las evoluciones de las componentes de fallo durante el proceso transitorio. Se trata pues de un enfoque muy distinto al utilizado en esta tesis, por lo que no se profundiza en este campo.

## 2.4.- Recapitulación.

En primer lugar, podemos concluir del análisis del estado del arte realizado, que es necesario desarrollar técnicas de diagnóstico de motores de inducción funcionando en régimen transitorio. Esto es así debido a que las técnicas en régimen permanente dan buenos resultados en determinadas condiciones, pero en muchas otras presentan serios inconvenientes. Además, existen numerosas aplicaciones en las que resulta imposible capturar una corriente del estator del motor en régimen permanente.

Se han revisado las distintas técnicas desarrolladas para el diagnóstico en régimen transitorio, clasificándolas en función de la herramienta matemática de análisis tiempo-frecuencia utilizada. En primer lugar, la DWT es una transformada sencilla de aplicar, con poco tiempo de cálculo y con unos resultados fáciles de utilizar para realizar un diagnóstico. Sin embargo, presenta algunos inconvenientes. Al calcular transformadas basadas en representar la distribución de la energía de la señal en el plano tiempo-frecuencia (como la STFT, la CWT o las WVD), se obtiene información relativa a tantas frecuencias como el usuario desee. Sin embargo, al calcular la DWT, el espectro se divide en un conjunto de bandas dando como resultado una señal de aproximación o detalle por cada una de las bandas. La información de las distintas frecuencias que integran una banda, en vez de obtenerse de forma separada (como es el caso de la STFT, la CWT o la WVD), queda condensada en el caso de la DWT en una única señal asociada a dicha banda. Esto implica una pérdida de información que puede tener consecuencias.

Por ejemplo, al analizar una determinada banda de frecuencia con una transformada tipo la STFT, la CWT o la WVD, si existen dos componentes cuyas evoluciones se encuentran en esta banda, se podrán visualizar en el plano las evoluciones por separado, pero en el caso de la DWT la presencia de ambas quedará reflejada en la señal de aproximación o detalle correspondiente. De esta forma, así como la evolución de una componente de avería sí que se consigue distinguir perfectamente de las evoluciones del resto si se observa en el plano tiempo-frecuencia, al observar su repercusión en las señales de aproximación y detalle de la DWT, puede confundirse con las de otras componentes llevando a posibles diagnósticos erróneos. En otras palabras, no existe una relación tan clara entre la presencia de componentes de avería en la corriente y su efecto sobre las señales de aproximación y detalle comparado con el efecto de obtener su evolución en el plano tiempo-frecuencia. Esto disminuye la fiabilidad del diagnóstico.

Por otra parte, si se pretende detectar la presencia de componentes de avería de elevada frecuencia, las cuales en los casos de rotura de barras y excentricidad suelen ser de menor amplitud, resulta difícil hacerlo con la DWT, pues al verse reflejados en determinadas señales de aproximación y detalle junto a otras componentes de amplitud media, estas últimas pueden enmascarar fácilmente su presencia, de tal forma que resulte difícil su detección.

Así pues, en vez de la DWT, se puede optar por utilizar transformadas continuas tipo la STFT, la CWT o las WVD. Con ellas se obtiene una mayor información acerca de las componentes que contiene la corriente y su evolución, a costa de una mayor complejidad de uso, un mayor tiempo de computación y unos resultados más difíciles

de utilizar en particular a la hora de cuantificar: la DWT produce un conjunto de señales y estas otras transformadas producen matrices de puntos del plano tiempo-frecuencia.

Sin embargo, estas transformadas continuas presentan a su vez inconvenientes (resumidos aquí y analizados con detalle en el siguiente capítulo). Tal y como se ha visto, tanto la STFT como la CWT tienen un límite en la resolución en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, de tal forma que no se pueden aumentar las dos simultáneamente de forma ilimitada: si se aumenta una de las dos resoluciones la otra disminuye, debiéndose fijar una solución de compromiso en función de las características de la corriente analizada. Por otra parte, en el caso de la STFT la relación entre la resolución en el tiempo y en frecuencia es la misma para todos los puntos del plano analizados. Es decir, no se puede ajustar a un valor en una determinada zona del plano y cambiar al analizar otra: las resoluciones son por tanto constantes e independientes del punto analizado, al igual que la resolución en frecuencia de la FFT no depende de la frecuencia analizada. Con respecto a la CWT, las resoluciones en el tiempo y en la frecuencia cambian con la frecuencia analizada, pero el tipo de evolución de las resoluciones tan solo es adecuada para analizar determinado tipo de señales como los chirps hiperbólicos. Tal y como se verá en el capítulo 4 de la presente tesis, la imposibilidad de ajustar las resoluciones a voluntad en los distintos puntos del plano provocan que ni la STFT ni la CWT puedan capturar la evolución completa de las componentes de avería.

A su vez, las WVD tienen sus propios inconvenientes. Teóricamente son un tipo de transformadas en las que se consigue la mejor resolución posible en el plano tiempo-frecuencia. No obstante, al tratar de analizar una señal multi-componente, por cada par de componentes de la señal aparece un término de interferencia en el plano tiempo-frecuencia que no se corresponde con la realidad. Esto dificulta observar la evolución de las componentes reales y además puede llevar a confusión. Para resolverlo, se promedian las integrales con unas funciones llamadas núcleos. Sin embargo, estos núcleos no son útiles para todas las señales y además provocan la pérdida de resolución.

Finalmente, existen un tipo de transformadas de la familia de la STFT y la CWT que todavía no han sido utilizadas para el diagnóstico de máquinas eléctricas: el MP y la AGT [98], [99], [100]. Estas dos transformadas (analizadas en detalle en el siguiente capítulo), están basadas al igual que la STFT y la CWT en la correlación de una familia de funciones con la señal a analizar. Por tanto, adolecen también de la imposibilidad de aumentar simultáneamente y de forma ilimitada las resoluciones en el tiempo y en la frecuencia. Sin embargo, poseen unas características adicionales que las hacen potencialmente idóneas para abordar los objetivos planteados en esta tesis. Concretamente, la relación entre ambas resoluciones se puede fijar arbitrariamente, según convenga y de forma distinta en cada uno de los puntos del plano. Así pues, estas transformadas permiten adaptar la relación entre las resoluciones en cada punto a las necesidades en dicho punto según la señal que se analiza, permitiendo obtener la evolución completa de sus componentes.

La metodología de diagnóstico desarrollada en la presente tesis tiene como fundamento una herramienta matemática basada en los principios del MP y la AGT, diseñada teniendo en cuenta el tipo de señal que se analiza, la información de la que se consigue disponer mediante los análisis previos y el objetivo final de obtener las evoluciones de las componentes de avería. Se trata pues de un trabajo de investigación

## Capítulo 2.

novedoso que, tal y como se verá a lo largo de la tesis, permite obtener excelentes resultados con numerosas ventajas en relación a las metodologías de detección tiempo-frecuencia anteriores.

En definitiva, tal y como se verá a lo largo de los ejemplos analizados en los capítulos dedicados a la exposición de la metodología desarrollada (capítulos 4, 5 y 6), así como en los capítulos dedicados a analizar los resultados experimentales (capítulos 7, 8 y 9), la metodología desarrollada presenta muchas ventajas, entre las cuales se encuentran el poder obtener la evolución completa de las componentes de avería (al contrario de lo que sucede con la STFT y la CWT) y hacerlo además de forma optimizada. Por otra parte, se ha tratado el problema del tiempo de cálculo de este tipo de transformada, así como la dificultad de utilizar para la cuantificación la matriz de datos resultante de su aplicación. En definitiva, las evoluciones de las componentes se visualizan completas y con mucha más claridad que en los trabajos de investigación previamente publicados. Además, se consiguen detectar las evoluciones de componentes de menor amplitud causadas por las averías (al contrario que los trabajos anteriores, centrados en el principal componente de avería como el LSH), lo cual aumenta considerablemente la fiabilidad.

### **3.- Base teórica. Técnicas de análisis tiempo-frecuencia.**

La metodología de diagnóstico propuesta consiste en obtener, trazadas en el plano tiempo-frecuencia, las evoluciones de las componentes de la corriente estatórica durante procesos transitorios del motor de inducción, incluidas las vinculadas a los fallos (barras rotas o excentricidad), las cuales indican la avería en la máquina posibilitando el diagnóstico. Por tanto, la pieza clave de la metodología es una herramienta matemática que permite obtener dichas evoluciones.

El objetivo del presente capítulo es el de sentar las bases que permitan la comprensión de la herramienta matemática de análisis tiempo-frecuencia (más concretamente una transformada) diseñada como pieza clave de la metodología de diagnóstico desarrollada en la presente tesis (expuesta en el capítulo 4), así como la comprensión del punto de partida que se toma a la hora de diseñar dicha transformada (el Matching Pursuit, MP) y el paso adelante que supone respecto a transformadas ya utilizadas en el diagnóstico de máquinas eléctricas (la Short Time Fourier Transform, STFT y la Continuous Wavelet Transform, CWT). El conocimiento relativo al análisis tiempo-frecuencia expuesto en el presente capítulo permite además interpretar y analizar adecuadamente los resultados obtenidos a lo largo de la tesis. Los temas tratados han sido analizados anteriormente por la comunidad científica [94], [95], [96]; aun así, el presente capítulo ha sido redactado de forma original y con especial enfoque para abordar la lectura de los capítulos posteriores.

En términos generales, las técnicas de análisis tiempo-frecuencia están basadas en detectar la evolución temporal de las frecuencias de la señal. Para ello se obtiene una función que describe cómo se distribuye la energía de la señal analizada en el plano tiempo-frecuencia. Hay básicamente dos formas de abordar el problema: mediante la correlación con átomos tiempo-frecuencia (STFT, CWT y MP) y mediante la correlación de la señal consigo misma (Wigner-Ville Distributions, WVD). Algunas de estas transformadas han sido utilizadas para la detección de averías en motores de inducción mediante su aplicación a las corrientes de línea en regímenes transitorios. El presente capítulo presenta las bases necesarias para la comprensión del funcionamiento de estas transformadas, estas herramientas matemáticas disponibles en el estado del arte que tratan de detectar las evoluciones de las componentes de una señal en el plano tiempo-frecuencia.

En primer lugar, se realiza una revisión de los conceptos de señal (3.1.1) y energía de una señal (3.1.2). Seguidamente (3.1.3), se explica cómo obtener la distribución de la energía de la señal en los dominios del tiempo y de la frecuencia, así como los problemas que pueden aparecer al analizar señales no estacionarias multicomponentes (3.1.4), generándose la necesidad de definir una densidad de energía tiempo-frecuencia que permita analizar la distribución de la energía en el plano (3.1.4). A continuación se dan ejemplos de distribuciones de la energía (3.2.1), y se revisa el concepto de átomo tiempo-frecuencia (3.2.2), así como el de la caja de Heisenberg asociada (3.2.3), explicando finalmente cómo utilizar dichos átomos tiempo-frecuencia para, correlacionándolos con la señal a analizar, obtener una función de densidad tiempo-frecuencia (3.2.4).

## Capítulo 3.

Finalmente, se analizan las transformadas en grado creciente de complejidad, caracterizada cada una por utilizar una familia de átomos distinta, la cual confiere propiedades concretas a los resultados de la correlación. En primer lugar se analizan las transformadas lineales (que son las utilizadas en la presente tesis): Short Time Fourier Transform (3.3), Wavelet Transform (3.4), Adaptative Gabor Transform y Matching Pursuit (3.5). En el último apartado (3.6) se presentan otras transformadas existentes (completando el estado del arte, pero escapando su análisis al objeto de la tesis), como las transformadas cuadráticas (Wigner-Ville Distribution) o las versiones discretas de las transformadas continuas anteriormente expuestas (como por ejemplo la Discrete Wavelet Transform).

### **3.1.- La energía de una señal y su distribución en el plano tiempo-frecuencia.**

- 3.1.1.- Concepto de señal.
- 3.1.2.- Energía de una señal.
- 3.1.3.- Distribución de la energía en los dominios del tiempo y la frecuencia.
- 3.1.4.- Análisis de señales no estacionarias multicomponentes.
- 3.1.5.- Distribución de la energía en el plano tiempo-frecuencia.

### **3.2.- Correlación con átomos tiempo-frecuencia.**

- 3.2.1.- Ejemplos de distribuciones de la energía.
- 3.2.2.- Definición y ejemplos de átomos tiempo-frecuencia.
- 3.2.3.- Cajas de Heisenberg y principio de incertidumbre.
- 3.2.4.- Correlación con átomos tiempo-frecuencia.

### **3.3.- Short Time Fourier Transform.**

- 3.3.1.- Forma de las cajas de Heisenberg.
- 3.3.2.- Reconstrucción de la señal y su energía.

### **3.4.- Transformada Wavelet.**

- 3.4.1.- Forma de las cajas de Heisenberg.
- 3.4.2.- Reconstrucción de la señal y su energía.

### **3.5.- Matching Pursuit y Adaptative Gabor Transform.**

- 3.5.1.- Construcción de la familia de átomos mediante un método iterativo.
- 3.5.2.- Definición de la transformada Matching Pursuit.
- 3.5.3.- Formas de las cajas de Heisenberg.
- 3.5.4.- Reconstrucción de la señal y su energía.
- 3.5.5.- Conclusión.

### **3.6.- Otras transformadas.**

- 3.6.1.- Energía tiempo-frecuencia cuadrática. Wigner-Ville distributions.
- 3.6.2.- Transformadas discretas.

## 3.1.- La energía de una señal y su distribución en el plano tiempo-frecuencia.

### 3.1.1.- Concepto de señal.

En primer lugar, debemos partir del concepto de señal. Su definición varía en función del contexto. Por ejemplo, en el campo de la electrónica y las telecomunicaciones puede definirse como “Un impulso o una cantidad eléctrica fluctuante, tal como el voltaje, la corriente o la intensidad de campo magnético, cuyas variaciones representan información codificada” (The Free Dictionary by Farlex). Por otra parte, teniendo en cuenta que las señales analógicas se suelen modelar como funciones, en el campo de las matemáticas podemos llamar señal a cualquier aplicación de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{C}^n$ .

Otra posible definición de señal, más cercana al contexto de la presente tesis, es la de cualquier magnitud física que depende del tiempo. Si la magnitud física queda perfectamente representada en un instante de tiempo por un número real, se puede dar una definición más formal como la de una aplicación real de variable real, o en otras palabras, una aplicación que a cada número real (instante de tiempo), le asigna otro número real (valor de la magnitud en dicho instante):

$$h(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Se trata de una definición más restringida que la matemática (pues la aplicación opera de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}$  en vez de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{C}^n$ ), pero más general que la relativa al campo de telecomunicaciones (pues se libera la restricción de magnitud eléctrica así como la propiedad de portadora de información).

Si en vez de hablar de cualquier magnitud física hablamos de corrientes eléctricas, acotamos más el campo y nos acercamos al marco de la tesis. Un ejemplo sería la señal cuyo análisis sirve en la presente tesis para realizar el diagnóstico del motor de inducción: la corriente estatórica; la cual obedece a la definición anterior, pues para cada instante de tiempo, por cada una de las líneas de alimentación del motor de inducción circula una determinada cantidad de amperios representada por un número real (valor instantáneo de la corriente).

### 3.1.2.- Energía de una señal.

Una vez el concepto de señal ha sido definido formalmente, podemos definir la energía de una señal como:

$$\|h\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \cdot dt \quad (3.2)$$

En otras palabras, la energía de una señal es el área debajo de la señal al cuadrado. Se podría haber definido también como el área debajo del cuadrado de la transformada de Fourier (Fourier Transform, FT) de la señal. Efectivamente, utilizando la fórmula de Plancherel se puede demostrar que:

$$\|h\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(f)|^2 \cdot df \quad (3.3)$$

Donde  $\hat{h}$  es la FT de  $h$  y  $f$  es la frecuencia. Utilizando un lenguaje coloquial, podríamos decir que la energía de una señal es una medida de su fuerza, vigor, fortaleza.

### 3.1.3.- Distribución de la energía en los dominios del tiempo y la frecuencia.

Si nos fijamos en las ecuaciones (3.2) y (3.3), podemos ver que las funciones  $|h(t)|^2$  y  $|\hat{h}(f)|^2$  son respectivamente densidades de energía de la señal en tiempo y en frecuencia. Efectivamente, si calculamos  $|h(t_n)|^2$  en un instante determinado  $t_n$  y multiplicamos el resultado por un  $dt$  alrededor de  $t_n$ , obtenemos precisamente la energía que se encuentra dentro del  $dt$ . Si repetimos la operación en cada punto de la recta real y sumamos (integramos en definitiva a lo largo de la recta real), obtenemos la energía total de la señal (que es exactamente el resultado que muestra (3.2)). Por tanto, la función  $|h(t)|^2$  indica la densidad de energía en cada instante, esto es, la energía por unidad de “longitud temporal”. En otras palabras,  $|h(t)|^2$  informa sobre cómo está distribuida la energía de la señal a lo largo del tiempo. Análogamente,  $|\hat{h}(f)|^2$  describe la distribución de la energía de la señal en el dominio de la frecuencia.

### 3.1.4.- Análisis de señales no estacionarias multicomponentes.

Estas dos funciones pueden aportar mucha información acerca de la señal, pero a menudo, tal y como veremos a continuación, resultan insuficientes. Analicemos, a modo de ejemplo, el sonido capturado en un concierto. Recordemos que, cuando escuchamos una nota musical, físicamente percibimos la vibración del aire (producida por el instrumento) a una determinada frecuencia relacionada con la nota. En el caso más simple, podemos imaginar un único instrumento, por ejemplo el violín, tocando una única nota a lo largo de todo el concierto y siempre igual de fuerte, al mismo volumen (qué aburrido). La señal capturada tiene por tanto una única componente (la vibración producida por el violín), de frecuencia constante (la asociada a la nota que está tocando) y de amplitud constante (lo fuerte que el músico toca). Como la frecuencia de la componente no cambia, se trata de una señal estacionaria. La FT de la señal será cero en todo el espectro menos a la frecuencia mencionada, en la cual mostrará un pico. Aunque el músico toque más o menos fuerte a lo largo del concierto, podemos realizar idéntico análisis, con la particularidad de que la amplitud de la señal en el tiempo cambiará. Se puede complicar el asunto si se trata de un concierto de verdad, en el cual el violinista produce vibraciones del aire a frecuencias cambiantes (distintas notas). En éste caso la señal continúa teniendo una única componente (hay una sola frecuencia en cada instante de tiempo), pero la señal ya no es estacionaria pues la frecuencia no es constante. En éste caso ya no podemos utilizar la FT para analizar la distribución de la energía de la señal en frecuencia, pues ésta requiere que la señal a analizar sea estacionaria (sus componentes sean periódicas de frecuencia constante).

Si además al violín lo acompaña una orquesta sinfónica, la señal de sonido capturada tendrá varias componentes, varias frecuencias en cada instante: tantas componentes como instrumentos componen la orquesta, tantas frecuencias como notas salen de la orquesta. Para que la señal de sonido capturada sea estacionaria, cada instrumento debe tocar una única nota a lo largo de todo el concierto (insufrible). La señal en el tiempo es en este caso una suma de componentes de frecuencia y amplitud constantes. La FT tendrá una serie de picos (tantos como instrumentos), a las frecuencias asociadas a cada una de las notas. En un concierto real, la nota que toca cada instrumento varía, y por tanto la frecuencia de la componente que aporta al sonido total capturado cambia también. En éste caso, la FT no puede ser aplicada pues se trata de una señal no estacionaria.

Concluyendo, al analizar una señal, tanto en el caso mono-componente como en el multi-componente, si la frecuencia es variable, entonces con las funciones presentadas hasta el momento podemos estudiar la distribución de energía en el dominio temporal (aunque la amplitud sea también variable) pero no en el frecuencial. Además, en el caso multi-componente, el análisis temporal será de la densidad de energía global de la señal en cada instante, y no podremos conocer cuáles son las aportaciones de cada componente, en cada instante, a la energía total.

La corriente de un motor de inducción trabajando en régimen permanente es como el sonido de un concierto en el cual cada instrumento toca una sola nota y siempre al mismo volumen: está constituido por un conjunto de componentes de frecuencia y amplitud constantes. Podemos analizar cuales son sus componentes (en términos de frecuencia y amplitud), utilizando la FT. La corriente de un motor de inducción en régimen transitorio es como la música de un concierto real: las componentes de la corriente tienen frecuencias que evolucionan con el tiempo, cambiando normalmente también sus amplitudes. Para poder analizar señales transitorias necesitamos herramientas matemáticas que describan dicha evolución. Es decir, que muestren las frecuencias y amplitudes de las componentes de la señal en función del tiempo.

### **3.1.5.- Distribución de la energía en el plano tiempo-frecuencia.**

Las frecuencias y amplitudes de las componentes de la señal en función del tiempo se obtienen utilizando herramientas matemáticas que describen cómo se distribuye la energía de la señal en el plano tiempo-frecuencia. Esto es así pues, si en un instante  $t$  la corriente tiene una componente cuya frecuencia vale  $f$  (y su amplitud es significativa respecto a las restantes componentes), la energía alrededor del punto  $(t, f)$  del plano tiempo-frecuencia será relativamente elevada. O lo que es equivalente, la densidad de energía en  $(t, f)$  será elevada. Por tanto, si conseguimos obtener una función  $\rho_h$  que para cada punto del plano tiempo-frecuencia  $(t, f)$  proporcione la densidad de energía de la señal  $h$  en dicho punto, entonces al representar dicha función  $\rho_h(t, f)$ , obtendremos la evolución de los componentes de la señal. Así pues,  $\rho_h(t, f)$  es una función que describe como se distribuye la energía de la señal en el plano tiempo-frecuencia. Se trata también de una función de densidad, pero en vez de ser densidad en el tiempo o en la frecuencia como en los dos casos anteriores, es una función de densidad en el plano tiempo-frecuencia. Necesitamos una herramienta que nos proporcione dicha función, al igual que la FT nos proporcionaba la densidad de

### Capítulo 3.

energía en frecuencia. El análisis realizado con dicha herramienta será un análisis donde el tiempo y la frecuencia participan a la vez (se casan, como dice Mallat), y no de forma separada como en las funciones presentadas a través de las ecuaciones (3.2) y (3.3).

El problema es más complicado de lo que parece pues, de acuerdo con el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, dicha función ideal no existe. Podemos definir funciones que se asemejen a la función de densidad tempo-frecuencial  $\rho_h$ , pero nunca serán, como veremos en el siguiente apartado, exactamente tal y como hemos descrito  $\rho_h$ .

## 3.2.- Correlación con átomos tiempo-frecuencia.

Volviendo a las conclusiones del punto anterior, dada una función real de variable real  $h(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nos interesa obtener una función  $\rho_h(t, f)$  que proporcione la densidad de energía de la función  $h$  en cada punto  $(t, f)$  del plano tiempo-frecuencia. Tal y como se expuso en el capítulo 2, a día de hoy existen esencialmente dos formas de abordar el problema y obtener una función de éste tipo. La primera forma se basa en la correlación de la señal con un conjunto de funciones llamadas átomos tiempo-frecuencia. Todos los puntos restantes del presente capítulo están dedicados a sentar las bases y analizar después en profundidad el primer planteamiento, siendo éste el utilizado a lo largo de la tesis para obtener la densidad de energía de las corrientes estáticas de las máquinas a diagnosticar. Como excepción, y en aras de la completitud, en la primera parte del último punto (3.6) se presenta brevemente la segunda forma de abordar el problema, basada en la correlación de la señal con una traslación en el tiempo y en frecuencia de sí misma, planteamiento no utilizado en la presente tesis.

### 3.2.1.- Ejemplos de distribuciones de la energía.

El primer planteamiento está basado en el uso de un tipo de función llamada átomo tiempo-frecuencia. Antes de presentar el concepto de átomo tiempo-frecuencia, veamos unos ejemplos de cómo se distribuye, en el plano tiempo-frecuencia, la energía de algunas funciones ampliamente conocidas.

Las funciones que vamos a analizar son las siguientes:

- $h_1(t) = \cos(2\pi 50t)$
- $h_2(t) = \cos(\pi 50t^2)$
- $h_3(t) = \cos[2\pi 90t - \pi(80/6)t^2]$
- $h_4(t) = \delta(t-1)$

Las tres primeras son funciones sinusoidales. Sus argumentos son:

- $\phi_1(t) = 2\pi 50t$  rad
- $\phi_2(t) = \pi 50t^2$  rad
- $\phi_3(t) = 2\pi 90t - \pi(80/6)t^2$  rad

La frecuencia instantánea de una función sinusoidal se define como  $\omega(t) = d\phi(t)/dt$ , es decir, el cociente entre un incremento de ángulo dividido por el tiempo que tarda en cubrirlo. Si aplicamos esta definición a cada uno de los tres ángulos obtenemos:

- $\omega_1(t) = 2\pi 50$  rad/s
- $\omega_2(t) = 2\pi 50t$  rad/s

### Capítulo 3.

- $\omega_3(t) = 2\pi 90 - 2\pi(80/6)t$  rad/s

Expresadas en Hz serían:

- $f_1(t) = 50$  Hz
- $f_2(t) = 50t$  Hz
- $f_3(t) = 90 - (80/6)t$  Hz

Por otra parte, la cuarta función es una delta de dirac trasladada a 1. Por tanto, esta función es cero en cualquier punto distinto a 1 e infinito en 1.

Todas son señales con una única componente. En el primer caso, tenemos una componente de frecuencia constante e igual a 50 Hz. Como consecuencia, la energía de la señal se distribuye en el plano tiempo-frecuencia alrededor de 50 Hz, con independencia del instante considerado, siendo nula en otras zonas del plano (Fig. 3.1a). La segunda función está compuesta por una única componente de frecuencia variable trazando ésta la recta  $50t$  Hz. Se trata de un chirp lineal. Así pues, su energía se debe distribuir en el plano tiempo-frecuencia alrededor de dicha recta (Fig. 3.1b). En tercer lugar, tenemos una componente de frecuencia variable según la recta  $90 - (80/6)t$  Hz, alrededor de la cual se distribuye la energía en el plano (Fig. 3.1c). En los tres casos, la energía de la función se concentra alrededor de la trayectoria de su frecuencia instantánea. Por último, el delta de dirac concentra su energía alrededor del instante en el cual su valor se vuelve infinito, siendo cero para todos los demás instantes considerados, con independencia de la frecuencia analizada (Fig. 3.1d).

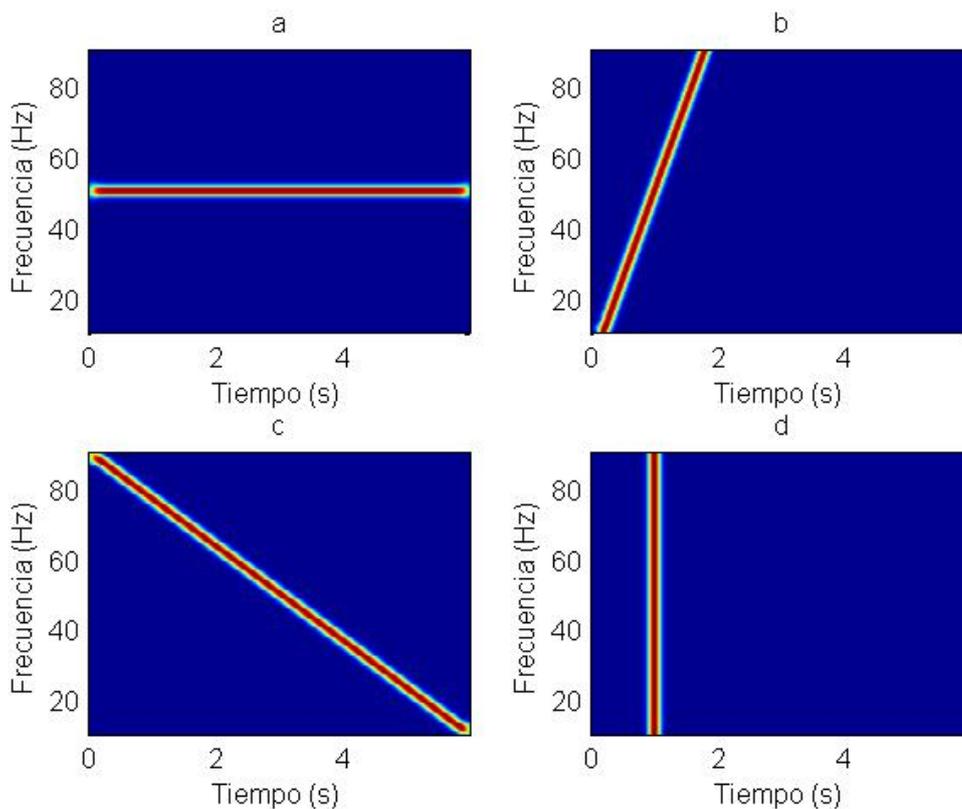


Fig. 3. 1 Ejemplos de distribución de la energía en el plano tiempo-frecuencia.

La distribución de la energía de cada una de estas señales, en el plano tiempo-frecuencia, ha sido obtenida utilizando la STFT. Lo mismo ocurre con las restantes gráficas de este tipo a lo largo del presente capítulo. Las características básicas de la STFT se detallan en el apartado 3.3.

### 3.2.2.- Definición y ejemplos de átomos tiempo-frecuencia.

Se acaban de analizar ejemplos de distribuciones de energía de cuatro tipos de funciones distintas, distribuyéndose la energía en rectas horizontales, rectas verticales y rectas inclinadas de distinta pendiente. Por el contrario, un átomo tiempo-frecuencia es una función cuya energía se encuentra concentrada alrededor de un punto del plano tiempo-frecuencia. Existen numerosos ejemplos de éste tipo de función, de entre los cuales, los dos utilizados en la presente tesis son las funciones de Gabor y las Frequency B-Splines. A continuación se da una breve introducción a dichas funciones. Las funciones de Gabor son muy conocidas en la literatura técnica y han sido utilizadas en algún artículo para el diagnóstico de máquinas eléctricas. Sus propiedades se analizan en el apéndice matemático, apartado AM 3. Las Frequency B-Splines se utilizan por primera vez en el campo del diagnóstico en la presente tesis. Sus propiedades han sido analizadas en profundidad en el capítulo 6. En el último apartado del capítulo 6 se encuentra una comparación entre ambos tipos de átomos.

#### Funciones de Gabor.

Las funciones de Gabor son funciones complejas de variable real que responden a la siguiente ecuación:

$$\psi(t) = C_{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{i2\pi f_c t} \quad (3.4)$$

Donde:

- $\sigma \in \mathbb{R}^+$  es el parámetro de desviación o de dispersión <sup>1</sup>.
- $f_c \in \mathbb{R}^+$  es la frecuencia central de la función.
- $C_{\sigma} \in \mathbb{R}^+$  es la constante de normalización (la cual depende a su vez de  $\sigma$ ).

Cumpléndose  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$  y siendo la constante de normalización:

$$C_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma}} \quad (3.5)$$

Por ejemplo, la Fig. 3.2 muestra la distribución de la energía en el plano tiempo-frecuencia de una función de Gabor de parámetros  $\sigma = 0.1$  y  $f_c = 50$  Hz. La Fig. 3.3 es un detalle de la Fig. 3.2.

<sup>1</sup> Notación:  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ ;  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .

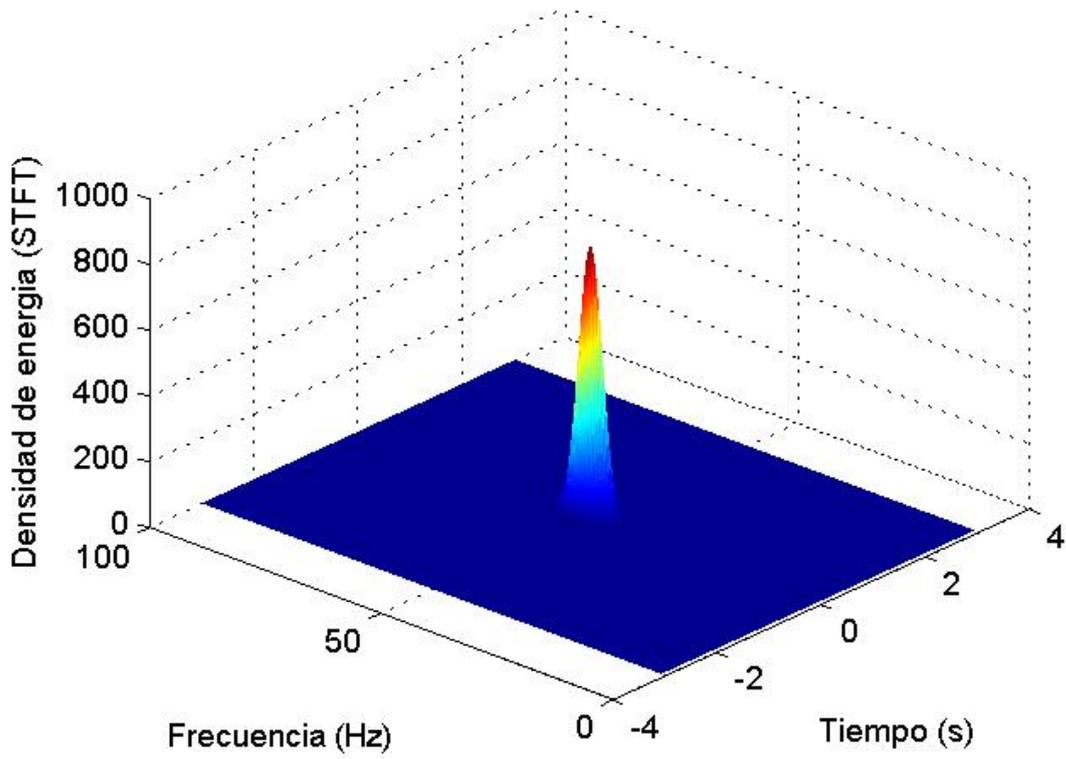


Fig. 3. 2 Distribución de la energía de una función de Gabor de parámetros  $\sigma = 0.1$  y  $f_c = 50$  Hz .

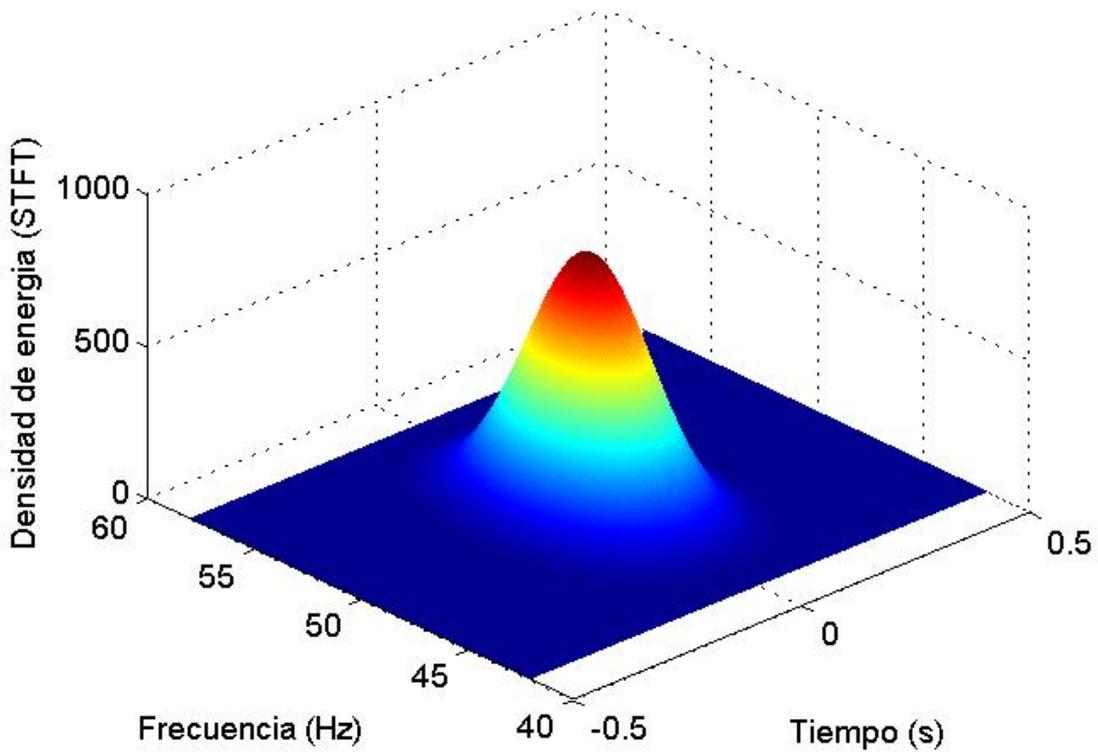


Fig. 3. 3 Detalle de la Fig. 3.2.

En el apartado AM 3 del apéndice matemático se da una definición más extensa de las funciones de Gabor analizando sus propiedades (AM 3.1), se presenta un recordatorio de la función gaussiana en la cual están basadas las funciones de Gabor (AM 3.2) y seguidamente (AM 3.3) se demuestra que se cumplen las hipótesis necesarias para aplicar las fórmulas deducidas en AM 2 (concretamente en AM 2.2 y AM 2.3), que permiten obtener su frecuencia central así como las dimensiones de sus cajas de Heisenberg. Finalmente (AM 3.4) se utilizan dichas fórmulas para calcular las dimensiones de las cajas de Heisenberg y calcular posteriormente su cociente, el cual se define en el apartado (4.2.1) como la pendiente del átomo tiempo-frecuencia.

### Frequency B-Splines.

Las Frequency B-Splines son funciones complejas de variable real que responden a la siguiente ecuación:

$$\psi(t) = C_{m,f_b} \left[ \text{sinc} \left( \frac{f_b t}{m} \right) \right]^m e^{i2\pi f_c t} \quad (3.6)$$

Donde:

- $m \in \mathbb{N}$  es un número natural cualquiera.
- $f_b \in \mathbb{R}^+$  es el ancho de banda.
- $f_c \in \mathbb{R}^+$  es la frecuencia central de la función.
- $C_{m,f_b} \in \mathbb{R}^+$  es la constante de normalización (la cual depende a su vez de  $m$  y de  $f_b$ ).

Cumpléndose  $f_c > f_b/2 > 0$  y siendo la constante de normalización:

$$C_{m,f_b} = \sqrt{\frac{f_b}{m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx}} \quad (3.7)$$

Por ejemplo, la Fig. 3.4 muestra la distribución de la energía en el plano tiempo frecuencia de una Frequency B-Spline de parámetros  $m = 2$ ,  $f_b = 5$  Hz y  $f_c = 50$  Hz. Se trata de una figura del mismo tipo que las Fig. 3.2 y 3.3 pero en vez de representar el resultado en 3D está representado en 2D, colocándose el eje z perpendicular al papel. La Fig. 3.5 es un detalle de la Fig. 3.4.

En el capítulo 6 se da una definición más extensa de las FBS analizando sus propiedades (6.1), se presenta un recordatorio de la función seno cardinal en la cual están basadas las FBS (6.2) y seguidamente (6.3) se demuestra que se cumplen las hipótesis necesarias para aplicar las fórmulas deducidas en AM 2 (concretamente en AM 2.2 y AM 2.3), que permiten obtener su frecuencia central así como las dimensiones de sus cajas de Heisenberg.

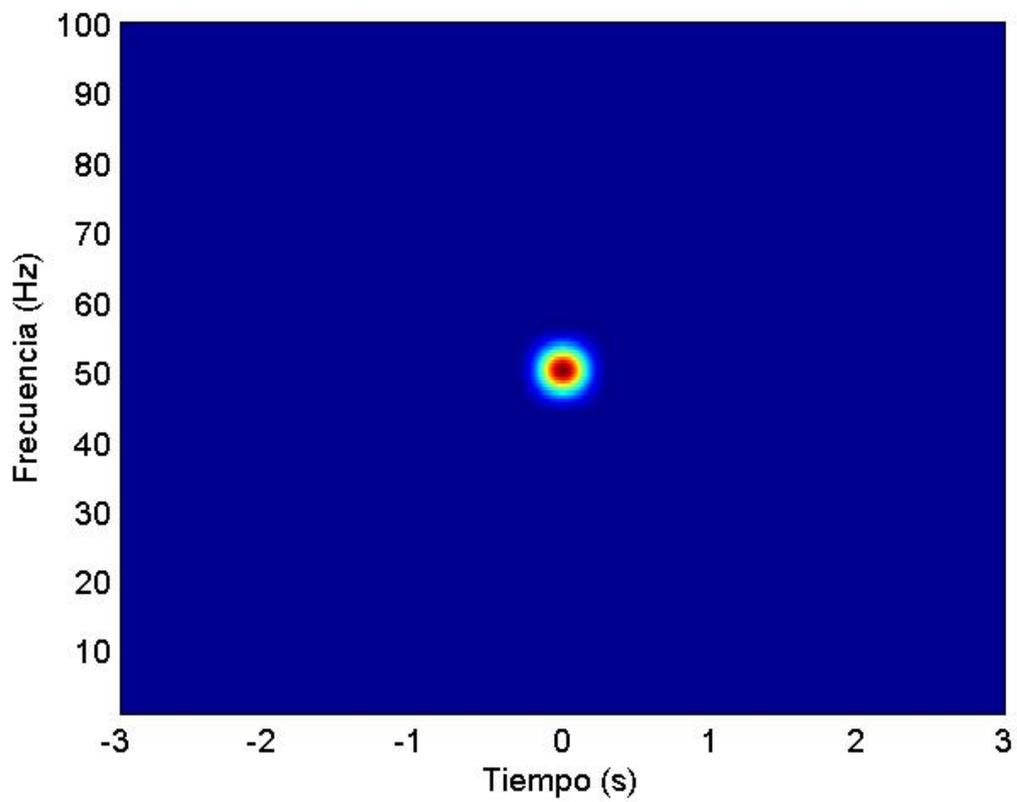


Fig. 3. 4 Distribución de la energía de una FBS de parámetros  $f_b = 5$  Hz y  $f_c = 50$  Hz .

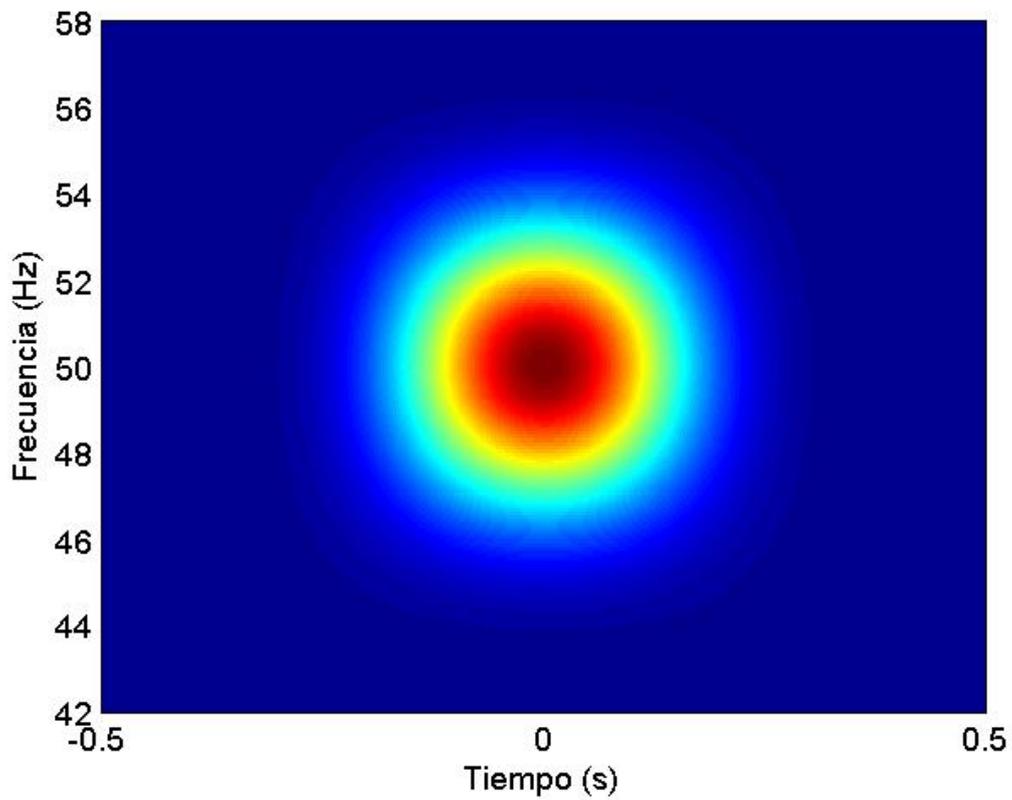


Fig. 3. 5 Detalle de la Fig. 3.4.

Finalmente, en el apartado 6.4 se utilizan dichas fórmulas para calcular la pendiente de la caja de Heisenberg de una FBS en función de sus parámetros (fórmula clave para la aplicación de la metodología de diagnóstico presentada en el capítulo 4). Finalmente, en el apartado 6.5, se comparan las funciones de Gabor y las FBS, justificando la elección de estas últimas en el desarrollo de la metodología de diagnóstico propuesta en esta tesis. La importancia del análisis realizado en dicho capítulo se entiende tras la lectura del capítulo 4, donde se presenta la metodología de diagnóstico diseñada.

### 3.2.3.- Cajas de Heisenberg y principio de incertidumbre.

Tal y como se ha visto, la energía de una señal puede estar concentrada en un instante de tiempo (función Delta de Dirac), estando por otra parte distribuida uniformemente a lo largo de todas las frecuencias. Análogamente, la energía de una señal puede estar concentrada en una frecuencia (función sinusoidal), estando por otra parte distribuida uniformemente a lo largo de todos los instantes de tiempo. Pero resulta imposible, tal y como se desprende del principio de incertidumbre de Heisenberg, que la energía se encuentre concentrada a la vez en un instante de tiempo y a una frecuencia determinada. Es decir, es imposible construir una señal cuya energía se concentre en un punto del plano tiempo-frecuencia. Lo máximo a lo que se puede aspirar es que su energía se concentre alrededor de un punto, condición definitoria de los átomos tiempo-frecuencia (como en los casos de las funciones de Gabor y las Frequency B-Splines), pero nunca se encontrará toda la energía en dicho punto.

Para estudiar de forma cuantitativa cómo se distribuye la energía de una señal, y en especial la de un átomo tiempo-frecuencia alrededor de un punto, se utilizan parámetros estadísticos. En primer lugar calculamos el punto del plano tiempo-frecuencia alrededor del cual se distribuye la energía de la señal. Dicho punto viene definido por un instante de tiempo y una frecuencia. El instante es aquel a cuya derecha e izquierda de la recta real se encuentra una misma cantidad de energía:

$$t_c = \frac{1}{\|h\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |h(t)|^2 dt \quad (3.8)$$

En otras palabras, si la función de densidad de energía en el dominio temporal  $|h(t)|^2$ , dividida por la energía total de la señal  $\|h\|^2$ , se entiende como una función de probabilidad, entonces la ecuación anterior permite obtener el centro de dicha distribución de probabilidad. Análogamente, la frecuencia central es aquella que tiene la misma cantidad de energía en sus frecuencias superiores como en las inferiores:

$$f_c = \frac{1}{\|h\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f |\hat{h}(f)|^2 df \quad (3.9)$$

La ecuación anterior se puede interpretar como el cálculo del centro de la distribución de probabilidad definida por la densidad de probabilidad  $|\hat{h}(f)|^2 / \|h\|^2$ .

### Capítulo 3.

La dispersión de la energía, alrededor de éstos dos valores medios, y en el sentido de los ejes temporal y frecuencial respectivamente, se puede cuantificar a través del cálculo de las siguientes varianzas de las ya definidas distribuciones de probabilidad:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \frac{1}{\|h\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_c)^2 |h(t)|^2 dt \\ \sigma_f^2 &= \frac{1}{\|\hat{h}\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_c)^2 |\hat{h}(f)|^2 df\end{aligned}\tag{3.10}$$

Son por tanto una medida de lo concentrada o dispersa que se encuentra la energía de la señal alrededor de  $(t_c, f_c)$ . En otras palabras, son una medida del grado de concentración o de dispersión (según se mire), de la energía de la señal alrededor de  $(t_c, f_c)$ . Teniendo en cuenta que los átomos tiempo-frecuencia están normalizados siendo su energía igual a 1 tenemos  $\|h\|^2 = 1$  quedando las expresiones:

$$\begin{aligned}t_c &= \int_{-\infty}^{+\infty} t |h(t)|^2 dt & \sigma_t^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_c)^2 |h(t)|^2 dt \\ f_c &= \int_{-\infty}^{+\infty} f |\hat{h}(f)|^2 df & \sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_c)^2 |\hat{h}(f)|^2 df\end{aligned}\tag{3.11}$$

Para realizar una representación esquemática de la distribución de la energía de una señal, especialmente la de un átomo, en el plano tiempo-frecuencia se considera el punto alrededor del cual se distribuye la energía  $(t_c, f_c)$ , y centrado en dicho punto se representa un rectángulo de base  $\sigma_t$  y altura  $\sigma_f$ , tal y como podemos ver en la Fig. 3.6.

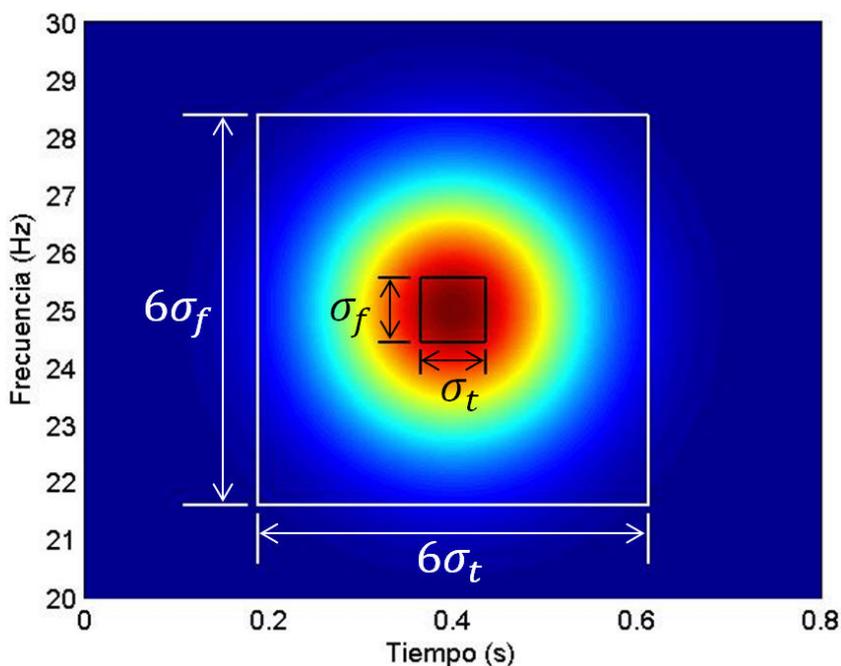


Fig. 3. 6 Caja de Heisenberg.

El rectángulo (trazado de color negro en la figura), recibe el nombre de caja de Heisenberg: representa esquemáticamente el centro de la distribución de la energía y cómo se dispersa en la dirección de los ejes del tiempo y de la frecuencia. No obstante, se observa cómo una parte significativa de la energía del átomo se encuentra fuera de la caja. Para que la caja represente, no sólo la forma en la que la energía se dispersa, sino que además contenga la práctica totalidad de dicha energía, se puede representar multiplicada por 6 (trazada de color blanco en la figura). En lo sucesivo, al referirnos a la caja de Heisenberg de un átomo nos referiremos a la caja multiplicada por seis, para poder afirmar que contiene casi la totalidad de la energía del átomo.

Debe notar el lector que, efectivamente, tal y como se acaba de indicar, la caja de Heisenberg da información de cómo se distribuye la energía en la dirección de los ejes del plano, lo cual no quiere decir que la distribución de la energía de la señal sea efectivamente rectangular. Por ejemplo, en los dos casos analizados anteriormente, la energía se distribuye en una forma elíptica, en vez de rectangular. Es decir, si trazamos sucesivas elipses de tamaño creciente, centradas todas ellas en el mismo punto y siempre con sus ejes paralelos a los del plano, en los puntos de una misma elipse la energía habrá decrecido hasta un mismo valor, estando el máximo de densidad de energía en el punto central. Existirá una elipse que sea tangente en sus cuatro extremos a los 4 puntos medios de los lados de la caja de Heisenberg. En éste caso, aunque los puntos con un mismo nivel de dispersión formen una elipse y no un rectángulo, la caja de Heisenberg da una idea del nivel de dispersión y su forma. Pero, podemos encontrar por otra parte señales, como los chirps, cuya energía se distribuye en una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes del tiempo y la frecuencia, en cuyo caso, para caracterizar la dispersión de su energía, deberemos utilizar otros parámetros, pues la caja de Heisenberg clásica no representa esquemáticamente dicha forma de dispersión. Si analizamos finalmente una señal cuya energía no se concentra alrededor de un punto, la caja de Heisenberg no esquematiza en absoluto la dispersión de su energía.

Remarcamos pues, que la caja de Heisenberg da información de cómo se distribuye la energía desde el centro y en direcciones paralelas a las de los ejes del plano. Y los átomos que se utilizarán en la presente tesis tienen una distribución de la energía elíptica alrededor del centro y de ejes paralelos a los ejes del plano tal y como ya se ha mencionado, de tal forma que la caja de Heisenberg representa bien la distribución de su energía. Podemos por tanto pensar, para simplificar, que la energía del átomo se encuentra concentrada completamente dentro de su caja de Heisenberg, aunque no pueda ser nunca así (tal y como vemos a continuación) y fuera de ésta la energía continúe decreciendo necesariamente, al menos en una de las dos direcciones, no llegando nunca a cero.

El principio de incertidumbre de Heisenberg afirma que, sea una función  $h \in L^2(\mathbb{R})$ , sus desviaciones típicas cumplen ([94], página 31):

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.12)$$

En otras palabras, si intentamos obtener un átomo cuya energía se encuentra muy bien concentrada alrededor de  $(t_c, f_c)$  en el sentido del eje de frecuencias, es decir, un átomo tal que su desviación típica  $\sigma_f$  sea muy reducida, entonces forzosamente la otra

desviación típica  $\sigma_t$  será elevada (lo suficiente como para que  $\sigma_t \geq 1/\sigma_f 4\pi$ ), teniendo por tanto el átomo una mala concentración temporal de la energía alrededor de  $(t_c, f_c)$ . Existe pues siempre una solución de compromiso entre la concentración de la energía en el tiempo y en frecuencia, de tal forma que no puede disminuirse dicha concentración en ambos dominios de forma indefinida, debiendo cumplirse el límite indicado en (3.12). Siguiendo con la interpretación gráfica de la anterior figura, el principio de incertidumbre dice que el área de la caja de Heisenberg no puede ser arbitrariamente pequeña, teniendo como límite el indicado en (3.12). Si conseguimos alcanzar dicho límite, al disminuir  $\sigma_t$  inevitablemente haremos crecer  $\sigma_f$  y a la inversa.

Así pues, según el principio de incertidumbre de Heisenberg, la energía no se puede concentrar en un punto, pues las dispersiones temporales y frecuenciales no se pueden reducir arbitrariamente de forma simultánea. Pero además se puede demostrar que la energía tampoco se puede concentrar en un rectángulo centrado en un punto, siendo absolutamente cero fuera de él. En otras palabras, si la energía se concentra en una determinada banda de frecuencia, siendo cero fuera de ésta, entonces su distribución en el tiempo se extiende a toda la recta real, no pudiendo quedar confinada simultáneamente a un determinado intervalo de tiempo. Las Frequency B-Splines son un ejemplo de éste caso, pues su FT se anula fuera de una determinada banda de frecuencia de amplitud  $f_b$  (tal y como vemos en el Capítulo 6), mientras la función en el dominio temporal no es de soporte compacto, extendiéndose a lo largo de toda la recta real, aunque de forma considerablemente atenuada. De la misma forma, si la energía se concentra en un determinado intervalo de tiempo, siendo cero fuera de éste, entonces su distribución en frecuencia se extiende a todo el espectro, no pudiendo quedar confinada simultáneamente a una determinada banda de frecuencia. Concluyendo, la energía no sólo no puede concentrarse en un punto, sino que tampoco puede concentrarse por completo dentro de un rectángulo, debiendo decrecer paulatinamente hacia cero al menos en una dirección ([94], página 32).

#### **3.2.4.- Correlación con átomos tiempo-frecuencia.**

Resumiendo, un átomo tiempo-frecuencia es una señal cuya energía se concentra alrededor de un punto del plano tiempo-frecuencia. Dicho punto, y una medida de la dispersión de la energía a su alrededor en las direcciones de los ejes del plano vienen dados por (3.11). El punto y las dos medidas de dispersión se pueden representar esquemáticamente en el plano como un rectángulo llamado caja de Heisenberg (Fig. 3.6). De forma simplificada, y en especial para los átomos utilizados en la presente tesis, podemos suponer que la energía de los átomos se encuentra concentrada enteramente dentro de la caja (aunque acabamos de ver que esto no es estrictamente cierto, independientemente de cuál sea el átomo considerado).

Al correlacionar la señal a analizar con un átomo obtenemos información acerca de la energía que la señal tiene en el área definida por la caja de Heisenberg del átomo. Si la señal tiene muy poca energía en la caja, entonces el resultado de la correlación será bajo. Si la señal tiene mucha energía en la caja, entonces el resultado de la correlación será elevado. Repitiendo la operación de correlación utilizando átomos centrados en distintos puntos del plano obtenemos la información que necesitamos: una medida de la energía de la señal a analizar en un vecindario relativamente pequeño alrededor de cada uno de dichos puntos del plano.

Veamos todo esto mediante un razonamiento formal. La correlación entre la señal  $h \in L^2(\mathbb{R})$  y el átomo  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  se define como sigue:

$$\langle h, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi^*(t) dt \quad (3.13)$$

Siendo  $\psi^*$  el conjugado de  $\psi$ . La fórmula de Parseval demuestra que:

$$\langle h, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(f) \hat{\psi}^*(f) df \quad (3.14)$$

Podemos pues afirmar que, al ser la función  $\psi$  prácticamente nula en instantes lejanos a  $t_c$ , entonces según (3.13)  $\langle h, \psi \rangle$  sólo da información de la función  $h$  relativa al vecindario de  $t_c$ . De la misma forma, al ser la función  $\hat{\psi}$  prácticamente nula en frecuencias lejanas a  $f_c$ , entonces según (3.14)  $\langle h, \psi \rangle$  sólo da información de la función  $\hat{h}$  relativa al vecindario de  $f_c$ . En definitiva, al calcular  $\langle h, \psi \rangle$  estamos aplicando un filtro tiempo-frecuencia a la señal  $h$ , de tal forma que el valor que recuperamos da información acerca de su energía en los alrededores de  $(t_c, f_c)$ . Simplificando, si consideramos que la energía del átomo es cero fuera de su caja de Heisenberg (realidad a la que nos podemos aproximar pero nunca alcanzar, pudiendo anularse completamente en una dirección u otra pero no en las dos a la vez), entonces el resultado de  $\langle h, \psi \rangle$  es una medida de la energía de la función  $h$  dentro de la caja de Heisenberg de  $\psi$ . Si correlacionamos la señal con un conjunto de átomos tiempo-frecuencia cada uno centrado en un punto del plano, obtenemos lo que se llama una transformada lineal tiempo-frecuencia, la cual nos permite estudiar cómo se distribuye la energía de la señal al tener una medida de su energía en cada una de las cajas centradas en los distintos puntos del plano. En función del tipo de familia de átomos utilizada para definir la correlación, obtenemos un tipo u otro de transformada. En los 3 siguientes apartados se estudian los ejemplos más conocidos de transformadas, viendo cómo cada transformada se distingue por tener unas formas u otras de las cajas de Heisenberg en los distintos puntos del plano.

Tal y como veremos más adelante, en los casos expuestos en los siguientes apartados se puede demostrar que el módulo de la correlación al cuadrado  $|\langle h, \psi \rangle|^2$  es la densidad de energía de la señal a analizar  $h$ , en la caja de Heisenberg del átomo utilizado para calcular la correlación  $\psi$  (en algún caso es un poco más complejo, como la transformada wavelet, donde el resultado hay que multiplicarlo por un factor de normalización). En otras palabras, si multiplicamos  $|\langle h, \psi \rangle|^2$  por el área de la caja obtenemos la energía total que  $h$  tiene dentro de la caja. Así pues, la correlación no es más que un filtro aplicado a la señal mediante el cual se obtiene una medida de la energía de la señal, en forma de densidad de energía tiempo-frecuencia, asociada al área de la caja del átomo utilizado.

### Capítulo 3.

El resultado ideal aparecería si el área de la caja de Heisenberg pudiese tender a cero. Entonces obtendríamos la densidad de energía de la señal en un diferencial de área alrededor del punto. Sin embargo, tal y como hemos visto, el área de la caja tiene un límite inferior. De aquí que no podamos obtener la densidad en un punto, sino una medida de la densidad en el área alrededor del punto. Cuanto más pequeña sea el área, más adecuado resultará vincular el resultado al centro de la caja, como si efectivamente se tratara de una densidad asociada a dicho punto y no una especie de medida ponderada de las densidades de los puntos del área. Es por ello que conviene utilizar funciones con cajas de Heisenberg de área reducida: muy cercana al mínimo antes mencionado, como en el caso de las Frequency B-Splines (tal y como se analiza en el Capítulo 6), o alcanzando efectivamente dicho mínimo, como en el caso de las funciones de Gabor. Éste es el principal inconveniente del primer planteamiento para obtener la distribución de la energía de una señal en el plano tiempo-frecuencia: nunca obtendremos una densidad de energía puntual, sino asociada a un área.

### 3.3.- Short Time Fourier Transform.

La Short Time Fourier Transform (STFT) de una función  $h \in L^2(\mathbb{R})$  es una transformada lineal tiempo-frecuencia definida como la correlación de dicha función con una familia de átomos tiempo-frecuencia definidos como sigue:

$$\psi_{t_c, f_c}(t) = e^{i2\pi f_c t} \psi(t - t_c) \quad (3.15)$$

Donde  $\psi(t)$  es una función real de variable real ( $\psi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), con simetría par ( $\psi(t) = \psi(-t)$ ) y de energía unitaria ( $\|\psi\|^2 = 1$ ), a la cual se le llama ventana. La función  $\psi_{t_c, f_c}(t)$  es el resultado de realizar una traslación a  $t_c$  y una modulación a la frecuencia  $f_c$  de dicha ventana. Se puede razonar fácilmente que como  $\|\psi\|^2 = 1$  entonces  $\|\psi_{t_c, f_c}\|^2 = 1 \quad \forall (t_c, f_c) \in \mathbb{R}^2$ .

En definitiva, la STFT de una función  $h \in L^2(\mathbb{R})$ , nombrada como  $Sh(t_c, f_c)$ , es una transformada tiempo-frecuencia definida a través de la fórmula común a este tipo de transformadas:

$$Sh(t_c, f_c) = \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi_{t_c, f_c}^*(t) dt \quad (3.16)$$

Cobra rasgos característicos al sustituir la expresión de la familia de átomos propia de la STFT:

$$Sh(t_c, f_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi f_c t} \psi(t - t_c) dt \quad (3.17)$$

donde la función  $\psi$  cumple con las propiedades anteriormente citadas.

Esta transformada recibe también el nombre de Windowed Fourier Transform. Los dos nombres con los que se designa a la transformada son lógicos pues en esencia se trata de restringir el cálculo de la transformada de Fourier al vecindario de  $t_c$ , es decir, que calculamos la transformada de Fourier de la señal limitada a un período corto de tiempo alrededor de  $t_c$ . Para ello multiplicamos la señal a analizar por la ventana trasladada obteniendo  $h(t)\psi(t - t_c)$ , para calcular posteriormente la transformada de Fourier de éste resultado. A ésta transformada se la llama también transformada de Gabor pues fue introducida por el físico inglés de origen húngaro Dennis Gabor, en 1946, para medir “las variaciones de frecuencia de los sonidos” [97] (restringiéndose en principio utilizando solo funciones de Gabor).

### 3.3.1.- Forma de las cajas de Heisenberg.

La pregunta más importante que debemos plantear para comprender el funcionamiento de ésta transformada y sus diferencias con las restantes es: ¿cuáles son las formas, a lo largo del plano, de las cajas de Heisenberg de la familia de átomos utilizada? La respuesta es que sus dimensiones son constantes a lo largo del plano, independientes del punto analizado. Es decir, que los átomos tiempo-frecuencia de una familia utilizada para calcular la STFT, se encuentran cada uno centrado en un punto distinto del plano, pero todos tienen la misma caja de Heisenberg, independientemente del punto en el que se encuentre centrado. Por ejemplo, en la Fig. 3.7 se muestra de forma conjunta la distribución de la energía en el plano tiempo-frecuencia de distintos átomos propios de una familia utilizada para calcular la STFT, observándose cómo, aunque están centrados en distintos puntos del plano, sus cajas de Heisenberg son iguales. En el resto del presente subapartado se demuestra esta propiedad de la STFT. El lector no interesado en la demostración matemática puede saltar directamente al subapartado 3.3.2.

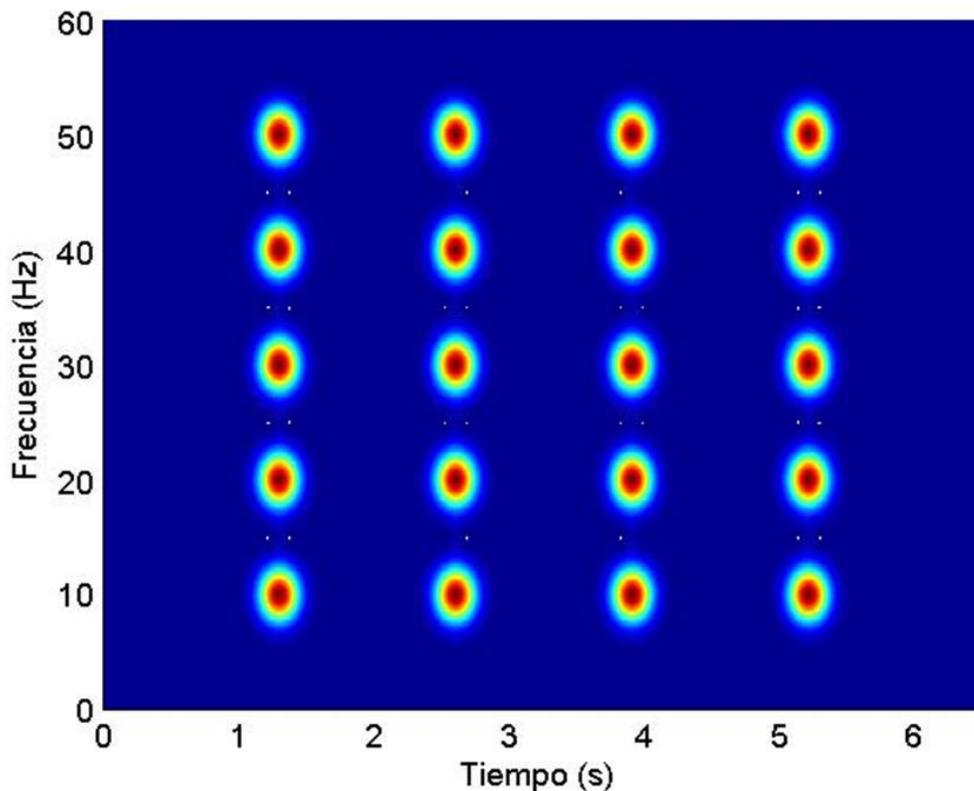


Fig. 3. 7 Evolución de las cajas de Heisenberg en la STFT.

Como  $\psi$  es par entonces su “instante de tiempo central” es 0. Éste resultado es bastante intuitivo, pero veamos aun así su demostración formal. En primer lugar, el cálculo del instante de tiempo central se puede descomponer en la suma de las dos integrales siguientes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^0 t |\psi(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt \quad (3.18)$$

Realizando el cambio de variable  $\tau = -t$  en el primer término tenemos:

$$\int_{-\infty}^0 t |\psi(t)|^2 dt = \int_{+\infty}^0 -\tau |\psi(-\tau)|^2 - d\tau = \int_{+\infty}^0 \tau |\psi(-\tau)|^2 d\tau \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta la simetría de la función y que al intercambiar los límites de integración cambia el signo de la integral:

$$\int_{+\infty}^0 \tau |\psi(-\tau)|^2 d\tau = - \int_0^{+\infty} \tau |\psi(\tau)|^2 d\tau \quad (3.20)$$

Realizando un segundo cambio de variable  $t = \tau$  y sustituyendo en la primera expresión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt = - \int_0^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt = 0 \quad (3.21)$$

Por tanto,  $\psi$  se encuentra centrada alrededor de 0.

Como consecuencia, la función  $\psi_{t_c, f}$  (resultado de trasladar  $\psi$  a  $t_c$ ), se encuentra centrada alrededor de  $t_c$ . Veámoslo analíticamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi_{t_c, f_c}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t |e^{i2\pi f_c t} \psi(t - t_c)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t - t_c)|^2 dt \quad (3.22)$$

Realizando el cambio de variable  $t = \tau + t_c$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t - t_c)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + t_c) |\psi(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau |\psi(\tau)|^2 d\tau + t_c \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\tau)|^2 d\tau \quad (3.23)$$

La primera integral vale cero tal y como lo acabamos de demostrar y la segunda integral es la energía de la señal que vale 1 por hipótesis. Tenemos por tanto que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi_{t_c, f_c}(t)|^2 dt = t_c \quad (3.24)$$

No fue casual nombrar, al principio del presente apartado, el parámetro que definía la traslación como  $t_c$ , pues efectivamente es el instante de tiempo alrededor del cual se distribuye la energía de  $\psi_{t_c, f_c}$ .

Teniendo en cuenta ésto podemos obtener la base de su caja de Heisenberg utilizando la siguiente fórmula:

Capítulo 3.

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_c)^2 |\psi_{t_c, f_c}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_c)^2 |e^{i2\pi f_c t} \psi(t-t_c)|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_c)^2 |\psi(t-t_c)|^2 dt\end{aligned}\quad (3.25)$$

Realizando el cambio de variable  $t = \tau + t_c$ :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 |\psi(\tau)|^2 d\tau \quad (3.26)$$

Podemos observar que efectivamente, la base de la caja de Heisenberg de  $\psi_{t_c, f_c}$  no depende del punto del plano tiempo-frecuencia  $(t_c, f_c)$  en el cual se calcule la STFT. En otras palabras, la base de la caja es constante a lo largo del plano.

Analicemos qué ocurre con la altura. Veamos en primer lugar qué vale la frecuencia central de  $\psi_{t_c, f_c}$ . Según la Propiedad 1 del apartado AM 1, si una función es par, entonces también lo es su transformada de Fourier. Además, como la función es real y par, según la Propiedad 2 del apartado AM 1, su transformada de Fourier es también real. Por tanto, como  $\psi$  es real y par, entonces  $\hat{\psi}$  es también real y par. Como  $\hat{\psi}$  es par, entonces su frecuencia central es 0 (aplicando razonamiento análogo al realizado con  $\psi$  par):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f |\hat{\psi}(f)|^2 df = 0 \quad (3.27)$$

Por otra parte, la transformada de Fourier de  $\psi(t-t_c)$  es  $e^{-it_c 2\pi f} \hat{\psi}(f)$  (pues si a una función se le aplica un retraso temporal trasladándola en el tiempo  $t_c$ , entonces su transformada de Fourier queda multiplicada por una exponencial compleja de exponente  $-it_c 2\pi f$ ). Por tanto, al multiplicar la función anterior por una exponencial, en el dominio de frecuencia obtenemos la misma función retrasada la frecuencia de modulación. Es decir, la transformada de Fourier de  $\psi_{t_c, f_c}(t) = e^{i2\pi f_c t} \psi(t-t_c)$  es  $\hat{\psi}_{t_c, f_c}(f) = e^{-it_c 2\pi(f-f_c)} \hat{\psi}(f-f_c)$ .

La frecuencia central de  $e^{-it_c 2\pi f} \hat{\psi}(f)$  es la misma que la de  $\hat{\psi}(f)$  pues al calcular el módulo la exponencial desaparece. Finalmente,  $\hat{\psi}_{t_c, f_c}(f)$  no es más que una traslación de  $e^{-it_c 2\pi f} \hat{\psi}(f)$  a  $f_c$ : si ésta última se encuentra centrada en cero entonces  $\hat{\psi}_{t_c, f_c}(f) = e^{-it_c 2\pi(f-f_c)} \hat{\psi}(f-f_c)$  está centrada en  $f_c$ .

Teniendo en cuenta que  $\hat{\psi}_{t_c, f_c}(f) = e^{-it_c 2\pi(f-f_c)} \hat{\psi}(f-f_c)$ , siendo su frecuencia central  $f_c$ , entonces podemos calcular la altura de la caja de Heisenberg de  $\psi_{t_c, f_c}$ , realizando el cambio de variable apropiado en el último paso:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_c)^2 |\hat{\psi}_{t_c, f_c}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_c)^2 |e^{-it_c 2\pi(f-f_c)} \hat{\psi}(f-f_c)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_c)^2 |\hat{\psi}(f-f_c)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |\hat{\psi}(f)|^2 df \end{aligned} \quad (3.28)$$

Con lo cual, podemos concluir que la altura de la caja de Heisenberg de  $\psi_{t_c, f_c}$  no depende del punto del plano tiempo-frecuencia  $(t_c, f_c)$  en el cual se calcule la STFT. En otras palabras, la altura de la caja es constante a lo largo del plano.

### 3.3.2.- Reconstrucción de la señal y su energía.

En cuanto a la reconstrucción de una señal a partir de su STFT, se puede demostrar que  $\forall h \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle \psi_{t_c, f_c}(t) df_c dt_c \quad (3.29)$$

Ésta misma fórmula se puede expresar en términos más específicos de la STFT de la siguiente forma:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Sh(t_c, f_c) e^{i2\pi f_c t} \psi(t-t_c) df_c dt_c \quad (3.30)$$

Es decir, cualquier señal  $h \in L^2(\mathbb{R})$  se puede expresar como una “suma” (integral) de la familia de átomos tiempo-frecuencia utilizados para calcular la STFT ponderados precisamente por el resultado de dicha STFT.

Finalmente, en cuanto a la energía de una señal, se puede demostrar que  $\forall h \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\|h\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle|^2 df_c dt_c \quad (3.31)$$

Es decir, si para cada punto del plano tiempo-frecuencia  $(t_c, f_c)$  multiplicamos el módulo de la STFT elevado al cuadrado en dicho punto por un diferencial de área centrada en dicho punto  $df_c dt_c$  y sumamos todos los resultados (integramos), obtenemos la energía de la señal. En términos más específicos de la STFT tenemos:

### Capítulo 3.

$$\|h\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Sh(t_c, f_c)|^2 df_c dt_c \quad (3.32)$$

De éste resultado se desprende que  $|Sh(t_c, f_c)|^2$  es una medida de la densidad de energía de la señal  $h$  alrededor de  $(t_c, f_c)$ .

Tal y como ya se avanzó, ésta medida de la densidad de energía no es perfecta. Desearíamos que estuviera relacionada con un punto (máxima precisión), cuando en realidad está relacionada con el vecindario de un punto descrito a través de las dimensiones de la caja de Heisenberg en dicho punto (sabemos que tampoco es exactamente así pues ni siquiera podemos anular completamente la energía del átomo fuera de la caja en las dos dimensiones de forma simultánea). Si la altura de la caja es elevada, la medida de densidad de energía tendrá poca precisión en el dominio frecuencial, pues estará asociada a un intervalo de frecuencias elevado, perdiendo precisión al describir la distribución de energía dentro de dicho intervalo. Si la base de la caja tiene un valor elevado, la medida de densidad de energía tendrá poca precisión en el dominio temporal, pues estará asociada a un intervalo de tiempo elevado, perdiendo precisión al describir la distribución de energía dentro de dicho intervalo. Recordando el principio de incertidumbre de Heisenberg, no podemos reducir ambas magnitudes de forma simultánea. Así que el mayor problema que presenta la STFT es el compromiso entre resolución temporal o frecuencial, siendo además ésta relación constante a lo largo del plano tiempo-frecuencia.

### 3.4.- Transformada Wavelet.

La Wavelet Transform (WT) de una función  $h \in L^2(\mathbb{R})$  es una transformada lineal tiempo-frecuencia definida como la correlación de dicha función con una familia de átomos tiempo-frecuencia definidos como sigue:

$$\psi_{t_c, f_c}(t) = \frac{1}{\sqrt{\eta/f_c}} \psi\left(\frac{t-t_c}{\eta/f_c}\right) \quad (3.33)$$

Donde  $\psi$  es una función compleja de variable real ( $\psi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ), llamada wavelet madre, de la cual  $\eta$  es su frecuencia central, y que cumple las siguientes propiedades:

- $\psi \in L^2(\mathbb{R})$
- Tiene valor medio nulo:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ .
- Su energía es igual a 1:  $\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$ .
- Está centrada alrededor de  $t = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt = 0$

La función  $\psi_{t_c, f_c}$  es el resultado de realizar una traslación a  $t_c$  y un escalado  $\eta/f_c$  de  $\psi$ . Se puede razonar fácilmente que como  $\|\psi\|^2 = 1$  entonces  $\|\psi_{t_c, f_c}\|^2 = 1 \forall (t_c, f_c) \in \mathbb{R}^2$ .

En definitiva, la WT de una función  $h \in L^2(\mathbb{R})$ , nombrada como  $Wh(t_c, f_c)$ , es una transformada tiempo-frecuencia definida a través de la fórmula común a éste tipo de transformadas (idéntica a la de la STFT, cambiando sólo la familia de átomos utilizada):

$$Wh(t_c, f_c) = \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi_{t_c, f_c}^*(t) dt \quad (3.34)$$

Cobra rasgos característicos al sustituir la expresión de la familia de átomos propia de la WT:

$$Wh(t_c, f_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \frac{1}{\sqrt{\eta/f_c}} \psi^*\left(\frac{t-t_c}{\eta/f_c}\right) dt \quad (3.35)$$

donde la función  $\psi$  cumple con las propiedades anteriormente citadas y  $\eta$  es su frecuencia central.

La palabra wavelet es el diminutivo de wave que en inglés significa onda. Se le da éste nombre pues se utilizan un conjunto de “pequeñas ondas” (los átomos tiempo-

frecuencia de la familia antes definida), para analizar la señal. Según si la función  $\psi$  es real o analítica (ver definición 6 en AM 1) tendremos una transformada wavelet real o analítica (Analytic Wavelet Transform, AWT). Las wavelets reales se utilizan para detectar transiciones de la señal bruscas y afiladas. En general es mejor utilizar wavelets analíticas las cuales pueden separar componentes de amplitud y fase. Para analizar señales como las de la presente tesis, si utilizáramos la WT lo haríamos a través de una wavelet analítica, utilizando por tanto la AWT.

### 3.4.1.- Forma de las cajas de Heisenberg.

La pregunta más importante que debemos plantear para comprender el funcionamiento de ésta transformada y sus diferencias con las restantes es: ¿cuáles son las formas, a lo largo del plano, de las cajas de Heisenberg de la familia de átomos utilizada? La respuesta es que sus dimensiones varían con la frecuencia analizada, pero no con el instante de tiempo. Más concretamente, si se construye una familia de átomos tiempo-frecuencia para calcular la WT, los átomos centrados en distintos instantes pero a una misma frecuencia, tienen cajas de Heisenberg iguales; sin embargo, los átomos centrados en un mismo instante pero en distintas frecuencias tienen cajas de Heisenberg distintas: al subir la frecuencia disminuye la base de la caja y aumenta su altura de tal forma que el área se mantiene constante. Por ejemplo, en la Fig. 3.8 se muestra de forma conjunta la distribución de la energía en el plano tiempo-frecuencia de distintos átomos propios de una familia utilizada para calcular la WT, observándose cómo, los átomos centrados en una misma frecuencia tienen la misma caja de Heisenberg, pero los átomos centrados en un mismo instante de tiempo tienen cajas de Heisenberg de formas variables, aumentando la altura y reduciéndose la base cuanto mayor es la frecuencia considerada, pero manteniendo un área constante. En el resto del presente subapartado se demuestra esta propiedad de la WT. El lector no interesado en la demostración matemática puede saltar directamente al subapartado 3.4.2.

Por hipótesis,  $\psi$  está centrada en 0. Al ser  $\psi_{t_c, f_c}$  una traslación a  $t_c$  de  $\psi$ , entonces  $\psi_{t_c, f_c}$  está centrada en  $t_c$  (lo cual se demostró analíticamente al analizar la STFT en el apartado 3.3.1). En otras palabras:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi_{t_c, f_c}(t)|^2 dt = t_c \quad (3.36)$$

No fue casual nombrar, al principio del presente apartado, el parámetro que definía la traslación como  $t_c$ , pues efectivamente es el instante de tiempo alrededor del cual se distribuye la energía de  $\psi_{t_c, f_c}$ .

Teniendo en cuenta esto podemos obtener la base de la caja de Heisenberg de  $\psi_{t_c, f_c}$  utilizando la siguiente fórmula:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_c)^2 |\psi_{t_c, f_c}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_c)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{\eta/f_c}} \psi\left(\frac{t - t_c}{\eta/f_c}\right) \right|^2 dt \quad (3.37)$$

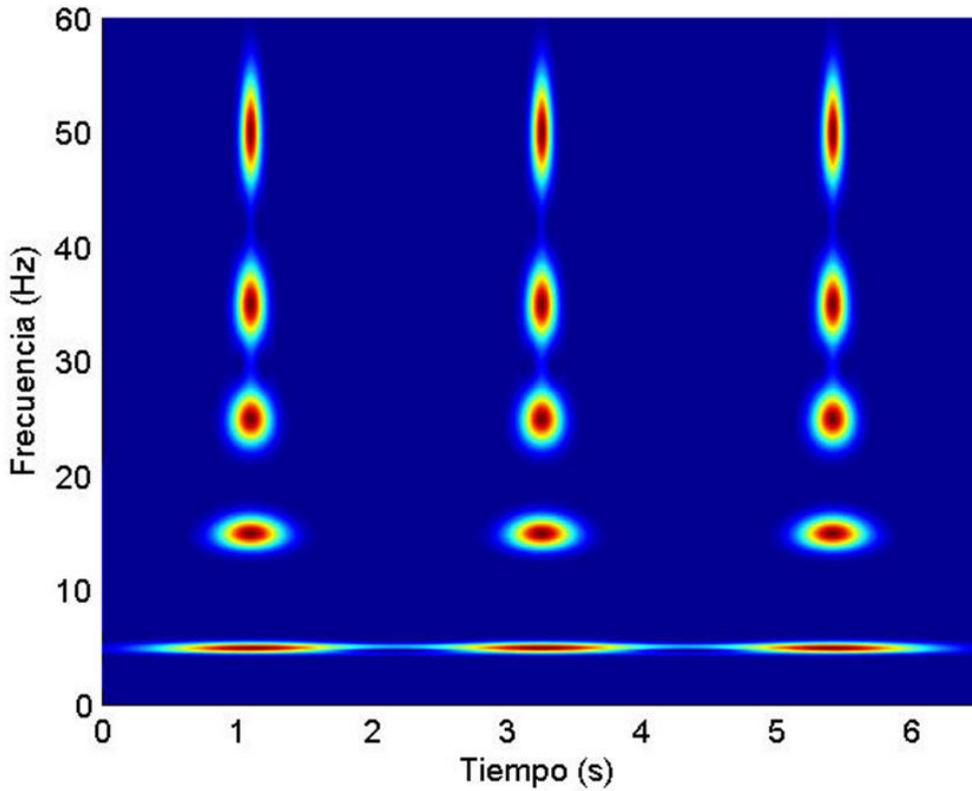


Fig. 3. 8 Evolución de las cajas de Heisenberg en la WT.

Realizando el cambio de variable  $\tau = \left( \frac{t-t_c}{\eta/f_c} \right)$ :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\eta}{f_c} \tau \right)^2 \frac{f_c}{\eta} |\psi(\tau)|^2 \frac{\eta}{f_c} d\tau = \left( \frac{\eta}{f_c} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 |\psi(\tau)|^2 d\tau \quad (3.38)$$

Como  $\psi$  está centrado en 0, su varianza relativa al dominio temporal es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt \quad (3.39)$$

Concluimos que la base de la caja de Heisenberg de  $\psi_{t_c, f_c}$  es  $(\eta/f_c)^2$  la de  $\psi$ . Así pues, a frecuencias  $f_c$  bajas, la base será mayor que a frecuencias  $f_c$  elevadas. La base disminuye al analizar frecuencias elevadas.

Analicemos qué ocurre con la altura. Veamos en primer lugar qué vale la frecuencia central de  $\psi_{t_c, f_c}$ . Por hipótesis, la frecuencia central de  $\psi$  es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f |\hat{\psi}(f)|^2 df = \eta \quad (3.40)$$

### Capítulo 3.

La cual, teniendo en cuenta que se trata de una función analítica se puede calcular como:

$$\int_0^{+\infty} f |\hat{\psi}(f)|^2 df = \eta \quad (3.41)$$

Por otra parte, la transformada de Fourier de  $1/\sqrt{\eta/f_c} \psi(t/(\eta/f_c))$  es  $\sqrt{\eta/f_c} \hat{\psi}(\eta/f_c f)$  (pues la transformada de Fourier de una función escalada  $h(t/s)$  es  $|s| \hat{h}(s\omega)$ ). Al considerar además el retraso, debemos multiplicar la transformada de Fourier por la exponencial correspondiente. Es decir, la transformada de Fourier de  $\psi_{t_c, f_c}(t) = 1/\sqrt{\eta/f_c} \psi((t-t_c)/(\eta/f_c))$  es  $\hat{\psi}_{t_c, f_c}(f) = \sqrt{\eta/f_c} \hat{\psi}(\eta/f_c f) e^{-it_c 2\pi f}$ .

La frecuencia central de  $\hat{\psi}_{t_c, f_c}$  es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \left| \sqrt{\frac{\eta}{f_c}} \hat{\psi}\left(\frac{\eta}{f_c} f\right) e^{-it_c 2\pi f} \right|^2 df = \frac{\eta}{f_c} \int_{-\infty}^{+\infty} f \left| \hat{\psi}\left(\frac{\eta}{f_c} f\right) \right|^2 df \quad (3.42)$$

Realizando el cambio de variable  $f' = \eta/f_c f$  y teniendo en cuenta que la frecuencia central de  $\hat{\psi}$  es  $\eta$  obtenemos:

$$\frac{\eta}{f_c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_c}{\eta} f' |\hat{\psi}(f')|^2 \frac{f_c}{\eta} df' = \frac{f_c}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} f' |\hat{\psi}(f')|^2 df' = \frac{f_c}{\eta} \eta = f_c \quad (3.43)$$

Resumiendo, la frecuencia central de  $\hat{\psi}_{t_c, f_c}$  es precisamente  $f_c$  (no fue casual designar de ésta forma al parámetro).

Teniendo en cuenta que  $\hat{\psi}_{t_c, f_c}(f) = \sqrt{\eta/f_c} \hat{\psi}(\eta/f_c f) e^{-it_c 2\pi f}$ , siendo su frecuencia central  $f_c$ , entonces podemos calcular la altura de la caja de Heisenberg de  $\psi_{t_c, f_c}$ , realizando el cambio de variable  $f' = \eta/f_c f$  en el último paso:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_c)^2 |\hat{\psi}_{t_c, f_c}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_c)^2 \left| \sqrt{\frac{\eta}{f_c}} \hat{\psi}\left(\frac{\eta}{f_c} f\right) e^{-it_c 2\pi f} \right|^2 df = \\ &= \frac{\eta}{f_c} \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_c)^2 \left| \hat{\psi}\left(\frac{\eta}{f_c} f\right) \right|^2 df = \left(\frac{f_c}{\eta}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f' - \eta)^2 |\hat{\psi}(f')|^2 df' \end{aligned} \quad (3.44)$$

Con lo cual, podemos concluir que la altura de la caja de Heisenberg de  $\psi_{t_c, f_c}$  es  $(f_c/\eta)^2$  la de  $\psi$ . Así pues, a frecuencias  $f_c$  bajas, la altura será menor que a frecuencias  $f_c$  elevadas. La altura aumenta al analizar frecuencias elevadas.

Podemos analizar por otra parte que el área de la caja de Heisenberg permanece constante e igual a la de  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 \sigma_f^2 &= \left[ \left( \frac{\eta}{f_c} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt \right] \left[ \left( \frac{f_c}{\eta} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f - \eta)^2 |\hat{\psi}(f)|^2 df \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} (f - \eta)^2 |\hat{\psi}(f)|^2 df\end{aligned}\quad (3.45)$$

### 3.4.2.- Reconstrucción de la señal y su energía.

En cuanto a la reconstrucción de una señal y su energía a partir de su WT, se puede demostrar que  $\forall h \in L^2(\mathbb{R})$ , si:

- $C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < +\infty$
- $h$  es real

entonces

$$h(t) = \frac{2}{\eta C_\psi} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle \psi_{t_c, f_c}(t) dt_c df_c \right] \quad (3.46)$$

Esta misma fórmula se puede expresar en términos más específicos de la WT de la siguiente forma:

$$h(t) = \frac{2}{\eta C_\psi} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wh(t_c, f_c) \frac{1}{\sqrt{\eta/f_c}} \psi \left( \frac{t - t_c}{\eta/f_c} \right) dt_c df_c \right] \quad (3.47)$$

Es decir, cualquier señal  $h \in L^2(\mathbb{R})$  se puede expresar como una “suma” (integral) de la familia de átomos tiempo-frecuencia utilizados para calcular la WT ponderados precisamente por el resultado de dicha WT, calculando posteriormente la parte real del resultado y ponderando por otro valor final  $2/\eta C_\psi$ . La integral en frecuencia se extiende tan solo al dominio positivo pues al trabajar con wavelets analíticas la WT para frecuencias negativas es cero.

Finalmente, en cuanto a la energía de una señal, se puede demostrar que, bajo las mismas hipótesis que en la reconstrucción de la señal:

$$\|h\|^2 = \frac{2}{\eta C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle \right|^2 dt_c df_c \quad (3.48)$$

### Capítulo 3.

Es decir, si para cada punto del plano tiempo-frecuencia  $(t_c, f_c)$  multiplicamos el módulo de la WT elevado al cuadrado en dicho punto por un diferencial de área centrada en dicho punto  $dt_c df_c$  y sumamos todos los resultados (integramos), tras la normalización final multiplicando por  $2/\eta C_\psi$  obtenemos la energía de la señal. En términos más específicos de la WT tenemos:

$$\|h\|^2 = \frac{2}{\eta C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wh(t_c, f_c)|^2 dt_c df_c \quad (3.49)$$

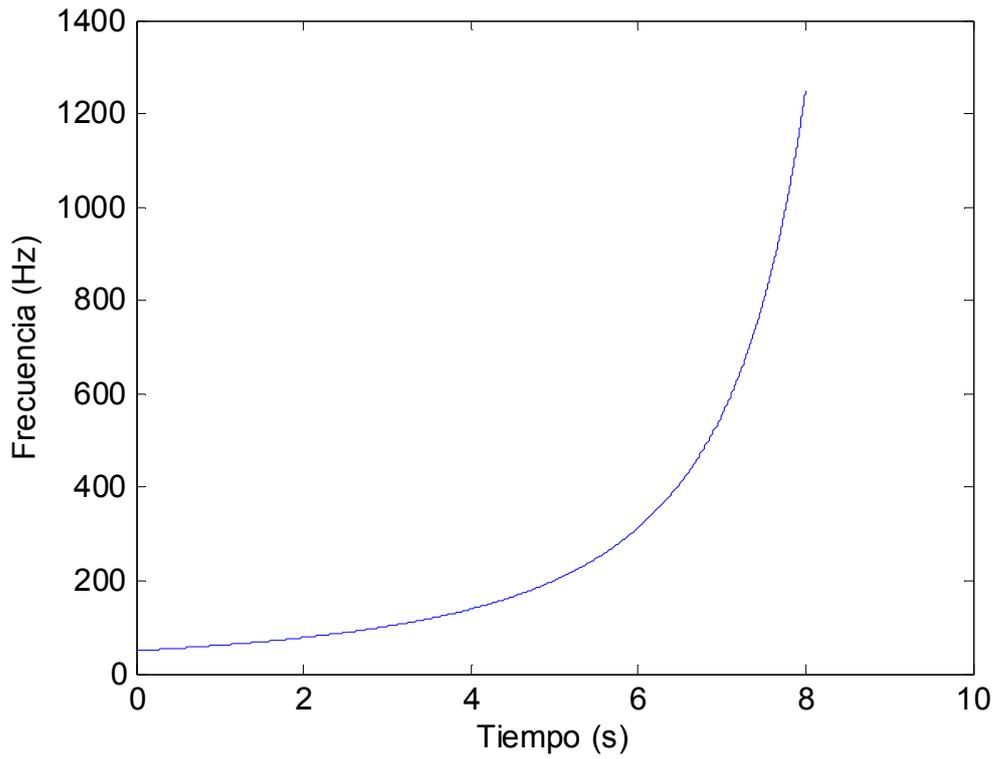
De éste resultado se desprende que  $|Wh(t_c, f_c)|^2$  es una medida de la densidad de energía de la señal  $h$  alrededor de  $(t_c, f_c)$ .

Al igual que ocurre con la STFT, ésta medida de la densidad de energía no es perfecta: desearíamos que estuviera relacionada con un punto (máxima precisión), cuando en realidad está relacionada con un vecindario alrededor del punto. Esto es así pues la resolución de la transformada en un punto depende de la dispersión energética del átomo centrado en dicho punto, la cual se mide a través de su caja de Heisenberg, cuya área no puede reducirse indefinidamente.

Por otra parte, tal y como hemos visto, las cajas de Heisenberg en la WT tienen mucha base y poca altura a bajas frecuencias, evolucionando hacia bases estrechas y alturas elevadas cuando analizamos altas frecuencias. La evolución de ambas dimensiones está perfectamente vinculada a través del valor del área, el cual se mantiene constante. La transformada permite por tanto tener una resolución distinta en distintos puntos del plano tiempo-frecuencia: la resolución temporal es baja a bajas frecuencias, siendo además la resolución frecuencial elevada en esta zona del plano, y se invierte la relación a altas frecuencia, siendo la resolución temporal elevada y la frecuencial baja.

Así pues, la WT resuelve el problema del compromiso que teníamos con la STFT, pues presenta una resolución cambiante. El problema es que la forma en la que cambia la resolución es fija (de más a menos resolución frecuencial y de menos a más resolución temporal), no resultando adecuada para todo tipo de señales, tan solo para aquellas que presentan una evolución del tipo chirp hiperbólico  $h(t) = \cos(\alpha/(\beta-t))$  cuya frecuencia instantánea  $f(t) = \alpha/(\beta-t)^2$  Hz requiere para ser detectada adecuadamente una evolución de la resolución igual a la que presenta la WT.

En la Fig. 3.9 se muestra la evolución teórica de la frecuencia instantánea de un chirp hiperbólico tomando  $\alpha = 5 \cdot 10^3$  y  $\beta = 10$ . Al principio, la frecuencia instantánea tiene un crecimiento muy lento: en este tramo interesa tener cajas de Heisenberg de mucha base y poca altura. A medida que avanza el transitorio, la frecuencia instantánea del chirp presenta una evolución con un aumento considerable, pasando a necesitar para su detección cajas de Heisenberg de poca base y mucha altura. Esta es precisamente la evolución de las cajas que tiene la WT.



**Fig. 3.9** Evolución de un chirp hiperbólico.

## 3.5.- Matching Pursuit y Adaptative Gabor Transform.

Al principio de la década de los 90, Stéphane Mallat y Zhifeng Zhang concibieron un método para obtener la densidad de energía de una señal y descomponerla como combinación lineal de un conjunto de átomos tiempo-frecuencia al cual denominaron Matching Pursuit (MP) [98]. En la misma época, Qian y Chen desarrollaron la transformada Gabor adaptable [99], [100], la cual resultó ser un caso particular del MP. Para presentar el MP, en primer lugar, siguiendo la estructura de presentación de las transformadas anteriores, veremos cuál es la familia de funciones utilizada para calcular la transformada. A diferencia de los casos anteriores, ésta familia se define mediante un proceso iterativo. Seguidamente se definirá la transformada y se estudiará también la forma de las cajas de Heisenberg de las funciones utilizadas a lo largo del plano. Finalmente se obtendrán las dos fórmulas que permiten reconstruir la señal y su energía.

### 3.5.1.- Construcción de la familia de átomos mediante un método iterativo.

En el caso de la STFT, el usuario debe, en primer lugar, escoger una función ventana. En segundo lugar tan solo tiene que trasladar y modular la función para centrarla en distintos puntos del plano (de forma análoga al número de píxeles en una fotografía, cuantos más puntos del plano se consideren, mayor será la definición del diagrama final). La forma de la caja de Heisenberg de cada átomo tiempo-frecuencia de la familia obtenida tan solo depende de la función ventana y no del punto del plano al cual se la haya trasladado, siendo por tanto la misma para todos. Tan solo queda correlacionar la familia de átomos obtenida con la señal a analizar.

En el caso de la WT, el usuario debe escoger una wavelet madre, la cual determina también las formas de las cajas de la familia de wavelets final a lo largo del plano. La familia de wavelets se genera por traslación y escalado de la wavelet madre, consiguiendo wavelets centradas en distintos puntos del plano, siguiendo además la evolución característica de las cajas de Heisenberg propia de ésta transformada (muchas base y poca altura a bajas frecuencias y poca base y mucha altura a altas frecuencias). Como en la STFT, cuantos más puntos del plano se consideren, mayor será la definición del diagrama obtenido. Una vez generada la familia de wavelets, tan solo queda correlacionarlas con la señal a analizar.

A diferencia de las dos transformadas anteriores en las que la familia de átomos tiempo-frecuencia utilizados para calcular la transformada son un conjunto de funciones que el usuario fija (seleccionando la ventana o la wavelet madre y distribuyendo uniformemente en el plano en los puntos que desea), la familia de átomos en el MP se obtiene mediante un método iterativo de selección, escogiendo las funciones que conformarán la familia de un conjunto mayor llamado diccionario. Formarán la familia de átomos las funciones del diccionario que mejor se adaptan a la señal a analizar.

En primer lugar, partimos de un conjunto de funciones  $D = \{u_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  llamado diccionario. Por ejemplo, un posible diccionario sería:

$$D = \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ siendo } u_k(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma_k}} e^{-\frac{(t-t_{ck})^2}{2\sigma_k^2}} e^{i2\pi f_{ck}(t-t_{ck})} \quad \sigma_k > 0 \quad t_{ck}, f_{ck} \in \mathbb{R} \quad (3.50)$$

Donde para cada  $k \in \mathbb{N}$  obtenemos una función del diccionario fijando el trio de valores  $(\sigma_k, t_{ck}, f_{ck})$ . Las funciones de éste diccionario son todas ellas funciones de Gabor (aunque un diccionario puede contener funciones de varios tipos). Dando valores a  $t_{ck}$  y  $f_{ck}$  conseguimos funciones centradas en distintos puntos del plano. Dando valores a  $\sigma_k$  conseguimos que éstas funciones tengan distintas dimensiones de sus cajas de Heisenberg. Así pues, podemos dar valores a los parámetros de tal manera que la primera función del diccionario  $u_1$  tenga una CH como la mostrada de color negro y trazo grueso en la Fig. 3.10. Al generar las funciones segunda y tercera ( $u_2$  de color cian y  $u_3$  de color verde) cambiamos la forma de la caja ( $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ), pero no el punto donde se centra ( $t_{c1} = t_{c2} = t_{c3}$ ,  $f_{c1} = f_{c2} = f_{c3}$ ). Al generar la cuarta función  $u_4$  de color magenta cambiamos con respecto a la primera solamente el punto del plano en el que se centra la caja ( $\sigma_1 = \sigma_4$ ,  $t_{c1} \neq t_{c4}$ ,  $f_{c1} \neq f_{c4}$ ). Y así sucesivamente hasta conseguir el resto del conjunto de átomos mostrados de color azul y trazo fino.

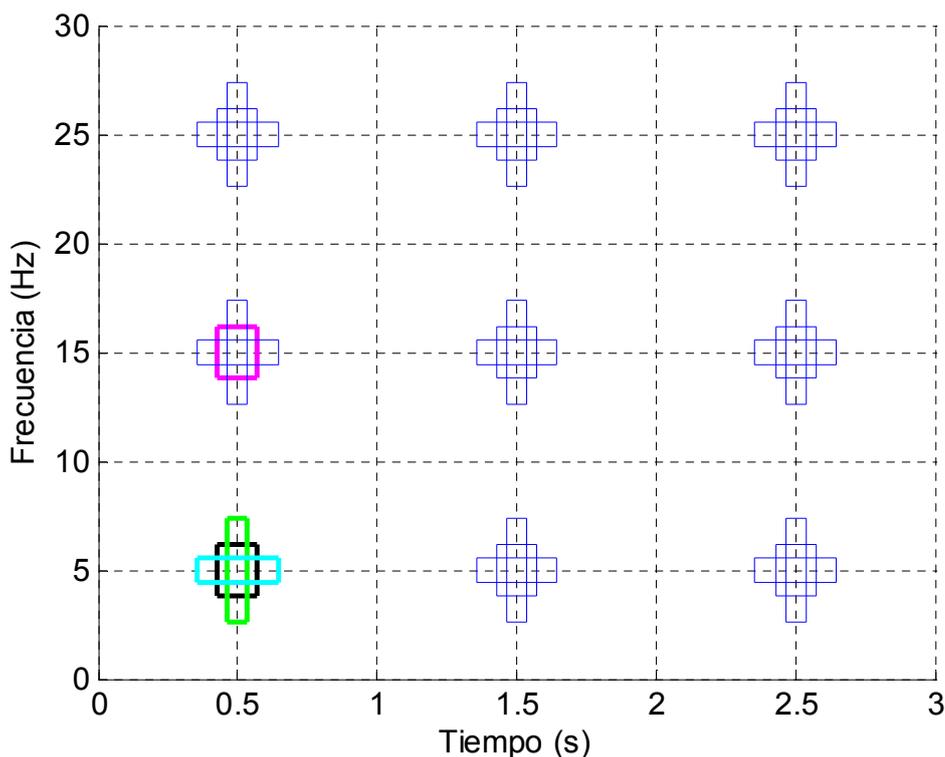


Fig. 3. 10 Formas de las cajas de Heisenberg de las funciones de un posible diccionario.

Al ir dando valores construimos un diccionario formado por funciones que cubren el plano tiempo-frecuencia con distintas formas de cajas de Heisenberg. El diccionario debe estar generado de tal forma que para cada punto del plano considerado haya varias funciones centradas en él, cada una con una forma de la caja distinta. En la práctica se consideran muchos más puntos que los mostrados como ejemplo en la Fig. 3.10 (aproximadamente, por cada instante muestreado de la señal a estudiar, se suelen considerar unos 200 puntos distribuidos en la banda de frecuencia analizada).

### Capítulo 3.

Durante el proceso iterativo se seleccionarán aquellos átomos del diccionario que mejor caracterizan a la señal. A título de ejemplo, en la Fig. 3.11 se muestra un posible resultado del proceso iterativo de selección, donde las funciones del diccionario se han dibujado de color azul y trazo fino y las funciones finalmente seleccionadas se han dibujado de color rojo y trazo grueso. El efecto global de cubrir todo el plano con distintas formas de las cajas de Heisenberg es el de conseguir poder ajustarse de la mejor forma posible a las características tiempo-frecuencia de la señal. Claro está, cuanto mayor sea el número de funciones que contiene el diccionario (cubriendo un mayor número de puntos del plano y con numerosas formas de las cajas), habrá más posibilidades entre las que elegir a la hora de caracterizar la señal durante el proceso iterativo, aumentando así la precisión. En contrapartida, aumenta también el tiempo de cálculo, el cual es, en general, extremadamente elevado. Autores como los propios Mallat y Qian han diseñado algoritmos para intentar reducir el coste computacional. Por otra parte, no tienen por qué seleccionarse átomos en todos los puntos del plano considerados al construir el diccionario (como en la parte superior izquierda del ejemplo o en la parte central derecha): no se escoge ninguna función centrada en un punto cuando la energía a su alrededor es despreciable.

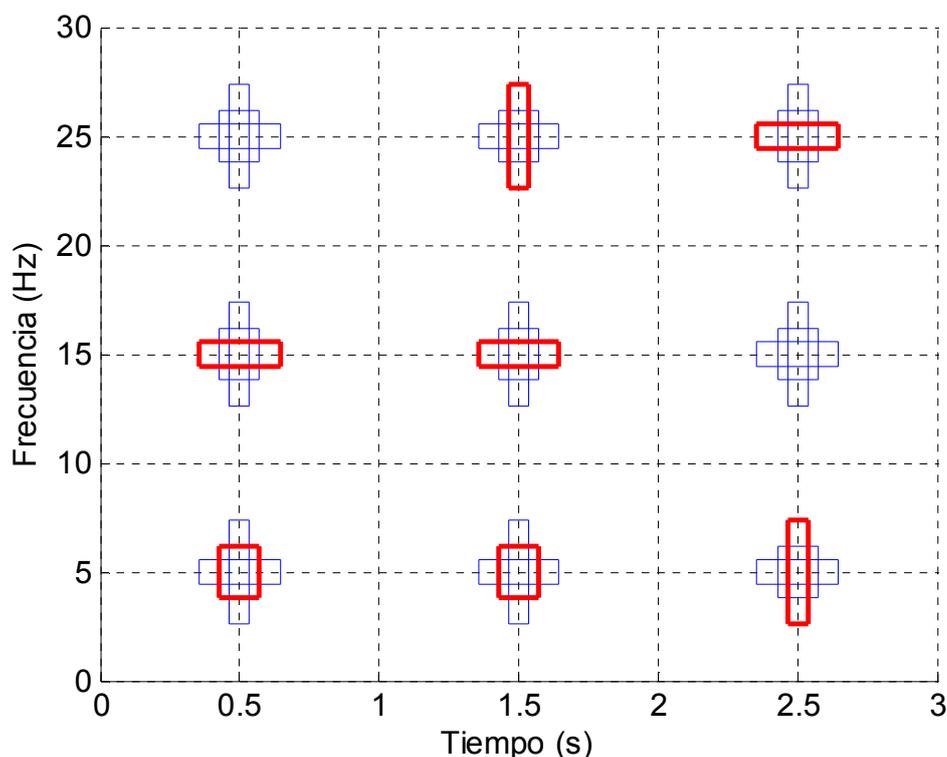


Fig. 3. 11 Formas de las cajas de Heisenberg de las funciones de un posible diccionario (azul con trazo fino) y los átomos finalmente seleccionados (rojo con trazo grueso).

Los átomos son seleccionados del diccionario uno por uno bajo el criterio de optimizar la señal de aproximación en cada paso. Veamos qué significa esto y cuál es exactamente el proceso iterativo de selección. Tomamos la señal a analizar  $h$  y calculamos todos los productos internos de la señal con las funciones del diccionario. Es decir, calculamos  $\langle h, u_\gamma \rangle$  para todo  $u_\gamma \in D$  (obviamente el diccionario debe tener un número finito de elementos, en caso contrario éste primer paso no terminaría nunca). A continuación multiplicamos cada  $u_\gamma \in D$  por el resultado de su correlación con la señal

a analizar  $\langle h, u_\gamma \rangle$ . Es decir, calculamos la señal de aproximación  $\langle h, u_\gamma \rangle u_\gamma$ . Seguidamente calculamos, para cada  $u_\gamma \in D$  su correspondiente residuo definido como:

$$Rh = h - \langle h, u_\gamma \rangle u_\gamma \quad (3.51)$$

La señal de aproximación  $\langle h, u_\gamma \rangle u_\gamma$  representa parte de la señal original  $h$ , pero no toda, faltando precisamente el residuo  $Rh$ .

Por otra parte, se puede demostrar fácilmente que:

$$\|Rh\|^2 = \|h\|^2 - |\langle h, u_\gamma \rangle|^2 \quad (3.52)$$

Efectivamente pues, teniendo en cuenta que el conjugado de la suma o el producto es respectivamente la suma o el producto de conjugados y que la energía del átomo  $u_\gamma$  es unitaria tenemos:

$$\begin{aligned} \|Rh\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Rh(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Rh(t) \cdot Rh^*(t) \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (h(t) - \langle h, u_\gamma \rangle u_\gamma(t)) \cdot (h(t) - \langle h, u_\gamma \rangle u_\gamma(t))^* \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (h(t) - \langle h, u_\gamma \rangle u_\gamma(t)) \cdot (h^*(t) - \langle h, u_\gamma \rangle^* u_\gamma^*(t)) \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot h^*(t) \cdot dt + |\langle h, u_\gamma \rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_\gamma(t) \cdot u_\gamma^*(t) \cdot dt - \langle h, u_\gamma \rangle^* \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot u_\gamma^*(t) \cdot dt + \\ &- \langle h, u_\gamma \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} u_\gamma(t) \cdot h^*(t) \cdot dt = \|h\|^2 + |\langle h, u_\gamma \rangle|^2 - \langle h, u_\gamma \rangle^* \langle h, u_\gamma \rangle - \langle h, u_\gamma \rangle \langle h, u_\gamma \rangle^* = \|h\|^2 - |\langle h, u_\gamma \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

En definitiva, la energía del residuo es igual a la energía de la señal a analizar menos la energía de la señal de aproximación:

$$\|Rh\|^2 = \|h\|^2 - |\langle h, u_\gamma \rangle|^2 \quad (3.54)$$

Elegimos el primer átomo de la familia como aquel cuyo residuo tiene menor energía. Es decir, aquel que minimiza  $\|Rh\|^2$ , lo cual es equivalente a decir que maximiza  $|\langle h, u_\gamma \rangle|^2$ . En definitiva, elegimos el átomo del diccionario que se encuentra centrado en un punto del plano y con una forma de su caja de Heisenberg tales que al correlacionarse con la señal a analizar  $\langle h, u_\gamma \rangle$ , capta la mayor cantidad de su energía (maximiza  $|\langle h, u_\gamma \rangle|^2$ ). A ésta función la designamos como  $u_{\gamma_0}$ , siendo el residuo correspondiente  $R^1 h$ . Si definimos  $R^0 h = h$  podemos reescribir (3.51) en los términos que acabamos de definir:

$$R^1 h = R^0 h - \langle R^0 h, u_{\gamma_0} \rangle u_{\gamma_0} \quad (3.55)$$

### Capítulo 3.

Una vez hemos escogido el primer elemento de la familia de átomos  $u_{\gamma_0}$  y hemos calculado su residuo  $R^1h$ , correlacionamos dicho residuo con todos los elementos del diccionario y escogemos aquel que captura la mayor cantidad de su energía, es decir, aquel que maximiza  $\left|\left\langle R^1, u_{\gamma} \right\rangle\right|^2$ . Éste átomo, denotado como  $u_{\gamma_1}$ , será el segundo de la familia de átomos final. Calculamos seguidamente el nuevo residuo:

$$R^2h = R^1h - \left\langle R^1h, u_{\gamma_1} \right\rangle u_{\gamma_1} \quad (3.56)$$

El proceso iterativo sigue correlacionando el nuevo residuo  $R^2h$  con todas las funciones del diccionario y seleccionando aquel que maximiza  $\left|\left\langle R^2, u_{\gamma} \right\rangle\right|^2$ . A éste nuevo átomo lo designamos como  $u_{\gamma_2}$ . El nuevo residuo es:

$$R^3h = R^2h - \left\langle R^2h, u_{\gamma_2} \right\rangle u_{\gamma_2} \quad (3.57)$$

El proceso iterativo sigue, de tal forma que la iteración  $m$  se define como:

$$R^{m+1}h = R^m h - \left\langle R^m h, u_{\gamma_m} \right\rangle u_{\gamma_m} \quad (3.58)$$

Siendo  $u_{\gamma_m}$  el átomo del diccionario que maximiza  $\left|\left\langle R^m h, u_{\gamma_m} \right\rangle\right|^2$ .

Resumiendo, el proceso iterativo es como sigue.

- En la primera iteración...
  - Tomamos la señal a analizar  $h = R^0h$ .
  - Obtenemos el átomo del diccionario  $u_{\gamma_0}$  que al correlacionarlo con dicha señal  $\left\langle R^0h, u_{\gamma_0} \right\rangle$  captura la mayor cantidad de su energía:  $\left|\left\langle R^0h, u_{\gamma_0} \right\rangle\right|^2$  es máximo.
  - Calculamos el residuo correspondiente de restar la señal de aproximación  $\left\langle R^0h, u_{\gamma_0} \right\rangle u_{\gamma_0}$  a la señal a analizar  $R^0h$ :  

$$R^1h = R^0h - \left\langle R^0h, u_{\gamma_0} \right\rangle u_{\gamma_0}.$$
- En sucesivas iteraciones...
  - Tomamos el residuo resultado de la iteración anterior  $R^m h$ .
  - Lo correlacionamos con todos los elementos del diccionario quedándonos con el átomo  $u_{\gamma_m}$  que captura la mayor cantidad de su energía:  $\left|\left\langle R^m h, u_{\gamma_m} \right\rangle\right|^2$  es máximo.
  - Calculamos el siguiente residuo restándole al anterior la correspondiente señal de aproximación:  $R^{m+1}h = R^m h - \left\langle R^m h, u_{\gamma_m} \right\rangle u_{\gamma_m}$ .
- Final: Terminamos cuando  $\left\|R^m h\right\|^2$  es suficientemente pequeño.

Resulta intuitivo (pero aparte puede ser demostrado analíticamente), que si  $m \rightarrow \infty$  entonces  $\|R^m h\|^2 \rightarrow 0$ . El proceso termina cuando la energía del residuo más reciente es suficientemente pequeña (disminuye por debajo de un valor fijado por el usuario).

La filosofía de selección es por tanto:

- Seleccionar el átomo del diccionario que más energía de la señal captura (mayor nivel de correlación).
- Restar a la señal la parte que ya viene caracterizada por el átomo seleccionado.
- Con el residuo resultante repetir la operación inicial.
- Finalizar cuando la señal esté prácticamente toda caracterizada por los átomos seleccionados (cuando el residuo sea suficientemente pequeño).

De ésta forma obtenemos un conjunto de  $M + 1$  funciones  $\{u_{\gamma_0}, u_{\gamma_1}, \dots, u_{\gamma_M}\}$  (todas ellas pertenecientes al diccionario definido en un inicio), que conforman la familia de átomos final que se utilizará para calcular la transformada.

### 3.5.2.- Definición de la transformada Matching Pursuit.

Tanto la STFT, la WT y el MP se definen de la misma forma: la correlación de la función a analizar  $h$  con una familia de átomos tiempo frecuencia. De unas transformadas a otras, tan solo cambia la familia de átomos utilizada. En el caso del MP dicha familia es el resultado del proceso iterativo que se acaba de describir, es decir,  $\{u_{\gamma_0}, u_{\gamma_1}, \dots, u_{\gamma_M}\}$ . Así pues el MP es el resultado de calcular:

$$\langle h, u_{\gamma_m} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) u_{\gamma_m}^*(t) dt \quad m = 0, \dots, M \quad (3.59)$$

Según el diccionario Espasa Calpe, la palabra matching se traduce del inglés como “haciendo juego” o “a juego”. A su vez, la palabra “match” tiene varios significados, de entre los cuales tenemos “encajar con” o “hacer juego”. La frase “match the words with the definitions” se traduce por “encuentre la definición más adecuada para cada palabra”. A su vez la palabra “pursuit” se traduce, entre otros, por “búsqueda”. Así que podríamos definir el Matching Pursuit como un método consistente en buscar los átomos tiempo-frecuencia más adecuados para cada señal analizada, buscar aquellos átomos que mejor encajan con la señal.

Obtenemos la Adaptive Gabor Transform si restringimos el MP aplicándolo, no a un diccionario de átomos general, sino al definido mediante (3.50). Se trata pues de utilizar el tipo de átomos que utilizábamos en la Gabor Transform (es decir, funciones de Gabor, pues la GT es como la STFT restringida a funciones de Gabor), pero en vez de utilizar la misma ventana en todos los puntos del plano tiempo-frecuencia, consideramos la posibilidad de utilizar distintas ventanas en distintos puntos del plano, y para conseguirlo, generamos el diccionario con átomos que no sólo se encuentren centrados en distintos puntos del plano, sino que además, para cada punto, el diccionario contenga distintas funciones centradas en él con distintas dimensiones de

sus cajas de Heisenberg, de tal forma que el método iterativo pueda seleccionarlos. Tiene sentido llamarla Adaptive Gabor Transform, pues es como la Gabor Transform, pero añadiéndole la capacidad de adaptarse a la señal en cada punto del plano tiempo-frecuencia que analizamos, variando las dimensiones de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada uno de ellos.

#### **3.5.3.- Formas de las cajas de Heisenberg.**

Tal y como se ha ido viendo, la función de densidad de energía que resulta del uso de cada una de las transformadas, tiene una resolución tiempo-frecuencia limitada en cada punto del plano por la dispersión de la energía del átomo utilizado en dicho punto para calcular la correlación. En el caso de la STFT la dispersión de la energía del átomo, que condiciona la resolución de la función de densidad resultante, es constante a lo largo del plano. En el caso de la WT, se tiene mayor resolución frecuencial a bajas frecuencias que a altas, provocando una evolución inversa de la resolución temporal, pues las wavelets tienen mayor dispersión temporal de la energía a bajas frecuencias que altas, ocurriendo lo contrario con la dispersión de energía según la dirección del eje de frecuencias. ¿Qué ocurre en el caso del método MP o de la AGT? En otras palabras: ¿cuáles son las formas a lo largo del plano de las cajas de Heisenberg que cuantifican la dispersión de cada uno de los átomos utilizados?

La respuesta a esta pregunta, en este caso, y al contrario de lo sucedido en los anteriores, es muy simple. En principio, el diccionario puede construirse con el conjunto de funciones que el usuario crea conveniente. El método MP no está condicionado por el diccionario utilizado. Pero, por otra parte, también es verdad que, si el método ha sido ideado para seleccionar, en cada punto del plano, el átomo que mejor capta la energía de la señal, que mejor se adapta a su estructura, no tendría sentido utilizar un diccionario que estuviera compuesto por átomos que, como en el caso de la STFT, tengan unas cajas de Heisenberg de dimensiones constantes a lo largo del plano, pues esto imposibilitaría seleccionar, en cada punto, entre funciones con dimensiones de cajas distintas, para ver cuál es la que mejor se adapta.

Para obtener buenos resultados, conviene construir un diccionario donde haya funciones que, al igual que en el ejemplo expuesto a raíz de la ecuación (3.50), diccionario correspondiente a la AGT, se encuentren centradas en distintos puntos del plano pero además, para cada punto del plano haya átomos con formas de dispersión de la energía diferentes, con formas de sus cajas diferentes. En el caso de, por ejemplo, ampliar el diccionario con átomos del tipo FBS centrados en distintos puntos del plano, y en cada punto considerar distintos valores de los parámetros de las FBS para obtener FBS con distintas formas de sus cajas de Heisenberg, entonces tendríamos un diccionario más general y deberíamos hablar del método MP en vez de la AGT.

En cualquiera de los dos casos, las funciones seleccionadas del diccionario para calcular la transformada final dependerán de la señal analizada. Es de esperar que, en distintos puntos del plano, la resolución tiempo-frecuencia necesaria para analizar la señal sea distinta, y que por tanto, el método seleccione funciones con cajas de Heisenberg de dimensiones distintas. Así pues, la respuesta a la pregunta que planteábamos al principio es que las dimensiones de las cajas de Heisenberg de la familia de átomos utilizadas para correlacionar la señal a analizar al aplicar el método

MP serán, en un caso general, cambiantes a lo largo del plano, y dependerán, las funciones seleccionadas así como las dimensiones de sus cajas, de la señal a analizar.

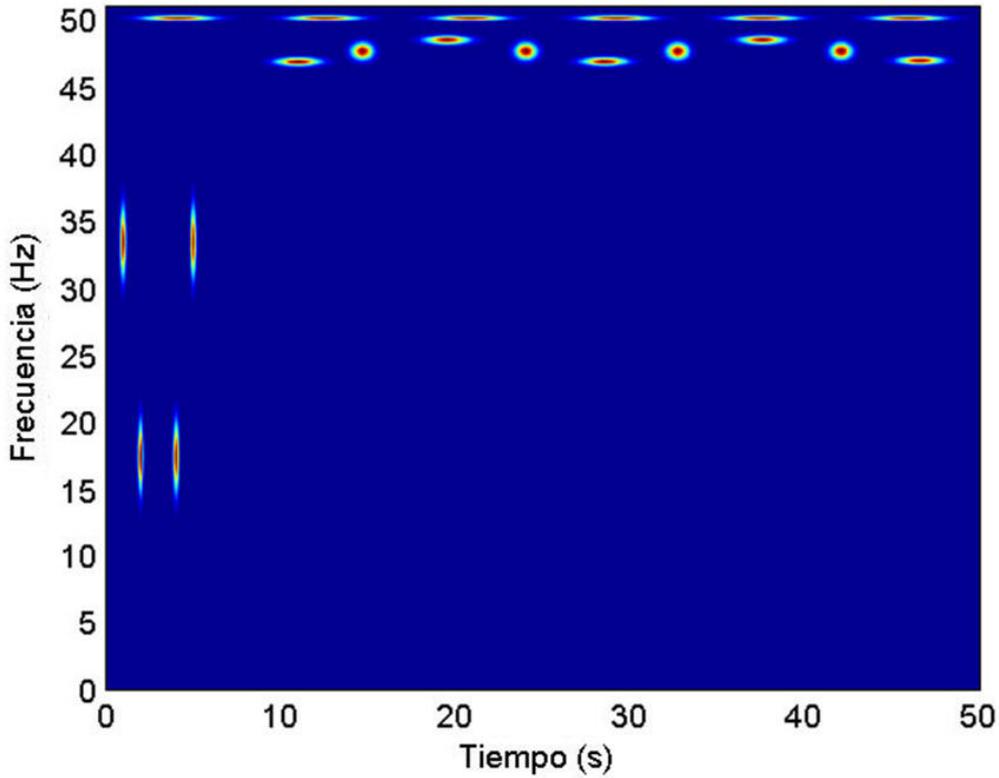


Fig. 3.12 Evolución de las cajas de Heisenberg en el MP.

### 3.5.4.- Reconstrucción de la señal y su energía.

Reordenando la ecuación (3.58) y escribiéndola para los casos entre 0 y  $M$  :

$$\begin{aligned}
 R^0 h &= R^1 h + \langle R^0 h, u_{\gamma_0} \rangle u_{\gamma_0} \\
 R^1 h &= R^2 h + \langle R^1 h, u_{\gamma_1} \rangle u_{\gamma_1} \\
 R^2 h &= R^3 h + \langle R^2 h, u_{\gamma_2} \rangle u_{\gamma_2} \\
 &\dots \\
 R^M h &= R^{M+1} h + \langle R^M h, u_{\gamma_M} \rangle u_{\gamma_M}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Sumando las  $M + 1$  ecuaciones anteriores obtenemos:

$$R^0 h = \langle R^0 h, u_{\gamma_0} \rangle u_{\gamma_0} + \langle R^1 h, u_{\gamma_1} \rangle u_{\gamma_1} + \langle R^2 h, u_{\gamma_2} \rangle u_{\gamma_2} + \dots + \langle R^M h, u_{\gamma_M} \rangle u_{\gamma_M} + R^{M+1} h \tag{3.61}$$

Teniendo en cuenta que  $R^0 h = h$  tenemos:

$$h = \sum_{m=0}^M \langle R^m h, u_{\gamma_m} \rangle u_{\gamma_m} + R^{M+1} h \tag{3.62}$$

### Capítulo 3.

Es decir, si despreciamos el residuo  $R^{M+1}h$ , la función  $h$  se expresa como una combinación lineal de los átomos que conforman la familia  $\{u_{\gamma_0}, u_{\gamma_1}, \dots, u_{\gamma_M}\}$ . Los coeficientes de la combinación lineal son precisamente los respectivos resultados de la correlación. Como se ha visto que si  $m \rightarrow \infty$  entonces  $\|R^m h\|^2 \rightarrow 0$ , entonces se cumple que:

$$h = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle R^m h, u_{\gamma_m} \rangle u_{\gamma_m} \quad (3.63)$$

Y la combinación lineal es exacta. Mediante esta fórmula podemos por tanto reconstruir la señal utilizando los resultados de la transformada y los átomos utilizados para calcularla.

Debido al criterio de selección aplicado, las primeras funciones de la familia  $\{u_{\gamma_0}, u_{\gamma_1}, \dots, u_{\gamma_M}\}$  caracterizan las partes de la señal que en el plano tiempo-frecuencia presentan una mayor energía. A medida que las zonas de mayor energía quedan caracterizadas, el algoritmo procede a seleccionar funciones del diccionario que caracterizan las zonas de menor energía, ocupadas por componentes que en esos instantes de tiempo tienen una menor amplitud.

Para analizar la recuperación de la energía, operamos análogamente con la siguiente fórmula, deducida con idéntico razonamiento que (3.54):

$$\|R^{m+1}h\|^2 = \|R^m h\|^2 - |\langle R^m h, u_{\gamma_m} \rangle|^2 \quad (3.64)$$

Reordenándola y escribiéndola para los casos entre 0 y  $M$  :

$$\begin{aligned} \|R^0 h\|^2 &= \|R^1 h\|^2 + |\langle R^0 h, u_{\gamma_0} \rangle|^2 \\ \|R^1 h\|^2 &= \|R^2 h\|^2 + |\langle R^1 h, u_{\gamma_1} \rangle|^2 \\ \|R^2 h\|^2 &= \|R^3 h\|^2 + |\langle R^2 h, u_{\gamma_2} \rangle|^2 \\ &\dots \\ \|R^M h\|^2 &= \|R^{M+1} h\|^2 + |\langle R^M h, u_{\gamma_M} \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Sumando las  $M + 1$  ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\|R^0 h\|^2 = |\langle R^0 h, u_{\gamma_0} \rangle|^2 + |\langle R^1 h, u_{\gamma_1} \rangle|^2 + |\langle R^2 h, u_{\gamma_2} \rangle|^2 + \dots + |\langle R^M h, u_{\gamma_M} \rangle|^2 + \|R^{M+1} h\|^2 \quad (3.66)$$

Teniendo en cuenta que  $R^0 h = h$  tenemos:

$$\|h\|^2 = \sum_{m=0}^M |\langle R^m h, u_{\gamma_m} \rangle|^2 + \|R^{M+1} h\|^2 \quad (3.67)$$

Es decir, la energía de la señal  $h$  es igual a (despreciando otra vez el residuo), la suma de los coeficientes que definían la combinación lineal en (3.63) al cuadrado. Como se ha comentado que si  $m \rightarrow \infty$  entonces  $\|R^m h\|^2 \rightarrow 0$ , entonces se cumple que:

$$\|h\|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \left| \langle R^m h, u_{\gamma m} \rangle \right|^2 \quad (3.68)$$

Y la recuperación de la energía es exacta.

### 3.5.5.- Recapitulación.

El MP, aplicado sobre un diccionario suficientemente grande de átomos tiempo-frecuencia (tal que permitan escoger de forma variada el punto del plano a analizar así como la resolución que obtenemos en ése punto), es el método más adecuado para analizar señales complejas multicomponentes, donde cada una de las evoluciones de las componentes es distinta, haciendo necesario variar de forma totalmente general las formas de las cajas a lo largo del plano. Tal y como veremos en el apartado 4.1, las corrientes estatóricas son señales de estas características.

El inconveniente del MP es que, cuanta mayor precisión queremos obtener, utilizando un diccionario rico en átomos que capten los detalles de la señal, mayor es el tiempo de cálculo, llegando a valores prohibitivos según las experiencias de los propios inventores de este método. Por otra parte, cabe resaltar el hecho de que, el objetivo del análisis de las corrientes estatóricas es detectar la presencia de los armónicos vinculados a fallos y obtener su evolución. Dichos armónicos no son precisamente las componentes de la corriente de mayor amplitud; se trata más bien de “detalles” de la señal. El MP no resulta pues un buen método pues en primer lugar intenta captar de la mejor forma posible las componentes de mayor amplitud (en nuestro caso se trataría del FC, WH y los PSH), para después ir capturando las evoluciones de los armónicos de menor amplitud como aquellos vinculados a fallos. El objetivo que perseguimos al tratar de diagnosticar es precisamente el contrario: filtrar lo mejor posible estas componentes vinculadas al estado sano (en especial el FC y los WH), intentando resaltar las evoluciones de las componentes vinculadas a fallos.

Concluimos que, la filosofía de utilizar una familia de átomos tiempo-frecuencia con cajas de Heisenberg cambiantes a lo largo del plano es la adecuada para analizar señales multicomponentes complejas como las corrientes estatóricas. Pero el tiempo de cálculo asociado a un método iterativo de selección como el MP resulta prohibitivo; siendo además el criterio de selección poco adecuado para los fines que persigue el diagnóstico. En el capítulo 4 de la presente tesis se explica cómo, manteniendo la filosofía de las cajas variables, utilizar un criterio de selección de la familia de átomos que permita resaltar las evoluciones de los componentes vinculados a fallos con un tiempo de computación adecuado.

## 3.6.- Otras transformadas.

### 3.6.1.- Energía tiempo-frecuencia cuadrática. Wigner-Ville distributions.

Hasta aquí se han presentado transformadas basadas en la correlación de la señal con familias de átomos tiempo-frecuencia. Tal y como hemos visto, el problema de estas transformadas es que la resolución de la función de densidad obtenida está limitada por la resolución en tiempo y en frecuencia de los átomos utilizados, debiendo escoger, de forma independiente para cada punto al utilizar el método MP o la AGT, o de forma conjunta para todos los puntos del plano al utilizar la STFT, si queremos tener más resolución temporal o más resolución frecuencial.

En un intento de obtener una densidad de energía en el plano tiempo-frecuencia que no tuviera pérdida de resolución, se definió la Wigner-Ville distribution (WVD): una densidad de energía tiempo-frecuencia calculada correlacionando la señal con una traslación en el tiempo y en frecuencia de ella misma:

$$P_V h(t_c, f_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(t_c + \frac{t}{2}\right) h^*\left(t_c - \frac{t}{2}\right) e^{-it2\pi f_c} dt \quad (3.69)$$

Se puede demostrar que, para  $\forall h \in L^2(\mathbb{R})$ , la energía de la señal se puede recuperar utilizando la siguiente fórmula:

$$\|h\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_V h(t_c, f_c) dt_c df_c \quad (3.70)$$

Por tanto,  $P_V h(t_c, f_c)$  es una función de densidad en el plano tiempo-frecuencia. Como vemos, el resultado de la WVD tan solo depende de la señal analizada, no interviniendo ningún tipo de parámetro que se deba fijar para realizar el análisis y que influya en los resultados, no debiendo elegir en cada punto entre la resolución temporal o la frecuencial.

A pesar de tener propiedades remarcables, pues en determinadas condiciones la densidad de energía obtenida con éste método alcanza la mejor resolución tiempo-frecuencia posible, esta densidad de energía tiene también un inconveniente importante: los llamados términos de interferencia. Cuando aplicamos la WVD a una señal multicomponente (como es el caso de las corrientes de máquinas eléctricas), la densidad de energía obtenida tiene un término por cada componente igual al que obtendríamos si pudiésemos analizar esta componente por separado, pero además aparece un término extra, un término de interferencia por cada par de componentes. Estos términos de interferencia cruzados (cross-terms), no reflejan ninguna característica de la señal y hacen aumentar la energía en puntos del plano donde la señal no posee ninguna componente, falseando el resultado final.

Estas interferencias pueden ser eliminadas promediando la WVD con una función llamada núcleo (kernel)  $\theta$ , tal y como aparece en la siguiente ecuación:

$$P_{V\theta}h(t_c, f_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_V h(t'_c, f'_c) \theta(t_c, f_c, t'_c, f'_c) dt'_c df'_c \quad (3.71)$$

Distintos autores han propuesto el uso de distintos tipos de núcleos, dando lugar a numerosas versiones de la WVD. Los resultados obtenidos con un kernel u otro dependerán de las características de la señal analizada.

En la presente tesis, de entre las dos posibles opciones, nos centramos en la primera, en el uso de los átomos tiempo-frecuencia y su correlación con la señal para obtener funciones de densidad. Existen en la actualidad, en el grupo de investigación en el que se inserta la tesis, líneas de investigación paralelas que analizan precisamente los resultados del uso de esta segunda opción: la WVD. No es objetivo de la presente tesis comparar ambos resultados.

### 3.6.2.- Transformadas discretas.

La presente tesis trata del diagnóstico de averías en motores de inducción mediante el análisis de la corriente estatórica durante procesos transitorios. Dicho diagnóstico se puede realizar mediante la detección, en la corriente, de los armónicos vinculados a fallos, cuantificando posteriormente su amplitud. Por tanto, el objetivo final es, en el caso de la presencia de una avería, conseguir obtener, en la medida de lo posible, la evolución completa durante procesos transitorios de los armónicos vinculados a fallos. Para poder llegar a este objetivo es necesario utilizar transformadas continuas. Es decir, transformadas que permiten calcular sus resultados en todos los puntos del plano tiempo-frecuencia en los que sea necesario. Todas las transformadas que se han presentado en este apartado cumplen con esta condición.

Estas transformadas tienen a su vez versiones discretas. Estas versiones calculan los resultados de las transformadas en determinados puntos del plano fijados estratégicamente para obtener resultados, que aportan un menor grado de información, pero que resultan también útiles y presentan además un tiempo de cálculo menor así como una mejor complejidad. Ejemplos de resultados valiosos para el diagnóstico son las señales de aproximación y detalle en el caso de la Discrete Wavelet Transform (versión discreta de la WT). Así pues, aunque pueden dar muy buenos resultados, en el presente capítulo no se resume el uso de transformadas como la STFT discreta, la DWT o los Wavelet Packets (generalización de la DWT), pues son las versiones discretas de las transformadas presentadas, las cuales no permiten hacer cálculos en puntos arbitrarios del plano no permitiendo por tanto obtener la evolución continua de las frecuencia de los armónicos vinculados al fallo.



## **4.- Metodología de diagnóstico propuesta.**

Este es el capítulo central alrededor del cual se articula la tesis. El objetivo principal de la tesis es el de desarrollar una metodología de diagnóstico basada en el diseño de una herramienta de análisis tiempo-frecuencia que logre obtener la evolución temporal completa y optimizada de las componentes vinculadas a averías presentes en las corrientes estatóricas de motores de inducción, y que por tanto permita desarrollar en una segunda etapa un método de cuantificación de la amplitud instantánea de los armónicos de avería y proceder de esta forma al diagnóstico del motor de inducción.

Más concretamente, el análisis tiempo-frecuencia consiste en, siguiendo un criterio específicamente diseñado, generar una familia de átomos tiempo-frecuencia del tipo Frequency B-Splines, para calcular la correlación con la corriente en cada punto del plano, seleccionando los parámetros de las FBS de tal forma que se optimice la obtención de las evoluciones de las componentes vinculadas a averías, procediendo posteriormente a cuantificar midiendo la densidad de energía en cada uno de los puntos de la evolución de dichas componentes.

La metodología desarrollada en la tesis supone un avance sustancial en el campo del diagnóstico de máquinas eléctricas respecto a los trabajos de investigación anteriores basados en análisis tiempo-frecuencia (centrados en el uso de la STFT o como máximo de la AWT). Tal y como se analiza en el apartado 4.3, dichas transformadas no son capaces de capturar la evolución completa de los armónicos de avería. En el trabajo de investigación realizado se ha ido mucho más allá, no solo analizando el MP, sino dando un paso más al desarrollar la metodología, tomando las ventajas del MP como base, y diseñando a su alrededor un criterio para generar una familia de átomos tiempo-frecuencia en la que se abandonan los aspectos poco adecuados del MP y se introducen otros nuevos que permiten obtener las evoluciones de las componentes vinculadas a averías en su totalidad, optimizadas y además consumiendo tiempos de cálculo reducidos.

Así pues, en primer lugar, para obtener la evolución de las componentes de avería de forma optimizada (las cuales no son las de mayor amplitud en la señal), se precisa conocer la estructura de la corriente a analizar (componentes de la corriente y su evolución). Por una parte, las componentes presentes en la corriente de un motor de inducción han sido estudiadas con detalle por diversos autores y se encuentran perfectamente descritas en la literatura. Con lo que respecta a su evolución, la aplicación de los métodos novedosos expuestos en el capítulo 5 (los cuales permiten obtener la evolución del deslizamiento y de la frecuencia fundamental sin más medida que la de la corriente estatórica), permiten conocer, tal y como se explica en el apartado 4.1, para cada corriente analizada, por qué puntos del plano tiempo-frecuencia evolucionarían las componentes vinculadas a fallos, en caso de estar presentes en la corriente. Esta información permite seleccionar el átomo tiempo-frecuencia a utilizar que mejor se adapte para capturar dichas evoluciones. Así pues, en los capítulos 7 y en adelante (dedicado cada uno a una avería distinta analizada), en primer lugar se presentan los montajes experimentales así como las corrientes capturadas para seguidamente, obtener aplicando los métodos del capítulo 5 cuáles serían las

## Capítulo 4.

evoluciones de los componentes vinculados a fallos en caso de que la corriente pertenezca a una máquina averiada.

Una vez se conoce cuál debe ser la evolución de las componentes de falta en caso de avería, se diseña un criterio de selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia para, en caso de existir, obtener dicha evolución de forma optimizada. El diseño del criterio se expone en el apartado 4.2. La base teórica expuesta en el capítulo 3 permite abordar la comprensión profunda de la metodología desarrollada, sus ventajas y sus inconvenientes.

En primer lugar, se parte de dos posibles tipos de átomos a utilizar: las funciones de Gabor y las Frequency B-Splines, pudiendo clasificarse ambos como ventanas moduladas, una clase de átomos cuyas propiedades se analizan en el apéndice matemático, apartado AM 2. Las funciones de Gabor son átomos muy conocidos en la literatura técnica y sus propiedades se analizan en AM 3. Sin embargo, las FBS han sido menos utilizadas, siendo este el primer trabajo de investigación en el que se han utilizado para el diagnóstico de máquinas eléctricas. El capítulo 6 está dedicado a un estudio profundo de sus propiedades, cuyas conclusiones permiten obtener los excelentes resultados experimentales mostrados a lo largo de la tesis. Como conclusión principal del capítulo 6 se obtiene la fórmula que determina el valor de la pendiente de la caja de Heisenberg (definida previamente en 4.2.1 como el cociente entre la altura y la base de la caja) de una FBS en función de sus parámetros. Esa fórmula resulta fundamental a la hora de aplicar la metodología. En el capítulo 6 se realiza también una comparación entre las funciones de Gabor y las FBS (en particular las FBS de parámetro entero  $m = 2$ ), mostrando que se trata de átomos muy parecidos, pudiendo obtener con las FBS resultados de calidad casi tan elevada como con las funciones de Gabor, pero con un tiempo de cálculo mucho menor. Esta conclusión de la comparación, que justifica el uso de las FBS, se explica resumida en el apartado 4.2.2.

En segundo lugar, una vez se ha justificado que todos los átomos utilizados serán del tipo FBS, se deben asignar valores a sus 3 parámetros. Por una parte, el parámetro entero se fija siguiendo un criterio de compromiso entre las propiedades en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Por otra parte, la frecuencia central viene impuesta por las frecuencias a analizar. Ambos razonamientos se encuentran en el apartado 4.2.3. Finalmente, en el apartado 4.2.4 se introduce el criterio de la pendiente: para que el análisis sea óptimo, la caja de Heisenberg del átomo debe tener una diagonal cuya pendiente se ajuste a la pendiente de la trayectoria del armónico cuya evolución intenta detectar. Como se conoce cuál debe ser la evolución de los armónicos de falta en caso de avería (gracias a los métodos desarrollados en el capítulo 5), se sabe cuál es la pendiente en cada punto de la evolución. La pendiente del átomo en un punto se iguala a la del armónico y, utilizando la fórmula deducida en el capítulo 6, se calcula el ancho de banda, que es el parámetro de la FBS que faltaba por definir.

En el siguiente apartado (4.3), se plantean las ventajas e inconvenientes de las transformadas existentes en el estado del arte (STFT, AWT y MP, cuyo funcionamiento se explica en el capítulo 3 con un enfoque especialmente adecuado), estudiando por qué no es posible utilizar ninguna de ellas conjuntamente al criterio definido en 4.2 para construir una familia de átomos, y de aquí la necesidad de definir una nueva transformada.

Como conclusión, en el apartado 4.4 se define una nueva transformada, la transformada de pendiente adaptable (Adaptive Slope Transform, AST), basándose en todas las conclusiones obtenidas del análisis realizado en el apartado 4.2. Tras su definición (4.4.1), se analizan sus principales características, comparándola con el MP y la AGT (4.4.2). En términos generales, la transformada definida toma por una parte la mayor ventaja del MP y de la AGT, utilizando una familia de átomos con cajas de Heisenberg de dimensiones variables. Al contrario del MP, y en sintonía con la AGT, no considera un conjunto de átomos general para calcular la transformada, tal y como hace el MP al definir el diccionario, sino que utiliza solo FBS, al igual que la AGT que utiliza solo funciones de Gabor. Por último, evitando el mayor inconveniente del MP y la AGT, cambia el criterio de selección de átomos por el resultante de aplicar el expuesto en 4.2, el cual permite adaptarse mejor al objetivo del diagnóstico (obtener las evoluciones de las componentes de fallo). En el apartado 4.4.3 se indican sus limitaciones y las soluciones de compromiso adoptadas. Finalmente, se aplica la transformada a la señal analizada como ejemplo, estudiando en el apartado 4.4.4 las cajas de Heisenberg utilizadas y mostrando y analizando los resultados en el apartado 4.4.5. Esta transformada, bautizada como transformada de pendiente adaptable (Adaptive Slope Transform, AST), se utilizará a lo largo de la tesis para analizar cada una de las corrientes, obtener las evoluciones de las componentes de fallo producidas por distintas averías, cuantificar su amplitud, y proceder finalmente al diagnóstico (capítulo 7 y en adelante).

Una vez ha quedado definida la transformada que se va a utilizar, se dedica un apartado (4.5) a describir las técnicas desarrolladas que permiten mejorar la visualización de los resultados. Se trata de técnicas novedosas que mejoran notablemente la identificación de componentes de pequeña amplitud. Y finalmente, en el último apartado (4.6), tan solo queda describir el método de cuantificación que completa la metodología de diagnóstico desarrollada. Este consiste básicamente en, una vez obtenida la evolución completa de una componente vinculada a una avería, determinar cuál es la densidad de energía en cada uno de sus puntos, lo cual nos permitirá cuantificar la presencia de la componente y por tanto del fallo que causa su aparición. Aquí son necesarios también los resultados obtenidos gracias a los métodos expuestos en el capítulo 5, que permiten conocer los puntos exactos del plano que debe describir la trayectoria de la componente de avería (en caso de estar presente en la corriente), que es donde se debe evaluar la densidad de energía para poder cuantificar.

#### **4.1.- Componentes de las corrientes a analizar y su evolución.**

- 4.1.1.- Evolución de las componentes de un motor de inducción sano.
- 4.1.2.- Evolución de las componentes causadas por una rotura de barra.
- 4.1.3.- Evolución de las componentes causadas por excentricidad.

#### **4.2.- Elección del átomo tiempo-frecuencia. Criterio de la pendiente.**

- 4.2.1.- Concepto de pendiente de un átomo tiempo-frecuencia.
- 4.2.2.- Área de la caja de Heisenberg. Elección de las FBS: justificación.
- 4.2.3.- Asignando valores a  $m$  y a  $f_c$ .
- 4.2.4.- Criterio de la pendiente: asignando valores a  $f_b$ .

#### **4.3.- Ventajas e inconvenientes de la STFT, la WT y el MP.**

## Capítulo 4.

4.3.1.- Short Time Fourier Transform.

4.3.2.- Wavelet Transform.

4.3.3.- Matching Pursuit.

### **4.4.- Definición de la Adaptive Slope Transform.**

4.4.1.- Definición.

4.4.2.- Características comparando con el MP y la AGT.

4.4.3.- Limitaciones y soluciones de compromiso.

4.4.4.- Cajas de Heisenberg utilizadas al analizar la señal de ejemplo.

4.4.5.- Resultados.

### **4.5.- Técnicas para mejorar la visualización.**

### **4.6.- Método de cuantificación.**

4.6.1.- Cuantificación al alimentar directamente desde la red.

4.6.2.- Cuantificación al alimentar mediante un inversor.

### **4.7.- Guía de aplicación de la metodología de diagnóstico.**

## **4.1.- Componentes de las corrientes a analizar y su evolución.**

El conocimiento previo de la estructura (componentes y su evolución) de la corriente a analizar a la hora de diagnosticar una máquina eléctrica, condiciona las características del análisis tiempo-frecuencia a realizar. Tal y como se ha visto en el apartado 2.1 del estado del arte, los ingenieros eléctricos conocen a priori cuales son las componentes que con toda seguridad estarán presentes en la corriente en estado sano, así como las componentes que cada avería introduce. Además, podemos conocer la evolución de dichas componentes si conocemos la evolución de las magnitudes que las caracterizan (el deslizamiento y la frecuencia fundamental), teniendo en cuenta el tipo de alimentación de la máquina (acople directo a la red o a través de un inversor), y conociendo además los valores de dos de sus parámetros (número de ranuras del rotor y número de pares de polos). Gracias a los métodos novedosos presentados en el capítulo 5, la evolución del deslizamiento se puede obtener sin necesidad de medir la velocidad a través del análisis de la corriente mediante la STFT. La evolución de la frecuencia fundamental (en el caso de alimentación mediante inversor), se puede obtener con un método conceptualmente muy parecido, aplicado de distinta forma. Una vez se dispone de ésta información se puede predecir la evolución de las componentes de la corriente. Esto permite, tal y como se muestra en los siguientes puntos del presente capítulo, desarrollar una metodología de análisis tiempo-frecuencia que resalte precisamente la evolución de las componentes de la corriente vinculadas a fallos, que son las que interesa detectar para efectuar el diagnóstico.

En el presente apartado se explica cómo, utilizando las fórmulas de las frecuencias de las componentes (expuestas en el apartado 2.1), podemos trazar su evolución temporal, suponiendo una determinada evolución del deslizamiento (sobre todo cuando el motor se alimenta directamente desde la red) y de la frecuencia fundamental (en el caso de alimentación mediante inversor). El método de obtención de las evoluciones del deslizamiento y de la frecuencia fundamental se explica en el capítulo 5. Así pues, en lugar de avanzar los resultados de dicho capítulo, para trazar las figuras de éste apartado en las que se analiza la evolución de las componentes en función del tiempo, se supondrá que el transitorio consiste en un arranque de 2 segundos de duración. Además, en los casos en los que el motor de inducción se encuentre conectado directamente a la red se ha supuesto que durante el transitorio el deslizamiento evoluciona de 1 a 0 linealmente respecto al tiempo (lo cual es bastante exacto durante todos los arranques analizados en la presente tesis, salvo al principio y al final). En los casos en los que el motor de inducción esté alimentado por un inversor supondremos que durante el transitorio la frecuencia fundamental evoluciona de 0 a 50 Hz linealmente respecto al tiempo y que la frecuencia de deslizamiento tiene un valor despreciable durante todo el transitorio (tal y como se explicará detalladamente más adelante).

Una vez presentado el método para detectar tanto la evolución del deslizamiento durante el transitorio como la evolución de la frecuencia fundamental (capítulo 5), en los respectivos apartados de cada avería (capítulo 7 y en adelante) se obtendrá dicha evolución para cada corriente analizada (ya sea un arranque u otro transitorio cualquiera) y se dibujarán gráficos análogos a los de éste apartado ya sin necesidad de realizar ninguna suposición. Se obtendrá por tanto, para cada corriente analizada, la

## Capítulo 4.

evolución de la frecuencia de cada componente con respecto al tiempo. Ésta es la información que finalmente se utilizará para concretar, en cada caso, el análisis tiempo-frecuencia a realizar, siguiendo la metodología expuesta en los siguientes apartados del presente capítulo.

### 4.1.1.- Evolución de las componentes de un motor de inducción sano.

Como ya se analizó en el apartado 2.1, la corriente de un motor de inducción sano tiene dos tipos de componentes: los armónicos de devanado (Winding Harmonics, WH), y los armónicos principales de ranura (Principal Slot Harmonics, PSH).

#### Winding Harmonics

La frecuencia de un WH viene dada por (2.1), ecuación que repetimos a continuación:

$$f_{WHn} = n f_{FC} \quad (4.1)$$

Donde  $f_{FC}$  es la frecuencia de la componente fundamental (Fundamental Component, FC, o WH de orden 1),  $n$  es el orden del WH analizado y  $f_{WHn}$  su frecuencia. Denotamos al WH de orden  $n$  como WH $n$  (notar que, con ésta notación,  $f_{FC}$  y  $f_{WH1}$  es lo mismo).

Como es sabido, si el motor de inducción está acoplado directamente a la red, entonces la frecuencia de la FC viene impuesta por la red: 50 Hz en Europa y 60 Hz en USA. Evidentemente, si  $f_{FC}$  es constante, la frecuencia de un WH es constante, siendo por tanto su evolución respecto al tiempo una línea horizontal. Resulta pues fácil predecir las trayectorias de los WH, las cuales se muestran en la Fig. 4.1 para el caso  $f_{FC} = 50$  Hz, limitando el análisis a la banda de frecuencia {0-500} Hz.

En la Fig. 4.1 se han representado los siguientes WH: FC (WH1, rojo), WH5 (azul) y WH7 (verde). Los de orden 3 y 9, que son abarcados también por la banda de frecuencia mencionada, no se han representado pues los WH de orden múltiplo de 3 tienen amplitud cero en un motor de inducción trifásico idealmente simétrico. Lo mismo ocurre con los WH de orden par.

Si el motor de inducción está alimentado a través de un inversor, entonces la frecuencia de la FC no es constante. Por ejemplo, durante un arranque variará entre cero y un valor final, trazando la evolución escogida por el usuario: normalmente una evolución lineal o parabólica. En el caso de una evolución lineal, la frecuencia de la FC describirá efectivamente una recta pasando por 0 en el instante inicial y llegando a su valor final al finalizar el transitorio. La evolución de un WH de orden  $n$  será por tanto según (4.1) una recta de idénticas características pero con una pendiente  $n$  veces mayor. Veámoslo con un ejemplo. La trayectoria de la frecuencia de la FC al programar el inversor con una evolución lineal entre 0 y 50 Hz y una duración del arranque de 2 segundos es:

$$f_{FC} = 50t/2 = 25 \cdot t \quad (4.2)$$

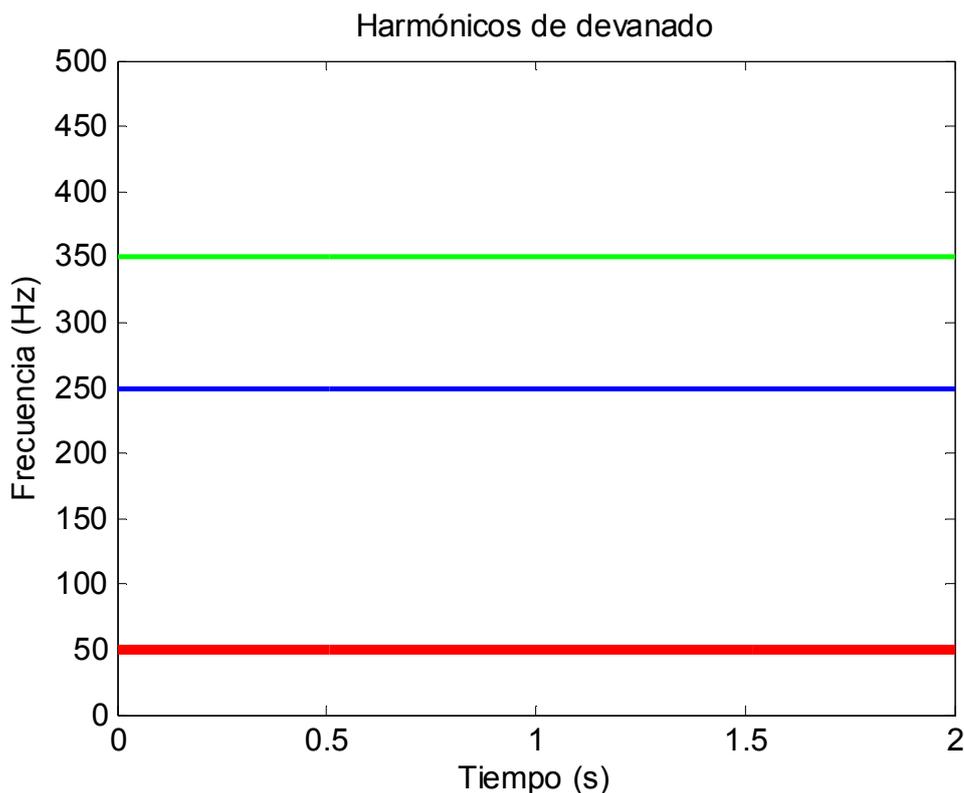


Fig. 4.1 Evolución temporal de la frecuencia de los WH durante un arranque directo (de 2 segundos).

Sustituyendo en (4.1) obtenemos:

$$f_{WHn} = nf_{FC} = 25n \cdot t \quad (4.3)$$

Así pues, al alimentar el motor de inducción mediante un inversor, durante un arranque de 2 segundos y con una evolución lineal de la frecuencia de la FC entre 0 y 50 Hz, las trayectorias de los WH son las descritas por (4.3) y representadas en la Fig. 4.2.

Teniendo en cuenta que todo WH empezará su trayectoria en cero, con mayor o menor pendiente en función de su orden, aun restringiendo la figura a la banda de frecuencia {0-500} Hz, todos los WH deberían tener parte de su trayectoria representada. Sin embargo, se han dibujado tan solo los de mayor amplitud: FC (WH1, rojo), WH5 (azul) y WH7 (verde).

En esta ocasión se ha supuesto una evolución temporal de la frecuencia de la FC dada por (4.2). Al analizar las averías con alimentación mediante inversor, se aplicará el método descrito en el capítulo 5 para obtener la evolución real de la frecuencia de la FC, ya sea durante un arranque o un transitorio cualquiera, lo cual permitirá predecir la evolución real de las frecuencias de los WH.

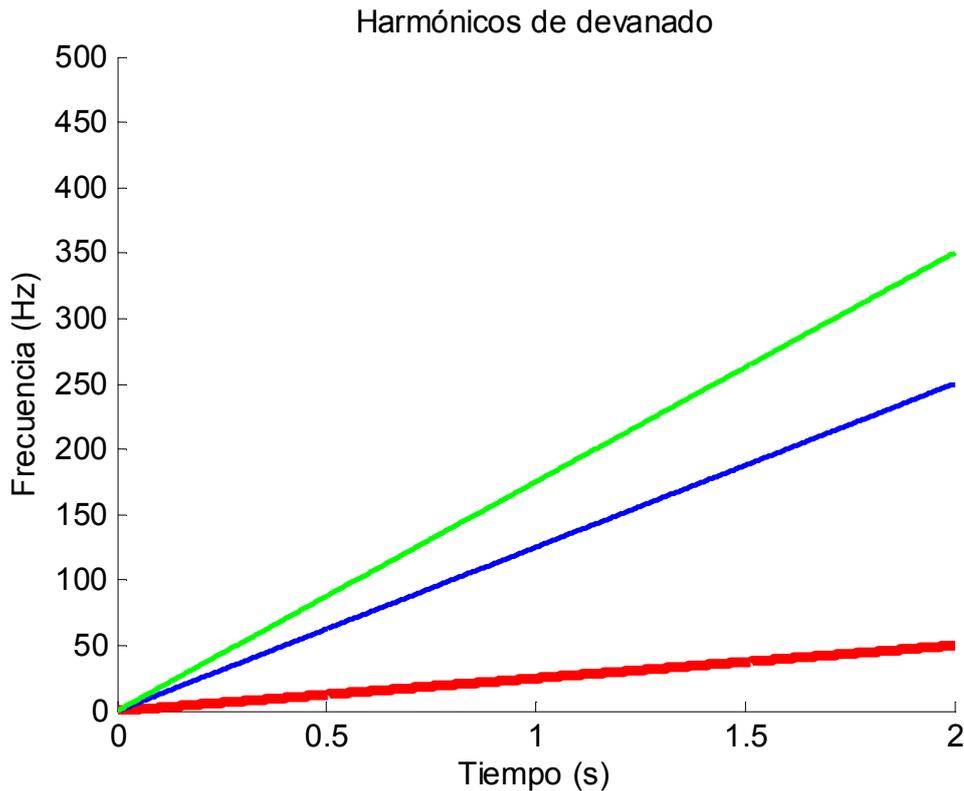


Fig. 4.2 Evolución temporal de la frecuencia de los WH durante un arranque mediante inversor (de 2 segundos) con evolución lineal de la frecuencia de la FC.

### Principal Slot Harmonics

La frecuencia de un PSH viene dada por (2.2) [1], ecuación que repetimos a continuación:

$$f_{PSH} = \left[ k \frac{R}{p} (1-s) \pm \nu \right] f_{FC} \quad (4.4)$$

Donde  $R$  es el número de ranuras del rotor,  $p$  el número de pares de polos,  $s$  es el deslizamiento,  $\nu$  es el orden del armónico de la tensión de alimentación considerado y  $k$  es un número natural ( $k \in \mathbb{N}$ ). Los PSH analizados en la presente tesis se restringen a los obtenidos de la fórmula tomando  $k = 1$ , pues son los de mayor amplitud. Denotamos como  $P\nu$ signo al PSH calculado utilizando (4.4) indicando el valor asignado a  $\nu$  y el signo tomado (positivo o negativo). El resto de parámetros dependen de las características del motor ( $R$  y  $p$ ) y de las condiciones de funcionamiento ( $s$  y  $f_{FC}$ ).

Para analizar, por ejemplo, la trayectoria temporal de la frecuencia de un PSH durante un arranque cuando el motor está acoplado directamente a la red, tal y como se comentó en la introducción a este apartado suponemos que el deslizamiento  $s(t)$  evoluciona linealmente respecto al tiempo (lo cual resulta bastante aproximado, salvo al principio y al final del arranque directo). Si el arranque dura  $t_f$  entonces tenemos que

$s(t) = 1 - t/t_f$  (teniendo en cuenta que los valores inicial y final del deslizamiento son 1 y 0 respectivamente). Por tanto tenemos  $t/t_f = 1 - s(t)$ . Sustituyendo en (4.4):

$$f_{PSH}(t) = \left[ k \frac{R}{p} \frac{t}{t_f} \pm \nu \right] f_{FC} \quad (4.5)$$

Reagrupando términos:

$$f_{PSH}(t) = \frac{kRf_{FC}}{pt_f} \cdot t \pm \nu f_{FC} \quad (4.6)$$

En otras palabras, bajo ésta hipótesis, la evolución de los PSH durante el arranque es lineal, pues la ecuación anterior es la de una recta. Concretamente es una recta de pendiente  $kRf_{FC}/pt_f$  que en 0 pasa por  $\nu f_{FC}$  o por  $-\nu f_{FC}$  (según el signo adoptado).

Conceptualmente una frecuencia negativa no tiene sentido físico. El signo positivo o negativo de una frecuencia en la corriente estatórica predicha por (4.6) indica el sentido de giro del campo magnético que la creó. Así pues, las frecuencias “positivas” son creadas por campos magnéticos girando en el mismo sentido que el rotor, mientras que las “negativas” son creadas por campos magnéticos con sentido de giro contrario al del rotor. Al analizar la corriente, las frecuencias “negativas” no se diferencian en nada de las “positivas”, encontrándose todas en la parte positiva del espectro. En definitiva, si no nos importa desconocer el sentido de giro del campo que generó la frecuencia, podemos representar el valor absoluto de las frecuencias predichas por la fórmula, que es lo que se obtiene al analizar el espectro de la corriente. Por otra parte, teniendo en cuenta que la pendiente de (4.6) es siempre positiva, tan solo aparecen frecuencias negativas en los PSH generados tomando un signo negativo en la fórmula, pues son los únicos que inician su trayectoria desde una ordenada negativa. En estos casos la evolución de la frecuencia no será exactamente una recta, pues al representar el valor absoluto de (4.6), la parte negativa “se refleja” respecto al eje de abscisas tomando valores positivos, pasando la evolución a estar formada por dos tramos de dos rectas.

Veamos un ejemplo. Tomando  $k=1$  (pues da lugar a los PSH de mayor amplitud), fijando  $R=28$  y  $p=2$  (valores característicos de uno de los motores analizados), considerando  $f_{FC} = 50$  Hz (valor típico de Europa), suponiendo que el arranque dura 2 segundos  $t_f = 2$ , asignando a  $\nu$  los valores 1, 3 y 5 y considerando para cada uno de ellos tanto el signo positivo como el negativo, aplicando éstos valores a (4.6) obtenemos las evoluciones mostradas en la Fig. 4.3.

La banda de frecuencias ha sido escogida suficientemente ancha para que las trayectorias se viesan completas. Podemos ver por tanto las evoluciones de seis PSH distintos (uno por cada valor asignado a  $\nu$  y por cada signo adoptado), que según la nomenclatura  $P\nu$ signo se denominan: P5+, P3+, P1+, P1-, P3- y P5-. Los PSH asociados a un mismo valor de  $\nu$  se han representado de un mismo color (5: verde, 3: azul y 1: rojo), siendo la línea sólida el asociado a signo positivo y la línea punteada el asociado a signo negativo.

En ésta ocasión se ha supuesto una evolución temporal del deslizamiento dada por  $s(t) = 1 - t/t_f$ . Al analizar cada una de las señales capturadas en capítulos posteriores, se aplicará el método descrito en el capítulo 5 para obtener la evolución real del deslizamiento, ya sea durante un arranque o un transitorio cualquiera, lo cual permitirá predecir la evolución real de las frecuencias de los armónicos que dependen de él, entre ellos los PSH.

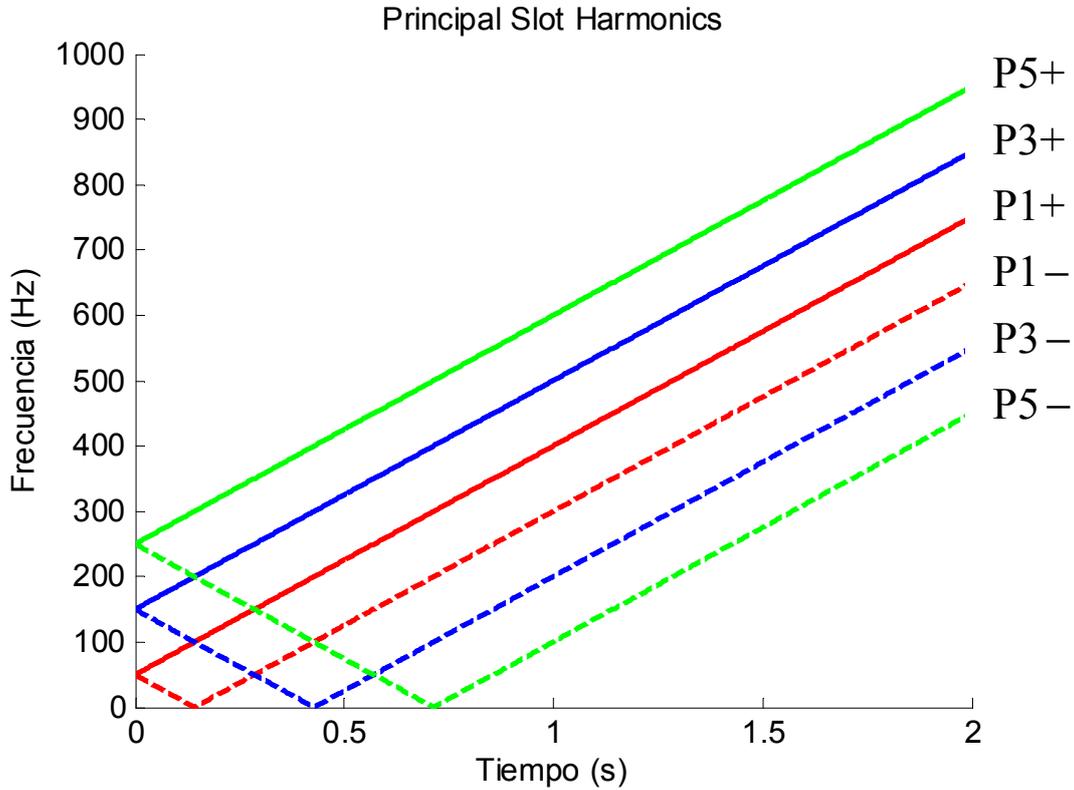


Fig. 4. 3 Evolución temporal de la frecuencia de los PSH durante un arranque directo (de 2 segundos) con evolución lineal del deslizamiento respecto al tiempo.

Si por el contrario queremos analizar la trayectoria temporal de la frecuencia de un PSH cuando el motor está alimentado mediante un inversor, tal y como se comentó en la introducción a éste apartado, suponemos que la frecuencia de deslizamiento tiene un valor despreciable durante todo el transitorio. Es decir,  $s f_{FC} \approx 0$ . Reordenando (4.4) y aplicando ésta simplificación obtenemos:

$$f_{PSH} = \left[ k \frac{R}{p} (1-s) \pm v \right] f_{FC} = \left( k \frac{R}{p} \pm v \right) f_{FC} - k \frac{R}{p} s f_{FC} \approx \left( k \frac{R}{p} \pm v \right) f_{FC} \quad (4.7)$$

Si por ejemplo el transitorio es un arranque, suponemos además que la frecuencia fundamental evoluciona de 0 a 50 Hz linealmente respecto al tiempo (lo cual resulta bastante aproximado en éste tipo de programación, salvo al principio cuando la frecuencia fundamental tarda ligeramente en adoptar la evolución lineal). Si el arranque dura  $t_f$  entonces tenemos que  $f_{FC}(t) = f_{FCf} t/t_f$  (teniendo en cuenta que los valores inicial y final de la frecuencia fundamental son 0 y  $f_{FCf}$  respectivamente). Sustituyendo en (4.7):

$$f_{PSH}(t) \approx \left( k \frac{R}{p} \pm \nu \right) \frac{f_{FCF}}{t_f} t \quad (4.8)$$

La ecuación anterior es la de una recta que pasa por el origen. En función del PSH analizado, la pendiente de la recta que traza la evolución de su frecuencia será mayor o menor.

Veamos un ejemplo. Tomando  $k=1$ ,  $R=28$ ,  $p=2$ ,  $f_{FCF}=50$  Hz,  $t_f=2$  s, asignando a  $\nu$  los valores 1, 3 y 5 y considerando para cada uno de ellos tanto el signo positivo como el negativo, aplicando éstos valores a (4.8) obtenemos las evoluciones mostradas en la Fig. 4.4.

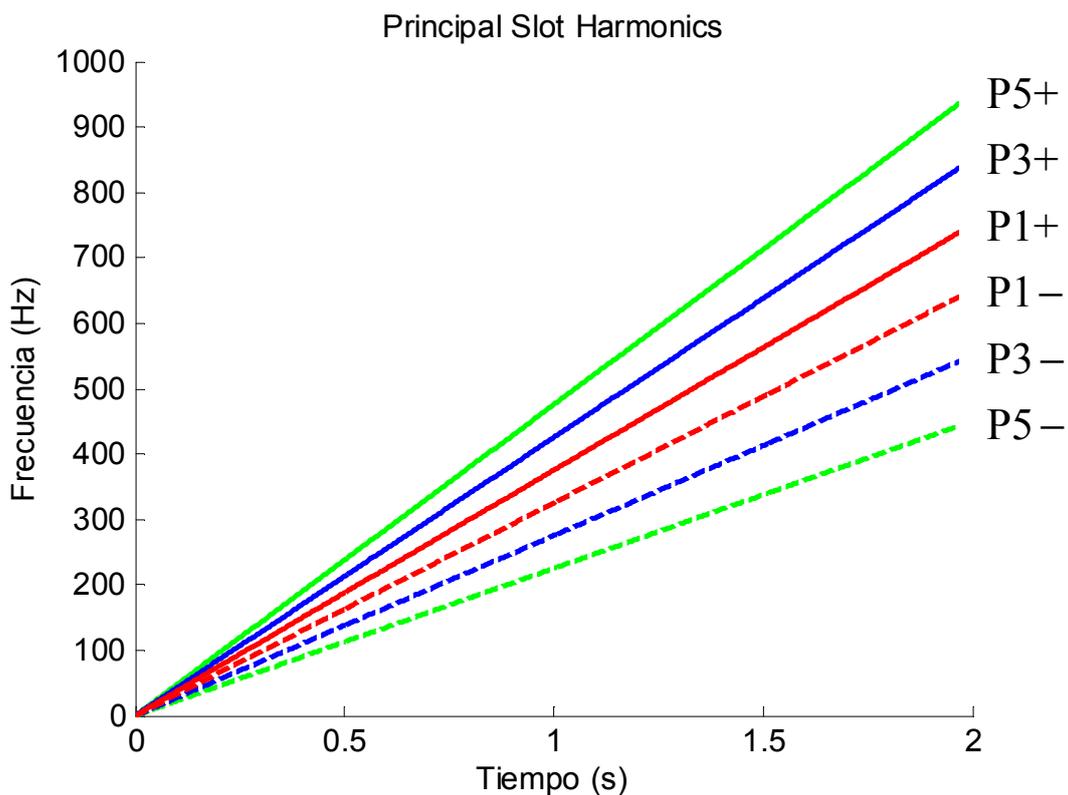


Fig. 4. 4 Evolución temporal de la frecuencia de los PSH durante un arranque mediante inversor (de 2 segundos) con evolución lineal de la frecuencia fundamental respecto al tiempo.

Los PSH cuyas trayectorias se acaban de trazar son los mismos que los de la Fig. 4.3. De hecho, podemos observar que, aunque sus evoluciones temporales sean muy distintas, sus valores en régimen permanente son idénticos.

#### 4.1.2.- Evolución de las componentes causadas por una rotura de barra.

Las frecuencias de los armónicos introducidos por la rotura de una barra vienen dadas por (2.3), ecuaciones que repetimos a continuación:

## Capítulo 4.

$$\begin{aligned} f_{BBH} &= [1 \pm 2ks] f_{FC} \\ f_{BBH} &= \left[ \frac{k}{p} (1-s) \pm s \right] f_{FC} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde en la primera ecuación  $k$  es un número natural ( $k \in \mathbb{N}$ ) y en la segunda  $k/p = 1, 3, 5, \dots$ . Los dos armónicos de rotura de barra (Broken Bar Harmonics, BBH) más importantes y de mayor amplitud: el armónico lateral inferior (Lower Sideband Harmonic, LSH) y el armónico lateral superior (Upper Sideband Harmonic, USH), se deducen de la primera ecuación tomando  $k=1$ , con el signo negativo y positivo respectivamente. Se obtiene también la frecuencia del LSH fijando  $k/p=1$  en la segunda fórmula y tomando el signo negativo. En general, denotamos como  $Bks$  al BBH calculado utilizando la primera ecuación indicando el valor asignado a  $k$  y el signo tomado (positivo o negativo). Análogamente, denotamos como  $bk/p$  al BBH calculado utilizando la segunda ecuación indicando el valor asignado a  $k/p$  y el signo tomado (positivo o negativo). Si conocemos las evoluciones temporales del deslizamiento y la frecuencia fundamental, ya podemos trazar las evoluciones temporales de los BBH. En el siguiente capítulo veremos cómo obtener las evoluciones de  $s$  y de  $f_{FC}$ . En el presente apartado daremos ejemplos trabajando con las hipótesis anteriormente mencionadas.

Para analizar, por ejemplo, la trayectoria temporal de la frecuencia de un BBH durante un arranque cuando el motor está alimentado directamente de la red, suponemos que, si el arranque dura  $t_f$ , entonces tenemos que  $s(t) = 1 - t/t_f$ . Por tanto se cumple  $t/t_f = 1 - s(t)$ . Sustituyendo en (4.9):

$$\begin{aligned} f_{BBH}(t) &= \left[ 1 \pm 2k \left( 1 - \frac{t}{t_f} \right) \right] f_{FC} \\ f_{BBH}(t) &= \left[ \frac{k}{p} \frac{t}{t_f} \pm \left( 1 - \frac{t}{t_f} \right) \right] f_{FC} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned} f_{BBH}(t) &= \left[ 1 \pm 2k \mp 2k \frac{t}{t_f} \right] f_{FC} = [1 \pm 2k] f_{FC} \mp \frac{2kf_{FC}}{t_f} t \\ f_{BBH}(t) &= \left[ \frac{k}{p} \frac{t}{t_f} \pm 1 \mp \frac{t}{t_f} \right] f_{FC} = \pm f_{FC} + \left[ \frac{k}{p} \mp 1 \right] \frac{f_{FC}}{t_f} t \end{aligned} \quad (4.11)$$

En otras palabras, bajo ésta hipótesis, la evolución de los BBH es lineal con respecto al tiempo, pues las dos ecuaciones anteriores son las de una recta. La primera familia de rectas empiezan su trayectoria en un punto del eje de ordenadas múltiplo impar de  $f_{FC}$  y terminan todas en  $f_{FC}$ . Con la segunda familia de rectas ocurre lo contrario, todas

empiezan su trayectoria en  $f_{FC}$  y terminan en un múltiplo impar de  $f_{FC}$ . Cabe señalar que las trayectorias de los BBH no dependen de las características de la máquina.

Veámoslo con un ejemplo. Tomando  $f_{FC} = 50$  Hz y  $t_f = 2$ , asignando a  $k$  los dos primeros posibles valores (1 y 2), considerando para cada uno de ellos tanto el signo positivo como el negativo y aplicando éstos valores a la primera ecuación obtenemos las evoluciones mostradas en la Fig. 4.5. Si realizamos idéntico procedimiento con la segunda fórmula, asignando a  $k/p$  los tres primeros valores posibles (1, 3 y 5) y considerando para cada uno de ellos tanto el signo positivo como el negativo, obtenemos las evoluciones mostradas en la Fig. 4.6.

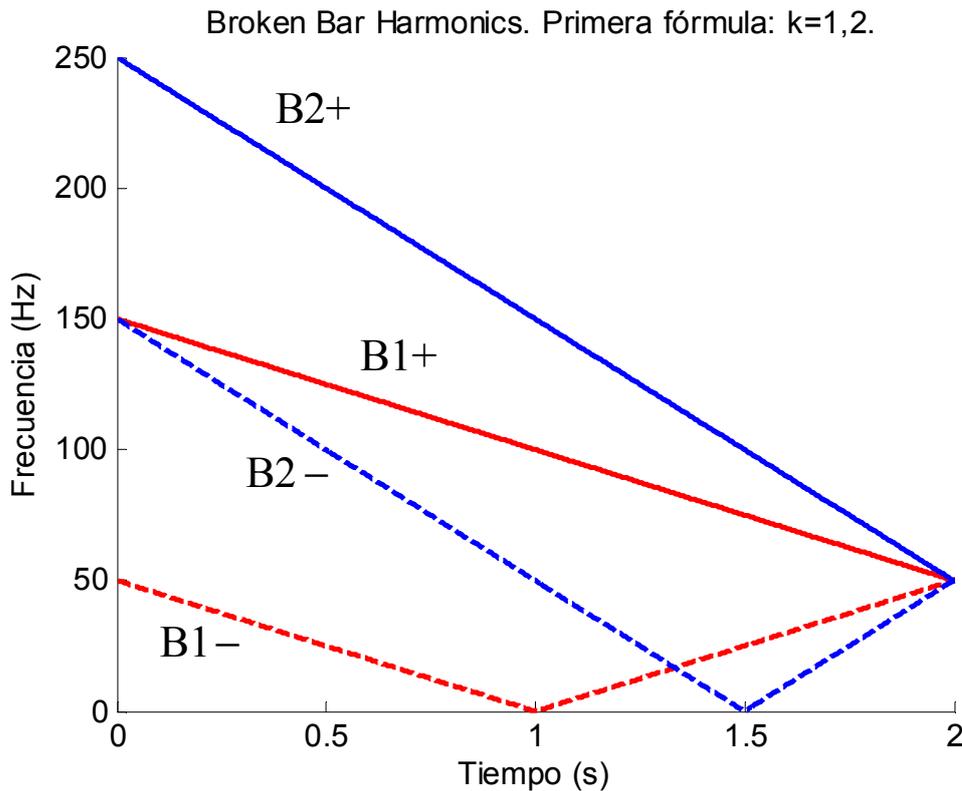


Fig. 4.5 Evolución temporal de la frecuencia de los BBH previstos por la primera fórmula durante un arranque directo (de 2 segundos) con evolución lineal del deslizamiento respecto al tiempo.

En la Fig. 4.5 podemos ver las evoluciones de 4 BBH distintos (uno por cada valor asignado a  $k$  y por cada signo adoptado), que según la nomenclatura  $Bksigno$  se denominan: B2+, B1+, B2- y B1-. Los BBH asociados a un mismo valor de  $k$  se han representado de un mismo color (1: rojo y 2: azul), siendo la línea sólida el asociado a signo positivo y la línea punteada el asociado a signo negativo. Tal y como hemos avanzado, los inicios de las evoluciones temporales de la frecuencia de los armónicos provocados por la rotura de barra previstos por la primera fórmula son siempre múltiplos de la frecuencia fundamental, en éste caso 50, 150 y 250 Hz. El final de la trayectoria es siempre la frecuencia fundamental: 50 Hz.

En la Fig. 4.6 podemos ver las evoluciones de 6 BBH distintos (uno por cada valor asignado a  $k/p$  y por cada signo adoptado), que según la nomenclatura

$b_{k/p}$  signo se denominan:  $b_{5+}$ ,  $b_{5-}$ ,  $b_{3+}$ ,  $b_{3-}$ ,  $b_{1+}$  y  $b_{1-}$ . Los BBH asociados a un mismo valor de  $k/p$  se han representado de un mismo color (1: rojo, 3: azul y 5: verde), siendo la línea sólida el asociado a signo positivo y la línea punteada el asociado a signo negativo. Tal y como hemos avanzado, el inicio de las evoluciones temporales de la frecuencia de los armónicos provocados por la rotura de barra previstos por la segunda fórmula en (4.9) es siempre la frecuencia fundamental: 50 Hz. Los finales de las trayectorias son siempre múltiplos de la frecuencia fundamental, en éste caso 50, 150 y 250 Hz.

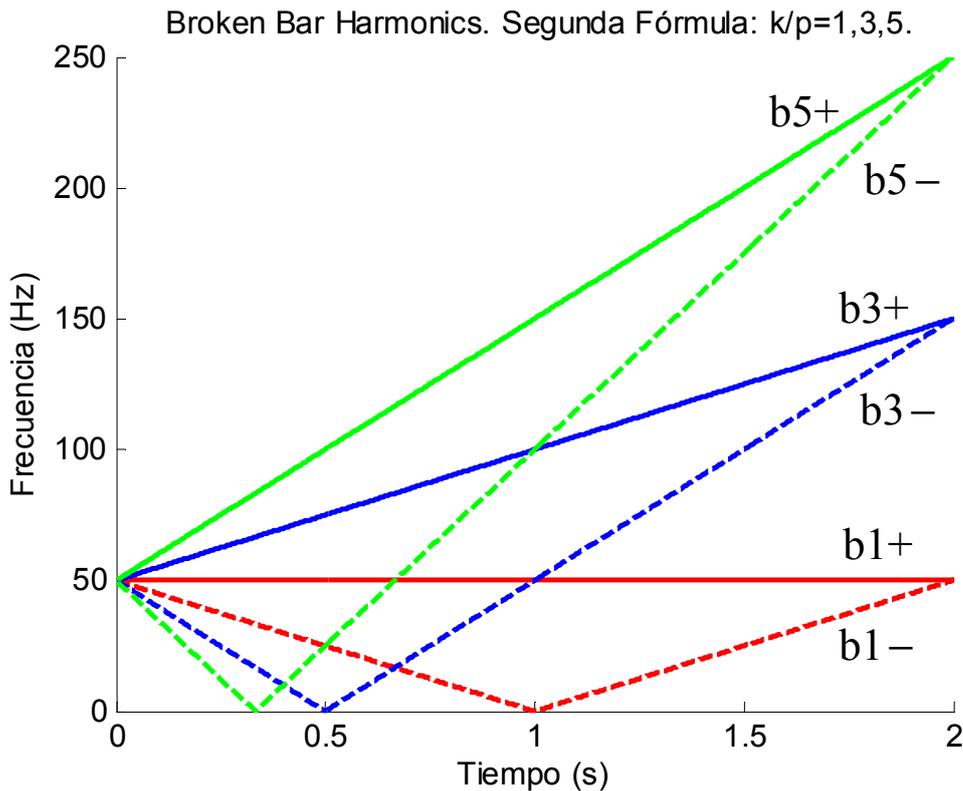


Fig. 4.6 Evolución temporal de la frecuencia de los BBH previstos por la segunda fórmula durante un arranque directo (de 2 segundos) con evolución lineal del deslizamiento respecto al tiempo.

Si por el contrario queremos analizar la trayectoria temporal de la frecuencia de un BBH cuando el motor está alimentado mediante un inversor, tal y como se ha realizado anteriormente, suponemos que la frecuencia de deslizamiento tiene un valor pequeño y constante durante todo el transitorio:  $sf_{FC} \approx 0$ . Reordenando (4.9) y aplicando ésta simplificación obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{BBH} &\approx f_{FC} \\ f_{BBH} &\approx \frac{k}{p} f_{FC} \end{aligned} \quad (4.12)$$

En definitiva, las evoluciones de los BBH previstos por la primera fórmula son muy similares a las de la FC, mientras que las evoluciones de los BBH previstos por la segunda fórmula son muy similares a uno de los WH. Por tanto, si por ejemplo analizamos un arranque con evolución lineal de la frecuencia fundamental y de duración 2 segundos, las trayectorias serán muy próximas a las mostradas en la Fig. 4.2.

### 4.1.3.- Evolución de las componentes causadas por excentricidad.

Las frecuencias de los armónicos introducidos por la aparición de una excentricidad mixta vienen dadas por (2.4), ecuación que repetimos a continuación:

$$f_{EH} = \left[ 1 \pm k \left( \frac{1-s}{p} \right) \right] f_{FC} \quad (4.13)$$

Donde  $k$  es un número natural ( $k \in \mathbb{N}$ ). Denotamos como  $Eksigno$  al armónico producido por una excentricidad (Eccentricity Harmonic, EH), calculado utilizando la ecuación anterior indicando el valor asignado a  $k$  y el signo tomado (positivo o negativo). Para trazar las trayectorias temporales de los EH necesitamos conocer las evoluciones temporales del deslizamiento y la frecuencia fundamental. A continuación daremos ejemplos trabajando con las hipótesis anteriormente mencionadas.

En el caso de un arranque directo (motor acoplado directamente a la red), suponemos que, si el arranque dura  $t_f$ , entonces tenemos que  $s(t) = 1 - t/t_f$ . Por tanto se cumple  $t/t_f = 1 - s(t)$ . Sustituyendo en (4.13):

$$f_{EH} = \left[ 1 \pm k \left( \frac{t}{pt_f} \right) \right] f_{FC} \quad (4.14)$$

Reagrupando términos:

$$f_{EH} = f_{FC} \pm \frac{kf_{FC}}{pt_f} t \quad (4.15)$$

Análogamente a los casos anteriores, bajo ésta hipótesis, la evolución de un EH describe una recta, teniendo como origen  $f_{FC}$  y como final un múltiplo de  $f_{FC}$ , que en este caso no tiene porqué ser entero ( $(1 \pm k/p)$ ), como veremos en el siguiente ejemplo. El lector puede además observar que, en este caso, las trayectorias de los armónicos vinculados al fallo, los EH, si dependen de las características de la máquina (concretamente del número de pares de polos).

Veámoslo con un ejemplo. Tomando  $f_{FC} = 50$  Hz,  $t_f = 2$  y  $p = 1$ , asignando al número natural el primer valor posible  $k = 1$ , considerando tanto el signo positivo como el negativo y aplicando éstos valores a (4.15) obtenemos las evoluciones mostradas en la Fig. 4.7.

Podemos ver las evoluciones de 2 EH distintos (uno por cada valor asignado a  $k$  y por cada signo adoptado), que según la nomenclatura  $Eksigno$  se denominan:  $E1+$  y  $E1-$ . Como ambos están asociados a un mismo valor de  $k$  se han representado de un mismo color (rojo), siendo la línea sólida el asociado a signo positivo y la línea punteada el asociado a signo negativo. Tal y como hemos avanzado, el inicio de las evoluciones temporales de la frecuencia de los armónicos provocados por la

excentricidad previstos por la fórmula, es siempre la frecuencia fundamental: 50 Hz. Los finales de las trayectorias son siempre múltiplos (no necesariamente enteros) de la frecuencia fundamental, en éste caso 25 y 75 Hz.

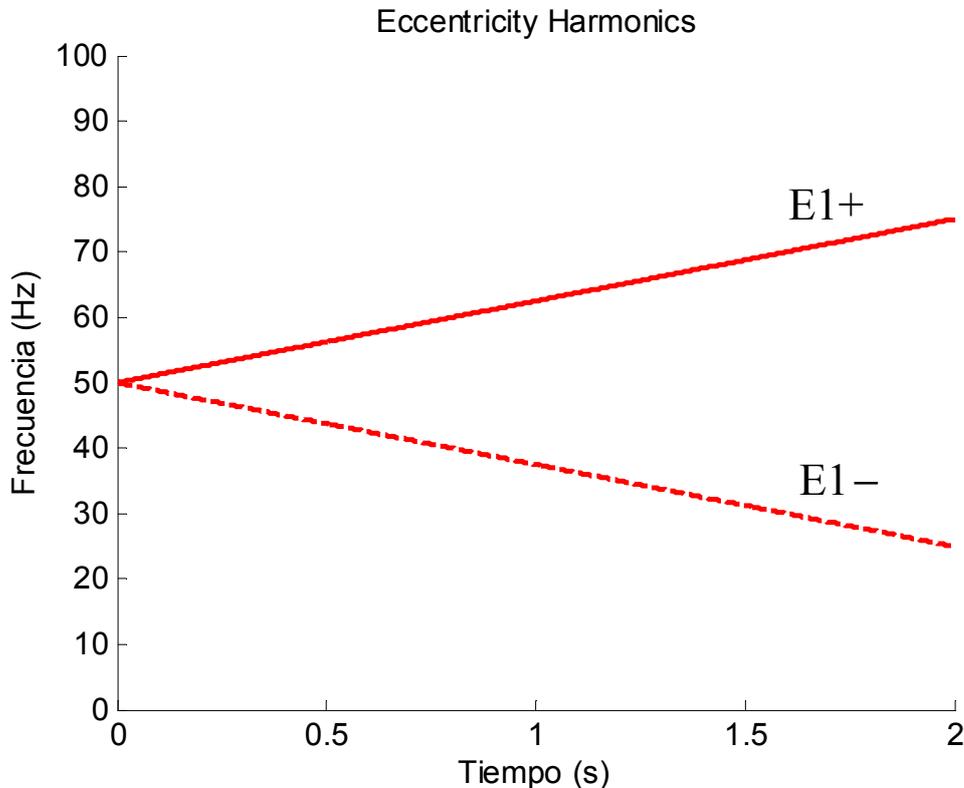


Fig. 4.7 Evolución temporal de la frecuencia de los EH previstos por (4.14) durante un arranque directo (de 2 segundos) con evolución lineal del deslizamiento respecto al tiempo.

Si por el contrario queremos analizar la trayectoria temporal de la frecuencia de un EH cuando el motor está alimentado mediante un inversor, tal y como se ha realizado anteriormente, suponemos que la frecuencia de deslizamiento tiene un valor pequeño y constante durante todo el transitorio:  $sf_{FC} \approx 0$ . Reordenando (4.13) y aplicando ésta simplificación obtenemos:

$$f_{EH} = \left[ 1 \pm \frac{k}{p} \right] f_{FC} \quad (4.16)$$

Al igual que al analizar los PSH, si por ejemplo el transitorio es un arranque, suponemos además que la frecuencia fundamental evoluciona de 0 a 50 Hz linealmente respecto al tiempo, obteniendo  $f_{FC}(t) = f_{FCf} t / t_f$  (teniendo en cuenta que los valores inicial y final de la frecuencia fundamental son 0 y  $f_{FCf}$  respectivamente y que el arranque dura  $t_f$ ). Sustituyendo en (4.16):

$$f_{EH} = \left[ 1 \pm \frac{k}{p} \right] \frac{f_{FCf}}{t_f} t \quad (4.17)$$

La ecuación anterior es la de una recta que pasa por el origen. En función del EH analizado, así como de los pares de polos de la máquina, la pendiente de la recta que traza la evolución de su frecuencia será mayor o menor.

Veamos un ejemplo. Tomando  $p=2$ ,  $f_{FCf} = 50 \text{ Hz}$ ,  $t_f = 2 \text{ s}$ ,  $k=1$  y considerando tanto el signo positivo como el negativo, aplicando éstos valores a (4.17) obtenemos las evoluciones mostradas en la Fig. 4.8.

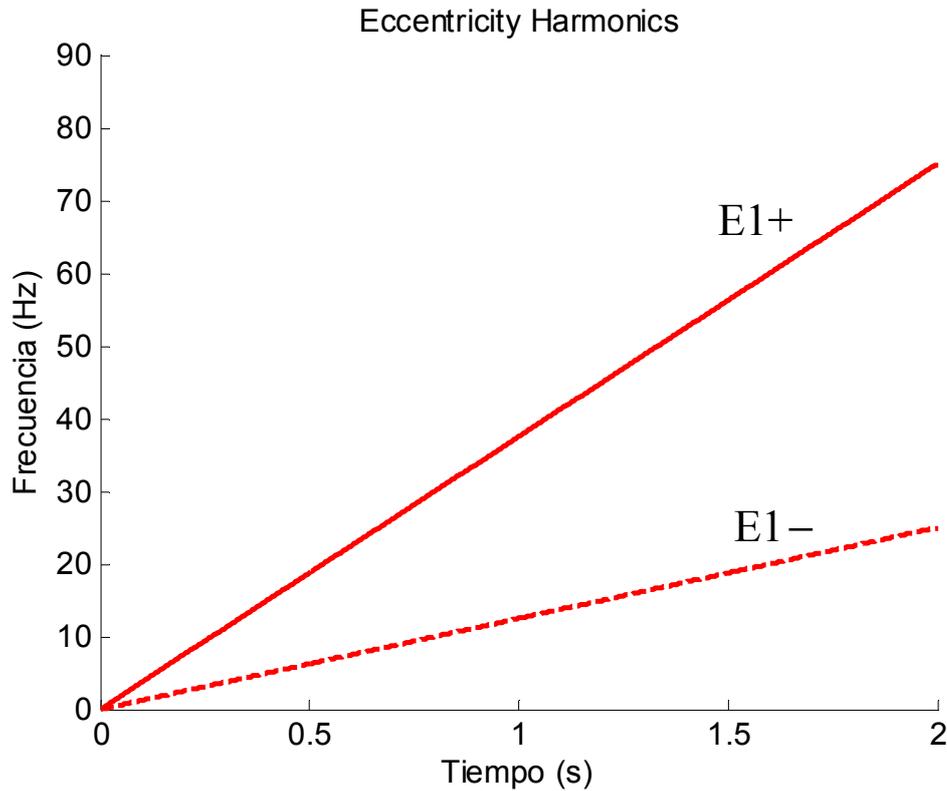


Fig. 4. 8 Evolución temporal de la frecuencia de los EH durante un arranque mediante inversor (de 2 segundos) con evolución lineal de la frecuencia fundamental respecto al tiempo.

Los EH cuyas trayectorias se acaban de trazar son los mismos que los de la Fig. 4.7. De hecho, podemos observar que, aunque sus evoluciones temporales sean muy distintas, sus valores en régimen permanente son idénticos.

## 4.2.- Elección del átomo tiempo-frecuencia. Criterio de la pendiente.

El problema clave que se plantea a la hora de utilizar un átomo tiempo-frecuencia para analizar el contenido energético de una señal alrededor del punto en el cual se centra el átomo, es: ¿qué átomo utilizamos? Existen numerosos tipos de átomos tiempo-frecuencia, de los cuales ya se han dado dos ejemplos: las Frequency B-Splines y las funciones de Gabor (analizadas en el capítulo 6 y en el apartado AM 3 respectivamente).

A continuación se presenta el criterio de selección desarrollado en la tesis, el cual ha sido diseñado con el objetivo de obtener de forma optimizada las evoluciones completas de las componentes de avería, teniendo en cuenta que, tal y como se ha mostrado en el apartado anterior, utilizando los métodos desarrollados y plasmados en el capítulo 5, se conocen cuáles deben ser estas evoluciones en caso de que dichas componentes estén presentes en la corriente.

Tal y como se muestra en el apartado 4.3, ninguna de las transformadas presentes en el estado del arte pueden cumplir las exigencias del novedoso criterio de selección desarrollado, lo cual hace necesario diseñar una transformada nueva. Así pues, en el apartado 4.4 se presenta la transformada diseñada tomando como base el criterio de selección mostrado a continuación. Dicha transformada se utilizará a lo largo de la tesis para analizar todas las señales experimentales (capítulos 7, 8 y 9).

En primer lugar se define el concepto de pendiente de un átomo tiempo-frecuencia (4.2.1), el cual se utiliza reiteradamente a lo largo de la tesis. En segundo lugar se restringen los tipos de átomos que se considerarán, es decir, se define el diccionario, o conjunto de átomos que pueden ser elegidos para analizar una señal (4.2.2). En tercer lugar se diseña un criterio (basado en el uso de la fórmula de la pendiente de las FBS deducida en el capítulo 6), para escoger los átomos que finalmente conforman la familia que se correlaciona con la señal (4.2.3 y 4.2.4).

### 4.2.1.- Concepto de pendiente de un átomo tiempo-frecuencia.

Definimos la pendiente de un átomo tiempo-frecuencia como la pendiente de la diagonal de su caja de Heisenberg (el concepto de caja de Heisenberg se recuerda en (3.2.3)). Es decir, tal y como se observa en la Fig. 4.9, si la caja de Heisenberg tiene como dimensión temporal  $\sigma_t$  y como dimensión frecuencial  $\sigma_f$ , entonces la pendiente se define como:

$$P = \frac{\sigma_f}{\sigma_t} \quad (4.18)$$

Las FBS, átomos tiempo-frecuencia utilizados por primera vez en la presente tesis para el diagnóstico de máquinas eléctricas, se analizan en el capítulo 6, obteniendo como resultado final principal la fórmula de la pendiente de la caja de Heisenberg de una FBS en función de sus parámetros. El novedoso y profundo análisis realizado en el capítulo 6 (apoyado a su vez en el apéndice matemático), y en especial la obtención de

dicha formula, permiten aplicar la metodología de diagnóstico desarrollada y obtener los excelentes resultados mostrados en los capítulos 7 y en adelante, así como en el ejemplo analizado en el presente capítulo, en los cuales se observa como las FBS son capaces de generar funciones de densidad tiempo-frecuencia que proporcionan un elevado nivel de detalle y resolución, de tal forma que, al representarlas gráficamente, la evolución temporal de la frecuencia de los armónicos presentes en la señal se observa completa y con gran nitidez. En el apéndice matemático (apartado AM 3), se analizan a su vez las funciones de Gabor, obteniendo la expresión de la pendiente de la caja de Heisenberg en función de sus parámetros.

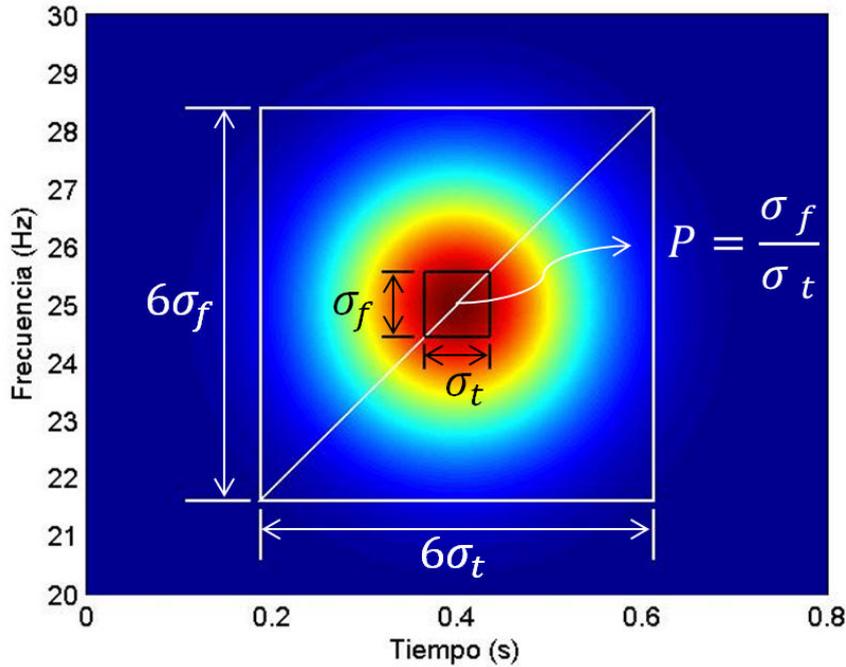


Fig. 4.9 Pendiente de un átomo tiempo-frecuencia.

A continuación resumimos ambas formulas, evitando al lector no interesado en demostraciones matemáticas, la lectura del capítulo 6 y del apéndice matemático. En el capítulo 6 se ha demostrado que la pendiente de las FBS viene dada por la siguiente fórmula:

$$P = \frac{\pi f_b^2}{2\sqrt{30}} \frac{\text{Hz}}{\text{s}} \quad (4.19)$$

A su vez, la pendiente de las funciones de Gabor viene dada por:

$$P = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \frac{\text{Hz}}{\text{s}} \quad (4.20)$$

Como se puede ver, las pendientes de las cajas no dependen, en ninguno de los dos casos, de la frecuencia central del átomo  $f_c$  (parámetro común a ambos tipos de funciones), dependiendo tan solo de  $f_b$  en el caso de las FBS, y de  $\sigma$  en el caso de las funciones de Gabor.

### 4.2.2.- Área de la caja de Heisenberg. Elección de las FBS: justificación.

Las funciones de Gabor son especialmente conocidas pues, tal y como se analiza en AM 3, el área de su caja de Heisenberg alcanza el mínimo dictado por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Esta propiedad es muy deseable pues, cuanto menor es el área de la caja, mayor es la resolución de la función de densidad obtenida. Las FBS no alcanzan dicho mínimo, pero llegan extremadamente cerca en el caso  $m = 2$ . Se trata de dos tipos de átomos bastante parecidos. Pero las FBS de parámetro  $m = 2$  tienen una ventaja sobre las funciones de Gabor: consiguen obtener resultados de calidad equivalente con un tiempo de cálculo menor (lo cual se analiza y se justifica en 6.5, donde se comparan ambos tipos de átomos). Así pues, aplicando un primer criterio en el que prima que el átomo posea una caja de Heisenberg de área lo más pequeña posible, pero sin que esto implique tiempos de cálculo demasiado elevados, el método de diagnóstico desarrollado en la presente tesis se basa en el uso de las FBS de parámetro  $m = 2$ , utilizando únicamente estos átomos en los análisis realizados.

### 4.2.3.- Asignando valores a $m$ y a $f_c$ .

Aunque con este primer razonamiento se ha restringido muchísimo el conjunto de átomos de entre los que elegir, teniendo en cuenta que las FBS quedan definidas al dar valores a sus tres parámetros característicos ( $m, f_b, f_c$ ), todavía quedan infinitas opciones. Para resolver este problema, recordemos la ecuación de la FBS y analicemos la de su transformada de Fourier, obtenida al final del apartado 6.4 (expresión (6.92)):

$$\psi(t) = C_{m, f_b} \left[ \text{sinc} \left( \frac{f_b t}{m} \right) \right]^m e^{i2\pi f_c t} \quad (4.21)$$

$$\hat{\psi}(f) = 2\pi \left( \frac{m}{2\pi f_b} \right)^m C_{m, f_b} \left[ \text{rect} \left( \frac{m}{f_b} (f - f_c) \right) \right]^m \dots \text{rect} \left( \frac{m}{f_b} (f - f_c) \right) \quad (4.22)$$

En primer lugar, justificamos la elección  $m = 2$ . Vemos que, al aumentar el valor de  $m$ , aumenta el factor de escalado de la función seno cardinal  $m/f_b$ , además de aumentar su exponente. Al aumentar el factor de escalado la función se dilata, describiendo la misma forma que antes de escalar, en un intervalo de tiempo mayor. Esto ayuda a producir una peor localización temporal de la energía. Sin embargo, el otro efecto paralelo es más potente y de consecuencias inversas. Al aumentar el exponente, como la función seno cardinal toma valores inferiores a la unidad (menos en el origen, donde la función vale 1), el resultado es menor. En otras palabras, al reducirse todos los valores menos el del origen (salvo por el cambio de la constante de normalización que sí produce una cierta reducción), la función tiende más rápidamente a cero. En definitiva, al aumentar el valor de  $m$ , mejora la localización temporal de la energía. En la Fig. 4.10 se comparan gráficamente las ventanas de las FBS, que obtenemos tomando  $m = 1$  (azul),  $m = 2$  (rojo), y en ambos casos  $f_b = 7.6$  Hz.

Por otra parte, el número de veces que hay que convolucionar la función rectangular para calcular la transformada de Fourier de una FBS es igual a  $m - 1$ . Si tomamos  $m = 1$ , la TF será una función rectangular. Si tomamos  $m = 2$ , la TF será una

función triangular. Y así sucesivamente, la forma de la TF empeorará, desde el filtro perfecto en frecuencia que es una función rectangular, a otras formas más complejas, todas ellas B-Splines. Así pues, al aumentar el valor de  $m$ , empeoran las características de la FBS como filtro en frecuencia.

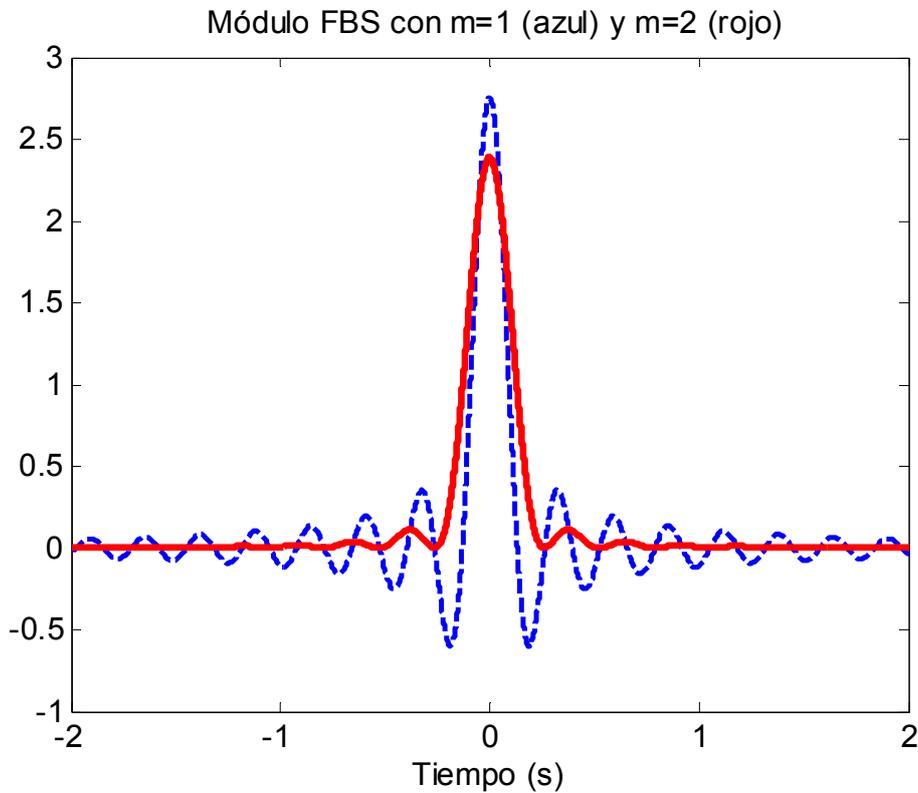


Fig. 4. 10 Módulo de una FBS fijando  $m = 1$  (azul),  $m = 2$  (rojo), y en ambos casos  $f_b = 7.6$  Hz .

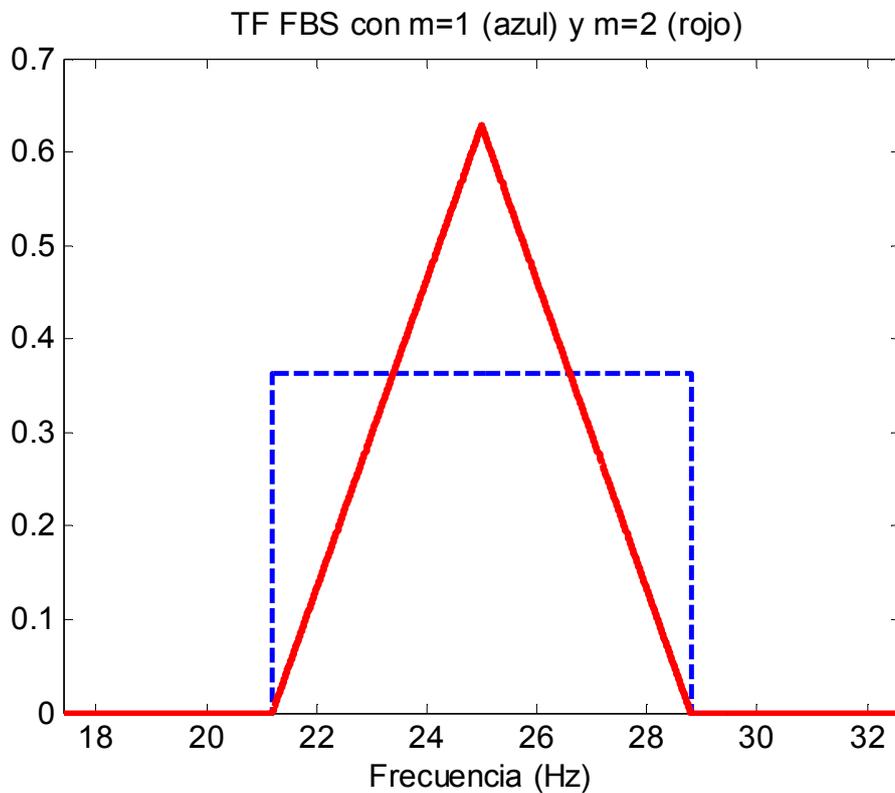


Fig. 4. 11 TF de una FBS fijando  $m = 1$  (azul),  $m = 2$  (rojo), y en ambos casos  $f_b = 7.6$  Hz y  $f_c = 25$  Hz .

## Capítulo 4.

En la Fig. 4.11 se comparan gráficamente las TF de las FBS que obtenemos tomando  $m = 1$  (azul),  $m = 2$  (rojo), y en ambos casos  $f_b = 7.6$  Hz y  $f_c = 25$  Hz.

En definitiva, al aumentar el valor de  $m$ , mejora la localización temporal de la energía y empeora el comportamiento como filtro en frecuencia. Teniendo en cuenta los resultados experimentales,  $m = 2$  ha demostrado ser un buen valor de compromiso.

Fijar el valor de  $f_c$  resulta inmediato. Se demuestra en el capítulo 6 que la frecuencia central de una FBS es precisamente  $f_c$ . Así pues, la función, tal y como se ha definido en (4.21), tiene concentrada su energía alrededor de  $(0, f_c)$ . Si trasladamos la FBS a  $t_c$  entonces su energía se concentrará alrededor de  $(t_c, f_c)$ . Por lo tanto, si queremos analizar el contenido energético de una señal en un determinado punto del plano tiempo-frecuencia, debemos trasladar la FBS al instante a analizar, y asignar a la frecuencia central el valor de la frecuencia a analizar. Con ello se consigue que la FBS se encuentre centrada en el punto del plano que se quiere estudiar.

### 4.2.4.- Criterio de la pendiente: asignando valores a $f_b$ .

Resumiendo: si queremos utilizar una FBS para estudiar el contenido energético que tiene una señal alrededor de un punto del plano, tomamos  $m = 2$  como valor de compromiso entre sus propiedades temporales y frecuenciales, trasladamos la FBS al instante de tiempo del punto del plano a analizar  $t_c$  y asignamos a su frecuencia central  $f_c$  el valor de la frecuencia del punto a analizar. Tan solo queda asignar el valor a  $f_b$  para concretar la FBS que vamos a utilizar. Este viene fijado por el criterio de la pendiente, el cual se define a continuación.

El criterio de la pendiente establece que, si utilizamos un átomo tiempo-frecuencia centrado en un determinado punto del plano, con el objetivo de captar la evolución de una componente en dicho punto, para que el átomo capte de la mejor forma posible la energía de la componente, **la pendiente de su caja de Heisenberg debe ser igual a la pendiente de la evolución de la componente en dicho punto**, definida esta última como la pendiente de la tangente a la evolución por el punto analizado (el concepto de caja de Heisenberg se recuerda en (3.2.3)). Este criterio se ilustra en la Fig. 4.12.

Teniendo en cuenta la fórmula de la pendiente de la caja de Heisenberg de una FBS (clave en la aplicación de la metodología y deducida en el capítulo 6), se concluye que, si se conoce el valor de la pendiente que se desea, entonces se puede calcular el valor de  $f_b$ :

$$P = \frac{\pi}{2\sqrt{30}} f_b^2 \Rightarrow f_b = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{P} \quad (4.23)$$

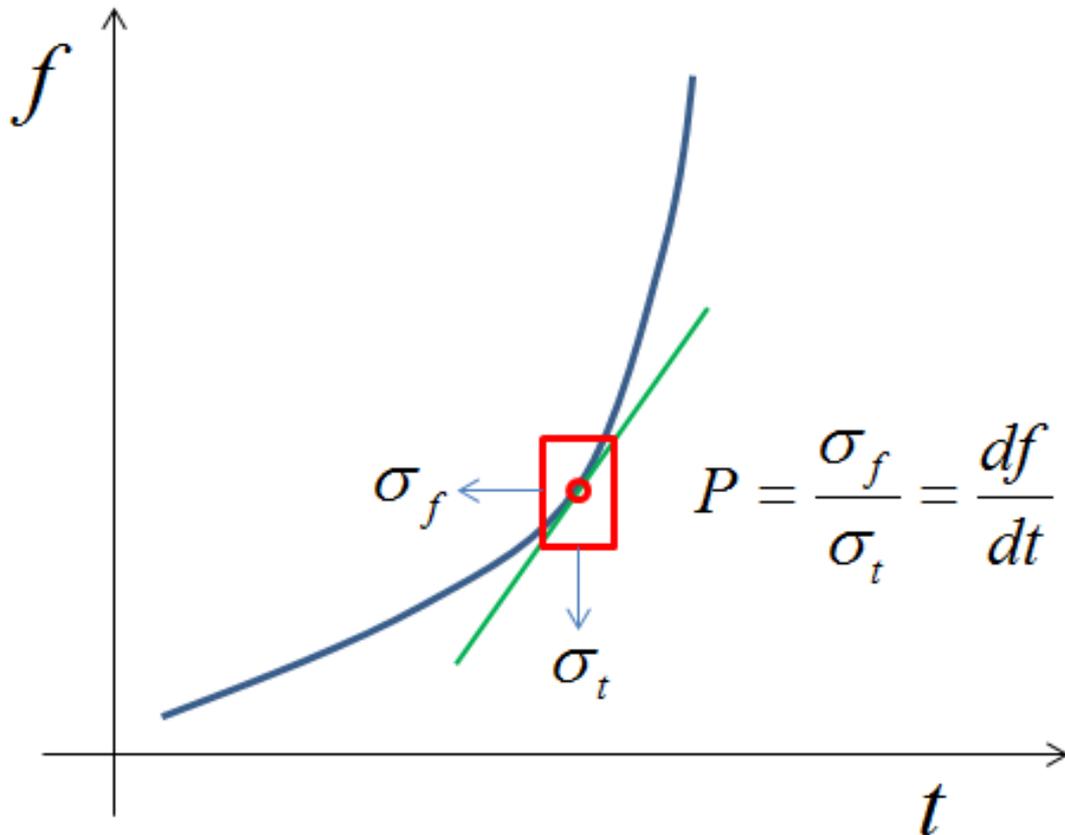


Fig. 4.12 Criterio de la pendiente: la pendiente de la caja de Heisenberg en un punto es igual a la de la tangente a la evolución en dicho punto de la componente que se quiere detectar.

Se analiza como ejemplo, para clarificar el criterio, una corriente estática de un motor de inducción de un par de polos. El motor de inducción tiene una barra rota. El transitorio capturado consiste en un arranque seguido de sucesivas variaciones de carga, alimentando el motor directamente de la red. La corriente se muestra en la Fig. 4.13. Esta corriente se utiliza como ejemplo a lo largo de este capítulo y el siguiente, para explicar las diferentes técnicas que se van introduciendo. Los detalles del ensayo así como las características del motor pueden encontrarse en 7.1 (concretamente se trata de la corriente 2 de entre las descritas en la Tabla 7.1).

La evolución del deslizamiento (Fig. 4.15) se obtiene aplicando el método expuesto en el capítulo 5 (seguidamente se presentan los pasos y resultados fundamentales de forma abreviada). En primer lugar se obtiene la evolución de la frecuencia del armónico de ranura principal  $P1-$  (Fig. 4.14), seguidamente se calcula la evolución del deslizamiento a partir de 4.5 (Fig. 4.15), y finalmente, tal y como se mostró en el apartado 4.1, se obtienen las evoluciones de la FC y del LSH utilizando 4.1 y 4.9 respectivamente (Fig. 4.16).

Para diagnosticar el estado de la máquina en cuanto a roturas de barras, el LSH es la componente más importante cuya evolución interesa obtener. Pero al mismo tiempo, hay que tener muy en cuenta al FC, pues puede enmascarar la evolución del LSH pasado el arranque, cuando las frecuencias de ambas componentes se acercan. Apliquemos el criterio de la pendiente a cada una de las distintas partes en las que se puede dividir el transitorio global.

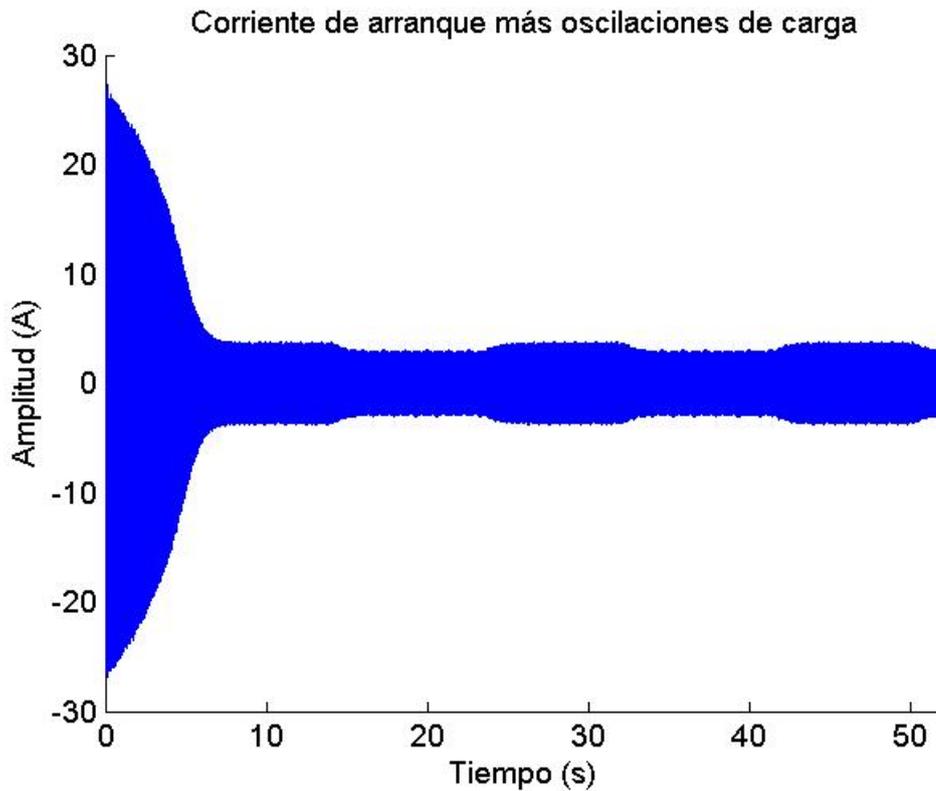


Fig. 4. 13 Corriente estática de un motor de inducción de un par de polos con una barra rota durante un arranque seguido de oscilaciones de carga con alimentación directa desde la red.

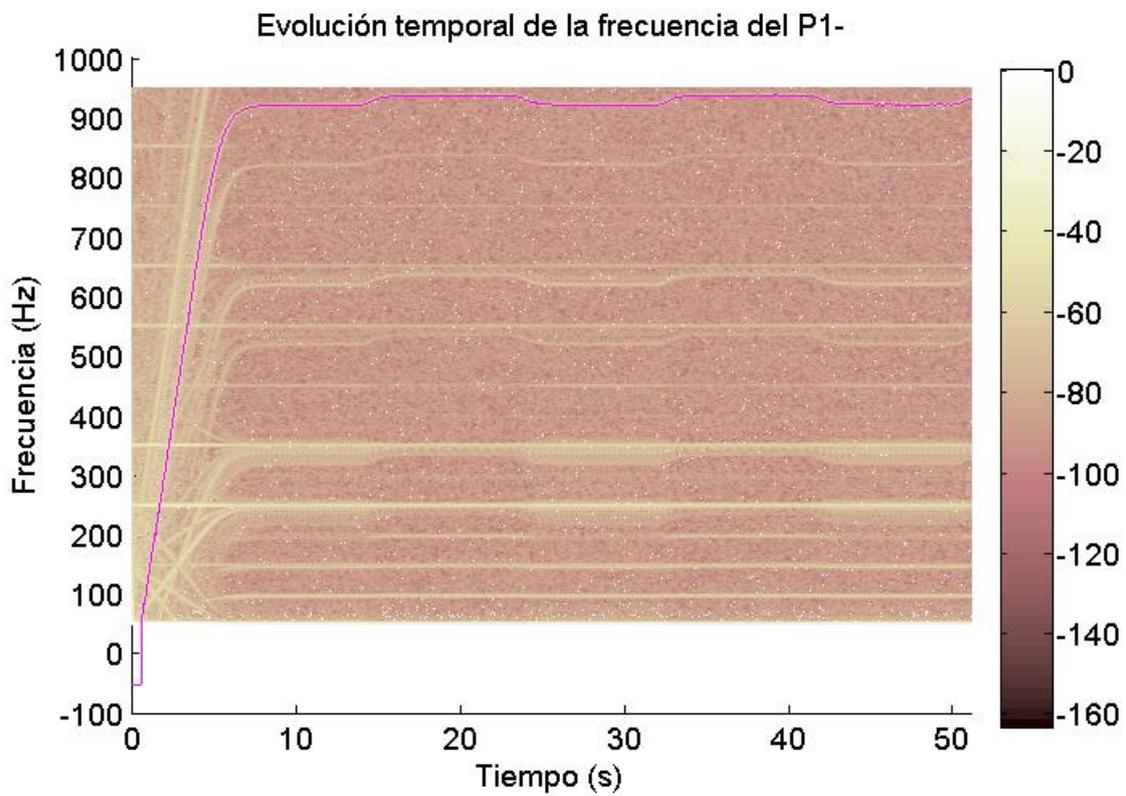


Fig. 4. 14 Estimación de la evolución temporal de la frecuencia de  $P1$  – superpuesta sobre la densidad de energía de la corriente obtenida utilizando la STFT.

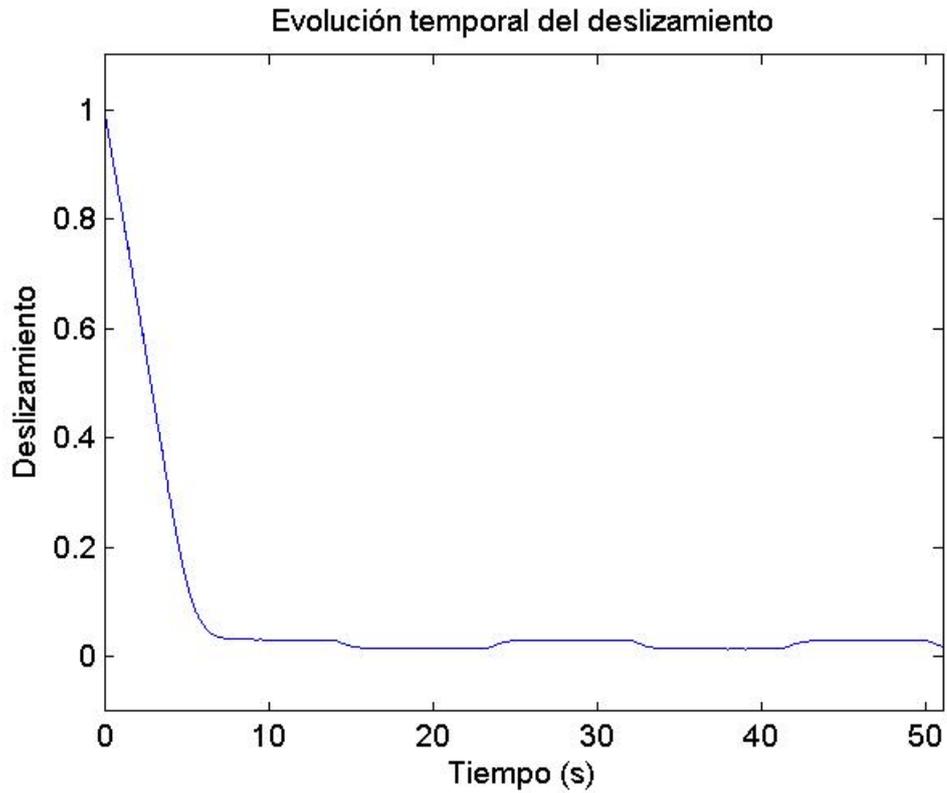


Fig. 4. 15 Estimación final de la evolución temporal del deslizamiento.

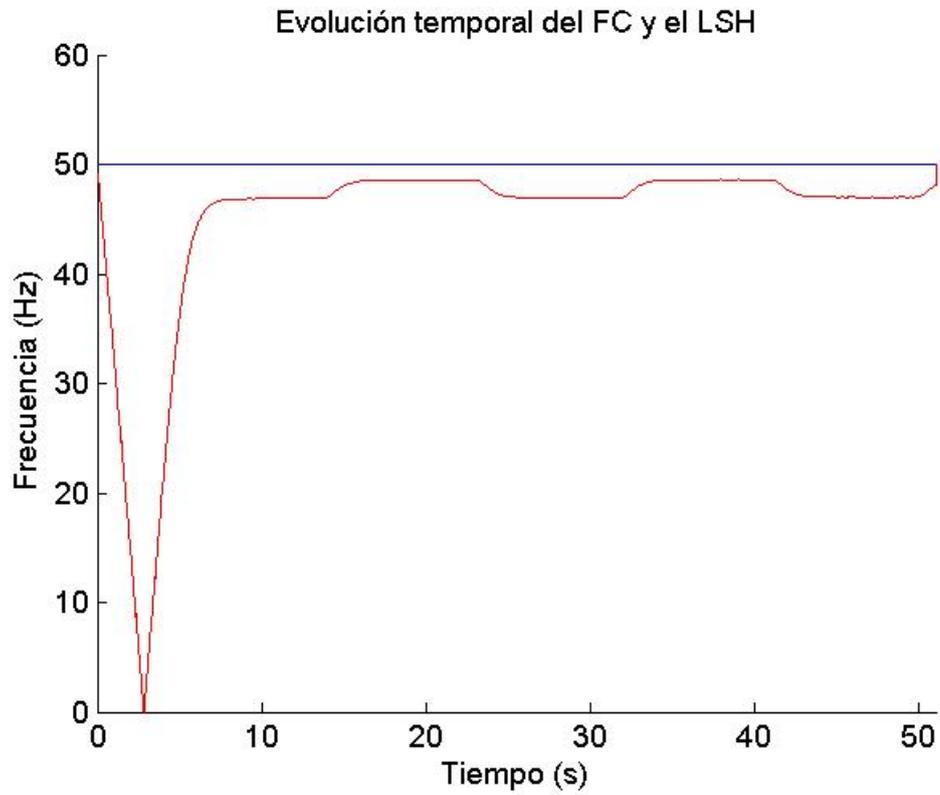


Fig. 4. 16 Resultado final: estimación final de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de la corriente (FC y LSH).

Tal y como se ve en las figuras 4.16 y 4.17, la pendiente de la evolución del LSH durante el arranque es más o menos constante y aproximadamente igual a  $100/6$  Hz/s, teniendo en cuenta que el arranque dura alrededor de 6 s y que la banda de frecuencia recorrida en dicho tiempo son 100 Hz. Así pues, al analizar cada uno de los puntos del plano tiempo-frecuencia por los que transita el LSH durante el arranque, si aplicamos el criterio de la pendiente, las cajas de Heisenberg de los átomos utilizados deben tener en todos los puntos la misma pendiente:  $100/6$  Hz/s. En la Fig. 4.17 se puede ver, dibujado de color azul, el esquema de una caja de Heisenberg con un valor de la pendiente aproximadamente igual al calculado. Aplicando la fórmula de la pendiente de las FBS podemos calcular el valor de  $f_b$  que debemos utilizar para obtener la evolución del LSH durante el arranque:

$$f_b = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{P} = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{\frac{100}{6}} \approx 7.6233 \text{ Hz} \quad (4.24)$$

Si se aplica el criterio en la segunda parte del transitorio, en el momento de las oscilaciones de carga, las pendientes de las cajas deben cambiar, tal y como cambia la pendiente de la evolución del LSH mostrada en la Fig. 4.16. En primer lugar, si queremos analizar los momentos de cambio, cuando la frecuencia se incrementa o cuando disminuye entre los periodos cortos de frecuencia constante, realizando un zoom sobre la figura podemos ver que aproximadamente el tiempo cubierto en uno de dichos periodos de cambio es de 3 s, siendo el intervalo de frecuencia cubierto de 1.5 Hz, y por tanto la pendiente es de  $P = 0.5$  Hz/s.

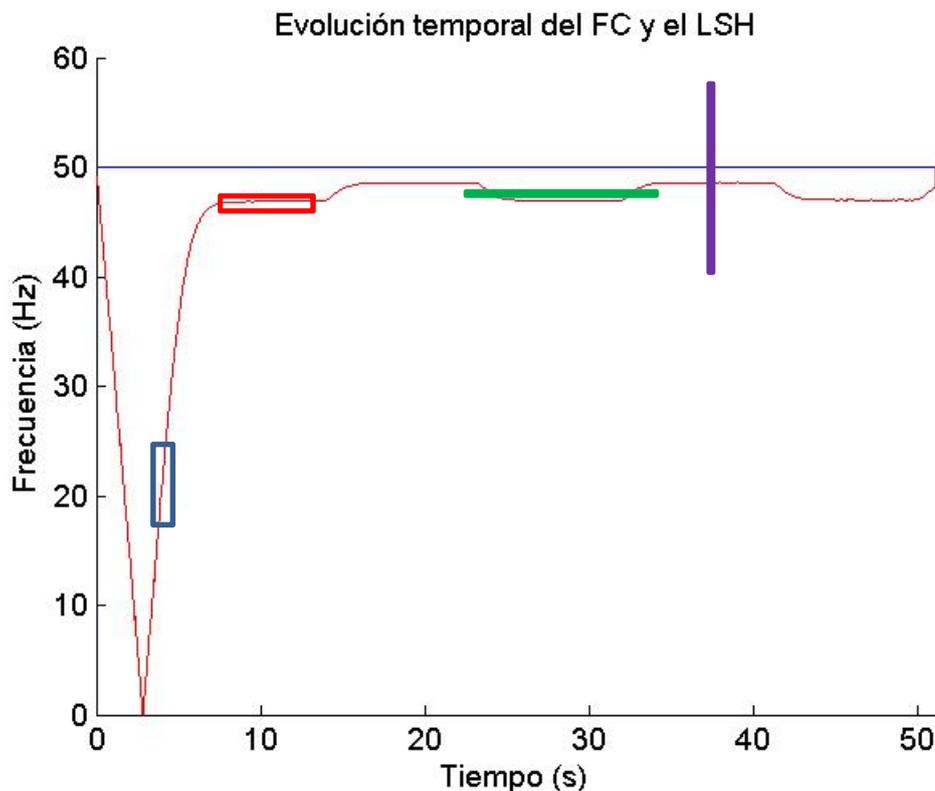


Fig. 4. 17 Estimación de las evoluciones de las frecuencias del FC y el LSH. Cajas de Heisenberg de pendientes adecuadas (azul y rojo) y de pendientes inadecuadas (verde y morada).

Por otra parte, en los cortos intervalos de un cierto permanente, la pendiente teórica debería ser cero, con lo cual tomaríamos  $f_b = 0$  Hz. En este caso límite, la FBS es una exponencial compleja, y por tanto el cálculo de la correlación de la FBS con una señal a analizar se convierte en el cálculo de la TF de la señal, lo cual no resulta conveniente, pues se pierde la información temporal. Es decir, no se puede asignar cada frecuencia analizada al momento en el que aparece, pasando de ser un análisis tiempo-frecuencia a ser un análisis exclusivamente en frecuencia. Esta es una manera de explicar el fenómeno. Otra consiste en ver que las cajas de Heisenberg utilizadas al tomar  $P = 0$  Hz/s tienen una altura cero y una base infinita. Esto implica que, al utilizar dichas cajas para analizar la señal, capturan todas las energías que hay a dicha frecuencia, independientemente del instante analizado, emborronando terriblemente el resultado al representarlo en el plano. Aunque la altura no sea exactamente cero, si la base es suficientemente elevada, el fenómeno persiste, y al centrar la caja en un punto, no mide la energía en alrededores adecuados para la estructura de la señal: tiene en cuenta demasiados instantes a derecha y a izquierda, afectando no sólo a la evolución del LSH en dicho punto sino también a la evolución en otros instantes a frecuencias parecidas. Es lo que sucedería si utilizáramos una caja como la mostrada en color verde en la Fig. 4.17. Un buen valor para analizar estas partes de la evolución sería  $P = 0.1$  Hz/s, y, basándonos en la experiencia, como límite definitivo para evitar que la falta de resolución temporal emborrona totalmente el gráfico tendríamos que adoptar  $P = 0.05$  Hz/s.

Para terminar, conviene también utilizar cajas de Heisenberg de mucha base y poca altura cuando el análisis se realiza alrededor de la FC, pues si las cajas tienen una altura considerable (como la caja morada en la Fig. 4.17), al analizar un punto del plano próximo al FC, la caja mide también la energía del FC, falseando el resultado del contenido energético en el punto a analizar.

Concluyendo, para no complicar el análisis, en vez de cambiar los valores de la FBS en cada uno de los puntos al captar la evolución durante las oscilaciones de carga, se toma un valor de compromiso entre lo que interesa para las zonas de cambio  $P = 0.5$  Hz/s y lo que interesa tanto para las zonas de permanente como para que no afecte la presencia de la FC  $P = 0.1$  Hz/s. Adoptamos como valor de compromiso el término medio  $P = 0.25$  Hz/s. En la Fig. 4.17 se puede ver, dibujado de color rojo, el esquema de una caja de Heisenberg con un valor de la pendiente aproximadamente igual al calculado. Por tanto tenemos:

$$f_b = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{P} = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{0.25} \approx 0.9337 \text{ Hz} \quad (4.25)$$

Aplicando el criterio de la pendiente concluimos que, las FBS a utilizar deben tener un ancho de banda de valor  $f_b = 7.62$  Hz durante los puntos analizados relativos al arranque; y de valor  $f_b = 0.93$  Hz durante los puntos analizados relativos a la oscilación de carga. De esta forma, las dimensiones de las cajas de Heisenberg son, para cada punto analizado, adecuadas a la evolución de la componente.

## 4.3.- Ventajas e inconvenientes de la STFT, la WT y el MP.

En este apartado se analiza hasta qué punto las transformadas presentes en el estado del arte (estudiadas en profundidad en el capítulo 3), se pueden utilizar para detectar la evolución completa del LSH en la señal analizada como ejemplo (Fig. 4.13), siguiendo el criterio de la pendiente presentado en el apartado anterior. Se estudian los resultados obtenidos, destacando las ventajas de cada una de las transformadas y sus inconvenientes, los cuales nos llevan a definir una nueva transformada (apartado 4.4).

### 4.3.1.- Short Time Fourier Transform.

Tal y como se analizó en el capítulo 3, la STFT es una transformada cuyas cajas de Heisenberg son de dimensiones constantes a lo largo del plano. Así pues, nunca podrá satisfacer el criterio de la pendiente enunciado y aplicado en el apartado anterior, pues este requiere cajas de Heisenberg variables, de tal forma que en cada punto se ajuste la pendiente de la caja a la de la evolución de la componente en el punto. Por tanto, resulta imposible obtener la evolución del LSH en su totalidad: o bien priorizamos el obtener de la mejor forma posible la evolución durante el arranque utilizando  $f_b = 7.62$  Hz, o bien priorizamos obtener de la mejor forma posible la evolución durante las oscilaciones de carga utilizando  $f_b = 0.93$  Hz. La STFT se debe utilizar solo para caracterizar señales en las cuales un compromiso inicial entre resolución en el tiempo y en frecuencia resulte adecuado para analizar todos los puntos del plano.

Se han realizado seis análisis utilizando la STFT cuyos resultados se muestran en las figuras 4.18 a 4.23. En los tres primeros casos (Figs. 4.18 a 4.20) se ha utilizado  $f_b = 7.62$  Hz, y en los tres últimos (Figs. 4.21 a 4.23)  $f_b = 0.93$  Hz. Los seis análisis son idénticos, pudiendo cambiar para cada uno el valor asignado al parámetro  $f_b$ , así como el intervalo de tiempo considerado o la banda de frecuencia analizada. En el primero y el cuarto se considera toda la corriente, analizando la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tratando de mostrar la evolución completa del LSH. En el segundo y el quinto se mantiene la banda de frecuencia analizada, pero se consideran solo los 10 primeros segundos, tratando así mostrar con mayor detalle la evolución del LSH durante el arranque. En el tercero y el sexto se consideran los 60 segundos que dura la señal, pero tan solo se analizan las frecuencias entre 45 y 55 Hz, tratando de mostrar con mayor detalle la evolución del LSH durante las oscilaciones de carga.

Estudiando las Fig. 4.18 y 4.21, vemos que resulta imposible obtener la evolución completa del LSH utilizando la STFT. En el primer caso ( $f_b = 7.62$  Hz) obtenemos adecuadamente el transitorio de arranque, pero las oscilaciones de carga quedan emborronadas por la presencia del FC. Las cajas de Heisenberg utilizadas resultan adecuadas para la evolución del LSH durante el arranque, lo cual vemos en detalle en la Fig. 4.19, pero filtran muy mal el FC pues tienen demasiada altura, de tal forma que la presencia del FC se propaga hasta incluso 45 y 55 Hz, en vez de estar confinado alrededor de 50 Hz. Esto imposibilita observar las oscilaciones de carga, lo cual vemos en detalle en la Fig. 4.20.

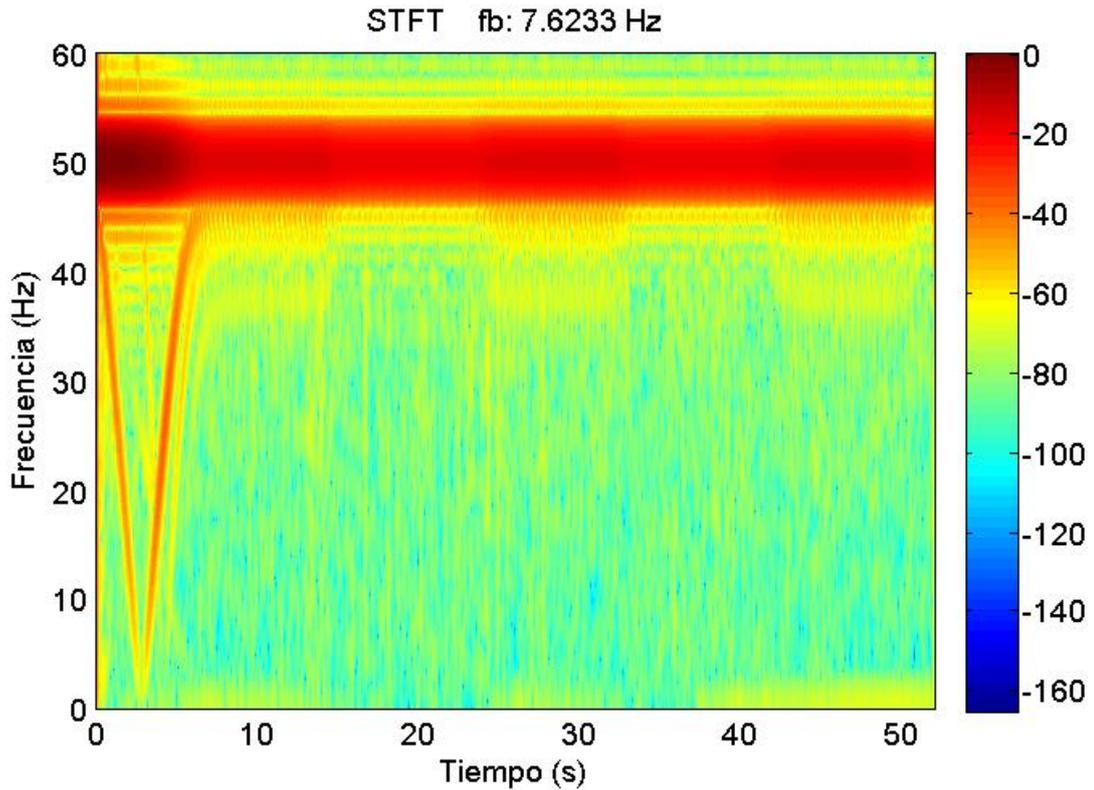


Fig. 4. 18 STFT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tomando fb=7.6233 Hz.

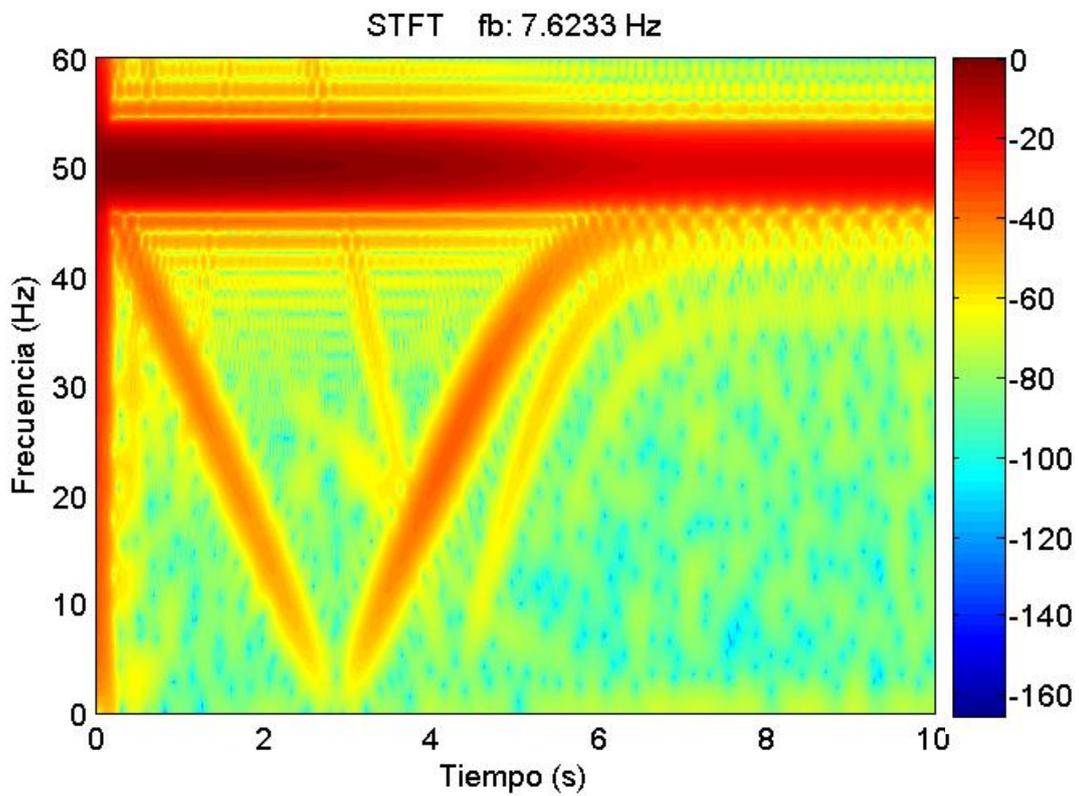


Fig. 4. 19 STFT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando los 10 primeros segundos y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tomando fb=7.6233 Hz.

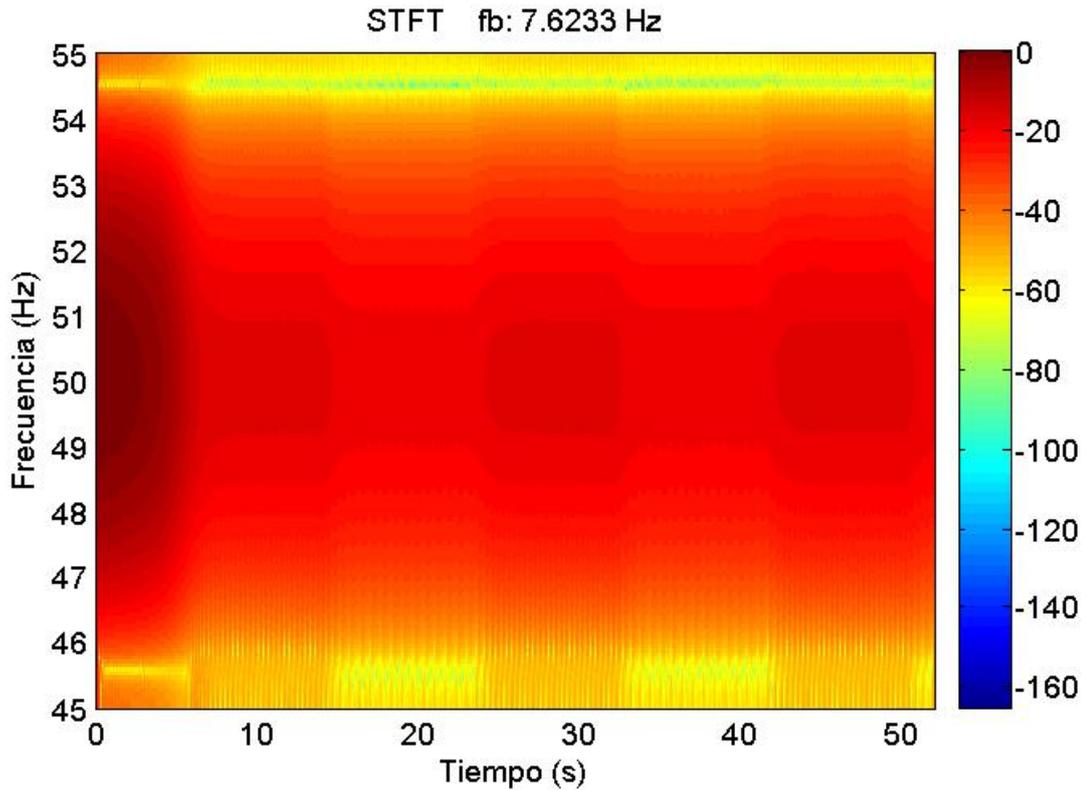


Fig. 4.20 STFT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, tomando  $fb=7.6233$  Hz.

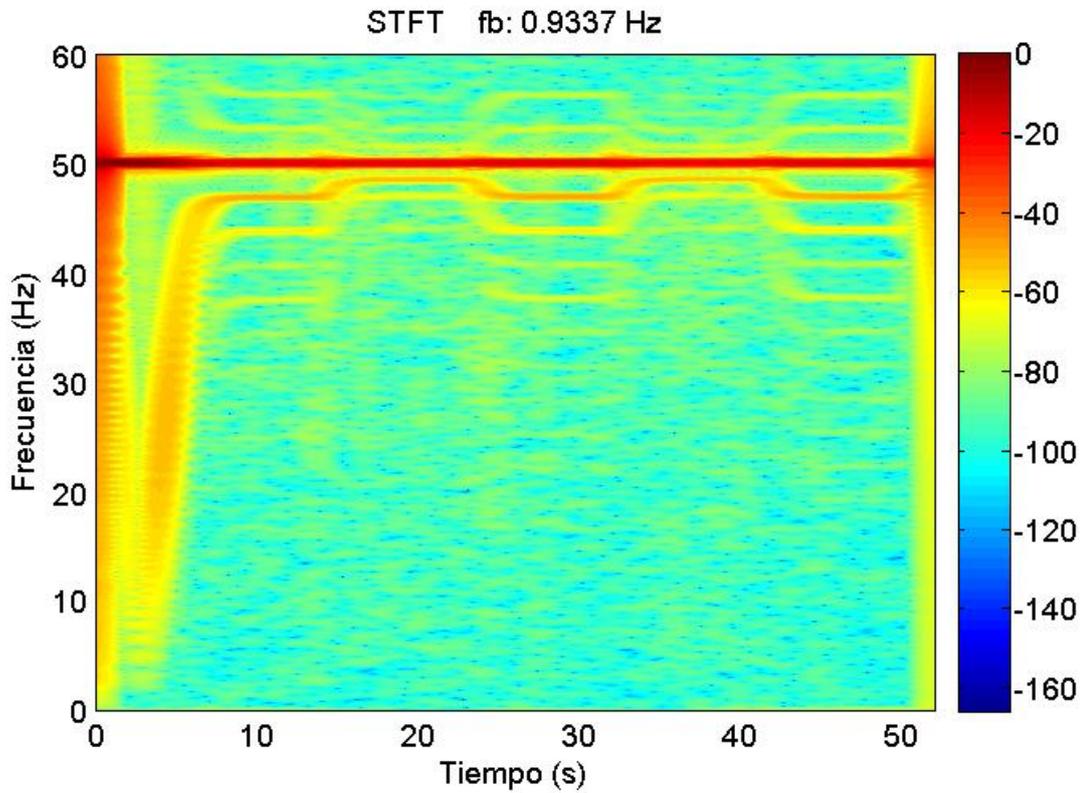


Fig. 4.21 STFT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tomando  $fb=0.9337$  Hz.

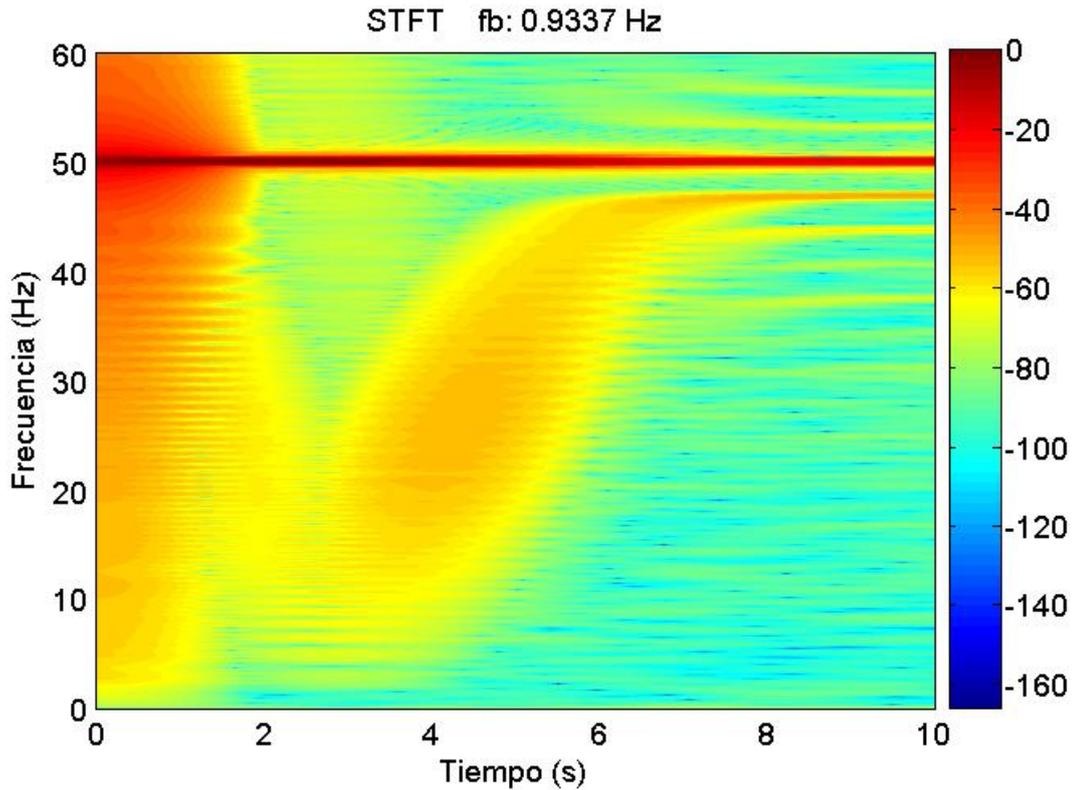


Fig. 4. 22 STFT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando los 10 primeros segundos y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tomando fb=0.9337 Hz.

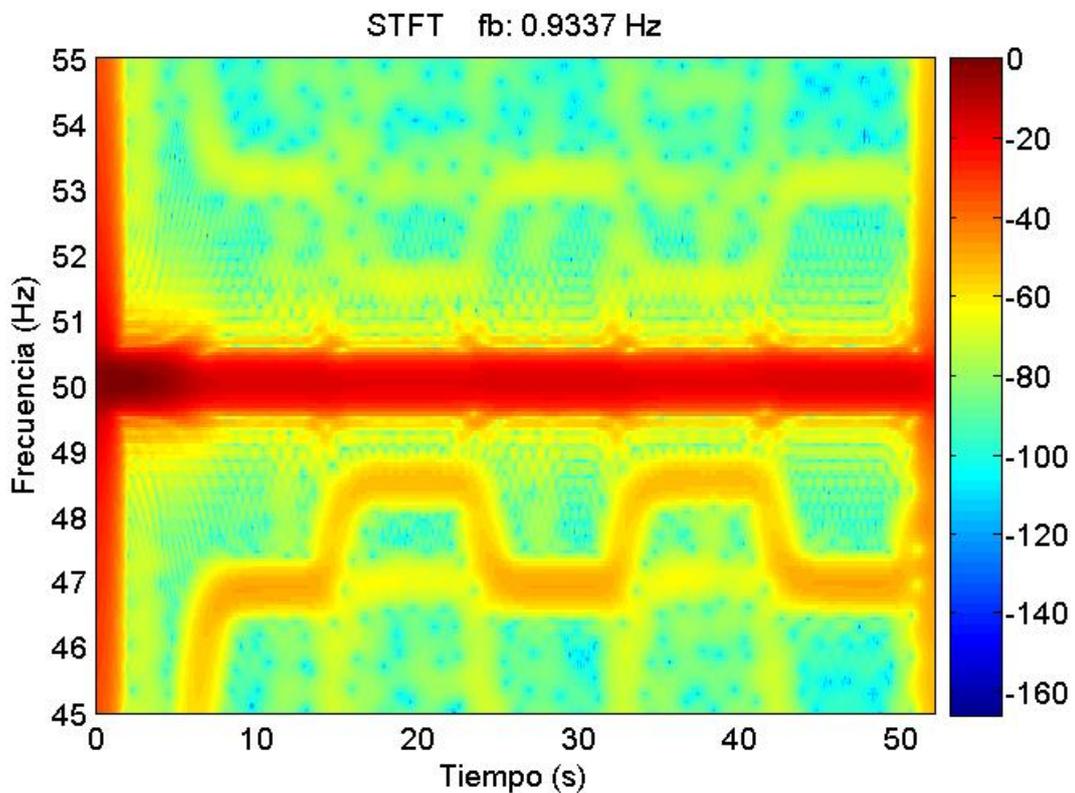


Fig. 4. 23 STFT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, tomando fb=0.9337 Hz.

## Capítulo 4.

En el segundo caso ( $f_b = 0.93 \text{ Hz}$ ) obtenemos adecuadamente las oscilaciones de carga (Fig. 4.23), pero la evolución durante el transitorio de arranque se obtiene de forma muy pobre (Fig. 4.22). Las cajas de Heisenberg utilizadas resultan adecuadas para la evolución del LSH durante las oscilaciones de carga, viendo en detalle en la Fig. 4.23 cómo el FC queda adecuadamente filtrado obteniendo una buena representación de la evolución del LSH durante esta parte del transitorio, tanto en sus pequeños periodos de permanente, como en sus zonas de aumento y disminución de la frecuencia. Esto es debido a que se han utilizado cajas de Heisenberg de base suficientemente grande como para filtrar bien el FC y los pequeños intervalos de permanente, pero no tanto como para no obtener bien las oscilaciones. Sin embargo, la base sí que resulta demasiado grande para el transitorio de arranque, obteniendo su evolución de forma muy imprecisa, con muy poca resolución temporal (Fig. 4.22).

### 4.3.2.- Wavelet Transform.

Tal y como se analizó en el capítulo 3, la WT es una transformada cuyas cajas de Heisenberg varían sus dimensiones con la frecuencia analizada, de tal forma que la base disminuye y la altura aumenta al aumentar la frecuencia analizada. Sin embargo, si consideramos una determinada frecuencia, las dimensiones de la caja se mantienen constantes al analizar distintos instantes de tiempo. Concluyendo, las dimensiones de las cajas varían en el plano, pero tan solo con respecto a la frecuencia analizada y según una ley de variación que tan solo resulta conveniente (es decir, cumpliendo aproximadamente con el criterio de la pendiente), para un tipo de señales como el chirp hiperbólico (ver Fig. 3.9).

De hecho, la evolución que realizan las dimensiones de las cajas al cambiar la frecuencia analizada es la inversa que hace falta para detectar la evolución completa del LSH, en la que necesitamos mayores bases a altas frecuencias, cerca del fundamental y de las oscilaciones de carga, que a bajas, donde se produce el transitorio de arranque. Por lo tanto, aunque la versión discreta de la WT da resultados muy interesantes (2.3.3), su versión continua no es adecuada para analizar este tipo de señal, resultando imposible obtener la evolución del LSH en su totalidad.

Veamos cómo evolucionan exactamente las dimensiones de las cajas al tomar una FBS como wavelet madre, siendo su frecuencia central  $\eta$  y su ancho de banda  $f_b$ :

$$\psi(t) = \sqrt{f_b / \left( m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx \right)} \left[ \text{sinc} \left( f_b \frac{t}{m} \right) \right]^m e^{i2\pi\eta t} \quad (4.26)$$

Procedemos a su traslación a  $t_c$  y a su escalado, utilizando un factor de escala  $\eta/f_c$ :

$$\begin{aligned} \psi_{t_c, f_c}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\eta/f_c}} \psi \left( \frac{t-t_c}{\eta/f_c} \right) \\ \psi_{t_c, f_c}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\eta/f_c}} \sqrt{\frac{1}{m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx}} f_b \left[ \text{sinc} \left( f_b \frac{(t-t_c)/(\eta/f_c)}{m} \right) \right]^m e^{i2\pi\eta \frac{(t-t_c)}{(\eta/f_c)}} \quad (4.27) \end{aligned}$$

Obtenemos finalmente:

$$\psi_{t_c, f_c}(t) = \sqrt{\frac{1}{m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx} \frac{f_b}{(\eta/f_c)}} \left[ \text{sinc} \left( \frac{f_b}{(\eta/f_c)} \frac{(t-t_c)}{m} \right) \right]^m e^{i2\pi f_c(t-t_c)} \quad (4.28)$$

Es decir, al escalar la wavelet madre con un factor de escala  $\eta/f_c$  obtenemos otra FBS de frecuencia central  $f_c$  y de ancho de banda  $f_b/(\eta/f_c)$ .

En otras palabras, cuando se necesite analizar la frecuencia  $f_c$ , se realizará un escalado de la wavelet madre tomando un factor de escala  $\eta/f_c$ , pues de esta forma la frecuencia central de la FBS resultante es precisamente  $f_c$ . Por otra parte, se obtiene como consecuencia del escalado una FBS con un ancho de banda  $f_b/(\eta/f_c)$ , el cual a su vez define la pendiente de la FBS, según la siguiente ecuación:

$$P = \frac{\pi}{2\sqrt{30}} \left[ \frac{f_b}{(\eta/f_c)} \right]^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{30}} \left( \frac{f_b}{\eta} \right)^2 f_c^2 \frac{\text{Hz}}{\text{s}} \quad (4.29)$$

Por tanto, tal y como indica (4.29), una vez fijada la wavelet madre a utilizar (una vez fijados  $\eta$  y  $f_b$ ) la pendiente aumentará o disminuirá siguiendo una ley parabólica, al aumentar o disminuir la frecuencia analizada.

Podemos obtener la relación entre la pendiente  $P$  de la caja que deseamos para analizar la frecuencia  $f_c$ , con el cociente  $f_b/\eta$  entre los parámetros de la wavelet madre a utilizar. Tan sólo tenemos que ordenar adecuadamente la ecuación anterior:

$$\frac{f_b}{\eta} = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{P} \frac{1}{f_c} \quad (4.30)$$

Por tanto, si aún sabiendo que la WT no es la transformada adecuada para obtener la evolución completa del LSH se desean seleccionar los valores de los parámetros de la wavelet madre para analizar el transitorio de arranque de la mejor forma posible, obligamos a que, al analizar la frecuencia 25 Hz (justo a mitad del arranque), la pendiente tome el valor adecuado para dicho transitorio 100/6 Hz/s:

$$\left. \begin{array}{l} f_c = 25 \text{ Hz} \\ P = 100/6 \text{ Hz/s} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f_b}{\eta} = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{\frac{100}{6}} \frac{1}{25} = 0.3049 \quad (4.31)$$

Se puede fijar la frecuencia central arbitrariamente a  $\eta = 1$  Hz con lo cual el ancho de banda toma el valor  $f_b = 0.3049$  Hz. Las figuras 4.24, 4.25 y 4.26 se han obtenido utilizando una wavelet madre con estos valores. Al igual que en el caso de la STFT, primero se analiza la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz de la señal completa (Fig. 4.24), para después restringir en primer lugar el análisis a los 10 primeros segundos

## Capítulo 4.

(Fig. 4.25) y en segundo lugar analizar tan solo la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz de la señal completa (Fig. 4.26).

Se puede observar que, aunque la pendiente para analizar el transitorio de arranque sea la adecuada a 25 Hz, se pierde resolución temporal a bajas frecuencias y se gana a altas, produciéndose fenómeno inverso con la resolución frecuencial. Como consecuencia, la calidad con la que se obtiene la evolución del LSH durante el arranque es variable con la frecuencia analizada. Esto se puede ver con detalle en la Fig. 4.25. Concretamente, el principio y el final se ven solapados con el FC y se distorsiona la obtención de la evolución especialmente en el punto de paso por cero ( $t \approx 3$  s).

Por otra parte, las oscilaciones de carga no se obtienen, pues alrededor de 50 Hz las pendientes serán de:

$$P = \frac{\pi}{2\sqrt{30}} \left( \frac{f_b}{\eta} \right)^2 f_c^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{30}} (0.3049)^2 50^2 = 66.6521 \text{ Hz/s} \quad (4.32)$$

Es decir, 266 veces mayor a la establecida al aplicar el criterio de la pendiente. Al analizar las inmediaciones del FC con cajas de Heisenberg de tan elevada pendiente, incluso en puntos muy alejados de 50 Hz, las FBS allí centradas captan la energía del FC representándolo como si ocupara una banda de frecuencia muy amplia (entre 43 y 60 Hz), ocultando por completo las oscilaciones de carga. Es por ello que al analizar en detalle la banda entre 45 y 55 Hz en la Fig. 4.26 no se aprecia nada.

Para analizar las oscilaciones de carga de la mejor forma posible, se fijan los parámetros de la wavelet madre de tal forma que la pendiente de la wavelet utilizada para analizar la frecuencia de 50 Hz tenga un valor de compromiso adecuado para filtrar debidamente el FC y captar las oscilaciones del LSH:  $P = 0.25$  Hz/s. Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} f_c = 50 \text{ Hz} \\ P = 0.25 \text{ Hz/s} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f_b}{\eta} = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{0.25} \frac{1}{50} = 0.0187 \quad (4.33)$$

Se puede fijar la frecuencia central arbitrariamente a  $\eta = 1$  Hz con lo cual el ancho de banda toma el valor  $f_b = 0.0187$  Hz. Las figuras 4.27, 4.28 y 4.29 se han obtenido utilizando una wavelet madre con estos valores. Al igual que en el caso de la STFT, primero se analiza la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz de la señal completa (Fig. 4.27), para después restringir en primer lugar el análisis a los 10 primeros segundos (Fig. 4.28) y en segundo lugar analizar tan solo la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz de la señal completa (Fig. 4.29).

La pendiente de las cajas es la adecuada al analizar 50 Hz, y además, el cambio de la pendiente en la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, a pesar de seguir una ley parabólica, no resulta perceptible, de tal forma que las oscilaciones de carga se captan con una buena resolución, tal y como se observa en la Fig. 4.29. Sin embargo, a medida que la frecuencia analizada baja, dicho cambio sí se acentúa, siendo significativa la mejora de la resolución frecuencial, pero sobre todo la elevada pérdida de resolución temporal. Concretamente, la pendiente utilizada alrededor de 25 Hz es en este caso:

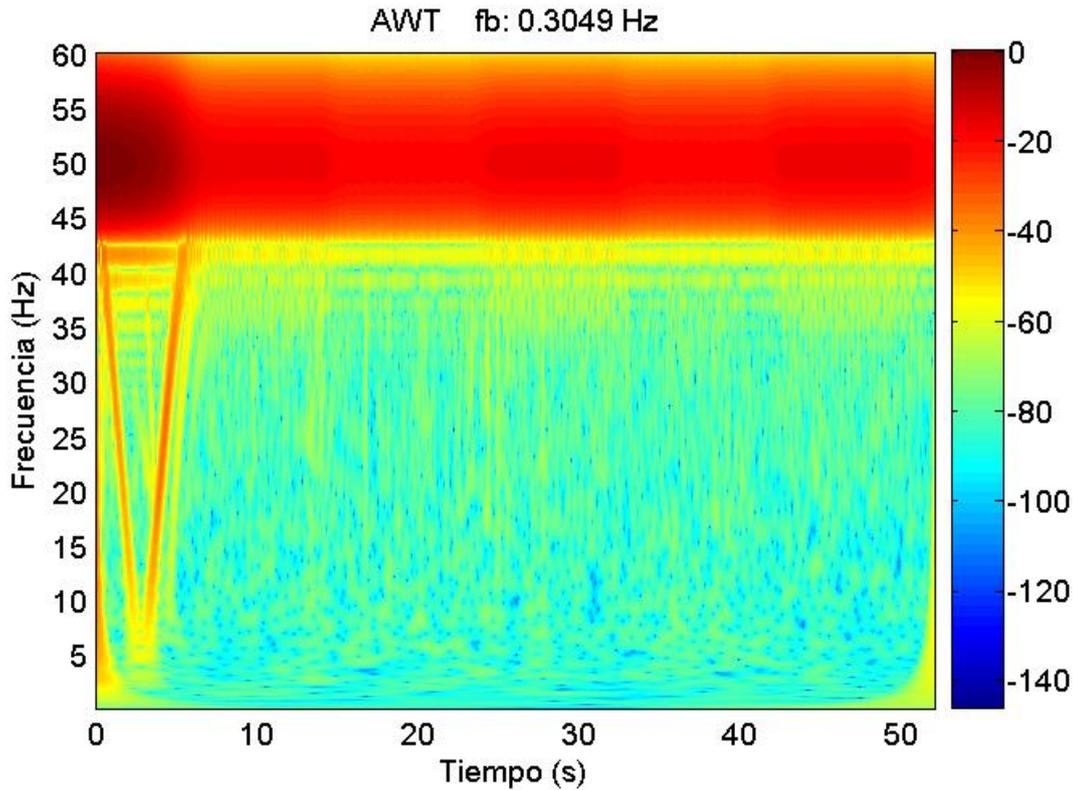


Fig. 4. 24 WT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tomando fb=0.3049 Hz.

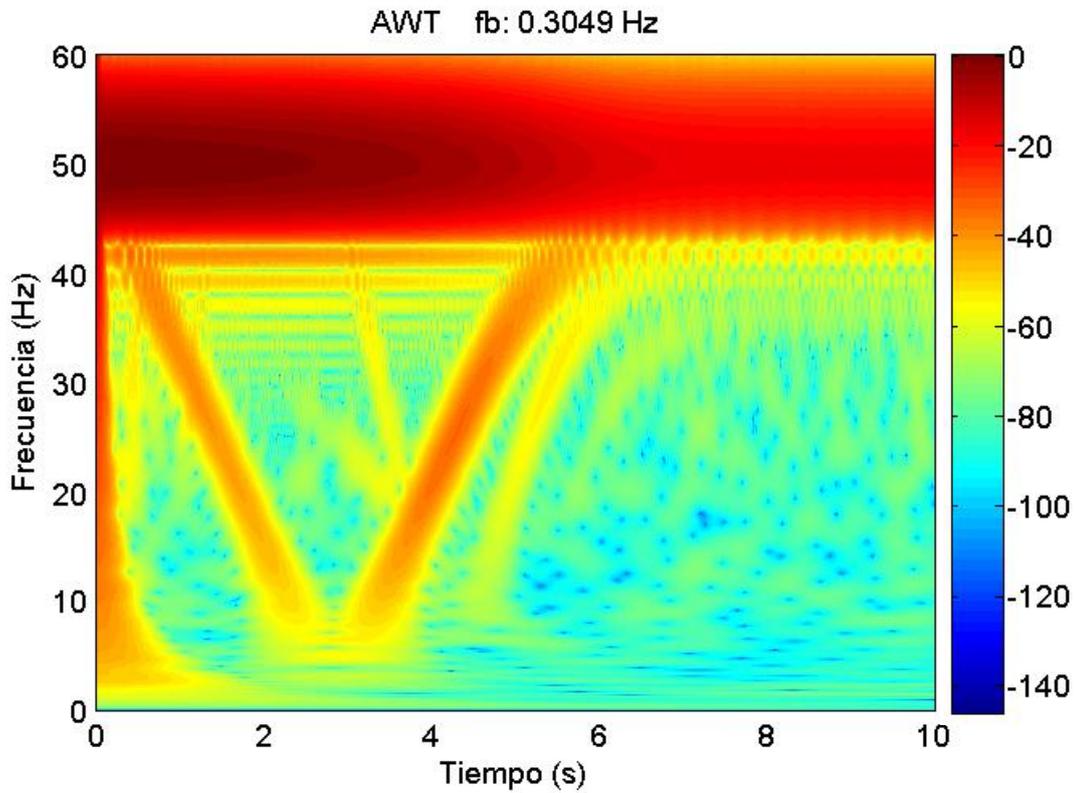


Fig. 4. 25 WT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando los 10 primeros segundos y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tomando fb=0.3049 Hz.

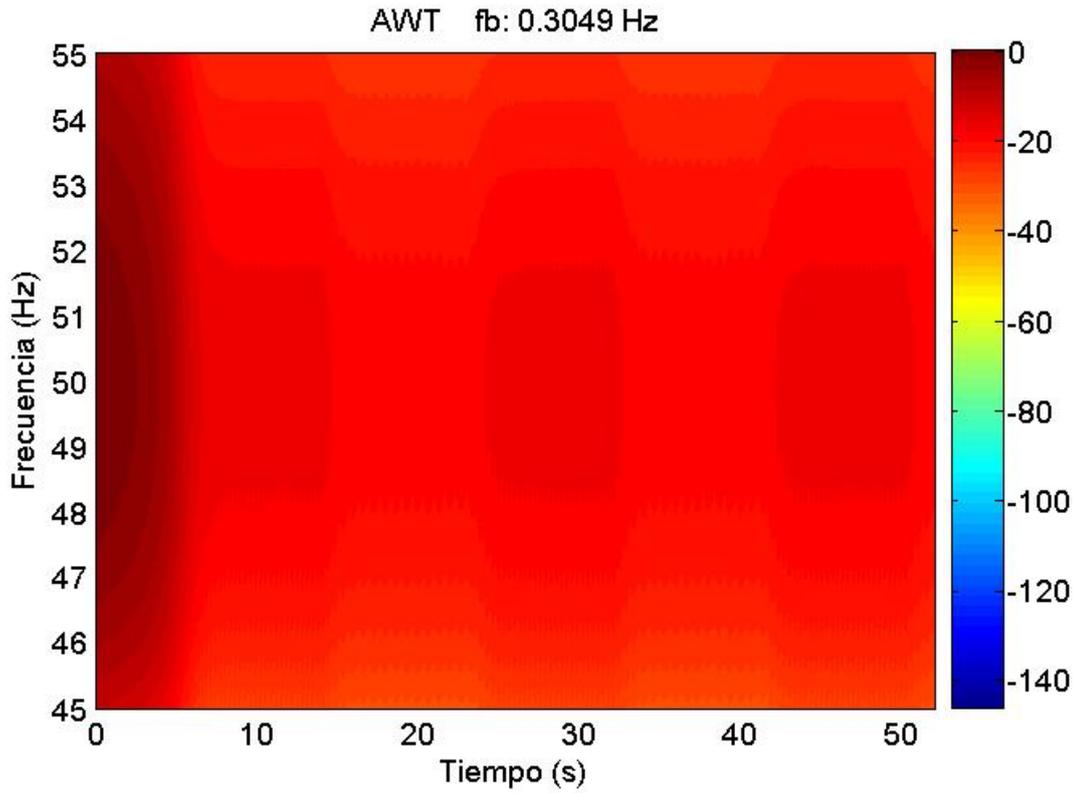


Fig. 4. 26 WT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, tomando  $fb=0.3049$  Hz.

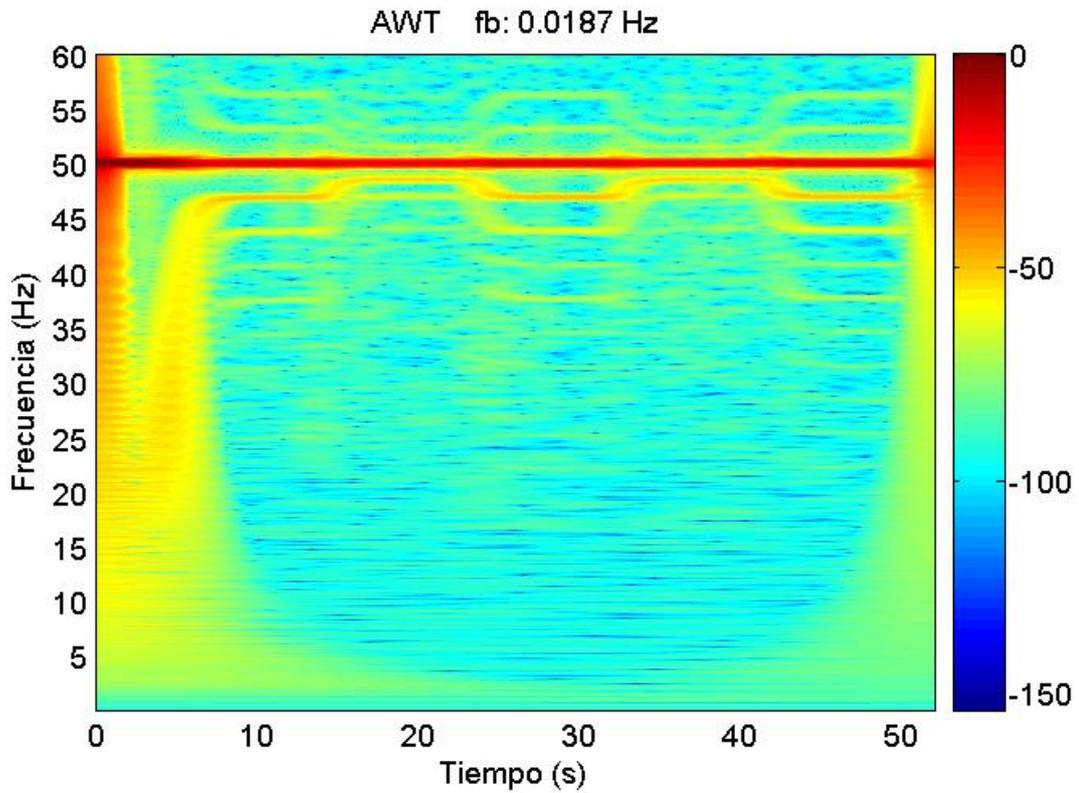


Fig. 4. 27 WT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tomando  $fb=0.0187$  Hz.

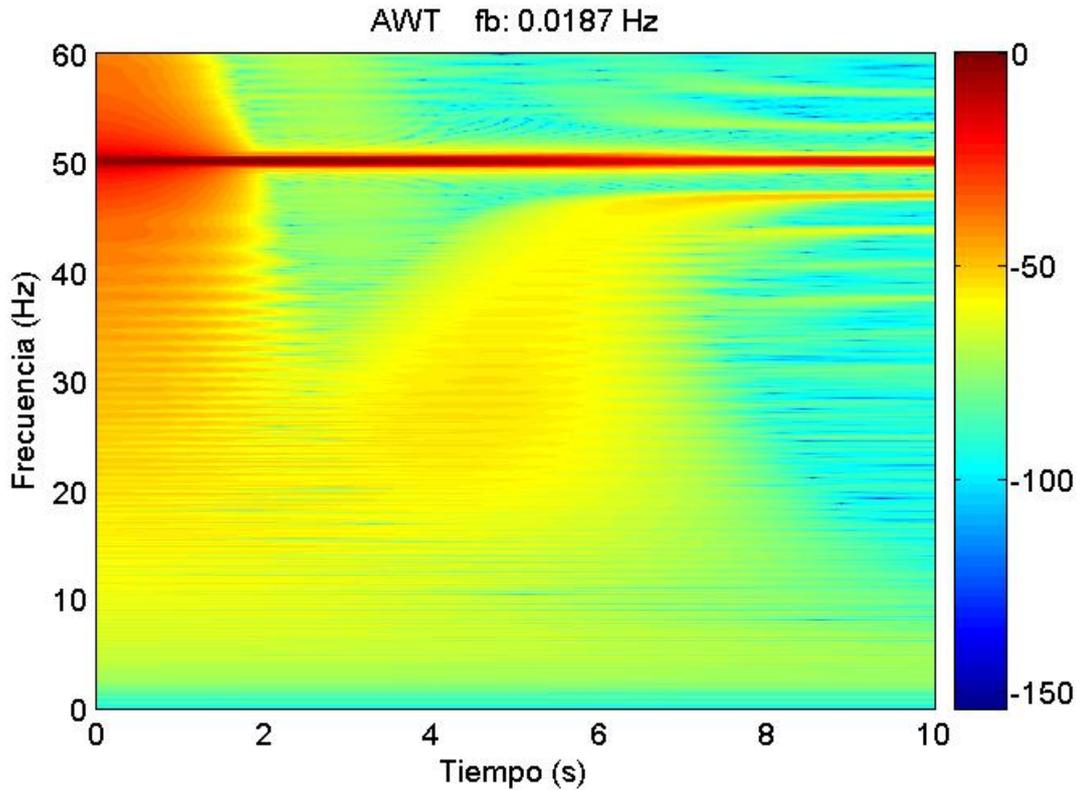


Fig. 4. 28 WT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando los 10 primeros segundos y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tomando  $fb=0.0187$  Hz.

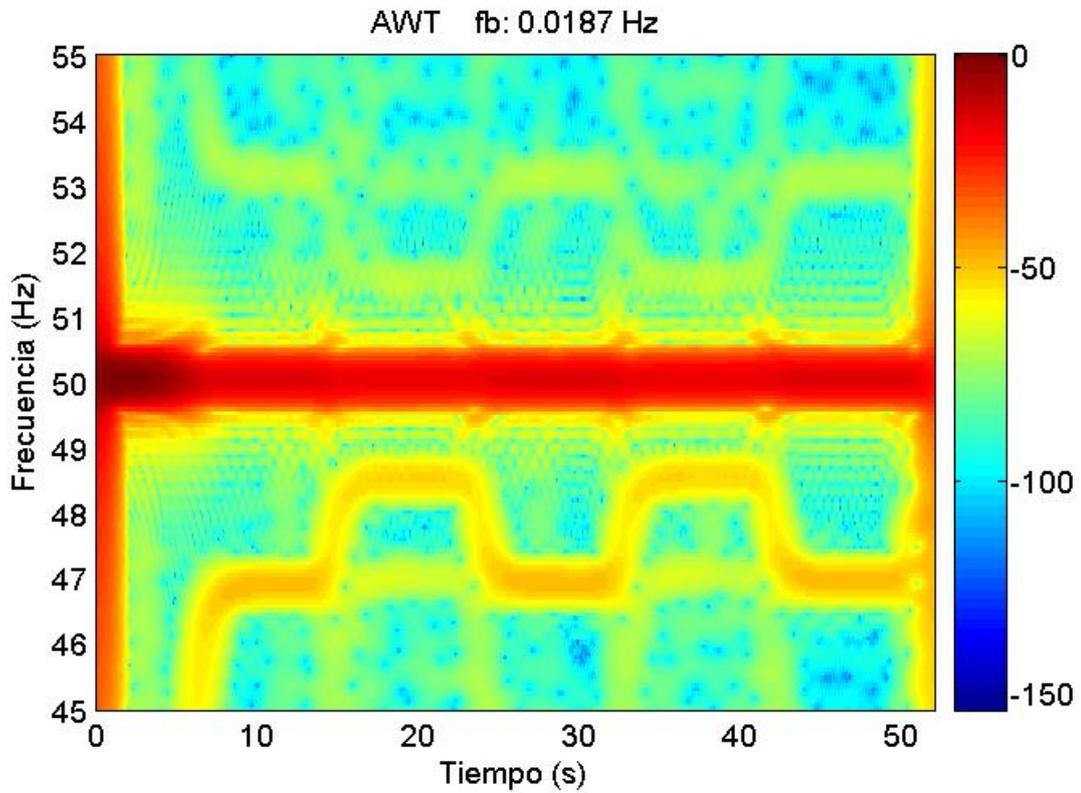


Fig. 4. 29 WT de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, tomando  $fb=0.0187$  Hz.

$$P = \frac{\pi}{2\sqrt{30}} \left( \frac{f_b}{\eta} \right)^2 f_c^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{30}} (0.0187)^2 25^2 = 0.0627 \text{ Hz/s} \quad (4.34)$$

Es decir, 266 veces menor a la establecida al aplicar el criterio de la pendiente, lo cual impide obtener la evolución del LSH durante el arranque, tal y como se observa en detalle en la Fig. 4.28.

### 4.3.3.- Matching Pursuit.

El MP es un método con una filosofía de fondo excelente, que da muy buenos resultados a la hora de caracterizar la distribución de la energía de una señal genérica, pero que no resulta adecuado para conseguir el objetivo que el análisis tiempo-frecuencia tiene en la presente tesis: la obtención de la evolución completa de las componentes vinculadas a fallos para poder realizar un diagnóstico. Por otra parte, tal y como se comenta a continuación, existe el problema del excesivo tiempo de cálculo consumido por esta transformada.

Así pues, el MP parte de una idea clave, la cual se ha visto reflejada en los resultados de la STFT y la WT: para poder analizar una señal compleja, compuesta de numerosas componentes, donde cada una presenta una evolución distinta en el plano (como es el caso de las corrientes estatóricas), se necesita partir de un diccionario compuesto de un conjunto de átomos que, no sólo estén centrados en distintos puntos para estudiar la distribución de la energía a lo largo de todo el plano tiempo-frecuencia; además, para cada punto tenemos que considerar utilizar átomos con cajas de Heisenberg de dimensiones muy distintas. Esta idea es fundamental, y se toma como base en el siguiente apartado para construir una metodología adecuada para analizar las corrientes.

Sin embargo, se recuerda que, el MP selecciona, en cada iteración, el átomo del diccionario que captura una mayor cantidad de la energía de la señal. Tal y como se analizó en apartados anteriores, las corrientes estatóricas tienen muchas componentes. En estado sano tenemos los WH y los PSH. En estado averiado aparecen nuevas componentes propias de la avería. A pesar de que en el ejemplo aquí analizado el LSH tenga una amplitud relativamente alta, las componentes de fallo no son precisamente las de mayor amplitud. Es por ello que, el MP, al aplicar su método automático de selección, escogerá los átomos priorizando que detecten adecuadamente las evoluciones de las componentes de mayor energía, aún en detrimento de las evoluciones que realmente interesan, las vinculadas a averías. En otras palabras, los átomos seleccionados estarán centrados en puntos del plano y con dimensiones de sus cajas tales que la captación de energía al realizar la transformada sea máxima, y esto ocurre al intentar captar las evoluciones de las componentes de mayor amplitud (WH y PSH), pasando posteriormente, cuando las evoluciones de éstas componentes estén perfectamente caracterizadas, a seleccionar átomos que capten las evoluciones de las componentes que permiten el diagnóstico, que son de menor amplitud.

Así pues, el MP no utiliza un criterio adecuado para conseguir el objetivo del diagnóstico. Pero además, incluso si se diera el caso en el que la captación de las evoluciones de las componentes vinculadas a estado sano no se produjera en detrimento de la detección de las componentes vinculadas a averías, y tan sólo fuera necesario

esperar el tiempo suficiente a que el residuo definido en el MP llegara a valores suficientemente bajos para que se hubieran caracterizado hasta las componentes de menor amplitud, los tiempos de cálculo serían prohibitivos, llegando hasta el orden de días.

Resumiendo, en primer lugar, el MP da el paso clave de poder utilizar en distintos puntos del plano átomos con cajas de Heisenberg de dimensiones distintas. Esto le permite analizar señales multicomponentes complejas con evoluciones a detectar de características muy distintas. Sin embargo, el método iterativo de selección (que es en el fondo lo que define el MP), resulta inadecuado para el objetivo de la presente tesis pues presenta dos inconvenientes: prioriza la detección de los armónicos de estado sano por delante de las componentes de avería (criterio contrario al objetivo final que es el diagnóstico), y al tratar de llegar a caracterizar la señal en todas su complejidad, incluyendo los armónicos de menor amplitud, incurre en tiempos de cálculo prohibitivos.

## 4.4.- Definición de la Adaptive Slope Transform.

El presente es el apartado más importante del capítulo, pues a continuación se define la Adaptive Slope Transform: transformada desarrollada y propuesta en esta tesis para analizar las corrientes de los motores diagnosticados. Como se ve a continuación, se trata de una transformada a la cual se la podría llamar “hija” del MP y la AGT:

- tiene en común con estas dos transformadas su principal característica: el uso de cajas de Heisenberg variables a lo largo del plano,
- diverge en el conjunto de funciones de partida: el diccionario está compuesto en este caso íntegramente por FBS de parámetro  $m = 2$ ,
- y utiliza un criterio de selección también distinto: el criterio expuesto en el apartado 4.2, consistente fundamentalmente en el criterio de la pendiente que se aplica aprovechando el conocimiento de la estructura de la señal.

Así pues, para construir la transformada se han tomado las principales conclusiones de los apartados anteriores:

- de 4.1 se concluye la necesidad de utilizar cajas de Heisenberg variables para analizar una corriente con semejante estructura, teniendo en cuenta además que se conoce dicha estructura gracias a la aplicación de los métodos desarrollados en el capítulo 5,
- de 4.2 se toma el criterio expuesto para la construcción de un diccionario y la posterior selección de los átomos que mejor se ajustan a la estructura de la señal a analizar según la pendiente de su caja de Heisenberg y la de la componente a detectar en cada punto, criterio aplicable gracias a la fórmula de la pendiente de las cajas de Heisenberg de las FBS deducida en el capítulo 6,
- y de 4.3 se rescata la necesidad de construir una transformada nueva, pues ninguna de las presentes en el estado del arte cumplen con las características que se desprenden de los apartados anteriores.

El resultado es la definición de una transformada adaptada para obtener la evolución completa y optimizada de las componentes de avería, permitiendo así el diagnóstico.

### 4.4.1.- Definición.

Se define en primer lugar el diccionario (conjunto de átomos tiempo-frecuencia candidatos a ser utilizados para analizar la señal) como el conjunto de las Frequency B-Splines de parámetro  $m = 2$ :

$$\psi_{t_c, f_c}(t) = \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{f_b} \left[ \text{sinc} \left( f_b \frac{(t - t_c)}{2} \right) \right]^2 e^{i2\pi f_c (t - t_c)} \quad (4.35)$$

Se define seguidamente la familia de átomos tiempo-frecuencia a correlacionar con la señal a analizar. En primer lugar, se definen los puntos del plano tiempo-frecuencia que se desean analizar, el conjunto de los cuales forma una matriz sobre el plano, donde cada columna se asocia a un instante de tiempo muestreado al capturar la señal a analizar, y cada fila se asocia a una frecuencia analizada, siendo el número de

frecuencias analizadas suficientemente elevado para obtener una buena resolución y encontrándose uniformemente distribuidas sobre la banda de frecuencia a estudiar. En segundo lugar se toma, por cada punto del plano que se desea analizar  $(t_c, f_c)$ , la FBS del diccionario que se encuentra centrada en dicho punto, es decir  $\psi_{t_c, f_c}$ . En tercer lugar, se fija el valor del ancho de banda  $f_b$  de cada FBS utilizada  $\psi_{t_c, f_c}$  (el único parámetro de la FBS que queda por fijar, después de que el par  $(t_c, f_c)$  tome los valores del punto del plano a analizar). El valor del ancho de banda  $f_b$  de una FBS  $\psi_{t_c, f_c}$  centrada en un punto determinado del plano  $(t_c, f_c)$  depende de la pendiente de la caja de Heisenberg  $P$  que la FBS centrada en dicho punto debe tener:

$$f_b(t_c, f_c) = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{P(t_c, f_c)} \quad (4.36)$$

A su vez, la pendiente toma el valor dictado por el criterio de la pendiente: la pendiente de la caja de Heisenberg en un punto debe ser igual a la pendiente de la evolución en dicho punto de la componente que se quiere detectar.

Una vez fijada la familia de átomos tiempo-frecuencia, la transformada se define como la correlación habitual entre los elementos de la familia y la señal a analizar:

$$\langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi_{t_c, f_c}^*(t) dt \quad (4.37)$$

Finalmente, se representa en el plano, como función de densidad de energía, la siguiente función:

$$\rho_h(t_c, f_c) = \left| \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle \right|^2 \quad (4.38)$$

#### 4.4.2.- Características comparando con el MP y la AGT.

##### Características fundamentales

La transformada aquí definida es una variación del MP y la AGT, adecuada a las necesidades del diagnóstico (detectar las evoluciones de las componentes de fallo) y definida aprovechando las condiciones en las que se realiza el análisis de corrientes (se conocen cuáles deberían ser dichas evoluciones en caso de fallo). Estas dos características determinan la forma de seleccionar la familia de átomos tiempo-frecuencia a utilizar, particularidad fundamental, distinta para cada una de las transformadas basadas en la correlación.

La Adaptive Slope Transform recupera, del método MP y de la transformada AGT, la idea fundamental a la hora de analizar corrientes complejas con evoluciones de sus componentes muy distintas (como es el caso de las corrientes estáticas de motores de inducción): la necesidad de utilizar cajas de Heisenberg de dimensiones variables a lo largo del plano. Esto se consigue construyendo el diccionario adecuadamente.

## **Construcción del diccionario**

La primera diferencia con el MP y la AGT es la definición del diccionario. El MP parte de un diccionario definido de forma abstracta y muy general como un simple conjunto de funciones. Ahora bien, como es sabido, para que el MP dé buenos resultados, dicho diccionario tiene que estar compuesto por un conjunto suficientemente elevado de átomos que cubran todo el plano tiempo-frecuencia y que además, para cada punto, se disponga de varios átomos con dimensiones de las cajas de Heisenberg distintas para poder elegir, durante el proceso iterativo, el más adecuado para analizar la señal.

La forma en la que aquí se ha restringido el diccionario es análoga a la utilizada para definir la AGT, con la diferencia que en la AGT se utilizan funciones de Gabor y aquí se utilizan FBS de parámetro  $m = 2$ . El sentido de restringir el diccionario es el de tener un menor número de funciones de entre las que elegir, disminuyendo el tiempo de cálculo, e intentando a la vez no renunciar a la calidad de los resultados. Parecería lógico utilizar las funciones de Gabor pues tienen (tal y como se ha comentado en 4.2.2, mostrándose el análisis en AM 3.4), cajas de Heisenberg con el menor área posible, propiedad importante en el intento de acercarnos a la función de densidad de energía ideal que permita detectar las evoluciones con la mejor resolución tanto en tiempo y en frecuencia, permitiendo detectar varias evoluciones cercanas sin que interfieran entre ellas emborronando el resultado.

La elección de las FBS de parámetro  $m = 2$  en vez de las funciones de Gabor ha sido también justificada anteriormente en el apartado 4.2.2 (rescatando resumidas las conclusiones del apartado 6.5), argumentando que la dimensión de su área de la caja de Heisenberg no llega al límite, pero se queda muy cerca de él, y resaltando la ventaja que las FBS de parámetro  $m = 2$  presentan: dando resultados de calidad muy parecida a los obtenidos con las funciones de Gabor, el tiempo de cálculo es inferior. Finalmente, en el apartado 4.2.3 se justifica el tomar  $m = 2$  como valor de compromiso entre las propiedades temporales y frecuenciales de las FBS.

## **Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia**

El objetivo del presente apartado es destacar las diferencias entre el proceso de selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia propuesto y el utilizado por el MP y la AGT. El objetivo no es terminar de perfilar detalladamente este proceso de selección, que ya se avanzó al definir la transformada, pues para ello es necesario comentar ampliamente aspectos diversos que se tratan en el siguiente punto (en particular, la aparición de puntos críticos y el uso de la convolución para calcular la transformada). Una vez realizados los análisis pertinentes en el siguiente apartado, en 4.4.4 se analiza una primera señal de ejemplo comentando detalladamente los entresijos del proceso de selección. Finalmente, en el último apartado del presente capítulo (en el cual se muestra la guía de aplicación de la metodología de diagnóstico), se plantea de forma general el método de selección, el cual se concretará de diversas formas, ilustrando su aplicación en los distintos capítulos dedicados a resultados experimentales (capítulos 7, 8 y 9).

Enlazando con el subapartado anterior, se ha definido un diccionario formado por un conjunto de funciones que aseguran el poder utilizar formas de cajas de

Heisenberg distintas en los distintos puntos del plano analizados. La siguiente pregunta es: ¿qué método utilizamos para seleccionar la familia de átomos tiempo-frecuencia utilizados finalmente? Y aquí la AST se vuelve a separar del MP y la AGT. Estas dos transformadas tienen métodos iterativos muy potentes de selección de átomos, enunciados para poder ser aplicados a una señal genérica, de la cual no resulta necesario tener ningún conocimiento a priori. Sin embargo, tal y como ya se ha comentado en el apartado anterior, incurren en tiempos de cálculo prohibitivos, no utilizando además un criterio afín al objetivo final: el diagnóstico.

A la hora de definir el método de selección de átomos característico de la AST se tienen en cuenta dos aspectos:

- El objetivo fundamental al aplicar la transformada debe ser detectar, en caso de existir, las evoluciones de las componentes vinculadas a fallos.
- Tal y como se indica en el apartado 4.1, somos capaces de estimar la evolución que estas componentes deben trazar en caso de estar presentes en la máquina, gracias a los estudios efectuados a partir de las teorías clásicas de diagnóstico y gracias a los métodos que permiten obtener la evolución del deslizamiento y de la frecuencia fundamental (presentados en el capítulo 5).

Así pues, no se trata de caracterizar lo mejor posible la señal en su conjunto, sino de detectar precisamente componentes de amplitud relativamente baja, como son las vinculadas a fallos. Y además, no se analiza una señal completamente desconocida, de la cual no sabemos ni cuáles pueden ser sus componentes ni su posible evolución. Todo lo contrario: conocemos las componentes que se pueden encontrar y cuál debe ser su evolución en caso de estar presentes. Es por ello que, partiendo de esta información, en vez de utilizar un método iterativo como el del MP o la AGT, se procede de otra forma.

En primer lugar, en la definición de la transformada se considera una matriz de puntos. Además, por cada punto  $(t_c, f_c)$  se considera una FBS  $\psi_{t_c, f_c}$ , la cual se encuentra precisamente centrada en  $(t_c, f_c)$  (tal y como se explica en el párrafo final de 4.2.3). El lector puede observar que la aplicación del método iterativo del MP o la AGT no tiene porqué dar como resultado el uso de un conjunto de átomos distribuidos por el plano según los elementos de una matriz.

Seguidamente, se utiliza el criterio de la pendiente definido en (4.2.4) para, en cada punto que describen las posibles evoluciones de las componentes de fallo, fijar las dimensiones de las cajas de Heisenberg ajustadas adecuadamente con el objetivo de detectar la evolución de estas componentes de avería y por tanto su presencia. Avanzándonos a apartados posteriores, existirán puntos en los cuales se crucen dos componentes de avería con pendientes distintas, debiendo el usuario escoger un valor de compromiso entre ambas o tomar la pendiente de la componente prioritaria. Por otra parte, habrá puntos por los cuales no haya componentes de avería, pero sí componentes sanas de elevada amplitud como la componente fundamental, debiendo escoger una pendiente que la filtre adecuadamente, evitando que enmascare las evoluciones de las componentes de avería próximas. En los puntos donde no se encuentra ninguna componente, se deberán adoptar pendientes de valores intermedios entre otros puntos alrededor. A pesar del avance realizado, la aplicación del criterio de la pendiente se terminará de comprender tras la lectura del resto del presente apartado, del apartado 4.7

## Capítulo 4.

y de analizar las distintas formas en las que se ha aplicado para estudiar las corrientes capturadas en los capítulos relativos a resultados experimentales (7, 8 y 9).

Conociendo las pendientes a utilizar en cada uno de los puntos de la matriz se consigue definir utilizando (4.36), para cada FBS utilizada por cada punto analizado, el parámetro que faltaba: el ancho de banda  $f_b$ . Este paso final, que es por otra parte el paso central del método de selección, es posible gracias a la fórmula obtenida en la presente tesis (capítulo 6) que relaciona la pendiente de la caja de Heisenberg de una FBS con su ancho de banda.

No hay por tanto proceso iterativo de selección de los átomos que componen la familia final a utilizar, disminuyendo radicalmente el tiempo de cálculo, utilizando además un criterio de selección totalmente orientado al objetivo final: el diagnóstico.

### **4.4.3.- Limitaciones y soluciones de compromiso.**

#### **Necesidad de conocer la estructura de la señal.**

En primer lugar, el método de selección basado en el criterio de la pendiente tan solo se puede aplicar para analizar señales cuya hipotética estructura se conoce de antemano. Es decir, que debemos conocer cuáles son las componentes con las que nos podemos encontrar, cuáles son las que preferimos detectar y cuál es la trayectoria de todas ellas. En nuestro caso, son conocidas las componentes que pueden estar presentes en la corriente gracias al estado del arte (inicio del capítulo 2) y conocemos también su evolución gracias a la detección de la evolución del deslizamiento y la frecuencia fundamental (capítulo 5). En el apartado 4.1 se muestra cómo se integran estos dos conocimientos.

#### **Puntos críticos al aplicar el criterio de la pendiente.**

En segundo lugar, el criterio de la pendiente no presenta una solución directa cuando tratamos de aplicarlo a un punto en el que se cruzan las evoluciones de dos componentes de fallo, como es el caso del punto de intersección de las componentes de barra rota  $B1+$  y  $b5+$ , tal y como se observa en la Fig. 4.30 (punto A1). Evidentemente en dicho punto existen dos pendientes asociadas a las evoluciones de las dos componentes y la caja de Heisenberg no se puede ajustar simultáneamente a las dos. En el caso de encontrarnos con este fenómeno, se puede ajustar la caja a la pendiente de la componente de mayor amplitud y que por tanto resulta más interesante detectar, o dar a la pendiente de la caja un valor de compromiso entre los dos requeridos por las dos componentes de fallo.

Otro ejemplo mostrado en la Fig. 4.30 es el punto de intersección entre  $B2-$  y  $b5+$  (punto A2). Puede darse el caso en el que las dos componentes que se intersectan tengan en el punto de intersección la misma pendiente pero de signo contrario, requiriendo por tanto la misma caja de Heisenberg, como es el caso del punto de intersección entre  $B2+$  y  $b5+$  (punto A3). En el ejemplo que hasta aquí se ha tratado no aparecía de forma evidente este problema, aunque en el fondo sí existía pues, tal y como veremos en futuros capítulos, en la zona por debajo de la frecuencia de la FC se encuentran las evoluciones de distintas componentes de rotura de barra, a parte del LSH, como es el caso del  $B2-$ .

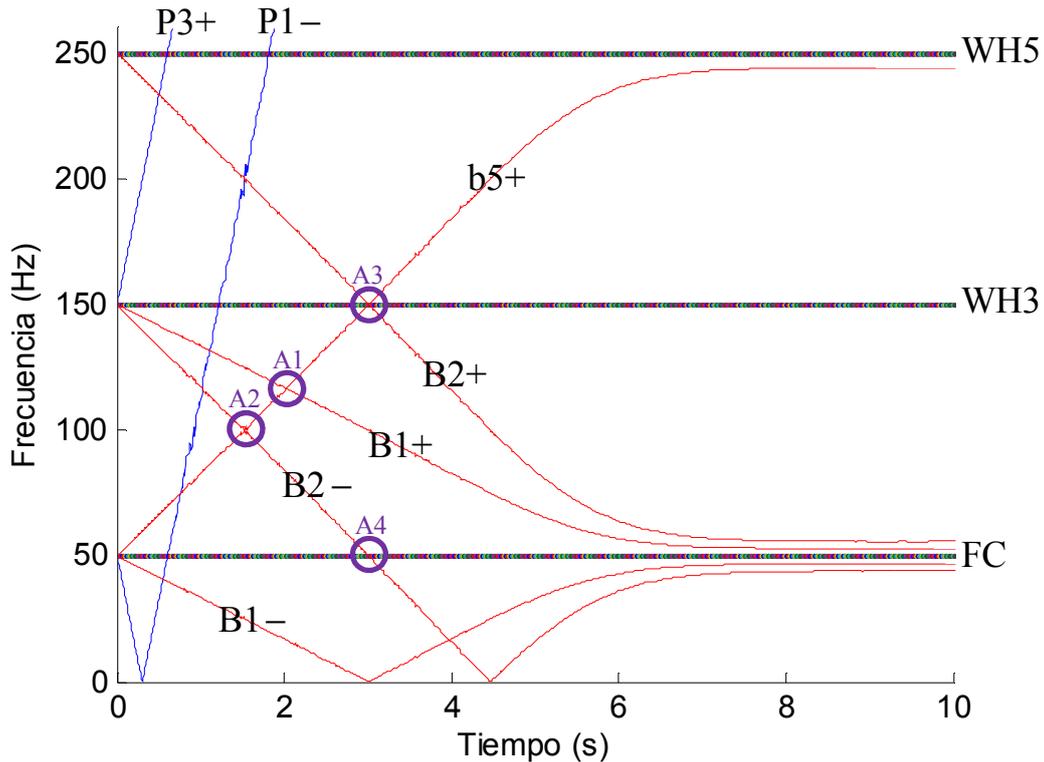


Fig. 4. 30 Estimación de las evoluciones temporales de las componentes de mayor amplitud.

Por otra parte, cuando una componente de fallo se cruza con otra componente de estado sano y elevada amplitud como la FC, en vez de aplicar el criterio de la pendiente en el punto de cruce y sus alrededores, el cual puede implicar (como es el caso del punto A4, de intersección entre B2- y FC), el analizar dichos puntos con una caja de Heisenberg de elevada altura (la que requiere B2-) de tal forma que la FC quede muy mal filtrada en frecuencia, primará filtrar adecuadamente la FC, con una caja de muy poca altura, para que esta no oculte partes de las evoluciones de las componentes de fallo que se encuentren cerca.

### Convolución vs variación de la pendiente con el tiempo.

En tercer lugar, tal y como ha sido enunciado el método de selección, es posible utilizar una pendiente diferente en cada punto del plano analizado, sin ningún tipo de restricción. Sin embargo, si a una misma frecuencia la pendiente de las cajas no varía con el instante de tiempo considerado, se tiene la posibilidad de, utilizando la convolución, calcular la correlación de la señal con todos los átomos centrados en una misma frecuencia pero en distintos instantes. Se trata de un método de cálculo útil y rápido utilizado por Mallat para calcular la WT [94]. Efectivamente, cuando las características del átomo utilizado no cambian con el tiempo para una frecuencia dada, el conjunto de correlaciones con átomos centrados en una frecuencia y en distintos instantes equivale a una convolución entre la señal y el átomo a dicha frecuencia. Veámoslo analíticamente.

Al escribir (4.35) se ha utilizado la notación  $\psi_{t_c, f_c}(t)$ , cuando en realidad el átomo tiempo-frecuencia que se define no depende tan solo de  $t$ ,  $t_c$  y  $f_c$ , sino también

## Capítulo 4.

de  $f_b$ . La notación utilizada  $\psi_{t_c, f_c}(t)$  sirve para limar diferencias entre los distintos tipos de átomos tiempo-frecuencia utilizados (no solo las FBS), pues todos dependen del tiempo y se encuentran centrados en un determinado punto del plano  $(t_c, f_c)$ . Para facilitar la comprensión del análisis que sigue se utilizará la notación  $\psi_{t_c, f_c, f_b}(t)$ . Teniendo en cuenta (4.35) y la nueva notación se puede escribir:

$$\psi_{t_c, f_c, f_b}(t) = \psi_{0, f_c, f_b}(t - t_c) = \psi_{0, f_c, f_b}(-(t_c - t)) \quad (4.39)$$

Por tanto se puede describir (4.37) como:

$$\langle h, \psi_{t_c, f_c, f_b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi_{0, f_c, f_b}^*(-(t_c - t)) dt = [h(t) * \psi_{0, f_c, f_b}^*(-t)](t_c) \quad (4.40)$$

Es decir, la correlación entre  $h(t)$  y  $\psi_{t_c, f_c, f_b}(t)$  equivale al producto de convolución \* entre  $h(t)$  y  $\psi_{0, f_c, f_b}^*(-t)$  calculado para el instante  $t_c$ . Por tanto, si una vez fijadas las dimensiones de la caja de Heisenberg del átomo utilizado a una determinada frecuencia, estas no cambian con el tiempo, es decir, si una vez fijado el ancho de banda  $f_b$  a una determinada frecuencia  $f_c$ , este no cambia con  $t_c$ , entonces la correlación de  $h(t)$  con  $\psi_{t_c, f_c, f_b}(t)$  a una determinada frecuencia  $f_c$  pero en todos los instantes de tiempo muestreados se puede calcular como una única operación calculando la convolución de  $h(t)$  y  $\psi_{0, f_c, f_b}^*(-t)$  en todos los instantes de tiempo.

Evidentemente, esta técnica facilita muchísimo los cálculos, pero no se puede utilizar si una vez fijado  $f_c, f_b$  cambia con  $t_c$ , lo cual sucede al considerar cajas de Heisenberg de dimensiones completamente variables en el plano. El usuario debe decidir si prefiere tener total libertad para cambiar las dimensiones de las cajas, incluso en los distintos instantes de tiempo a una misma frecuencia, o si prefiere perder este grado de libertad y poder realizar el cálculo con tantas convoluciones como frecuencias analizadas. En los análisis presentados en la tesis, se observa cómo resulta suficiente cambiar las dimensiones de las cajas sólo con la frecuencia y aprovechar la potencia y facilidad de cálculo que se obtiene al utilizar la convolución.

### **Función de densidad de energía.**

En cuarto y último lugar, cabe destacar que la función definida en (4.38) no se ha demostrado que, en sentido global, sea una función de densidad. Es decir, está claro que localmente sí que es una función de densidad: el valor dado por (4.38) es una medida de la densidad de energía alrededor del punto del plano considerado (concretamente en un vecindario descrito aproximadamente por la caja de Heisenberg del átomo utilizado para calcular la correlación en dicho punto). Pero, al igual que con el resto de transformadas se ha demostrado que, integrando el resultado en el plano (como es el caso de la STFT (3.32) y la WT (3.49)) o simplemente sumando los resultados (como es el caso del MP (3.68)), se recuperaba la energía total de la señal, en esta transformada no se ha deducido un resultado de este tipo, aunque esto no significa que no exista. Aun así, la representación de la función (4.38) resulta útil, pues como se

ha observado el resultado en cada punto se puede interpretar como una función de densidad a nivel local, existiendo además una relación de proporcionalidad entre los resultados en distintos puntos con respecto a los contenidos energéticos de la señal alrededor de cada uno de dichos puntos, pues el análisis en cada punto ha sido obtenido multiplicando la señal a analizar por un átomo de energía unitaria, con lo cual el resultado depende tan solo del contenido energético de la señal alrededor del punto, pudiendo compararse los resultados de dos puntos entre sí.

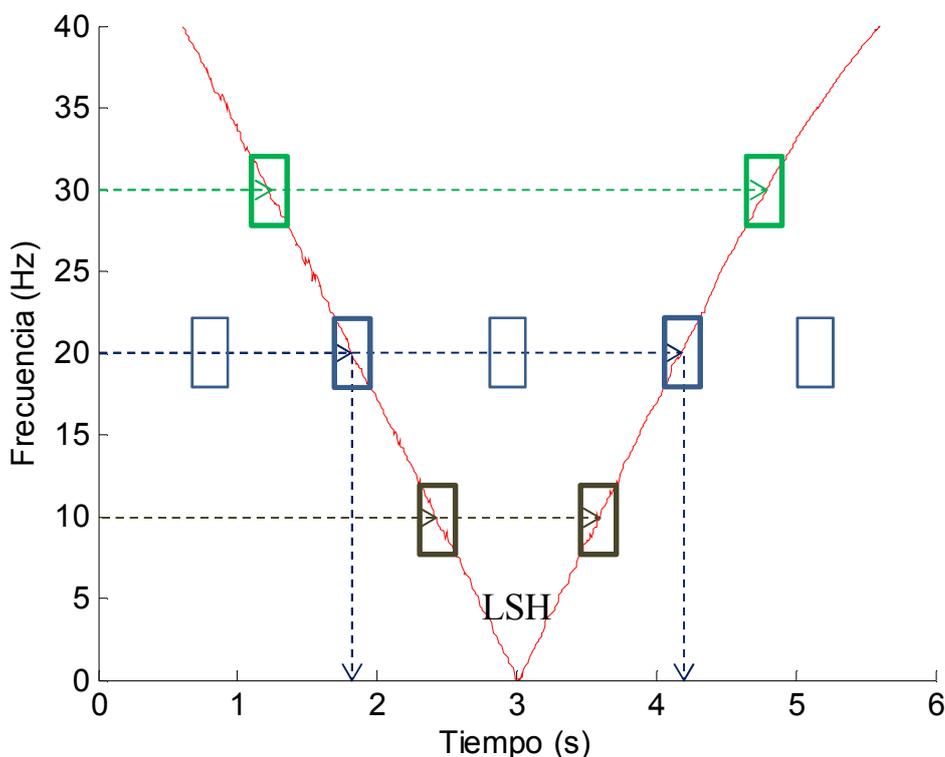
#### 4.4.4.- Cajas de Heisenberg utilizadas al analizar la señal de ejemplo.

Se observará a lo largo de la tesis que, en determinados casos, una caja con una determinada pendiente resulta adecuada para analizar todos los instantes de tiempo de una frecuencia. Veamos el caso de la corriente analizada en el presente apartado como ejemplo.

Para frecuencias inferiores a 40 Hz, la componente más interesante es el LSH (tal y como se ve en la Fig. 4.30, en esta zona se encuentra también parte de la evolución del B2-, pero se prioriza detectar el LSH, pues el B2- tiene una amplitud mucho menor). La Fig. 4.31 muestra, dibujada de color rojo, la estimación de la evolución del LSH durante los 6 primeros segundos del transitorio analizado como ejemplo y en la banda de frecuencia entre 0 y 40 Hz. Se puede observar cómo la evolución pasa por cada frecuencia inferior a 40 Hz en dos instantes de tiempo. Por ejemplo, el LSH tiene una frecuencia de 20 Hz un poco antes de los 2 segundos tras el inicio del arranque y un poco después de los 4 segundos, tal y como indican las flechas trazadas de color azul. En ambos puntos la evolución tiene aproximadamente la misma pendiente en términos absolutos, aunque en el primer instante la pendiente sea negativa (pues la evolución es de 50 Hz a 0 Hz) y en el segundo la pendiente sea positiva (pues la evolución es de 0 Hz hacia valores propios del régimen permanente). Por tanto, podemos analizar los dos puntos (y sus alrededores) con cajas de Heisenberg de misma pendiente (dibujadas ambas de color azul con trazo grueso). El resto de instantes a la misma frecuencia son irrelevantes, pues tan solo encontramos en ellos componentes poco interesantes de baja amplitud o simplemente ruido, y se pueden analizar con cajas de Heisenberg de idéntica forma (dibujadas de color azul con trazo fino). Por tanto, podemos calcular la correlación de la señal con los átomos centrados en distintos instantes pero en una misma frecuencia utilizando la convolución, pues según el criterio de captura del LSH expuesto las propiedades del átomo no deben cambiar con el instante analizado si la frecuencia en la cual está centrado no cambia. Además, en este caso particular, la pendiente del LSH prácticamente no cambia tampoco con la frecuencia analizada por debajo de 40 Hz, así que tampoco cambiarán las dimensiones de la caja con la frecuencia analizada en esta zona. Así pues, al analizar por ejemplo las frecuencias 30 y 10 Hz, se utilizarán cajas de Heisenberg de la misma forma que al analizar los 20 Hz (dibujadas de color verde y marrón respectivamente y ambas con trazo grueso). En el apartado 3.4.1 se calculó el valor del ancho de banda necesario según el criterio de la pendiente obteniendo como resultado  $f_b = 7.6233 \text{ Hz}$ .

La Fig. 4.32 muestra, dibujada de color rojo, la estimación de la evolución del LSH durante el transitorio analizado como ejemplo, mostrando la banda de frecuencia entre 40 y 52 Hz. Entre 40 y 50 Hz, que es la banda de frecuencia considerada en la figura que contiene parte de la evolución del LSH, la componente más importante con diferencia sigue siendo el propio LSH. Por tanto, las cajas de Heisenberg deben tener

una forma tal que se adapten a su evolución, filtrando al mismo tiempo el FC para que quede confinado lo mejor posible alrededor de 50 Hz.



**Fig. 4. 31** Estimación de la evolución del LSH durante los primeros 6 segundos del transitorio y en la banda de frecuencia entre 0 y 40 Hz. Cajas de Heisenberg de pendientes adecuadas al analizar los 30, 20 y 10 Hz (verde, azul y marrón respectivamente).

Cuando nos acercamos a 45 Hz, las dimensiones de las cajas de Heisenberg cambian con respecto a las utilizadas en la banda de frecuencia analizada en la Fig. 4.31, en donde eran constantes. Incluso en la parte final de la evolución del LSH mostrada en la Fig. 4.31, entre 30 y 40 Hz, vemos cómo la pendiente de dicha evolución va disminuyendo ligeramente, debiendo estrictamente disminuir también la pendiente de las cajas. Al superar aproximadamente los 47 Hz, en cada frecuencia analizada encontramos varios instantes interesantes asociados a la evolución del LSH, tanto si se trata de las oscilaciones de carga, como si se trata de los pequeños regímenes permanentes (a parte de un pequeño tramo del principio del arranque). Como la carga oscila entre dos valores, las dos frecuencias entre las que oscila el LSH son siempre las mismas. Además, la pendiente con la que el LSH evoluciona entre ambos valores es en todos los casos más o menos la misma. Por tanto, exceptuando la pequeña parte de arranque en los primeros instantes, en cada frecuencia analizada, aunque tengamos varios instantes en los que el LSH está presente, la pendiente necesaria en todos ellos es siempre la misma existiendo básicamente dos posibilidades, tal y como vimos al analizar este ejemplo en la presentación del criterio de la pendiente:

- que la frecuencia esté asociada a una oscilación de carga, en cuyo caso la pendiente se debe ajustar a dicha oscilación: caso de analizar por ejemplo la frecuencia resaltada con una línea horizontal punteada de color verde, debiéndose utilizar cajas de Heisenberg como las dibujadas de color verde,

- o que esté asociada a uno de los pequeños regímenes permanentes, en cuyo caso la pendiente debe fijarse para intentar filtrarlo lo máximo posible: caso de analizar una de las dos frecuencias resaltadas con una línea horizontal punteada de color azul (ya sea la superior o la inferior), debiéndose utilizar cajas de Heisenberg como las dibujadas de color azul.

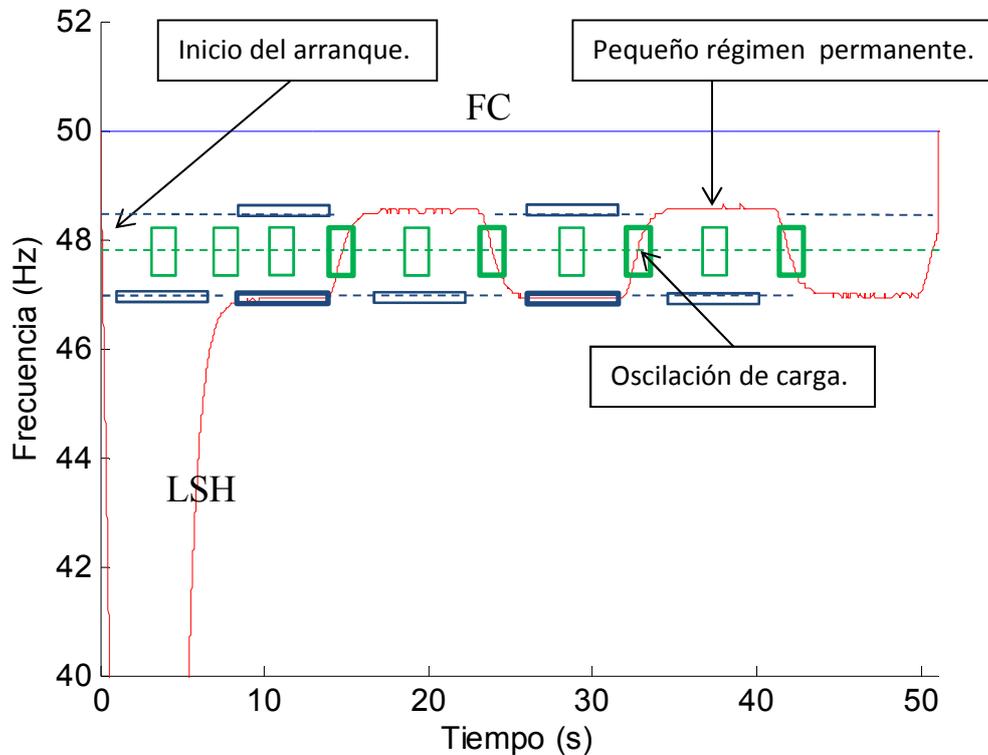


Fig. 4. 32 Estimación de la evolución del LSH mostrando la banda de frecuencia entre 40 y 52 Hz. Cajas de Heisenberg de pendientes adecuadas asociadas a las frecuencias relativas a los pequeños regímenes permanentes (azul) y a las oscilaciones de carga (verde).

Los puntos (y sus alrededores) realmente importantes son aquellos en los que las cajas se han dibujado con trazo grueso, que es donde se encuentra el LSH. El resto de puntos de una misma frecuencia, cuyas cajas se han dibujado en trazo fino, se calculan con cajas de idéntica pendiente, aunque el resultado de su análisis no resulte crítico.

Así pues, en esta zona también podemos utilizar la misma pendiente en los distintos instantes de una misma frecuencia. De hecho, tal y como se comentaba, ni siquiera cambiamos las dimensiones de la caja con respecto a la frecuencia, aplicando una misma caja para la zona comprendida entre 45 y 55 Hz, con un valor de compromiso entre lo necesario para las oscilaciones de carga, los pequeños tramos de régimen permanente y la filtración de la FC. El valor de compromiso asignado al ancho de banda es  $f_b = 0.9337$  Hz .

Además se debe comentar que en la banda de frecuencia entre 40 y 45 Hz se utilizan cajas de Heisenberg cuya pendiente evoluciona linealmente con la frecuencia desde el valor tomado a 40 Hz hasta el fijado a 45 Hz. Esta medida se adopta intentando suavizar en la medida de lo posible la transición entre los dos valores. Por otra parte, entre 50 y 55 Hz resulta adecuado utilizar las mismas cajas que entre 45 y 50 Hz pues en esta zona la señal tiene una estructura muy parecida, estando el FC presente y con la

## Capítulo 4.

única diferencia de que en vez de tener las oscilaciones del LSH tenemos las oscilaciones del USH.

Por último tan solo cabe destacar que nada impide calcular, para cada uno de los puntos en los que se encuentra la evolución del LSH estimada, la correlación de la señal con el átomo tiempo-frecuencia centrado en el punto correspondiente y con una caja de Heisenberg de pendiente igual a la de la evolución en el punto. Esto, por una parte, implica un mayor tiempo de computación. Por otra parte, cabría definir las relaciones entre las pendientes de los átomos en los puntos críticos (evolución estimada del LSH) y el resto de puntos de tal forma que la transición sea suave y no se produzcan saltos bruscos. Sin embargo, teniendo en cuenta que, tal y como se observa a continuación, fijando una pendiente para cada frecuencia los resultados son ya muy buenos, y además resulta más simple el cálculo utilizando la convolución, este último paso de utilizar pendientes distintas en distintos instantes de una misma frecuencia se aplica en corrientes más complejas como las analizadas en el capítulo 9.

### 4.4.5.- Resultados.

#### Generación.

La Fig. 4.33 es el resultado de aplicar la AST a la señal de la Fig. 4.13 analizada como ejemplo a lo largo del capítulo. La matriz de puntos del plano considerada se construye del cruce de 200 frecuencias uniformemente distribuidas en la banda de frecuencia analizada (entre 0 y 60 Hz) y todos los instantes muestreados al capturar la señal a una frecuencia de muestreo de 2,5 kHz. Por cada punto de la matriz se utiliza una FBS para calcular la correlación con la señal indicada en (4.37), siendo el ancho de banda de cada FBS el indicado en el apartado anterior. La función de densidad de energía finalmente representada es la descrita en (4.38), representada en 2D asignando a cada resultado un color según la escala “jet” de MatLab, y aplicando escala logarítmica para que los armónicos de baja amplitud como el LSH puedan ser visibles.

Para generar las figuras 4.34 y 4.35 se han realizado dos análisis idénticos al de la Fig. 4.33 salvo por los instantes de tiempo analizados (los 10 primeros segundos en el caso de la Fig. 4.34) y la banda de frecuencia analizada (entre 45 y 55 Hz en el caso de la Fig. 4.35). Así pues, en la Fig. 4.33 se considera toda la corriente, analizando la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz, tratando de mostrar la evolución completa del LSH. En la Fig. 4.34 se mantiene la banda de frecuencia analizada, pero se consideran solo los 10 primeros segundos, tratando así mostrar con mayor detalle la evolución del LSH durante el arranque. En la Fig. 4.35 se consideran los 60 segundos que dura la señal, pero tan solo se analizan las frecuencias entre 45 y 55 Hz, tratando de mostrar con mayor detalle la evolución del LSH durante las oscilaciones de carga.

#### Interpretación.

En la Fig. 4.33 se observa la evolución completa del LSH durante todo el transitorio, lo cual permite cuantificar su presencia en todo instante de tiempo, tal y como se presenta en el apartado 4.6, y proceder con ello al diagnóstico. Al mismo tiempo, el FC queda perfectamente filtrado, quedando restringida su evolución horizontal a una banda de frecuencia de aproximadamente 1 Hz de anchura. Este

resultado se consigue gracias al uso de cajas de Heisenberg de pendiente variable en el plano tiempo-frecuencia.

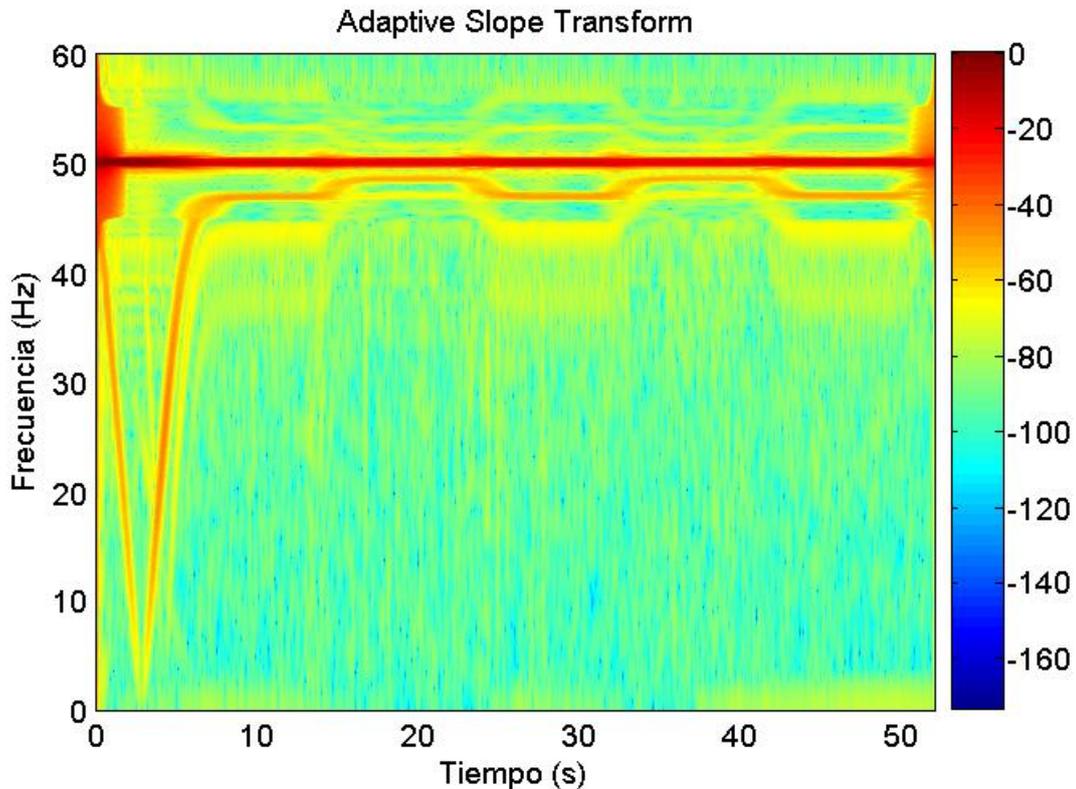


Fig. 4.33 AST de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y las bandas de frecuencia entre 1 y 40 tomando  $fb=7.625$  Hz, entre 40 y 45 evolucionando linealmente hasta  $fb=0.9375$ , entre 45 y 55 Hz tomando  $fb=0.9375$  Hz y entre 55 y 60 Hz volviendo linealmente a  $fb=7.625$  Hz.

Durante el arranque del motor, es decir, durante los 10 primeros segundos (analizados con mayor detalle en la Fig. 4.34), se observa la evolución del LSH en el plano tiempo-frecuencia de forma optimizada, pues la pendiente de la caja utilizada se acopla perfectamente a su evolución. Aquí se pueden observar las consecuencias del principio de incertidumbre de Heisenberg. Aunque físicamente la frecuencia del LSH es única, al obtenerla mediante la correlación con átomos tiempo-frecuencia, y a pesar de que las dimensiones de las cajas de Heisenberg se adaptan de la mejor forma posible a su evolución, la evolución no queda representada por una línea trazada en el plano (lo cual se conseguiría si las áreas de las cajas pudiesen tender a cero), sino por una "línea relativamente gruesa", con una cierta dispersión en el plano alrededor de la evolución física real, siendo el grosor, la dispersión en ambas direcciones (tiempo y frecuencia) dependiente del área y la pendiente de la caja.

Se observa en la Fig. 4.34 cómo, al acercarse a los 6 segundos del transitorio, la frecuencia del LSH ha superado ya los 40 Hz y la pendiente de las cajas cambia reduciéndose considerablemente. Como consecuencia, "el grosor" de la evolución representada aumenta con respecto al tiempo, disminuyendo con respecto a la frecuencia. En otras palabras, al aumentar considerablemente la base de las cajas utilizadas, se pierde mucha resolución temporal, pero como al mismo tiempo la altura de las cajas se ha reducido proporcionalmente, se gana mucha resolución frecuencial, lo cual permite, tal y como se observa en la Fig. 4.35, representar mejor tanto las oscilaciones de carga como los pequeños regímenes permanentes y a la vez separar la

evolución del LSH de la del FC, pues ésta última queda perfectamente confinada en una banda de frecuencia de 1 Hz alrededor de 50 Hz.

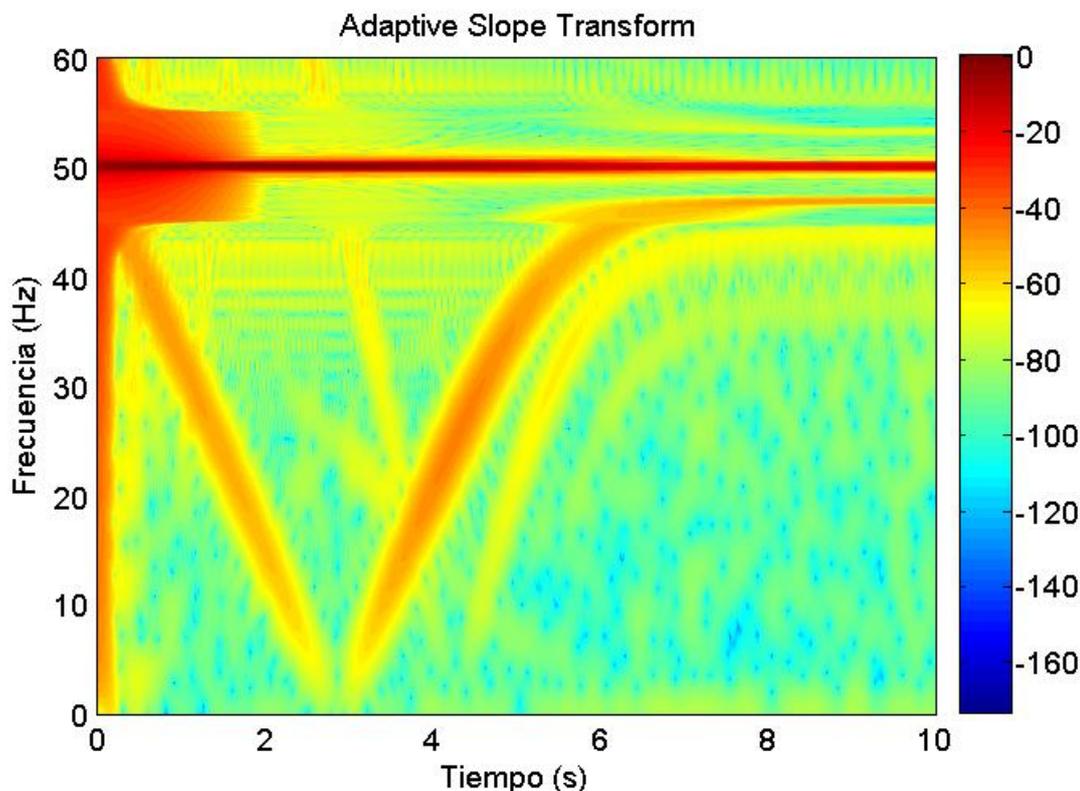


Fig. 4. 34 Análisis idéntico al realizado en la Fig. 4.33, restringiendo el estudio a los 10 primeros segundos de la señal.

También se observa, sobre todo en la Fig. 4.35, la evolución del USH. Concretamente se observa la parte de su evolución correspondiente a las oscilaciones de carga, pues la otra está asociada a una banda de frecuencia que no se ha analizado. Su evolución se observa gracias también a la separación con respecto a la del FC, llegando a este objetivo por el uso de cajas de dimensiones adecuadas en esta zona del plano.

En la Fig. 4.34 se observa también parte de la evolución del B2-. Desciende desde frecuencias superiores, cruzándose con el FC aproximadamente en 3.5 segundos. En el punto de cruce, como su amplitud es mucho menor a la del FC, aun utilizando escala logarítmica no se observa su evolución. Sigue descendiendo y aproximadamente a los 4 segundos se cruza con el LSH en 15 Hz, el cual lo vuelve a ocultar. Seguidamente desciende hasta cero, rebota, y evoluciona paralelamente por debajo del LSH. Las oscilaciones de carga se ven ligeramente en la Fig. 4.33, así como su parte superior en la Fig. 4.35, alrededor de 45 Hz.

Finalmente, también se observa el transitorio electromagnético (TEM) y el efecto de borde (EB) en la parte izquierda de las tres figuras, así como el EB en la parte derecha de las figuras 4.33 y 4.35. En la Fig. 4.34 se ve como, por debajo de 40 Hz, al utilizar cajas con una pendiente relativamente elevada, el TEM y el EB quedan relegados, abarcando todas las frecuencias a la izquierda de la figura, a una franja de aproximadamente 0.2 segundos. Pero por encima de 40 Hz, sobre todo al llegar a 45 Hz, como la pendiente de las cajas es mucho menor, la resolución temporal baja mucho y el TEM junto al EB parecen extenderse hasta los 2 segundos. Al subir de 55 Hz, como la

pendiente vuelve a aumentar, su confinamiento también aumenta. Se trata de una muestra de cómo una componente de una señal físicamente ocupa puntos del plano perfectamente definidos, pero dependiendo de las dimensiones de las cajas utilizadas para capturar su energía, queda representado en el plano de formas muy distintas.

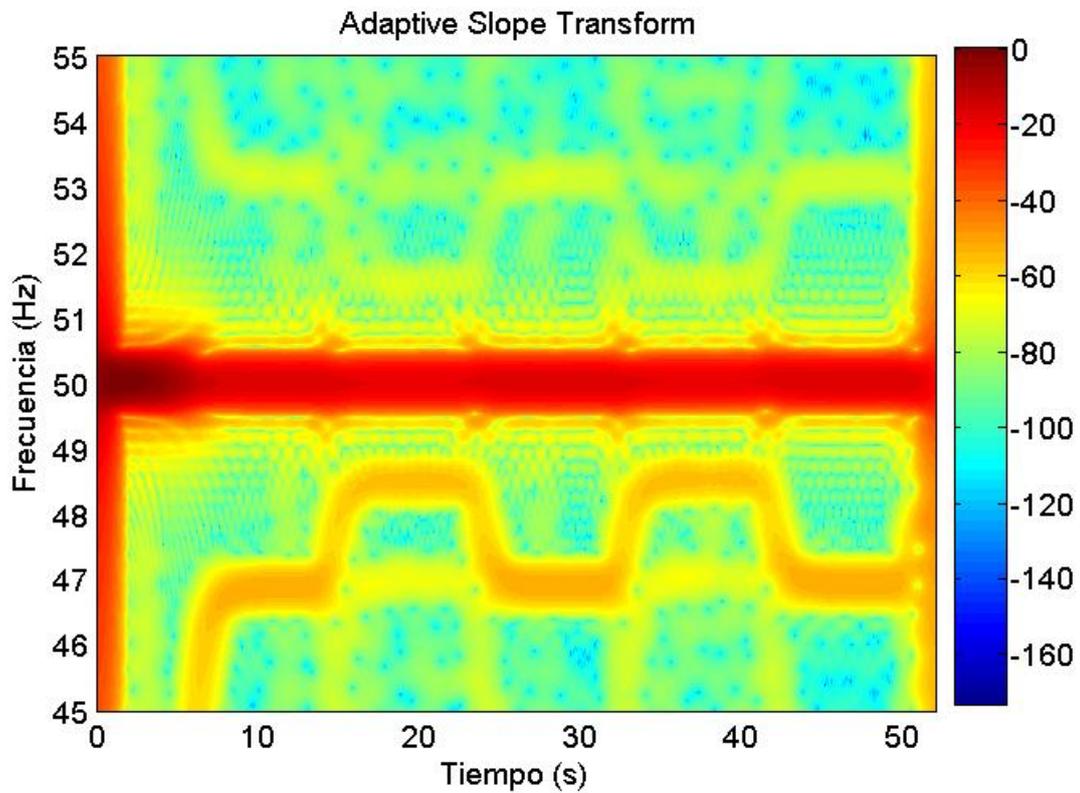


Fig. 4. 35 Análisis idéntico al realizado en la Fig. 4.33, restringiendo el estudio a la banda de frecuencia comprendida entre 45 y 55 Hz.

## 4.5.- Técnicas para mejorar la visualización.

Todas las figuras del apartado anterior se han generado utilizando escala logarítmica. Las figuras 4.33 y 4.37 son idénticas. Se repite en este apartado para poder compararla con la Fig. 4.36, generada a partir de los mismos resultados pero sin utilizar escala logarítmica. La amplitud de la FC es mucho mayor a la de las demás componentes de la corriente. Por tanto, si se representa el resultado obtenido directamente, tan solo se visualiza la evolución del FC. En este caso se trata de una recta horizontal pues el motor está alimentado directamente de la red. Los puntos de mayor densidad de energía se encuentran al inicio del transitorio, cuando la corriente absorbida es mayor, tendiendo a un valor más reducido una vez pasado el arranque. Al aplicar la escala logarítmica (Fig. 4.37), se consigue visualizar la evolución de otras componentes de menor amplitud, especialmente el LSH. En el presente apartado se muestran otras técnicas, distintas del uso de la escala logarítmica, desarrolladas en la presente tesis para mejorar la visualización de la evolución de las componentes de la corriente.

El resultado de calcular cualquiera de las transformadas presentadas es una matriz  $Z$ , donde cada fila está asociada a una frecuencia y cada columna a un instante de tiempo analizado. Así pues  $z(i, j)$  es el resultado de calcular la transformada en el punto del plano determinado por la frecuencia  $i$  y el instante  $j$ . Aplicar escala logarítmica supone calcular el máximo de todos los elementos que componen la matriz  $z_{\max} = \max\{z(i, j)\}$ , dividir todos los elementos de la matriz por dicho máximo  $z(i, j)/z_{\max}$  y calcular finalmente  $10\log_{10}(z(i, j)/z_{\max})$ .

Finalmente, a cada uno de los elementos de la matriz se le asocia un color en función de su valor, de acuerdo con una determinada escala de colores de entre las disponibles en MatLab, de tal forma que el valor máximo recibe el color de un extremo de la escala, el mínimo recibe el color del otro extremo y los elementos intermedios reciben colores intermedios. En los gráficos generados hasta ahora se ha utilizado la escala ‘jet’, escogiendo entre 1024 colores. Las figuras 4.38, 4.39 y 4.40 muestran los mismos resultados que las figuras 4.33, 4.34 y 4.35, pero utilizando la escala ‘hot’. En las figuras 4.41, 4.42 y 4.43 se ha utilizado la escala ‘pink’.

Otra técnica desarrollada en la presente tesis para mejorar la visualización es “la compresión”. Se trata de una técnica inspirada en la compresión de señales, de la cual recibe su nombre. El problema que la compresión trata de solventar es el siguiente. En algunas imágenes resultado de calcular una transformada, pueden haber, a pesar de aplicar escala logarítmica, componentes de amplitud demasiado baja, cuyas evoluciones se visualizan mal o no se consiguen visualizar. Una forma de mejorar su visualización es, estableciendo un determinado límite superior  $z_{\min} < z_{\limsup} < z_{\max}$ , determinar cuáles son los elementos de la matriz cuyo valor supera a  $z_{\limsup}$ , y asignarles a todos ellos el valor  $z_{\limsup}$ , de modo que para cualquier  $z(i, j)$  tal que  $z_{\limsup} \leq z(i, j)$  entonces  $z(i, j) = z_{\limsup}$ . Con esto conseguimos disminuir las distancias entre las componentes de mayor y menor amplitud, pues después de realizar la operación de compresión, el nuevo valor máximo de la matriz se ha reducido precisamente a  $z_{\limsup}$ , inferior al máximo original  $z_{\max}$ . Además, todos los elementos que cumplan la condición, pasaran a ser

coloreados del mismo color, el asociado al máximo de la matriz. En definitiva, se mejora la visualización de las componentes de menor amplitud, como es el caso de las componentes de avería.

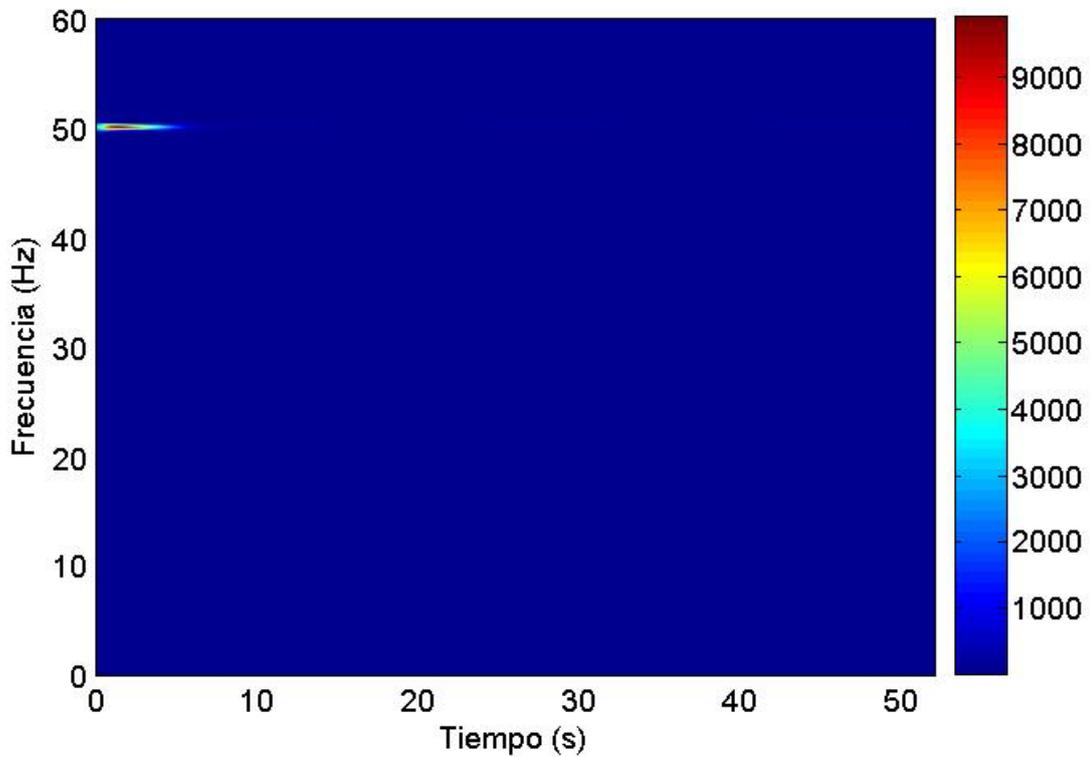


Fig. 4. 36 Análisis idéntico al de la Fig. 4.33 sin utilizar escala logarítmica.

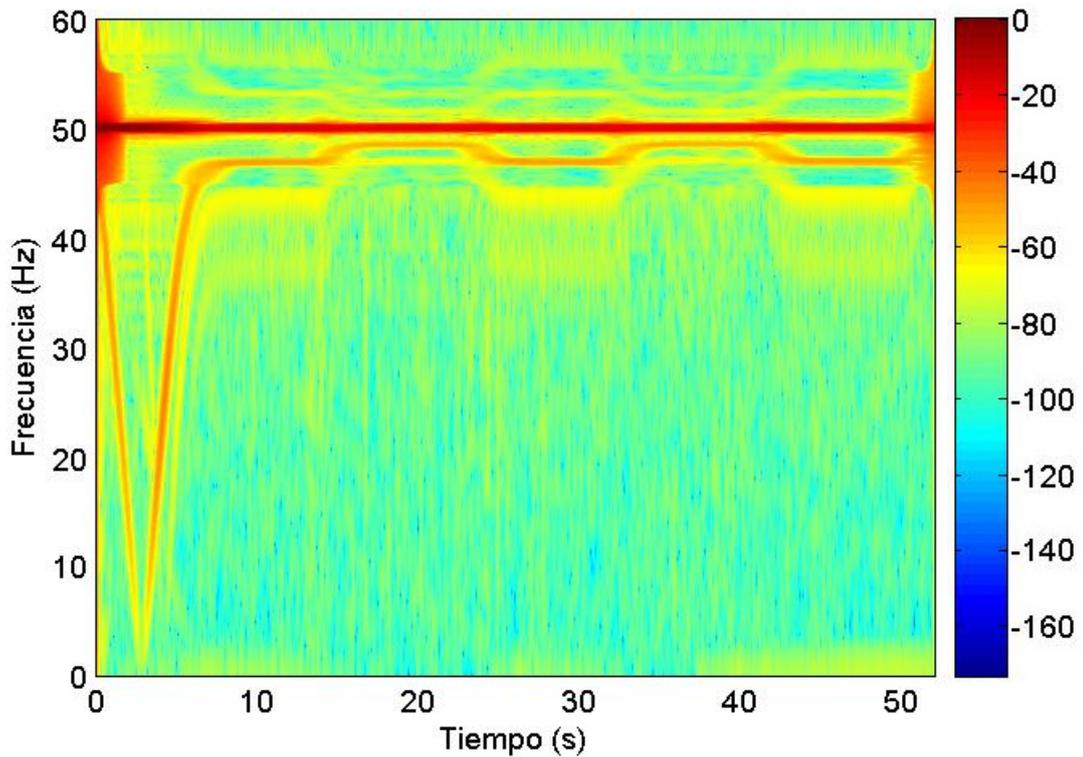


Fig. 4. 37 Repetición de la Fig. 4.33.

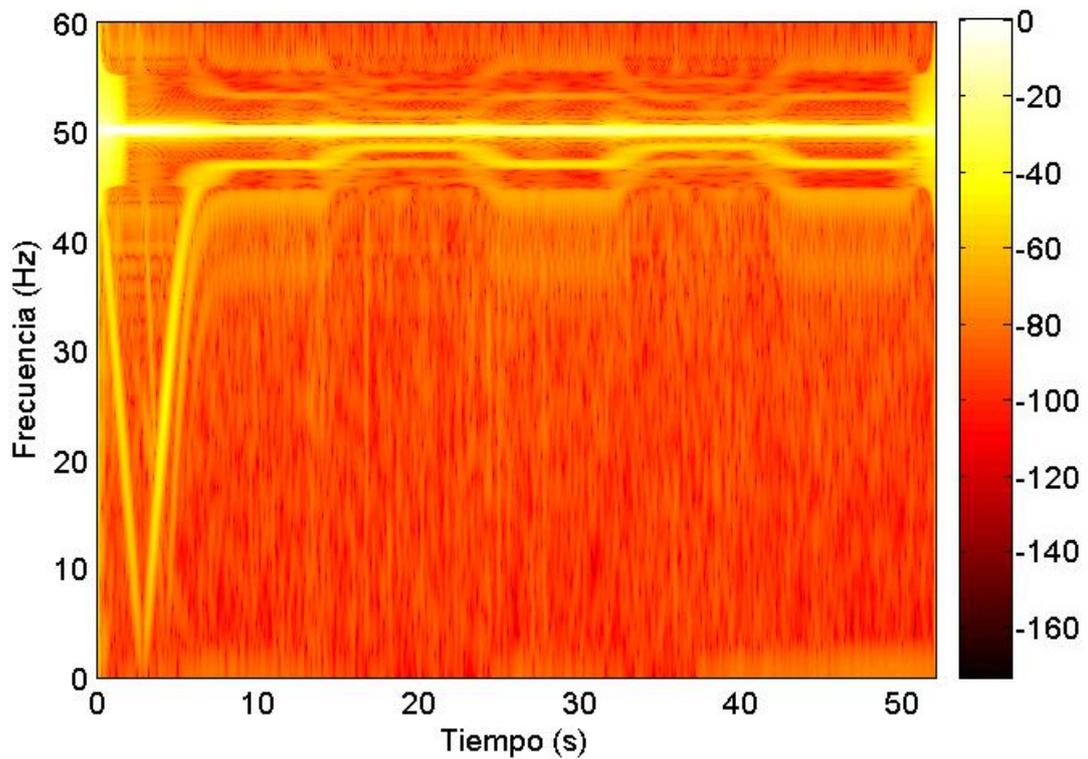


Fig. 4. 38 Análisis idéntico al de la Fig. 4.33, utilizando la escala 'hot' en vez de la escala de colores 'jet'.

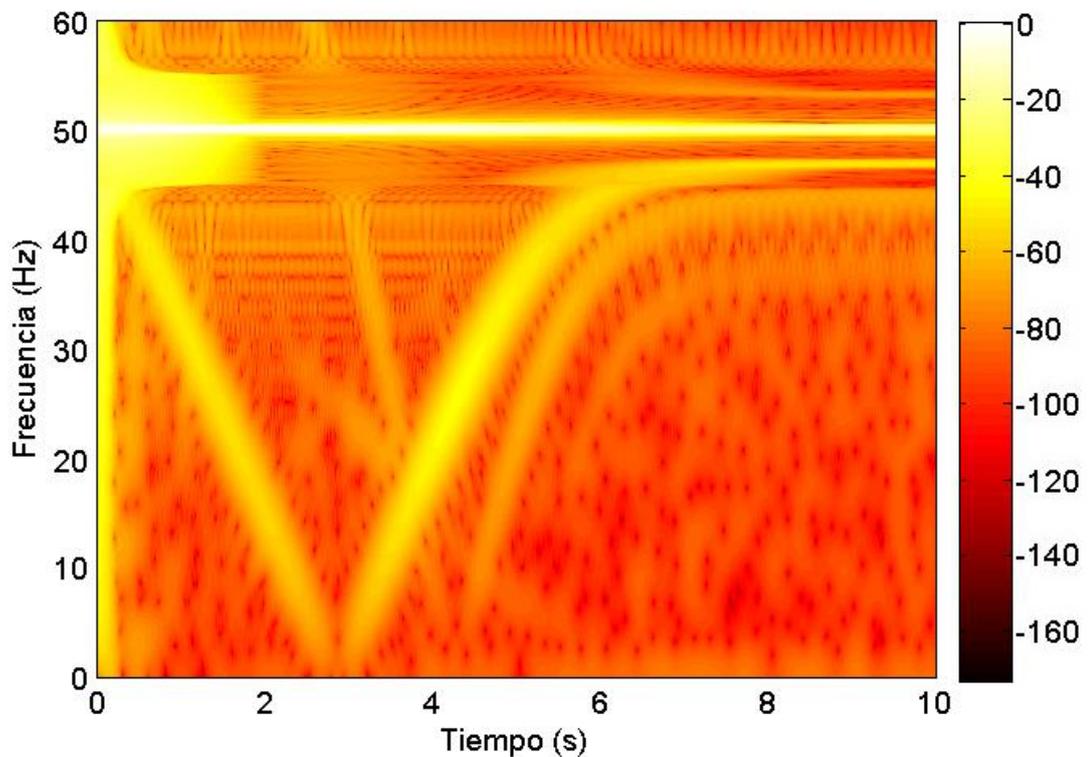


Fig. 4. 39 Análisis idéntico al de la Fig. 4.34, utilizando la escala 'hot' en vez de la escala de colores 'jet'.

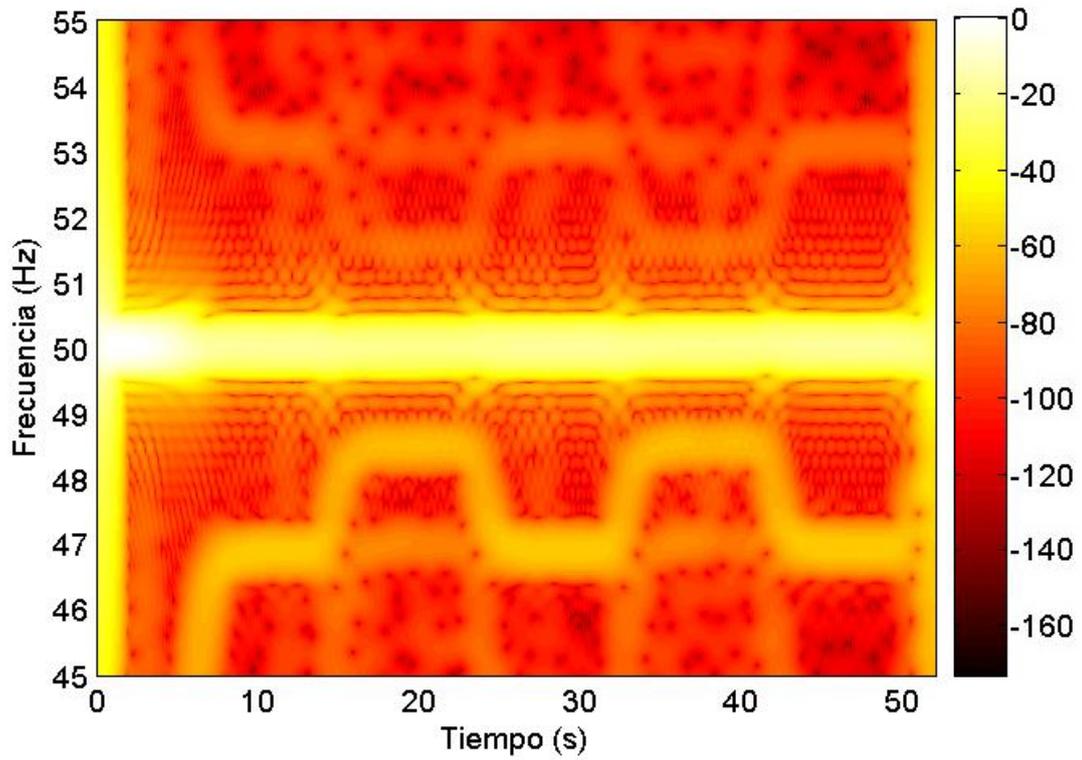


Fig. 4. 40 Análisis idéntico al de la Fig. 4.35, utilizando la escala 'hot' en vez de la escala de colores 'jet'.

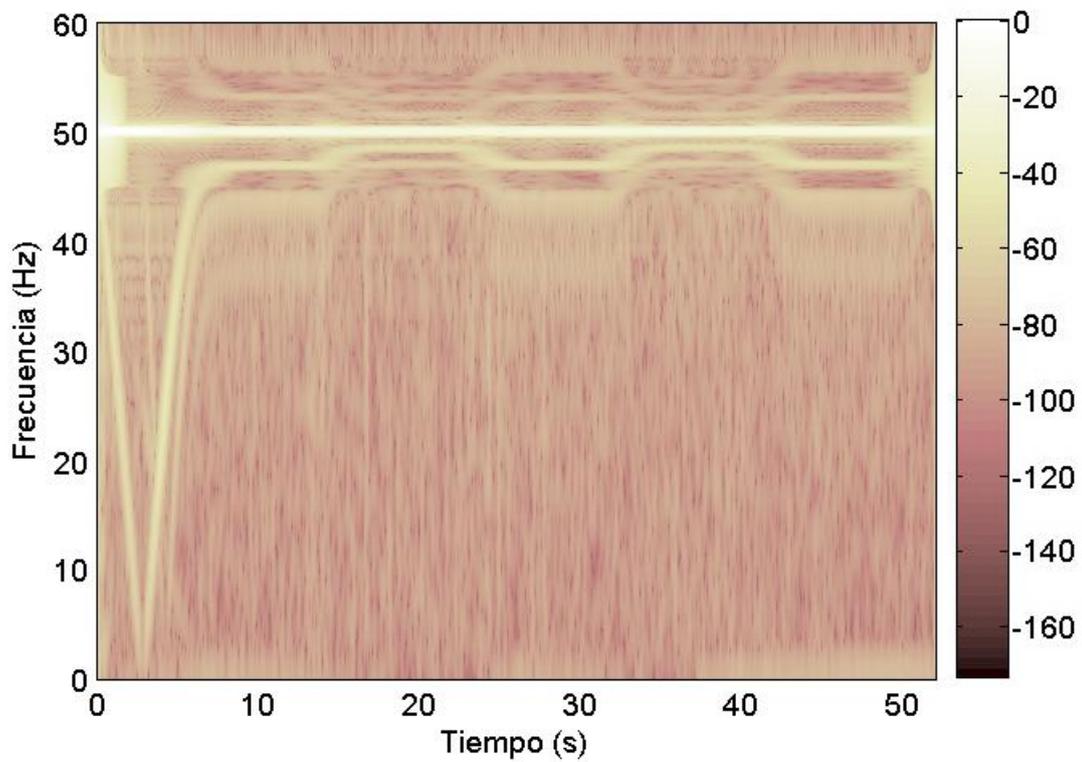


Fig. 4. 41 Análisis idéntico al de la Fig. 4.33, utilizando la escala 'pink' en vez de la escala de colores 'jet'.

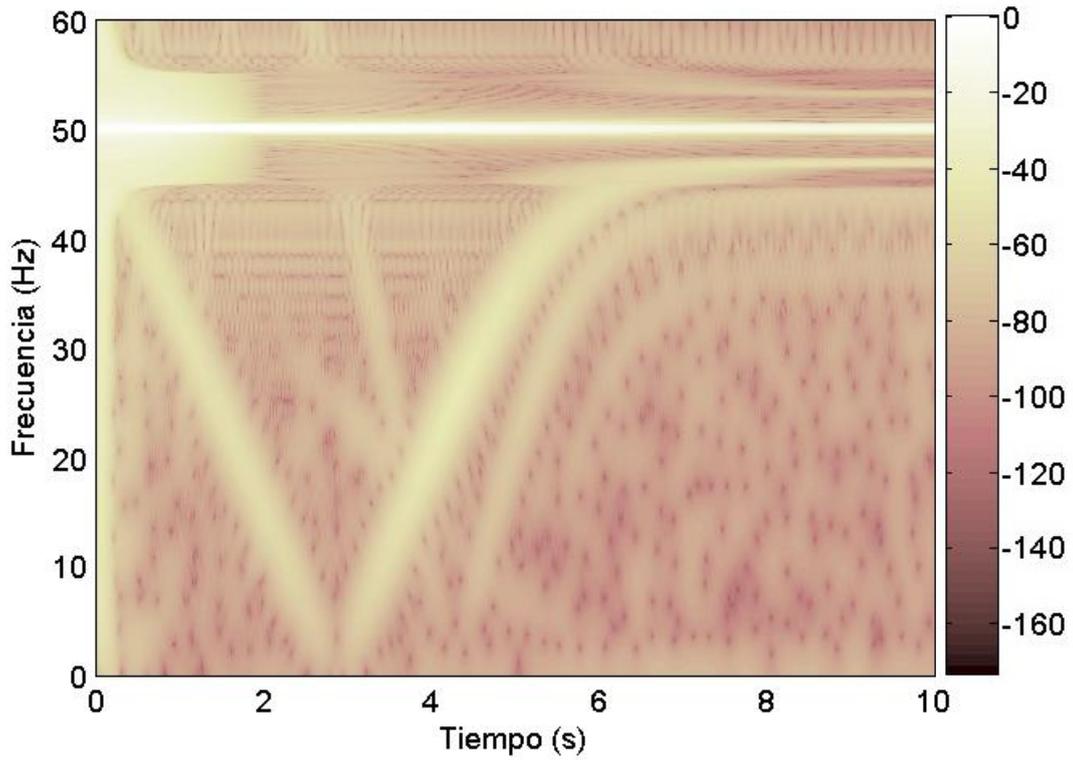


Fig. 4. 42 Análisis idéntico al de la Fig. 4.34, utilizando la escala 'pink' en vez de la escala de colores 'jet'.

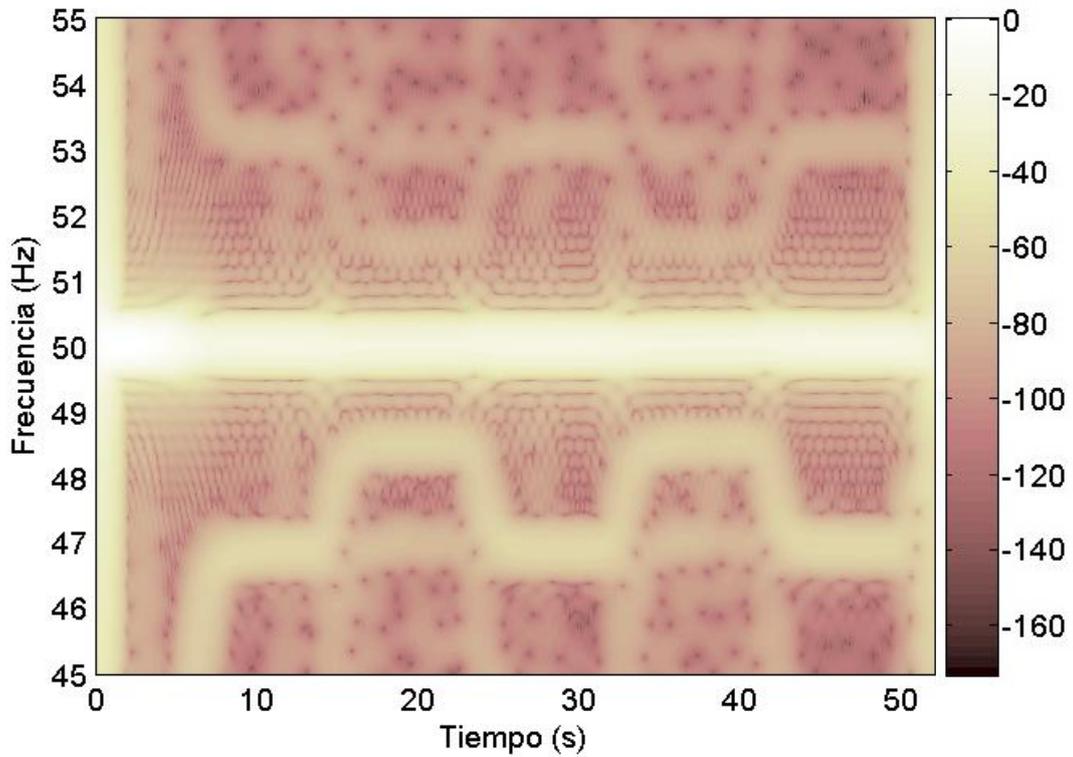


Fig. 4. 43 Análisis idéntico al de la Fig. 4.35, utilizando la escala 'pink' en vez de la escala de colores 'jet'.

Podemos utilizar la técnica también para eliminar ruidos de fondo u otras componentes de poca amplitud que no resulten interesantes. Basta con establecer un límite inferior  $z_{\min} < z_{\liminf} < z_{\limsup} < z_{\max}$ , determinar cuáles son los elementos de la matriz cuyo valor es inferior a  $z_{\liminf}$ , y asignarles a todos ellos el valor  $z_{\min}$ , de modo que para cualquier  $z(i, j)$  tal que  $z(i, j) \leq z_{\liminf}$  entonces  $z(i, j) = z_{\min}$ . De esta forma, si asignamos a  $z_{\liminf}$  un valor tal que por debajo de él tan solo existan componentes de poca importancia o ruidos, conseguimos eliminar todas esas componentes de la señal que no interesan, pues todas ellas pasarán a tener asignado el valor mínimo de la matriz, y por tanto se representará a todos estos puntos con el color de la escala asociado al valor mínimo. Como resultado, el fondo de la imagen, compuesto de elementos no interesantes, pasa a estar representado con el color asociado al mínimo, aumentando de esta forma el contraste de forma selectiva.

Si por ejemplo deseamos observar mejor la evolución de una componente cuya amplitud se encuentra entre un 65 y un 70% de la componente de mayor amplitud, y por debajo del 65% de la componente de mayor amplitud no existe ninguna componente interesante, tan solo tenemos que seleccionar el valor límite superior como  $z_{\limsup} = 0.70 \cdot z_{\max}$  y el valor límite inferior como  $z_{\liminf} = 0.65 \cdot z_{\max}$ . Lo que se consigue aplicando ésta técnica es que todas las componentes que estén por encima del 70% se dibujen con el mismo color, el del extremo de la escala asociado al máximo, y todas las componentes que estén por debajo del 65% se dibujen también con el mismo color, el del extremo de la escala asociado al mínimo. Al definir un margen tan estrecho, el resultado práctico es que las componentes por encima del 65% se dibujan de un color muy cercano al máximo, y las restantes están todas asociadas al mínimo. Aplicado a la señal utilizada como ejemplo, obtenemos la evolución del LSH visualizada con la misma claridad que la evolución de la FC. La técnica ha sido aplicada utilizando la escala de colores 'jet' (Fig. 4.44) y la escala de colores 'pink' (Fig. 4.45).

En el caso de analizar corrientes de motores de inducción alimentados directamente de la red, se puede utilizar otra técnica distinta a la escala logarítmica para evitar que la FC impida ver las evoluciones de componentes de menor amplitud. Hay que tener en cuenta que la FC tiene en este caso una frecuencia constante. Por tanto, si se analiza la señal utilizando la AST, su influencia está limitada a una banda de frecuencia muy estrecha alrededor de 50 Hz (60 Hz en el caso de USA). Por otra parte, tal y como podemos ver en varias figuras como por ejemplo la Fig. 4.42, a la izquierda de la figura, en los primeros instantes y a lo largo de un amplio espectro de frecuencias, los puntos tienen asociada una elevada densidad de energía. Esto es debido a la presencia del transitorio electromagnético (TEM) que se produce al arrancar el motor, y al efecto de borde (EB) de este tipo de transformadas que provoca un incremento de los resultados, no vinculado a ninguna componente de la señal, tanto en los instantes iniciales como los finales de la señal analizada, y abarcando toda la banda de frecuencias analizada.

La técnica propuesta consiste en calcular un máximo y un mínimo distinto para cada vector fila y aplicar de forma separada a cada vector fila la escala de colores, en vez de calcular el máximo y el mínimo de toda la matriz y aplicar la escala de colores al conjunto de la matriz. En otras palabras, utilizar referencias distintas a cada frecuencia analizada, aplicando la escala de colores de forma independiente. Esto permite evitar la

## Capítulo 4.

influencia de la FC, pues al aplicar la escala de colores sobre frecuencias analizadas que se encuentran fuera de la banda de frecuencia en la que se nota la influencia de la FC, las componentes que recibirán la condición de máximos serán los que produzcan el máximo a la frecuencia analizada.

Esta técnica sin embargo puede dar un resultado caótico si no hay una cierta referencia global, de tal forma que, aunque las escalas de colores se apliquen a cada frecuencia analizada de forma independiente, tengan algún tipo de relación entre ellas. Esta vinculación entre las distintas referencias a cada frecuencia (referencia común a todas las escalas de colores a pesar de definirse de forma independiente), la aporta el TEM y el EB situados al inicio del arranque. Estos dos fenómenos tienen asociada una elevada densidad de energía, pero no tanta como la FC. Así pues, al tomar, referencias distintas a cada frecuencia, evitamos que el máximo esté asociado siempre al FC en el momento del arranque, pero al mismo tiempo tenemos una determinada relación entre las distintas formas de aplicar la escala de colores a cada frecuencia, que viene dada por la presencia, al inicio de cada vector fila, de un valor relativamente elevado provocado por la presencia del TEM y el EB.

Los resultados de utilizar una referencia distinta a cada frecuencia analizada al aplicar la escala de colores 'pink' se muestran en la Fig. 4.46. Vemos el FC, fundamentalmente en el momento del arranque, y de forma alternativa durante las oscilaciones de carga, durante las cuales aumenta y disminuye cíclicamente su amplitud. Vemos también el LSH, pero tan solo durante el arranque. Así pues, este método por sí sólo no es suficiente, siendo los resultados de calidad inferior a los obtenidos al utilizar escala logarítmica. Hace falta dar un paso más. Este paso consiste en representar directamente el módulo, en vez de calcular el módulo y elevar al cuadrado los resultados de la correlación. De esta forma se consiguen disminuir las diferencias entre los puntos máximos y mínimos de la matriz. Los resultados se muestran en la Fig. 4.47.

Aunque la visualización de las evoluciones ha mejorado, todavía resulta insuficiente. En los momentos de oscilación cuando la carga desaparece, se pierde la pista del LSH. Además, el resto de las evoluciones se podrían observar mejor. Para disminuir todavía más la distancia entre los máximos y los mínimos en cada frecuencia, se da un paso más. Hay que tener en cuenta que, el TEM y el EB introducen una mayor energía cuanto más cerca se encuentran del inicio de la señal, disminuyendo progresivamente pasados apenas unos instantes. Si, una vez realizado el análisis y antes de aplicar la escala de colores, recortamos los primeros instantes de la señal, la referencia que introducen el TEM y el EB será un tanto menor, y habrá menores diferencias entre el máximo y el mínimo, consiguiendo una mejor visualización.

Los resultados de esta técnica se pueden observar en la Fig. 4.48, donde se ha realizado un análisis idéntico al de la Fig. 4.47, pero limitando la banda de frecuencia analizada a 0-45 Hz, y recortando, una vez obtenidos los resultados y antes de aplicar las escalas de colores, de tal forma que conservamos el intervalo temporal entre 0.2 y 7 segundos. Se visualiza, con mucha claridad, la evolución del LSH durante el arranque. Por otra parte, en la Fig. 4.49 se muestran los resultados de realizar un análisis idéntico al mostrado en la Fig. 4.47, pero limitando la banda de frecuencia analizada a 45-55 Hz y recortando, una vez obtenidos los resultados y antes de aplicar las escalas de colores, de tal forma que conservamos el intervalo temporal entre 2 y 51 segundos. Ambos análisis se han repetido utilizando la escala de colores 'jet' (Fig. 4.50 y 4.51).

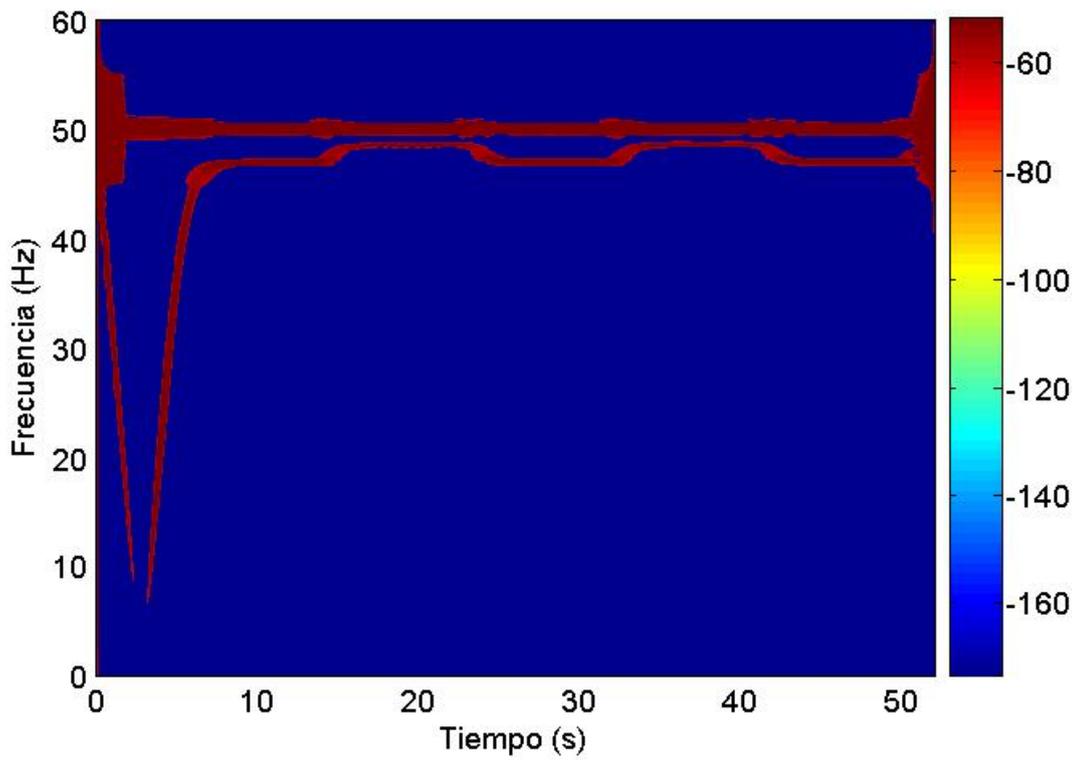


Fig. 4.44 Análisis idéntico al de la Fig. 4.33, comprimiendo la matriz tomando como límites superior e inferior el 70% y el 65% del máximo de la matriz respectivamente, utilizando la escala de colores 'jet'.

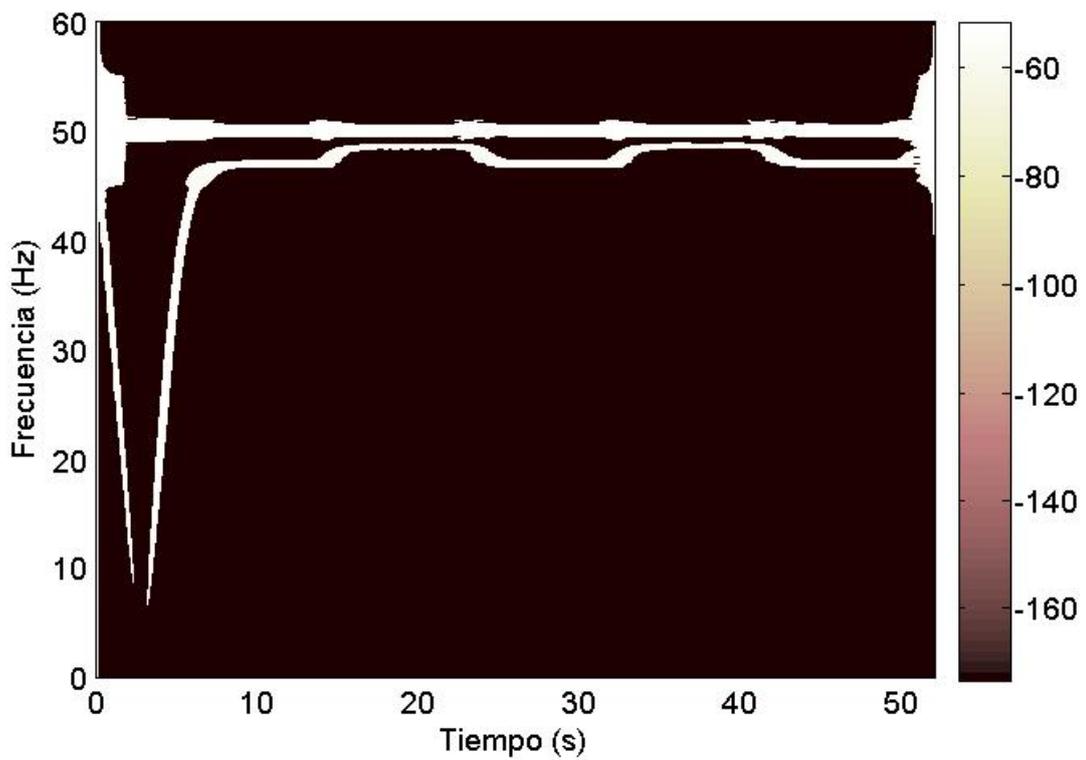


Fig. 4.45 Análisis idéntico al de la Fig. 4.33, comprimiendo la matriz tomando como límites superior e inferior el 70% y el 65% del máximo de la matriz respectivamente, utilizando la escala de colores 'pink'.

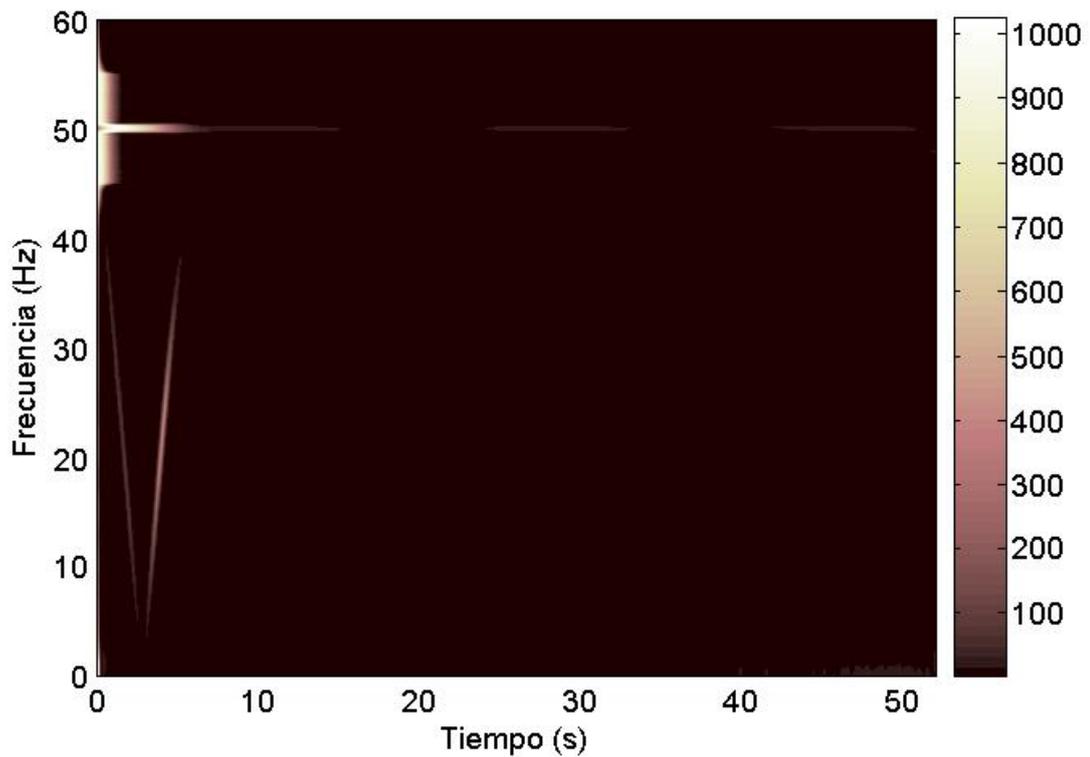


Fig. 4.46 Análisis idéntico al de la Fig. 4.36, utilizando la escala de colores 'pink' en vez de la escala 'jet', con distintas referencias a cada frecuencia analizada.

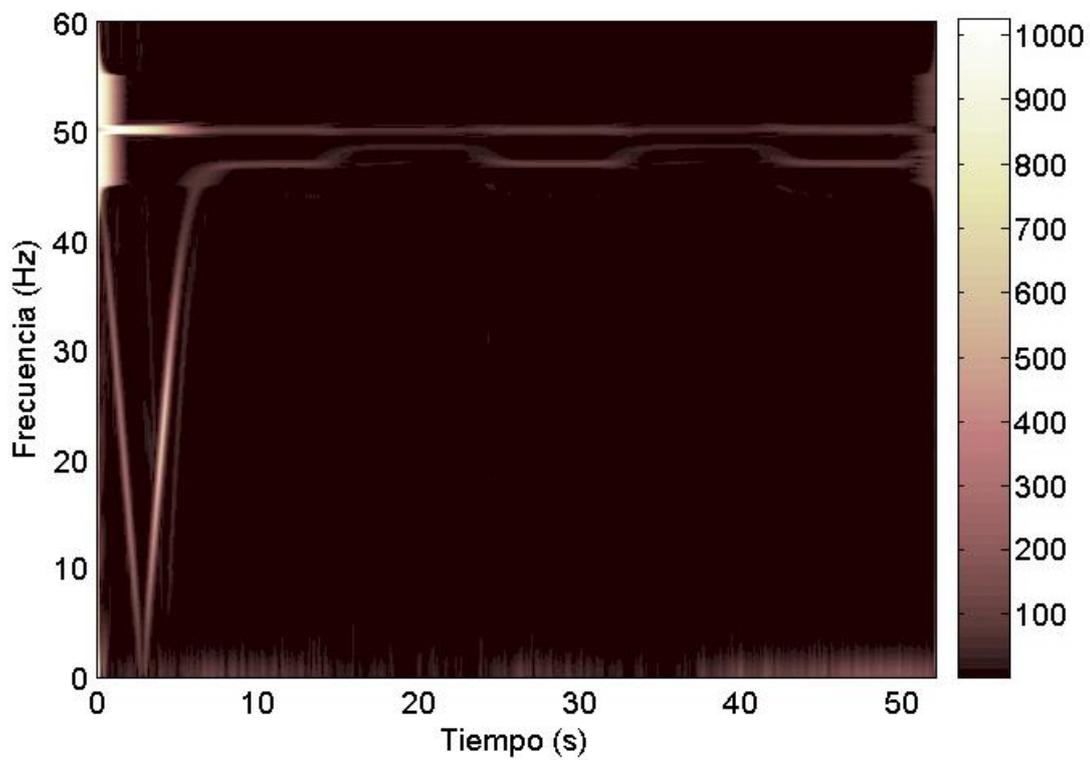


Fig. 4.47 Análisis idéntico al de la Fig. 4.46, utilizando directamente el módulo de los resultados de la correlación, sin elevar al cuadrado.

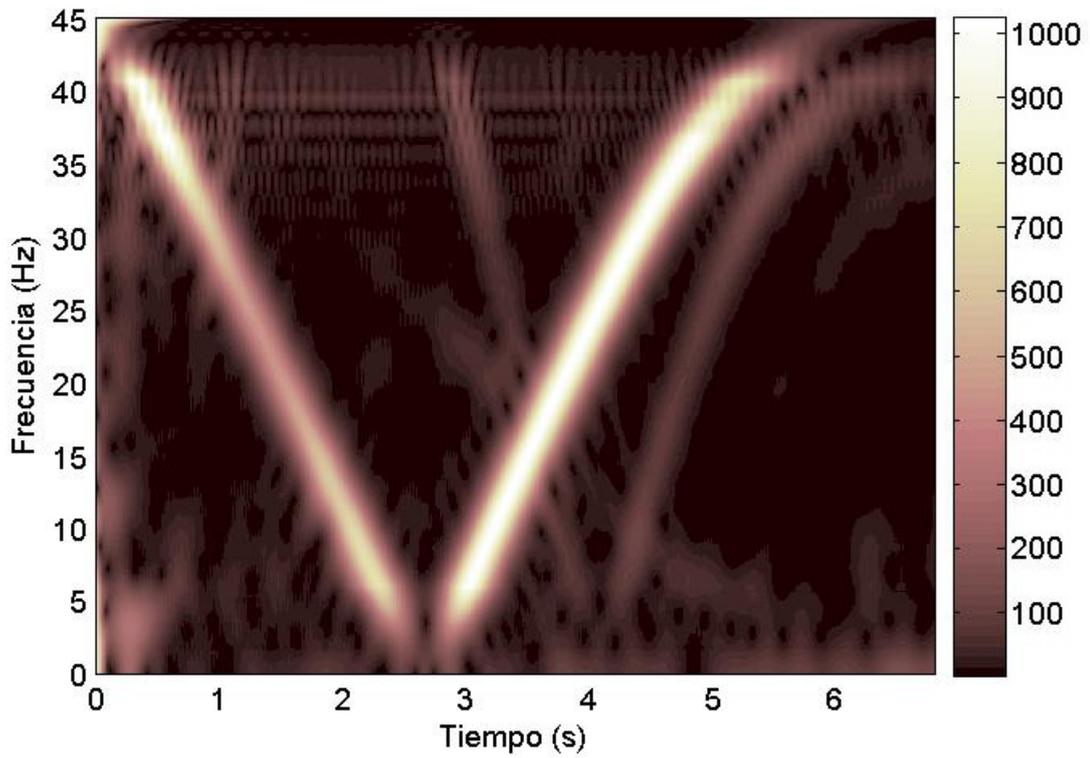


Fig. 4. 48 Análisis idéntico al de la Fig. 4.47, analizando la banda de frecuencia entre 0 y 45 Hz y recortando de tal forma que conservamos el intervalo de tiempo entre 0.2 y 7 segundos.

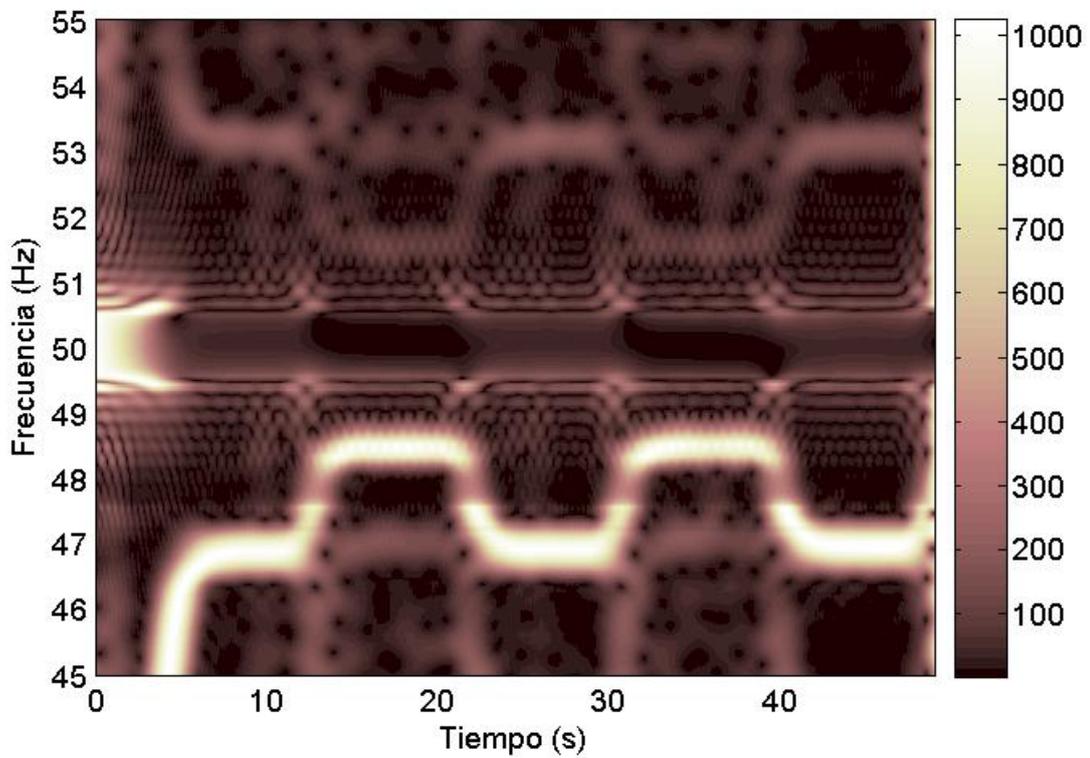


Fig. 4. 49 Análisis idéntico al de la Fig. 4.47, analizando la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz y recortando de tal forma que conservamos el intervalo de tiempo entre 2 y 51 segundos.

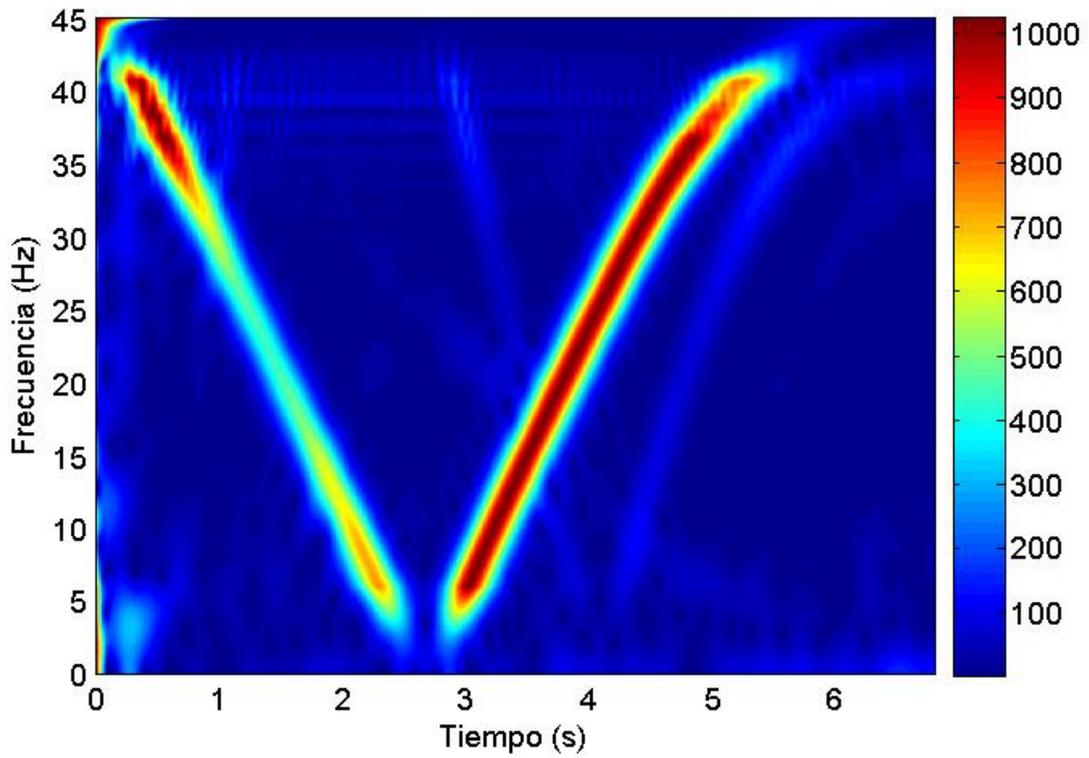


Fig. 4.50 Análisis idéntico al de la Fig. 4.48, utilizando la escala de colores 'jet'.

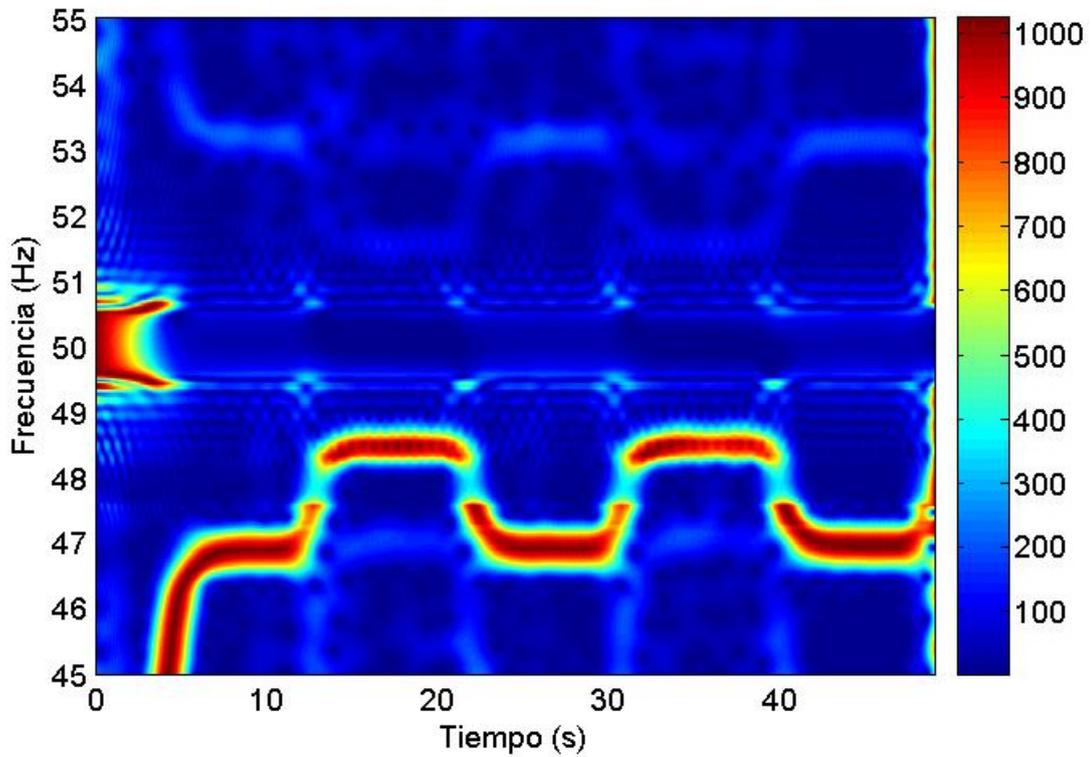


Fig. 4.51 Análisis idéntico al de la Fig. 4.49, utilizando la escala de colores 'jet'.

## **4.6.- Método de cuantificación.**

Uno de los inconvenientes de utilizar transformadas continuas (STFT, CWT, MP o WVD), es que el resultado es una matriz de puntos difícil de utilizar para obtener un número que cuantifique la gravedad de la avería. En el presente apartado se expone la solución desarrollada en esta tesis.

Básicamente se parte de dos resultados obtenidos en apartados anteriores. En primer lugar, utilizando la AST se ha calculado la densidad de energía en un conjunto de puntos formando una matriz que cubren de forma suficientemente densa la zona del plano tiempo-frecuencia analizada. En segundo lugar, aplicando el método de obtención de la evolución del deslizamiento (en el primer ejemplo de acople directo a la red) y de la frecuencia fundamental (en el segundo ejemplo de alimentación desde un inversor) a partir de la corriente (ambos métodos desarrollados en el capítulo 5), se tiene una estimación de la evolución temporal de la frecuencia de las componentes de avería.

Al realizar el cálculo de la densidad de energía mediante la AST, se pueden observar en el plano tiempo-frecuencia de forma completa y optimizada, las evoluciones de las componentes de avería. Además, sin necesidad de “buscar manualmente” en la figura que representa dicha densidad de energía, conocemos exactamente los puntos del plano en los que se encuentran las componentes de avería gracias a la estimación de su evolución temporal. Acoplando ambos resultados, tan solo hay que rescatar de la matriz la densidad de energía en estos puntos, indicativos de la presencia de la componente de avería, y calcular la media. En otras palabras, así como con la FFT la cuantificación consiste en medir la amplitud del pico vinculado a la componente de avería (densidad de energía en frecuencia), en la presente tesis se propone medir el pico de la componente de avería en cada instante (densidad de energía en el plano tiempo-frecuencia) y calcular la media. La posición de dicho pico en el plano para cada instante es conocida pues se ha obtenido una estimación de la evolución temporal de la frecuencia de las componentes de avería y la amplitud del pico se conoce también pues se ha obtenido de forma optimizada al aplicar la AST.

Una vez se tiene la densidad de energía de la componente de avería en cada instante, en algunos casos se procede a desestimar determinadas partes, como en el ejemplo de arranque directo, muy al principio cuando la evolución del LSH coincide con el FC y el TEM, o justo a la mitad del arranque, cuando la amplitud del LSH cae a cero.

Por otra parte, existe una pequeña diferencia cuando se cuantifica la avería en el caso de alimentar el motor de inducción mediante un inversor. Más concretamente, en este caso no se conoce con tanta exactitud la evolución temporal de las componentes de avería, pues se estima la evolución de la componente fundamental pero se supone que la frecuencia de deslizamiento es nula. Por tanto, hay que efectuar un paso intermedio que trata de corregir esta aproximación.

### **4.6.1.- Cuantificación al alimentar directamente desde la red.**

Los resultados que se toman como punto de partida al proceso de cuantificación son los mostrados en las figuras 4.52 y 4.53. En la Fig. 4.52 (idéntica a la Fig. 4.33,

## Capítulo 4.

salvo por utilizar la escala de colores ‘pink’ en vez de la ‘jet’), se muestra la densidad de energía de la corriente analizada como ejemplo (Fig. 4.13), calculada utilizando la AST. En la Fig. 4.53 (idéntica a la Fig. 4.16), se muestra la evolución temporal estimada de la frecuencia del LSH (obtenida aplicando el método expuesto en el capítulo 5) junto a la del FC.

En la Fig. 4.54 se acoplan ambos resultados localizándose en la matriz que describe la densidad de energía (Fig. 4.52) los puntos de la evolución temporal del LSH (Fig. 4.53). La escala de colores ‘pink’ ha sido utilizada para visualizar mejor la superposición de la evolución en rojo. Esta misma figura se muestra en tres dimensiones en las figuras 4.55 y 4.56. Se puede observar cómo, en escala logarítmica, la diferencia entre “el fondo” de la imagen y los picos asociados a la presencia de las componentes no es tan elevada. Es por tanto un proceso delicado localizar los picos asociados al LSH. Este proceso ha podido realizarse gracias a la información obtenida tras la aplicación del método de obtención de la evolución temporal del deslizamiento.

En definitiva, la trayectoria trazada de color rojo en estas últimas tres figuras, asigna para cada instante de tiempo (eje x) la frecuencia a la que se encuentra el LSH (eje y) y su densidad de energía asociada (eje z). Si se deja de lado la información relativa a la frecuencia, se puede representar en dos dimensiones la evolución temporal de la densidad de energía asociada al LSH: Fig. 4.57.

En la Fig. 4.58 se representa un detalle de la Fig. 4.57, restringiendo la evolución mostrada a los diez primeros segundos del transitorio. Se observa cómo, en los primeros instantes, la densidad de energía es muy elevada, partiendo incluso del nivel de 0 dB. Efectivamente, muy al principio del arranque la frecuencia del LSH y el FC coinciden y la densidad de energía medida en este punto es representativa del FC y no del LSH. Al perderse la influencia del FC la densidad de energía disminuye a 50 dB aproximadamente, manteniéndose en este valor con una cierta trayectoria decreciente en la primera parte del arranque.

Como es sabido [33], en la mitad del arranque la amplitud del LSH es cero, lo cual se ve reflejado perfectamente en la Fig. 4.58 alrededor de los 3 segundos, cuando la densidad de energía asociada al LSH disminuye bruscamente. Análogamente, durante la segunda parte del arranque la amplitud sube hasta alcanzar un máximo mayor que en la primera parte, volviendo a bajar describiendo una trayectoria acampanada [33]: esta misma trayectoria es la que describe la densidad de energía del LSH en la Fig. 4.58.

Finalmente la amplitud del LSH se estabiliza en el valor correspondiente al régimen permanente, el cual es función del nivel de carga. Volviendo a la Fig. 4.57, se observa cómo con los sucesivos cambios entre los dos niveles de carga (carga y sin carga), la densidad de energía asociada al LSH varía entre dos valores, aumentando cuando la carga aumenta.

El índice propuesto como cuantificador de la presencia de una componente de avería es el valor medio de la evolución temporal de su densidad de energía. En el ejemplo, el valor medio de la densidad de energía del LSH durante el transitorio de arranque y las posteriores oscilaciones de carga (representada en la Fig. 4.57), es:

$$\gamma = 51.4 \text{ dB} \quad (4.41)$$

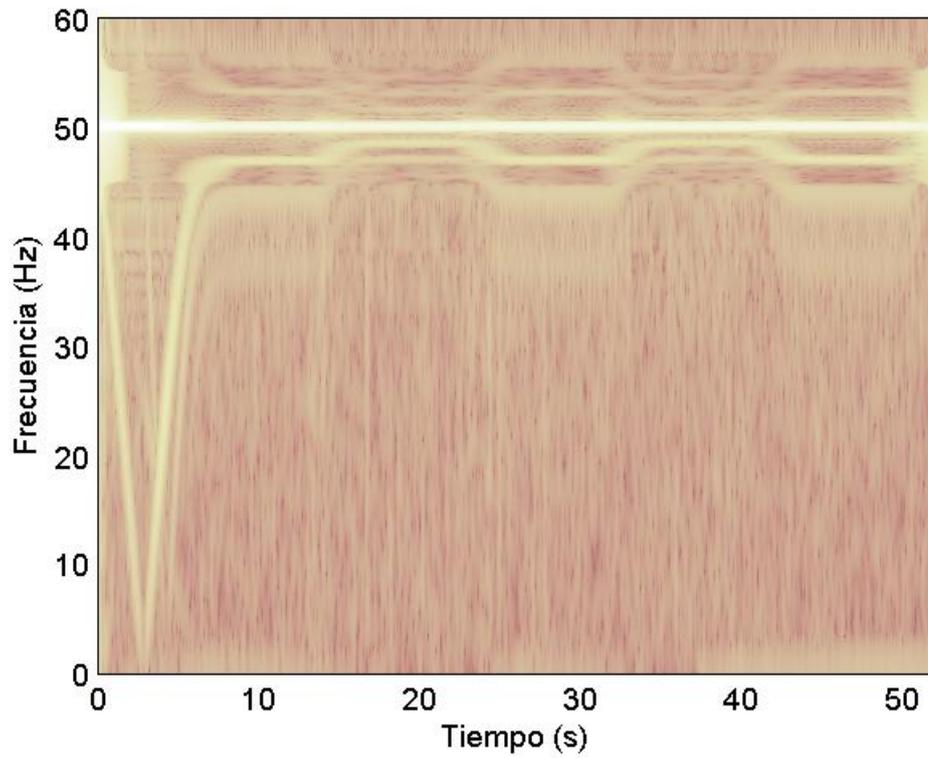


Fig. 4. 52 AST de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y las bandas de frecuencia entre 0 y 40 tomando  $fb=7.625$  Hz, entre 40 y 45 evolucionando linealmente hasta  $fb=0.9375$ , entre 45 y 55 Hz tomando  $fb=0.9375$  Hz y entre 55 y 60 Hz volviendo linealmente a  $fb=7.625$  Hz.

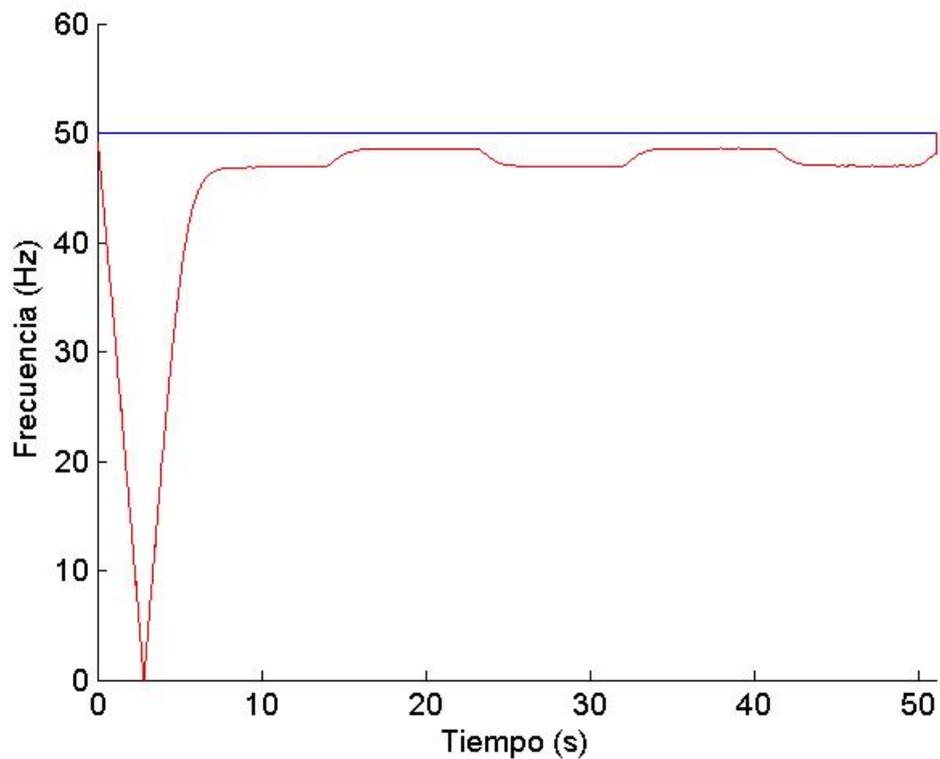


Fig. 4. 53 Estimación final de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de la corriente (FC y LSH).

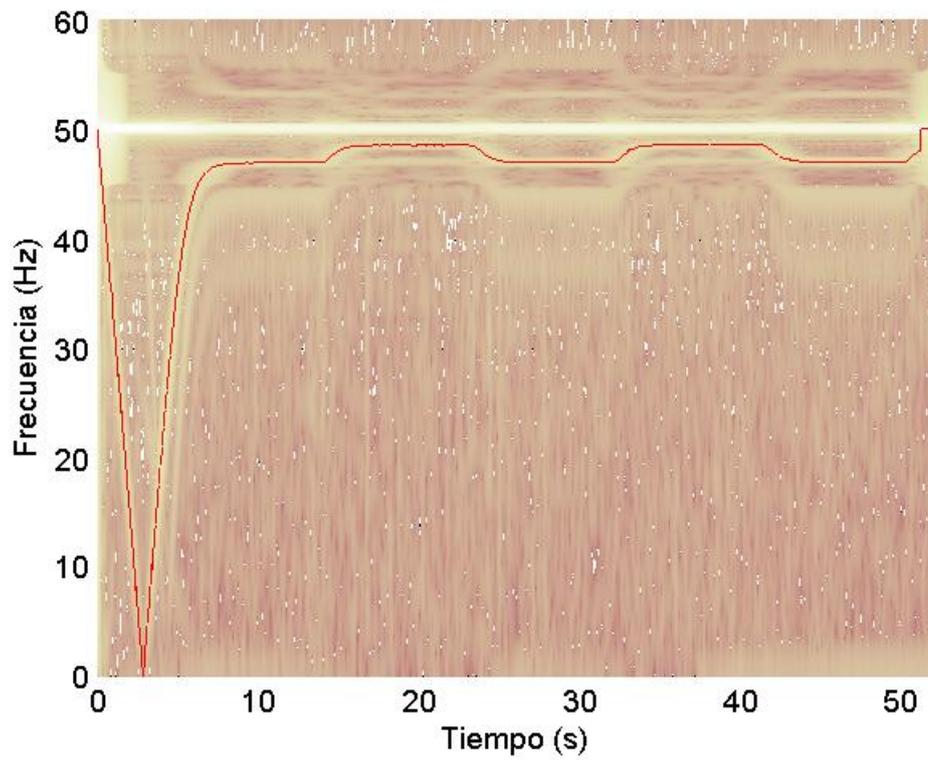


Fig. 4. 54 Acople de los resultados de las figuras 4.52 y 4.53: localización en la matriz que describe la densidad de energía los puntos de la evolución temporal del LSH.

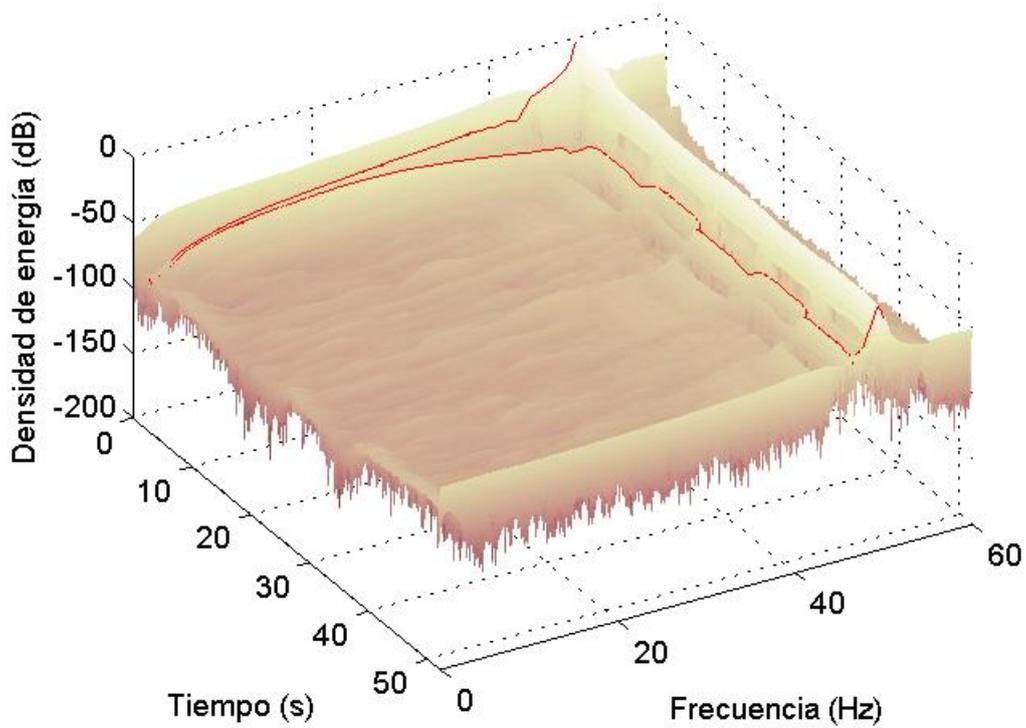


Fig. 4. 55 Primera visualización en tres dimensiones de la Fig. 4.54.

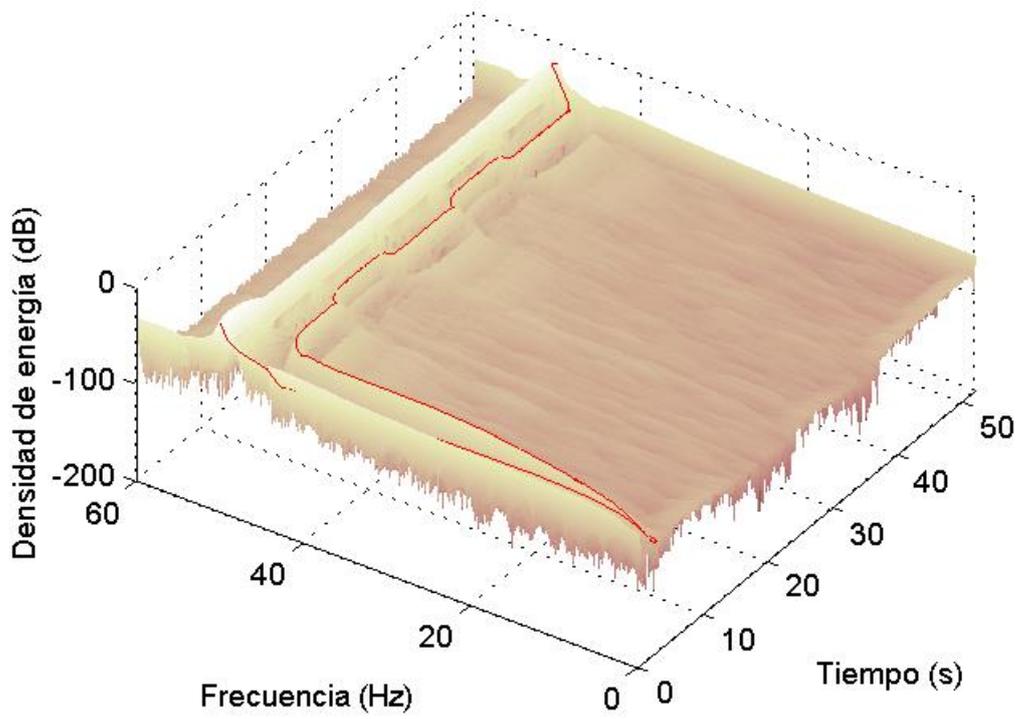


Fig. 4. 56 Segunda visualización en tres dimensiones de la Fig. 4.54.

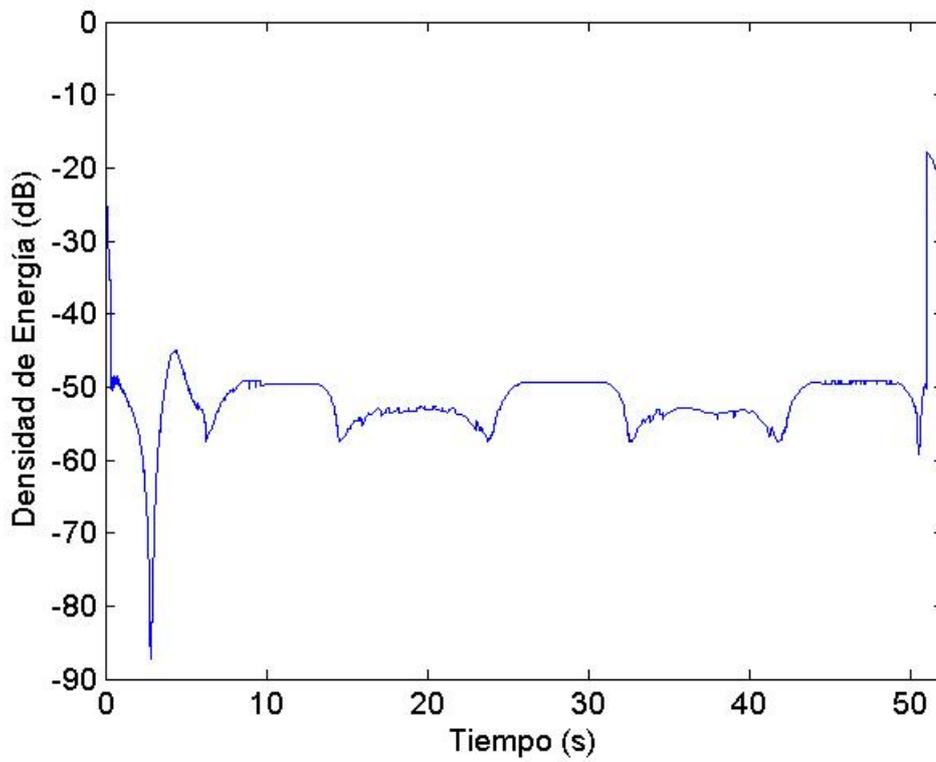


Fig. 4. 57 Evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH.

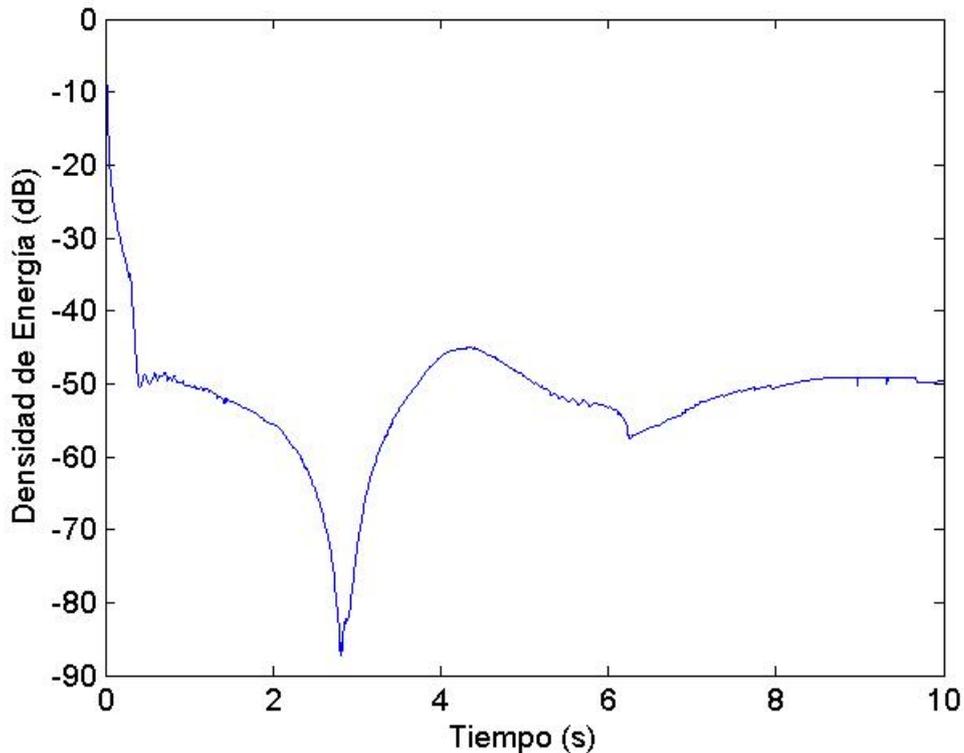


Fig. 4. 58 Detalle de la figura anterior: 10 primeros segundos.

Inevitablemente, existen puntos del plano en los que la trayectoria de la componente de avería coincide con la de otras componentes, como al principio del arranque, donde el LSH y el FC tienen exactamente la misma frecuencia, o al final del transitorio, en el que el LSH se confunde con el EB de la transformada. Para considerar exclusivamente las densidades de energía vinculadas a la componente cuya presencia se quiere cuantificar, se eliminan estos intervalos de tiempo.

Además, con el objetivo de potenciar la diferencia con los resultados obtenidos al analizar un motor sano, también se pueden eliminar aquellos intervalos en los que la amplitud de la componente cuya presencia se pretende cuantificar desciende. Por ejemplo, justo en la mitad del arranque cuando la amplitud del LSH es cero, o en los puntos en ausencia de carga, cuando es inferior. En la Fig. 4.59 se muestra el resultado. Tras el recorte, el valor medio aumenta (disminuye en dB):

$$\gamma_r = 50,7 \text{ dB} \tag{4.43}$$

#### 4.6.2.- Cuantificación al alimentar mediante un inversor.

Con el objetivo de ilustrar el método de cuantificación al alimentar el motor mediante un inversor, en el presente apartado se analiza como ejemplo la corriente de un motor de inducción alimentado mediante un inversor con una frecuencia de consigna que parte de 50 Hz y al cabo de tres segundos disminuye linealmente hasta 33 Hz, quedándose estabilizada finalmente en dicho valor. Los detalles completos del motor ensayado, el cual presenta una excentricidad creada artificialmente, así como otros aspectos acerca de la captura de esta señal, se presentan en el apartado 8.1, en el cual se analizan en profundidad esta y otras corrientes transitorias del mismo motor.

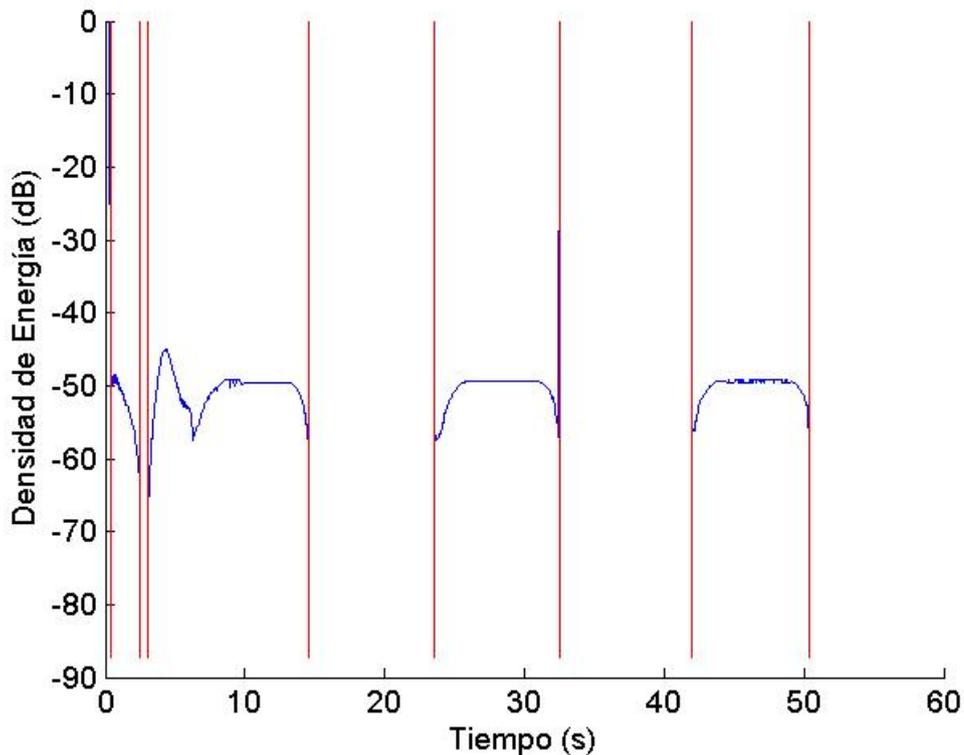


Fig. 4.59 Evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH recortando los intervalos de intersección con otras componentes (FC y EB) y los intervalos de poca amplitud de la componente de avería.

En primer lugar, la Fig. 4.60 muestra la densidad de energía resultado de calcular la AST de la corriente de línea del motor, donde se observan las evoluciones de tres componentes: la componente fundamental y las dos principales componentes provocadas por la excentricidad. Los pasos a seguir para obtener este resultado (en especial las cajas de Heisenberg utilizadas) se detallan en el segundo apartado del capítulo 8, en el cual se analiza esta misma corriente. En el presente apartado incidimos tan solo en la aplicación del método de cuantificación una vez obtenida la densidad de energía.

En segundo lugar, la Fig. 4.61 muestra el resultado de aplicar el método para obtener la evolución temporal de la frecuencia fundamental (azul). Se muestran también las evoluciones temporales de las frecuencias de los armónicos de excentricidad (rojo), suponiendo una frecuencia de deslizamiento nula.

En este punto la cuantificación se distancia del método aplicado para motores alimentados directamente desde la red. El paso añadido sirve para eliminar la aproximación realizada con respecto a la estimación de las evoluciones de los armónicos de excentricidad (Eccentricity Harmonics, EH) al suponer frecuencia de deslizamiento nula. Se considera una banda de frecuencia de 4 Hz alrededor de cada una de las evoluciones de los EH estimadas, las cuales se muestran en la Fig. 4.62 (de color azul la superior y de color verde la inferior). Posteriormente, para cada instante se considera el correspondiente vector columna de la matriz representada en la Fig. 4.60. De dicho vector se recuperan dos tramos: los contenidos en las dos bandas mostradas en la Fig. 4.62 de color azul y verde. Finalmente se calcula el máximo de cada tramo y su frecuencia asociada. Las dos frecuencias obtenidas son la estimación definitiva de las frecuencias de los EH en el instante considerado. Si la operación se realiza para todos

Capítulo 4.

los instantes muestreados se obtienen las trayectorias representadas de color rojo en la Fig. 4.62.

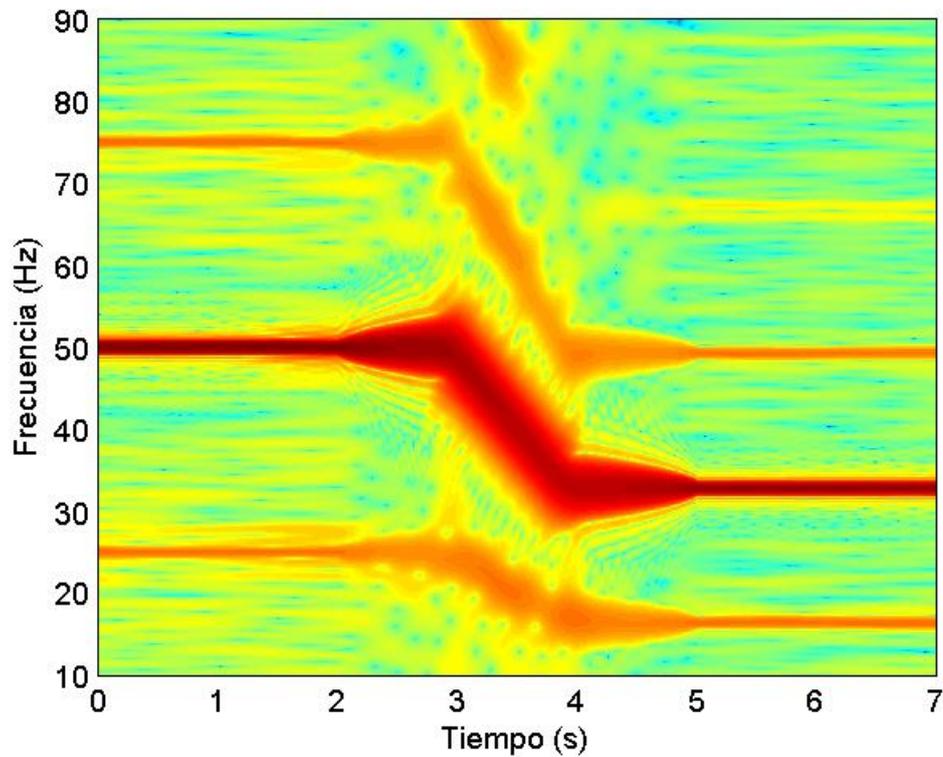


Fig. 4. 60 AST de la corriente de un motor de inducción alimentado mediante un inversor, durante una disminución de la frecuencia fundamental, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 10 y 90 Hz.

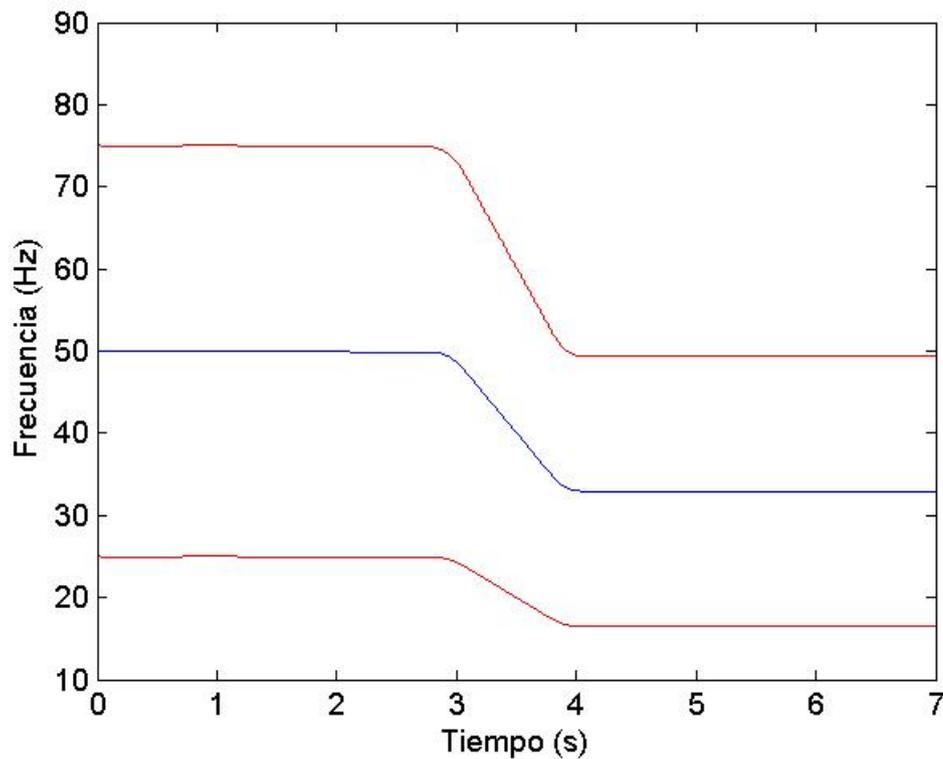


Fig. 4. 61 Estimación de la evolución temporal de las frecuencias de la FC (azul) y los EH (rojo).

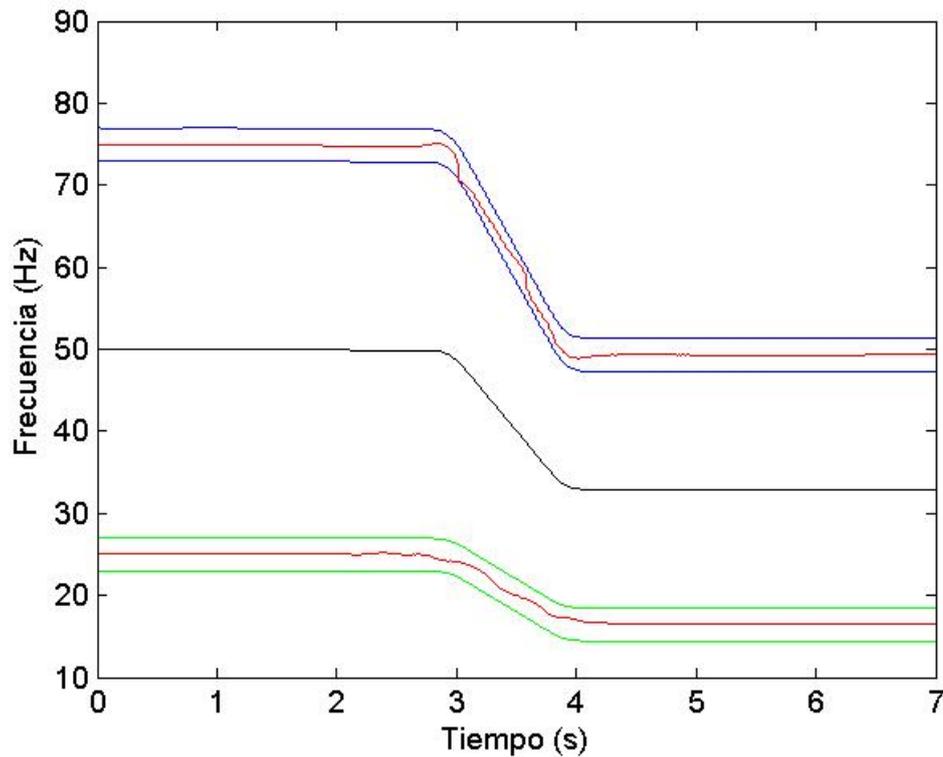


Fig. 4. 62 Estimación de la evolución temporal de la frecuencia de la FC (azul), bandas de frecuencia alrededor de la frecuencia estimada de los EH (azul EH superior y verde EH inferior) y evoluciones temporales de las frecuencias de los EH (rojo) finalmente calculadas como los máximos locales en las respectivas bandas.

A partir de aquí se opera como en el caso del motor alimentado directamente desde la red. Estas estimaciones definitivas de las frecuencias de los EH para cada instante (trazadas de color rojo en la Fig. 4.62) se localizan en la matriz resultante de calcular la densidad de energía (mostrada en la Fig. 4.60). En definitiva, en las figuras 4.63 y 4.64 se observan dos perspectivas distintas en tres dimensiones del acople entre estos dos resultados. Se puede observar cómo efectivamente, las evoluciones estimadas de los EH recorren los picos de su densidad de energía.

Finalmente, descartando la información en frecuencia de las figuras 4.63 y 4.64, se representa para cada instante la densidad de energía tanto del FC (negro), como del EH superior (azul) y del EH inferior (verde). Tan solo queda calcular el valor medio de estas dos últimas funciones. Los siguientes dos valores cuantifican la presencia de las dos componentes principales causadas por una excentricidad mixta:

$$\begin{aligned} \gamma_{EH1} &= 38,26 \text{ dB} \\ \gamma_{EH2} &= 37,03 \text{ dB} \end{aligned} \quad (4.42)$$

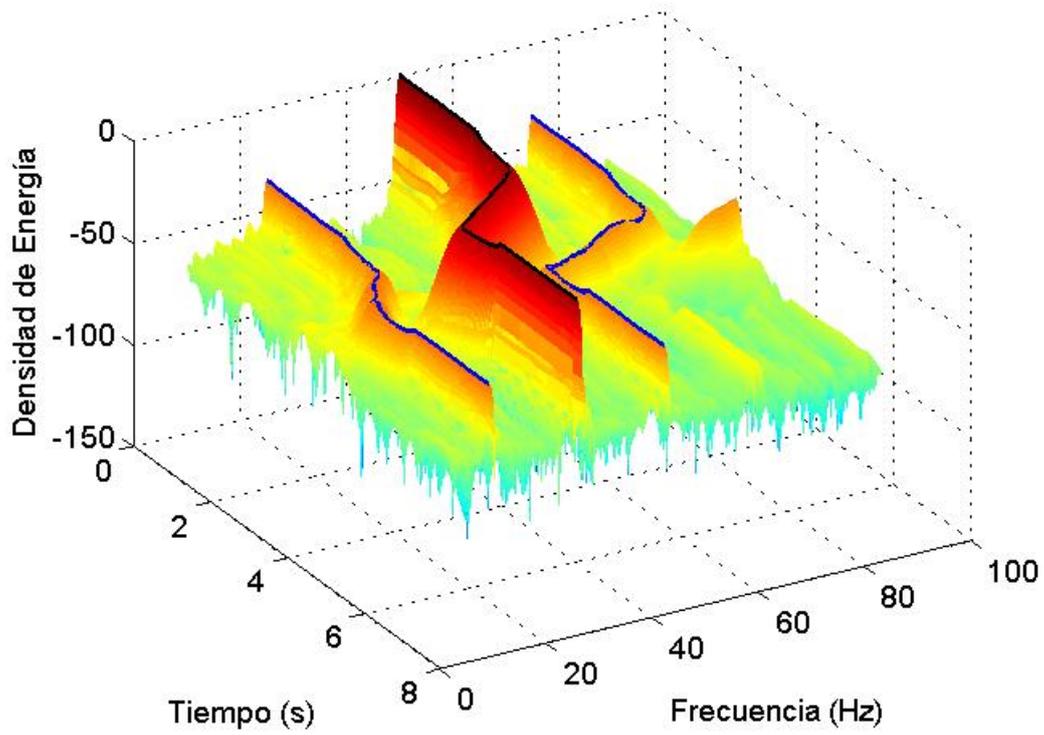


Fig. 4. 63 Primera visualización tridimensional del acople de los resultados de las figuras 4.60 y 4.62: localización en la matriz que describe la densidad de energía los puntos de la evolución temporal de los EH.

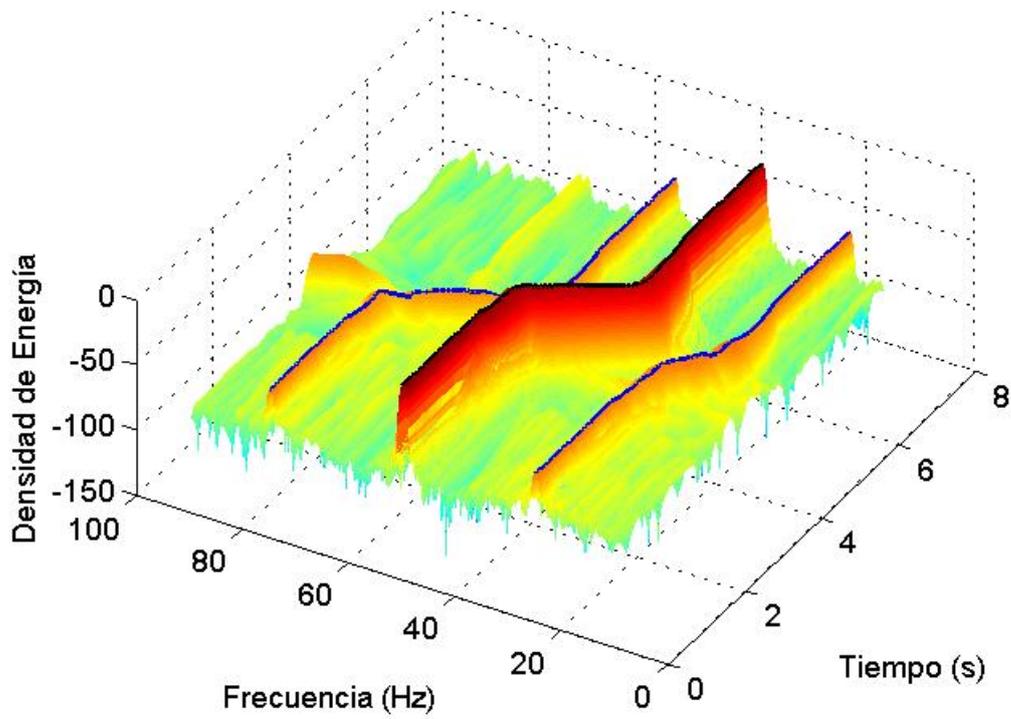


Fig. 4. 64 Segunda visualización tridimensional del acople de los resultados de las figuras 4.60 y 4.62: localización en la matriz que describe la densidad de energía los puntos de la evolución temporal de los EH.

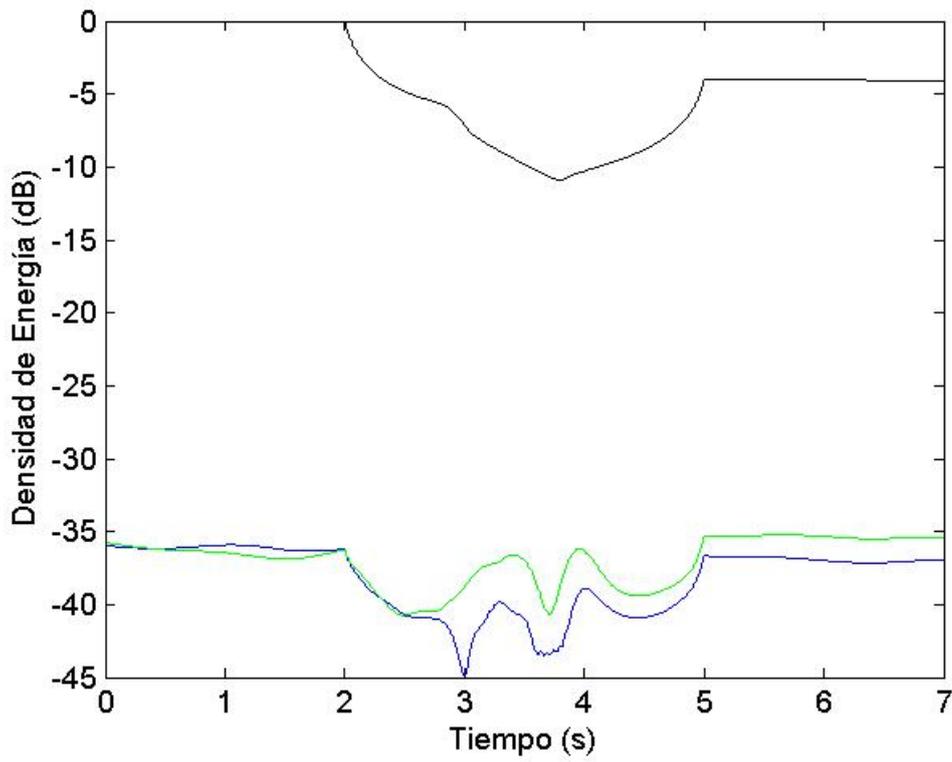


Fig. 4. 65 Evolución temporal de la densidad de energía vinculada al FC (negro) al EH superior (azul) y al EH inferior (verde).

## **4.7.- Guía de aplicación de la metodología de diagnóstico.**

Una vez se ha presentado a lo largo del capítulo 4 el desarrollo de la metodología de diagnóstico propuesta, el presente apartado está dedicado a sintetizar los pasos a dar para aplicarla. Se trata pues de un apartado de enlace entre el presente capítulo en el que se desarrolla la metodología (apoyándose en los capítulos 5 y 6) y los capítulos relativos a resultados experimentales (7, 8 y 9), en los que la metodología se aplica siguiendo la guía aquí esquematizada pero concretando los detalles. Los ensayos realizados en los capítulos 7, 8 y 9 tratan de validar la metodología diagnosticando barras rotas y excentricidad en motores de inducción.

### **1 Captura de la corriente.**

Evidentemente, el primer paso a dar para aplicar la metodología de diagnóstico es capturar la corriente de la máquina eléctrica a diagnosticar. Si resulta factible el diagnóstico, este debe realizarse a través del análisis de una corriente fácilmente accesible. Por ejemplo, en el caso del diagnóstico de un motor de inducción de jaula de ardilla, si es posible el diagnóstico se debe realizar a través de la corriente del estator, pues aunque el análisis de las corrientes del rotor pudiera presentar ventajas, son difícilmente accesibles. En cuanto a la tecnología utilizada, obviamente cuanto mayor sea la precisión de la medida mejores serán los resultados, especialmente acerca de la relación señal-ruido a la hora de captar la presencia de componentes de baja amplitud. En la tesis se han utilizado sistemas distintos en cada uno de los tres capítulos dedicados a resultados experimentales. Como dato significativo, las tarjetas de captura utilizadas son de 12 bits.

El parámetro clave que debe seleccionarse adecuadamente es la frecuencia de muestreo teniendo en cuenta el criterio de Nyquist. Así pues, la frecuencia de muestreo debe ser como mínimo el doble de la máxima frecuencia a analizar. Las averías introducen componentes hasta frecuencias relativamente altas con respecto a la frecuencia de la componente fundamental. Concretamente, la componente de más alta frecuencia detectada en la presente tesis es una componente de rotura de barra que evoluciona desde 450 hasta 350 Hz. Así pues, redondeando superiormente, la máxima frecuencia a analizar son aproximadamente 500 Hz. Según el criterio de Nyquist habría que utilizar una frecuencia de muestreo de 1000 Hz como mínimo. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la corriente en la presente metodología no se utiliza solo para cuantificar la presencia de componentes de avería, también se utiliza para (tal y como se comenta en el siguiente punto), estimar las evoluciones del deslizamiento (si el motor es alimentado directamente desde la red) y de la frecuencia fundamental (si el motor es alimentado mediante un inversor).

La estimación de la evolución de la frecuencia fundamental al alimentar mediante un inversor no resulta problemática en cuanto a la frecuencia de muestreo, pues dicha evolución se encuentra entorno a la frecuencia fundamental de la red, requiriendo frecuencias de muestreo de por ejemplo 500 Hz como máximo, muy inferiores a las impuestas por las componentes a capturar.

No obstante, para estimar la evolución del deslizamiento al alimentar desde la red, hay que capturar la evolución del PSH de mayor amplitud. Usualmente, el PSH de mayor amplitud es  $P_{1-}$ . Su frecuencia en función del deslizamiento viene dada por (2.2) tomando  $k = 1$ ,  $\nu = 1$  y signo negativo:

$$f_{P_{1-}} = \left[ 1 \cdot \frac{R}{p} (1-s) - 1 \right] f_{FC} \quad (4.43)$$

La frecuencia máxima aparece con deslizamiento cero:

$$f_{P_{1-\max}} = \left[ 1 \cdot \frac{R}{p} \cdot (1-0) - 1 \right] f_{FC} = \left( \frac{R}{p} - 1 \right) f_{FC} \quad (4.44)$$

La corriente analizada como ejemplo a lo largo del capítulo es la de un motor de un par de polos  $p = 1$  con 20 ranuras en el rotor  $R = 20$ , alimentado directamente desde la red  $f_{FC} = 50$  Hz. Por tanto:  $f_{P_{1-\max}} = (20/1 - 1) \cdot 50 = 950$  Hz. Aplicando el criterio de Nyquist, la frecuencia de muestreo debe ser aproximadamente como mínimo de 2000 Hz. La mayoría de las corrientes capturadas a lo largo de la tesis se han capturado a 5 kHz, aunque la mitad de la frecuencia de muestreo hubiera sido suficiente.

## 2 Estimación de las evoluciones de las componentes de avería.

La metodología de diagnóstico desarrollada en la presente tesis tiene como principal virtud su capacidad para adaptar el análisis realizado a las características de la corriente capturada, con el objetivo de conseguir una captura completa y óptima de la evolución de las componentes de avería. Para conseguir este objetivo, el primer paso a dar es calcular cuáles serán estas evoluciones en el caso de que la avería esté efectivamente presente en el motor. Tal y como se ha analizado en el apartado 4.1, las frecuencias de las componentes de la corriente dependen de las siguientes variables según el tipo de alimentación (además de depender también en algunos casos de las características de la máquina):

- Motor alimentado directamente desde la red:
  - La frecuencia fundamental: se mantiene prácticamente constante.
  - El deslizamiento: varía y es necesario calcular su evolución.
- Motor alimentado desde un inversor:
  - La frecuencia fundamental: varía y es necesario calcular su evolución.
  - La frecuencia de deslizamiento: se mantiene en valores prácticamente nulos.

En definitiva, una vez capturada la corriente, es necesario obtener la evolución del deslizamiento si el motor está alimentado directamente desde la red u obtener la evolución de la frecuencia fundamental si el motor está alimentado desde un inversor. Con esta información resulta fácil obtener las evoluciones de las componentes de la corriente (especialmente las vinculadas a averías) tal y como se describe en el apartado 4.1: para cada instante muestreado se determina el valor del deslizamiento o de la frecuencia fundamental y con este, utilizando las formulas presentes en el estado del arte, se calculan las frecuencias de las componentes en dicho instante.

## Capítulo 4.

Para obtener la evolución del deslizamiento basta con medir la velocidad. Y para obtener la evolución de la frecuencia fundamental se puede tratar de utilizar la información aportada por el inversor. Sin embargo, como método complementario a la metodología de diagnóstico, y con el objetivo de no utilizar sensores adicionales a parte del sensor de corriente, se propone aplicar los métodos expuestos en el capítulo 5 que permiten obtener estas evoluciones a partir de la corriente estatórica capturada.

### 3 Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.

El siguiente paso es decidir cuál será la zona del plano tiempo-frecuencia analizada. En cuanto al intervalo de tiempo, lo habitual es analizar la duración completa del transitorio capturado, aunque una vez analizada la corriente, puede recortarse la parte final del resultado para evitar el efecto de borde derecho. En cuanto a la banda de frecuencia a analizar, esta debe contener las evoluciones completas de las componentes de avería a capturar. Como estas evoluciones han sido estimadas en el apartado anterior, basta con determinar cuáles son las frecuencias máxima y mínima alcanzadas por las componentes de avería durante el transitorio y tomar una banda de frecuencia con límites superior e inferior ligeramente por encima y por debajo al máximo y mínimo calculados respectivamente.

### 4 Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.

El siguiente paso es el de seleccionar la familia de átomos tiempo-frecuencia con los cuales se correlacionará la corriente capturada. Para conseguir un gráfico de elevada calidad, hay que calcular correlaciones en un conjunto suficientemente grande de puntos distribuidos por la zona del plano a analizar. Básicamente se considera una matriz de puntos estando las filas asociadas a frecuencias y las columnas a tiempos. La matriz tiene tantas columnas como puntos contiene la corriente capturada. El número de filas debe ser suficientemente elevado: para observar la representación de la densidad de energía, resulta suficiente considerar 200 frecuencias uniformemente distribuidas en la banda de frecuencia a analizar; para obtener una cuantificación de máxima calidad hace falta considerar 1000 frecuencias cada 50 Hz analizados, de tal forma que si la banda de frecuencia a analizar es 0-450 Hz harían falta 9000 frecuencias uniformemente distribuidas en dicha banda.

En definitiva se considera una matriz de puntos que cubre la zona del plano a analizar. Para cada punto  $(t_c, f_c)$  se selecciona la Frequency B-Spline  $\psi_{t_c, f_c}$  de parámetro entero  $m = 2$  y centrada en dicho punto:

$$\psi_{t_c, f_c}(t) = \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{f_b} \left[ \text{sinc} \left( f_b \frac{(t - t_c)}{2} \right) \right]^2 e^{i2\pi f_c (t - t_c)} \quad (4.45)$$

Como se puede observar en (4.45), para que una FBS quede perfectamente definida, tan solo queda por asignar un valor a su correspondiente ancho de banda  $f_b \in \mathbb{R}^+$ . A su vez, el ancho de banda queda fijado si se conoce el valor de la pendiente necesaria en dicho punto  $P(t_c, f_c)$ :

$$f_b(t_c, f_c) = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{P(t_c, f_c)} \quad (4.46)$$

Finalmente, la pendiente queda definida aplicando el criterio de la pendiente: la pendiente de la caja de Heisenberg en un punto debe ser igual a la pendiente de la evolución en dicho punto de la componente que se quiere detectar. Sin embargo, dependiendo del punto del plano en el que está centrado el átomo, pueden existir varias posibilidades:

- Si un átomo está centrado en un punto del plano por el cual evoluciona una componente de avería, su pendiente debe ser la que dicta el criterio de la pendiente para captar la evolución de forma óptima.
- Si un átomo está centrado en un punto del plano por el cual evoluciona una componente propia de la máquina sana de elevada amplitud como la componente fundamental, la pendiente debe ser adecuada para filtrarla y que no impida la detección de las componentes de avería.
- Si un átomo está centrado en un punto del plano por el cual evoluciona una componente propia de la máquina sana de baja amplitud o en un punto del plano por el cual no evoluciona ninguna componente, su pendiente tomará un valor intermedio entre las pendientes de puntos cercanos.

En definitiva, primero se asignan las pendientes a los puntos por los cuales evolucionan componentes de avería a capturar o componentes de máquina sana a filtrar y después se asignan pendientes con valores intermedios al resto de puntos para obtener una transición armoniosa.

Este proceso de selección de las pendientes a utilizar a lo largo del plano se visualiza completamente en los capítulos 7, 8 y 9. Más exactamente, siendo éste el criterio general, veremos su concreción de varias formas a lo largo de estos tres capítulos de resultados experimentales. Entre otros aspectos que marcarán las diferencias, se deben tener en cuenta los siguientes comentados ampliamente en el apartado 4.4.3, aunque la causa fundamental de diferencias será la estructura de las corrientes analizadas en cada caso:

- Puntos críticos: si en un punto se cruzan las evoluciones de dos componentes de avería, se debe priorizar la pendiente de una de las dos o fijar un valor intermedio.
- Convolución vs variación de la pendiente con el tiempo: si la variación de la pendiente es total, se renuncia a poder realizar el cálculo de las correlaciones a cada frecuencia mediante un conjunto de convoluciones, aumentando el tiempo de cálculo.

Concretamente, teniendo en cuenta las evoluciones a capturar en el capítulo 7, se ha considerado suficiente utilizar una variación de la pendiente con la frecuencia analizada, pero no con el tiempo, lo cual permite utilizar la fórmula de la convolución ahorrando tiempo de cálculo, pero obteniendo una menor precisión en los resultados. En el capítulo 8, teniendo en cuenta la estructura de las corrientes analizadas se ha considerado la opción inversa: las dimensiones de las cajas varían con el instante de tiempo considerado pero no con la frecuencia analizada (renunciando por tanto a la

## Capítulo 4.

fórmula de convolución), lo cual ha permitido obtener un análisis adecuado a las corrientes pero aumentando el tiempo de cálculo, aunque no tanto como si se considerara una variación también en frecuencia. Finalmente, en el capítulo 9 se ha desplegado todo el potencial: las pendientes varían de forma general a lo largo del plano, cambiando tanto con el tiempo como con la frecuencia, alcanzando en los resultados la máxima precisión que la metodología puede aportar, pero a costa de un tiempo de cálculo más elevado.

De esta forma se pueden ver tres formas de concretar la aplicación de la metodología de diagnóstico, en sentido creciente de complejidad.

### **5 Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.**

Una vez fijada la familia de átomos tiempo-frecuencia, el siguiente paso es calcular la correlación habitual entre los elementos de la familia y la señal a analizar:

$$\langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi_{t_c, f_c}^*(t) dt \quad (4.47)$$

Finalmente, se representa en el plano, como función de densidad de energía, la siguiente función:

$$\rho_h(t_c, f_c) = \left| \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle \right|^2 \quad (4.48)$$

A pesar de tratarse de una función tridimensional, siendo las tres dimensiones: tiempo, frecuencia y densidad de energía, habitualmente se realiza un dibujo en el plano tiempo-frecuencia asignando a cada punto un color dependiendo de la densidad de energía en dicho punto según una determinada escala de colores. En los diagramas trazados en la presente tesis se han utilizado escalas de colores de MatLab del tipo “pink” y “jet” considerando 1024 colores.

Este tipo de dibujo permite visualizar mejor las evoluciones de las componentes que si la densidad de energía se representa tridimensionalmente. Obviamente, mediante este tipo de representación, y aunque se trace la escala de colores utilizada al lado de la figura correspondiente, no resulta fácil identificar cuantitativamente el valor de la densidad de energía en cada punto. Sin embargo, esta información se extrae en el último punto dedicado precisamente a la cuantificación.

### **6 Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.**

Seguidamente, con el objetivo de examinar mejor cuál es la estructura de la corriente analizada, se pueden aplicar las técnicas de mejora de la visualización expuestas en el apartado 4.5. Aunque este paso es optativo, para poder ver las evoluciones de las componentes de baja amplitud resulta en cualquier caso necesario utilizar escala logarítmica. Y esta es la técnica que obligatoriamente se aplica para obtener la cuantificación en el siguiente apartado, pues las otras no permiten una interpretación física de los resultados. En definitiva, se pueden probar algunas de las

siguientes técnicas de mejora de la visualización, escogiendo unas u otras en función de la estructura de la corriente:

- Escala logarítmica.
- Compresión.
- Distintas referencias a cada frecuencia.
- Representación del módulo de la correlación.
- Recorte temporal.
- Distintas escalas de colores.

Una vez aplicadas las técnicas, analizamos los resultados y podemos decidir modificar algunos de los parámetros del análisis, en especial las pendientes utilizadas si queremos por ejemplo filtrar mejor una componente sana o capturar la evolución de alguna componente imprevista. En definitiva, se trata de un paso supuestamente optativo que sirve para afinar el resultado final, pero que en la práctica se lleva a cabo en especial si es la primera vez que se analiza una corriente de un determinado tipo.

## **7 Cuantificación.**

El paso final es el de cuantificar la presencia de las componentes de la avería que se pretende detectar. Para ello se aplica el método expuesto en el anterior apartado. El método básicamente consiste en, para cada componente cuya presencia se pretende cuantificar, localizar en la matriz resultado de aplicar (4.48) la frecuencia y la densidad de energía de la componente para cada instante de tiempo. La frecuencia la aporta la estimación de la evolución de la componente realizada en el segundo punto de la presente guía. A su vez, esto permite localizar el punto de la matriz y obtener la densidad de energía en el instante considerado. En el caso de que el motor esté alimentado mediante un inversor, como se ha explicado el cálculo se complica calculando un máximo local alrededor de la estimación para suplir el haber considerado frecuencia de deslizamiento nula. La media de las densidades de energía a lo largo del tiempo y en escala logarítmica es el índice propuesto para cuantificar la presencia de la componente. Una vez se obtiene el índice para cada posible componente de avería se puede determinar si la avería está presente en la máquina.



## **5.- Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento a partir de la corriente.**

Para que se pueda aplicar la metodología presentada en el capítulo 4 tal y como ha sido descrita, se precisa estimar la evolución de los armónicos presentes en la señal, y en especial, con respecto a las componentes vinculadas a fallos, cuál debería ser su evolución en el caso de estar presentes en la corriente.

¿Para qué requiere la metodología estimar las evoluciones de las componentes de la corriente? En el capítulo anterior se mostró cómo, conociendo cuáles deben ser las evoluciones de las componentes vinculadas a fallos que se pretenden detectar, se fijan los parámetros de los átomos tiempo-frecuencia a correlacionar con la corriente a analizar para obtener de forma optimizada dichas evoluciones, tal y como dicta el criterio de la pendiente. Además, al conocer cuáles deben ser las evoluciones, se puede plantear un método de cuantificación automático, pues se sabe de antemano los puntos del plano tiempo-frecuencia en los que se debe medir la densidad de energía.

¿Hay alguna forma de estimar dichas evoluciones evitando el uso de sensores a parte del utilizado para medir la corriente? En el apartado 4.1 se describió como, si se conocen las evoluciones temporales de la frecuencia fundamental y del deslizamiento, entonces se pueden utilizar las fórmulas presentes en el estado del arte para trazar las evoluciones de las componentes de la corriente estatórica de un motor de inducción. Más concretamente, si el motor de inducción es alimentado mediante un inversor, es necesario conocer la evolución de la frecuencia fundamental. Si por otra parte el motor de inducción es alimentado directamente desde la red, entonces es necesario conocer la evolución del deslizamiento.

Por una parte, la evolución de la frecuencia fundamental se puede intentar obtener mediante una estimación proporcionada por el inversor. Por otra parte, la evolución del deslizamiento puede obtenerse midiendo la velocidad. Sin embargo, para evitar el uso de sensores adicionales, así como para obtener las evoluciones de forma precisa, en los dos puntos que configuran el capítulo se presentan dos métodos para obtener dichas evoluciones utilizando tan solo la medida de la corriente, los cuales han sido desarrollados como parte del trabajo realizado en la presente tesis, estando ambos basados en el análisis de la corriente mediante la STFT. Se verá cómo las evoluciones obtenidas son excelentes, mejores incluso que las obtenidas mediante los sensores utilizados habitualmente. Además, el uso de los dos métodos presentados permite afirmar que, para aplicar la metodología de diagnóstico, tan solo hace falta medir una corriente transitoria estatórica.

Sin embargo, cabe precisar que la metodología es perfectamente aplicable aun sin el uso de los dos métodos aquí presentados, con el único inconveniente de que en ese caso es necesario medir la velocidad (si la alimentación se realiza directamente desde la red) o la evolución de la frecuencia fundamental (si la alimentación se realiza desde un inversor).

## Capítulo 5.

### **5.1.- Obtención de la evolución de la frecuencia fundamental.**

5.1.1.- Cálculo de la STFT.

5.1.2.- Cálculo de máximos.

### **5.2.- Obtención de la evolución del deslizamiento.**

5.2.1.- Cálculo de la STFT.

5.2.2.- Análisis de la primera parte del arranque.

5.2.3.- Análisis del resto del transitorio.

5.2.4.- Evolución temporal de la frecuencia del PSH.

5.2.5.- Cálculo del deslizamiento.

5.2.6.- Evoluciones temporales de las componentes de la corriente.

5.2.7.- Análisis de una corriente más compleja.

## **5.1.- Obtención de la evolución de la frecuencia fundamental.**

La obtención de la evolución de la frecuencia de la FC tiene sentido cuando el motor de inducción es alimentado mediante un inversor, en cuyo caso varía en función de la tensión proporcionada por el inversor, la cual depende a su vez de la programación implementada por el usuario según sus necesidades. Resulta interesante conocer la evolución de la FC pues, tal y como se analizó en el apartado 4.1, esto nos permite conocer las frecuencias de las componentes de falta y en particular de los EH, si suponemos despreciable la frecuencia de deslizamiento (aproximación razonable). En caso de no despreciar la frecuencia de deslizamiento, debemos conocer además la evolución del deslizamiento, cuyo método de obtención se explica en el siguiente apartado. Obviamente, en el caso de alimentar el motor directamente desde la red, este cálculo no es necesario pues la frecuencia de la FC es constante e igual a la de la red.

### **5.1.1.- Cálculo de la STFT.**

El punto de partida para la obtención de la evolución de la frecuencia fundamental es el resultado de calcular, en un conjunto de puntos del plano tiempo-frecuencia, una de las transformadas expuestas en el capítulo 3. Dicho resultado es una matriz, donde cada fila está asociada a una frecuencia analizada y cada columna está asociada a un tiempo analizado. Por tanto, cada elemento de la matriz está asociado a un punto del plano tiempo-frecuencia, donde la fila indica la frecuencia y la columna el tiempo. La única condición que se debe cumplir para poder aplicar con éxito el método es que la transformada debe analizar la totalidad del transitorio (en cuanto a los instantes de tiempo) y una banda de frecuencia tal que comprenda la evolución de la FC en su totalidad (en cuanto a las frecuencias analizadas).

Veámoslo con un ejemplo en el que se analiza la corriente estática transitoria de un motor de inducción con excentricidad alimentado mediante un inversor programado de tal forma que durante el transitorio la FC tiene en un inicio una frecuencia de 50 Hz, para después disminuir, de forma aproximadamente lineal, hasta aproximadamente 33 Hz. Los detalles del ensayo y características tanto del motor como del inversor pueden encontrarse en 8.1, tratándose concretamente de la tercera corriente mostrada en la Fig. 8.2.

En primer lugar, se utiliza la STFT pues es la transformada más simple, cuyos resultados son suficientemente buenos para el propósito que aquí se tiene. El resultado de la STFT es una matriz de tantas filas como frecuencias analizadas y tantas columnas como instantes de tiempo analizados. Si representamos dicha matriz en 2D, asignando a cada valor de la matriz un color según una determinada escala, obtenemos el gráfico que se muestra en la Fig. 5.1.

La STFT ha sido calculada para cada instante de tiempo muestreado (con una frecuencia de muestreo de 1000 Hz), y para un total de 1000 frecuencias comprendidas entre 10 y 90 Hz. Para realizar los cálculos se han utilizado FBS de parámetro entero  $m = 2$ . El criterio para fijar los valores de los parámetros de las FBS se ha analizado en el capítulo 4. Resumiendo, hay que fijar tres parámetros. En primer lugar, la frecuencia

central  $f_c$  de la FBS debe ser igual a la frecuencia analizada. En segundo lugar, la FBS debe trasladarse temporalmente desde el origen hasta el instante a analizar. Finalmente, hay que aplicar el criterio de la pendiente para fijar el ancho de banda  $f_b$ . Concretamente, para captar adecuadamente la evolución de la FC durante su decremento, la pendiente de las cajas debe ser igual a la de la componente fundamental en dicho tramo:  $P = 17 \text{ Hz/s}$ . Aplicando (4.23) podemos calcular el ancho de banda:  $f_b = \sqrt{2\sqrt{30}/\pi}\sqrt{P} = \sqrt{2\sqrt{30}/\pi}\sqrt{17} \approx 7.7 \text{ Hz}$ . Finalmente, la densidad de energía calculada en cada punto se ha representado en 2D utilizando una escala de colores tipo 'jet' dotada de 1024 colores. Aunque para capturar la evolución de la FC no es necesario, se ha utilizado escala logarítmica para reducir las diferencias entre la amplitud de la FC y la de los EH cuyas evoluciones se pueden observar arriba y abajo de la FC de la FC.

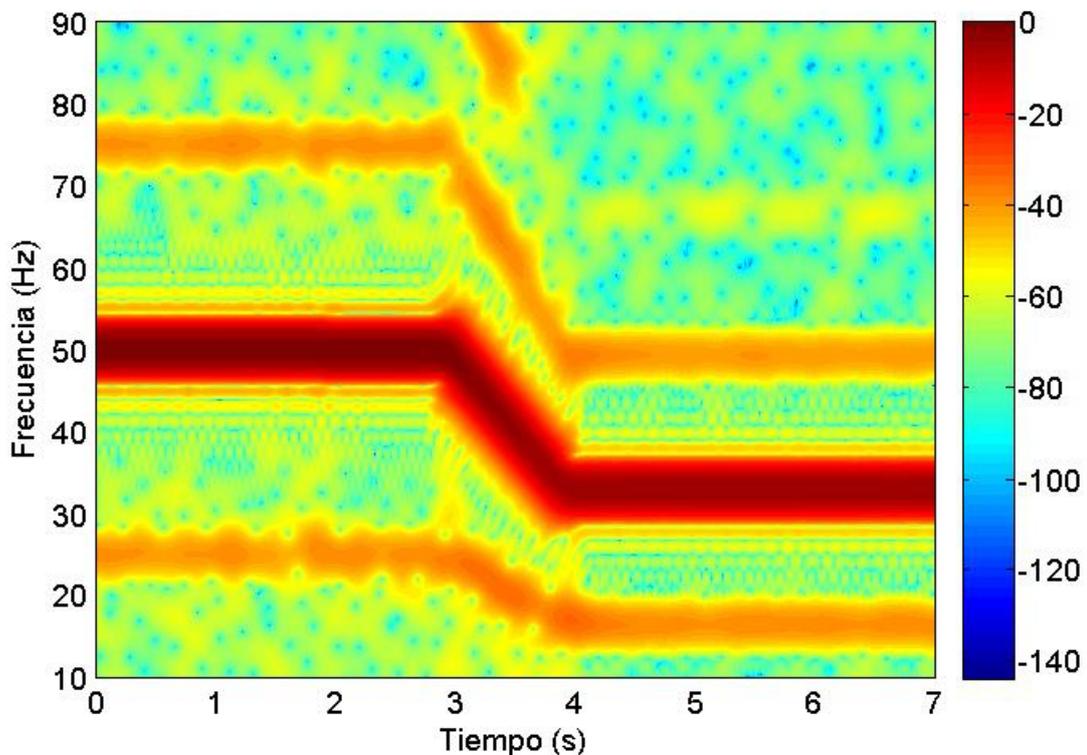


Fig. 5. 1 Densidad de energía tiempo-frecuencia, calculada usando la STFT, de la corriente de un motor de inducción alimentado mediante un inversor, durante un descenso de la frecuencia asignada de 50 a 33 Hz.

### 5.1.2.- Cálculo de máximos.

La FC es la componente de la corriente estática de mayor amplitud, con independencia de las condiciones de funcionamiento. En otras palabras, para cada instante, la mayor densidad de energía aparecerá a la frecuencia a la que se encuentre la FC. Es por ello que, si para cada instante calculamos el máximo de la columna correspondiente a dicho instante, estará vinculado a una fila que tendrá asociada una frecuencia que será precisamente la de la FC.

Concretamos con el ejemplo. Cada instante tiene asociada una columna de la matriz resultado de calcular la STFT. Calculamos el máximo de cada vector columna.

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

Obtenemos el valor de dicho máximo y la fila en la que se encuentra. Calculamos la frecuencia asociada a dicha fila, la cual se interpreta como la frecuencia de la FC en el instante de la columna considerada. Si representamos dicha frecuencia en función del tiempo de color azul obtenemos el resultado mostrado en la Fig. 5.2. Concluyendo: utilizando la STFT, y mediante un método simple y rápido, hemos obtenido el valor instantáneo de la frecuencia de la FC. En otras palabras, hemos obtenido su evolución.

Por último, se utiliza la evolución temporal de la frecuencia fundamental, tal y como se explicó en el apartado 4.1, para calcular las evoluciones temporales de las distintas componentes presentes en la corriente analizada. En este caso interesa obtener las evoluciones de las componentes provocadas por la excentricidad, los EH, las cuales se muestran junto a la de la frecuencia fundamental trazadas de color rojo en la Fig. 5.2.

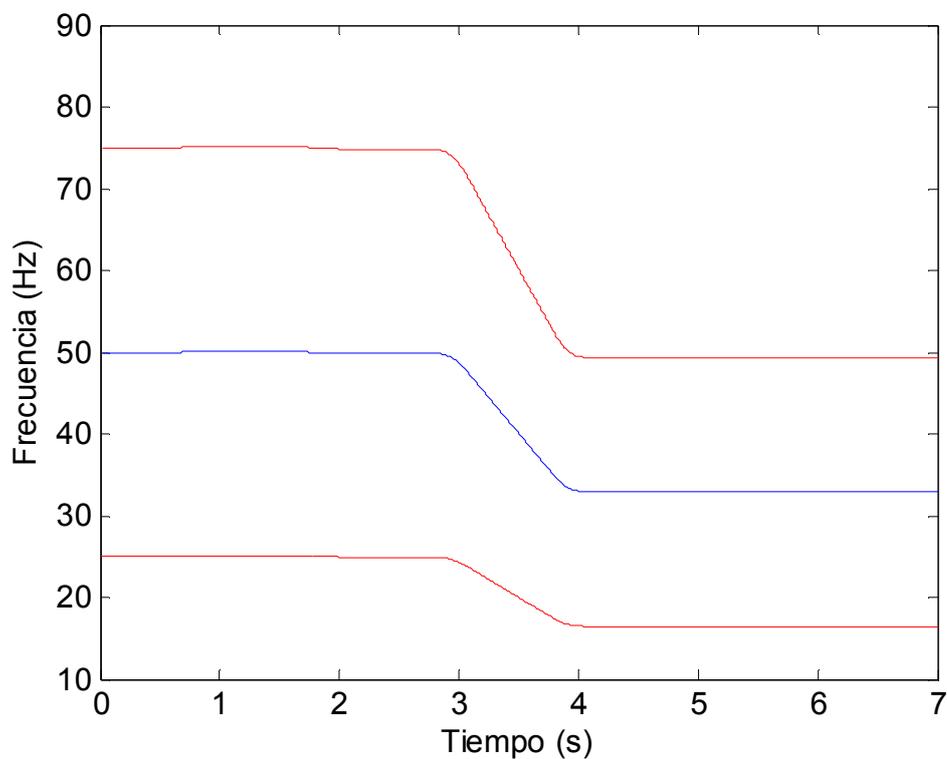


Fig. 5. 2 Resultado: estimación de la evolución temporal de las frecuencias de la FC (azul) y los EH (rojo).

## 5.2.- Obtención de la evolución del deslizamiento.

El método presentado para la estimación de la evolución del deslizamiento está inspirado en trabajos anteriores ampliamente comentados en el estado del arte [62], [57], [63]. Estos métodos básicamente consisten en medir la corriente estática del motor de inducción, calcular la distribución de su energía en el plano mediante una transformada tiempo-frecuencia (STFT, WT, WVD, etcétera) y diseñar un algoritmo que permita obtener la evolución del PSH de mayor amplitud. Si se conoce la evolución temporal de la frecuencia de un PSH, entonces se puede calcular fácilmente la evolución del deslizamiento así como la velocidad. Al contrario de otros estimadores de la velocidad basados en modelos, estos métodos usualmente no necesitan estimar ningún parámetro de la máquina ni construir ningún modelo. Además, solo precisan la medida de una única corriente.

El método desarrollado en la presente tesis está basado en el cálculo del espectrograma utilizando la STFT, la cual obtiene una buena resolución sin introducir términos cruzados como la WVD [62], ni deja zonas vacías de información como los algoritmos de cálculo de crestas aplicados a la STFT y la WT [57]. Teniendo en cuenta que, a diferencia de los métodos anteriores su objetivo final no es estimar la velocidad sino estimar las evoluciones exactas de las componentes de avería, el método desarrollado debe ser capaz de detectar la evolución del PSH incluso en presencia de averías y con elevada precisión. Además, un mayor tiempo de cálculo no resulta problemático pues el objetivo no es obtener la velocidad en tiempo real.

En primer lugar, a diferencia de los trabajos anteriores citados, en el presente método se explica detalladamente el algoritmo diseñado que permite la detección automática de la evolución del PSH, elemento central obviado en los trabajos anteriores. En segundo lugar, la calidad de los resultados aumenta significativamente y la evolución del PSH se obtiene con un nivel de precisión muy elevado, lo cual es imprescindible para poder utilizar el resultado localizando las componentes de avería a lo largo del plano. En tercer lugar, el algoritmo no presenta zonas donde la evolución no es estimada, consiguiendo capturar al PSH a lo largo de todo el transitorio. En cuarto lugar, no precisa utilizar modelos de motores para completar la estimación de la evolución, ni necesita aplicar filtros previamente al cálculo de la STFT, los cuales pueden eliminar información importante en determinadas zonas del plano. Finalmente, el algoritmo diseñado consigue capturar la evolución del PSH incluso en los puntos de cruce con componentes de amplitud semejante, como los WH de orden 3 y 5 o las componentes introducidas por averías (barras rotas y excentricidad), lo cual es imprescindible en el contexto de la tesis.

Su mayor inconveniente es que, para afinar la captura del PSH se supone una evolución lineal al principio del arranque, lo cual no es siempre cierto, debiendo ajustarse la aproximación utilizando polinomios de un mayor orden al de una recta en el caso de analizar motores con arranques más complejos. Además, existe el inconveniente inherente a este tipo de métodos analizado en [64], donde se indica cómo en motores con determinadas combinaciones de las ranuras de estator y rotor, los PSH tienen una menor presencia en la corriente, dificultando su detección. Finalmente, el método ha sido desarrollado para ser aplicado sobre corrientes estáticas de motores de inducción alimentados directamente desde la red.

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

### 5.2.1.- Cálculo de la STFT.

El punto de partida para la obtención de la evolución del deslizamiento es el resultado de calcular una de las transformadas expuestas en el capítulo 3 en cada uno de los instantes muestreados y para un total de 1000 frecuencias comprendidas en la banda de frecuencia cubierta por el  $P1-$ . Dicho resultado es una matriz donde cada elemento está asociado a un punto del plano tiempo-frecuencia analizado, siendo la fila indicativa de la frecuencia y la columna indicativa del tiempo.

Para aplicar con éxito el método, la transformada debe analizar la totalidad del transitorio (en cuanto a instantes de tiempo) y una banda de frecuencia tal que comprenda la evolución del  $P1-$  en su totalidad (en cuanto a frecuencias analizadas). Se debe tener en cuenta que  $P1-$  es el PSH de mayor amplitud. La frecuencia del  $P1-$  en función del deslizamiento viene dada por (2.2) tomando  $k=1$ ,  $\nu=1$  y signo negativo:

$$f_{P1-} = \left[ 1 \cdot \frac{R}{p} (1-s) - 1 \right] f_{FC} \quad (5.1)$$

La frecuencia máxima aparece con deslizamiento cero y la frecuencia mínima aparece con deslizamiento unitario:

$$f_{P1-\max} = \left( \frac{R}{p} - 1 \right) f_{FC} \quad f_{P1-\min} = -f_{FC} \quad (5.2)$$

Como en el espectro se representan las frecuencias previstas en (5.2) en valor absoluto, la frecuencia mínima que como se ve es negativa, aparece en el espectro como positiva, pasando a ser el valor mínimo  $f_{P1-\min} = 0$  Hz. En definitiva, la banda de frecuencia a analizar es  $\{0, (R/p - 1) f_{FC}\}$ . Por razones que se expondrán más adelante, el análisis se restringe a  $\{f_{FC}, (R/p - 1) f_{FC}\}$ . La corriente analizada como ejemplo, para presentar los resultados en paralelo a la explicación del método, es la del arranque de un motor de un par de polos  $p=1$  con 20 ranuras en el rotor  $R=20$ , alimentado directamente desde la red  $f_{FC} = 50$  Hz. Por tanto:  $f_{P1-\max} = (20/1 - 1) \cdot 50 = 950$  Hz, siendo la banda de frecuencia a analizar en el ejemplo  $\{50, 950\}$ .

Resulta suficiente para cumplir con el objetivo del método utilizar la transformada más simple, la STFT, aunque impida capturar de forma óptima la evolución del PSH (pues en este caso la pendiente de las cajas es constante a lo largo del plano). El primer paso consiste pues en calcular la STFT de la corriente estatórica de un motor de inducción alimentado directamente desde la red, analizando la banda de frecuencia  $\{50, 950\}$ , obteniendo como resultado una matriz con tantas filas y columnas como frecuencias e instantes de tiempo analizados respectivamente. La pendiente óptima de los átomos necesaria para analizar el arranque es:  $P = 1000/6 \approx 167$  Hz/s, mientras que la necesaria para analizar la zona próxima al permanente es:  $P = 0.25$  Hz/s. Finalmente se toma como valor de compromiso:  $P = 17$  Hz/s. Los

átomos utilizados son FBS. Si representamos dicha matriz en 2D asignando a cada valor de la matriz un color según la escala tipo 'pink' dotada de 1024 colores y aplicando escala logarítmica, al analizar la corriente tomada como ejemplo obtenemos el gráfico que se muestra en la Fig. 5.3.

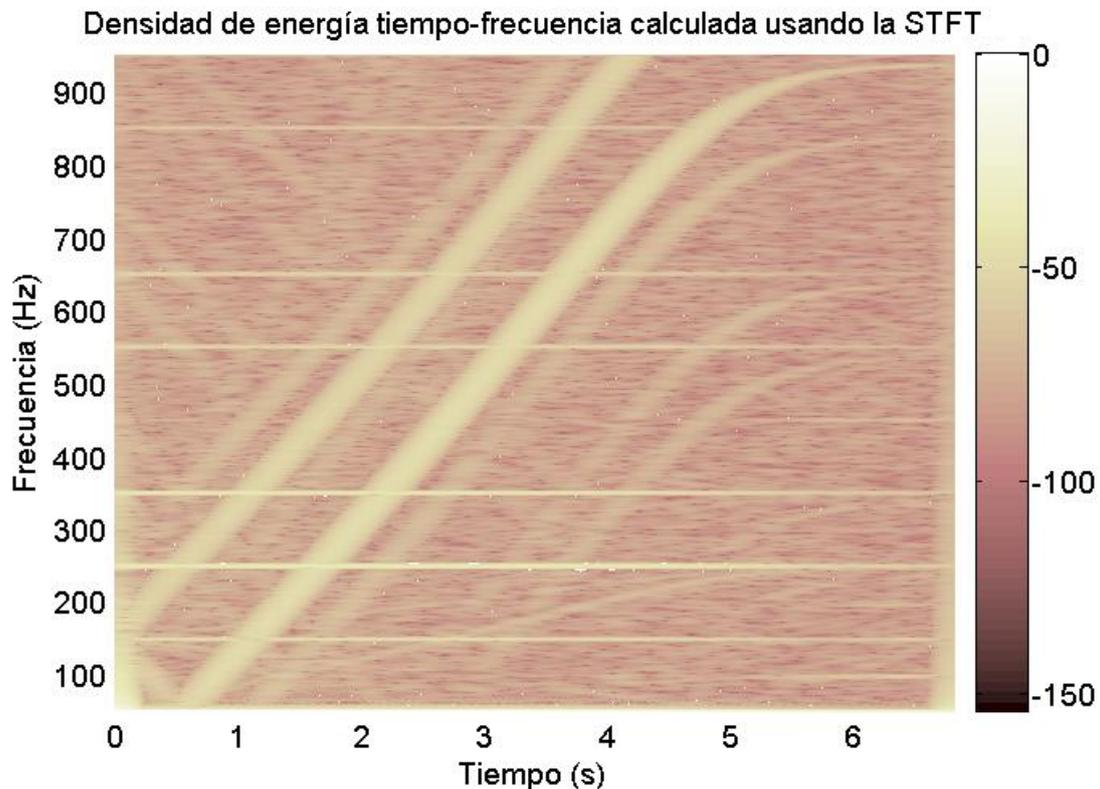


Fig. 5.3 Densidad de energía tiempo-frecuencia, calculada usando la STFT, de la corriente de arranque de un motor de inducción alimentado directamente desde la red.

### 5.2.2.- Análisis de la primera parte del arranque.

#### Hipótesis

Para realizar el análisis se ha tenido en cuenta que, todos los motores de inducción alimentados directamente desde la red analizados en la presente tesis, presentan evoluciones temporales de las frecuencias de los PSH durante la primera parte del arranque aproximadamente lineales, tal y como se observa en la Fig. 5.3. Esto sucede cuando el par acelerador es aproximadamente constante. Admitiendo que para deslizamientos bajos la característica de par es bastante horizontal en muchos motores industriales, la condición se cumple si el par resistente es para deslizamientos bajos también relativamente horizontal, o en caso contrario si no tiene una excesiva influencia en el par acelerador total.

Este caso, siendo el habitual, no es el único. Puede suceder que la evolución de los PSH se aparte de un comportamiento rectilíneo, si se tiene una combinación de par motor y par resistente de características más complejas.

Como se verá a lo largo de la exposición, el método de obtención del deslizamiento desarrollado tiene en cuenta el carácter aproximadamente rectilíneo en la primera parte del arranque, aunque no es del todo imprescindible que se cumpla

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

estrictamente. Aun así, no se puede afirmar que el método funcione con todo tipo de arranques, quedando fuera de los objetivos el adaptar el método para su buen funcionamiento bajo cualquier circunstancia.

### Zona del plano a analizar

Así pues, en primer lugar se intenta obtener la evolución del  $P1$  – durante esta primera parte del transitorio en la que las evoluciones de los PSH son aproximadamente rectilíneas. Para ello se considera la matriz obtenida mediante la STFT, limitando la frecuencia considerada hasta un valor bastante inferior a aquel para el cual se pierde el carácter lineal (en el ejemplo, 575 Hz, aunque funcionaría adecuadamente de forma general bajando incluso hasta 400 Hz). También se desprecian los 0.25 primeros y últimos segundos del análisis, con el objetivo de eliminar la presencia de los efectos de borde (EB) que este tipo de transformadas introducen y que incrementan la densidad de energía en los primeros y últimos instantes analizados, sin que esto indique la presencia de una componente de la señal analizada. Además, en el caso de las corrientes estáticas de arranque, en los primeros instantes se produce el transitorio electromagnético (TEM), el cual hace incrementar la energía de la señal muy al principio del arranque, sumándose al EB. En la Fig. 5.4 se muestra, enmarcada en verde, la zona del plano considerada en esta primera parte del método.

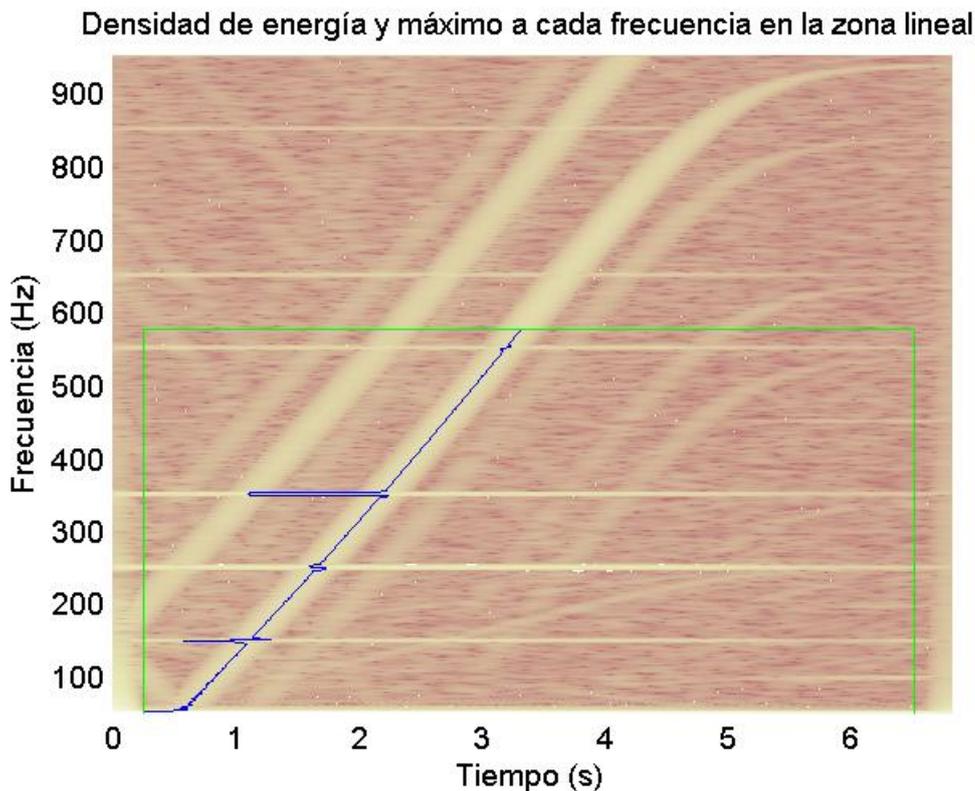


Fig. 5. 4 Densidad de energía, zona a analizar en primer lugar enmarcada en verde y máximos a cada frecuencia en esta primera zona trazados en azul.

### Cálculo de máximos globales

El siguiente paso es el de calcular el máximo a cada frecuencia, considerando tan solo la zona del plano enmarcada en verde. Es decir, tomando la submatriz resultante de la STFT después de despreciar las partes indicadas en la figura, se calcula

## Capítulo 5.

el máximo de cada vector fila, así como el instante en el que se produce dicho máximo. En esta zona del plano, en función de la frecuencia considerada, el máximo puede aparecer asociado a distintas componentes: un WH, un PSH ( $P1-$ ) o un armónico asociado a un fallo como una rotura de barra. Como al alimentar directamente desde la red los WH se encuentran localizados en determinadas frecuencias, y los armónicos de fallo de amplitud realmente elevada se concentran la mayoría por debajo de los 250 Hz, los máximos globales calculados estarán asociados, en la mayoría de las frecuencias al PSH de mayor amplitud: el  $P1-$ . La corriente analizada como ejemplo pertenece a un motor sano. Así pues, exceptuando los cruces con los WH, obtenemos una primera aproximación a la evolución de la frecuencia del  $P1-$  en la llamada zona lineal, tal y como se observa, trazada en azul, en la Fig. 5.4. En un segundo ejemplo analizado al final del apartado, se puede ver la influencia que tiene sobre el método la presencia de armónicos de elevada amplitud asociados a fallos.

### Cálculo de máximos locales

Con el objetivo de eliminar los puntos en los que los máximos calculados no están asociados al  $P1-$ , el siguiente paso consiste en realizar un cálculo de máximos, pero en vez de tratarse de máximos globales en los que se considera el vector fila en su totalidad, se trata de máximos locales en los que se considera un vector fila centrado en un punto cercano a la evolución del PSH. Así pues, el primer paso es el de definir dicho punto. Para ello se tiene en cuenta el carácter aproximadamente rectilíneo de la evolución del PSH en esta primera parte del transitorio, y se calcula una recta que se aproxime a esta evolución. Si la evolución se aparta de un comportamiento lineal, habría que sustituir la aproximación a una recta por la aproximación a un polinomio más complejo, pero este trabajo queda fuera del alcance de la tesis.

Para obtener la recta de aproximación, no se puede considerar en su totalidad la primera aproximación a la evolución del  $P1-$  (trazada en la Fig. 5.5), debido a que existen puntos que se alejan de ella por estar vinculados a otras componentes. Por tanto, se considera la zona comprendida entre 275 y 450 Hz, saltando 10 Hz alrededor de WH7 (350 Hz). Así nos aseguramos que no habrá interferencias de WH (pues en dicha banda ya no hay ningún otro aparte del WH7), ni de componentes vinculados a fallos (los cuales se sitúan más abajo).

Los intervalos de frecuencia utilizados para calcular la recta de aproximación se muestran en la Fig. 5.6 en verde, y la recta obtenida con el criterio de los mínimos cuadrados se muestra en rojo. Se puede observar cómo la recta se aproxima muy bien a la parte de la evolución entre los límites marcados en verde, distanciándose por arriba y por abajo del límite superior e inferior respectivamente. Esto muestra que aunque la evolución del  $P1-$  parece rectilínea, no lo es totalmente.

En definitiva, los puntos de partida para calcular máximos locales serán los de la primera aproximación a la evolución del  $P1-$  obtenida (azul) o los de la recta de aproximación (rojo) para los casos en los que dicha primera aproximación se distancien más de un 5% de la recta. Estos centros de los vectores fila locales a definir se muestran en negro en la Fig. 5.7.

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

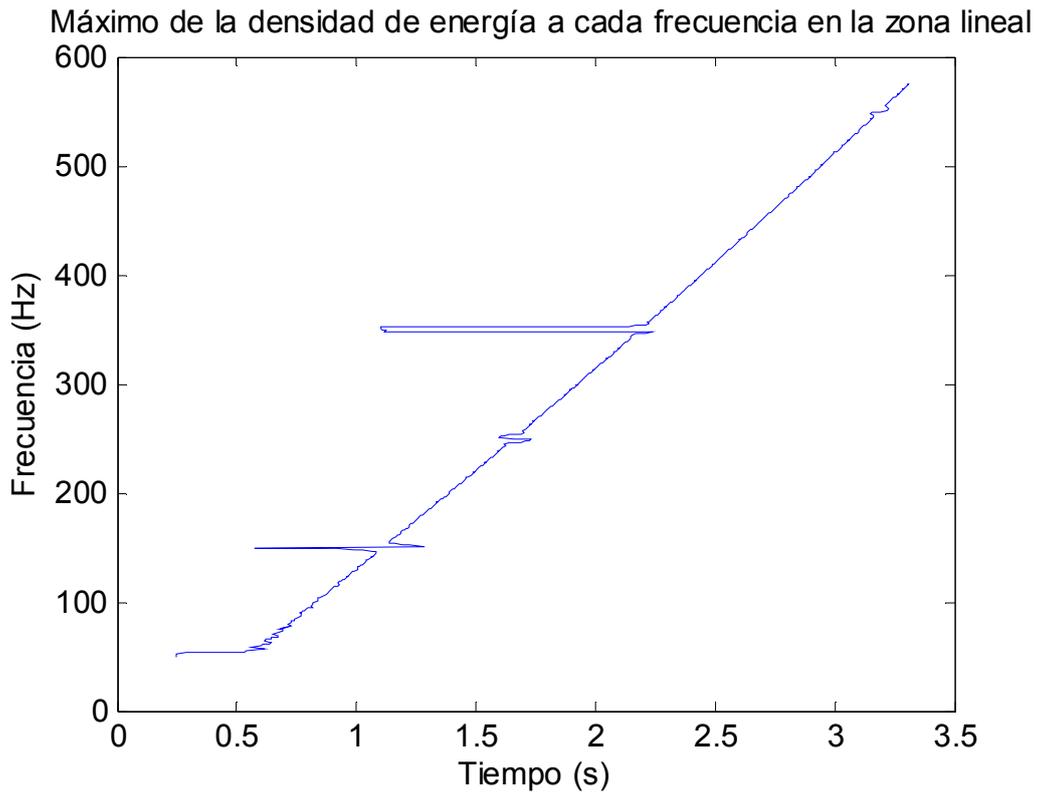


Fig. 5. 5 Primera aproximación a la evolución del armónico  $P1-$ , calculada como los máximos de la densidad de energía a cada frecuencia en la zona lineal.

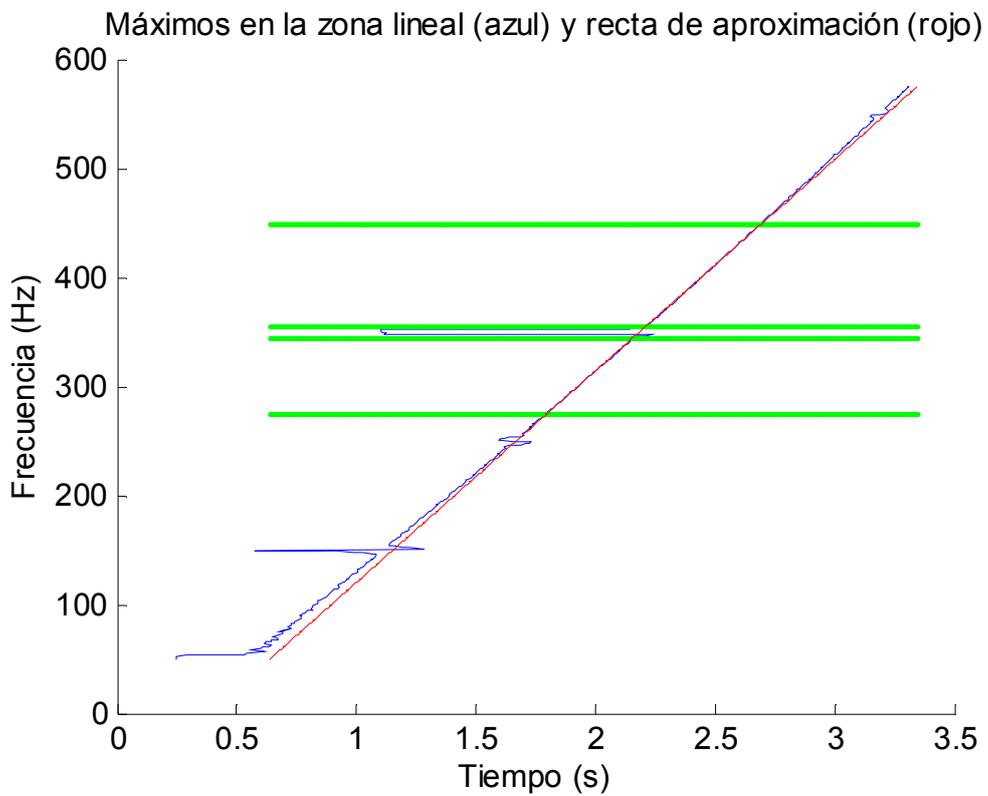


Fig. 5. 6 Obtención de la recta de aproximación por mínimos cuadrados (rojo) a partir de la primera aproximación a la evolución de  $P1-$  (azul) limitada a las dos bandas indicadas (verde).

Ya tan solo queda definir un intervalo centrado en cada punto de la evolución en negro de la Fig. 5.7. El vector fila local tendrá una amplitud de un 10% de la duración del arranque. Así pues, para este arranque que dura 6 segundos, el intervalo mide 0.6 segundos. Un intervalo tan grande permite despreciar sobradamente las diferencias que pueden aparecer con respecto a la evolución lineal ideal, lo cual podría introducir errores si en determinadas zonas la trayectoria real del  $P1-$  está muy lejos de la recta de aproximación. Es decir, que si al corregir la evolución inicial (azul) hay puntos que a pesar de ser inicialmente correctos, por desviarse más de un 5% de la recta de aproximación (rojo) se corrigen tomándose como correcto el punto correspondiente de la recta, entonces al tomar un intervalo suficientemente amplio, aunque en un inicio esté centrado en dicho punto de la recta, abarcará la evolución del  $P1-$ , quedándose con el punto relativo a esta última al calcular el máximo local. Pero por otra parte, un intervalo amplio también introduce más errores pues abarca una zona más amplia aumentando la posibilidad de cruzarse con otros armónicos importantes al calcular los máximos locales, lo cual no sucedería al considerar un intervalo más pequeño. Aun así, tal y como se verá a lo largo de todos los resultados presentados, los errores que aparecen por interacción con otros armónicos como consecuencia de tomar un intervalo local grande son mínimos, y se consigue, tal y como se ha explicado, que no resulte problemático un desviamiento significativo de la supuesta característica lineal en determinados puntos.

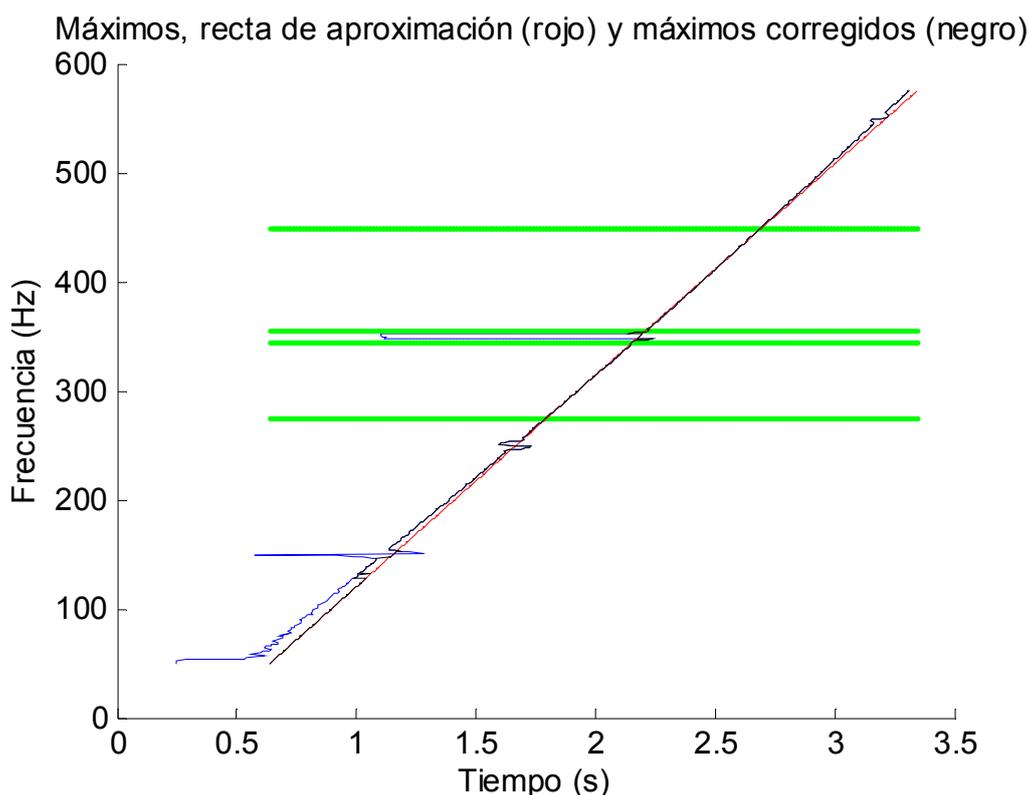


Fig. 5.7 Primera aproximación a la evolución de  $P1-$  (azul), recta de aproximación (rojo), límites para su cálculo (verde) y centros para el cálculo de máximos locales (negro).

La operación de cálculo de máximos locales se realiza tan solo para frecuencias inferiores a la frecuencia del WH5, que es la banda de frecuencia donde pueden haber aparecido errores (aunque nada impediría extenderlo a toda la banda de frecuencia que abarca esta primera parte de la evolución). Además, como la banda comprendida entre las frecuencias del FC y el WH3 puede ser especialmente conflictiva, pudiendo aparecer alrededor del  $P1-$  numerosos armónicos de amplitud elevada a los cuales se les asigne

erróneamente el resultado de calcular el máximo local, aprovechando que la trayectoria del  $P3+$  se encuentra para cada instante 200 Hz por encima de la del  $P1-$ , se calculan los máximos locales alrededor de éste segundo PSH subiendo simplemente la frecuencia a analizar en cada instante 200 Hz con respecto al valor de partida de la trayectoria de la Fig. 5.7 en negro (idéntica a la azul en la Fig. 5.8). Una vez calculado el máximo local, perteneciente a la evolución del  $P3+$ , se asocia a una frecuencia 200 Hz menor. En la Fig. 5.8 se muestra la evolución después de corregir los puntos que se distancian un 5% de la recta de aproximación (azul), así como los máximos locales (rojo) calculados estableciendo vectores fila a cada frecuencia centrados en la primera aproximación corregida (azul). Al superponer la evolución estimada definitiva del  $P1-$  (en rojo) sobre el resultado de la STFT, se puede observar cómo, salvo pequeñas diferencias en los cruces con los WH (FC, WH3, WH5 y WH7), las cuales se corregirán posteriormente, el resultado es muy bueno.

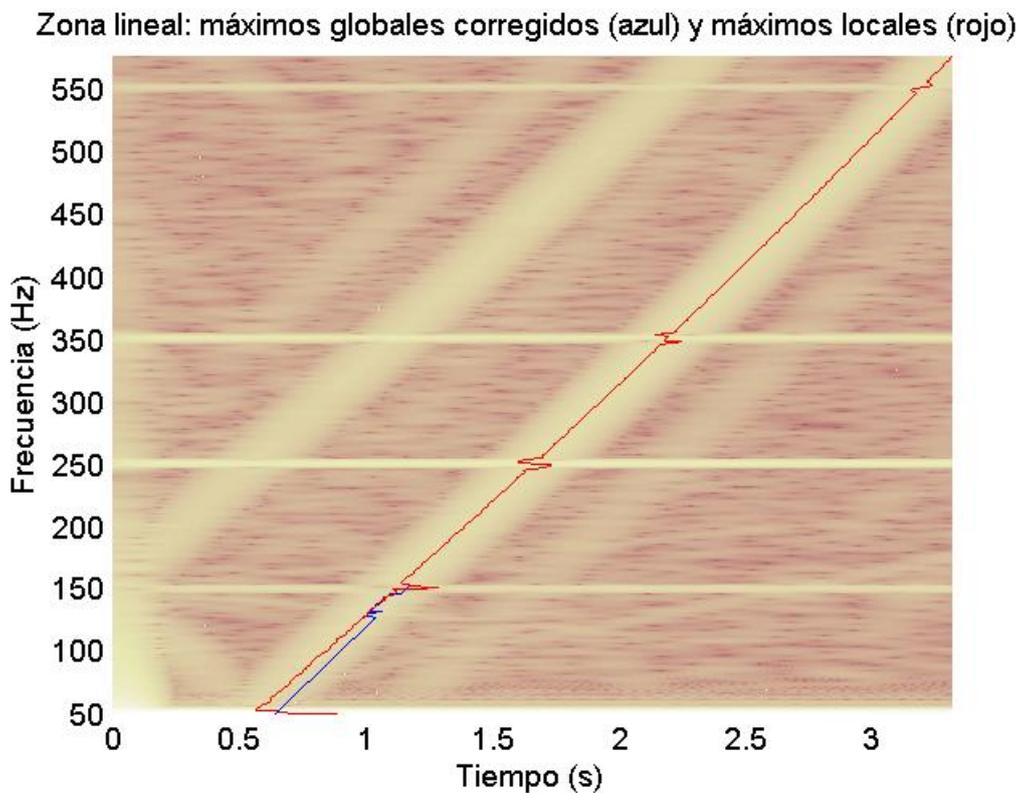


Fig. 5. 8 Primera aproximación a la evolución corregida mediante la recta de arproximación (azul) y aproximación definitiva obtenida mediante la corrección calculando máximos locales (rojo).

### 5.2.3.- Análisis del resto del transitorio.

Una vez obtenida la evolución del  $P1-$  en esta primera parte, el análisis a realizar del resto del transitorio (ya sea solo hasta el final del arranque como en el presente ejemplo o añadiendo además oscilaciones de carga como en el siguiente ejemplo más complejo), contiene tres pasos: definir la submatriz a analizar, realizar un primer cálculo de la evolución del  $P1-$  obteniendo máximos locales en cada instante y realizar un segundo cálculo más refinado a partir del primero obteniendo máximos locales en cada frecuencia.

### Zona del plano a analizar

La nueva submatriz sobre la que se trabaja queda definida por las dos frecuencias que la limitan superior e inferiormente y por los dos instantes de tiempo que la limitan lateralmente. Dicha zona del plano tiempo-frecuencia está representada en verde en la Fig. 5.9. La frecuencia superior es la máxima frecuencia analizada  $(R/p-1) f_{FC}$  Hz (950 Hz en el ejemplo), igual a la máxima frecuencia a la que puede llegar  $P1-$ . La frecuencia inferior es una frecuencia que debe ser menor a la tomada como límite superior en la zona de análisis anterior, la cual a su vez es también igual a la última frecuencia de la evolución del  $P1-$  en el primer tramo analizado. Concretamente, debe ser suficientemente baja como para que el algoritmo no se salga de la banda considerada al construir vectores columna locales a lo largo de la evolución del  $P1-$ , y en particular alrededor de la última frecuencia de la evolución en el primer tramo, tal y como se ve más adelante. Si en la primera zona de análisis se tomaba como frecuencia superior 575 Hz, en esta segunda zona de análisis se toma como frecuencia inferior 400 Hz. Por último, el primer instante considerado es el siguiente al último de la primera parte de la evolución del  $P1-$ . El último instante considerado es el último del transitorio completo menos los 0.25 segundos para eliminar el EB.

### Cálculo de máximos locales en cada instante de tiempo muestreado

Una vez se tiene definida la submatriz sobre la que se trabaja, la primera solución lógica sería la de calcular, para cada vector columna de la submatriz, el máximo correspondiente así como la frecuencia a la que se produce dicho máximo. Esto daría como resultado la evolución del  $P1-$  si efectivamente fuera el armónico de mayor amplitud en todos los instantes. Sin embargo, puede ocurrir que algún otro armónico, como un WH, en algunos de los instantes considerados tenga una amplitud mayor a la del  $P1-$  (en especial cuando prácticamente se ha alcanzado el régimen permanente y la amplitud del  $P1-$  ha disminuido considerablemente). En este caso, el resultado no es el de obtener la evolución del  $P1-$ .

La solución planteada finalmente requiere un cálculo iterativo. Así pues, en vez de considerar para un instante muestreado el vector columna entero, se considera un vector columna local centrado en la frecuencia en la que se encuentra la evolución del  $P1-$  en el instante anterior. Es decir, que si en un instante se tiene ya la frecuencia del  $P1-$ , en el instante siguiente se construye un vector columna centrado a dicha frecuencia. La longitud del vector columna debe ser suficiente como para abarcar la variación de frecuencia que el  $P1-$  puede experimentar de un instante de tiempo muestreado al siguiente. Para evitar incurrir en errores, se toma una longitud muy holgada: 40 Hz. Una vez se ha construido el vector columna local, se calcula su máximo así como la frecuencia asociada a dicho máximo. Las frecuencias obtenidas para cada instante muestreado se han trazado en azul en la Fig. 5.9.

Por otra parte, para poder empezar el proceso iterativo se debe definir el primer punto. Obviamente, en el caso del primer instante muestreado perteneciente a la submatriz se considera como centro del vector columna local la última frecuencia del  $P1-$  obtenida al analizar la zona aproximadamente rectilínea (último punto de la evolución del  $P1-$  trazada en rojo en la Fig. 5.8).

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

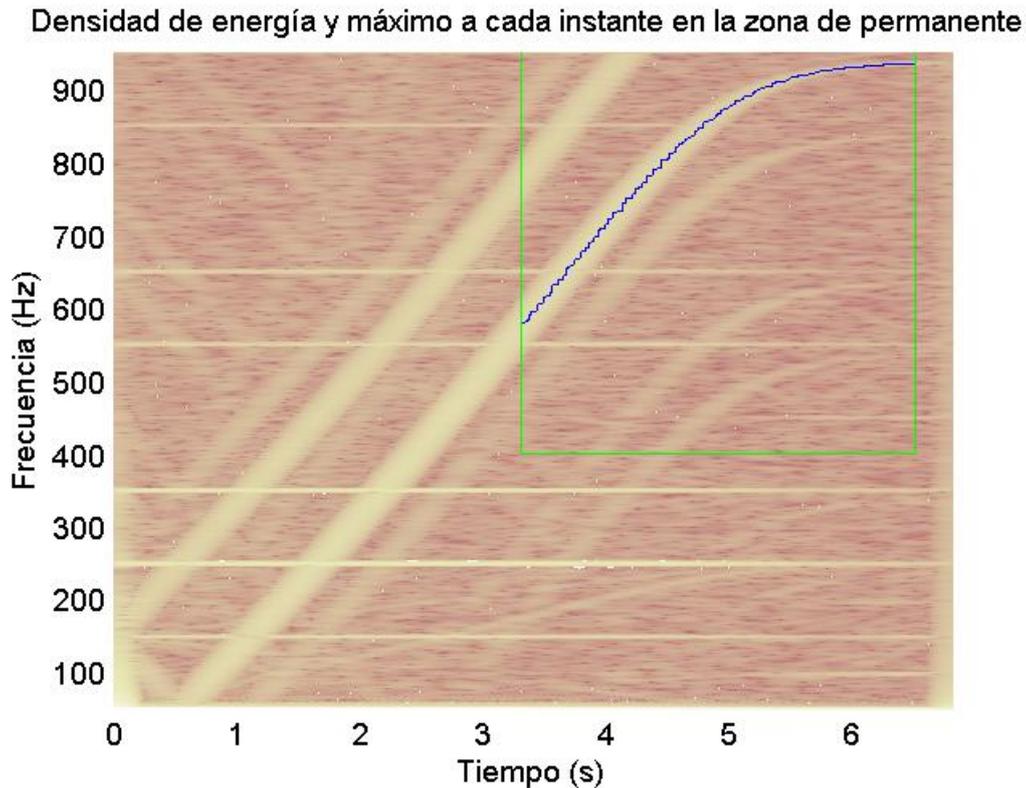


Fig. 5. 9 Densidad de energía, zona a analizar en segundo lugar enmarcada en verde y máximos a cada instante de tiempo en esta segunda zona trazados en azul.

En el ejemplo analizado, cuando se ha sobrepasado la mitad del tiempo que abarca la submatriz, como las variaciones de frecuencia del  $P1$  – son ya muy pequeñas, se ha reducido la amplitud del vector columna local a 10 Hz. Dicho ancho se puede ajustar en función de la aplicación, es decir, en función del tipo de transitorio que se ha capturado, si es que se tiene esta información.

A pesar de haber obtenido una primera aproximación a la evolución del  $P1$  – de bastante calidad, experimentalmente se comprueba que, se obtiene una aproximación a la evolución más fina si los máximos locales se calculan en cada frecuencia en vez de en cada instante. Esto se produce probablemente porque todos los resultados de la STFT asociados a una frecuencia se calculan en una única operación, una convolución. Y aunque teóricamente la relación entre los resultados a distintas frecuencias está perfectamente definida, al ser el resultado de operaciones independientes, los resultados a distintas frecuencias pueden diferir ligeramente de su relación real, produciendo irregularidades al calcular los máximos locales en cada instante de tiempo.

### Cálculo de máximos locales en cada frecuencia

Así pues, partiendo de la primera aproximación a la evolución (trazada en azul en la Fig. 5.9), se afina el resultado calculando máximos locales en cada frecuencia. Más concretamente, centrado en cada uno de los puntos de la primera aproximación se define un vector fila. Como ya se parte de una aproximación a la evolución bastante buena, y lo único que se pretende es afinar el resultado, el vector fila tendrá la mitad de la longitud que tenían los vectores fila en la primera parte del método: 5% de la duración del arranque (en el ejemplo analizado, 0.3 segundos). En definitiva, para cada instante muestreado, se considera la frecuencia asignada en la primera aproximación, se

construye el vector fila a su alrededor, se calcula el máximo local y se obtiene el instante de tiempo asociado a dicho máximo. El nuevo instante de tiempo obtenido, junto a la frecuencia original, forman el punto de la aproximación a la evolución afinada. El resultado se muestra en la Fig. 5.10.

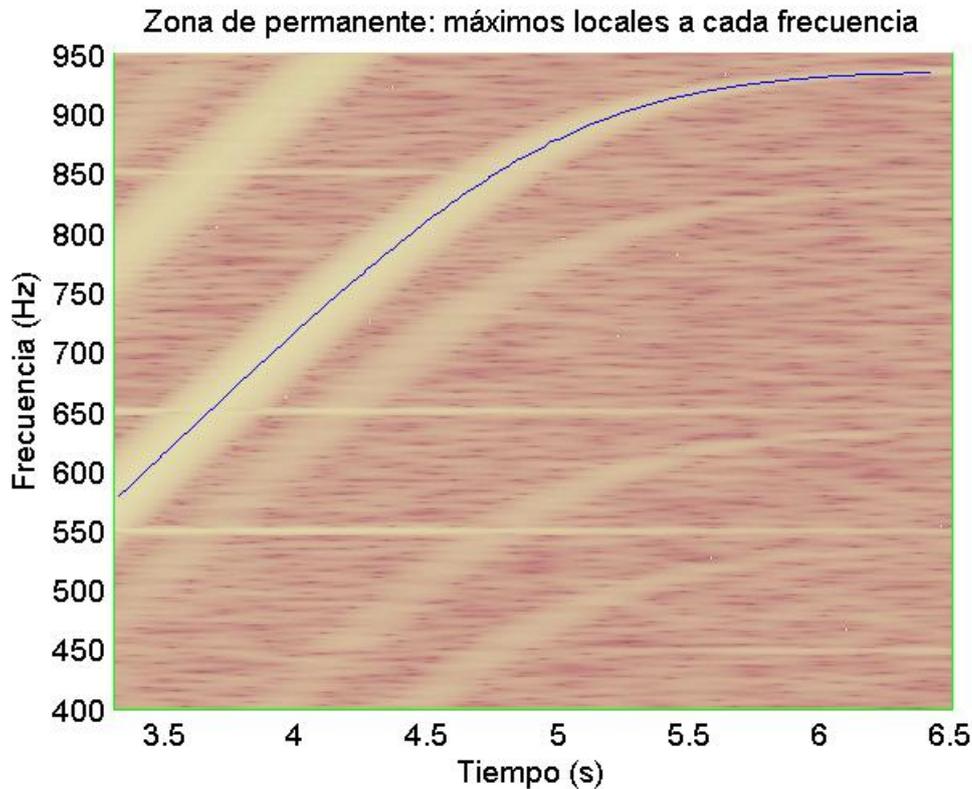


Fig. 5. 10 Densidad de energía limitada a la submatriz y aproximación afinada a la evolución de  $P1-$  obtenida calculando máximos locales a cada frecuencia (azul).

#### 5.2.4.- Evolución temporal de la frecuencia del PSH.

##### Resultado final: de la función inversa a la función directa

Finalmente, tal y como se muestra en la Fig. 5.11, uniendo la evolución en rojo de la Fig. 5.8 y la evolución en azul de la Fig. 5.10 se consigue la aproximación a la evolución temporal de la frecuencia del armónico  $P1-$ , obtenida, en términos generales, tal y como se ha visto, mediante el cálculo de máximos locales de la densidad de energía. No se ha llegado a la solución final del problema pues ésta es obtener, para cada uno de los instantes muestreados, la frecuencia del  $P1-$ . Sin embargo, la Fig. 5.11 se ha construido a partir de la función inversa: para el conjunto de frecuencias analizadas, se tienen los instantes correspondientes a la evolución del  $P1-$ .

Para obtener la función directa se utiliza un método de interpolación. Es decir, teniendo en cuenta que la función inversa dibujada en azul en la Fig. 5.11 es en realidad un conjunto de puntos, tan solo hay que introducir dicho conjunto de puntos en una función de interpolación para poder calcular las frecuencias correspondientes a cada uno de los instantes muestreados. Eso sí, tan solo se obtendrá para los instantes muestreados que se encuentren entre el primer y el último instante de tiempo pertenecientes al conjunto que definen la función inversa, pues la interpolación no tiene sentido en puntos exteriores a este intervalo.

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

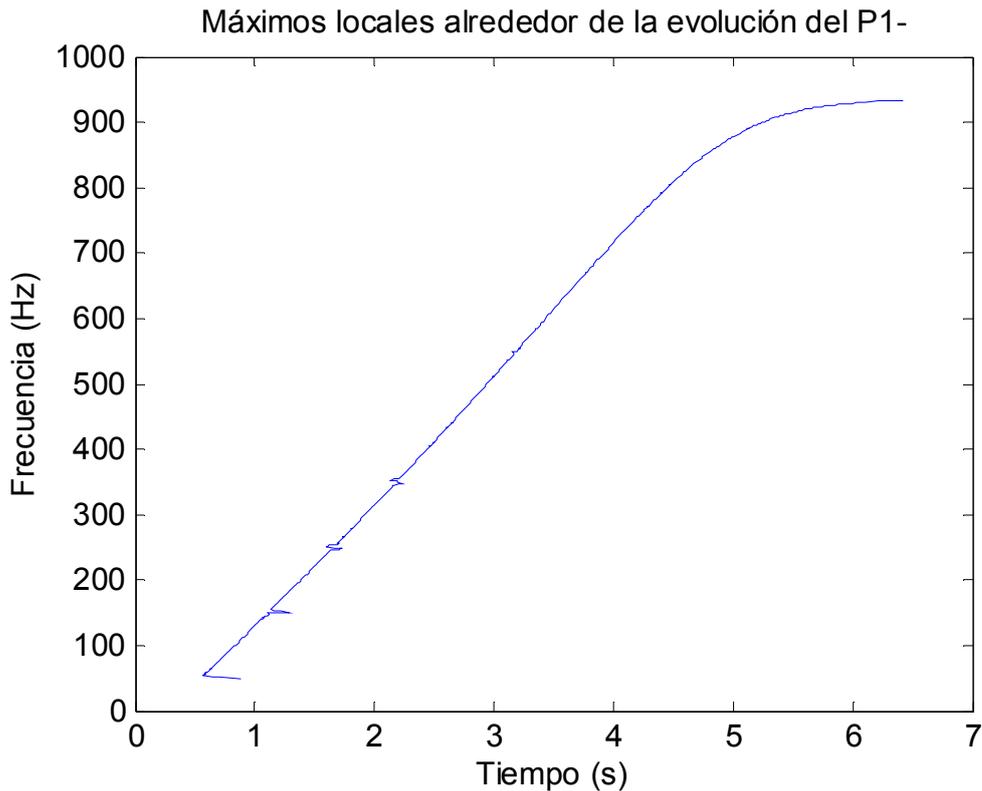


Fig. 5.11 Evolución temporal aproximada de la frecuencia del armónico  $P1-$  obtenida mediante el cálculo de máximos locales de la densidad de energía.

### Puntos a eliminar

Por otra parte, para poder introducir el conjunto de puntos en la función de interpolación se tiene que realizar una operación previa: hay que eliminar los puntos de la función inversa que tengan el mismo instante de tiempo asociado. Concretamente, el algoritmo conserva un punto tan solo si su instante de tiempo es distinto a todos los anteriores. Seguidamente, con el objetivo de mejorar la aproximación, se eliminan los puntos comprendidos en bandas de frecuencia de 10 Hz centradas alrededor de la frecuencia de los WH (FC, WH3, WH5, WH7). En la Fig. 5.12 se muestra, trazada en puntos negros gruesos, la función inversa original, y superpuesta en puntos gruesos de color cian, la función inversa después de eliminar los puntos con mismo valor de  $t$  y los puntos alrededor de los WH.

### Interpolación

La evolución mostrada en color magenta en la Fig. 5.13 se ha obtenido introduciendo el conjunto de puntos resultante (mostrados en cian en la Fig. 5.12), como entrada de la función de interpolación, calculando el resultado de la interpolación para cada instante muestreado y ajustando a  $-f_{FC}$  todas las frecuencias relativas a los primeros puntos muestreados que se encuentran a la izquierda del primer instante de tiempo de la función inversa. Al superponer sobre la densidad de energía calculada con la STFT, se puede observar cómo el resultado es muy bueno: se ha obtenido, con un elevado nivel de aproximación, la evolución del  $P1-$ .

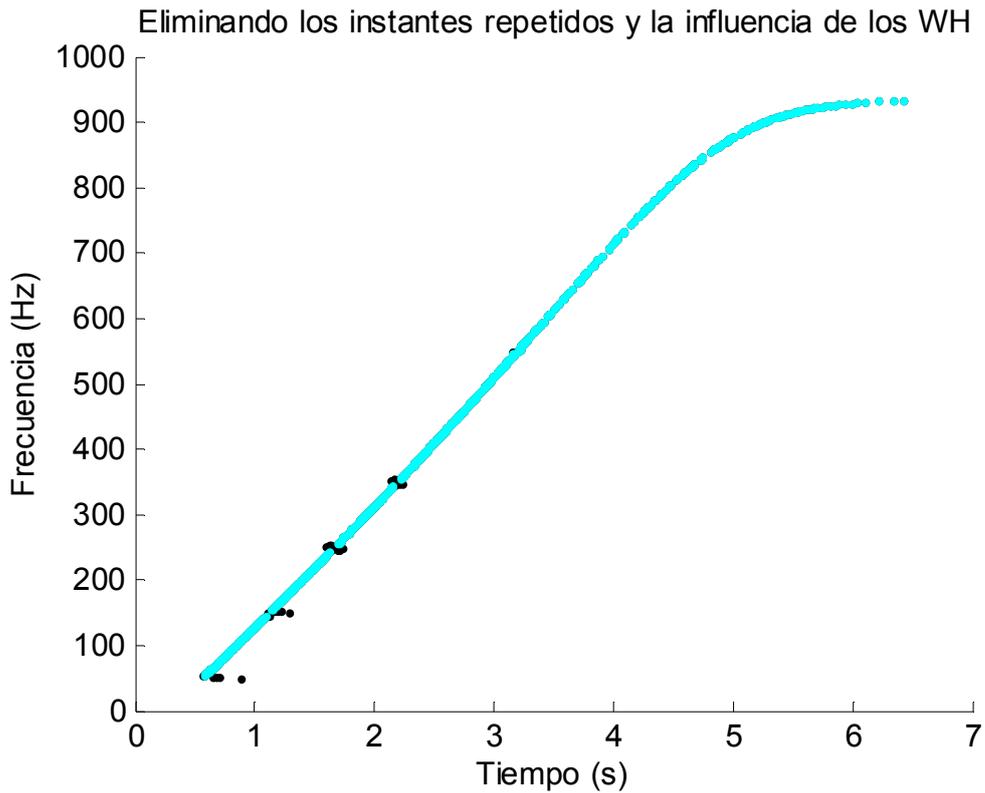


Fig. 5. 12 Función inversa de la evolución temporal de  $P1-$  antes (negro) y después (cian) de eliminar los puntos con mismo instante de tiempo y los puntos alrededor de los WH.

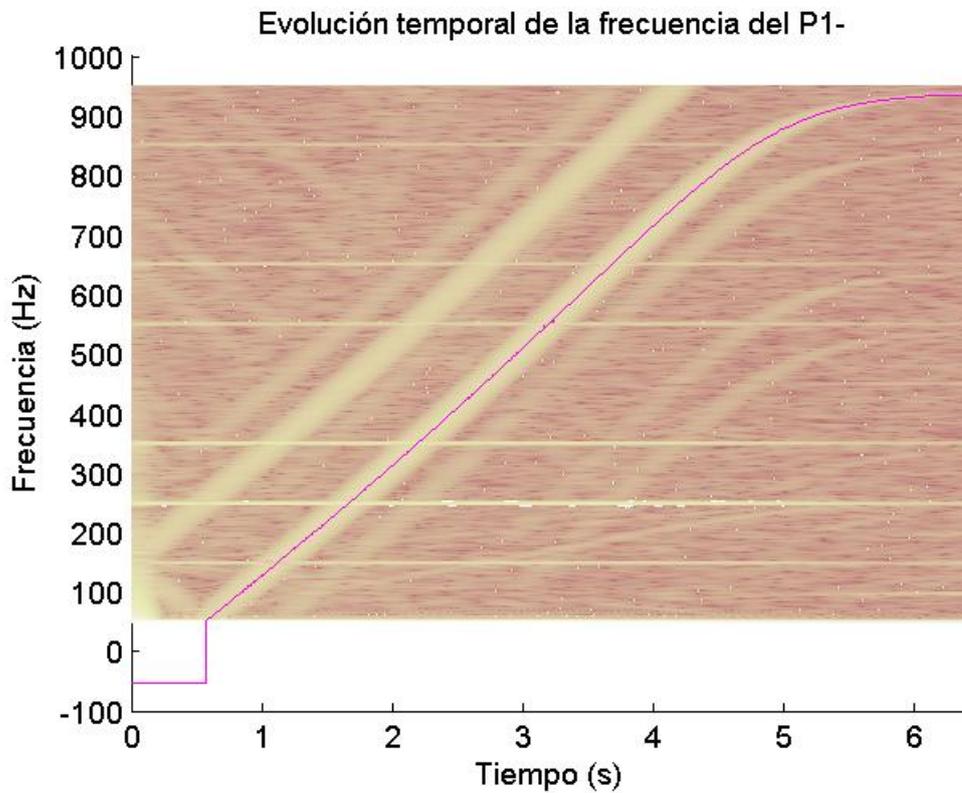


Fig. 5. 13 Estimación de la evolución temporal de la frecuencia de  $P1-$  superpuesta sobre la densidad de energía de la corriente obtenida utilizando la STFT.

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

### 5.2.5.- Cálculo del deslizamiento.

El siguiente paso es el de calcular el deslizamiento. Para ello tan solo hay que aplicar la expresión inversa de 5.1:

$$s = 1 - \frac{p}{R} \left( \frac{f_{P1-}}{f_{FC}} + 1 \right) \quad (5.3)$$

El resultado se muestra en la Fig. 5.14.

En un inicio se estableció el límite inferior de la banda de frecuencia analizada mediante la STFT en  $f_{FC}$ , cuando en realidad entre 0 y  $f_{FC}$  Hz encontramos parte de la evolución del  $P1-$ . Esta parte no se analizó pues en esta zona resulta muy difícil capturar la evolución del  $P1-$ : se encuentra demasiado cerca del TEM, del EB y del FC. Como consecuencia, en la Fig. 5.14 todavía desconocemos la primera parte de la evolución del deslizamiento, correspondiente a la evolución del  $P1-$  comprendida entre 0 y  $f_{FC}$  Hz. El problema se podría resolver intentado capturar la evolución correspondiente del  $P3+$ , pero este punto ha quedado como futuro trabajo. En lugar de optar por esta posible solución, se ha utilizado el carácter aproximadamente lineal de los arranques analizados en la tesis, y se ha calculado la pendiente de la evolución del deslizamiento en esta primera parte del arranque.

Más concretamente, en la Fig. 5.14 se muestran tres líneas horizontales de color verde. La línea superior indica el deslizamiento por encima del cual la evolución se ajustará siguiendo su característica aproximadamente lineal. Se trata del primer valor de la evolución del deslizamiento que el método ha conseguido obtener (en el ejemplo 0.885). Las dos siguientes líneas indican el par de valores del deslizamiento que se utilizan para, promediando las pendientes de todos los puntos comprendidos en dicha banda, calcular la pendiente de la evolución rectilínea. Dicha pendiente se utiliza para calcular los valores del deslizamiento en la parte de la evolución que falta, por encima de la línea horizontal superior. La banda de deslizamiento que se utiliza para obtener la pendiente es 0.55 y 0.65. Se toman estos valores ya que es muy difícil que, como resultado de aplicar el método, hayan aparecido interferencias en esta zona, y que el cálculo de la pendiente media no de un valor muy aproximado.

### 5.2.6.- Evoluciones temporales de las componentes de la corriente.

El paso final consiste en, conociendo la evolución temporal del deslizamiento, tal y como se explicó en el apartado 4.1, calcular las evoluciones temporales de los distintos armónicos presentes en la corriente analizada. El resultado se muestra en la Fig. 16. En este caso, como se trata de una máquina sana, tan solo se han trazado las evoluciones de los WH y los PSH.

### 5.2.7.- Análisis de una corriente más compleja.

La segunda corriente analizada como ejemplo pertenece a un motor del mismo tipo, pero con una barra rota, estando compuesto el transitorio de unas oscilaciones de carga además del arranque previo. Se comentan a continuación las diferencias en los

resultados obtenidos. El algoritmo es obviamente el mismo, siendo sus parámetros de entrada idénticos.

Evolución del deslizamiento y cálculo de la aproximación lineal inicial

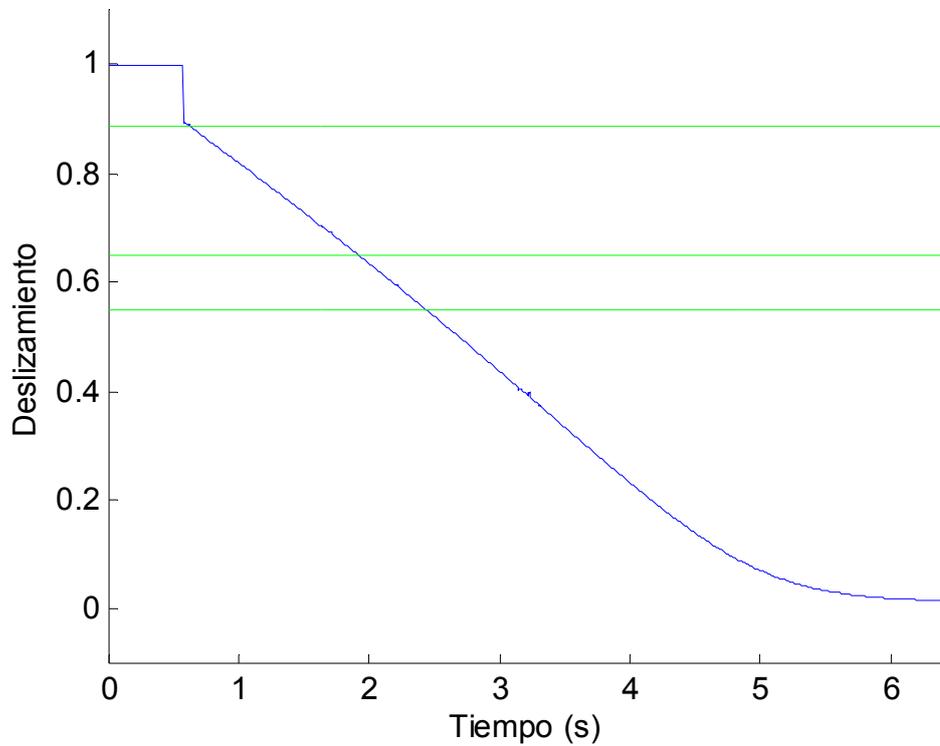


Fig. 5. 14 Estimación de la evolución temporal del deslizamiento (azul), límite para el ajuste según la característica lineal (verde superior) y límites inferior y superior para el cálculo de la pendiente (verde).

Evolución temporal del deslizamiento

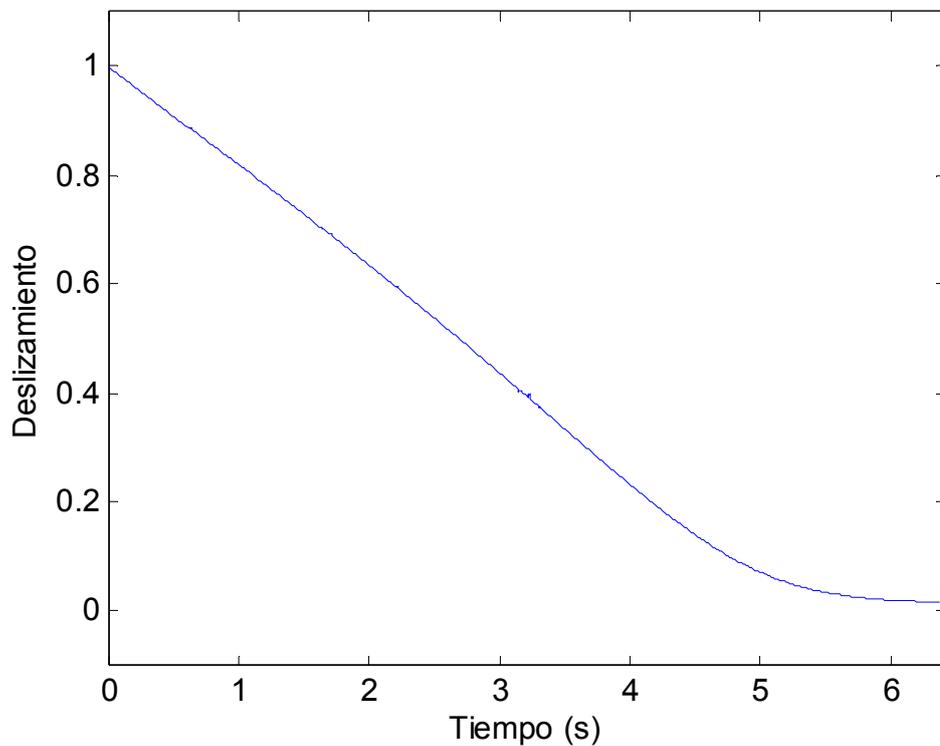


Fig. 5. 15 Estimación final de la evolución temporal del deslizamiento.

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

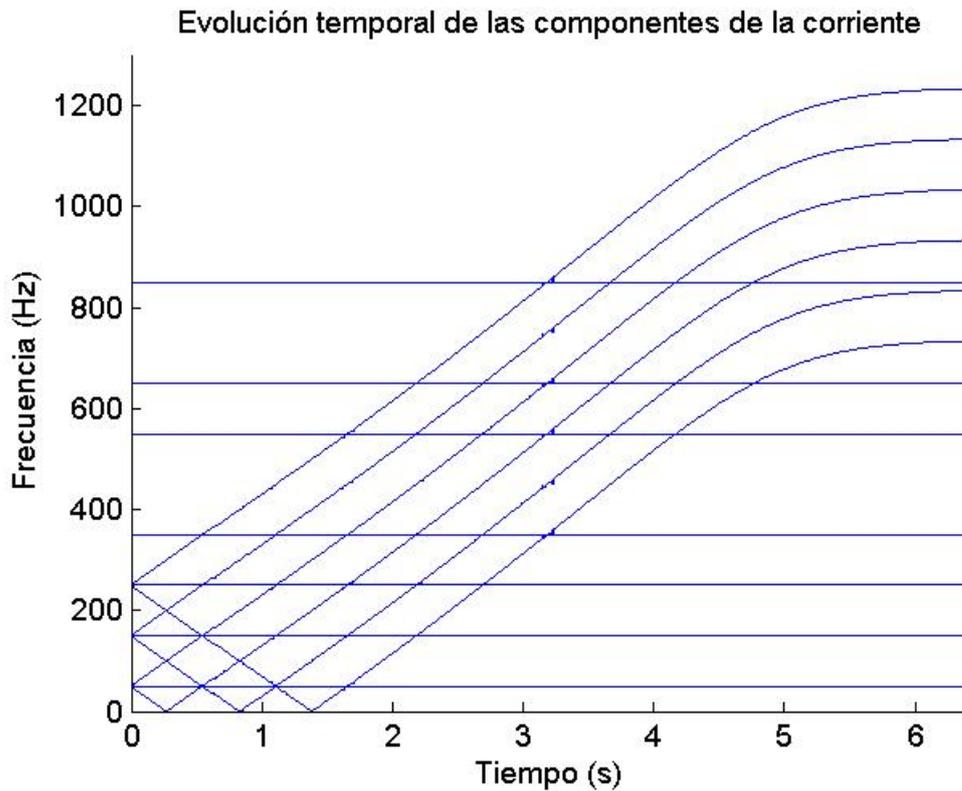


Fig. 5. 16 Resultado final: estimación final de las evoluciones de las frecuencias de las componentes (WH y PSH) de la corriente.

### Resultados y diferencias con respecto al ejemplo anterior

La diferencia que observamos al aplicar el método es que, al calcular los máximos en cada frecuencia durante el análisis de la primera parte del transitorio, encontramos mayores diferencias entre esta primera aproximación a la evolución de  $P1-$  y su evolución real. En otras palabras, muchos de los máximos calculados no están asociados a la evolución de  $P1-$  sino a las evoluciones de armónicos de rotura de barra de amplitud relevante, tal y como se puede observar en la Fig. 5.17. Sin embargo, al calcular la recta de aproximación, esto no afecta, pues la banda de frecuencia tenida en cuenta para obtener dicha recta (Fig. 5.18), no comprende las evoluciones de los armónicos de barra rota de amplitud elevada. Una vez calculados los máximos locales a partir de la primera evolución rectificada con la recta de aproximación, obtenemos resultados muy próximos a la evolución real (Fig. 5.19).

### Resultados finales

Una vez se han analizado las dos zonas en las que se divide el transitorio, se ponen los resultados en común y, al superponerlos con la densidad de energía obtenida mediante la STFT, se puede observar cómo, salvo un pequeño tramo muy al principio del arranque, se ha obtenido la evolución del  $P1-$  (Fig. 5.21). Al igual que en el caso anterior, tan solo hace falta calcular el deslizamiento a partir de la frecuencia del  $P1-$  y aproximar linealmente este primer tramo que falta. Por último, en la Fig. 5.22 se han representado, utilizando la evolución del deslizamiento, las evoluciones de los armónicos sanos (azul) y de barra rota (rojo).

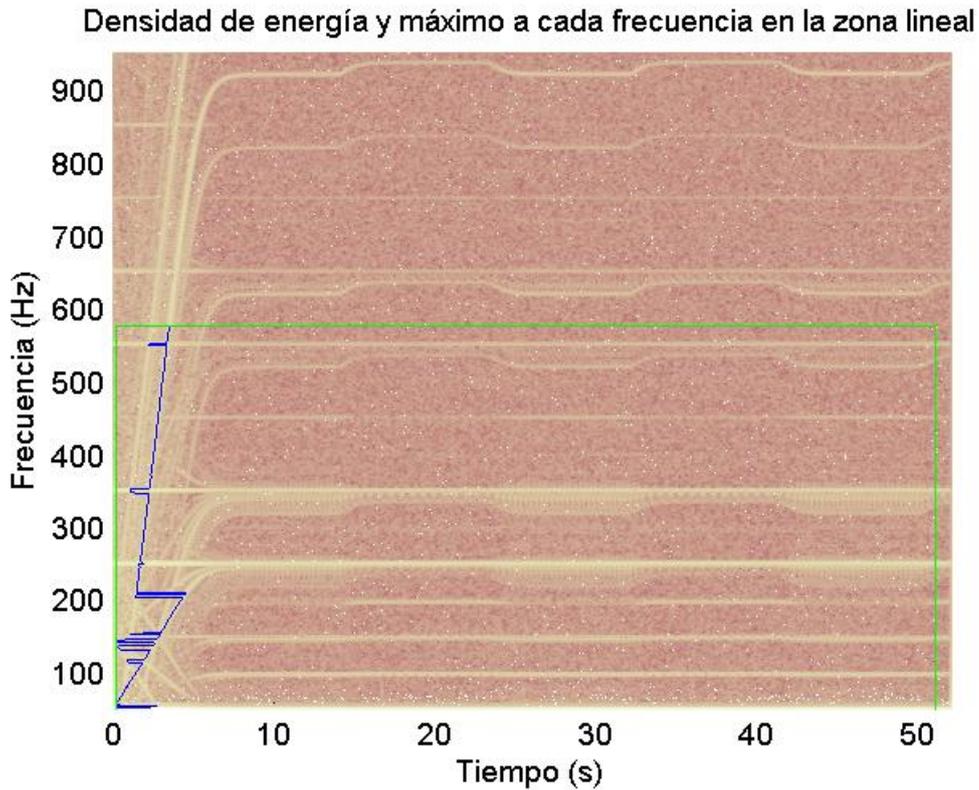


Fig. 5. 17 Densidad de energía, zona a analizar en primer lugar enmarcada en verde y máximos a cada frecuencia en esta primera zona trazados en azul.

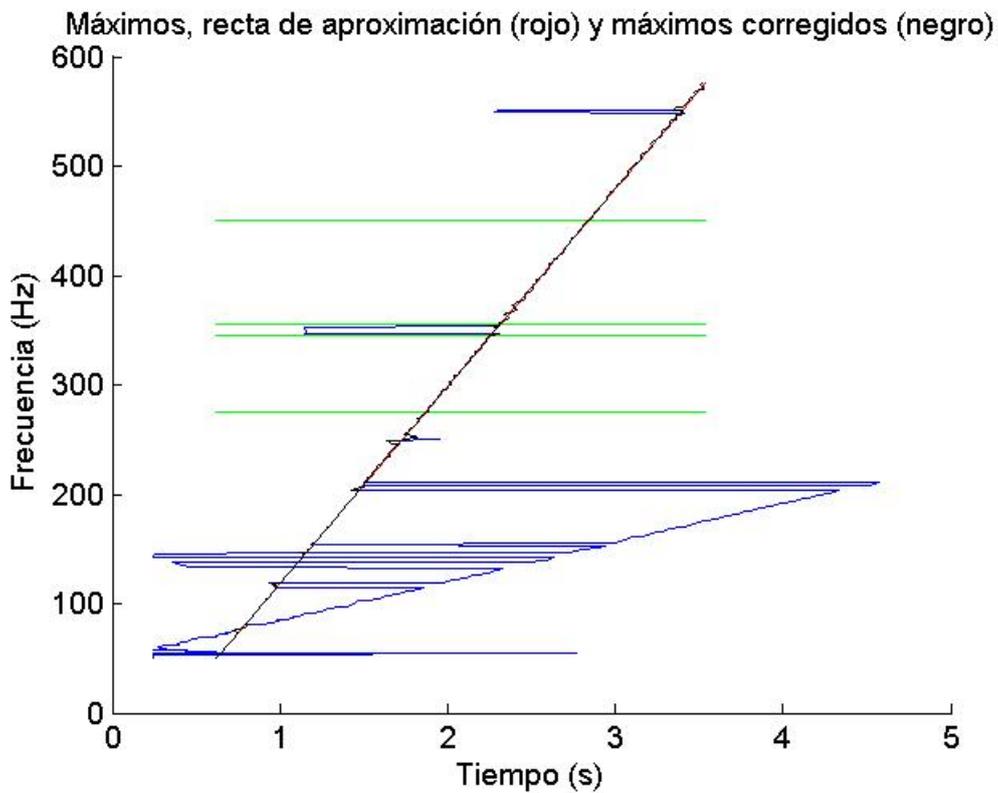


Fig. 5. 18 Primera aproximación a la evolución de  $P1$  – (azul), recta de aproximación (rojo), límites para su cálculo (verde) y centros para el cálculo de máximos locales (negro).

Obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento.

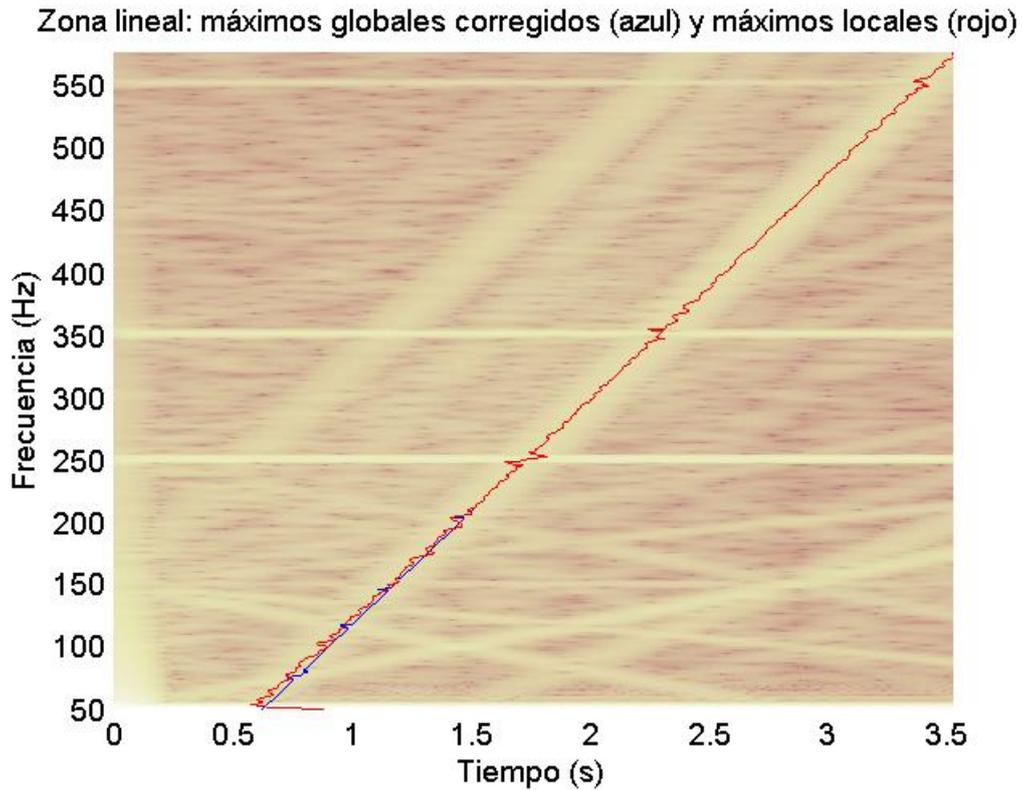


Fig. 5. 19 Primera aproximación a la evolución corregida mediante la recta de arproximación (azul) y aproximación definitiva obtenida mediante la corrección calculando máximos locales (rojo).

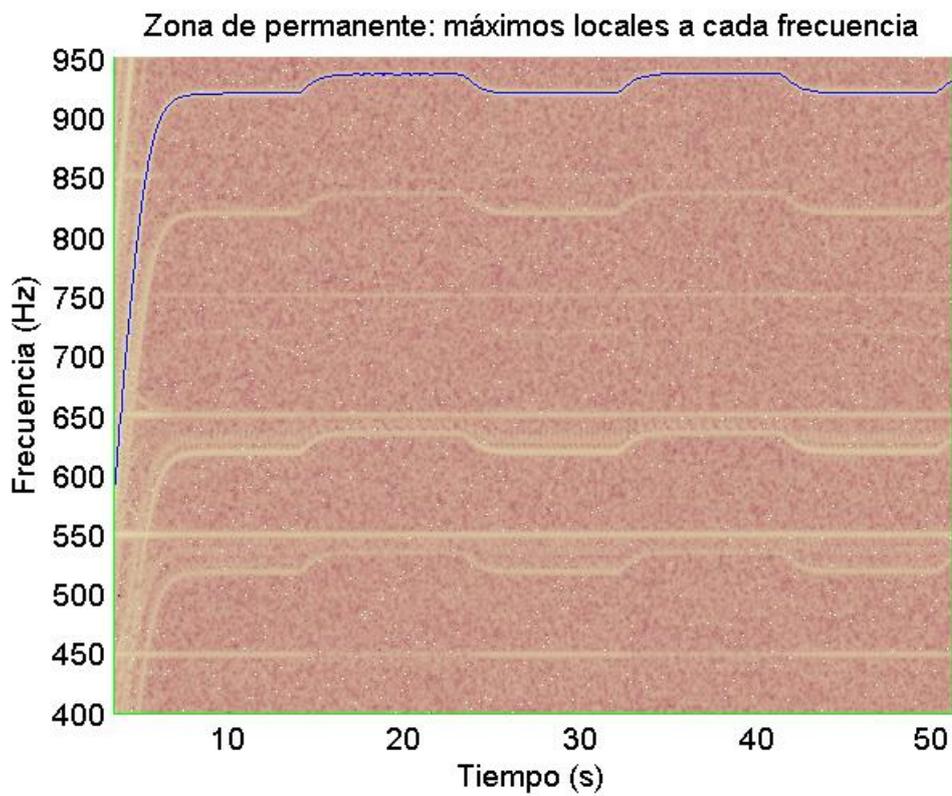


Fig. 5. 20 Densidad de energía limitada a la submatriz y aproximación afinada a la evolución de  $P1$  – obtenida calculando máximos locales a cada frecuencia (azul).

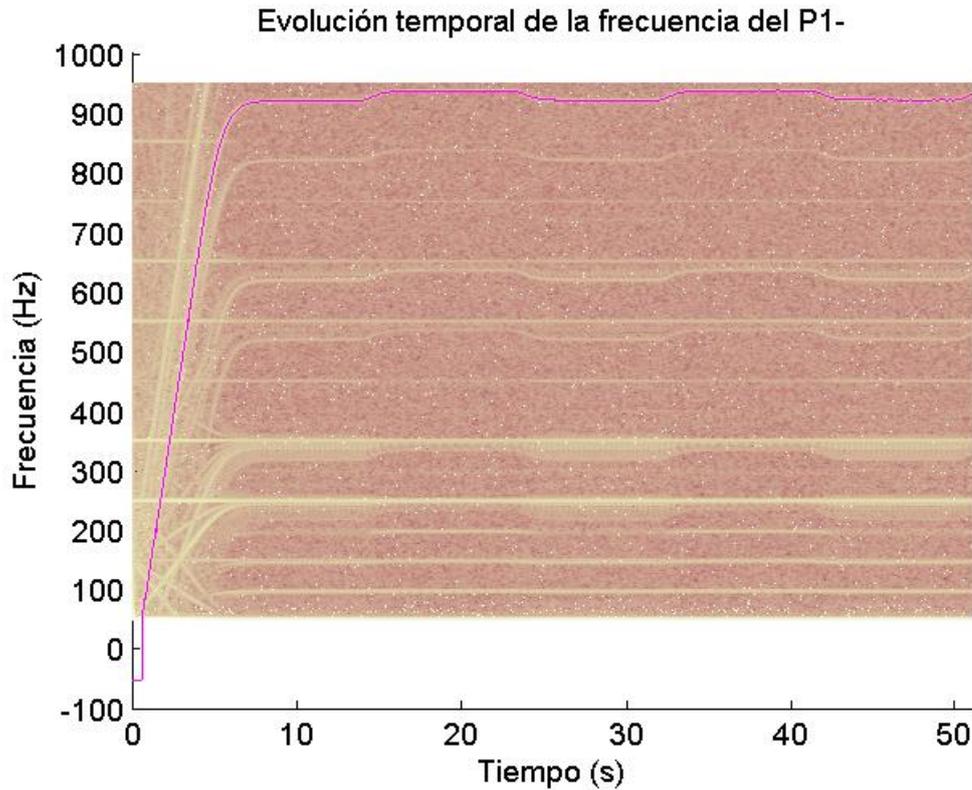


Fig. 5. 21 Estimación de la evolución temporal de la frecuencia de  $P1$  – superpuesta sobre la densidad de energía de la corriente obtenida utilizando la STFT.

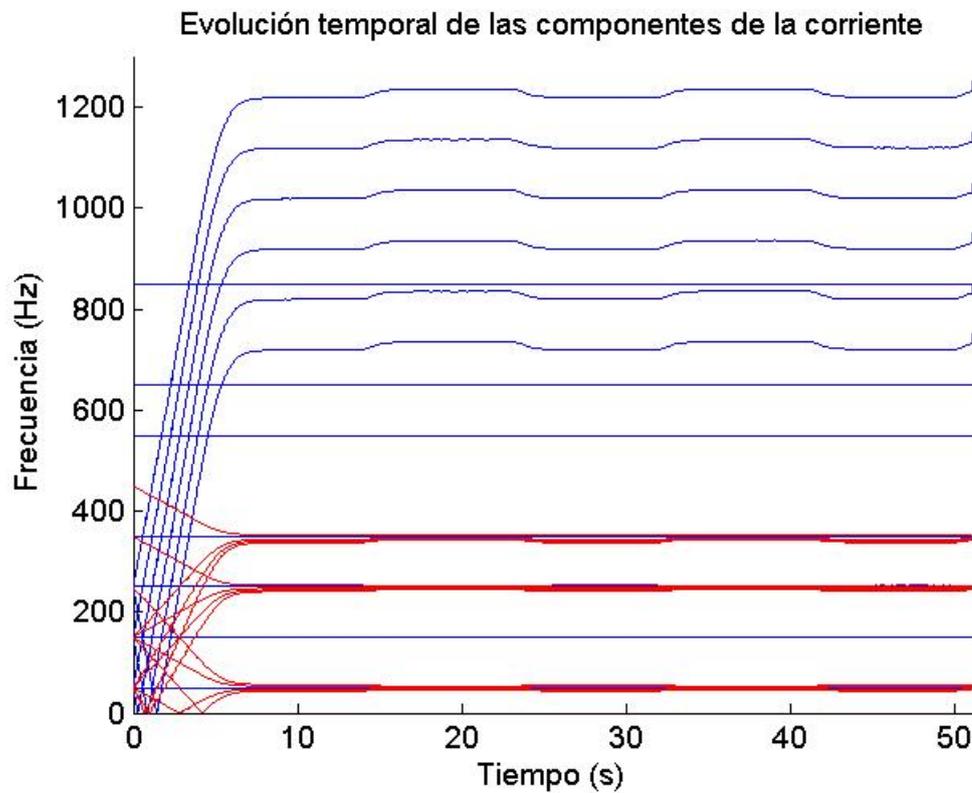


Fig. 5. 22 Resultado final: estimación final de las evoluciones de las frecuencias de las componentes sanas (WH y PSH de color azul) y de rotura de barra (de color rojo) de la corriente.

## 6.- Frequency B-Splines.

Las Frequency B-Splines (FBS) son un tipo de átomos tiempo-frecuencia obtenidos por modulación en frecuencia (adecuada) de una ventana cuya transformada de Fourier es una B-Spline. Se trata pues de un tipo de ventanas moduladas (las ventanas moduladas han sido estudiadas en profundidad en AM 2). En otras palabras, un átomo tiempo-frecuencia del tipo FBS es el resultado del siguiente proceso:

- Se construye una B-Spline en el dominio frecuencial.
- Se calcula su TF inversa.
- La función que se obtiene se multiplica por un escalar llamado constante de normalización, de tal forma que su energía sea igual a 1.
- Finalmente se modula a una frecuencia apropiada.

El presente trabajo de investigación es el primero en el que se han utilizado este tipo de átomos tiempo-frecuencia para el análisis de corrientes (y en particular para el diagnóstico de máquinas eléctricas). Tal y como se ve en los resultados experimentales (capítulos 7 y en adelante, así como en el ejemplo analizado en el capítulo 4), las FBS son capaces de generar funciones de densidad tiempo-frecuencia que proporcionan un elevado nivel de detalle y resolución, de tal forma que, al representarlas gráficamente, la evolución temporal de la frecuencia de los armónicos presentes en la señal se observa completa y con gran nitidez. El éxito obtenido en los resultados experimentales ha sido posible gracias al profundo análisis de las FBS desarrollado en la presente tesis y plasmado en el capítulo que empieza. Todo el análisis realizado, desde su calificación como ventanas moduladas, pasando por el estudio de las propiedades de la ventana utilizada, el cálculo de la pendiente de sus cajas de Heisenberg y de su transformada de Fourier, hasta la comparación con las funciones de Gabor, es totalmente original, tomando como punto de partida únicamente la fórmula que las define (con excepción de la revisión de algunas de las propiedades de la función seno cardinal en el apartado 6.2).

En particular, resulta especialmente importante el cálculo de las dimensiones de las cajas de Heisenberg de las FBS, así como la fórmula que determina el valor de la pendiente en función de los parámetros de la FBS, la cual es el objetivo principal del análisis expuesto en este capítulo pues resulta vital para poder utilizar la metodología de diagnóstico presentada en el capítulo 4 (más concretamente, dicha fórmula permite aplicar, utilizando FBS, el criterio de la pendiente presentado en el apartado 4.2.4). El estudio de las FBS permite además escoger entre los posibles valores de su parámetro entero, tal y como se concluye en el apartado 4.2.3. Finalmente, en el último apartado del capítulo (6.5) se detallan aspectos prácticos importantes a la hora de calcular correlaciones entre las FBS y las señales a analizar, comparando su comportamiento con el de las funciones de Gabor y el porqué de su elección frente a estas. Aun así, el lector más interesado en los resultados de la metodología de diagnóstico que en los entresijos de cómo se obtiene la fórmula de la pendiente de las FBS, el fundamento del valor asignado a su parámetro entero, así como su comparación con las funciones de Gabor, puede saltar la lectura del capítulo, que es totalmente independiente, y pasar a los siguientes. Seguidamente se expone con mayor exactitud el contenido del presente capítulo.

## Capítulo 6.

En el primer apartado (6.1) se introducen este tipo de funciones partiendo de su definición. Tal y como veremos más adelante, la función seno cardinal juega un papel principal pues la ventana modulada para obtener una FBS es siempre una potencia de dicha función. Es por ello que, en el siguiente apartado (6.2), se presentan las dos definiciones de seno cardinal existentes en la literatura (indicando la adoptada a lo largo del texto), y se repasan algunas de sus propiedades. En el tercer apartado (6.3) se estudian las propiedades del tipo de ventana utilizada para construir las FBS. Los resultados de este estudio son la base del análisis de las propiedades de las FBS. El análisis de estas propiedades se realiza para poder obtener las fórmulas que determinan las dimensiones de las cajas de Heisenberg del átomo en función de sus parámetros y como consecuencia, la fórmula de la pendiente (6.4). Finalmente, en el último apartado (6.5), se comparan las FBS con las funciones de Gabor, argumentando el porqué de su elección.

El presente capítulo se apoya en el apéndice matemático. Más concretamente, en el apartado AM 2 se analizan las ventanas moduladas desde una perspectiva general (conjunto al cual pertenecen tanto las funciones de Gabor como las FBS): se explica la forma de construir este tipo de átomos en términos de las propiedades que debe cumplir la ventana utilizada (AM 2.1), se calcula su frecuencia central (AM 2.2) y se deducen las expresiones simplificadas de las dimensiones de las cajas de Heisenberg de éste tipo de función (AM 2.3). En el apartado 6.3 se verifica que la ventana utilizada cumple con las propiedades indicadas en AM 2.1, lo cual permite que en 6.4 se utilicen las formulas de AM 2.2 y AM 2.3 para calcular la formula de la pendiente de la caja de Heisenberg de una FBS en función de sus parámetros. Además, el lector no experto en matemáticas puede encontrar en el apartado AM 1 un compendio de definiciones y propiedades básicas que le ayudarán a seguir el desarrollo aquí presentado. Por último, el apartado AM 3 presenta un análisis parecido al realizado en este capítulo, pero centrado en el estudio de las funciones de Gabor, las cuales son mucho más conocidas en la literatura científica: se definen las funciones de Gabor analizando algunas de sus propiedades (AM 3.1), realizando un recordatorio de la función Gaussiana en la cual están basadas (AM 3.2) y demostrando que cumplen con la condición de ventana modulada (AM 3.3), pudiendo por tanto utilizar las fórmulas deducidas en AM 2.2 y AM 2.3 para calcular las dimensiones y la pendiente de su caja de Heisenberg (AM 3.4). Aunque lo que se dice en el apéndice matemático no es del todo novedoso, pues son temas que han sido analizados ya en la literatura científica, el análisis realizado sí lo es, pues ha sido redactado de forma original durante el transcurso de la tesis.

### **6.1.- Definición de las Frequency B-Splines.**

6.1.1.- Definición.

6.1.2.- El parámetro de escalado y la constante de normalización.

6.1.3.- Definición en frecuencias angulares.

6.1.4.- Las FBS: un tipo de ventanas moduladas.

### **6.2.- Introducción a la función seno cardinal.**

6.2.1.- Definición de la función seno cardinal.

6.2.2.- Propiedades de la función seno cardinal.

### **6.3.- Estudio de las propiedades de la ventana utilizada.**

- 6.3.1.- Ventana real.
- 6.3.2.- Ventana par.
- 6.3.3.- Ventana Lebesgue integrable.
- 6.3.4.- Transformada de Fourier de la ventana.
- 6.3.5.- Energía de la ventana.

**6.4.- Cálculo de la pendiente de las Frequency B-Splines.**

- 6.4.1.- Recapitulación y uso de los resultados del apéndice matemático.
- 6.4.2.- Cálculo de las cajas de Heisenberg.
- 6.4.3.- Transformada de Fourier.

**6.5.- Comparación entre las Frequency B-Splines y las funciones de Gabor.**

## 6.1.- Definición de las Frequency B-Splines.

### 6.1.1.- Definición.

En el presente apartado se introducen un determinado tipo de átomos tiempo-frecuencia: las Frequency B-Splines (FBS). Un átomo tiempo-frecuencia del tipo FBS será siempre una función compleja de variable real de la siguiente forma<sup>1</sup>:

$$\psi(t) = C_{m,f_b} \left[ \text{sinc} \left( \frac{f_b t}{m} \right) \right]^m e^{i2\pi f_c t} \quad (6.1)$$

Donde:

- $m \in \mathbb{N}$  es un número natural cualquiera.
- $f_b \in \mathbb{R}^+$  es el ancho de banda <sup>2</sup>.
- $f_c \in \mathbb{R}^+$  es la frecuencia central de la función.
- $C_{m,f_b} \in \mathbb{R}^+$  es la constante de normalización (la cual depende a su vez de  $m$  y de  $f_b$ ).

Y se cumple  $f_c > f_b/2 > 0$ .

Tal y como decíamos, asignando valores a los tres parámetros  $m$ ,  $f_b$  y  $f_c$  se obtiene una FBS. Esta a su vez, realizando operaciones de traslación, modulación a una frecuencia distinta, escalado o simplemente cambiando directamente sus parámetros, genera una familia de átomos tiempo-frecuencia tipo FBS. Tal y como se analizó en el capítulo 3, en función de la transformada que se quiere calcular (STFT, AWT, MP, AGT), la familia de átomos construida es distinta. Una vez se tiene la familia de átomos, ya se puede calcular la transformada de la señal a analizar.

### 6.1.2.- El parámetro de escalado y la constante de normalización.

Observemos en primer lugar que la función seno cardinal  $\text{sinc}(t)$  ha sido escalada utilizando un factor de escalado  $a = m/f_b$  obteniendo la función  $\text{sinc}(t/a) = \text{sinc}(f_b t/m)$ . Para que el escalado tenga sentido, el factor de escalado utilizado no puede ser en ningún caso igual a 0 o a  $\pm\infty$ . Esta condición se cumple pues como  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f_b \in \mathbb{R}^+$  el factor de escalado  $a = m/f_b \in \mathbb{R}^+$ .

---

<sup>1</sup> En la definición de las FBS participa la función seno cardinal ( $\text{sinc}$ ). Esta función tiene dos posibles definiciones. En el próximo apartado se presentan ambas indicándose cual ha sido la adoptada a lo largo del texto. Se repasan también algunas de sus propiedades. Por otra parte, el concepto de función compleja de variable real se repasa en el Apéndice AM 1.

<sup>2</sup> Notación:  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ ;  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .

Para que la energía de la función sea igual a 1, se multiplica por una constante  $C_{m,f_b}$  (llamada constante de normalización), la cual depende de  $m$  y de  $f_b$ :

$$C_{m,f_b} = \sqrt{\frac{f_b}{m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx}} \quad (6.2)$$

Tal y como se verá en el siguiente apartado cuando se presente su definición, la función seno cardinal es una función real. Además cumple:

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^m dx \leq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (6.3)$$

Por tanto podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx \in \mathbb{R}^+ \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (6.4)$$

Como además  $f_b \in \mathbb{R}^+$  y  $m \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$ , al evaluar (6.2) no podemos encontrarnos con los casos indeterminados  $0 \cdot \infty$ ,  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ . Tenemos por tanto:

$$C_{m,f_b}^2 = \frac{f_b}{m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx} \in \mathbb{R}^+ \quad (6.5)$$

Como consecuencia  $C_{m,f_b} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall f_b \in \mathbb{R}^+$ . Tenemos pues que la constante de normalización es un número real positivo y que por tanto no puede valer 0 ni  $\pm\infty$ , lo cual la haría inservible. Concluimos que  $C_{m,f_b}$  esta bien definida.

### 6.1.3.- Definición en frecuencias angulares.

Habitualmente, en el campo del análisis de la señal se trabaja con frecuencias angulares (pulsaciones) en vez de con frecuencias. Teniendo en cuenta las relaciones  $\omega_c = 2\pi f_c$  y  $\omega_b = 2\pi f_b$  (6.1) queda:

$$\psi(t) = C_{m,\omega_b} \text{sinc}^m\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right) e^{i\omega_c t} \quad (6.6)$$

La constante de normalización queda:

$$C_{m,f_b} = \sqrt{\frac{f_b}{m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx}} = \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx}} = C_{m,\omega_b} \quad (6.7)$$

### 6.1.4.- Las FBS: un tipo de ventanas moduladas.

Notar que hasta este punto hemos definido un tipo de funciones complejas de variable real, dependientes de tres parámetros, a las cuales hemos llamado FBS. Pero todavía no hemos demostrado si efectivamente, asignando valores concretos a  $m$ ,  $\omega_b$  y  $\omega_c$  (teniendo en cuenta la condición  $\omega_c > \omega_b/2 > 0$ ), obtenemos una ventana modulada (tal y como fue definida en AM 2). Profundicemos pues un poco más en las características de las FBS y veamos si cumplen con las propiedades de las ventanas moduladas. Podemos reescribir (6.6) como sigue:

$$\psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t) \quad \text{con} \quad g(t) = C_{m,\omega_b} \text{sinc}^m\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right) \quad (6.8)$$

Vemos que la función  $\psi$  es en realidad una modulación en frecuencia de la función  $g$ . En el apéndice matemático (apartado AM 2.1), se analizan las relaciones entre las propiedades de una ventana genérica  $g$  y las propiedades de la función construida mediante la modulación en frecuencia de dicha ventana  $\psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t)$ . Aplicando la propiedad demostrada en el apartado AM 2.1, si la función  $g$  cumple las siguientes propiedades:

- $g$  es real.
- $g$  es par.
- $g \in L^1(\mathbb{R})$
- Su TF,  $\hat{g}$ , es de soporte compacto, siendo dicho soporte  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$ .
- $g \in L^2(\mathbb{R})$
- Su energía es igual a 1:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ .

su modulación a una determinada frecuencia angular  $\omega_c$  tal que  $\omega_c > \omega_b/2$ , da como resultado una función  $\psi$  analítica, que posee las propiedades adecuadas para ser un átomo tiempo-frecuencia, estando además su energía confinada frecuencialmente en el intervalo  $[\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2]$  y distribuida alrededor de  $\omega_c$ . Más concretamente, la función definida en (6.8) responde a lo que en AM 2 se definió como ventana modulada.

En el apartado 6.3 se demostrará que la función  $g$  descrita en (6.8) cumple las seis propiedades enumeradas (salvando el caso  $m=1$  para el cual  $g_{m=1} \notin L^1(\mathbb{R})$ ). Concluimos que las FBS son en realidad un caso particular de ventanas moduladas. Por tanto, son de aplicación las fórmulas, deducidas en los apartados AM 2.2 y AM 3.3, que determinan la frecuencia central y las dimensiones de las cajas de Heisenberg de este tipo de funciones. Esta es la conclusión interesante, pues justifica el poder utilizar dichas fórmulas en el apartado 6.4 para obtener la fórmula que permite calcular la pendiente de la caja de Heisenberg de una FBS en función de sus parámetros.

Se demostrará también en el apartado 6.3 que, independientemente de los valores asignados a  $m \in \mathbb{N}$  y  $f_b \in \mathbb{R}^+$ , la transformada de Fourier de la ventana  $g$  es una B-Spline. Como  $\hat{\psi}$  no es más que una traslación de  $\hat{g}$  ( $\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_c)$ ), vemos que la función  $\psi$  es una B-Spline en el dominio frecuencial, recibiendo el nombre de Frequency B-Spline.

## 6.2.- Introducción a la función seno cardinal.

Las distintas funciones del tipo ventanas moduladas se diferencian entre sí por el tipo de ventana utilizada para, mediante su modulación en frecuencia adecuada, obtener el átomo tiempo-frecuencia. En el caso de las FBS, la ventana (la función  $g$ ), siempre responde a la siguiente ecuación:

$$g(t) = C_{m,\omega_b} \operatorname{sinc}^m\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right) \quad (6.9)$$

En función de los valores asignados a los parámetros  $m$  y  $\omega_b$ , obtenemos una ventana u otra, pudiendo tener propiedades muy distintas. Sin embargo, todas se basan en la función seno cardinal  $\operatorname{sinc}(t)$ , sobre la cual efectuamos tres operaciones para obtener la ventana:

- Escalamos la función seno cardinal, siendo el parámetro de escalado  $2\pi m/\omega_b$ :  $\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right)$ .
- Elevamos a la potencia  $m$ :  $\operatorname{sinc}^m\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right)$ .
- Normalizamos multiplicando por la constante  $C_{m,\omega_b}$ :  $C_{m,\omega_b} \operatorname{sinc}^m\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right)$ .

Para poder analizar adecuadamente este tipo de ventanas, así como sus propiedades, debemos estudiar previamente la función seno cardinal.

### 6.2.1.- Definición de la función seno cardinal.

Recordemos que existen dos definiciones de la función seno cardinal,  $\operatorname{sinc}(t)$ . Según la primera definición:

$$\operatorname{sinc}_{\text{D1}}(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

La representación gráfica del seno cardinal según la primera definición se muestra en la Fig. 6.1. En este caso, la integral de la función a lo largo de la recta real toma el siguiente valor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}_{\text{D1}}(t) dt = \pi \quad (6.11)$$

Por otra parte, Woodward (1953), McNamee et al. (1971) y Bracewell (1999) adoptan la siguiente definición alternativa que es la que utilizaremos a lo largo del presente texto:

$$\text{sinc}_{D2}(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

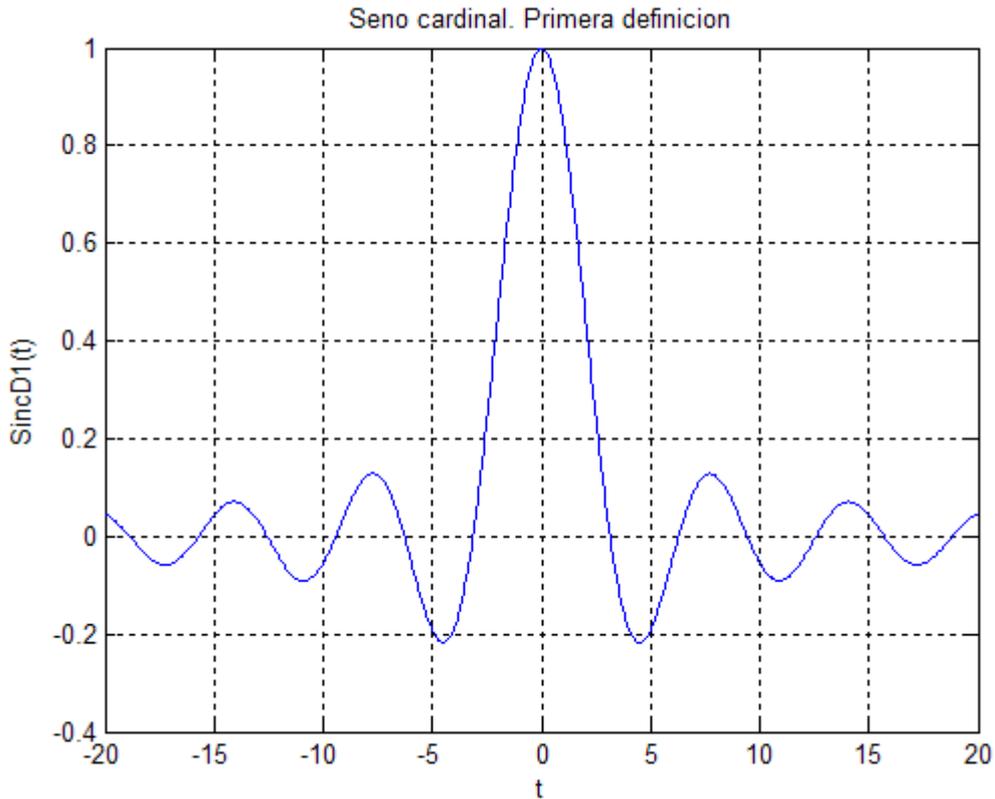


Fig. 6.1 Representación gráfica de la función seno cardinal (primera definición).

Pasamos de la primera a la segunda definición de seno cardinal realizando el cambio de variable  $t' = \pi t$  :

$$\text{sinc}_{D1}(t') = \begin{cases} 1 & t' = 0 \\ \frac{\sin(t')}{t'} & t' \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \end{cases} = \text{sinc}_{D2}(t) \quad (6.13)$$

Resumiendo, si  $t' = \pi t$ , ambas definiciones quedan relacionadas por la ecuación  $\text{sinc}_{D1}(t') = \text{sinc}_{D2}(t)$ . Al pasar de la primera a la segunda definición, hemos realizado un escalado de la función. Su “forma” no ha cambiado, pero en el dominio temporal la función ha quedado “comprimida”. Si la representamos gráficamente obtenemos la Fig. 6.2. En este caso, la integral de la función a lo largo de la recta real toma el siguiente valor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}_{D2}(t) dt = 1 \quad (6.14)$$

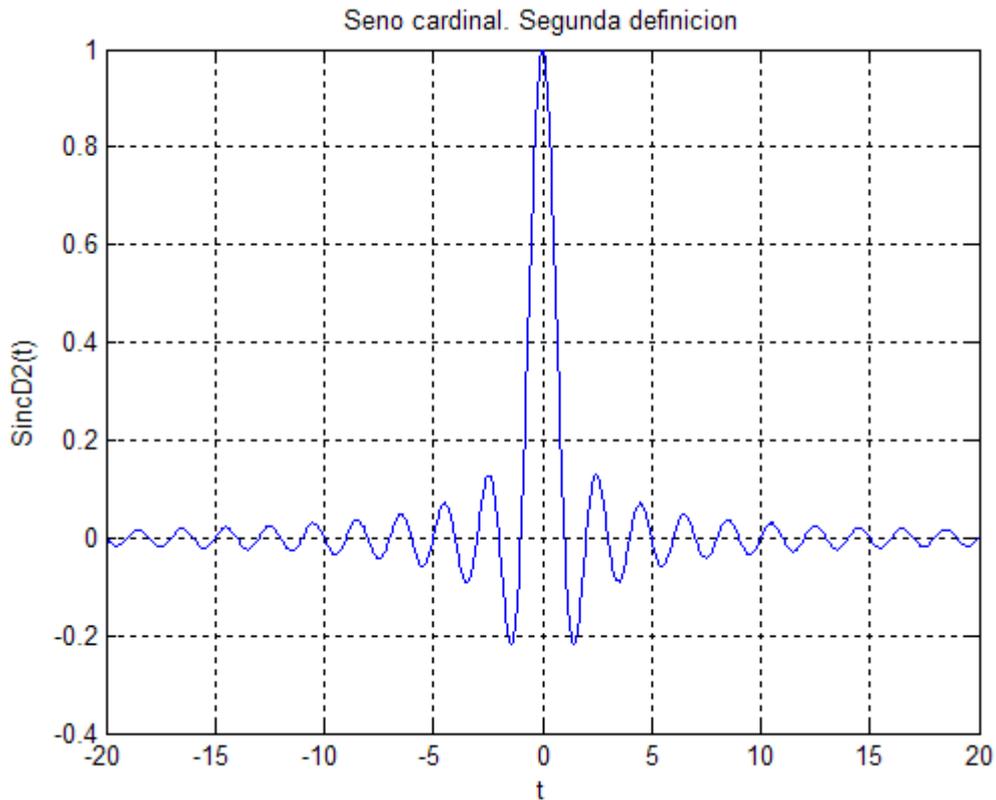


Fig. 6.2 Representación gráfica de la función seno cardinal (segunda definición).

### 6.2.2.- Propiedades de la función seno cardinal.

Veamos algunas de las propiedades de la función seno cardinal, definida de aquí en adelante, según (6.12), es decir:

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

Las propiedades que se estudian a continuación, se utilizarán en el siguiente apartado para analizar si las ventanas utilizadas para construir FBS cumplen con las propiedades que definen a una ventana modulada, citadas en el apartado anterior.

En primer lugar, se trata de una función real. Las imágenes se calculan para todo  $t \neq 0$  dividiendo dos números reales:  $[\sin(\pi t)]/(\pi t)$ . El resultado de dicha operación es un número real salvo en el caso  $t=0$ , para el cual obtenemos como resultado una indeterminación del tipo  $0/0$ . Este problema se resuelve definiendo la imagen en dicho punto de forma distinta como:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 1 \quad (6.16)$$

En segundo lugar, se trata de una función par:

$$\operatorname{sinc}(-t) = \frac{\sin(\pi(-t))}{\pi(-t)} = \frac{-\sin(\pi t)}{-\pi t} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \operatorname{sinc}(t) \quad \forall t \neq 0 \quad (6.17)$$

Antes de continuar, y aunque las definiciones se encuentran también de forma más extensa en el apéndice matemático (apartado AM 1), recordamos que el conjunto  $L^1(\mathbb{R})$  está compuesto por las funciones llamadas Lebesgue integrables. Es decir:

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \right\} \quad (6.18)$$

Por otra parte,  $L^2(\mathbb{R})$  es el conjunto de las funciones de energía finita:

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\} \quad (6.19)$$

El seno cardinal no es Lebesgue integrable. En otras palabras  $\operatorname{sinc}(t) \notin L^1(\mathbb{R})$ . O lo que es lo mismo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sinc}(t)| dt = \infty \quad (6.20)$$

Por otra parte, se trata de una función de energía finita:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sinc}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(t) dt = 1 \quad (6.21)$$

Concluimos que  $\operatorname{sinc}(t) \notin L^1(\mathbb{R})$  pero  $\operatorname{sinc}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ .

En cuarto lugar, calculemos la TF del seno cardinal. Como  $\operatorname{sinc}(t) \in L^2(\mathbb{R})$  pero  $\operatorname{sinc}(t) \notin L^1(\mathbb{R})$ , debemos utilizar la definición de TF relativa a las funciones de energía finita. Recordemos previamente la definición de función rectangular o, abreviadamente *rect* :

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{a}\right) = 1_{\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]} = \begin{cases} 1 & t \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ 0 & t \notin \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \end{cases} \quad (6.22)$$

donde  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  es un parámetro de escalado. La TF del seno cardinal es<sup>3</sup>:

---

<sup>3</sup> La definición de Transformada de Fourier utilizada en el presente texto, así como algunas de sus propiedades, se exponen en el Apéndice, sección A.2.

Capítulo 6.

$$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 1_{[-\pi, \pi]} \quad (6.23)$$

Más generalmente, la TF de  $\text{sinc}(at)$  es:

$$\frac{1}{|a|} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) = \frac{1}{|a|} 1_{[-\pi a, \pi a]} = \begin{cases} \frac{1}{|a|} & \omega \in [-\pi a, \pi a] \\ 0 & \omega \notin [-\pi a, \pi a] \end{cases} \quad (6.24)$$

Podemos calcular también la energía del seno cardinal utilizando su TF y la formula de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\omega = 1 \quad (6.25)$$

Presentamos a continuación el resultado de la siguiente integral en la cual participa la función seno cardinal. Dicho resultado se utilizará en los próximos apartados:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}(t)|^4 dt = \frac{2}{3} \quad (6.26)$$

Tal y como decíamos al principio, en función de los valores asignados a los parámetros  $m$  y  $\omega_b$ , obtenemos una ventana u otra. En particular, tomando  $m=1$ ,  $\omega_b = 2\pi$ , obtenemos la función seno cardinal:

$$g_{m=1, \omega_b=2\pi}(t) = \text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

## 6.3.- Estudio de las propiedades de la ventana utilizada.

En el presente apartado estudiaremos las propiedades de la ventana utilizada para construir FBS. Dichas propiedades influyen directamente sobre las propiedades de la función construida por modulación en frecuencia de la ventana (tal y como se vio en el apartado AM 2.1). En el caso de las FBS, la ventana es siempre una función del tipo:

$$g(t) = C_{m,\omega_b} \operatorname{sinc}^m\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right) \quad (6.28)$$

donde  $C_{m,\omega_b}$  es la constante de normalización definida como sigue:

$$C_{m,\omega_b} = \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{sinc}(x)]^{2m} dx}} \quad (6.29)$$

Esta constante garantiza (6.3.5), que la energía de la ventana (y por tanto la energía del átomo tiempo-frecuencia), es igual a 1. En definitiva, a continuación se prueba que la ventana de una FBS cumple (salvo en un único caso), con las propiedades expuestas en AM 2.1 y que por tanto en el siguiente apartado se pueden utilizar las formulas expuestas en AM 2.2 y AM 2.3 para calcular la pendiente de la caja.

### 6.3.1.- Ventana real.

Empecemos estudiando si se trata de una función real, esto es  $g(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}$ . Ya se demostró en el primer apartado que  $C_{m,\omega_b} \in \mathbb{R}^+ \forall m \in \mathbb{N}, \forall \omega_b \in \mathbb{R}^+$ . Por otra parte, en el segundo apartado hemos visto que la función seno cardinal es una función real. Concluimos que la función  $g$  también lo es pues las potencias y productos de números reales dan como resultado números reales. Para finalizar, cabe considerar la posible aparición de una de las siguientes indeterminaciones:  $0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ . Como  $m \neq 0, m \neq \infty$  no puede aparecer una indeterminación al resolver la operación consistente en “elevar a  $m$ ”. Como  $C_{m,\omega_b} \neq 0, C_{m,\omega_b} \neq \infty$  no puede aparecer una indeterminación al resolver la operación producto.

### 6.3.2.- Ventana par.

Estudiemos si se trata de una función par. Teniendo en cuenta que, tal y como se demostró en el apartado anterior, el seno cardinal es una función par:

$$g(-t) = C_{m,\omega_b} \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_b(-t)}{2\pi m}\right) \right]^m = C_{m,\omega_b} \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right) \right]^m = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (6.30)$$

Concluimos que se trata efectivamente de una función par.

### 6.3.3.- Ventana Lebesgue integrable.

Estudiemos a continuación si  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Calculemos la integral del módulo de  $g$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| C_{m,\omega_b} \operatorname{sinc}^m \left( \frac{\omega_b t}{2\pi m} \right) \right| dt = C_{m,\omega_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}^m \left( \frac{\omega_b t}{2\pi m} \right) \right| dt \quad (6.31)$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t' = \frac{\omega_b t}{2\pi m} \Rightarrow t = \frac{2\pi m}{\omega_b} t' \Rightarrow dt = \frac{2\pi m}{\omega_b} dt' \quad (6.32)$$

Si  $t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty$

Finalmente obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = C_{m,\omega_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}^m(t') \right| \frac{2\pi m}{\omega_b} dt' = C_{m,\omega_b} \frac{2\pi m}{\omega_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}^m(t') \right| dt' \quad (6.33)$$

Por otra parte, como  $C_{m,\omega_b} \frac{2\pi m}{\omega_b} \in \mathbb{R}^+$  llegamos a la siguiente conclusión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = C_{m,\omega_b} \frac{2\pi m}{\omega_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}^m(t) \right| dt < +\infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}^m(t) \right| dt < +\infty \quad (6.34)$$

O lo que es lo mismo:

$$g \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}^m(t) \right| dt < +\infty \quad (6.35)$$

Tal y como hemos visto en el apartado anterior:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}(t) \right| dt = +\infty \quad (6.36)$$

Por tanto  $g_{m=1} \notin L^1(\mathbb{R})$ . ¿Qué ocurre para  $m \geq 2$ ? En primer lugar recordamos el valor de la energía de la función seno cardinal, calculada también en el apartado anterior:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}(t) \right|^2 dt = 1 \quad (6.37)$$

Teniendo en cuenta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}^2(t) \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \operatorname{sinc}(t) \right|^2 dt = 1 \quad (6.38)$$

concluimos que  $g_{m=2} \in L^1(\mathbb{R})$ .

Veamos el resto de casos. Sabemos que:

$$|\text{sinc}(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (6.39)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} |\text{sinc}^m(t)| &= |\text{sinc}(t) \text{sinc}^{m-1}(t)| = \\ &= |\text{sinc}(t)| |\text{sinc}^{m-1}(t)| \leq |\text{sinc}^{m-1}(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Aplicando este resultado sucesivamente obtenemos:

$$|\text{sinc}^m(t)| \leq |\text{sinc}^{m-1}(t)| \leq |\text{sinc}^{m-2}(t)| \leq \dots \leq |\text{sinc}^2(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall m \geq 2 \quad (6.41)$$

Lo cual nos permite escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}^m(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}^2(t)| dt = 1 < +\infty \quad \forall m \geq 2 \quad (6.42)$$

O de forma más compacta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}^m(t)| dt \leq 1 < +\infty \quad \forall m \geq 2 \quad (6.43)$$

Lo cual significa que  $g_m \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall m \geq 2$ .

### 6.3.4.- Transformada de Fourier de la ventana.

Calculemos seguidamente la transformada de Fourier de la función  $g$ . Analicemos previamente la función rectangular escalada mediante un parámetro de escalado  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  y multiplicada por una constante  $C \in \mathbb{R}$ :  $C \cdot \text{rect}(t/a)$ . Veamos si pertenece a  $L^1(\mathbb{R})$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| C \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \right| dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} |C| dt = |C|a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad (6.44)$$

Por tanto  $C \cdot \text{rect}(t/a) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}$ . Por otra parte, la TF de  $C \cdot \text{rect}(t/a)$  es:

$$C|a|\operatorname{sinc}\left(\frac{a\omega}{2\pi}\right) \quad (6.45)$$

Consideremos la siguiente función, resultado de convolucionar entre sí  $m$  funciones rectangulares iguales escaladas mediante un parámetro de escalado  $a = \omega_b/m \in \mathbb{R}^+$  y multiplicadas por la constante  $C = m/\omega_b \sqrt[m]{C_{m,\omega_b}} \in \mathbb{R}^+$ :

$$f(t) = \frac{m}{\omega_b} \sqrt[m]{C_{m,\omega_b}} \operatorname{rect}\left(\frac{m}{\omega_b}t\right) * \dots * \frac{m}{\omega_b} \sqrt[m]{C_{m,\omega_b}} \operatorname{rect}\left(\frac{m}{\omega_b}t\right) \quad (6.46)$$

donde  $*$  simboliza el producto de convolución, el cual se ha aplicado  $m-1$  veces. Como todas las funciones que participan en las  $m-1$  convoluciones pertenecen a  $L^1(\mathbb{R})$ , resulta de aplicación el Teorema de Convolución el cual asegura que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y su TF es el producto de las TF de las funciones convolucionadas:

$$\hat{f}(\omega) = \left[ \frac{m}{\omega_b} \sqrt[m]{C_{m,\omega_b}} \left| \frac{\omega_b}{m} \right| \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_b\omega}{2\pi m}\right) \right]^m = C_{m,\omega_b} \operatorname{sinc}^m\left(\frac{\omega_b\omega}{2\pi m}\right) \quad (6.47)$$

Observe el lector que la función  $\hat{f}$  es idéntica a la ventana  $g$ . Recordemos la siguiente propiedad (propiedad 3 del apéndice matemático, apartado AM 1): sea una función  $f$  tal que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Sea  $\hat{f}$  su FT tal que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Si  $\hat{f}$  es par, entonces  $2\pi f$  es la Transformada de Fourier de  $\hat{f}$ . Dado que nuestra función  $f$  definida en (6.46) cumple estas condiciones (salvo  $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$  si  $m=1$ ), concluimos que la TF de:

$$g(t) = C_{m,\omega_b} \operatorname{sinc}^m\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right) \quad (6.48)$$

es:

$$\hat{g}(\omega) = 2\pi \left(\frac{m}{\omega_b}\right)^m C_{m,\omega_b} \left[ \operatorname{rect}\left(\frac{m}{\omega_b}\omega\right) * \dots * \operatorname{rect}\left(\frac{m}{\omega_b}\omega\right) \right] \quad (6.49)$$

Aunque no se cumple una de las hipótesis en el caso  $m=1$ , la fórmula también es válida en este caso. Tal y como se estudió en el apartado anterior, la TF del seno cardinal escalado  $\operatorname{sinc}(at)$  es la función rectangular indicada en (6.24). Resulta fácil comprobar que, cuando el seno cardinal se escala concretamente como en (6.48) al tomar  $m=1$  (escalar tomando  $a = \omega_b/2\pi m$  y multiplicando por  $C_{m,\omega_b}$ ), su TF es, aplicando (6.24), la misma función rectangular indica por (6.49) al tomar  $m=1$ .

La función  $\operatorname{rect}(m\omega/\omega_b)$  es una función de soporte compacto siendo dicho soporte  $[-\omega_b/(2m), \omega_b/(2m)]$ . Es fácil ver que, al convolucionar  $m$  funciones del

tipo  $\text{rect}(m\omega/\omega_b)$  la función resultante es también de soporte compacto siendo su soporte  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$ . Concluimos que la función  $\hat{g}$  es de soporte compacto siendo dicho soporte  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$ .

Veamos algunos casos particulares. Calculemos la TF de  $g_{m=1}$ . En primer lugar, la constante  $C_{m,\omega_b}$  para el caso  $m=1$  vale:

$$C_{1,\omega_b} = \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^2 dx}} = \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi}} \quad (6.50)$$

Con lo cual obtenemos:

$$\hat{g}_{m=1}(\omega) = 2\pi \left(\frac{1}{\omega_b}\right)^1 C_{1,\omega_b} \text{rect}\left(\frac{1}{\omega_b}\omega\right) = \frac{2\pi}{\omega_b} \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi}} \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_b}} \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right) \quad (6.51)$$

Se trata pues de una B-Spline de orden 1. La Fig. 6.3 muestra la representación gráfica (en azul) de (6.51) tomando  $\omega_b = 0.8$ , es decir, representa gráficamente la siguiente función:

$$\hat{g}_{m=1,\omega_b=0.8}(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{0.8}} \text{rect}\left(\frac{\omega}{0.8}\right) \quad (6.52)$$

Veamos otro caso particular. Calculemos la TF de  $g_{m=2}$ . Recordemos previamente la definición de función triangular o, abreviadamente tri :

$$\text{tri}\left(\frac{t}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{a}\right| & t \in [-a, a] \\ 0 & t \notin [-a, a] \end{cases} \quad (6.53)$$

donde  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  es un parámetro de escalado. Recordemos también que, la función triangular se puede expresar como el producto de convolución de dos funciones rectangulares de la siguiente forma:

$$\text{tri}\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a} \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \quad (6.54)$$

Calculemos seguidamente la constante  $C_{m,\omega_b}$  para el caso  $m=2$  :

$$C_{2,\omega_b} = \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^4 dx}} = \sqrt{\frac{\omega_b}{4\pi \frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3\omega_b}{8\pi}} \quad (6.55)$$

Con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{m=2}(\omega) &= 2\pi \left(\frac{2}{\omega_b}\right)^2 C_{2,\omega_b} \left[ \text{rect}\left(\frac{2}{\omega_b}\omega\right) * \text{rect}\left(\frac{2}{\omega_b}\omega\right) \right] = \\ &= \frac{8\pi}{\omega_b^2} \sqrt{\frac{3\omega_b}{8\pi}} \frac{\omega_b}{2} \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) = \sqrt{\frac{6\pi}{\omega_b}} \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \end{aligned} \quad (6.56)$$

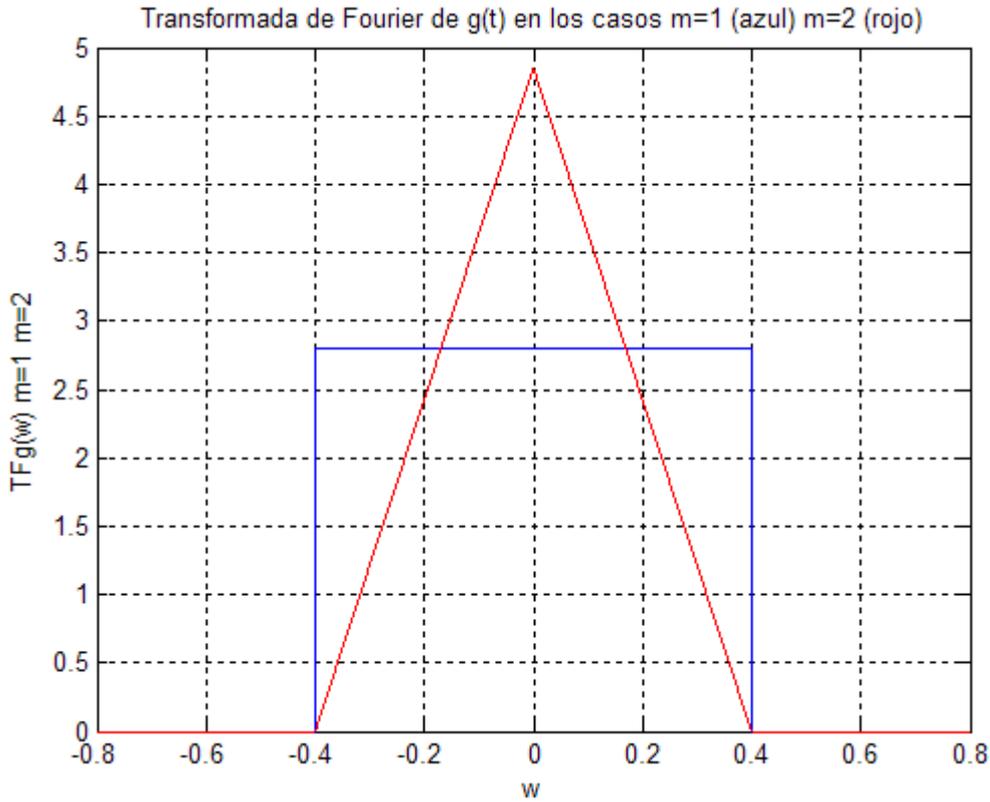


Fig. 6.3 Representación gráfica de  $\hat{g}$ :  $m=1$ ,  $\omega_b=0.8$  (azul) y  $m=2$ ,  $\omega_b=0.8$  (rojo).

Se trata pues de una B-Spline de orden 2. La Fig. 6.3 muestra la representación gráfica (en rojo) de (6.56) tomando  $\omega_b=0.8$ , es decir, representa gráficamente la siguiente función:

$$\hat{g}_{m=2,\omega_b=0.2\pi}(\omega) = \sqrt{\frac{3\pi}{0.8}} \text{tri}\left(\frac{\omega}{0.4}\right) \quad (6.57)$$

Según el análisis realizado anteriormente, la función  $\hat{g}$  es de soporte compacto, independientemente de los valores asignados a  $m$  y a  $\omega_b$ . Concretamente, su soporte es igual a  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$ , siendo por tanto independiente de  $m$ . La longitud del soporte es igual a  $\omega_b$ . Por esta razón llamamos a  $\omega_b$  el ancho de banda. En los casos representados gráficamente tomamos  $\omega_b=0.8$ . Por tanto el soporte resulta ser  $[-\omega_b/2, \omega_b/2] = [-0.4, 0.4]$ , tal y como se ve en la Fig. 6.3.

### 6.3.5.- Energía de la ventana.

Ocupémonos a continuación de calcular la energía de  $g$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| C_{m,\omega_b} \operatorname{sinc}^m \left( \frac{\omega_b t}{2\pi m} \right) \right|^2 dt = C_{m,\omega_b}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^{2m} \left( \frac{\omega_b t}{2\pi m} \right) dt \quad (6.58)$$

Recordamos que  $\omega_b/(2\pi m) \in \mathbb{R}^+$ . Realizando el siguiente cambio de variable:

$$t' = \frac{\omega_b t}{2\pi m} \Rightarrow t = \frac{2\pi m}{\omega_b} t' \Rightarrow dt = \frac{2\pi m}{\omega_b} dt' \quad (6.59)$$

$$\text{Si } t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty$$

tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = C_{m,\omega_b}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^{2m}(t') \frac{2\pi m}{\omega_b} dt' = \frac{2\pi m}{\omega_b} C_{m,\omega_b}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^{2m}(t') dt' \quad (6.60)$$

Teniendo en cuenta el valor de la constante de normalización:

$$C_{m,\omega_b} = \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{sinc}(x)]^{2m} dx}} \Rightarrow C_{m,\omega_b}^2 = \frac{\omega_b}{2\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{sinc}(x)]^{2m} dx} \quad (6.61)$$

obtenemos finalmente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1 \quad (6.62)$$

Donde, para cancelar los términos se ha tenido en cuenta que:

$$m \in \mathbb{N}, \omega_b \in \mathbb{R}^+, 0 < \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{sinc}(x)]^m dx \leq 1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (6.63)$$

Concluimos que  $g \in L^2(\mathbb{R}) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall \omega_b \in \mathbb{R}^+$ , siendo además su energía unitaria.

## 6.4.- Cálculo de la pendiente de las Frequency B-Splines.

En el presente punto se obtiene la fórmula que permite calcular la pendiente de la caja de Heisenberg de una FBS en función de los valores de sus parámetros. El concepto de pendiente de un átomo tiempo-frecuencia, introducido en el apartado 4.2.1, se define en esencia como el cociente entre la altura y la base de su caja de Heisenberg. Obtener esta fórmula es imprescindible para poder aplicar la metodología de diagnóstico expuesta en el capítulo 4. Más concretamente, el criterio de asignación de parámetros al átomo tiempo-frecuencia establecido y utilizado en la metodología (definido en 4.2.4 como criterio de la pendiente), precisa, para poder ser aplicado, de la fórmula aquí deducida, que liga la pendiente de la caja de una FBS con los valores de sus parámetros.

### 6.4.1.- Recapitulación y uso de los resultados del apéndice matemático.

En el apartado 6.3 se demuestra que la ventana utilizada para construir las FBS, cumple con las siguientes seis propiedades, sean cuales sean los valores asignados a sus parámetros ( $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \omega_b \in \mathbb{R}^+$  y  $\forall \omega_c \in \mathbb{R}^+$ ), con la excepción de  $m = 1$ , en cuyo caso la función no es Lebesgue integrable, esto es  $g_{m=1} \notin L^1(\mathbb{R})$ :

- $g$  es real.
- $g$  es par.
- $g \in L^1(\mathbb{R})$
- Su TF  $\hat{g}$  es de soporte compacto, siendo dicho soporte  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$ .
- $g \in L^2(\mathbb{R})$
- Su energía es igual a 1:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ .

Por lo tanto, aplicando la propiedad demostrada en el apartado AM 2.1 concluimos que, asignando valores a los parámetros  $m \in \mathbb{N}, m \neq 1$ ,  $\omega_b \in \mathbb{R}^+$  y  $\omega_c \in \mathbb{R}^+$  cumpliendo  $\omega_c > \omega_b/2$ , la función que obtenemos al sustituir dichos valores en la siguiente ecuación:

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx}} \text{sinc}^m\left(\frac{\omega_b t}{2\pi m}\right) \exp(i\omega_c t) \quad (6.64)$$

es una función analítica, estando además su energía confinada frecuencialmente en el intervalo  $[\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2]$  y distribuida alrededor de  $\omega_c$ . La función recibe el nombre de FBS y posee las propiedades adecuadas para ser un átomo tiempo-frecuencia. Más concretamente, la función definida en (6.64) responde a lo que en AM 2 se definió como ventana modulada.

Además, tras demostrar que la ventana cumple con las propiedades indicadas, son de aplicación las formulas (AM 2.26), (AM 2.32) y (AM 2.40), deducidas en el apéndice matemático, apartados AM 2.2 y AM 2.3. En el siguiente subapartado, el uso de estas fórmulas permite calcular la formula que determina la pendiente de las FBS en función de sus parámetros. Esta formula a su vez permite, aplicando el criterio de la pendiente establecido en el apartado 4.2.4, asignar valores a los parámetros  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_b \in \mathbb{R}^+$  y  $\omega_c \in \mathbb{R}^+$ , para definir la FBS a utilizar en cada punto del plano tiempo-frecuencia.

### 6.4.2.- Cálculo de las cajas de Heisenberg.

Calculemos primero la frecuencia central de la función así como las dimensiones de su caja de Heisenberg. El cálculo de la frecuencia central de la función resulta inmediato. La ventana utilizada para construir FBS cumple las propiedades requeridas para utilizar la ecuación (AM 2.26) reproducida a continuación:

$$\eta = \omega_c \tag{6.65}$$

Por esta razón, llamamos desde un inicio frecuencia central de la función al parámetro  $f_c$ . Por otra parte, también se cumplen las condiciones necesarias para utilizar las ecuaciones (AM 2.32) y (AM 2.40) reproducidas a continuación:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \tag{6.66}$$

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|^2 dt \tag{6.67}$$

Calculemos la altura de la Caja de Heisenberg. Es decir, calculemos  $\sigma_\omega$ . Sustituyendo (6.61) en (6.49) obtenemos:

$$\hat{g}(\omega) = 2\pi \left(\frac{m}{\omega_b}\right)^m \sqrt{\frac{\omega_b}{2\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx}} \left[ \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b} \omega\right) * \dots * \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b} \omega\right) \right] \tag{6.68}$$

Calculamos  $|\hat{g}(\omega)|^2$ :

$$\begin{aligned} |\hat{g}(\omega)|^2 &= 4\pi^2 \left(\frac{m}{\omega_b}\right)^{2m} \frac{\omega_b}{2\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx} \left[ \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b} \omega\right) * \dots * \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b} \omega\right) \right]^2 = \\ &= 2\pi \left(\frac{m}{\omega_b}\right)^{2m-1} \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx} \left[ \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b} \omega\right) * \dots * \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b} \omega\right) \right]^2 \end{aligned} \tag{6.69}$$

Capítulo 6.

Sustituyendo en (6.66) y recordando que la función  $\hat{g}$  es de soporte compacto siendo dicho soporte  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$  obtenemos finalmente:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx} \left(\frac{m}{\omega_b}\right)^{2m-1} \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \omega^2 \left[ \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b}\omega\right) * \dots * \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b}\omega\right) \right]^2 d\omega \quad (6.70)$$

Obtengamos la expresión que determina  $\sigma_\omega$  en el caso particular  $m = 2$ . Fijando  $m = 2$  tenemos:

$$\frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^{2m} dx} \left(\frac{m}{\omega_b}\right)^{2m-1} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinc}(x)]^4 dx} \left(\frac{2}{\omega_b}\right)^{4-1} = \frac{1}{2/3} \frac{8}{\omega_b^3} = \frac{12}{\omega_b^3} \quad (6.71)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \omega^2 \left[ \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b}\omega\right) * \dots * \text{rect}\left(\frac{m}{\omega_b}\omega\right) \right]^2 d\omega &= \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \omega^2 \left[ \text{rect}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) * \text{rect}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \right]^2 d\omega = \\ &= \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \omega^2 \left[ \frac{\omega_b}{2} \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \right]^2 d\omega = \frac{\omega_b^2}{4} \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \omega^2 \left[ \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \right]^2 d\omega = \frac{\omega_b^2}{4} \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \left[ \omega \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \right]^2 d\omega \end{aligned} \quad (6.72)$$

Finalmente obtenemos:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{12}{\omega_b^3} \frac{\omega_b^2}{4} \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \left[ \omega \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \right]^2 d\omega = \frac{3}{\omega_b} \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \left[ \omega \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \right]^2 d\omega \quad (6.73)$$

Tan solo nos queda resolver la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\omega_b}{2}}^{+\frac{\omega_b}{2}} \left[ \omega \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \right]^2 d\omega &= 2 \int_0^{+\frac{\omega_b}{2}} \left[ \omega \text{tri}\left(\frac{2\omega}{\omega_b}\right) \right]^2 d\omega = 2 \int_0^{+\frac{\omega_b}{2}} \left[ \omega - \frac{2}{\omega_b} \omega^2 \right]^2 d\omega = \\ &= 2 \int_0^{+\frac{\omega_b}{2}} \left[ \omega^2 + \frac{4}{\omega_b^2} \omega^4 - \frac{4}{\omega_b} \omega^3 \right] d\omega = 2 \left[ \frac{\omega^3}{3} + \frac{4}{\omega_b^2} \frac{\omega^5}{5} - \frac{4}{\omega_b} \frac{\omega^4}{4} \right]_0^{+\frac{\omega_b}{2}} = \\ &= 2 \left[ \frac{\omega_b^3}{24} + \frac{\omega_b^3}{40} - \frac{\omega_b^3}{16} \right] = \frac{\omega_b^3}{120} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Sustituyendo:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{3}{\omega_b} \frac{\omega_b^3}{120} = \frac{\omega_b^2}{40} \Rightarrow \sigma_\omega = \frac{\omega_b}{2\sqrt{10}} \quad (6.75)$$

Calculemos ahora la anchura de la Caja de Heisenberg. Es decir, calculemos  $\sigma_t$ . Sustituyendo (6.28) en (6.67) obtenemos:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| t C_{m,\omega_b} \operatorname{sinc}^m \left( \frac{\omega_b t}{2\pi m} \right) \right|^2 dt = C_{m,\omega_b}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \operatorname{sinc}^{2m} \left( \frac{\omega_b t}{2\pi m} \right) dt \quad (6.76)$$

Recordamos que  $\omega_b/(2\pi m) \in \mathbb{R}^+$ . Realizando el siguiente cambio de variable:

$$t' = \frac{\omega_b}{2\pi m} t \Rightarrow t = \frac{2\pi m}{\omega_b} t' \Rightarrow \begin{cases} t^2 = \left( \frac{2\pi m}{\omega_b} \right)^2 t'^2 \\ dt = \frac{2\pi m}{\omega_b} dt' \end{cases} \quad (6.77)$$

$$\text{Si } t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty$$

Obtenemos:

$$\sigma_t^2 = C_{m,\omega_b}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\pi m}{\omega_b} \right)^2 t'^2 \operatorname{sinc}^{2m}(t') \frac{2\pi m}{\omega_b} dt' = C_{m,\omega_b}^2 \left( \frac{2\pi m}{\omega_b} \right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t'^2 \operatorname{sinc}^{2m}(t') dt' \quad (6.78)$$

Sustituyendo la constante de normalización por su expresión en función de  $\omega_b$  y de  $m$ :

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega_b}{2\pi m \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^{2m}(t) dt} \left( \frac{2\pi m}{\omega_b} \right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \operatorname{sinc}^{2m}(t) dt = \left( \frac{2\pi m}{\omega_b} \right)^2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \operatorname{sinc}^{2m}(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^{2m}(t) dt} \quad (6.79)$$

Finalmente:

$$\sigma_t = \frac{2\pi m}{\omega_b} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \operatorname{sinc}^{2m}(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^{2m}(t) dt}} \quad (6.80)$$

Obtengamos la expresión que determina  $\sigma_t$  en el caso particular  $m = 2$ . Fijando  $m = 2$  tenemos:

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{\omega_b} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \text{sinc}^4(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^4(t) dt}} \quad (6.81)$$

Conociendo el valor de las dos integrales que intervienen en (6.81):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^4(t) dt = \frac{2}{3} \quad (6.82)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \text{sinc}^4(t) dt = \frac{1}{2\pi^2} \quad (6.83)$$

Obtenemos:

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{\omega_b} \sqrt{\frac{\frac{1}{2\pi^2}}{\frac{2}{3}}} = \frac{4\pi}{\omega_b} \sqrt{\frac{3}{4\pi^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\omega_b} \quad (6.84)$$

Concluimos que, en el caso particular  $m = 2$ , los lados de la caja de Heisenberg asociada a la FBS dependen del ancho de banda  $\omega_b$  tal y como indican las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_\omega &= \frac{\omega_b}{2\sqrt{10}} \\ \sigma_t &= \frac{2\sqrt{3}}{\omega_b} \end{aligned} \quad (6.85)$$

Las dimensiones de la caja de Heisenberg asociada a la FBS son independientes de la frecuencia central de la función. Esto es así independientemente del valor asignado a  $m$ . Expresemos (6.85) en función de  $f_b$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\omega &= \frac{\omega_b}{2\sqrt{10}} = \frac{2\pi f_b}{2\sqrt{10}} = \frac{\pi f_b}{\sqrt{10}} \\ \sigma_t &= \frac{2\sqrt{3}}{\omega_b} = \frac{2\sqrt{3}}{2\pi f_b} = \frac{\sqrt{3}}{\pi f_b} \end{aligned} \quad (6.86)$$

Por otra parte, si las unidades de la variable independiente  $t$  de  $\psi(t)$  son segundos (s), las unidades de  $\sigma_t$  son también segundos y las unidades de  $\sigma_\omega$  son rad/s. Expresemos  $\sigma_\omega$  en Hz:

$$\sigma_f = \frac{f_b}{2\sqrt{10}} \quad (6.87)$$

El área de la caja de Heisenberg asociada a una FBS en el caso  $m = 2$  es (expresada en rad):

$$A = \sigma_t \sigma_\omega = \frac{2\sqrt{3}}{\omega_b} \frac{\omega_b}{2\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{3}{10}} \approx 0.55 > \frac{1}{2} = A_{\min} \quad (6.88)$$

Dicha área es independiente del ancho de banda  $\omega_b$  y de la frecuencia central  $\omega_c$ . Si depende del valor asignado a  $m$ . Cumple el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, pues su valor no es menor a  $1/2$ .

Por otra parte, la pendiente de la Caja de Heisenberg asociada a una FBS en el caso  $m = 2$  es:

$$P = \frac{\sigma_\omega}{\sigma_t} = \frac{\omega_b / 2\sqrt{10}}{2\sqrt{3} / \omega_b} = \frac{\omega_b^2}{4\sqrt{30}} \quad (6.89)$$

Al igual que los lados de la Caja de Heisenberg, es independiente de la frecuencia central de la función. Expresándola en función de  $f_b$  y cambiando sus unidades de rad/s<sup>2</sup> a 1/s<sup>2</sup> obtenemos:

$$P = \frac{\sigma_\omega}{\sigma_t} = \frac{f_b / 2\sqrt{10}}{\sqrt{3} / \pi f_b} = \frac{\pi f_b^2}{2\sqrt{30}} \quad (6.90)$$

Esta es la formula que permite aplicar el criterio de la pendiente utilizando FBS para ajustar el átomo tiempo-frecuencia a la evolución del armónico a detectar. Es la formula básica para el empleo de la metodología de diagnóstico.

### 6.4.3.- Transformada de Fourier.

Pasemos a continuación a calcular la TF de una FBS, la cual se utiliza en otras partes de la tesis. Recordemos que:

$$\hat{g}(f) = 2\pi \left( \frac{m}{2\pi f_b} \right)^m C_{m,f_b} \left[ \text{rect} \left( \frac{m}{f_b} f \right) * \dots * \text{rect} \left( \frac{m}{f_b} f \right) \right] \quad (6.91)$$

Teniendo en cuenta la relación  $\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_c)$  obtenemos:

Capítulo 6.

$$\hat{\psi}(f) = 2\pi \left( \frac{m}{2\pi f_b} \right)^m C_{m, f_b} \left[ \text{rect} \left( \frac{m}{f_b} (f - f_c) \right) * \dots * \text{rect} \left( \frac{m}{f_b} (f - f_c) \right) \right] \quad (6.92)$$

En el caso  $m = 1$  tenemos:

$$\hat{\psi}_{m=1}(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_b}} \text{rect} \left( \frac{\omega - \omega_c}{\omega_b} \right) \quad (6.93)$$

En el caso  $m = 2$  tenemos:

$$\hat{\psi}_{m=2}(\omega) = \sqrt{\frac{6\pi}{\omega_b}} \text{tri} \left( \frac{2(\omega - \omega_c)}{\omega_b} \right) \quad (6.94)$$

## 6.5.- Comparación entre las Frequency B-Splines y las funciones de Gabor.

Las funciones de Gabor y las FBS de parámetro entero igual a 2 son átomos tiempo-frecuencia muy parecidos, a pesar de que sus respectivas ventanas están definidas utilizando expresiones analíticas muy distintas (cuyas definiciones se recuerdan más adelante en (6.98) y (6.102)). Se ha escogido utilizar FBS de parámetro entero igual a 2 pues proporcionan un buen valor de compromiso entre sus propiedades en el dominio temporal y sus propiedades en el dominio frecuencial, tal y como se explica en el apartado 4.2.3. En las figuras 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7 se representan respectivamente la parte real, la parte imaginaria, el módulo y la transformada de Fourier de una función de Gabor (rojo) y de una FBS de parámetro entero igual a 2 (azul). Ambos átomos tienen la misma frecuencia central (25 Hz) y cajas de Heisenberg con la misma pendiente (100/6 Hz/s), la cual fija el valor de  $\sigma$  en el caso de la función de Gabor y el valor de  $f_b$  en el caso de la FBS:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi 100/6}} \approx 0.0977 \\ f_b &= \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{P} = \sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{\pi}} \sqrt{\frac{100}{6}} \approx 7.6233 \text{ Hz}\end{aligned}\tag{6.95}$$

La frecuencia central se fija a 25 Hz pues esta es una frecuencia frecuentemente analizada al obtener la evolución del LSH, el cual en el ejemplo del apartado 4.2.4 tiene por otra parte una pendiente de 100/6 Hz/s, a la cual se ajusta la caja de los átomos representados.

Se puede observar cómo, en las partes cercanas al origen, el comportamiento en el dominio temporal de ambas funciones es muy parecido, difiriendo poco a poco a medida que nos alejamos del centro. Al observar la representación del módulo podemos ver como en principio la FBS tiene una mayor velocidad de caída a cero que la función de Gabor, aunque posteriormente presenta oscilaciones importantes de las que la función de Gabor carece. Parece pues que la concentración de la energía en el dominio temporal es mayor en el caso de la función de Gabor. Efectivamente, utilizando las fórmulas (AM 3.59) y (6.86), podemos calcular los lados de sus respectivas cajas relativos al dominio temporal, observando que en el caso de la función de Gabor el lado de la caja es ligeramente inferior:

$$\begin{aligned}\sigma_{iFG} &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{0.0977}{\sqrt{2}} \approx 0.0691 \text{ s} \\ \sigma_{iFBS} &= \frac{\sqrt{3}}{\pi f_b} = \frac{\sqrt{3}}{\pi 7.6233} \approx 0.0723 \text{ s}\end{aligned}\tag{6.96}$$

En el dominio frecuencial, la FBS tiene la forma de una función triangular (calculada en (6.94)), siendo por tanto de soporte compacto (se anula fuera del intervalo  $[-f_b, f_b]$ ). La función de Gabor tiene una transformada de Fourier de formas más suaves (calculada en (AM 3.42)), con una caída a cero aparentemente más lenta y sin

## Capítulo 6.

soporte compacto (no llega nunca a anularse). Aun así, el lado de la caja de Heisenberg relativa al dominio frecuencial es ligeramente mayor en el caso de la FBS:

$$\begin{aligned}\sigma_{JFG} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}0.0977} \approx 1.1516 \text{ Hz} \\ \sigma_{JBS} &= \frac{f_b}{2\sqrt{10}} = \frac{7.6233}{2\sqrt{10}} \approx 1.2054 \text{ Hz}\end{aligned}\tag{6.97}$$

Por otra parte, tal y como ya se ha analizado anteriormente en el capítulo así como en el apéndice matemático, las funciones de Gabor son especialmente conocidas pues el área de su caja de Heisenberg alcanza el mínimo dictado por el principio de incertidumbre de Heisenberg  $A = 1/(4\pi) \approx 0.0796 \text{ Hz} \cdot \text{s}$ . Esta propiedad es muy deseable pues, cuanto menor es el área de la caja, mayor es la resolución de la función de densidad obtenida. Las FBS no alcanzan dicho mínimo, pero llegan extremadamente cerca  $A = \sqrt{0.3}/(2\pi) \approx 0.0872 \text{ Hz} \cdot \text{s}$ .

En definitiva, se trata de dos tipos de átomos bastante parecidos. Las funciones de Gabor tienen cajas de área mínima, pero las FBS tienen una ventaja sobre las funciones de Gabor que se analiza a continuación: consiguen obtener resultados de calidad equivalente con un tiempo de cálculo menor. Así pues, aplicando un primer criterio en el que prima que el átomo posea una caja de Heisenberg de área lo más pequeña posible, pero sin que esto implique tiempos de cálculo demasiado elevados, en la presente tesis todos los átomos utilizados son del tipo FBS de parámetro entero 2.

Ambos tipos de átomos tiempo-frecuencia son funciones complejas que en el dominio temporal (y antes de realizar cualquier tipo de traslación) se encuentran centradas en el origen. Se puede observar en las figuras cómo además tienen una gran velocidad de caída a cero, tanto al tender a más infinito como a menos infinito. Aun así, ninguna de las dos funciones llega nunca a anularse.

Para poder utilizarlas, en primer lugar es necesario, partiendo de su definición, limitar el intervalo de tiempo centrado en el origen tenido en cuenta. En otras palabras, a la hora de realizar cálculos, no se puede tener en cuenta la función completa, desde menos infinito hasta más infinito, debiendo restringirse a un intervalo de tiempo centrado en el origen. Además, dentro de dicho intervalo, no se pueden tomar todos los puntos, se debe muestrear la función con un incremento de tiempo determinado.

El problema de la cantidad de instantes muestreados tiene fácil solución: para poder calcular la correlación, la frecuencia de muestreo del átomo tiempo-frecuencia y la frecuencia de muestreo de la señal a analizar deben ser iguales. La longitud del intervalo considerado alrededor del instante central es más complicada de establecer. Se debe tomar un intervalo suficientemente amplio como para que el valor de la función en los dos límites del intervalo se encuentre suficientemente cerca del cero, asegurando así un determinado nivel de precisión, pero no tanto como para que la función final a utilizar sea demasiado extensa requiriendo elevados tiempos de computación. Para poder dar una respuesta rigurosa al problema se calcula en primer lugar cuánto hay que separarse del origen para que el valor absoluto de la función caiga a un determinado porcentaje, suficientemente pequeño, de su valor máximo.

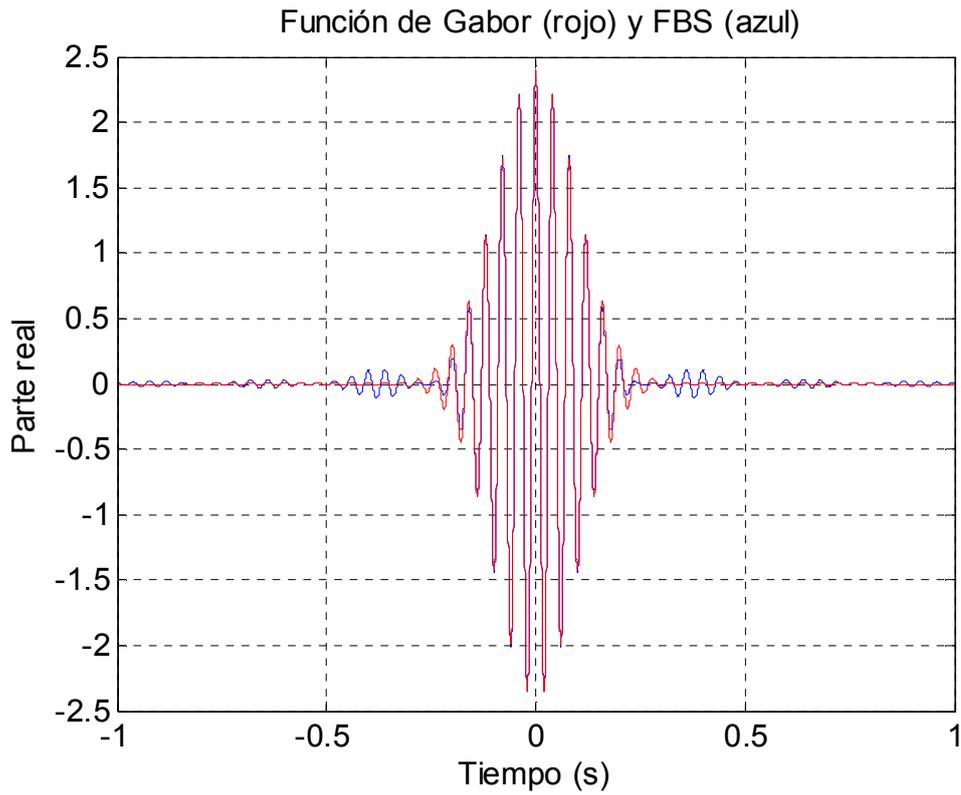


Fig. 6. 4 Parte real de una función de Gabor (rojo) y de una FBS de parámetro entero igual a 2 (azul). Ambos átomos tienen la misma frecuencia central (25 Hz) y cajas de Heisenberg con la misma pendiente (100/6 Hz/s).

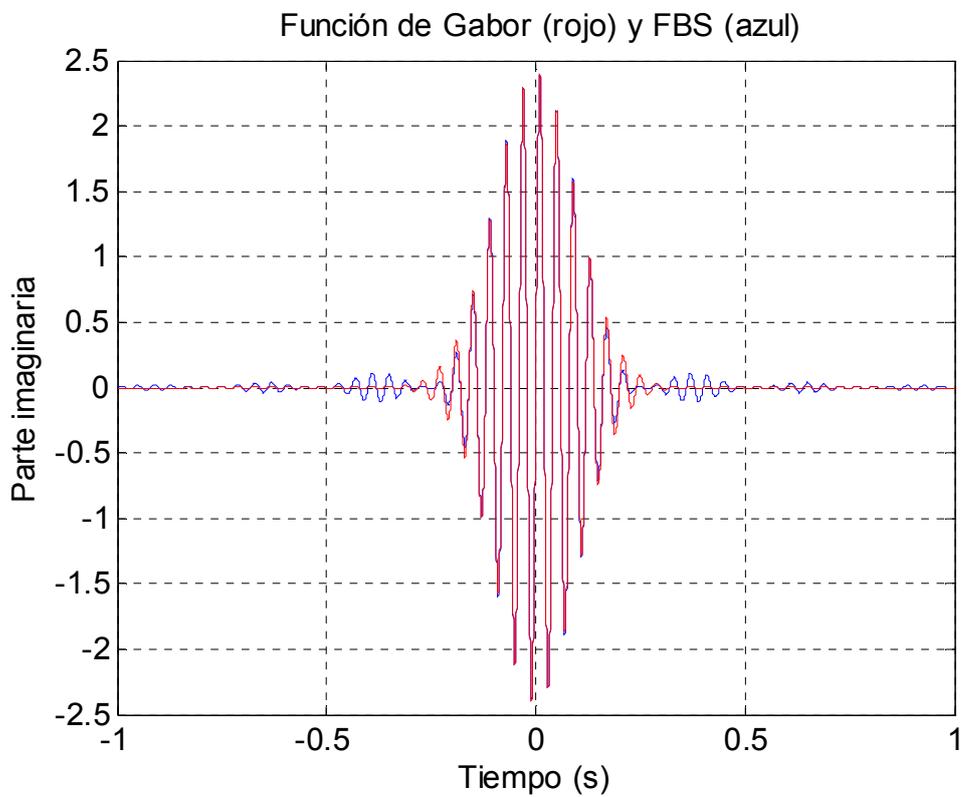
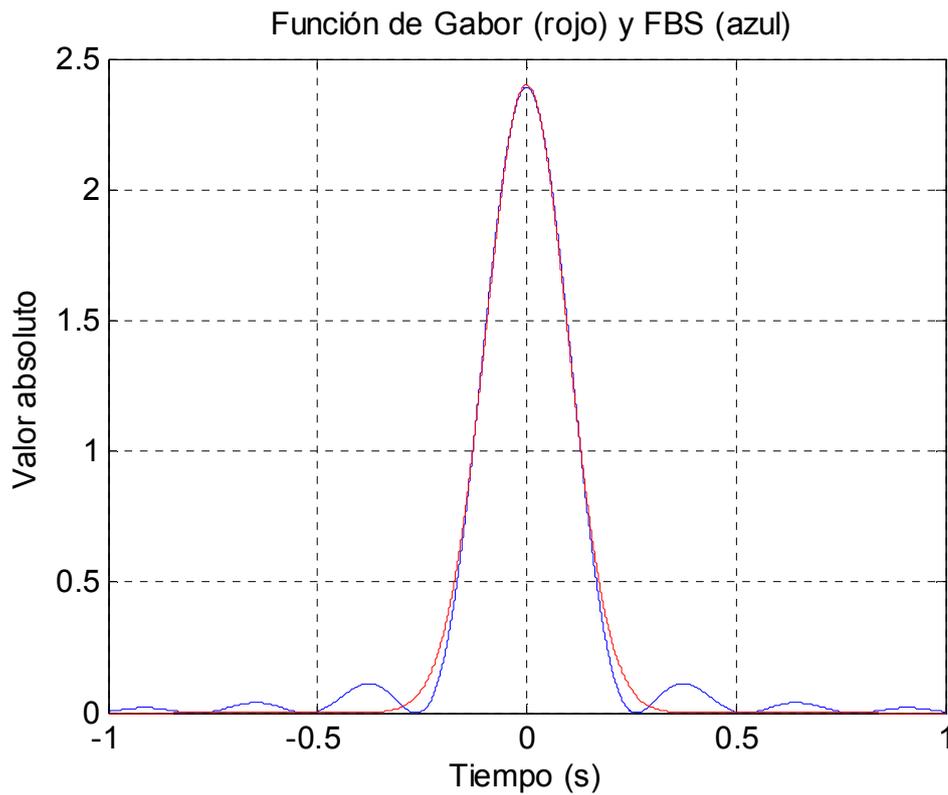
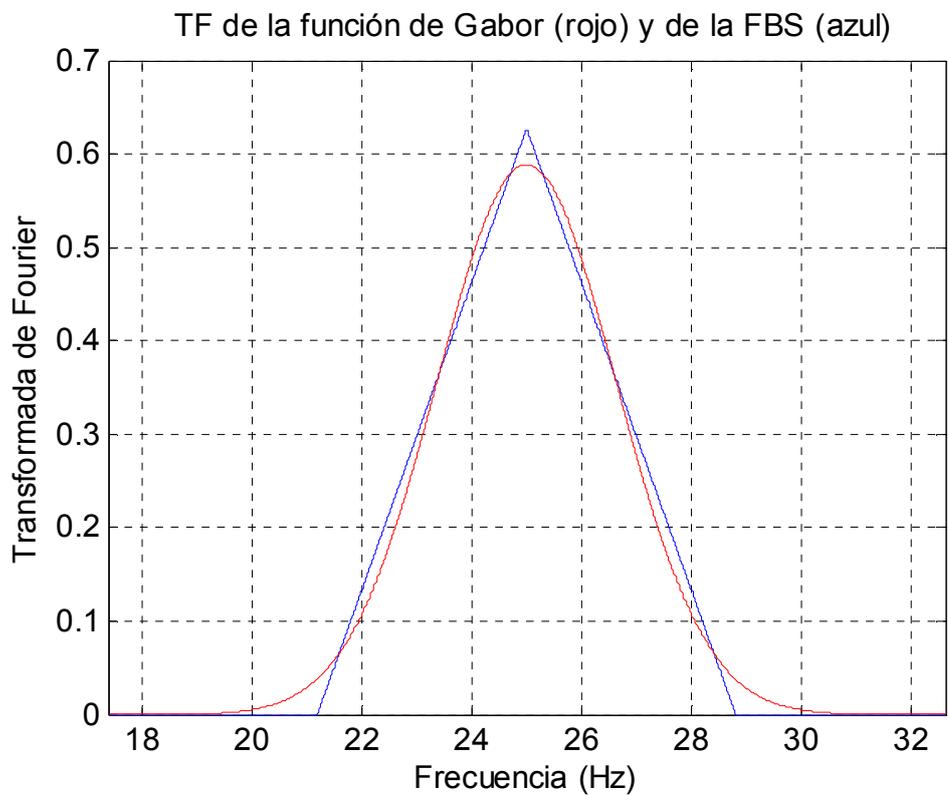


Fig. 6. 5 Parte imaginaria de una función de Gabor (rojo) y de una FBS de parámetro entero igual a 2 (azul). Ambos átomos tienen la misma frecuencia central (25 Hz) y cajas de Heisenberg con la misma pendiente (100/6 Hz/s).



**Fig. 6. 6** Módulo de una función de Gabor (rojo) y de una FBS de parámetro entero igual a 2 (azul). Ambos átomos tienen la misma frecuencia central (25 Hz) y cajas de Heisenberg con la misma pendiente ( $100/6$  Hz/s).



**Fig. 6. 7** Transformada de Fourier de una función de Gabor (rojo) y de una FBS de parámetro entero igual a 2 (azul). Ambos átomos tienen la misma frecuencia central (25 Hz) y cajas de Heisenberg con la misma pendiente ( $100/6$  Hz/s).

Se realiza primero el análisis aplicado a funciones de Gabor. Una función de Gabor viene dada por la siguiente ecuación:

$$\psi(t) = C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{i2\pi f_c t} \quad (6.98)$$

El módulo viene dado por tanto por:

$$|\psi(t)| = C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (6.99)$$

El máximo del módulo de la función aparece en  $t=0$  y es igual a la constante de normalización  $C_\sigma$ . El  $x$  % de dicho máximo viene dado por tanto por:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \% \rightarrow C_\sigma \\ x \% \rightarrow |\psi(t_x)| \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{|\psi(t_x)|}{C_\sigma} = e^{-\frac{t_x^2}{2\sigma^2}} \quad (6.100)$$

Basta con despejar  $t_x$  en la anterior ecuación para conocer cual debe ser la mitad de la longitud del intervalo centrado en el origen a considerar para que en los límites del intervalo el módulo de la función haya descendido hasta un  $x$  % de su valor máximo.

$$\frac{x}{100} = e^{-\frac{t_x^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow -\frac{t_x^2}{2\sigma^2} = \ln\left(\frac{x}{100}\right) \Rightarrow t_x = \sqrt{2}\sigma \sqrt{\ln\left(\frac{100}{x}\right)} \quad (6.101)$$

En segundo lugar, se realiza el análisis aplicado a FBS. Una FBS viene dada por la siguiente ecuación:

$$\psi(t) = C_{m,f_b} \left[ \text{sinc}\left(\frac{f_b t}{m}\right) \right]^m e^{i2\pi f_c t} \quad (6.102)$$

El módulo viene dado por tanto por:

$$|\psi(t)| = C_{m,f_b} \left[ \left| \text{sinc}\left(\frac{f_b t}{m}\right) \right| \right]^m \quad (6.103)$$

El máximo del módulo de la función aparece en  $t=0$  y es igual a la constante de normalización  $C_{m,f_b}$ . El  $x$  % de dicho máximo viene dado por tanto por:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \% \rightarrow C_{m,f_b} \\ x \% \rightarrow |\psi(t_x)| \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{|\psi(t_x)|}{C_{m,f_b}} = \left[ \left| \text{sinc}\left(\frac{f_b t_x}{m}\right) \right| \right]^m \quad (6.104)$$

Utilizando la definición de seno cardinal tenemos:

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{f_b t_x}{m}\right) = \frac{\sin(\pi f_b t_x / m)}{\pi f_b t_x / m} \Rightarrow \frac{x}{100} = \left| \left[ \frac{\sin(\pi f_b t_x / m)}{\pi f_b t_x / m} \right]^m \right| \quad (6.105)$$

Para poder despejar  $t_x$ , se sustituye la función sinusoidal por su máximo valor: la unidad.

$$\frac{x}{100} = \left| \left[ \frac{1}{\pi f_b t_x / m} \right]^m \right| \Rightarrow t_x = \frac{m}{\pi f_b} \sqrt[m]{\frac{100}{x}} \quad (6.106)$$

Desde el punto de vista del estudio del módulo de la función, esta simplificación resulta equivalente a suprimir las oscilaciones que introduce el seno y trabajar con una especie de envolvente de dicho módulo, salvo en las cercanías al cero donde, tal y como se observa en la Fig. 6.8, la función modificada (dibujada en rojo) se dispara hacia el infinito. Esta singularidad no afecta al análisis, pues lo que en definitiva se estudia es el tiempo  $t_x$  a considerar para que la función roja caiga a un  $x$  % de  $C_{m, f_b}$ , siendo  $x$  % un valor relativamente bajo, lo cual no sucede en las inmediaciones del origen.

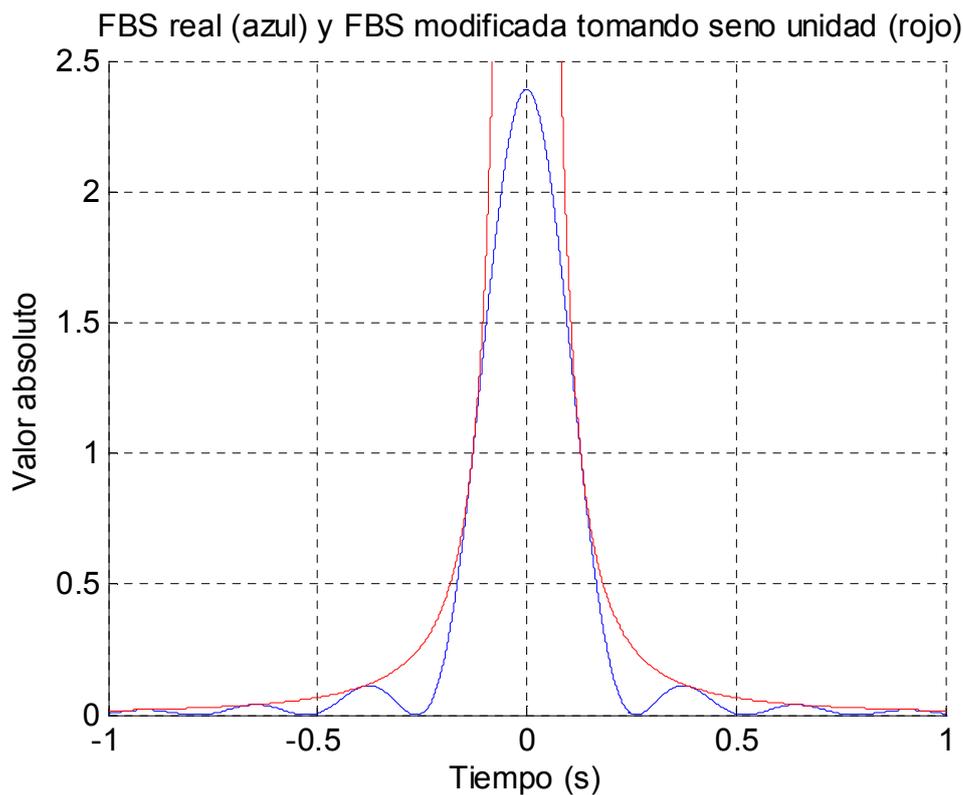


Fig. 6. 8 Módulo de la FBS real (azul) y de la FBS modificada tomando seno unidad (rojo).

Las dos fórmulas (6.101) y (6.106) permiten conocer el ancho del intervalo a considerar centrado alrededor del máximo del átomo para que se tenga en cuenta la función hasta que se produce una caída del  $x$  % del máximo. Para poder comparar ambas fórmulas, y los tiempos de cálculo que implican (el cual determinará cuál de los dos átomos se escoge finalmente), se utilizan las ecuaciones que determinan las

pendientes de las cajas de Heisenberg de las funciones de Gabor y las FBS en función de sus parámetros...

$$\begin{aligned}
 P_{FG} &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_{FG}}} \Rightarrow \sqrt{2}\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi P_{FG}}} \\
 P_{FBS} &= \frac{\pi f_b^2}{2\sqrt{30}} \Rightarrow \frac{1}{f_b} = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{30}P_{FBS}}} \Rightarrow \frac{2}{\pi f_b} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{30}}} \frac{1}{\sqrt{\pi P_{FBS}}}
 \end{aligned} \tag{6.107}$$

Obteniendo...

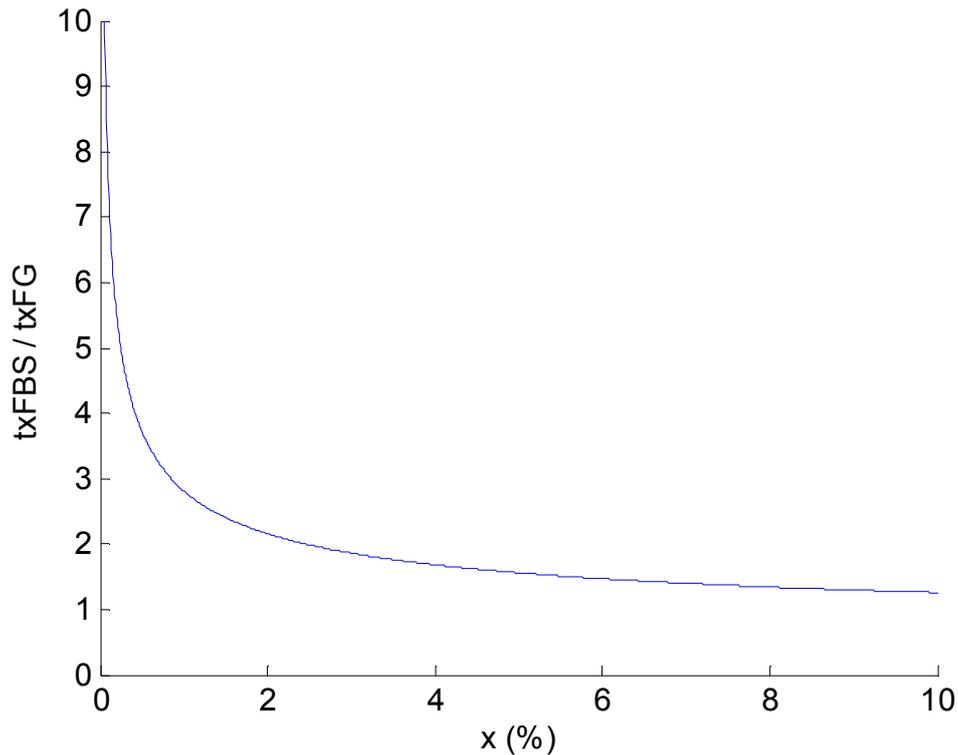
$$\begin{aligned}
 t_{xFG} &= \sqrt{2}\sigma \sqrt{\ln\left(\frac{100}{x_{FG}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi P_{FG}}} \sqrt{\ln\left(\frac{100}{x_{FG}}\right)} \\
 t_{xFBS} &= \frac{2}{\pi f_b} \sqrt{\frac{100}{x_{FBS}}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{30}}} \frac{1}{\sqrt{\pi P_{FBS}}} \sqrt{\frac{100}{x_{FBS}}}
 \end{aligned} \tag{6.108}$$

El tiempo de cálculo es proporcional a la longitud del intervalo considerado. Para poder comparar los resultados obtenidos utilizando funciones de Gabor y FBS se han de obtener dichos resultados utilizando átomos con cajas de Heisenberg de la misma pendiente  $P_{FG} = P_{FBS}$  y con un mismo grado de precisión adoptado en cuanto al tanto por cien del máximo que se tiene en los extremos del intervalo considerado  $x_{FG} = x_{FBS}$ . En estas condiciones se pueden comparar las relaciones entre los tiempos de cálculo que serán iguales a las relaciones entre las longitudes de los intervalos considerados:

$$\frac{t_{xFBS}}{t_{xFG}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{30}}} \frac{1}{\sqrt{\pi P}} \sqrt{\frac{100}{x}}}{\frac{1}{\sqrt{\pi P}} \sqrt{\ln\left(\frac{100}{x}\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{30}}} \sqrt{\frac{\frac{100}{x}}{\ln\left(\frac{100}{x}\right)}} \tag{6.109}$$

Representando el cociente para valores de  $x$  entre 0% y 10% y limitando los datos representados al intervalo del eje de ordenadas entre 0 y 10 obtenemos la Fig. 6.9. Analicemos los puntos extremos representados: el tiempo de cálculo de las FBS es 10 veces mayor al de las funciones de Gabor al requerir un nivel de precisión  $x = 0.048\%$ ; al tomar un nivel de precisión  $x = 10\%$ , el tiempo de cálculo de las FBS es 1.3 veces mayor al de las funciones de Gabor.

El valor a partir del cual no se obtiene una mejora ostensible en los resultados al utilizar la función de Gabor ha demostrado ser  $x = 0.01\%$ . Esto se observa en las figuras de 6.10 a 6.17. Se muestran las densidades de energía obtenidas, así como la función de Gabor utilizada en cada caso al analizar la corriente de arranque seguida de oscilación de carga estudiada como ejemplo a lo largo del capítulo 4. El análisis es idéntico al realizado para generar la Fig. 4.43, salvo porque los átomos tiempo-frecuencia utilizados son, en vez de FBS, funciones de Gabor, tomando en cada caso:  $x = 10.13\%$  en las figuras 6.10 y 6.11,  $x = 1\%$  en las figuras 6.12 y 6.13,  $x = 0.1\%$  en las figuras 6.13 y 6.15 y  $x = 0.01\%$  en las figuras 6.14 y 6.17.



**Fig. 6.9** Cociente entre los intervalos de tiempo (6.109) equivalente al cociente entre los tiempos de cálculo en función del nivel de precisión.

Para resaltar las diferencias entre los resultados obtenidos a medida que disminuye el valor de precisión, se ha utilizado la escala de colores ‘pink’ en vez de la escala ‘jet’. La escala ‘jet’ permite observar las componentes de avería de mayor amplitud con un mayor contraste que la escala ‘pink’. Sin embargo, esto también provoca que resulte más complicado ver los detalles reflejados al representar la densidad de energía.

En el primer caso (cuyo valor de precisión  $x = 10.13\%$  ha sido tomado por razones que se explicarán mas adelante), la función se ha cortado bruscamente. Tiene una mala definición temporal, lo cual produce irregularidades en los resultados obtenidos al calcular la correlación. A medida que el grado de precisión aumenta (aumentando el intervalo considerado, disminuyendo  $x$ ), la función de Gabor utilizada tiene una definición más suave en el dominio temporal, y los resultados al calcular la correlación mejoran. Si se corta demasiado pronto, el tiempo de cálculo disminuye, pero existe un salto relativamente alto del último valor tenido en cuenta a cero, lo cual produce irregularidades en el resultado. Aunque no se muestran, a partir de  $x = 0.01\%$ , los resultados ya no mejoran significativamente.

Aplicando (6.109) obtenemos que, para una precisión de  $x = 0.01\%$ , el tiempo de cálculo de las funciones de Gabor es del orden de 20 veces menor. Así pues, parece que, aunque el tiempo real de cálculo de las FBS será un poco menor al indicado por la fórmula debido a la simplificación realizada al igualar la función seno a la unidad, el tiempo de cálculo de las funciones de Gabor es mucho menor.

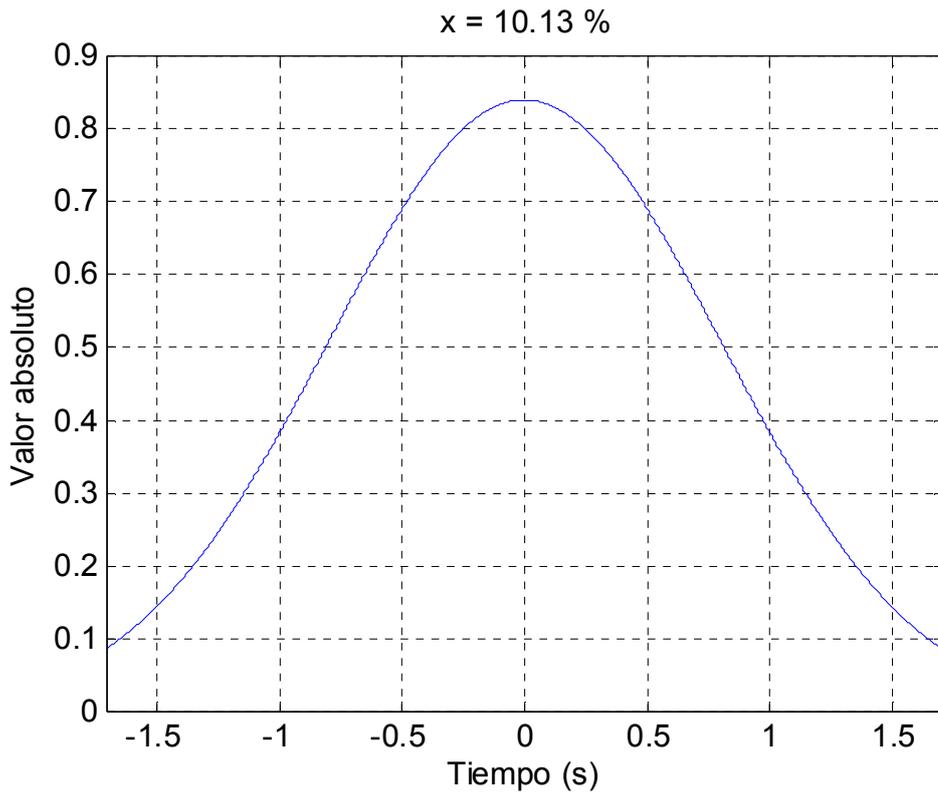


Fig. 6. 10 Valor absoluto de la función de Gabor de frecuencia central 50 Hz y pendiente 0.25 Hz/s, recortada tomando  $x = 10.13\%$  y utilizada para analizar los 50 Hz en la siguiente figura.

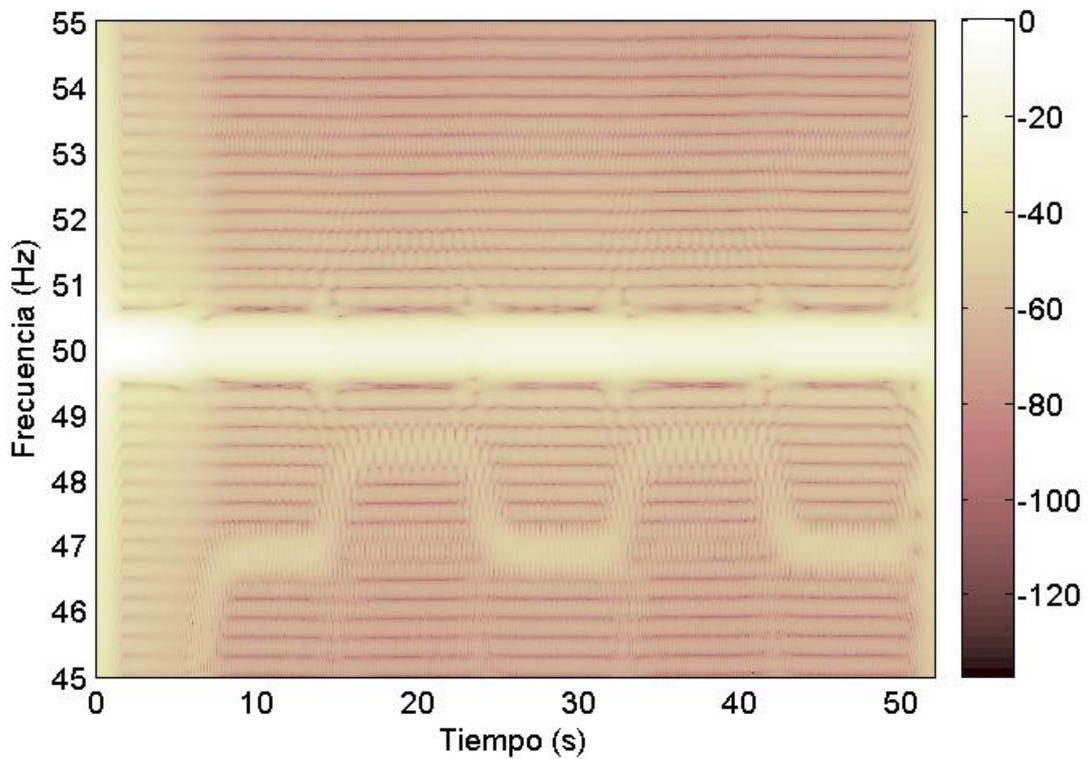


Fig. 6. 11 Densidad de energía de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, utilizando la función de Gabor mostrada en la figura anterior.

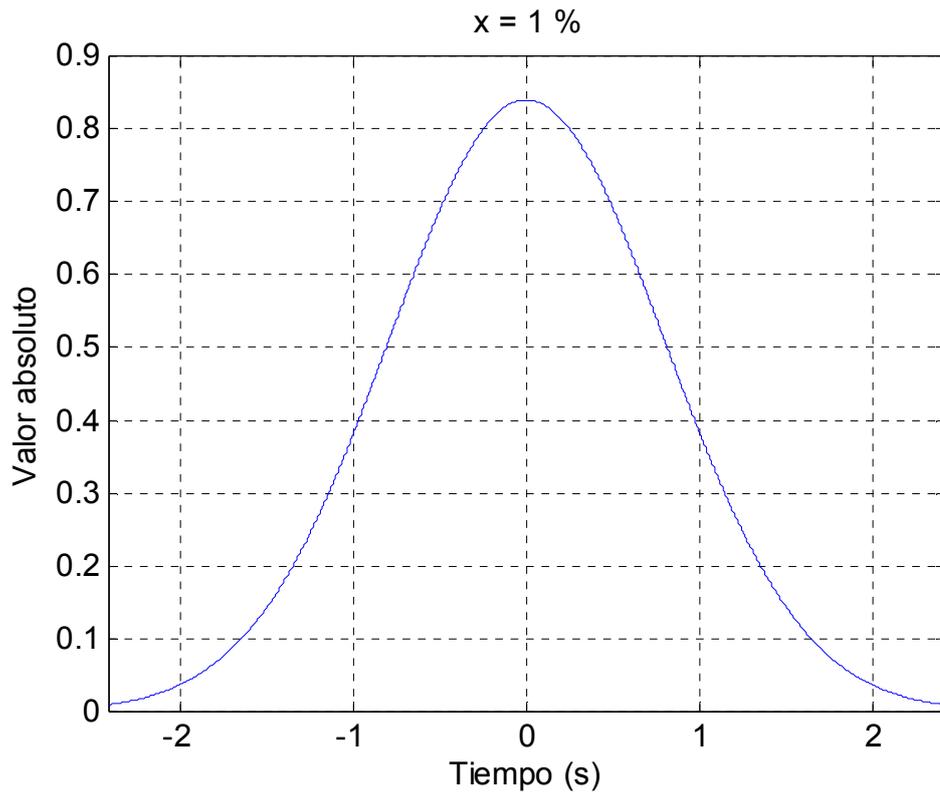


Fig. 6. 12 Valor absoluto de la función de Gabor de frecuencia central 50 Hz y pendiente 0.25 Hz/s, recortada tomando  $x=1 \%$  y utilizada para analizar los 50 Hz en la siguiente figura.

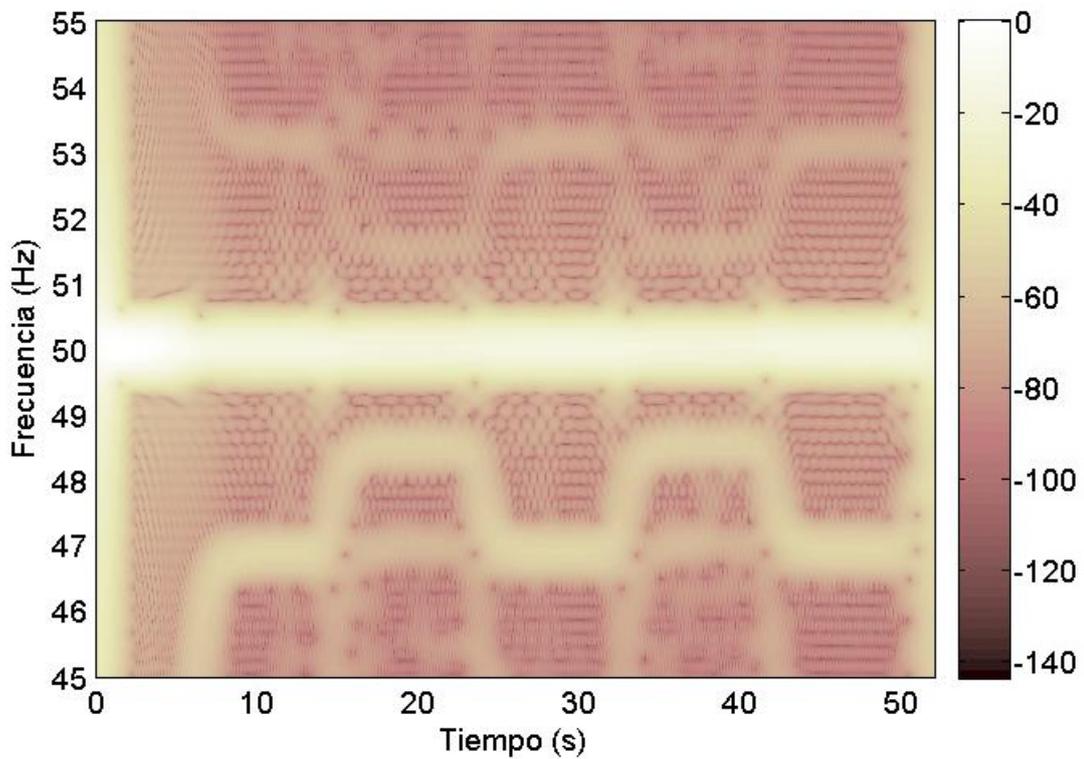


Fig. 6. 13 Densidad de energía de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, utilizando la función de Gabor mostrada en la figura anterior.

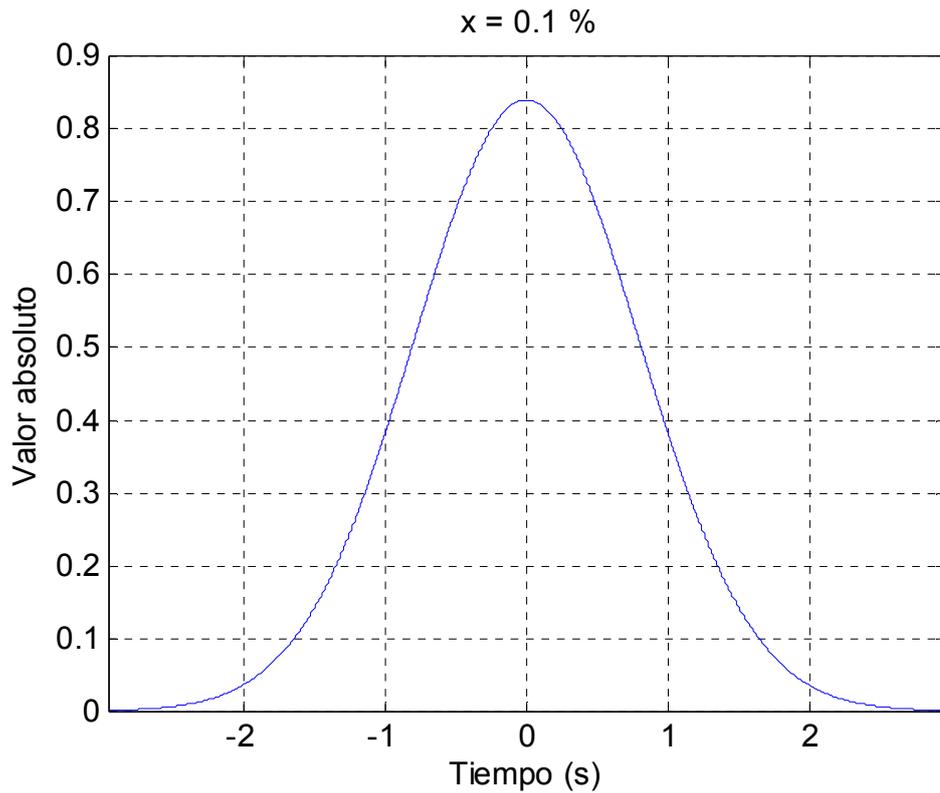


Fig. 6. 14 Valor absoluto de la función de Gabor de frecuencia central 50 Hz y pendiente 0.25 Hz/s, recortada tomando  $x = 0.1 \%$  y utilizada para analizar los 50 Hz en la siguiente figura.

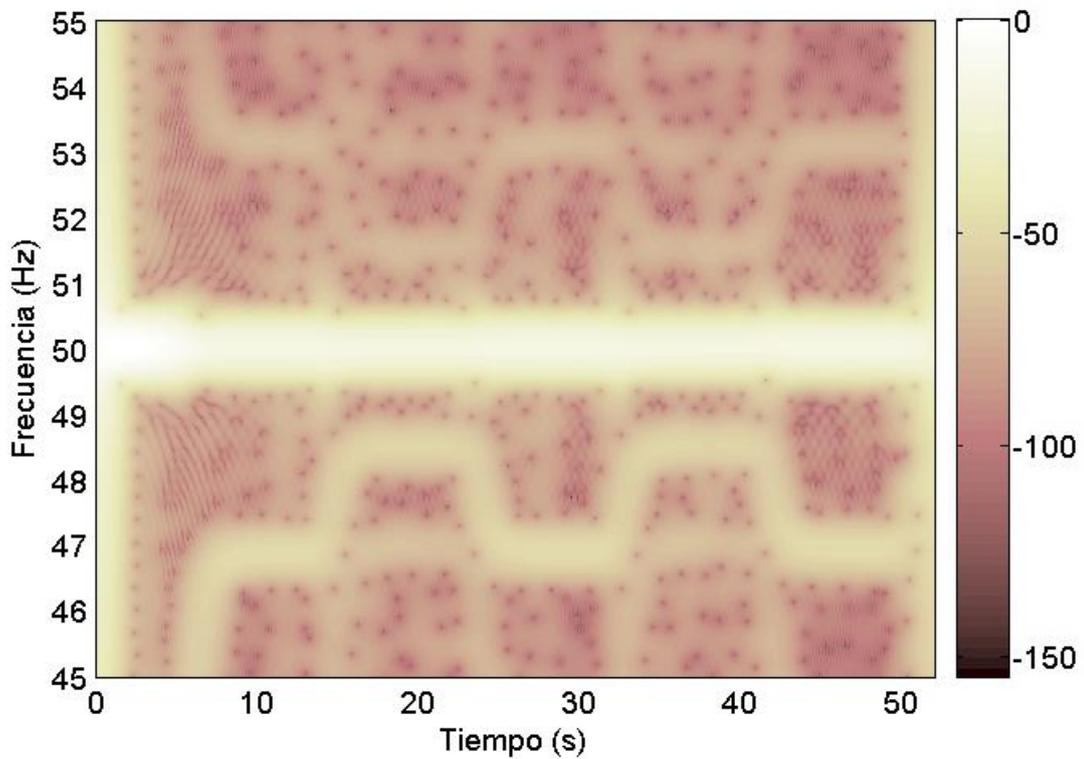


Fig. 6. 15 Densidad de energía de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, utilizando la función de Gabor mostrada en la figura anterior.

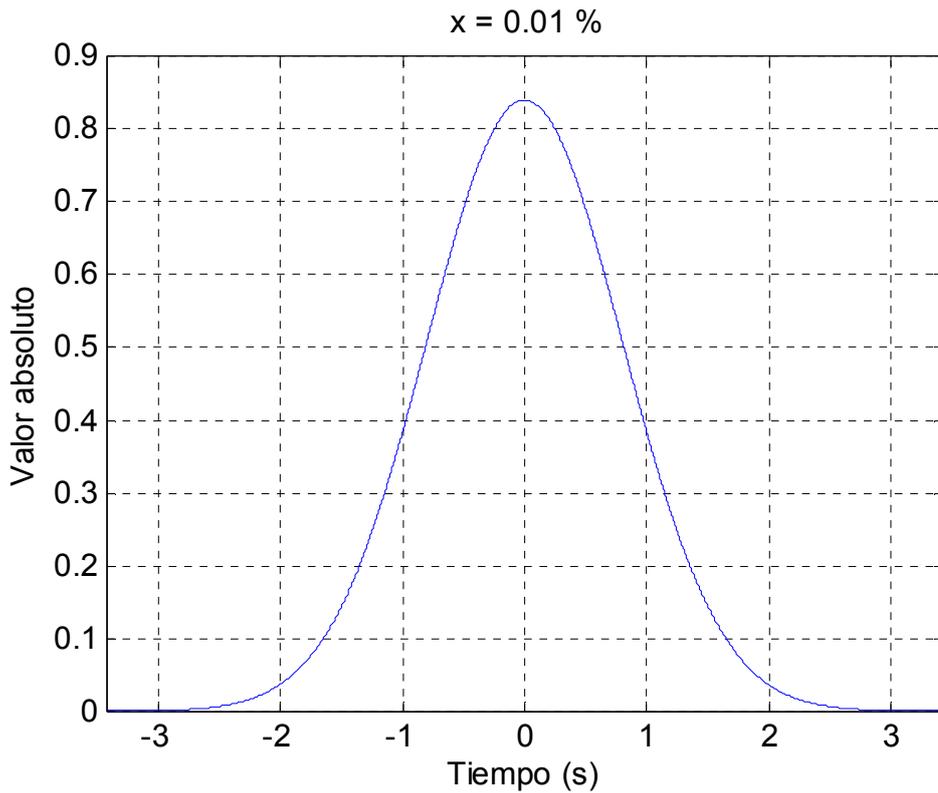


Fig. 6. 16 Valor absoluto de la función de Gabor de frecuencia central 50 Hz y pendiente 0.25 Hz/s, recortada tomando  $x = 0.01 \%$  y utilizada para analizar los 50 Hz en la siguiente figura.

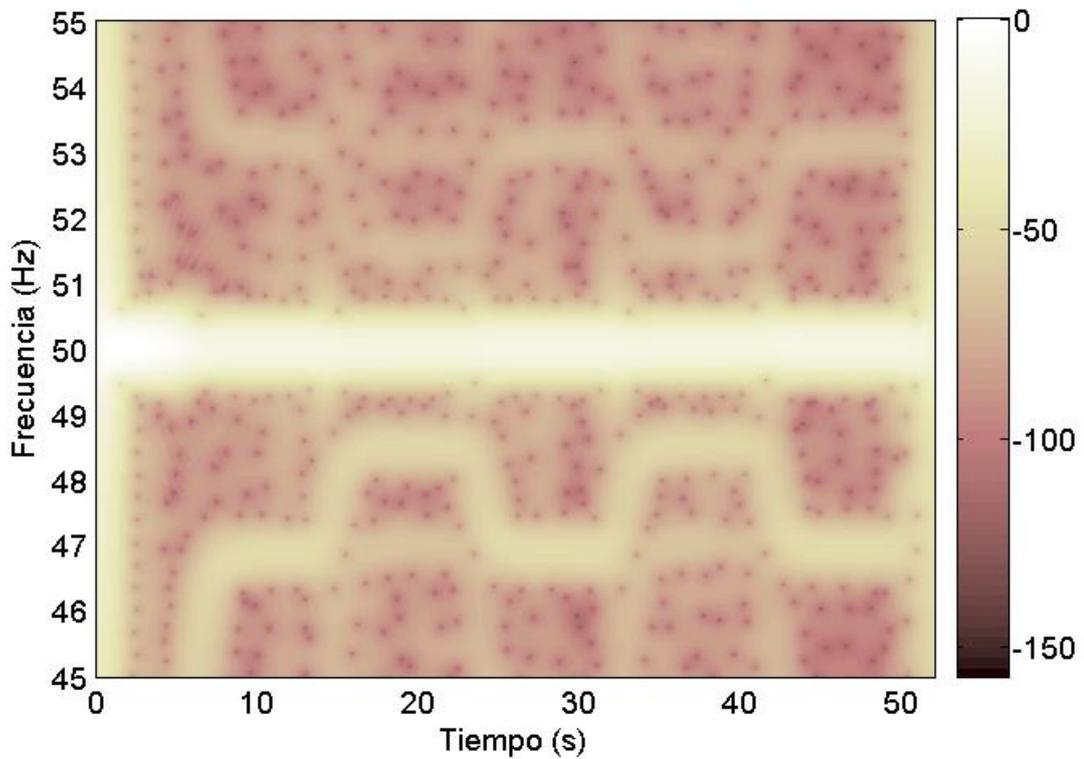


Fig. 6. 17 Densidad de energía de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga, analizando el transitorio completo y la banda de frecuencia entre 45 y 55 Hz, utilizando la función de Gabor mostrada en la figura anterior.

Entonces, ¿cómo podemos obtener menores tiempos de cálculo utilizando FBS? La clave está en que con las FBS se puede, renunciado a parte de su definición y por tanto a cierta calidad en los resultados, considerar un intervalo de tiempo corto que termina justo en el primer paso por cero del módulo de la función. No se considera una porción realmente significativa de la función, pues eliminamos todas las oscilaciones posteriores, influyendo en la calidad del resultado, pero se utiliza un átomo que en el dominio temporal tiene una definición muy suave, no produciendo las irregularidades en los resultados que se introducirían si se considerara un intervalo tan corto en otro tipo de átomo cómo una función de Gabor, y ahorrando mucho tiempo de computación.

Se puede calcular el valor de  $x$  % que hay que tomar para cortar por el primer paso por cero del módulo de la FBS, teniendo en cuenta que este primer cero aparece cuando la variable introducida en la función sinusoidal es  $\pi$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi f_b t_x}{m} &= \pi \\ \frac{x}{100} &= \left[ \frac{1}{\pi f_b t_x / m} \right]^m \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{100}{\pi^m} = \frac{100}{\pi^2} \approx 10.13 \% \quad (6.110)$$

La Fig. 6.18 compara los módulos de una FBS cortada tomando  $x = 10.13$  % y una función de Gabor cortada tomando  $x = 0.01$  % . La Fig. 6.19 repite el resultado de la Fig. 4.41, apartado 4.5. La transformada aplicada es la AST, utilizando por tanto FBS, fijándose el parámetro de precisión a  $x = 10.13$  % . La Fig. 6.20 muestra el resultado de un análisis idéntico pero utilizando esta vez funciones de Gabor tomando  $x = 0.01$  % . En ambos casos se analiza el transitorio completo de la corriente de arranque seguida de oscilación de carga y las cajas de Heisenberg utilizadas tienen las pendientes indicadas en 4.4.5. Tan sólo cambian los átomos tiempo-frecuencia utilizados (FBS y funciones de Gabor) así como el punto de corte de las respectivas funciones.

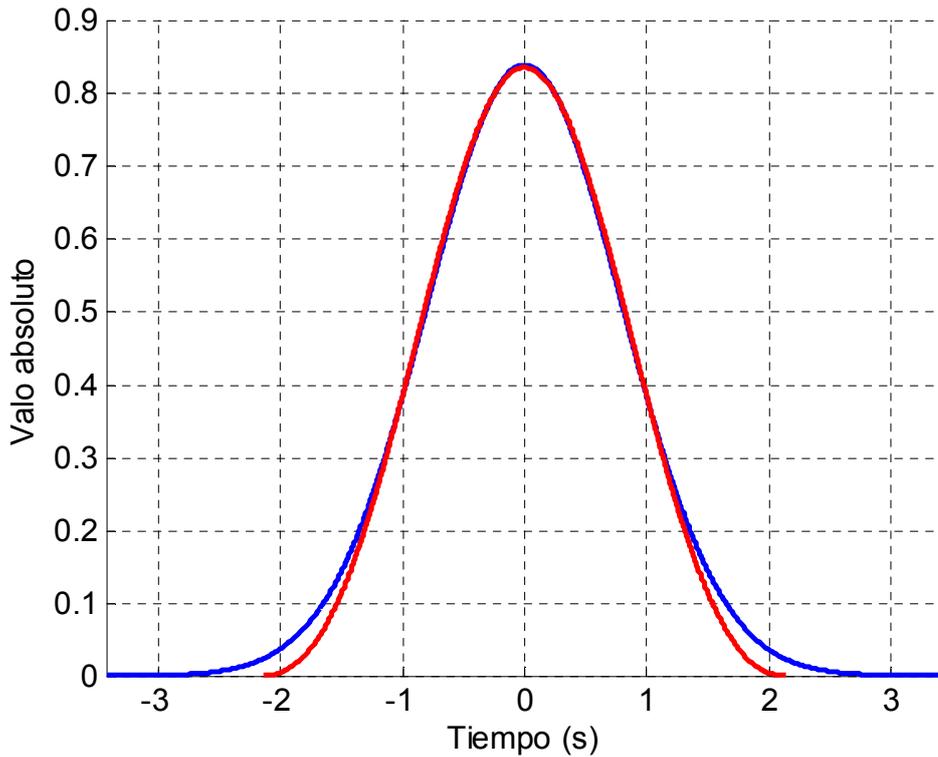
Como en este análisis las pendientes utilizadas tan solo varían con la frecuencia, para obtener el resultado de la AST es posible utilizar la fórmula de la convolución. En este caso, el número y tipo de operaciones a realizar es el mismo que al calcular la STFT, y por tanto ambas transformadas tienen el mismo tiempo de cálculo. Concretamente, se analiza una corriente de 50 s de duración, con una frecuencia de muestreo de 2.5 kHz (suficiente para el análisis a realizar) y tomando 1000 frecuencias uniformemente distribuidas entre 0-60 Hz. Al utilizar FBS el tiempo de cálculo es de 6.4 min, mientras que al utilizar las funciones de Gabor el tiempo de cálculo aumenta hasta 11.7 min.

El tiempo de cálculo es relativamente pequeño en ambos casos. No obstante, cabe destacar que un análisis completo para diagnosticar el estado de las barras de la jaula debe considerar la banda 0-450 Hz, tal y como se explica en el Capítulo 7. Por otra parte, para visualizar la densidad de energía no es necesario, pero para obtener una cuantificación de la máxima calidad se deben tomar 1000 frecuencias cada 50 Hz, con lo cual para realizar el diagnóstico correctamente se deben analizar 9 veces más frecuencias que en el ejemplo. En principio se puede pensar que el tiempo de cálculo será 9 veces mayor, pero no es así exactamente pues hay que tener en cuenta que el

tiempo de cálculo depende de las pendientes utilizadas (a menor pendiente, mayor tiempo de cálculo, pues el átomo correspondiente, definido en el dominio temporal, tendrá un soporte mayor y por tanto un mayor número de puntos), y las pendientes necesarias a más altas frecuencias en la banda 0-450 Hz son en general mayores que en la parte inferior. En este análisis más completo ambos tiempos de cálculo aumentarían manteniendo la proporción dando lugar a una diferencia absoluta más significativa.

En definitiva, vemos como la calidad es un poco inferior en el caso de las FBS, pero el tiempo de cálculo es 1.84 veces mayor en el caso de las funciones de Gabor. La relación entre los tiempos de cálculo es la real, obtenida como el cociente entre los tiempos cronometrados en ambos casos, siendo dicho valor un tanto superior al estimado por la fórmula:

$$\frac{t_{xFG}}{t_{xFBS}} = \sqrt{\frac{\sqrt{30}}{2}} \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{100}{x_{FG}}\right)}{\frac{100}{x_{FBS}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{30}}{2}} \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{100}{0.01}\right)}{\frac{100}{10.13}}} \approx 1.599 \quad (6.111)$$



**Fig. 6. 18** Valor absoluto de la función de Gabor (azul) y la FBS (rojo), ambas de frecuencia central 50 Hz y pendiente 0.25 Hz/s, recortadas tomando  $x = 0.01 \%$  y  $x = 10.13 \%$  respectivamente y utilizadas para analizar los 50 Hz en las figuras 6.19 y 6.20 respectivamente.

Como conclusión, al utilizar las FBS cortando por el primer paso por cero ( $x = 10.13 \%$ ) se obtiene una función de densidad de calidad un poco inferior a la obtenida si se utilizan funciones de Gabor tomando  $x = 0.01 \%$ , pero el tiempo de cálculo es casi la mitad, lo cual es necesario si se tienen que analizar muchas señales y durante transitorios largos, como los que se pueden encontrar fácilmente en la industria (arranques de un minuto de duración) o si se quiere monitorizar la máquina eléctrica durante largos períodos de tiempo.

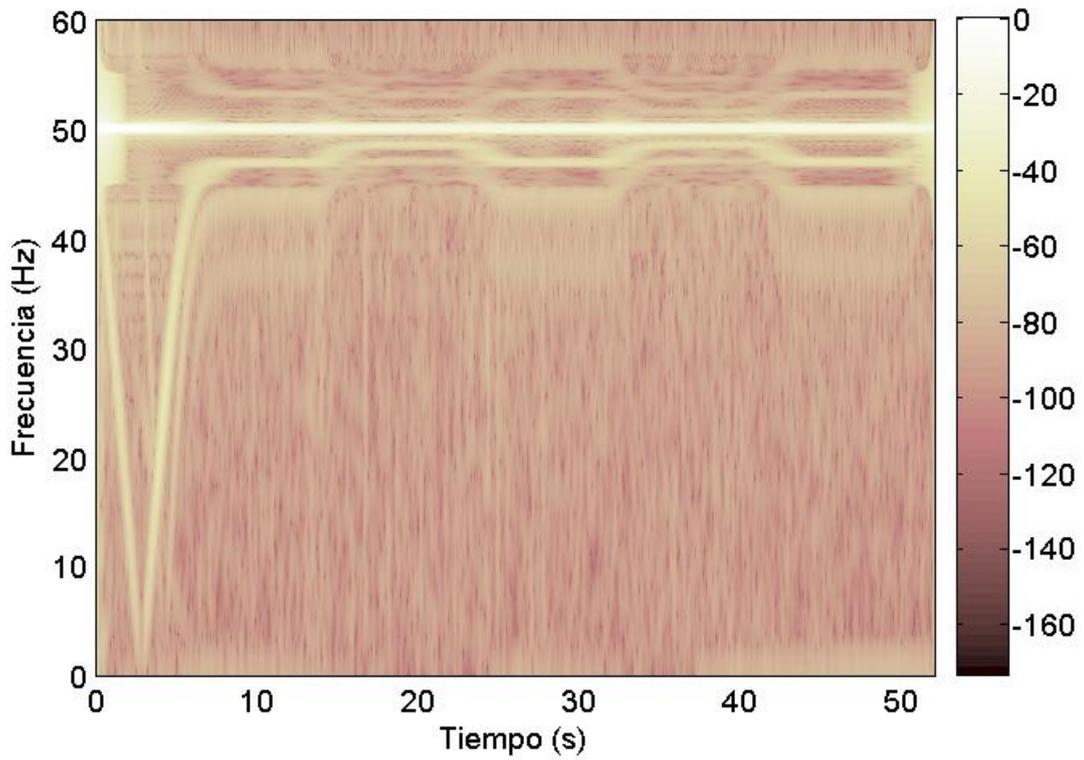


Fig. 6. 19 AST, con FBS de parámetro de precisión  $x = 10.13\%$  , utilizando concretamente a 50 Hz la FBS de la Fig. 6.18, analizando la corriente de arranque seguida de oscilación de carga (transitorio completo y la banda de frecuencia entre 0 y 60 Hz) con cajas de Heisenberg de pendientes las indicadas en 4.4.5.

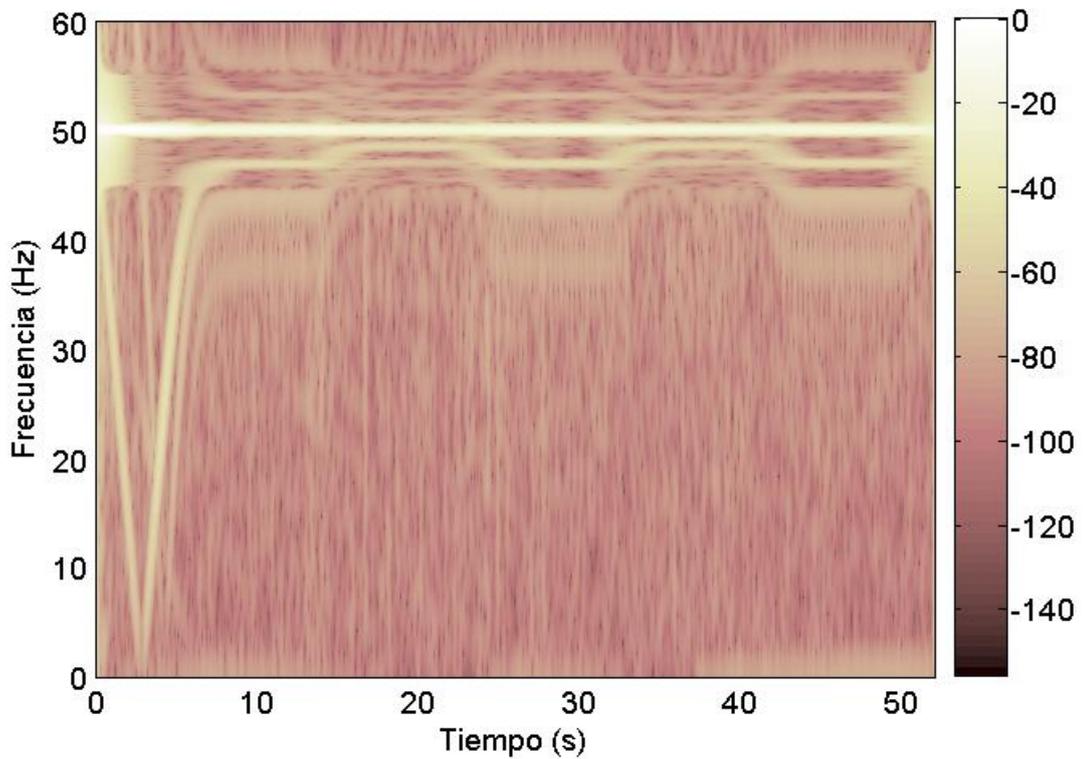


Fig. 6. 20 Análisis idéntico al realizado en la figura anterior, con funciones de Gabor de parámetro de precisión  $x = 0.01\%$  , utilizando concretamente a 50 Hz la función de Gabor de la Fig. 6.18.



## **7.- Diagnóstico de barras rotas consecutivas.**

En el presente capítulo se valida la capacidad de la metodología de diagnóstico desarrollada en la tesis para la detección de barras rotas consecutivas en motores de inducción alimentados directamente desde la red y trabajando en condiciones transitorias. Para ello se analizan corrientes estatísticas de motores en distintos estados (sano, una barra rota y dos barras rotas), obtenidas mediante ensayos realizados en el laboratorio en los que los motores experimentan transitorios complejos como arranques seguidos de oscilaciones de carga. Se comprueba que la metodología es capaz de obtener las evoluciones completas de las componentes introducidas por la rotura de una barra y cuantificar seguidamente la presencia de estas componentes permitiendo un diagnóstico de alta fiabilidad.

El capítulo está estructurado en tres apartados. En el primer apartado se describen los montajes utilizados para la realización de los ensayos detallando las características de la captura de las corrientes transitorias. En el segundo apartado se aplica a cada motor a diagnosticar la metodología de diagnóstico desarrollada siguiendo la guía propuesta en 4.7. En el tercer y último apartado se analizan los resultados obtenidos, emitiendo un diagnóstico de cada motor testado y exponiendo las conclusiones finales.

### **7.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.**

- 7.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.
- 7.1.2.- Generación de la avería: rotura de una barra.
- 7.1.3.- Carga arrastrada y tipos de transitorios.
- 7.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.
- 7.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.

### **7.2.- Aplicación de la metodología.**

- 7.2.1.- Captura de la corriente.
- 7.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.
- 7.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.
- 7.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.
- 7.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.
- 7.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.
- 7.2.7.- Cuantificación.

### **7.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.**

- 7.3.1.- Diagnóstico visual (cualitativo).
- 7.3.2.- Cuantificación.
- 7.3.3.- Corrientes de motores de tipo B.
- 7.3.4.- Conclusiones del capítulo.

## 7.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.

Se han realizado una serie de ensayos de laboratorio con el objetivo de validar la capacidad de la metodología de diagnóstico propuesta para detectar barras rotas consecutivas en motores de inducción de jaula de ardilla alimentados directamente desde la red.

Los ensayos realizados se diferencian entre ellos, tal y como se explica en los apartados a continuación, en función del tipo de motor ensayado (tipo A o tipo B según la lista en el siguiente apartado), el estado del motor (sano, con una barra rota o con dos barras rotas consecutivas), el tipo de carga arrastrada (dinamo tipo A o tipo B, actuando como una inercia pura (motor en vacío) o alimentando su excitación (motor cargado)), y el transitorio capturado (arranque en vacío, arranque en carga o arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

### 7.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.

Se han ensayado dos tipos de motores distintos, acoplados a dos cargas distintas (concretamente dos dinamos). Las características principales de los motores y sus respectivas cargas son:

- Red:
  - Frecuencia: 50 Hz.
  - Valor eficaz de la tensión de línea: 400 V.
- Motor tipo A:
  - Trifásico.
  - Frecuencia: 50 Hz.
  - Potencia nominal: 1.5 kW.
  - Tensión nominal: 230/400 V (conexión en estrella).
  - Corriente del estator nominal: 5.6/3.25 A.
  - 1 par de polos.
  - Velocidad nominal: 2860 rpm.
  - 20 barras en el rotor.
  - Factor de potencia: 0.8.
- Motor tipo B:
  - Trifásico.
  - Frecuencia: 50 Hz.
  - Potencia nominal: 1.1 kW.
  - Tensión nominal: 230/400 V (conexión en estrella).
  - Corriente del estator nominal: 4.6/2.7 A.
  - 2 pares de polos.
  - Velocidad nominal: 1410 rpm.
  - 28 barras en el rotor.
  - Factor de potencia: 0.8.
- Carga A: dinamo de momento de inercia  $J = 0.11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- Carga B: dinamo de momento de inercia  $J = 0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

### 7.1.2.- Generación de la avería: rotura de una barra.

Así pues, se han capturado corrientes del estator tanto del motor tipo A como del motor tipo B. Para un mismo tipo de motor, el estator utilizado ha sido el mismo, pudiendo cambiar el rotor de jaula de ardilla: rotor sano, rotor con una barra rota y rotor con dos barras rotas consecutivas. Las roturas de barras se han conseguido realizando una perforación de la barra correspondiente a la altura de la unión con el anillo de cortocircuito. La Fig. 7.1 muestra un rotor de jaula con una barra rota (izquierda) y el detalle de la rotura de barra (derecha). Se ha considerado tan solo el caso de barras rotas consecutivas, pues si las roturas no son consecutivas la complejidad del problema aumenta considerablemente [101].



Fig. 7. 1 Izquierda: Rotor de jaula de ardilla con una barra rota. Derecha: detalle de la rotura de barra realizada perforando la barra con un taladro a la altura de la unión con el anillo de cortocircuito.

### 7.1.3.- Carga arrastrada y tipos de transitorios.

El motor de tipo A arrastra la carga de tipo A y el motor de tipo B arrastra la carga de tipo B. Ambas cargas son dinamos con distintos momentos de inercia. La excitación de las dinamos puede alimentarse, mientras que el inducido se encuentra siempre desconectado, debido a que la velocidad nominal para ambas dinamos es de 1500 rpm, lo cual resulta incompatible con el motor de tipo A. Así pues, si la excitación se encuentra también desconectada, la dinamo arrastrada por el motor actúa como una inercia pura y decimos que el motor se encuentra en vacío. Si en determinado momento del transitorio se conecta la excitación, el motor ensayado debe aportar la energía consumida en forma de pérdidas en el circuito magnético de la dinamo (la cual es suficiente para cargar el motor debido al tamaño de las dinamos). En este caso la carga mecánica que arrastra el motor deja de ser una inercia pura, pasando a tener una característica de par resistente aproximadamente proporcional a la velocidad de giro, en cuyo caso decimos que el motor se encuentra en carga.

Finalmente, teniendo en cuenta que en todos los ensayos realizados en este capítulo la máquina asíncrona ha funcionado en modo motor alimentándose directamente desde la red, los posibles transitorios son: arranque, oscilaciones de carga,

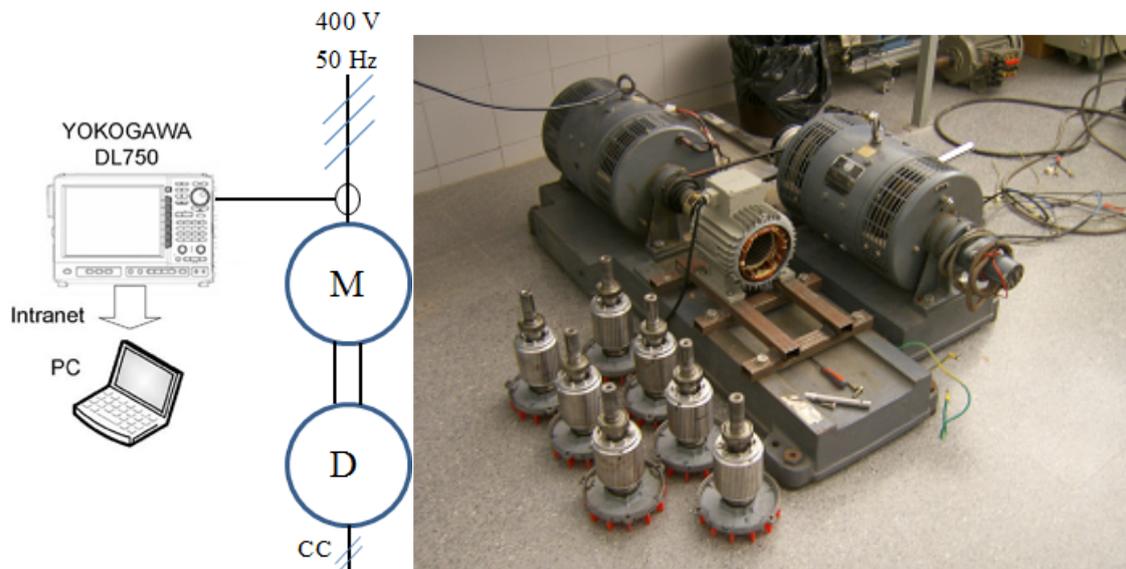
parada por desconexión y parada por inversión del sentido de giro. En la presente tesis se han analizado arranques y arranques seguidos de oscilaciones de carga.

#### 7.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.

En cada uno de los ensayos realizados se ha capturado la corriente de línea del estator del motor ensayado conectado en estrella. Las corrientes han sido capturadas utilizando un transformador de corriente (relación de transformación 15/5 y clase de precisión 0.5) montado sobre uno de los conductores de la línea de alimentación del motor, junto con un shunt conectado en bornes del secundario del transformador de corriente (6A/60 mV, clase de precisión 0.5) y una sonda que traslada la tensión a medir en bornes del shunt a un canal de entrada de un osciloscopio digital con convertidor A/D de 12 bits, ajustando la frecuencia de muestreo a 5 kHz, la cual resulta más que suficiente para realizar los estudios pertinentes.

#### 7.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.

En la Fig. 7.2 se muestra el esquema eléctrico de los montajes realizados (izquierda) así como una fotografía del montaje utilizando los motores del tipo B (derecha). Se observa un motor de inducción con el rotor extraído, fijado en una bancada. Ordenados a un lado se observan también distintos rotores utilizados, cada uno en un estado (sano, una barra rota o dos barras rotas consecutivas). El motor está acoplado a la dinamo sujeta en la misma bancada. Al estator del motor llega la canalización para conectarlo a la red. A su vez, a la dinamo llega también la canalización para alimentar su excitación.



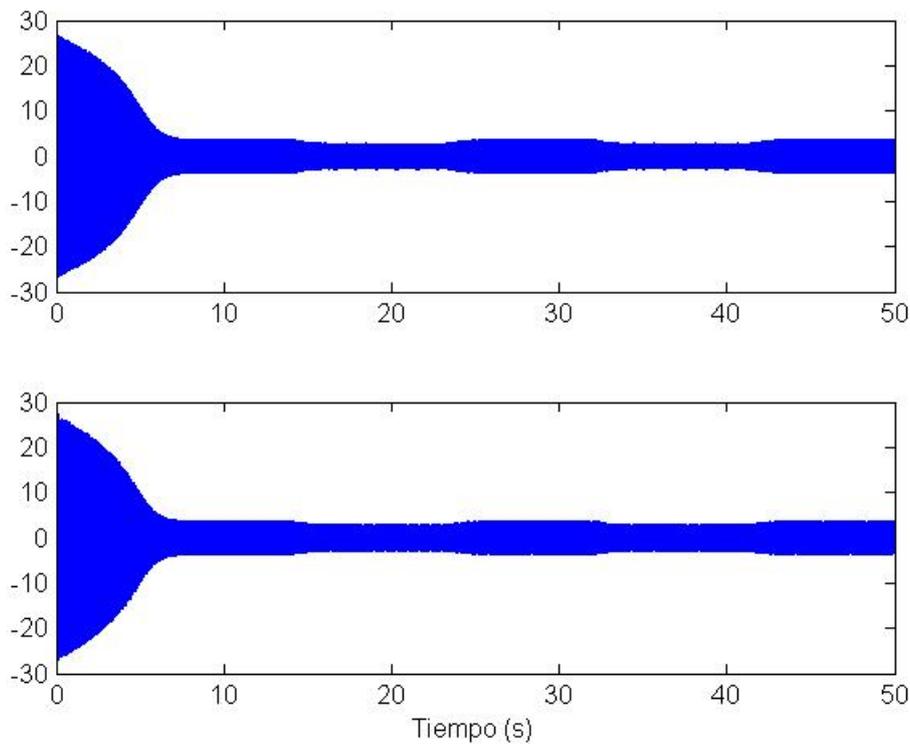
**Fig. 7. 2** Esquema eléctrico de los montajes realizados (izquierda) y fotografía del montaje utilizando los motores y carga tipo B (derecha): motor de inducción con el rotor extraído acoplado a la dinamo y alimentado desde la red; conjunto de rotores de idénticas características en estado sano o con una o varias barras rotas; dinamo actuando de carga mecánica.

La tabla 7.1 resume las condiciones de los ensayos realizados. La Fig. 7.3 muestra las corrientes capturadas en los ensayos 1 y 2 (motor y carga tipo A, arranque en carga seguido de oscilaciones de carga) con motor sano (superior) y con una barra rota (inferior). La Fig. 7.4 muestra, ordenadas de arriba a abajo, las corrientes

capturadas en los ensayos 3, 4, 5, 6, 7 y 8 (motor y carga tipo B, arranques en vacío y en carga de motores sanos y averiados).

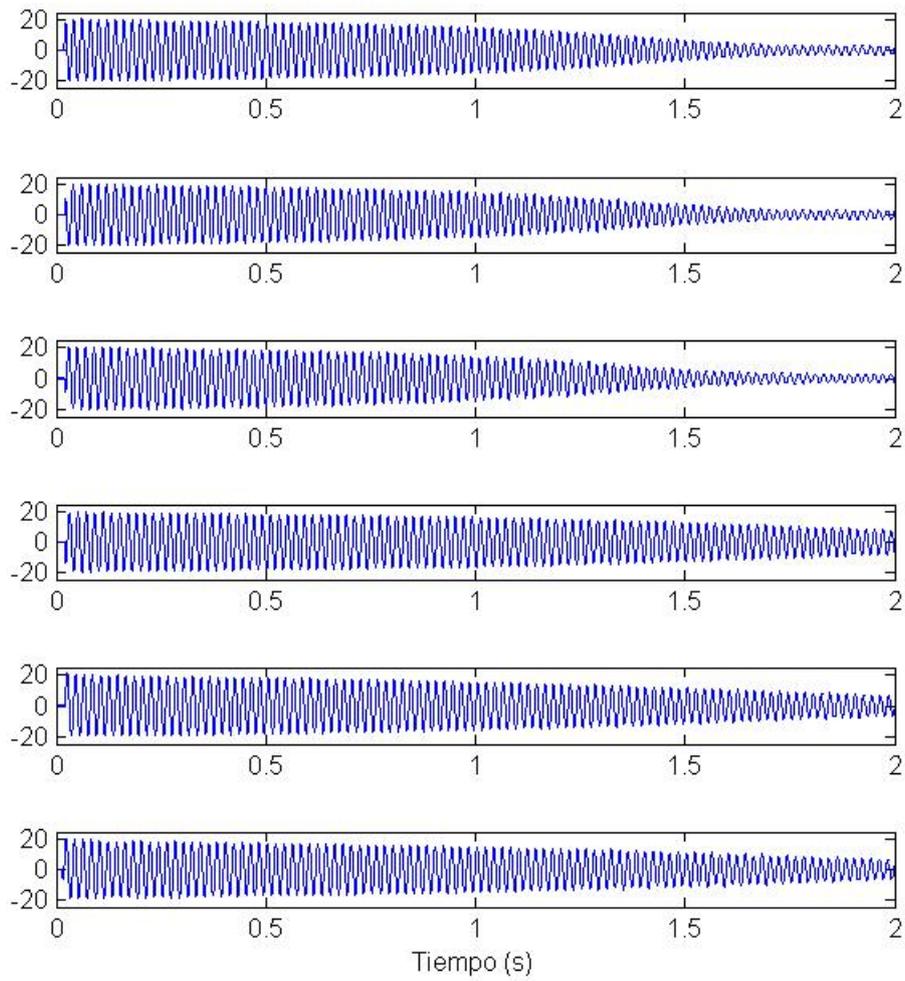
**Tabla. 7. 1 Ensayos realizados.**

Corriente	Tipo de motor y tipo de carga	Estado	Transitorio y carga
1	A	Sano	Arranque en carga y posteriores oscilaciones de carga.
2	A	1 barra rota	Arranque en carga y posteriores oscilaciones de carga.
3	B	Sano	Arranque en vacío.
4	B	1 barra rota	Arranque en vacío.
5	B	2 barras rotas	Arranque en vacío.
6	B	Sano	Arranque en carga.
7	B	1 barra rota	Arranque en carga.
8	B	2 barras rotas	Arranque en carga.



**Fig. 7. 3 Corrientes de línea del estator del motor de inducción tipo A: en estado sano (superior) y con una barra rota (inferior) durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga.**

Para analizar corrientes transitorias como las capturadas se necesita una metodología de diagnóstico capaz de operar con señales no estacionarias. En el siguiente apartado se explica la aplicación de la metodología desarrollada en la presente tesis, habiendo sido programada en MatLab.



**Fig. 7. 4 Corrientes de línea del estator del motor de inducción tipo B durante un arranque (de arriba abajo): en vacío estado sano, en vacío con una barra rota y en vacío con dos barras rotas; en carga estado sano, en carga con una barra rota y en carga con dos barras rotas.**

## **7.2.- Aplicación de la metodología.**

En el presente apartado se aplica la metodología de diagnóstico desarrollada en la tesis a las señales capturadas según lo indicado en el apartado anterior, mostrando los resultados obtenidos. A tal efecto se sigue la “Guía de aplicación de la metodología de diagnóstico” presentada en el apartado 4.7, detallándose las particularidades de los análisis realizados. De especial importancia es el apartado 7.2.4, en el que se comenta la elección de las pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada caso. En el apartado 7.3 se analizan los resultados aquí obtenidos concluyendo el diagnóstico.

### **7.2.1.- Captura de la corriente.**

El primer paso para diagnosticar una máquina eléctrica utilizando la metodología desarrollada en la presente tesis es capturar una de sus corrientes. Con lo que respecta al diagnóstico de motores de inducción realizado en el presente capítulo, este primer paso ya ha sido expuesto en el punto anterior al comentar los montajes experimentales y la correspondiente captura de la corriente estatórica de cada motor en determinadas condiciones transitorias, resumidas en la Tabla 7.1.

### **7.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.**

Para poder fijar las pendientes de las cajas de Heisenberg a utilizar siguiendo el criterio de la pendiente definido en 4.2, se necesita conocer las evoluciones de las componentes de avería; en este caso, componentes de rotura de barra. Cuando el motor es alimentado directamente desde la red, estas evoluciones se pueden determinar, tal y como se explica en 4.1.2, si se conoce la evolución del deslizamiento. A su vez, la evolución del deslizamiento se puede obtener fácilmente midiendo la velocidad. Sin embargo, en la presente tesis, con el objetivo de eliminar la necesidad de instalar un sensor de velocidad, se ha propuesto un método que permite obtener la evolución del deslizamiento a través de la corriente del estator capturada, incluso en presencia de averías. Dicho método se ha expuesto en el capítulo 5, apartado 5.2, aplicándolo como ejemplo a dos corrientes de un motor del tipo A.

El método para obtener la evolución del deslizamiento se aplica en el presente apartado al conjunto de corrientes capturadas enumeradas en la Tabla 7.1. Las evoluciones estimadas de las componentes para el conjunto completo de las ocho corrientes capturadas se muestran en las figuras 7.15, 7.19, 7.23, 7.27, 7.31, 7.35, 7.39 y 7.43 acompañadas de cada una de las figuras restantes generadas al aplicar la metodología de diagnóstico propuesta (las cuales se comentarán más adelante). Sin embargo, para poder ilustrar la aplicación del criterio de la pendiente, se avanzan dos de los ocho resultados: concretamente, las figuras 7.11 y 7.13 muestran las evoluciones de las componentes de avería obtenidas como resultado al aplicar el método a las corrientes 2 y 4 de la tabla 7.1. En definitiva, la figura 7.11 muestra las evoluciones de las componentes de avería en el caso de la corriente 2, relativa al motor de tipo A con una barra rota. A su vez, la Fig. 7.13 muestra las evoluciones de las componentes de avería en el caso de la corriente 4 perteneciente a un motor de tipo B también con una barra rota. Sobre estas figuras se apoya la explicación mostrada en el apartado 7.2.4 sobre las pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas.

En el capítulo 5 (apartado 5.2) se expone el método para la estimación de la evolución del deslizamiento, aplicándolo como ejemplo a dos corrientes de un motor del tipo A. Veamos cómo, teniendo en cuenta las distintas características de los motores de tipo B con respecto a los de tipo A, se han cambiado los valores de algunas de las variables. En primer lugar, dos de los parámetros que determinan la evolución del PSH de mayor amplitud del motor ( $P1-$ ) cambian de un tipo de motor al otro: el número de pares de polos deja de ser 1 para valer 2 ( $p = 2$ ) y el número de ranuras del rotor pasa de 20 a 28 ( $R = 28$ ). Como consecuencia, la banda de frecuencia  $\{0, (R/p-1) f_{FC}\}$  que cubre  $P1-$  en su evolución se reduce de  $\{0, (20/1-1) \cdot 50\} = \{0, 950\}$  Hz a  $\{0, (28/2-1) \cdot 50\} = \{0, 650\}$  Hz. Por tanto, recordando que el análisis realizado en el capítulo 5 dividía la evolución del PSH en dos partes, siendo la primera aproximadamente lineal, el final de esta primera zona considerado al aplicar el método para este segundo tipo de motor se encuentra a una frecuencia menor que para el primero. Más concretamente, así como al analizar los motores de tipo A se ha tomado un límite de 575 Hz (aunque como se comenta en el capítulo 5 dicho límite puede descender perfectamente hasta 400 Hz sin variar el resultado), al analizar los motores de tipo B se ha tomado un límite de 500 Hz (siendo no obstante un parámetro sobre el cual el resultado presenta una sensibilidad muy débil).

Por otra parte, con el objetivo de eliminar la presencia de los efectos de borde (EB, introducidos por las transformadas basadas en la correlación con átomos, los cuales incrementan la densidad de energía en los primeros y últimos instantes de tiempo analizados, sin que esto indique la presencia de una componente de la señal analizada) y del transitorio electro-magnético (TEM, el cual hace incrementar la energía de la señal muy al principio del arranque, sumándose al EB), se desprecian los primeros y últimos instantes del transitorio capturado. En el caso de las corrientes de los motores de tipo A, se han despreciado 0.25 segundos tanto al principio como al final. En el caso de las corrientes de los motores de tipo B, como los transitorios capturados son mucho más cortos limitándose al arranque de aproximadamente 2 segundos de duración, se han cortado los 0.19 segundos iniciales y los 0.1 segundos finales, suficientes para eliminar la mayor parte del EB y el TEM.

### **7.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.**

#### **Banda de frecuencia**

La banda de frecuencia analizada debe cubrir la evolución completa de las componentes introducidas por la avería a detectar, en las condiciones del ensayo realizado: en el caso analizado, se trata de detectar una rotura de barra cuando el motor es alimentado directamente desde la red. Como estas evoluciones han sido estimadas en el apartado anterior, basta con determinar cuáles son las frecuencias máxima y mínima alcanzadas por las componentes de avería durante el transitorio y tomar una banda de frecuencia con límites superior e inferior iguales al máximo y mínimo calculados respectivamente. Sin embargo, la experiencia diagnosticando motores puede determinar la banda de frecuencia que es necesario analizar siguiendo el siguiente razonamiento, sin necesidad de inspeccionar los resultados del apartado anterior.

La componente más importante es sin ninguna duda el LSH, la cual es por otra parte la de más baja frecuencia. Efectivamente, tal y como se analizó en 4.1.2, cuando el motor es alimentado directamente desde la red y experimenta un arranque (y por tanto el deslizamiento cubre casi todos sus posibles valores), el LSH evoluciona de  $f_{FC}$  Hz a 0 Hz y vuelta a casi  $f_{FC}$  Hz, encontrándose su evolución por debajo de todas las otras evoluciones de componentes de rotura de barra. Por tanto, la frecuencia mínima a analizar son 0 Hz.

Por otra parte, la experiencia al analizar corrientes del estator de motores de inducción con rotura de barras indica que la componente de más alta frecuencia que se puede encontrar es aquella cuya evolución durante un arranque es de  $9f_{FC}$  a casi  $7f_{FC}$  Hz. Curiosamente, dicha componente no está prevista por las formulas presentes en el estado del arte (2.3). El resto de componentes provocadas por la avería toman una frecuencia inferior a  $7f_{FC}$  Hz. Por tanto, la frecuencia máxima a analizar son  $9f_{FC}$  Hz.

Concluyendo, con el objetivo de capturar las evoluciones de las componentes provocadas por una rotura de barra cuando el motor es alimentado directamente desde la red, se debe analizar la banda de frecuencia entre 0 y  $9f_{FC}$  Hz, independientemente de las características de la máquina analizada, pues las frecuencias de las componentes tan solo dependen del deslizamiento, de la frecuencia fundamental y de un par de parámetros enteros, pero no de las características de la máquina. Teniendo en cuenta que los ensayos han sido realizados con tensiones de frecuencia fundamental igual a 50 Hz, la banda de frecuencia finalmente analizada es 0-450 Hz. Esta conclusión concuerda con la que se obtiene al examinar la banda de frecuencia cubierta por el conjunto de evoluciones de las componentes de avería estimadas en el apartado anterior.

### **Intervalo de tiempo**

En todos los análisis realizados en el presente capítulo se ha tenido en cuenta el transitorio capturado en su totalidad. Sin embargo, una vez efectuado el análisis, se ha recortado la parte final para evitar el efecto de borde derecho. Concretamente, los análisis de las corrientes de los motores tipo A llegan hasta los 50 s, mientras que las de tipo B llegan a 2 s.

### **7.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.**

#### **Diccionario de partida**

El siguiente paso es el de seleccionar la familia de átomos tiempo-frecuencia con los cuales se correlacionará la corriente capturada. Recordamos que el conjunto de átomos posibles a utilizar para calcular la transformada (es decir, el diccionario) es el formado por las Frequency B-Splines de parámetro entero  $m = 2$ . Una vez seleccionadas las FBS finalmente a utilizar, estas funciones se recortan temporalmente para reducir el tiempo de cálculo según un parámetro de precisión  $x = 10.13 \%$ , tal y como se explica en el apartado 6.5.

### **Matriz de átomos.**

Tal y como se explica en el apartado de la guía de aplicación relativo al presente paso (4.7.4), el conjunto de puntos del plano tiempo-frecuencia en los cuales se calculará la correlación forman una matriz donde cada columna se asocia a un instante de tiempo muestreado al capturar la señal a analizar, y cada fila se asocia a una frecuencia analizada, siendo el número de frecuencias analizadas suficientemente elevado y encontrándose uniformemente distribuidas sobre la banda de frecuencia a estudiar.

Concretamente, para observar la representación de la densidad de energía, resulta suficiente considerar 200 frecuencias uniformemente distribuidas en la banda de frecuencia a analizar; para obtener una cuantificación de máxima calidad hace falta considerar 1000 frecuencias cada 50 Hz analizados. En los análisis extraordinarios sin cuantificación realizados en el apartado 7.3, se han considerado 1000 frecuencias uniformemente distribuidas en la banda analizada. Al realizar un análisis completo incluyendo la cuantificación (los del presente apartado), con el objetivo de aumentar la precisión a la hora de capturar la evolución de la densidad de energía de cada una de las componentes de avería, se han considerado 1000 frecuencias distribuidas uniformemente cada 50 Hz: es decir, un total de 9000 frecuencias distribuidas uniformemente en la banda 0-450 Hz. En los casos en los que la señal es demasiado larga (50 segundos, por ejemplo), para evitar trabajar con matrices demasiado grandes se ha analizado la banda 0-450 Hz en fragmentos de 50 Hz, tomando 1000 frecuencias uniformemente distribuidas en cada uno de dichos fragmentos.

Tal y como se observa en (4.45), para fijar una FBS debemos especificar el punto del plano en el que se encuentra centrada y su ancho de banda. Los puntos del plano han quedado definidos al definir la matriz. La pendiente utilizada en cada uno de dichos puntos se especifica en el siguiente apartado, la cual permitirá calcular el ancho de banda utilizando (4.46).

### **Pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas: consideraciones generales.**

A continuación se concentran resumidas las conclusiones más importantes acerca de cómo fijar las pendientes de las cajas de Heisenberg, y que resultan de aplicación para concretar las cajas de Heisenberg que se deben utilizar para analizar las corrientes del presente capítulo. Estas conclusiones han sido expuestas primeramente a lo largo del capítulo 4, concretamente en los apartados 4.2 y 4.4. Para revisar una explicación más extensa el lector debe acudir a los apartados citados.

En el apartado 4.2 se define el criterio establecido en la presente tesis para determinar las dimensiones de las cajas de Heisenberg a utilizar. Si se quiere capturar la evolución de una componente en un determinado punto del plano tiempo-frecuencia, se toma un átomo centrado en dicho punto. Seguidamente, el criterio de la pendiente (ilustrado en la Fig. 4.12, la cual se repite a continuación en la Fig. 7.5, para comodidad del lector), indica que, la pendiente de la caja de Heisenberg del átomo debe ser igual a la pendiente de la evolución de la componente a detectar en el punto del plano en el cual el átomo se encuentra centrado.

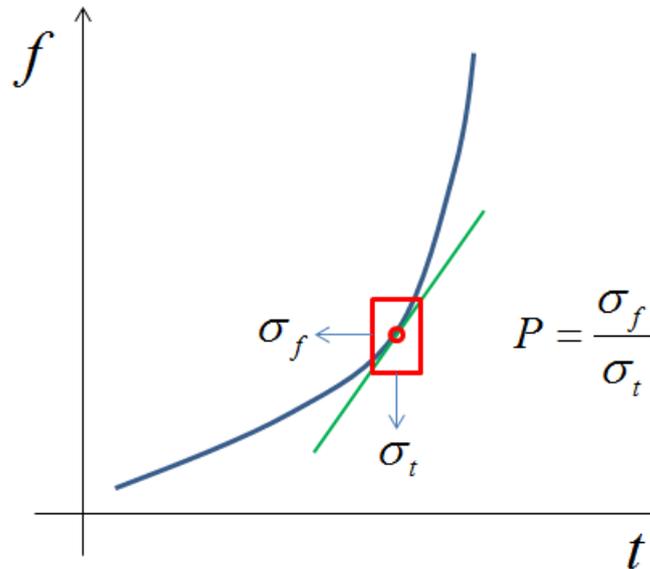


Fig. 7.5 Criterio de la pendiente: la pendiente de la caja de Heisenberg en un punto es igual a la de la tangente a la evolución en dicho punto de la componente que se quiere detectar.

Como el objetivo final es el diagnóstico de la máquina eléctrica, resulta prioritario detectar las componentes producidas por la avería. Es por ello que, tras capturar la corriente, el primer paso a la hora de aplicar la metodología es estimar la evolución de dichas componentes, tal y como se ha comentado en el subapartado 7.2.2. Conociendo la evolución se conoce la pendiente de dicha evolución en cada uno de los puntos del plano por los que pasa y por tanto, aplicando el criterio de la pendiente se conoce también la pendiente que las cajas deben tener en cada uno de estos puntos. Faltaría determinar la pendiente en el resto de puntos. Sin embargo, recordemos dos aspectos conflictivos antes de proseguir, los cuales variarán ligeramente este primer razonamiento.

En el apartado 4.4.4, poniendo como ejemplo precisamente la corriente 2 del presente capítulo, se analiza el resultado de aplicar el criterio de la pendiente a esta señal. En el apartado anterior (4.4.3), se avanzan las dificultades que se pueden encontrar. En primer lugar, en el subapartado acerca de los puntos críticos al aplicar el criterio de la pendiente observamos en la Fig. 4.30 (repetida en la Fig. 7.6 a continuación) que, si se analiza un punto por el cual pasan las evoluciones de dos componentes de avería, evidentemente la pendiente de la caja seleccionada no puede ser igual a las pendientes de las dos componentes al mismo tiempo (aunque en algún caso particular las pendientes de las dos componentes sean iguales pero de signo contrario, como en el caso de B2+ y b5+). Es por ello que se debe seleccionar una componente cuya detección sea prioritaria (la componente de avería de mayor amplitud, como en el caso de la intersección del LSH con B2-) o asignar un valor de compromiso.

Por otra parte, en el subapartado acerca de la convolución vs variación de la pendiente con el tiempo, se analiza cómo, si se permite que la evolución de la pendiente sea completamente arbitraria, se renuncia a poder calcular la transformada a través de un conjunto de convoluciones (tantas como frecuencias a analizar), lo cual facilita el cálculo y reduce considerablemente el tiempo de computación. Para poder utilizar la fórmula de la convolución, es necesario que para una determinada frecuencia la pendiente de la caja utilizada no varíe con el instante de tiempo considerado.

En definitiva, en el apartado 4.4.4 se aplica detalladamente como ejemplo el criterio de la pendiente al analizar la banda de frecuencia entre 0 y 50 Hz de la corriente 2, razonamiento resumido a continuación. En primer lugar, en cuanto al problema de los puntos críticos, se toma como prioridad capturar la evolución de la mayor componente provocada por la rotura de barra presente en dicha banda de frecuencia: el LSH. Así pues, la pendiente en esta zona del plano se debe ajustar adecuadamente para capturar la evolución del LSH.

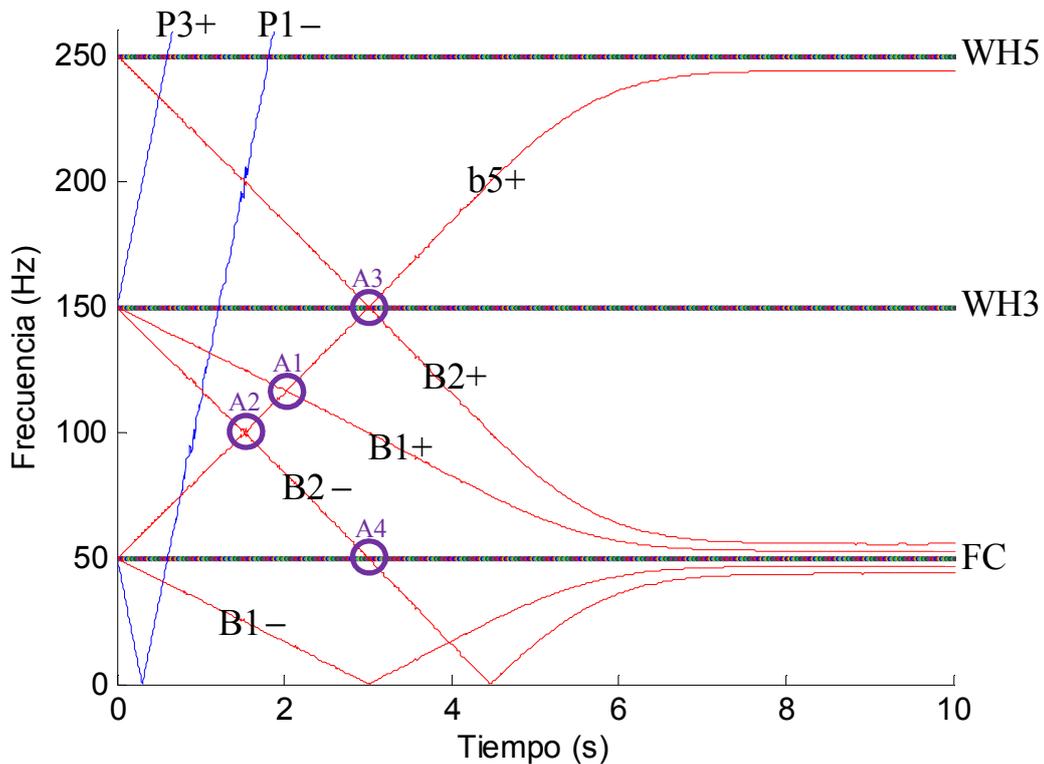


Fig. 7. 6 Estimación de las evoluciones temporales de las componentes de mayor amplitud.

Por otra parte, en cuanto al uso de la convolución, se justifica que resulta suficiente tomar una pendiente distinta para cada frecuencia analizada pero una vez fijada la frecuencia, mantenerla constante en los distintos instantes de tiempo del transitorio. Esto es así debido en primer lugar a que el análisis se puede dividir en dos bandas: 0-40 Hz y 45-50 Hz (existiendo una banda de transición de 5 Hz entre las dos). Por debajo de 40 Hz (Fig. 4.31, repetida en la Fig. 7.7), a cada frecuencia tan solo encontramos como parte importante a detectar la evolución del LSH durante el arranque, la cual tiene además un carácter simétrico, siendo la pendiente en la primera parte del arranque igual a la pendiente en la segunda parte. Se concluye que a cada frecuencia es necesaria tan solo una pendiente y que además en esta zona la pendiente tampoco varía con la frecuencia pues la evolución del LSH es lineal.

Finalmente, exceptuando los primeros instantes del arranque, a cada frecuencia entre 45 y 50 Hz la única evolución a detectar es la de las oscilaciones de carga (Fig. 4.32, repetida en la Fig. 7.8). Aquí se puede tomar una pendiente también constante, un valor de compromiso entre los distintos valores necesarios para capturar las oscilaciones en cada uno de sus tramos, teniendo en cuenta además que se debe filtrar adecuadamente el FC. Finalmente, para pasar de la pendiente utilizada a 40 Hz a la utilizada a 45 Hz, la pendiente evoluciona linealmente con la frecuencia.

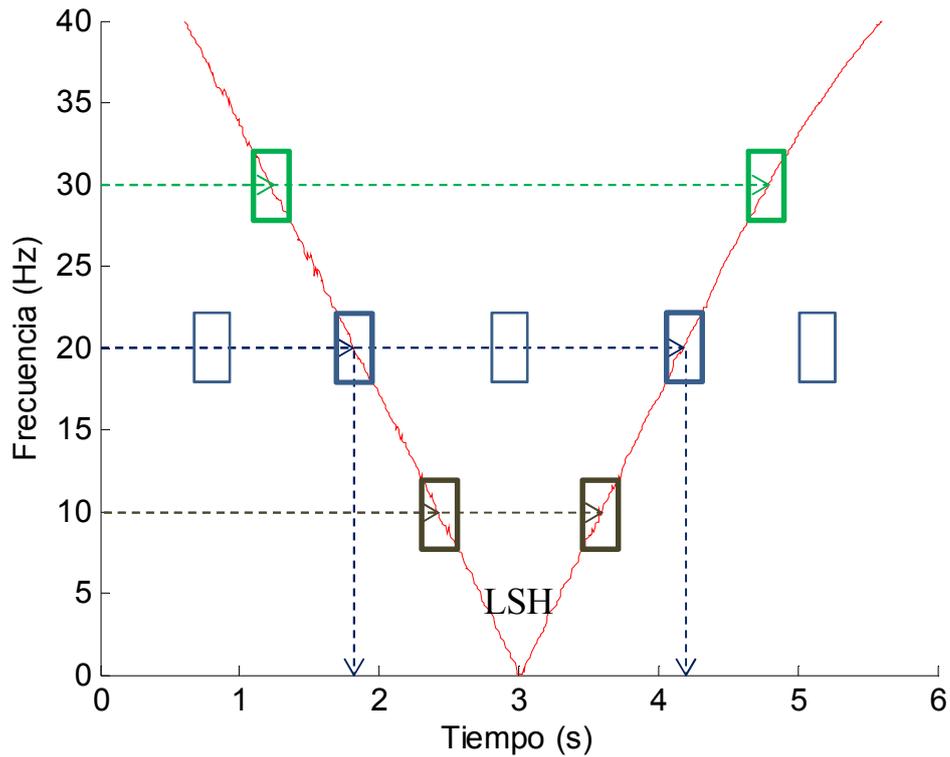


Fig. 7. 7 Estimación de la evolución del LSH durante los primeros 6 segundos del transitorio y en la banda de frecuencia entre 0 y 40 Hz. Cajas de Heisenberg de pendientes adecuadas al analizar los 30, 20 y 10 Hz (verde, azul y marrón respectivamente).

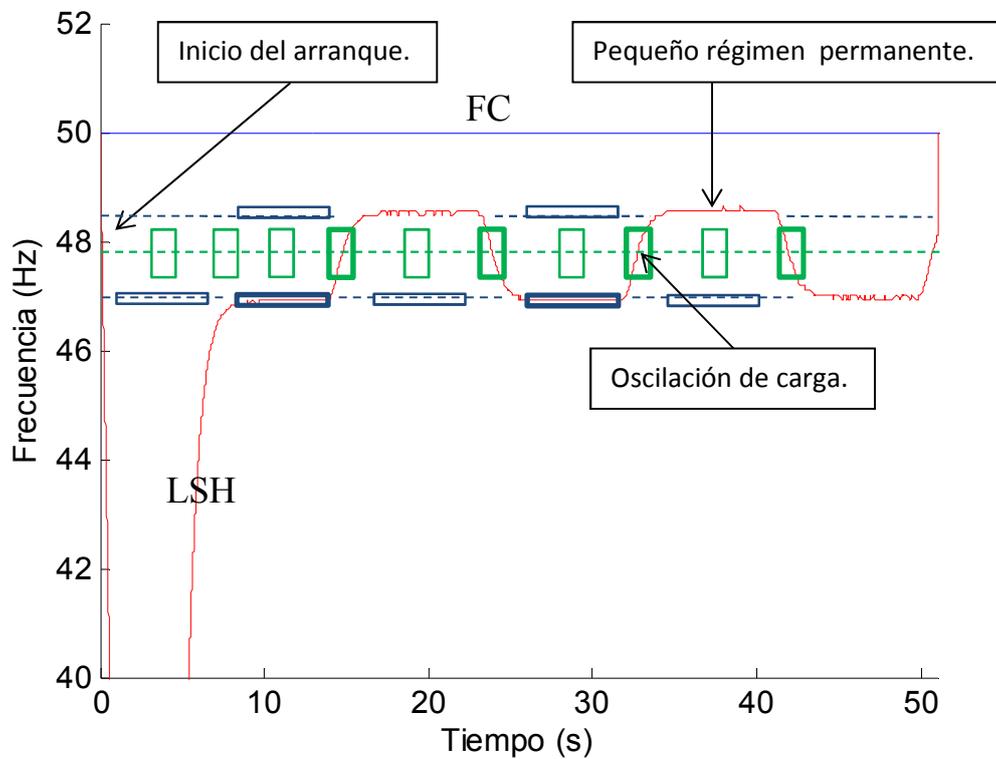


Fig. 7. 8 Estimación de la evolución del LSH mostrando la banda de frecuencia entre 40 y 52 Hz. Cajas de Heisenberg de pendientes adecuadas asociadas a las frecuencias relativas a los pequeños regímenes permanentes (azul) y a las oscilaciones de carga (verde).

Así pues, rescatando el razonamiento expuesto en el apartado 4.4.4 se tiene claro las pendientes a utilizar para analizar la banda de frecuencia entre 0 y 50 Hz. ¿Qué ocurre con el resto de la banda a analizar? Simplemente se aplica un razonamiento análogo. En las frecuencias comprendidas entre los WH (como la banda 0-40 Hz), los fragmentos de evoluciones a detectar a cada frecuencia analizada son las de los arranques, igual que ocurre con el LSH por debajo de 40 Hz. Así pues, se selecciona una componente de rotura de barra prioritaria cuyo arranque deseamos detectar mejor, y se fija la pendiente adecuada para captar su evolución durante el arranque, la cual resulta ser constante dentro de la banda, pues las evoluciones tienen una característica prácticamente rectilínea. Cuando se llega a las frecuencias alrededor de los WH, hay que cumplir, igual que alrededor del FC, dos compromisos: filtrar adecuadamente el WH y capturar las oscilaciones de las frecuencias de las componentes de avería, las cuales se producen precisamente alrededor de los WH igual que el LSH oscila alrededor del FC. En esta zona se toma una pendiente del orden de la tomada alrededor del FC. Para casar los distintos valores de las pendientes, existen bandas de transición en las cuales la pendiente evoluciona linealmente con la frecuencia.

### **Pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas: aplicación a cada corriente.**

Veámoslo con un ejemplo. La Fig. 7.9 muestra la estimación de las evoluciones de las principales componentes de la corriente 2 (motor tipo A con una barra rota) durante los primeros 20 s del transitorio capturado. Mostramos solo los primeros 20 s pues de esta forma podemos distinguir claramente los distintos armónicos gracias a la separación entre sus evoluciones durante el arranque, y a la vez observamos cómo tienden al régimen permanente produciéndose además una reducción de la carga aproximadamente a los 14 s. En primer lugar hay que seleccionar, para cada banda de frecuencia comprendida entre dos WH la principal componente de barra rota a detectar. Las componentes elegidas (cuyas evoluciones se muestran separadamente en la Fig. 7.10) son:

- 0-50 Hz: B1– (LSH, la componente más importante).
- 50-150 Hz: B1+ (USH, la segunda componente más importante).
- 150-250 Hz: B2+ y b5+ (dos componentes de elevada amplitud y misma pendiente a lo largo del arranque, pero de distinto signo).
- 250-350 Hz: b7– (una componente de elevada amplitud).
- 350-450 Hz: B97 (la única componente de avería en esta banda, que además no está prevista por la teoría, y que evoluciona de  $9f_{FC}$  a  $7f_{FC}$ ).

Retomando el análisis anterior, por debajo de 40 Hz la pendiente es la necesaria para capturar el LSH durante el arranque. Ésta pendiente  $P_{LSH}$ , es aproximadamente igual a la banda de frecuencia cubierta por el LSH durante el arranque  $2f_{FC}$ , dividida por el tiempo de arranque  $t_a$ :  $P_{LSH} = 2f_{FC}/t_a$ . Por otra parte, entre 45 y 50 Hz se selecciona una pendiente adecuada para capturar las oscilaciones de carga y filtrar adecuadamente la componente fundamental  $P_{OC}$ . Análogamente, en las bandas de frecuencia mostradas en la enumeración expuesta consecutivamente a este párrafo, a cada frecuencia encontramos únicamente evoluciones durante el arranque, habiendo priorizado en cada una de dichas bandas capturar la componente indicada. Los tiempos de arranque son obviamente los mismos en todos los casos, cambiando tan solo el ancho

de las bandas cubiertas por cada armónico. Esto permite determinar las pendientes en cada una de estas bandas:

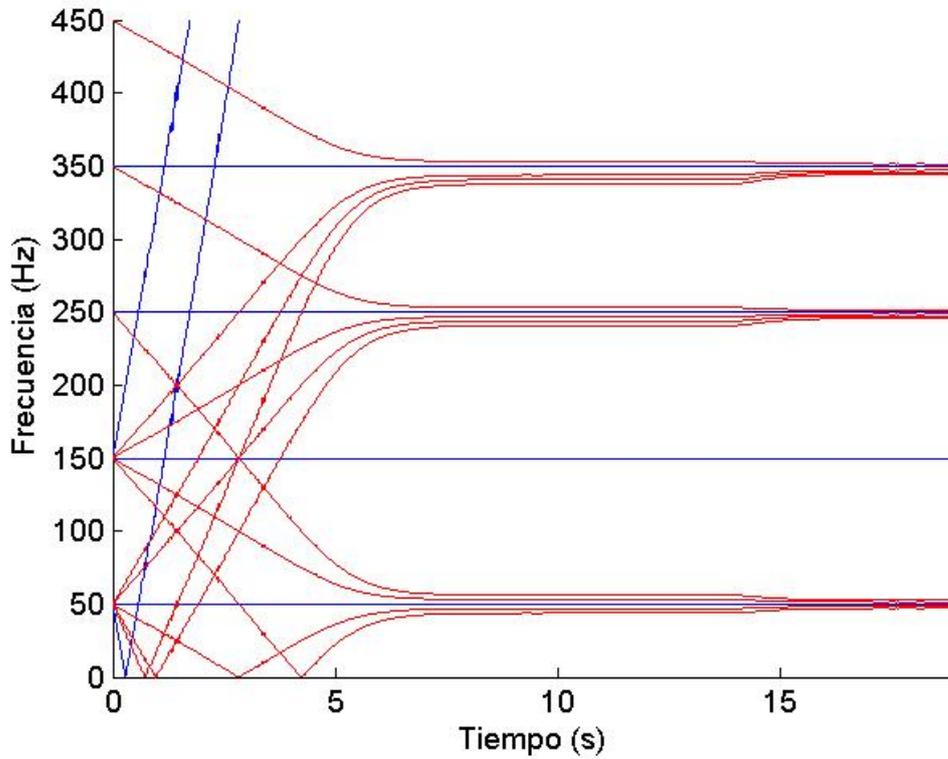


Fig. 7.9 Estimación de las evoluciones de las frecuencias de la corriente 2 (motor tipo A con una barra rota) durante los primeros 20 s del transitorio capturado (arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

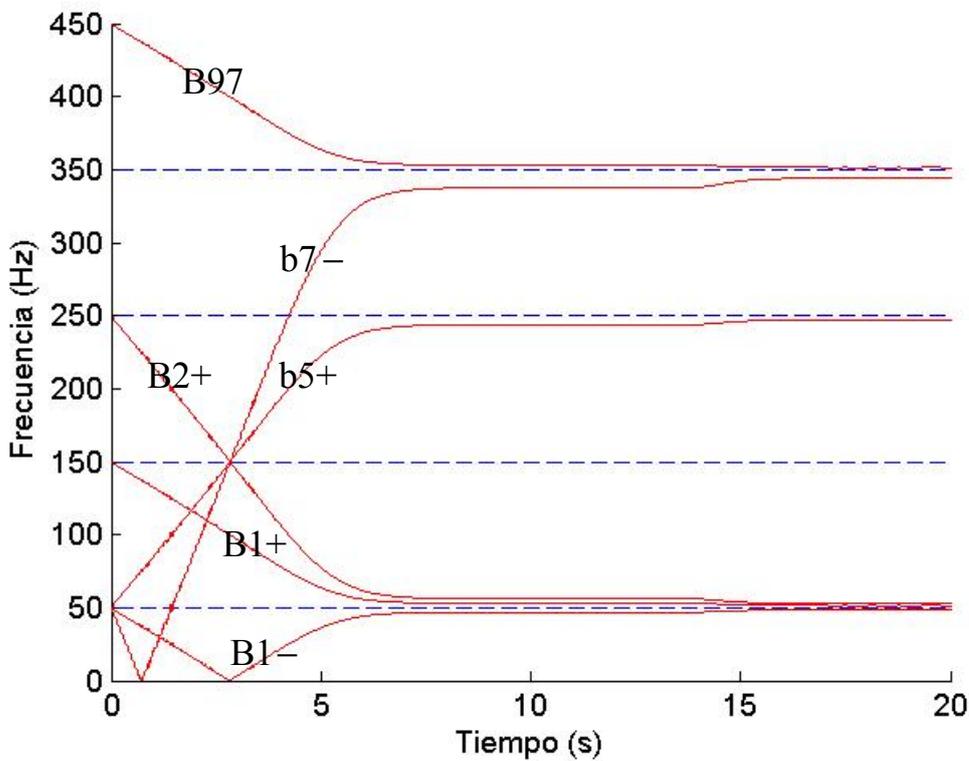


Fig. 7.10 Selección de las componentes consideradas prioritarias, de entre las mostradas en la Fig. 9, para la aplicación del criterio de la pendiente.

## Capítulo 7.

- 0-40 Hz  $\rightarrow$  B1-  $\rightarrow P_{LSH}$ .
- 60-140 Hz  $\rightarrow$  B1+  $\rightarrow P_{LSH}$ .
- 160-240 Hz  $\rightarrow$  B2+ y b5+  $\rightarrow 2P_{LSH}$ .
- 260-340 Hz  $\rightarrow$  b7-  $\rightarrow 4P_{LSH}$ .
- 360-440 Hz  $\rightarrow$  B97  $\rightarrow P_{LSH}$ .

Con lo que respecta a las bandas alrededor de los WH donde se producen las variaciones de carga, como avanzábamos, se deben tomar pendientes adecuadas para captar las oscilaciones de carga y filtrar el WH correspondiente. Por tanto, se consideran bandas de 10 Hz alrededor de cada WH (45-55 Hz, 145-155 Hz, 245-255 Hz y 345-355 Hz). En las bandas de frecuencia restantes (40-45 Hz, 55-60 Hz, 140-145 Hz, 155-160 Hz, 240-245 Hz, 255-260 Hz, 340-345 Hz, 355-360 Hz) la pendiente varía linealmente desde el valor de la banda inferior al de la superior.

Veamos concretamente qué pendientes se deben utilizar para analizar cada una de las corrientes analizadas. Con lo que respecta a los corriente del motor de tipo A, el tiempo de arranque es de aproximadamente  $t_a = 6$  s. Teniendo en cuenta que la frecuencia fundamental es  $f_{FC} = 50$  Hz, se fijan las siguientes pendientes:

- 0-40 Hz  $\rightarrow$  B1-  $\rightarrow P_{LSH} = 16.7$  Hz/s.
- 60-140 Hz  $\rightarrow$  B1+  $\rightarrow P_{LSH} = 16.7$  Hz/s.
- 160-240 Hz  $\rightarrow$  B2+ y b5+  $\rightarrow 2P_{LSH} = 33.3$  Hz/s.
- 260-340 Hz  $\rightarrow$  b7-  $\rightarrow 4P_{LSH} = 66.7$  Hz/s.
- 360-440 Hz  $\rightarrow$  B97  $\rightarrow P_{LSH} = 16.7$  Hz/s.

Por otra parte, en 4.2.4, al presentar el criterio de la pendiente se determinó un valor adecuado para la zona relativa a las oscilaciones de carga y el filtrado de la FC de  $P_{OC} = 0.25$  Hz/s. La Fig. 7.11 muestra la estimación de las evoluciones de las componentes de avería de la corriente 2 (motor tipo A con una barra rota) analizada como ejemplo. La Fig. 7.12 muestra las pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas a cada frecuencia para analizar esta señal. La corriente 1, perteneciente a un motor del mismo tipo, presenta evoluciones análogas de sus componentes de avería y por tanto las pendientes utilizadas para su análisis son las mismas.

Con lo que respecta a las seis corrientes capturadas pertenecientes a motores de tipo B, la división de la banda de frecuencia a analizar en subbandas y la componente seleccionada como prioridad en cada subbanda es la misma que en el caso de las corrientes de motores de tipo A. Sin embargo, tal y como se observa en la Fig. 7.13, donde se muestran las evoluciones de las componentes de avería para la corriente 4, el arranque tiene una duración 3 veces menor; concretamente  $t_a = 2$  s. Por tanto, las pendientes utilizadas en cada una de estas subbandas son tres veces mayores. Para que el cambio entre estas pendientes y las utilizadas para analizar las oscilaciones de carga no sea tan brusco se toma una pendiente 4 veces mayor a la de los motores de tipo A en estas mismas zonas  $P_{OC} = 1$  Hz/s. Las pendientes utilizadas a cada frecuencia para analizar este conjunto de corrientes se muestran en la Fig. 7.14.

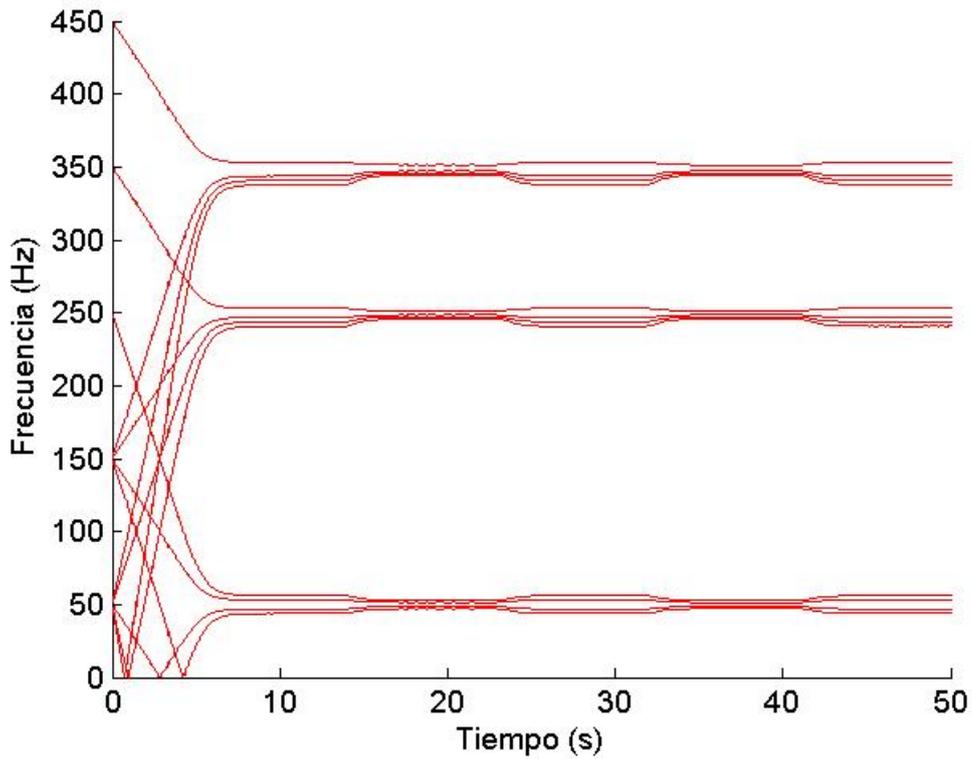


Fig. 7.11 Corriente 2 (motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga): estimación de las evoluciones de las frecuencias de la corriente.

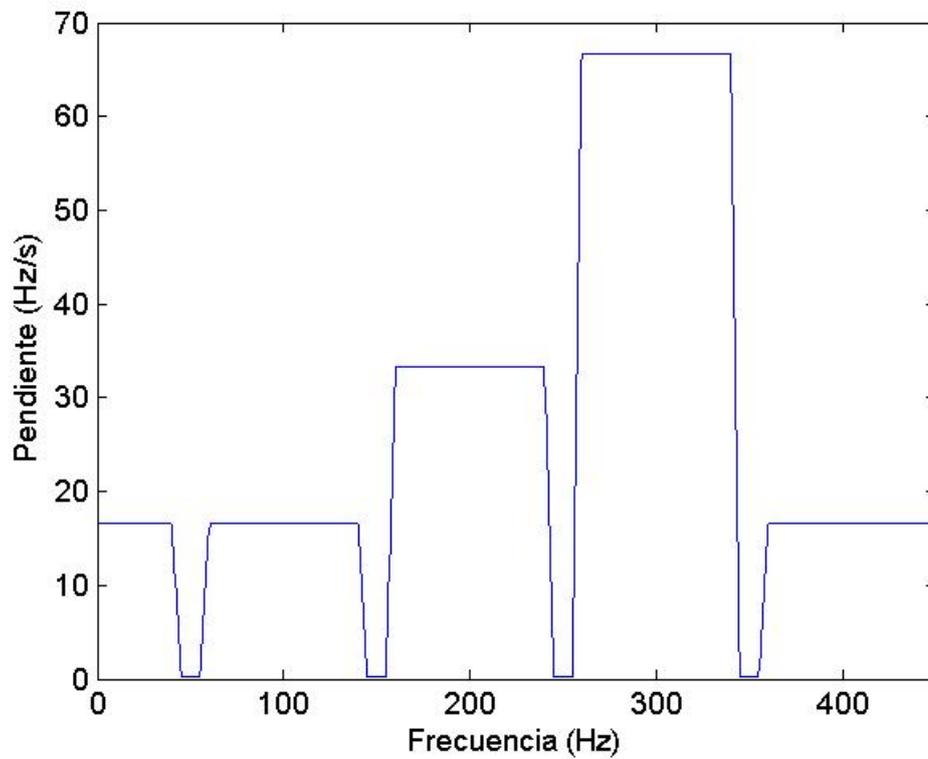


Fig. 7.12 Corriente 2 (motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga): pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada frecuencia.

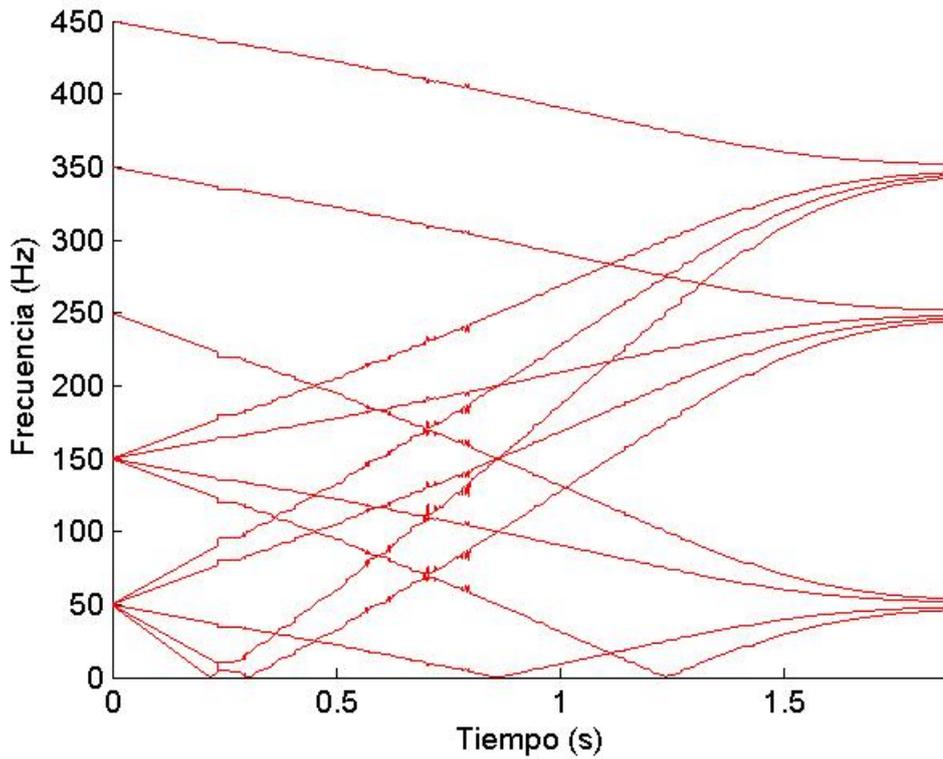


Fig. 7. 13 Corriente 4 (motor tipo B con una barra rota durante un arranque en vacío): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

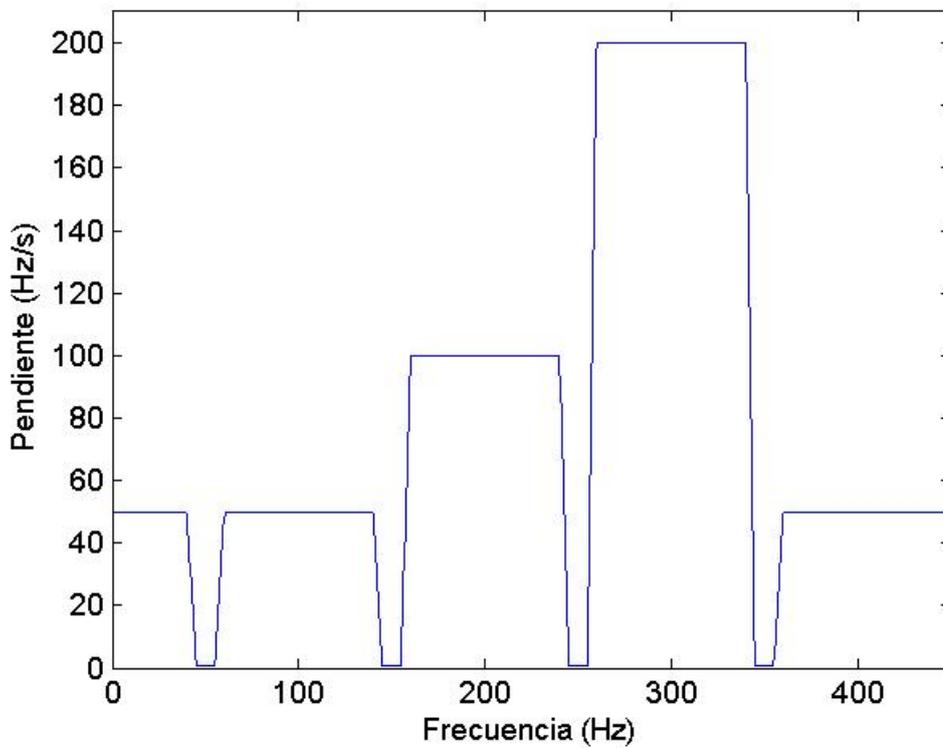


Fig. 7. 14 Corriente 4 (motor tipo B con una barra rota durante un arranque en vacío): pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada frecuencia.

Finalmente, cabe comentar que, aunque para las corrientes analizadas en el presente capítulo resulta suficiente variar las pendientes de las cajas tan solo con la frecuencia analizada, en los capítulos 8 y 9 se utilizan variaciones de complejidad creciente: en el capítulo 8 las pendientes varían con el tiempo aunque no con la frecuencia (no pudiendo aplicarse ya la convolución) y en el capítulo 9 las pendientes varían de forma completamente general (con el tiempo y la frecuencia) a lo largo del plano. En definitiva, aunque resulta suficiente utilizar pendientes variables solo con la frecuencia, y resulta un buen primer paso a la hora de analizar señales, si se aplicaran cajas variables mejora la captación de las evoluciones de aquellas componentes que no han sido priorizadas.

### 7.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.

Una vez fijada la familia de átomos tiempo-frecuencia, el siguiente paso es calcular la correlación habitual entre los elementos de la familia y la señal a analizar:

$$\langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi_{t_c, f_c}^*(t) dt \quad (7.1)$$

Finalmente, se calculan las densidades de energía en cada punto del plano analizado:

$$\rho_h(t_c, f_c) = \left| \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle \right|^2 \quad (7.2)$$

Como los átomos de la familia están centrados en una matriz de puntos en el plano tiempo-frecuencia, al aplicar (7.2) obtenemos como resultado una matriz de densidades de energía. Las densidades de energía obtenidas se representan en 2D en el plano tiempo-frecuencia localizando los puntos de la matriz de resultados que contienen los valores máximo y mínimo, asignándoles respectivamente los dos extremos de una determinada escala de colores, para proceder seguidamente a asignar colores intermedios al resto de resultados en función de sus valores relativos a dichos extremos. Concretamente, la escala de colores utilizada es la escala 'pink' de MatLab y se han considerado 1024 colores. Por otra parte, para poder observar mejor las evoluciones de las componentes de menor amplitud, mejorando la visualización de los resultados obtenidos, se ha aplicado escala logarítmica. El resultado de analizar cada una de las ocho corrientes de la Tabla 7.1 son las figuras 7.16, 7.20, 7.24, 7.28, 7.32, 7.36, 7.40 y 7.44. Para cada figura mencionada, la figura anterior corresponde, tal y como ya se ha indicado anteriormente, a la estimación de las evoluciones de las componentes de rotura de barra. Por otra parte, las dos figuras posteriores corresponden, tal y como se explica en el apartado 7.2.7 destinado a la cuantificación, al seguimiento de la densidad de energía de cada uno de los armónicos considerados y a la evolución de la densidad de energía del armónico de barra rota más importante, el LSH.

### 7.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.

Las figuras obtenidas en el apartado anterior se han generado utilizando escala logarítmica. Por lo demás, evitando alargar demasiado el capítulo, en el presente

apartado no se utilizan otras de las técnicas propuestas en la tesis para mejorar la visualización, pues aplicando escala logarítmica ya se observan claramente las evoluciones de las componentes. En el siguiente apartado (7.3), al comentar los resultados obtenidos y efectuar el diagnóstico, sí se muestra como se puede mejorar la visualización con respecto a la escala logarítmica utilizando referencias distintas a cada frecuencia analizada. Como ejemplo, dicha técnica se aplica a las dos corrientes del motor tipo A (figuras 7.52 y 7.54).

### 7.2.7.- Cuantificación.

Para cuantificar la presencia de barras rotas en el motor cuya corriente del estator se analiza, se ha utilizado el método expuesto en el apartado 4.6.1. Este consiste básicamente en acoplar el resultado de estimar las evoluciones de las componentes de avería con el resultado de calcular las densidades de energía. En otras palabras, se localizan los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía. La aplicación de este paso al conjunto de corrientes analizadas se muestra en las figuras 7.17, 7.21, 7.25, 7.29, 7.33, 7.37, 7.41 y 7.45.

Las componentes de avería que se han tratado de detectar se indican en la columna izquierda de la Tabla 7.1. Las cuatro primeras componentes quedan descritas por la primera fórmula de (2.3): B1-, B1+, B2- y B2+. Las cuatro siguientes quedan descritas por la segunda fórmula de (2.3): b5+, b5-, b7+ y b7-. Finalmente, las cuatro últimas no están descritas en el estado del arte, pero sin embargo aparecen al producirse la rotura de barra. Como su frecuencia no es estimada mediante ninguna de las dos fórmulas de (2.3), no se sigue ninguna de las dos nomenclaturas anteriores. Concretamente, estas componentes se nombran mediante la letra B seguida de dos números enteros: multiplicando cada uno de los dos números por la frecuencia fundamental obtenemos respectivamente las frecuencias inicial y final de la componente durante un arranque. Por ejemplo, la componente B97 parte de  $9f_{FC}$  al inicio del arranque terminando en  $7f_{FC}$ . En definitiva tenemos B35, B37, B97 y B75.

Se puede comprobar fácilmente que las frecuencias de las componentes de rotura de barra descritas en (2.3) en función del deslizamiento se pueden formular mediante una única ecuación:

$$f_{BBH} = [n_f - (n_f - n_0)s] f_{FC} \quad (7.3)$$

donde  $n_0 f_{FC}$  es la frecuencia de la componente al principio del arranque y  $n_f f_{FC}$  es la frecuencia al final, teniendo en cuenta que todos los pares  $n_0, n_f$  no son válidos. Esta ecuación sirve también para predecir las evoluciones temporales de las frecuencias de las componentes no descritas en el estado del arte.

Seguidamente, prescindiendo de la información frecuencial, se obtiene para cada instante, la densidad de energía a lo largo de la evolución de cada componente. Como se ha tratado de detectar la presencia de 12 componentes de avería y se han analizado 8 corrientes, se tienen un total de 96 evoluciones. Para evitar mostrar un exceso de resultados, en este apartado se muestra tan solo la evolución de la densidad de la mayor

componente de rotura de barra, el LSH, para cada corriente analizada: figuras 7.18, 7.22, 7.26, 7.30, 7.34, 7.38, 7.42 y 7.46.

Finalmente, las medias de las evoluciones de dichas densidades son los índices que se utilizan para cuantificar la presencia de la avería. La Tabla 7.1 muestra las medias de las densidades para cada componente (fila) de cada máquina analizada (columna). Los códigos de colores utilizados son los siguientes: azul para una máquina sana, rojo para una máquina con una barra rota y rojo negrita para una máquina con dos barras rotas. Como ya se ha comentado, previamente a calcular la media se ha recortado la parte final de cada transitorio, evitando así incluir en la media el efecto de borde derecho. Por otra parte, en la Tabla 7.2 se muestran las diferencias de los resultados en dB entre las corrientes pertenecientes a máquinas averiadas y las pertenecientes a máquinas sanas del mismo tipo. Así pues, la primera columna muestra las diferencias entre las presencias de las componentes en las corrientes 1 y 2, ambas pertenecientes a un motor de tipo A, estando el primero sano y el segundo averiado con una barra rota.

**Tabla. 7. 1 Índices que cuantifican la presencia de las componentes vinculadas a la avería (filas), para cada una de las corrientes capturadas (columnas).**

Corriente	1	2	3	4	5	6	7	8
Componente								
B1– (dB)	-58.3	-51.2	-58.5	-44.3	<b>-39.2</b>	-62.7	-44	<b>-39.4</b>
B1+ (dB)	-80.5	-69.5	-65.5	-56.9	<b>-49.9</b>	-73.4	-60.4	<b>-51.8</b>
B2– (dB)	-70.3	-66	-65.6	-57.1	<b>-53.2</b>	-69.3	-59.1	<b>-55.6</b>
B2+ (dB)	-81.6	-76.2	-71.4	-65	<b>-60.9</b>	-76.3	-65.9	<b>-63.7</b>
b5+ (dB)	-78.1	-67.5	-70.7	-61.2	<b>-58.8</b>	-70.2	-58.6	<b>-55.3</b>
b5– (dB)	-88.4	-84	-73.6	-66.3	<b>-65.6</b>	-72.7	-65.5	<b>-64.3</b>
b7+ (dB)	-88.1	-75.9	-74.2	-70.7	<b>-71.3</b>	-72	-71.4	<b>-68.5</b>
b7– (dB)	-93.4	-77.2	-75.1	-66.2	<b>-66.4</b>	-73.1	-64.1	<b>-63</b>
B35 (dB)	-74.5	-67	-77	-67.2	<b>-64.6</b>	-76.2	-66.2	<b>-62.8</b>
B37 (dB)	-84.5	-75.3	-77.1	-73.1	<b>-69</b>	-76.5	-71	<b>-67.2</b>
B97 (dB)	-83.6	-78.5	-77.9	-78.6	<b>-77.2</b>	-79.6	-74.7	<b>-75.5</b>
B75 (dB)	-80.3	-81.1	-77.8	-72.8	<b>-70.6</b>	-79.3	-74.3	<b>-74.6</b>

**Tabla. 7. 2 Diferencias entre los índices que cuantifican la presencia de las componentes vinculadas a la avería (filas), para los siguientes pares de corrientes capturadas (columnas).**

Corriente	2–1	4–3	5–3	7–6	8–6
Componente					
B1– (dB)	7	14	19	19	23
B1+ (dB)	11	10	17	13	22
B2– (dB)	4	8	12	10	14
B2+ (dB)	5	6	11	10	13
b5+ (dB)	11	9	12	12	15
b5– (dB)	4	7	8	7	8
b7+ (dB)	12	4	3	1	4
b7– (dB)	16	9	9	9	10
B35 (dB)	7	10	12	10	13
B37 (dB)	9	4	8	5	9
B97 (dB)	5	-1	1	5	4
B75 (dB)	-1	5	7	5	5

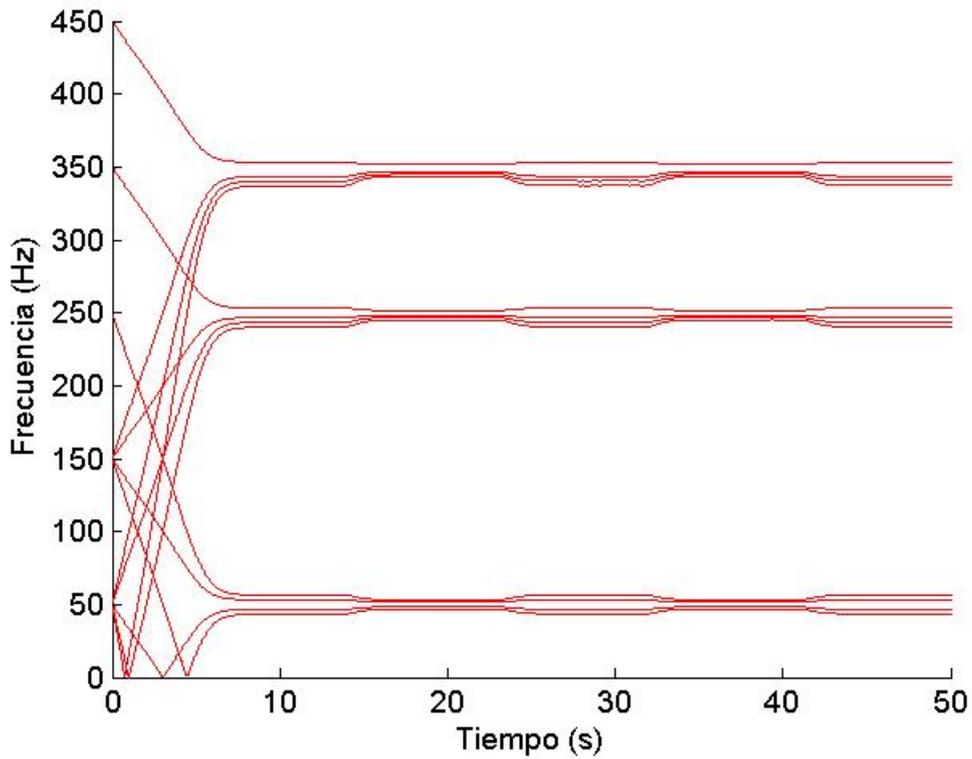


Fig. 7. 15 Corriente 1 (motor tipo A sano durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

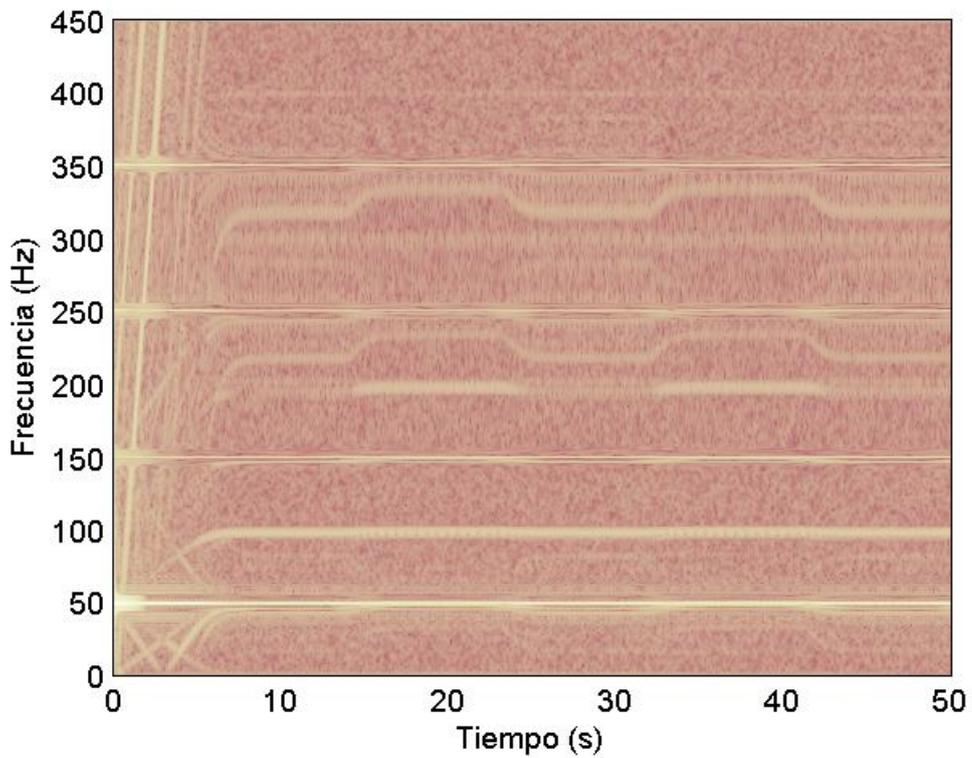


Fig. 7. 16 AST de la corriente 1: motor tipo A sano durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga.

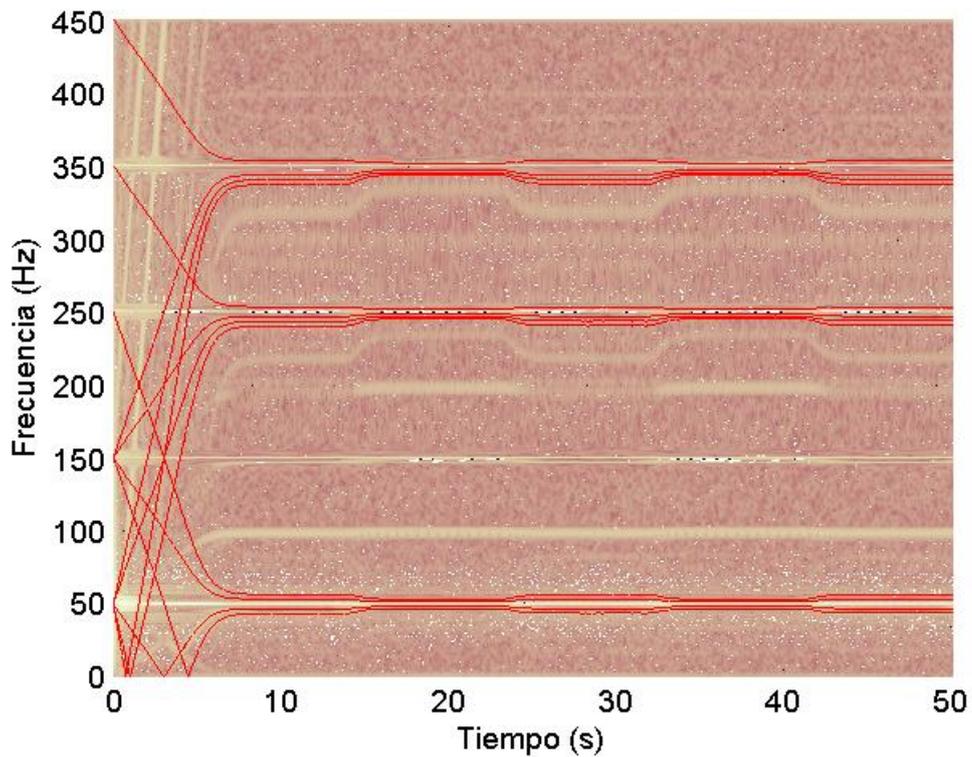


Fig. 7.17 Acople de los resultados de las figuras 7.9 y 7.10: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía.

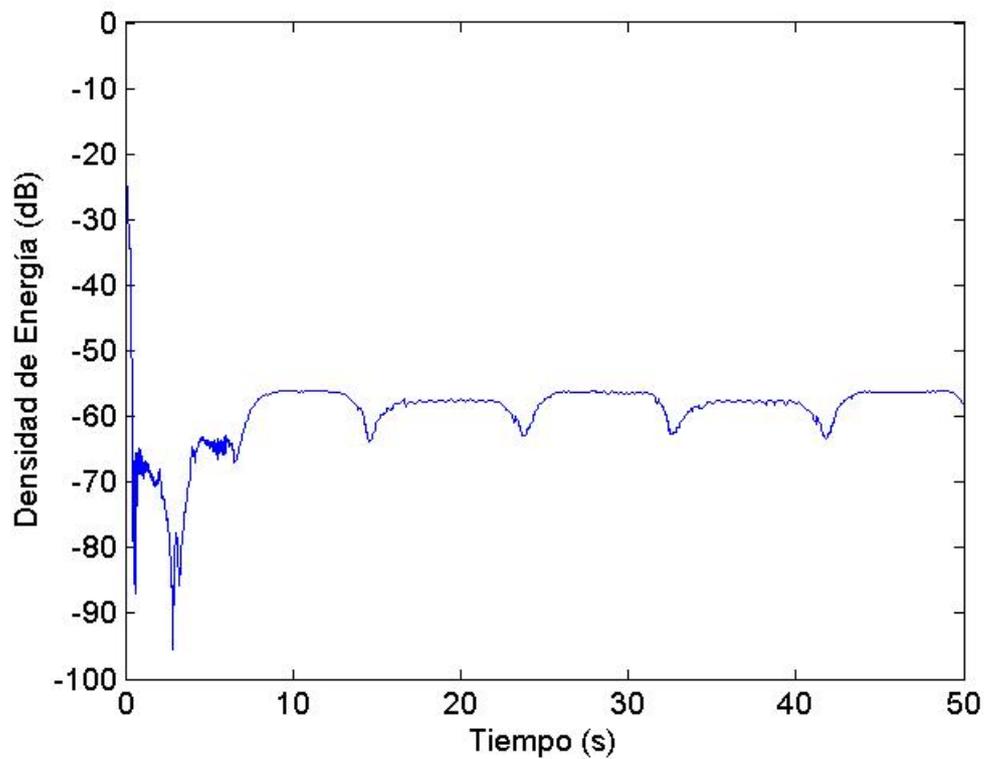


Fig. 7.18 Corriente 1 (motor tipo A sano durante un arranque en carga): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH, la más importante componente de rotura de barra.

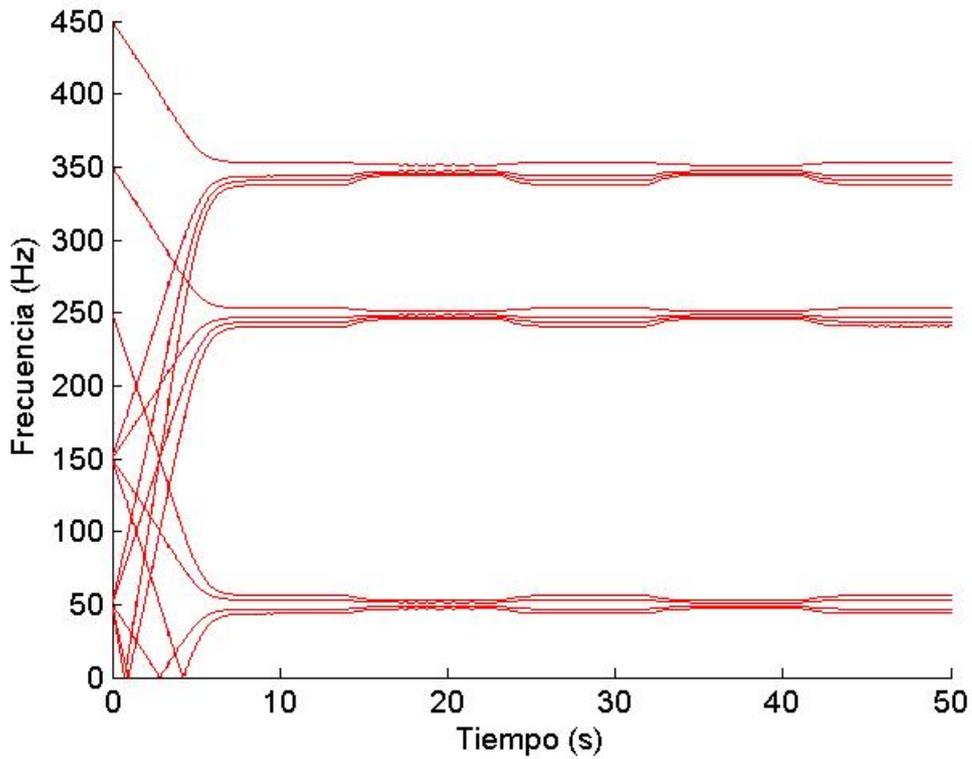


Fig. 7.19 Corriente 2 (motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

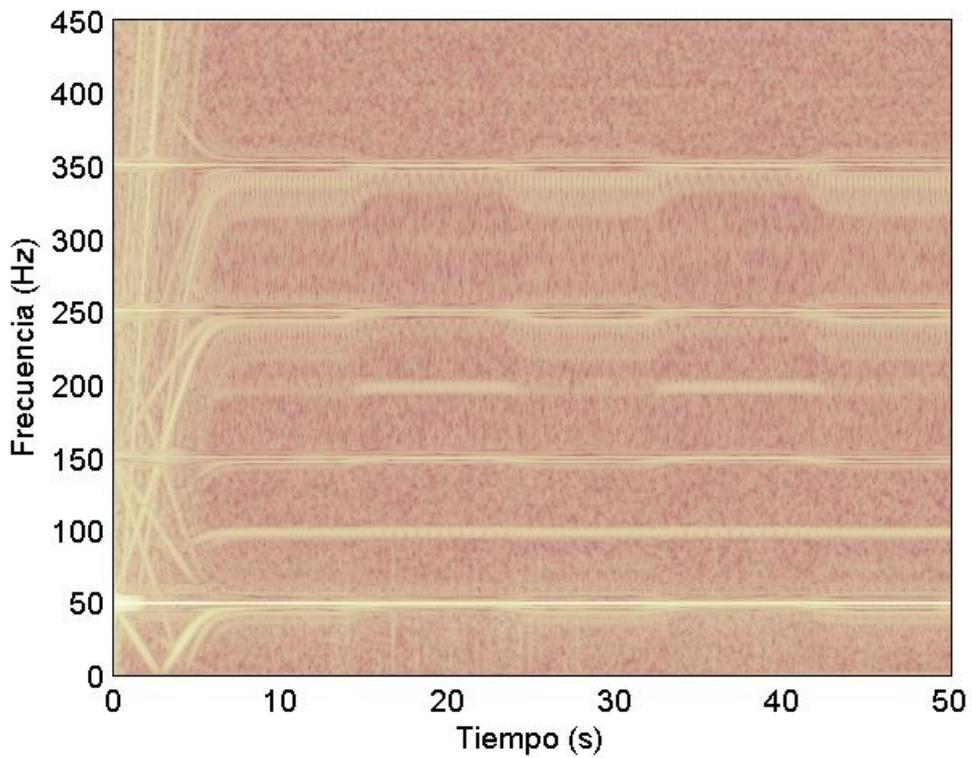


Fig. 7.20 AST de la corriente 2: motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga.

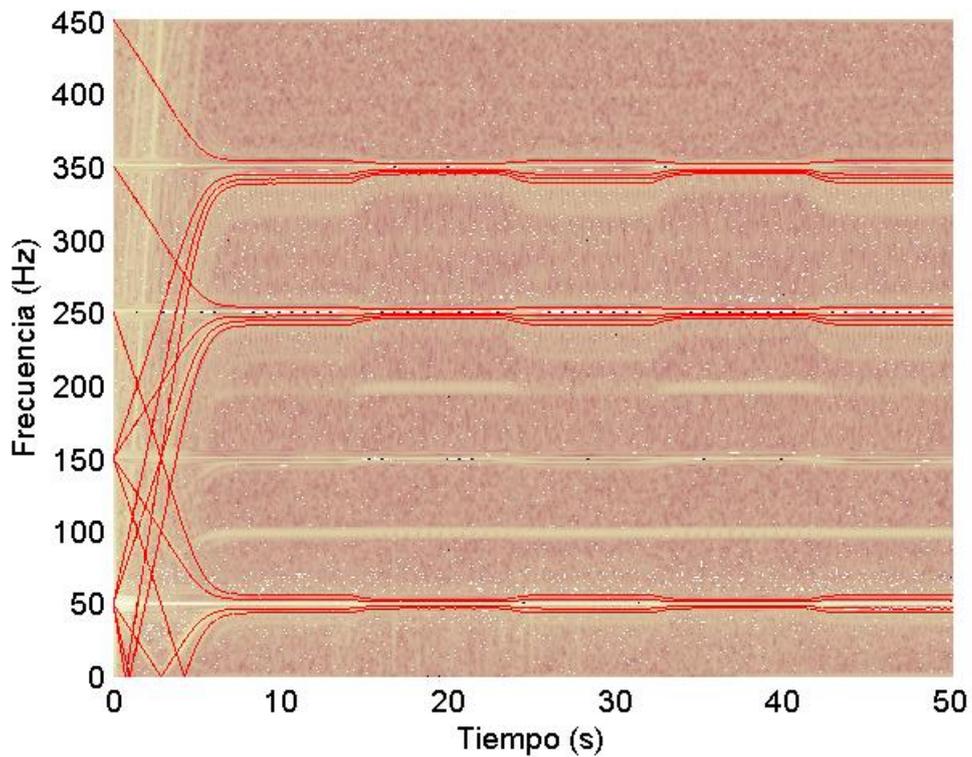


Fig. 7.21 Acople de los resultados de las figuras 7.13 y 7.14: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía.

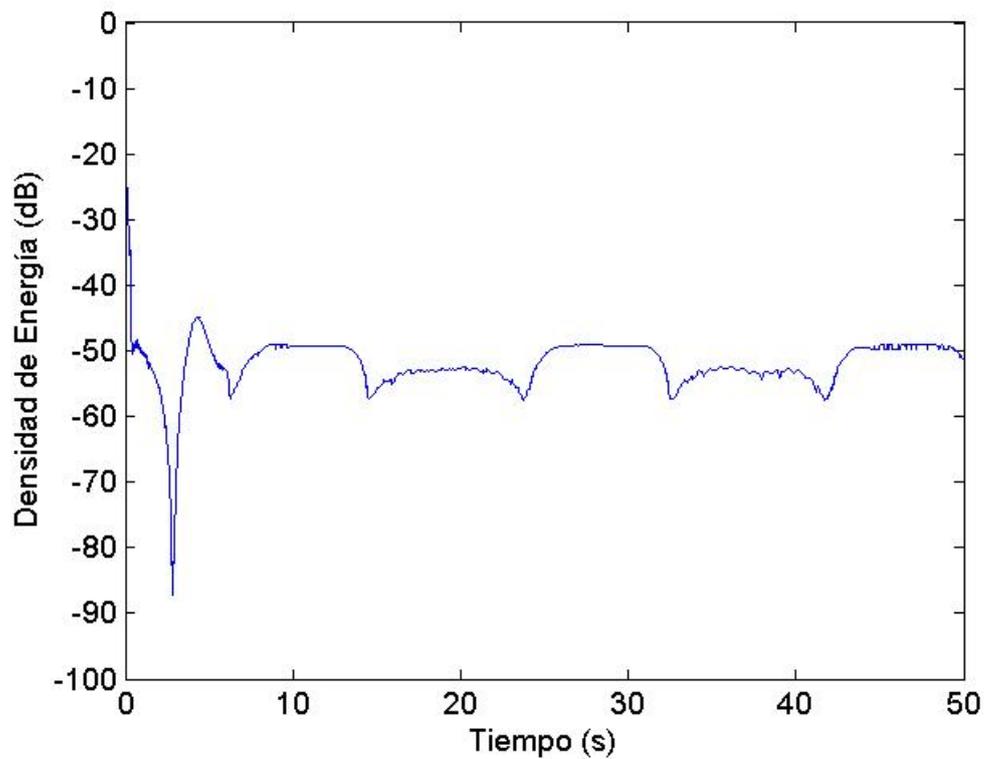


Fig. 7.22 Corriente 2 (motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH, la más importante componente de rotura de barra.

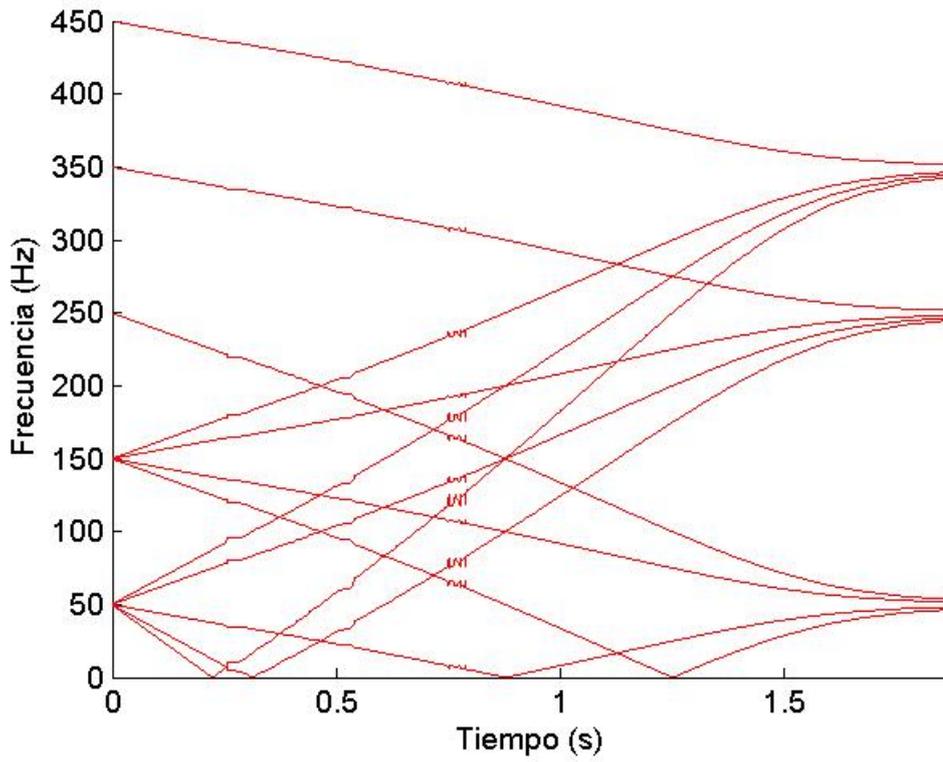


Fig. 7. 23 Corriente 3 (motor tipo B sano durante un arranque en vacío): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

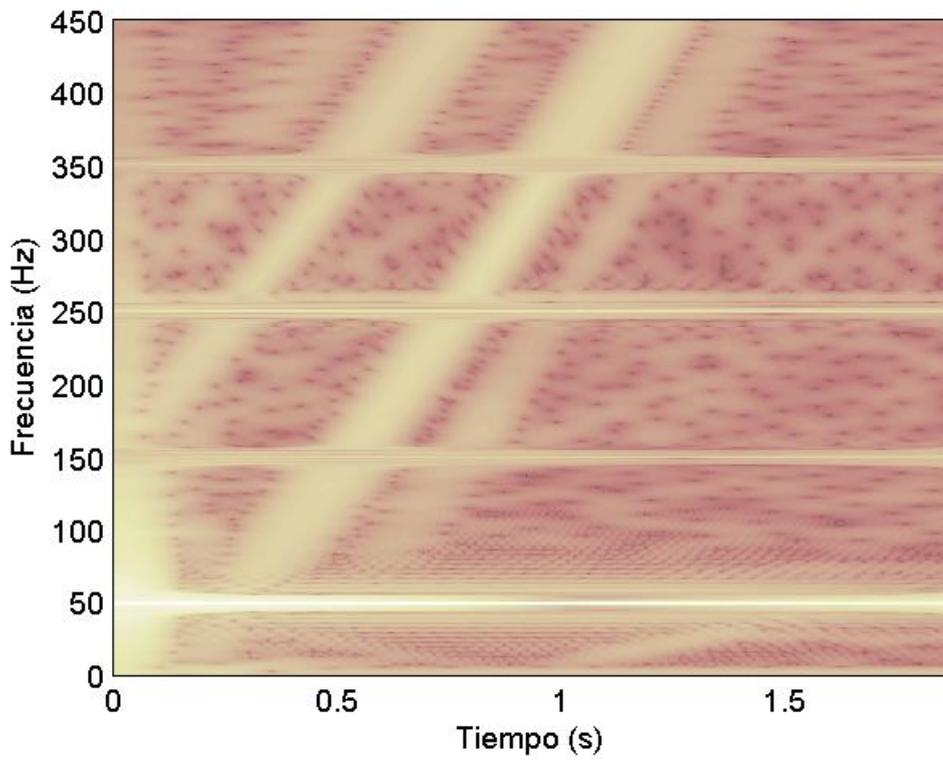


Fig. 7. 24 AST de la corriente 3: motor tipo B sano durante un arranque en vacío.

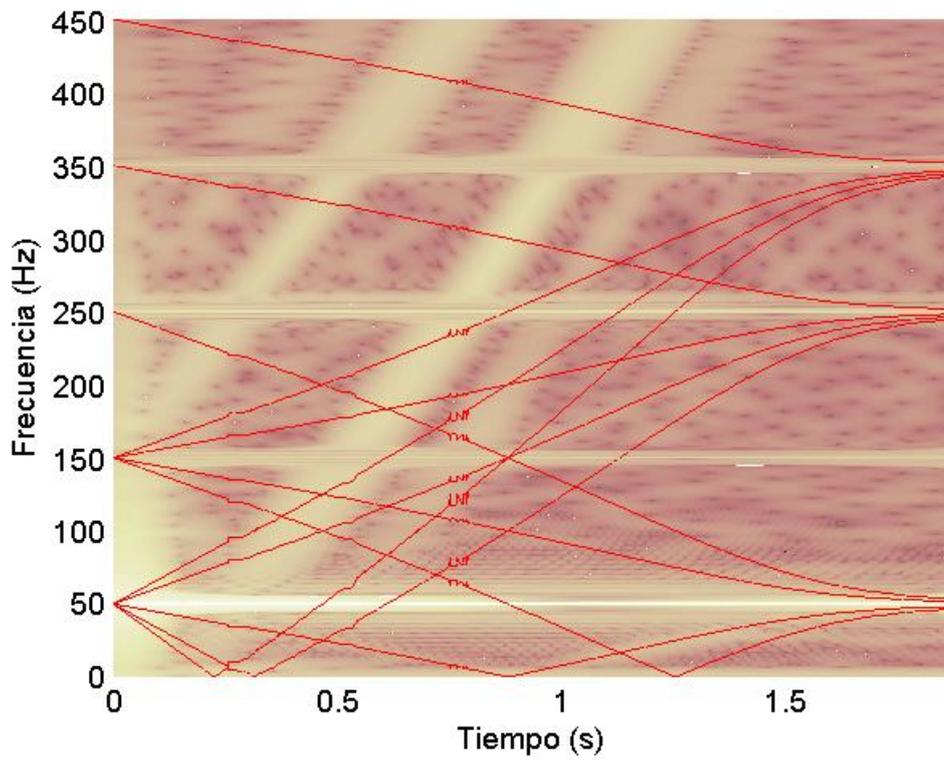


Fig. 7.25 Acople de los resultados de las figuras 7.19 y 7.20: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía.

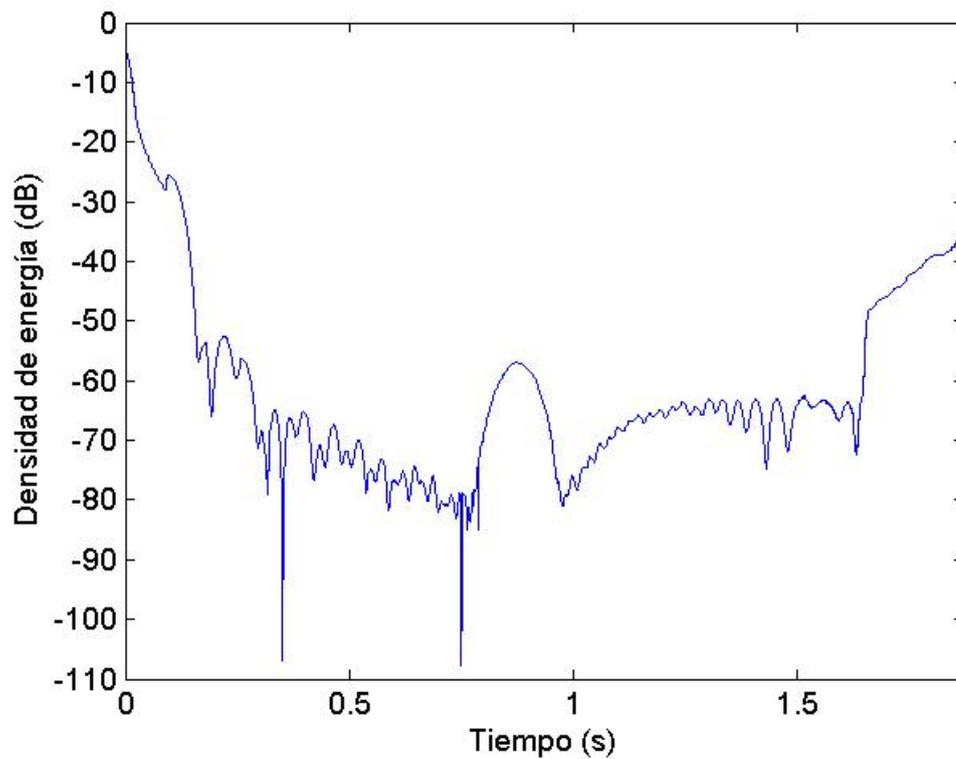


Fig. 7.26 Corriente 3 (motor tipo B sano durante un arranque en vacío): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH, la más importante componente de rotura de barra.

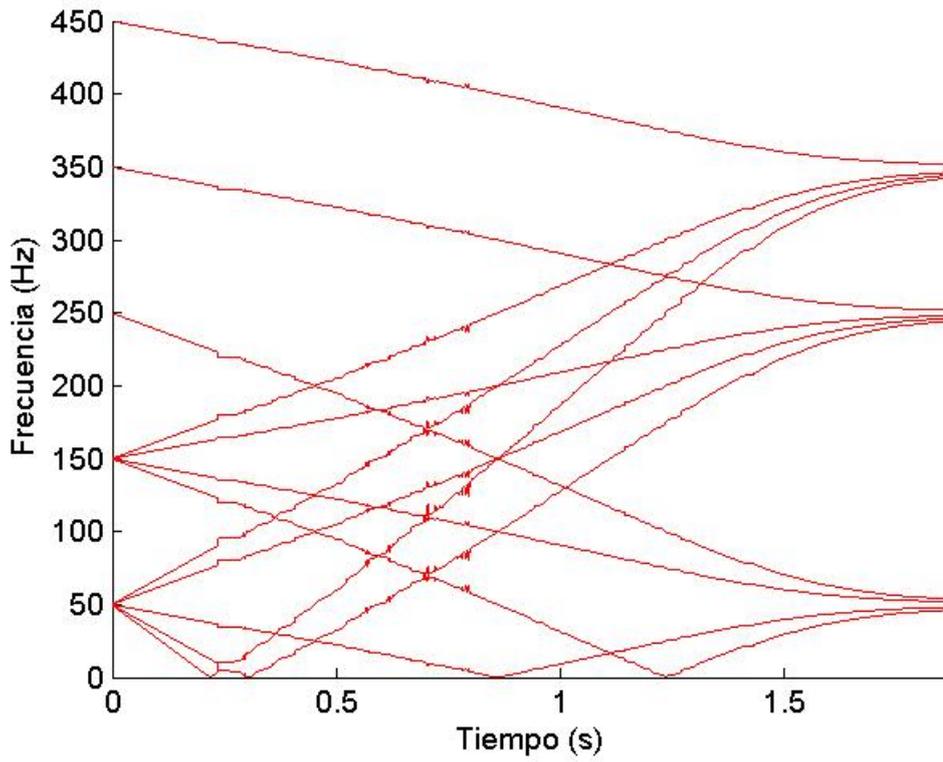


Fig. 7. 27 Corriente 4 (motor tipo B con una barra rota durante un arranque en vacío): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

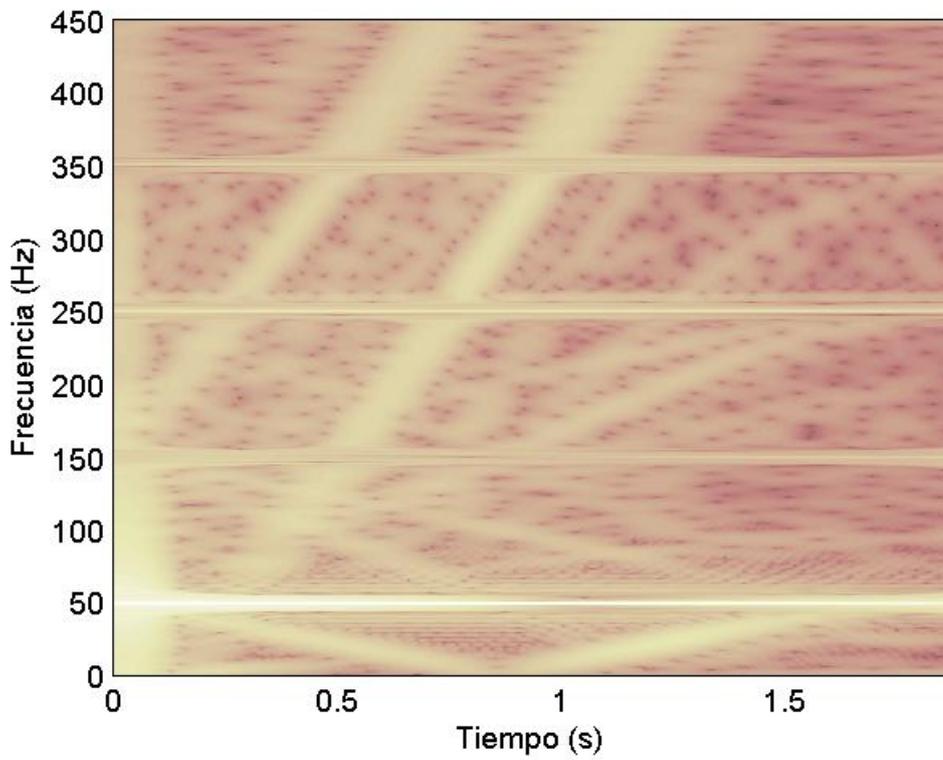


Fig. 7. 28 AST de la corriente 4: motor tipo B con una barra rota durante un arranque en vacío.

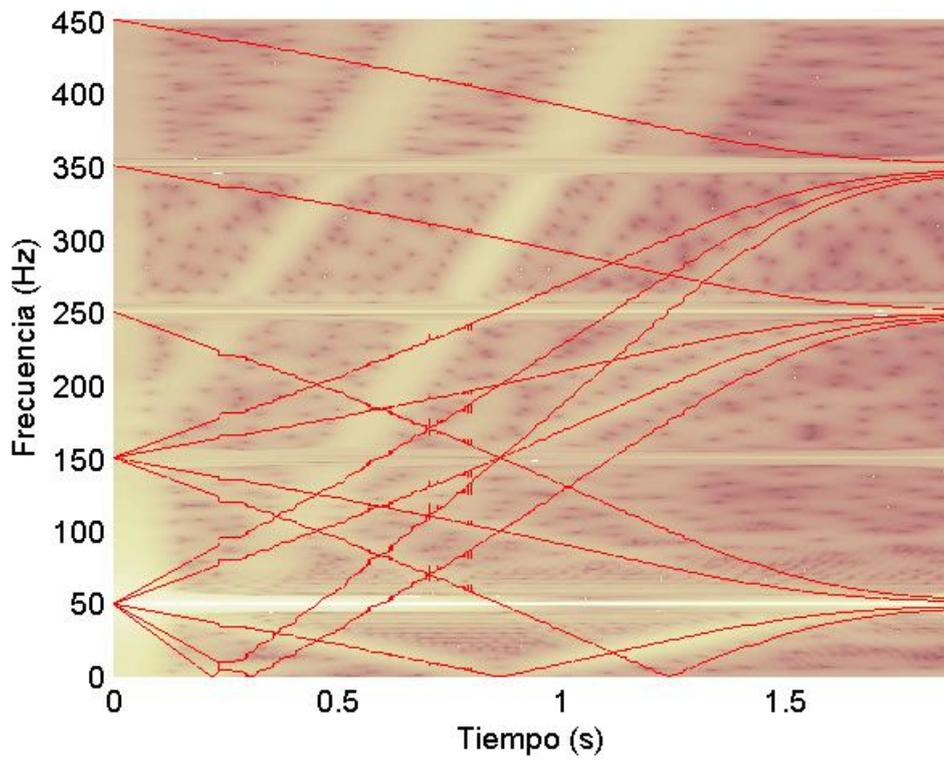


Fig. 7.29 Acople de los resultados de las figuras 7.23 y 7.24: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía.

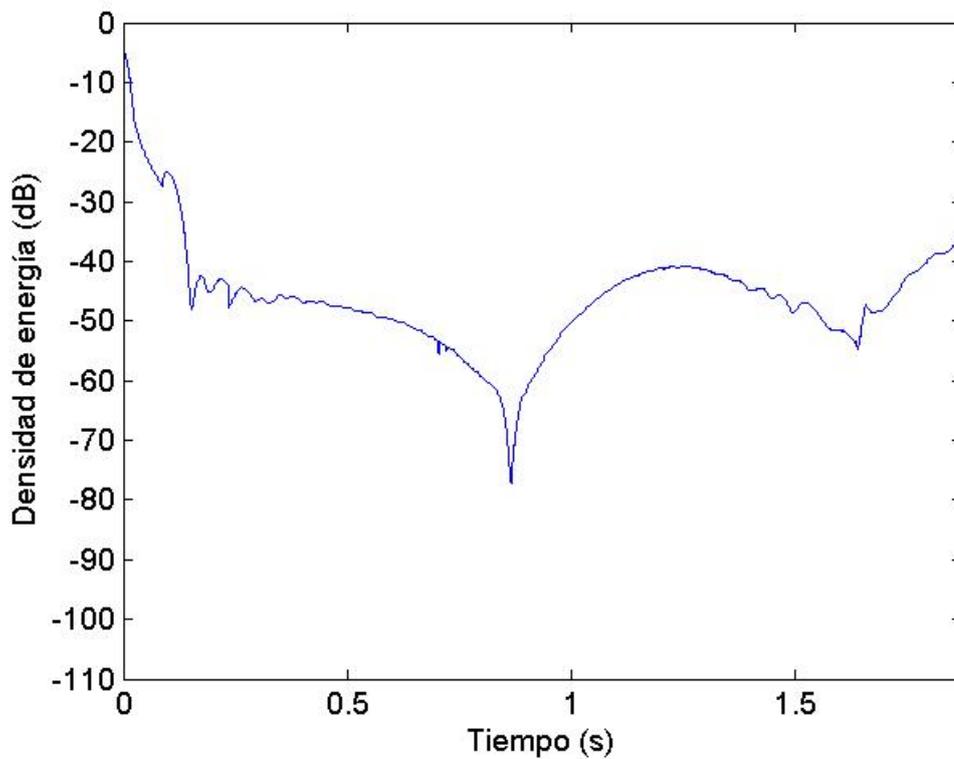


Fig. 7.30 Corriente 4 (motor tipo B con una barra rota durante un arranque en vacío): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH, la más importante componente de rotura de barra.

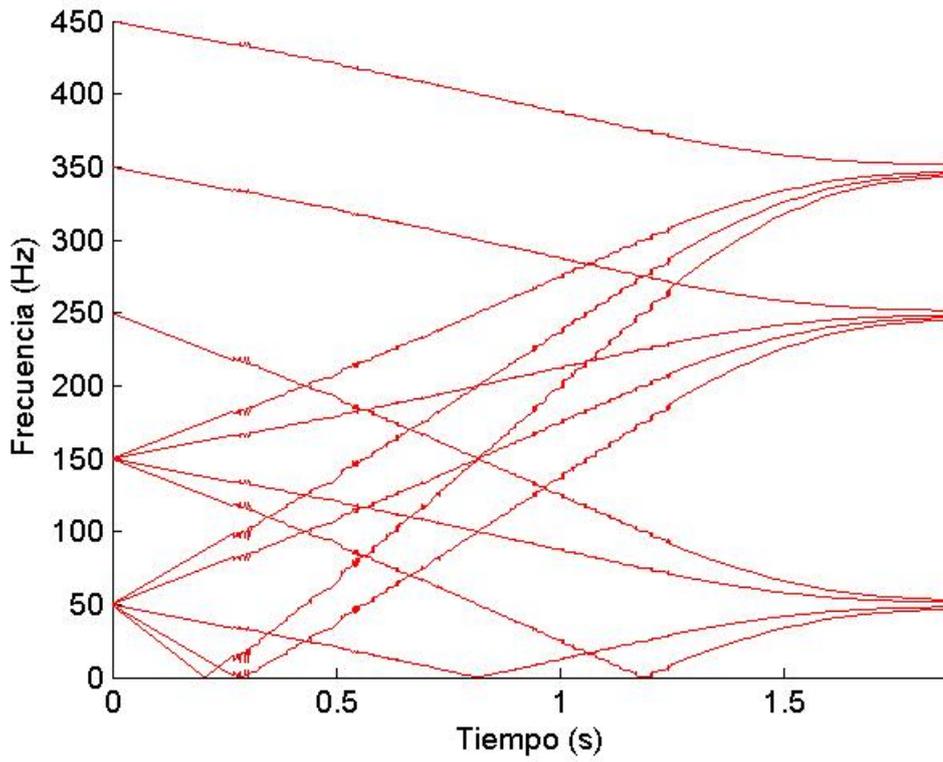


Fig. 7. 31 Corriente 5 (motor tipo B con dos barras rotas durante un arranque en vacío): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

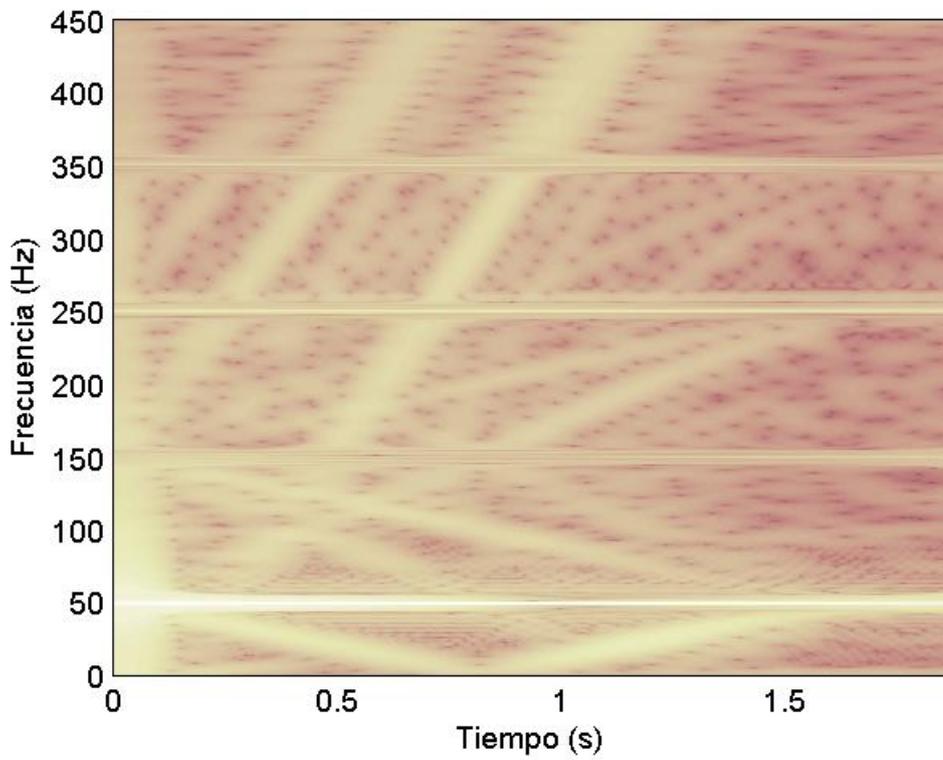


Fig. 7. 32 AST de la corriente 5: motor tipo B con dos barras rotas durante un arranque en vacío.

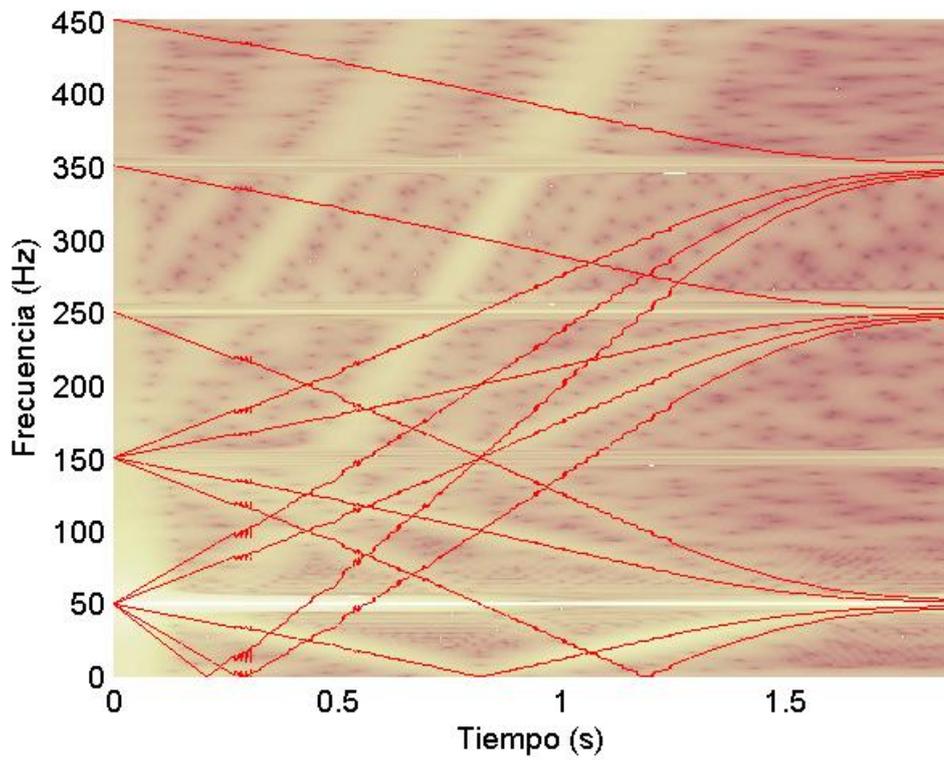


Fig. 7.33 Acople de los resultados de las figuras 7.27 y 7.28: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía.

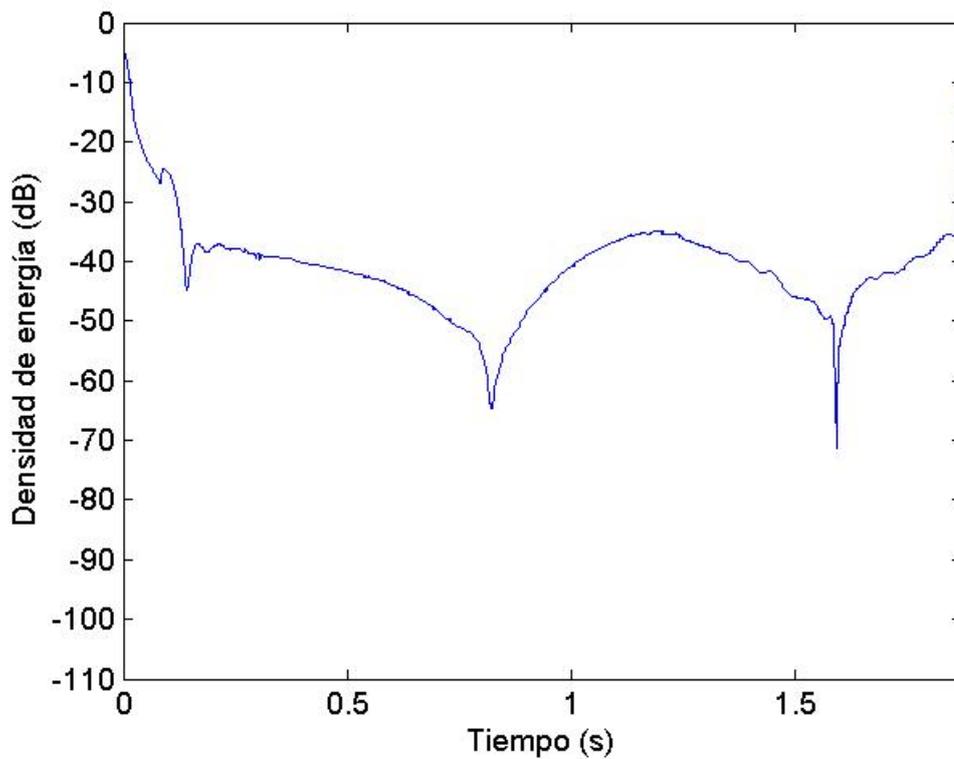


Fig. 7.34 Corriente 5 (motor tipo B con dos barras rotas durante un arranque en vacío): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH, la más importante componente de rotura de barra.

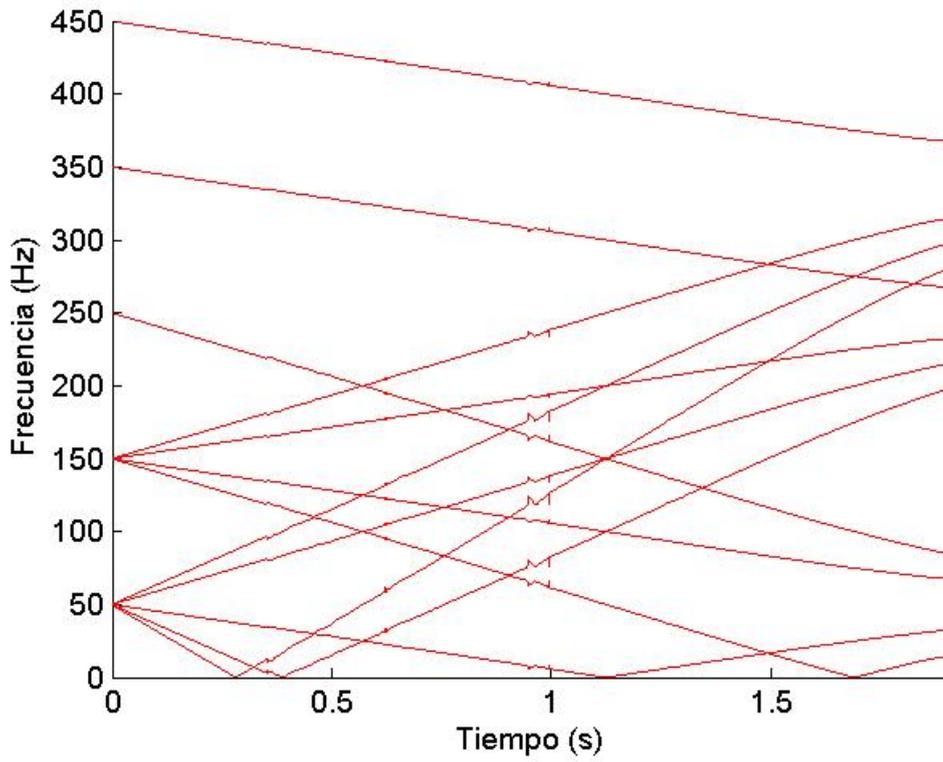


Fig. 7.35 Corriente 6 (motor tipo B sano durante un arranque en carga): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

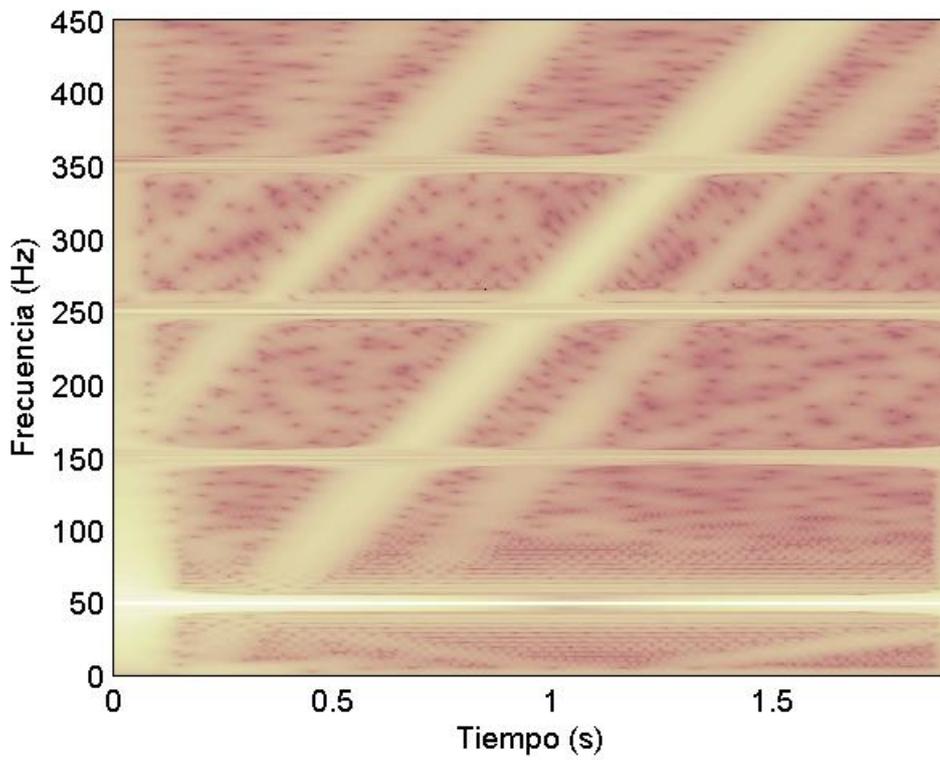


Fig. 7.36 AST de la corriente 6: motor tipo B sano durante un arranque en carga.

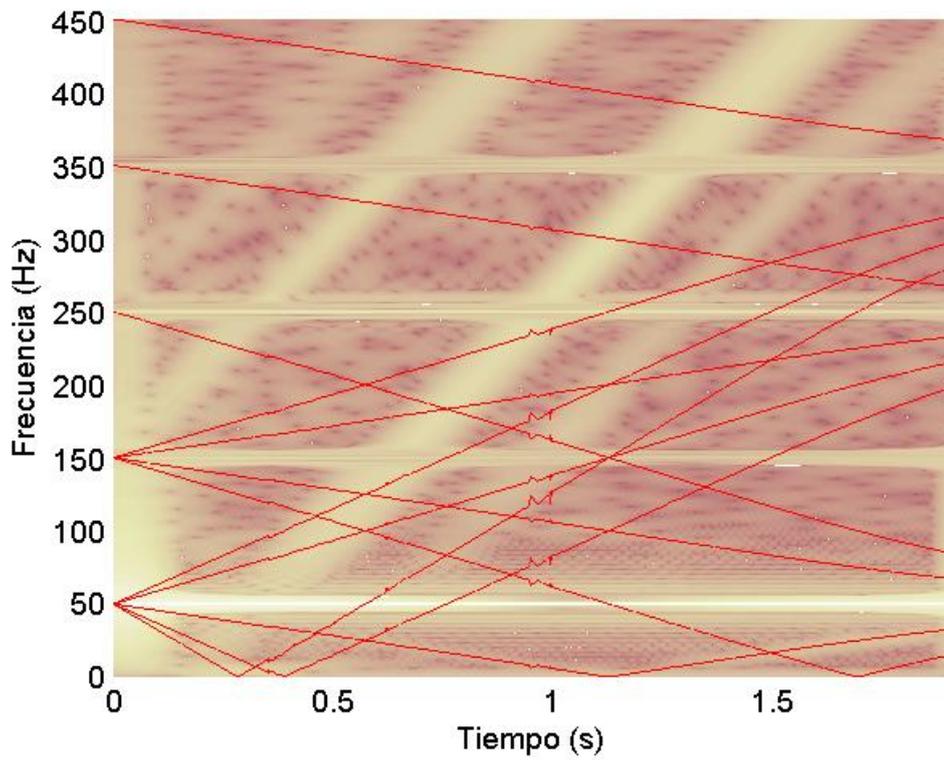


Fig. 7.37 Acople de los resultados de las figuras 7.31 y 7.32: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía.

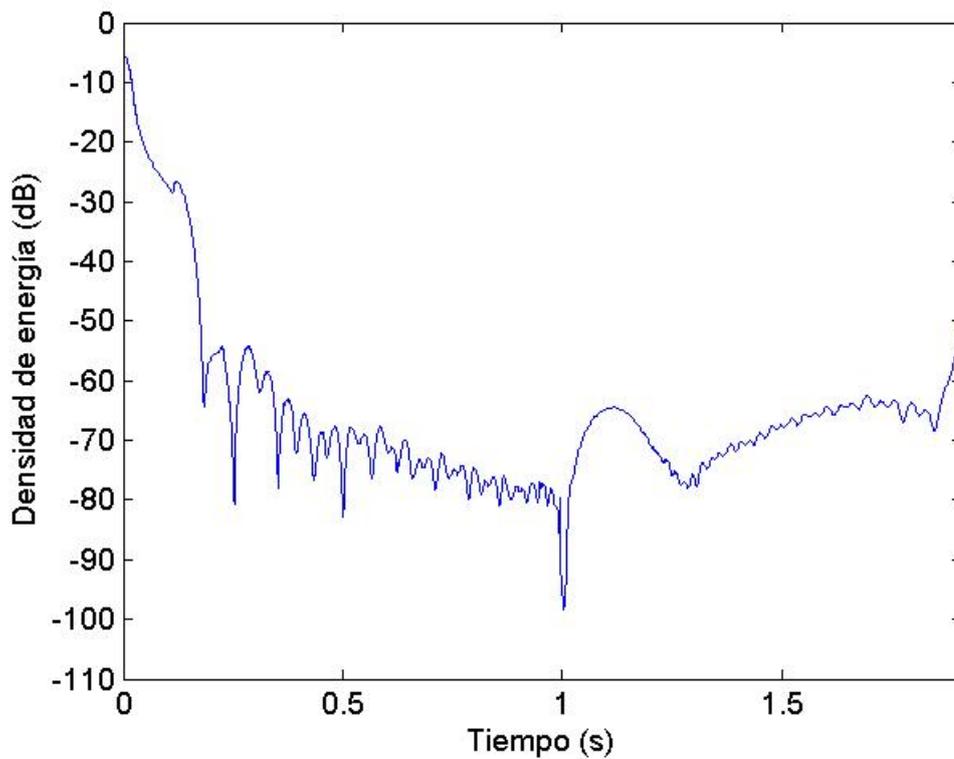


Fig. 7.38 Corriente 6 (motor tipo B sano durante un arranque en carga): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH, la más importante componente de rotura de barra.

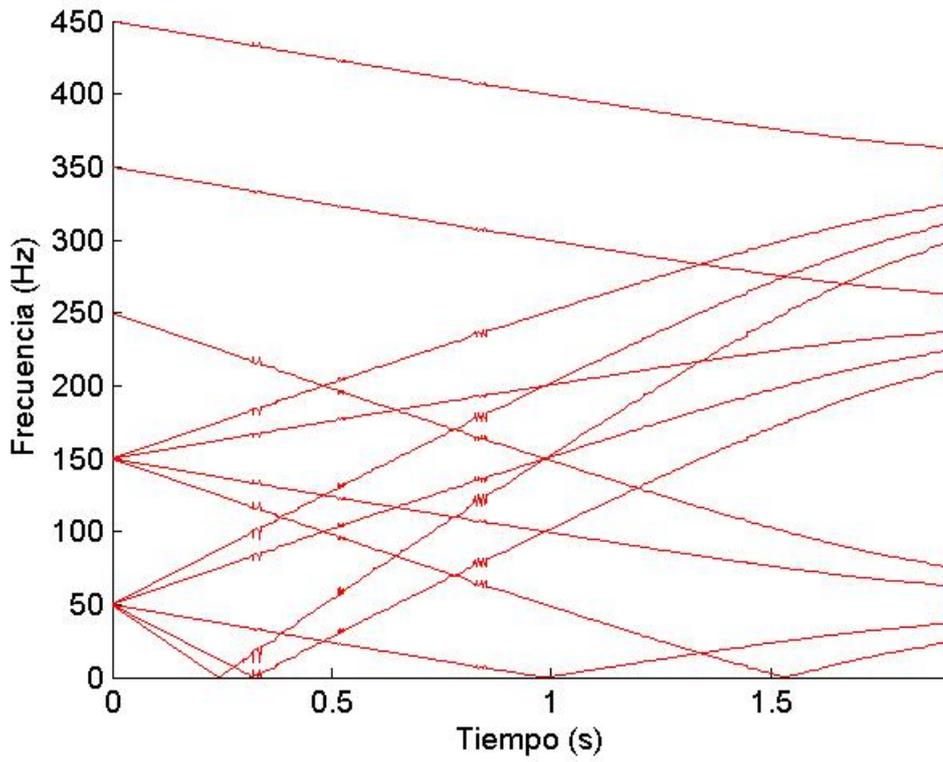


Fig. 7.39 Corriente 7 (motor tipo B con una barra rota durante un arranque en carga): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

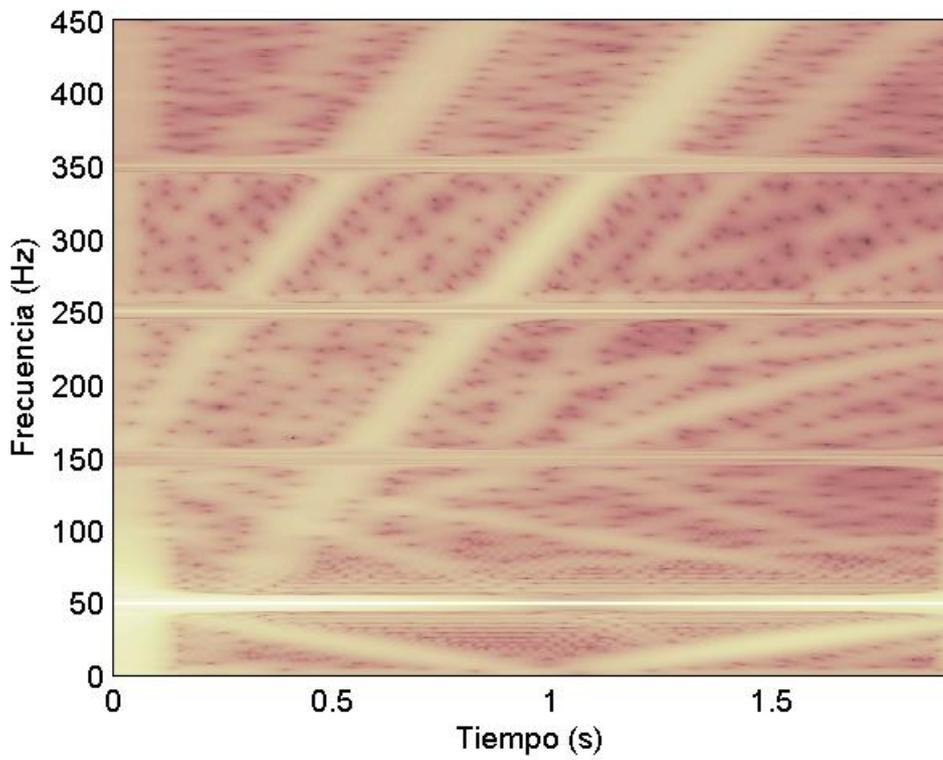


Fig. 7.40 AST de la corriente 7: motor tipo B con una barra rota durante un arranque en carga.

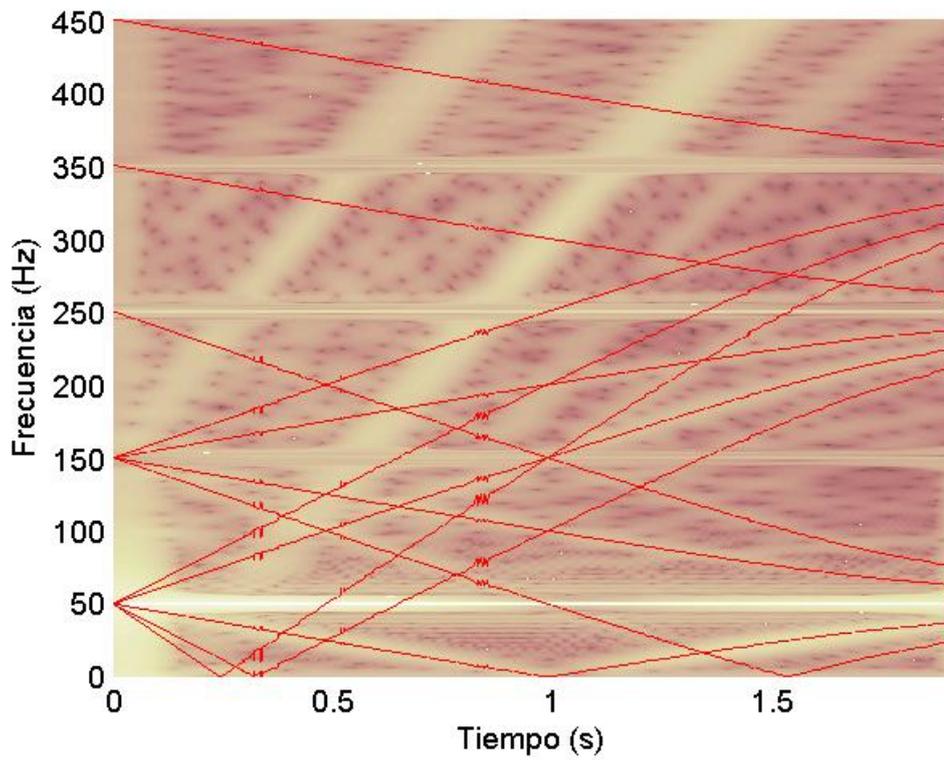


Fig. 7. 41 Acople de los resultados de las figuras 7.35 y 7.36: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía.

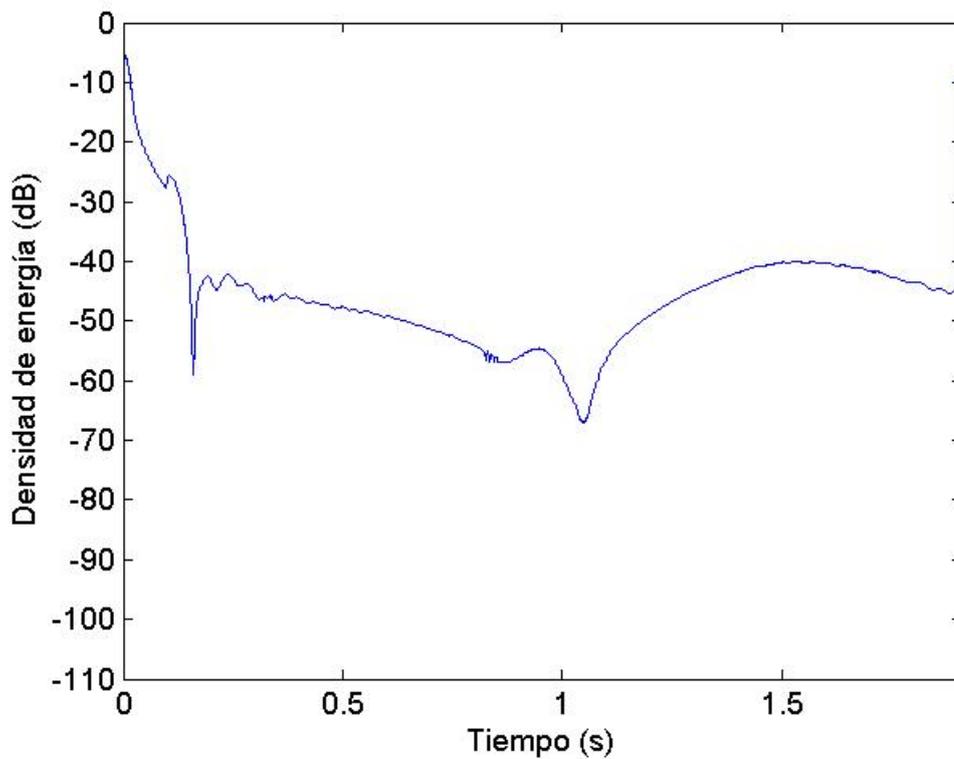


Fig. 7. 42 Corriente 7 (motor tipo B con una barra rota durante un arranque en carga): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH, la más importante componente de rotura de barra.

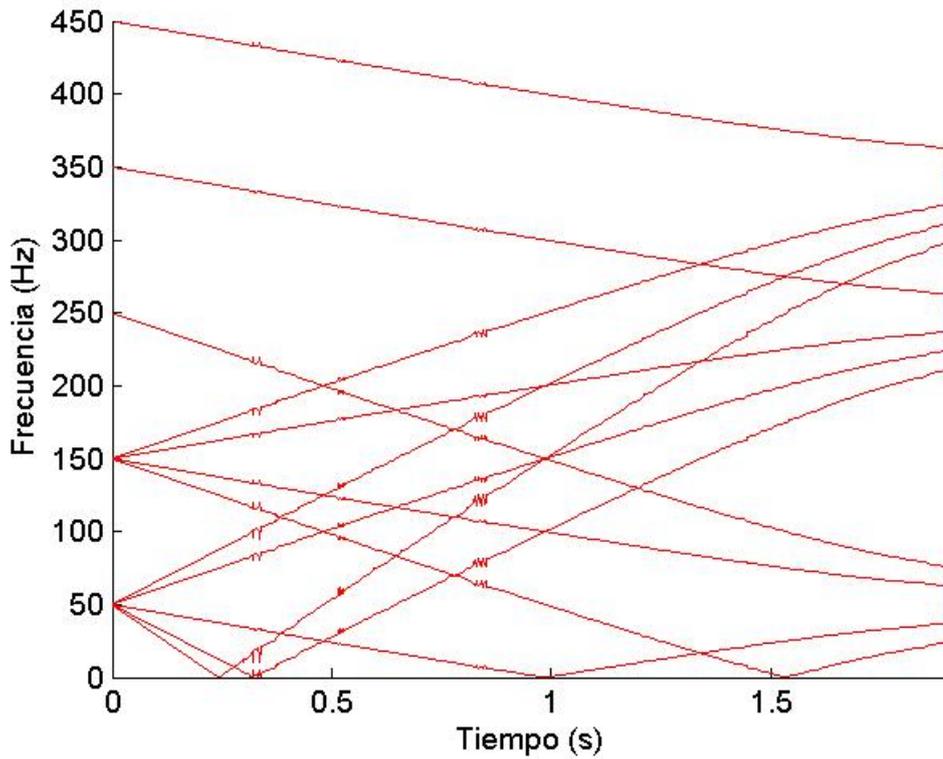


Fig. 7. 43 Corriente 8 (motor tipo B con dos barras rotas durante un arranque en carga): estimación de las evoluciones de las frecuencias de las componentes de rotura de barra.

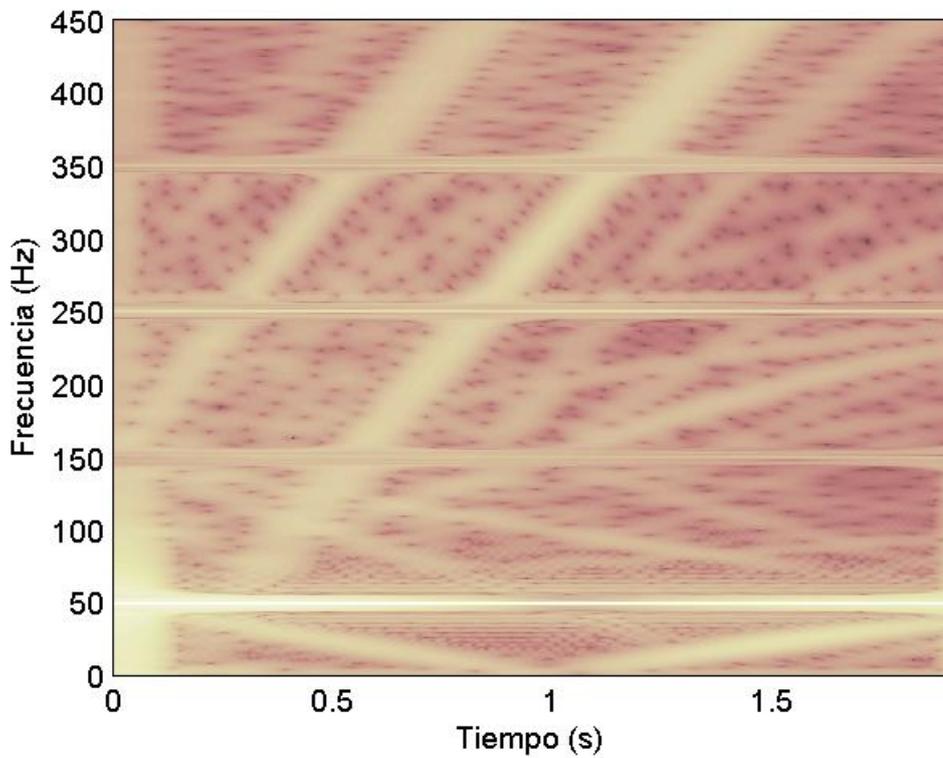


Fig. 7. 44 AST de la corriente 8: motor tipo B con dos barras rotas durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga.

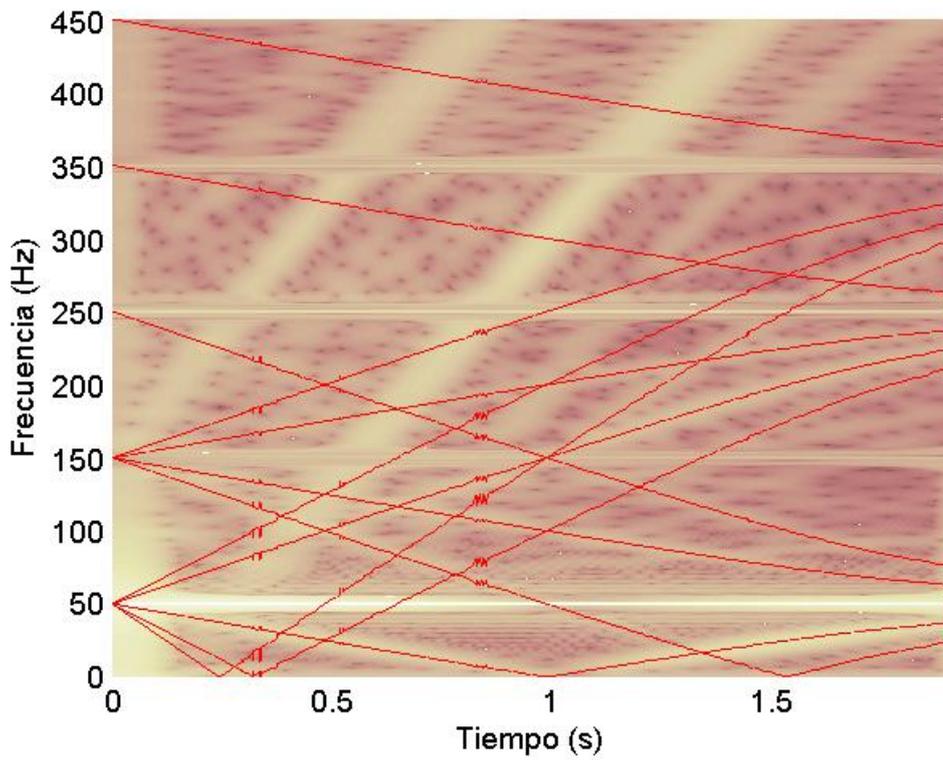


Fig. 7. 45 Acople de los resultados de las figuras 7.27 y 7.28: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes de rotura de barra en la matriz que describe la densidad de energía.

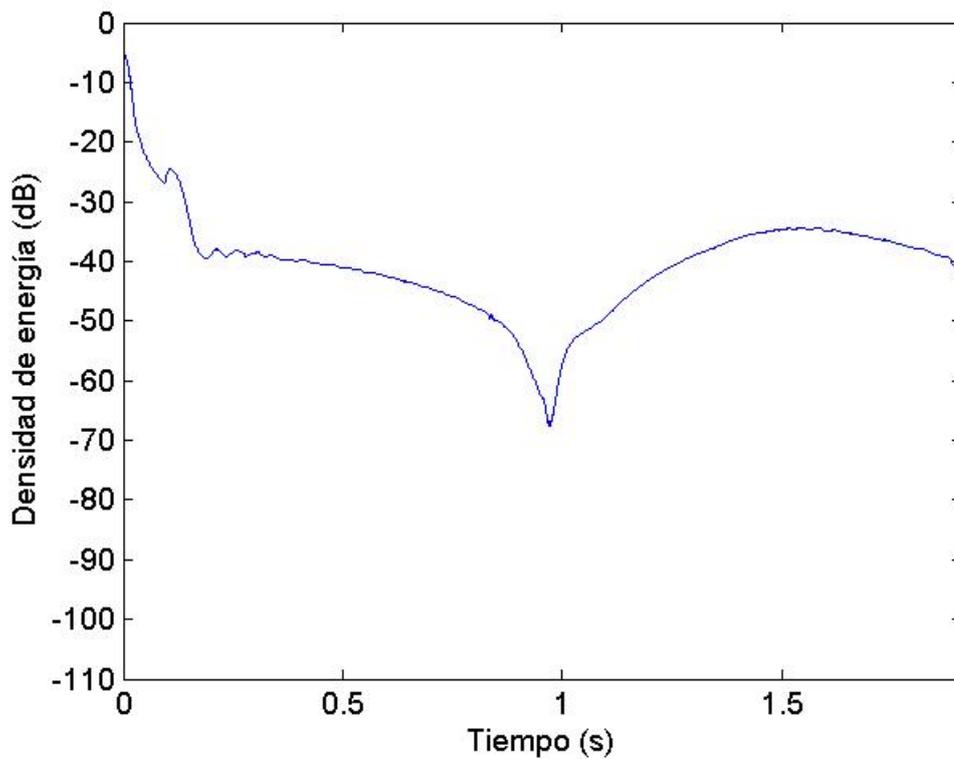


Fig. 7. 46 Corriente 8 (motor tipo B con dos barras rotas durante un arranque en carga): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al LSH, la más importante componente de rotura de barra.

## **7.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.**

A continuación se analizan los resultados obtenidos en el apartado anterior al aplicar la metodología siguiendo la guía expuesta en 4.7. Para evitar dilatar excesivamente el capítulo, se analizan en profundidad comparándolos, los resultados de analizar las corrientes 1 y 2, pertenecientes a motores de tipo A en estado sano y con una barra rota respectivamente, capturadas durante un arranque en carga seguido de sucesivas variaciones de carga. El diagnóstico de los motores restantes (corrientes 3 a 8), todos del tipo B, se comenta al final de forma más breve.

En primer lugar (7.3.1) se realiza un diagnóstico visual examinando los gráficos de las densidades de energía. Aquí se incluye para estas dos corrientes un paso optativo de la metodología que en los dos apartados anteriores se omitió: aplicar técnicas de mejora de la visualización. Concretamente se utiliza una referencia distinta a cada frecuencia analizada. Una vez realizado el diagnóstico a partir de una inspección visual examinando las evoluciones de las componentes presentes en la corriente, se procede a diagnosticar definitivamente analizando los resultados de la cuantificación de la presencia de las componentes de avería (7.3.2). Finalmente se comentan los resultados acerca del diagnóstico del resto de motores (7.3.3) y las conclusiones finales (7.3.4).

### **7.3.1.- Diagnóstico visual (cualitativo).**

El primer paso al realizar el diagnóstico es determinar las componentes cuyas evoluciones se observan al representar la densidad de energía calculada, con el objetivo principal de detectar patrones vinculados a componentes de fallo, pero también para revelar la presencia de componentes inesperadas que pueden variar el análisis realizado. Las densidades de energía obtenidas al aplicar la metodología a las corrientes 1 y 2 se muestran en las figuras 7.16 y 7.20 respectivamente. Como la zona del plano tiempo-frecuencia analizada es demasiado amplia, las evoluciones se observan demasiado pequeñas. Es por ello que a continuación se muestran detalles del análisis realizado.

En primer lugar, analizamos las evoluciones de las componentes durante el arranque. Así pues, las figuras 7.48 y 7.50 muestran la misma banda de frecuencia que las dos figuras anteriores (7.16 y 7.20) pero restringiéndose a los 8 primeros segundos del transitorio. Por otra parte, las figuras 7.47 y 7.49 muestran las estimaciones de las evoluciones de las principales componentes de cada corriente también durante el arranque. Así pues, en la Fig. 7.47 se han trazado de color azul las evoluciones de cuatro WH y dos PSH. Como sabemos que el motor está en estado sano, tan solo se ha trazado de color rojo la evolución del LSH, el cual puede aparecer debido a una cierta asimetría inherente en el motor. Efectivamente, estas son las componentes cuyas evoluciones se observan en la Fig. 7.48, resultado de analizar la corriente 1 perteneciente al motor sano tipo A. Aparte del LSH observamos ligeramente al USH descendiendo de 150 hasta 50 Hz, además de otro componente de rotura de barra que evoluciona de 150 a 250 Hz. De este primer examen visual podemos concluir que el motor se encuentra en estado sano. Hay algunas otras componentes aparte de las comentadas, como dos componentes evolucionando desde 50 hasta 75 y 25 Hz, propias de una cierta excentricidad.

Con lo que respecta a la corriente 2, perteneciente también a un motor de tipo A pero esta vez con una barra rota en vez de sano, en la Fig. 7.49 se han trazado las

mismas evoluciones que en la Fig. 7.47 añadiendo 11 nuevas evoluciones propias de componentes vinculadas a una rotura de barra. Al observar la Fig. 7.50, resultado de analizar la corriente 2, podemos observar las evoluciones de todas estas componentes que no estaban presentes en el análisis de la corriente 1 y que indican la presencia de la avería. Comparando las figuras 7.49 y 7.50 podemos evaluar la precisión de los resultados obtenidos utilizando la transformada y además buscar cómodamente los patrones vinculados a fallos. El análisis se podría haber extendido hacia frecuencias más elevadas para captar las evoluciones completas de los PSH, pero este no es el objetivo del diagnóstico.

La detección de las evoluciones de las componentes se puede facilitar aplicando técnicas de mejora de la visualización. Hasta el momento se ha aplicado escala logarítmica. En motores alimentados directamente desde la red resulta adecuado utilizar distintas referencias para cada frecuencia analizada, tal y como se explica en 4.5. Para generar las figuras 7.52 y 7.54 se debe realizar un análisis idéntico al realizado para obtener las figuras 7.48 y 7.50, cambiando solamente el uso de la escala logarítmica por las distintas referencias a cada frecuencia. A su vez, las figuras 7.51 y 7.53 son repeticiones de las figuras 7.47 y 7.49 para facilitar la localización de las componentes en los dos resultados obtenidos. Vemos como esta técnica mejora considerablemente la calidad del gráfico obtenido facilitando la localización de componentes en la corriente.

Tras analizar las evoluciones durante el arranque, nos centramos en analizar las evoluciones durante las oscilaciones de carga, las cuales en el caso de las componentes de barra rota se encuentran alrededor de la componente fundamental y de los armónicos de devanado de quinto y séptimo orden. Como durante el arranque ya hemos verificado que las componentes de avería se observan fundamentalmente en los análisis de la corriente 2, perteneciente a un motor con una barra rota, la inspección de las oscilaciones de carga la limitamos a esta corriente para no dilatar excesivamente el capítulo. En definitiva, del resultado original presentado en la Fig. 7.20, mostramos el transitorio completo pero restringimos las bandas de frecuencia a las comprendidas entre 35-65, 210-270 y 310-370 Hz generando las figuras 7.56, 7.58 y 7.60 respectivamente. Al igual que la Fig. 7.49 muestra las estimaciones de las evoluciones de las principales componentes de la corriente abarcando la banda 0-450 Hz completa pero limitándose al arranque, las figuras 7.55, 7.57 y 7.59 abarcan el transitorio completo pero se limitan a las bandas de frecuencia 35-65, 210-270 y 310-370 Hz.

Así pues, en la Fig. 7.55 observamos la FC (azul) así como las evoluciones de cuatro componentes de avería (rojo), dos por encima y dos por debajo de la FC, las cuales se acercan a los 50 Hz tras el arranque. En la Fig. 7.56 podemos observar también la FC y los SH provocados por la barra rota justo por encima y por debajo. Vemos cómo inmediatamente después del arranque se encuentran más alejados de la FC pues el motor se encuentra cargado, acercándose al descargar. La transformada permite pues captar su evolución completa durante el transitorio de arranque y además durante las oscilaciones de carga. Con respecto a los otros dos armónicos más alejados de la FC, los observamos mejor durante las transiciones de carga y cuando el motor está descargado, pero con peor calidad cuando está cargado. Esto es debido a que, al cargar las componentes salen de la banda 45-55 Hz donde las pendientes ya no son adecuadas para captar su evolución pasando de 0.25 Hz/s a 16.7 Hz/s (Fig. 7.12). En definitiva, los tramos fuera de 45-55 Hz se visualizan un tanto distorsionados. Esto se solucionaría considerando una variación total de las pendientes y no solo con la frecuencia.

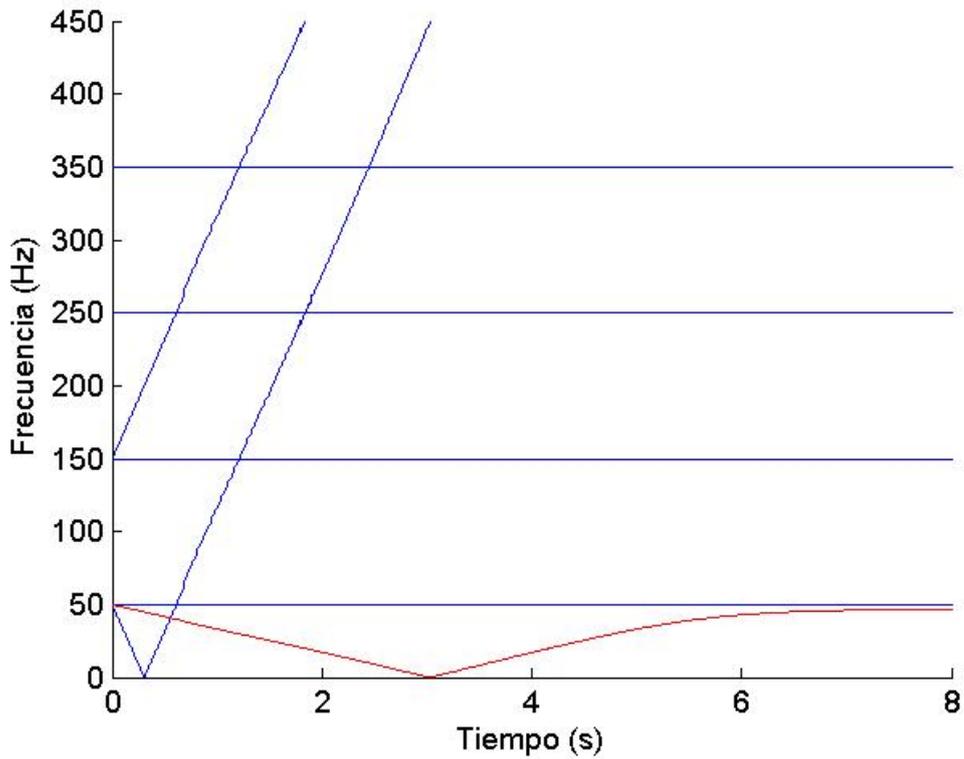


Fig. 7. 47 Estimación de las evoluciones de las frecuencias de las principales componentes de la corriente 1 (motor tipo A sano) durante los primeros 8 s del transitorio capturado (arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

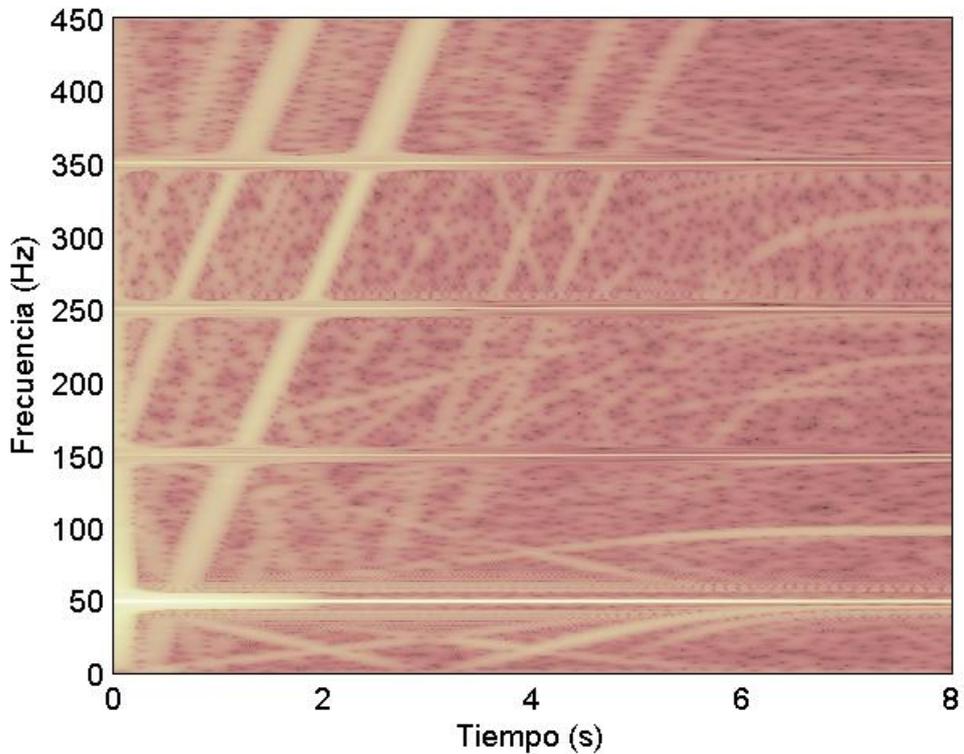


Fig. 7. 48 AST (en escala logarítmica) de los primeros 8 s de la corriente 1: motor tipo A sano durante un arranque en carga.

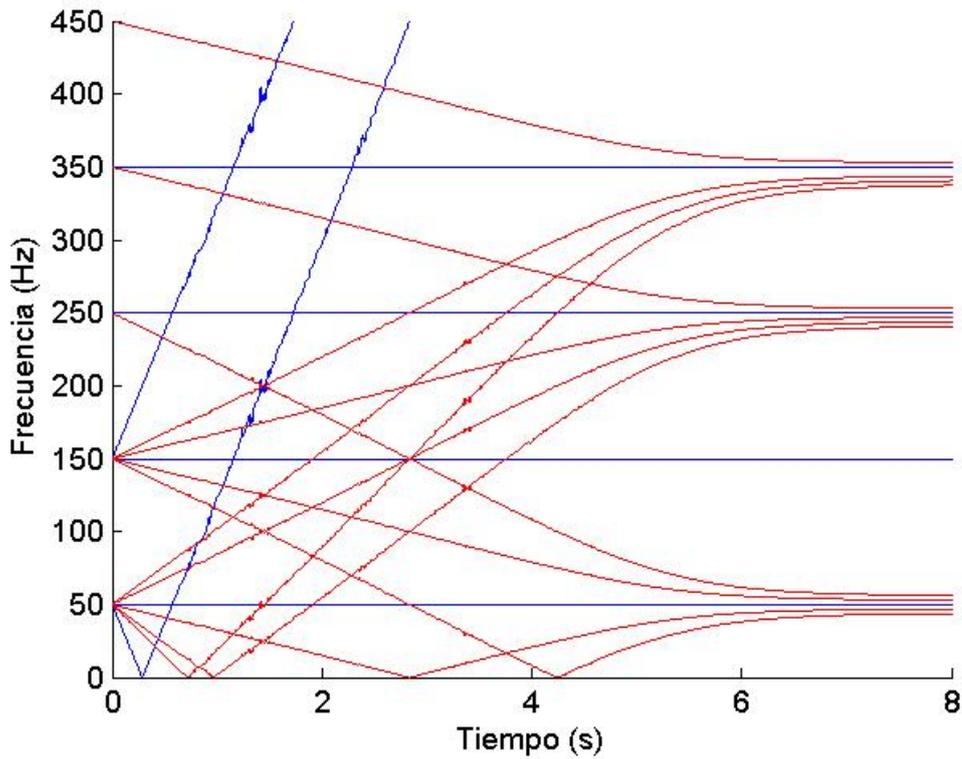


Fig. 7. 49 Estimación de las evoluciones de las frecuencias de las principales componentes de la corriente 2 (motor tipo A con una barra rota) durante los primeros 8 s del transitorio capturado (arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

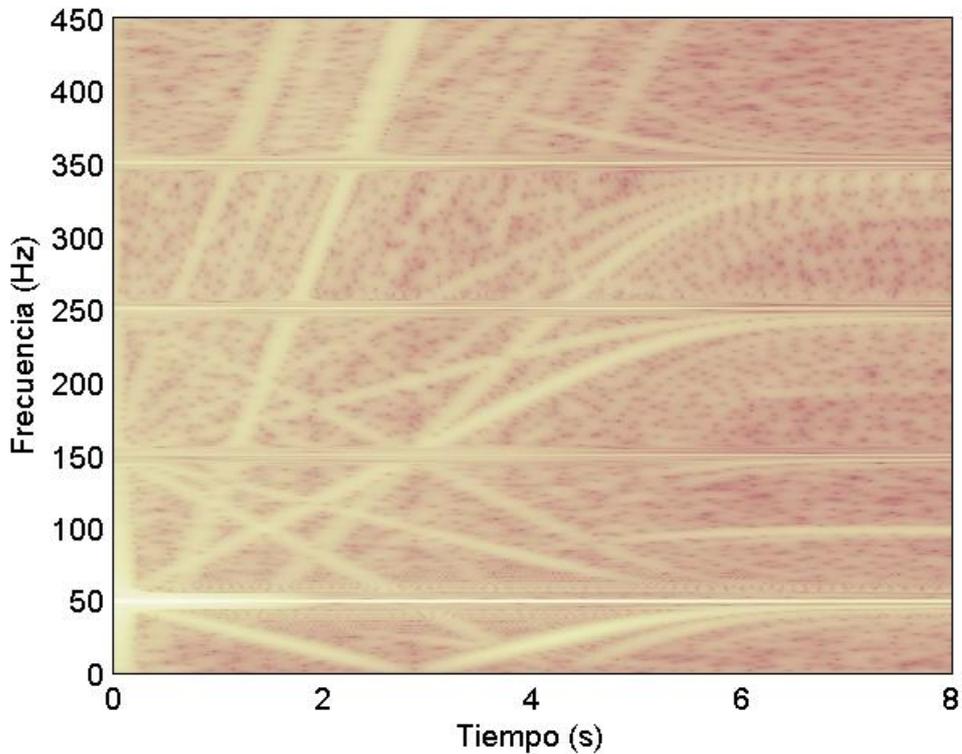


Fig. 7. 50 AST (en escala logarítmica) de los primeros 8 s de la corriente 2: motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga.

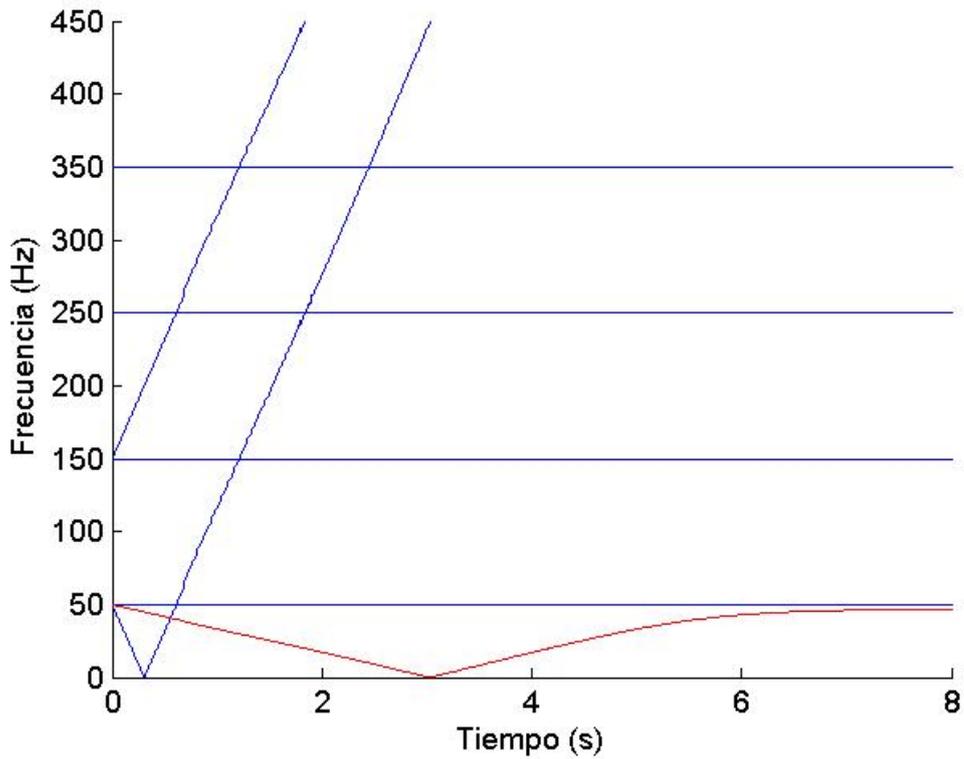


Fig. 7. 51 Estimación de las evoluciones de las frecuencias de las principales componentes de la corriente 1 (motor tipo A sano) durante los primeros 8 s del transitorio capturado (arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

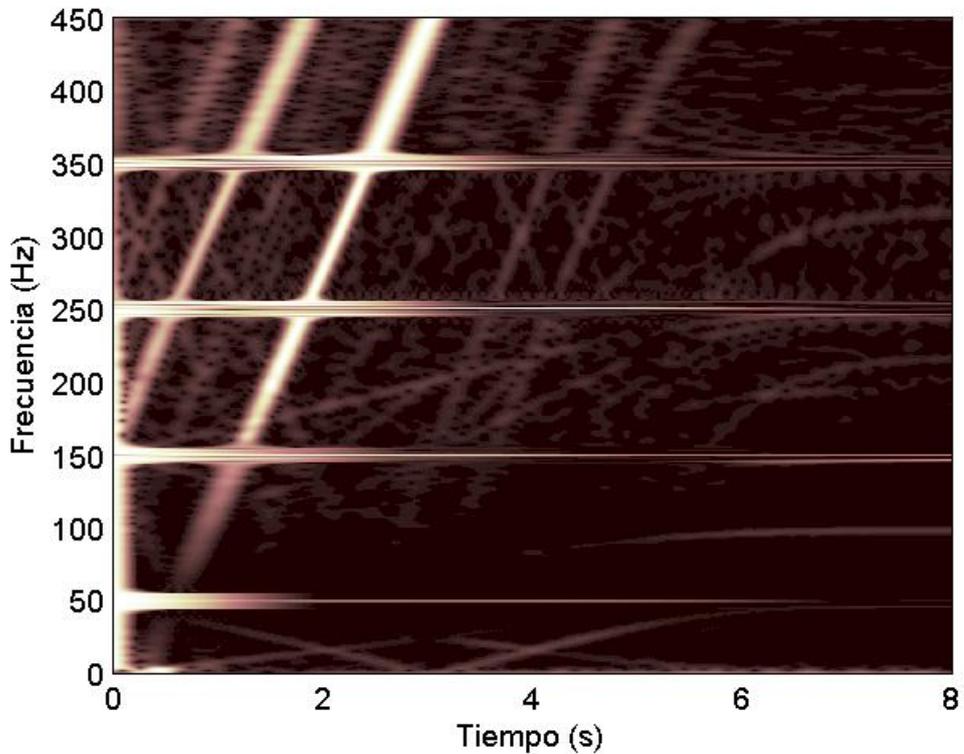


Fig. 7. 52 AST (con referencias distintas a cada frecuencia) de los primeros 8 s de la corriente 1: motor tipo A sano durante un arranque en carga.

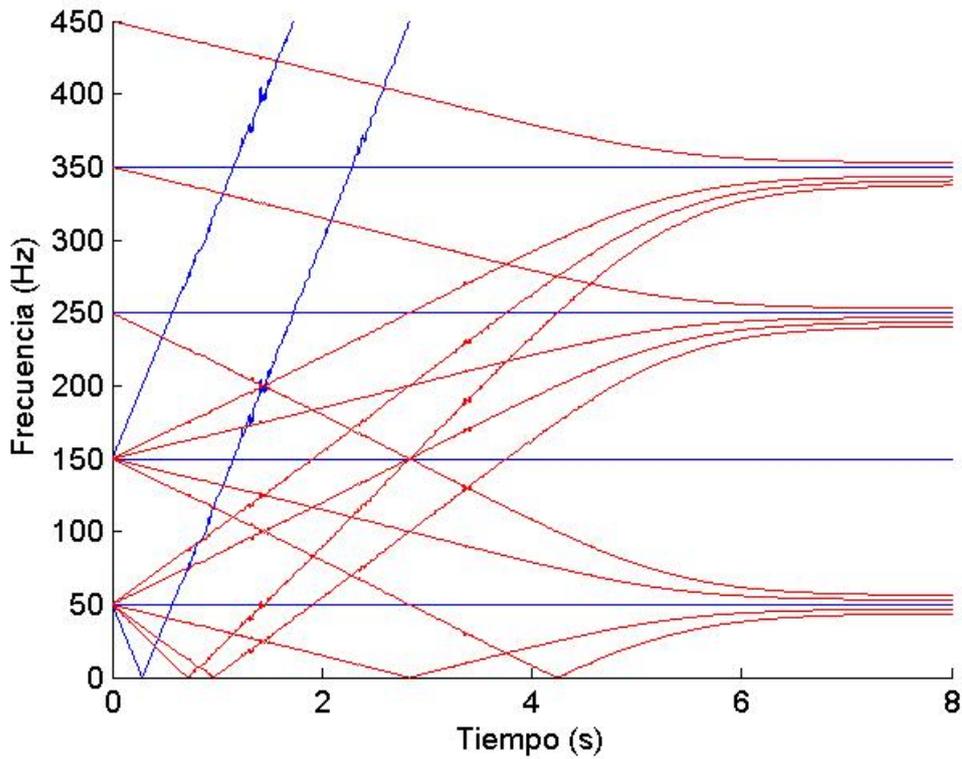


Fig. 7. 53 Estimación de las evoluciones de las frecuencias de las principales componentes de la corriente 2 (motor tipo A con una barra rota) durante los primeros 8 s del transitorio capturado (arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

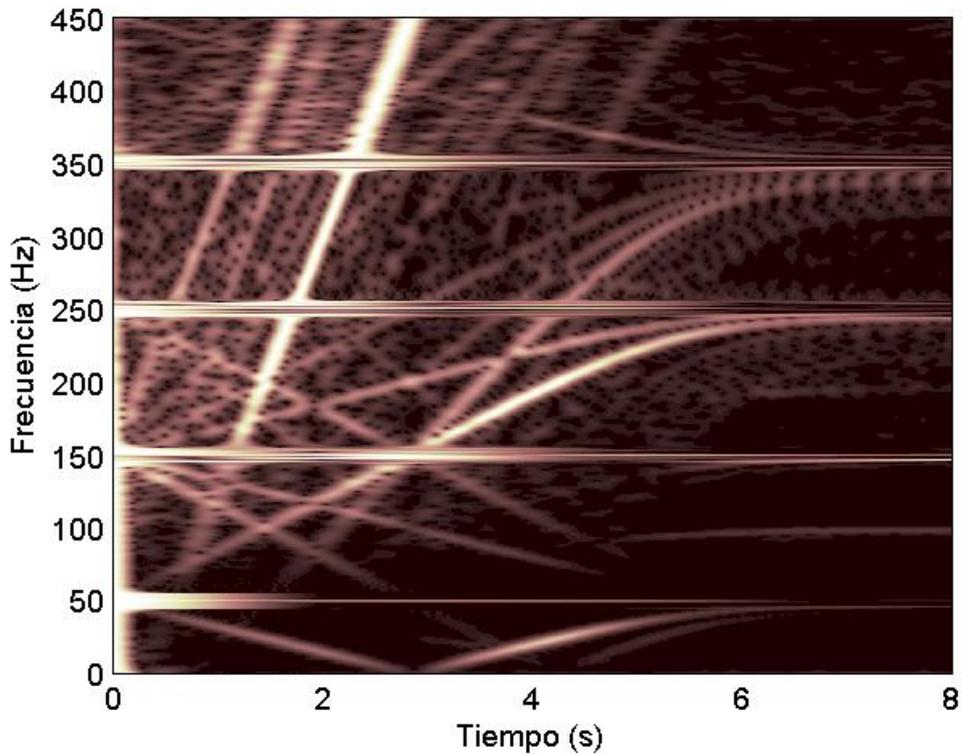


Fig. 7. 54 AST (con referencias distintas a cada frecuencia) de los primeros 8 s de la corriente 2: motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga.

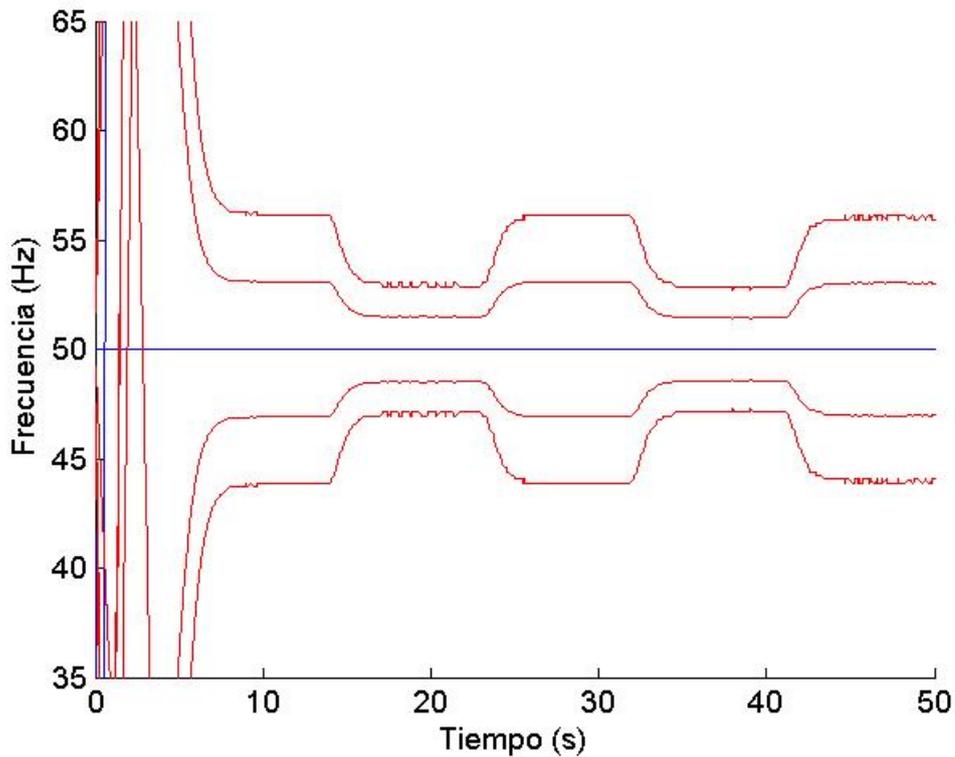


Fig. 7. 55 Estimación de las evoluciones de las frecuencias de las principales componentes de la corriente 2 (motor tipo A con una barra rota), restringidas a la banda de frecuencia 35-65 Hz, durante el transitorio capturado completo (arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

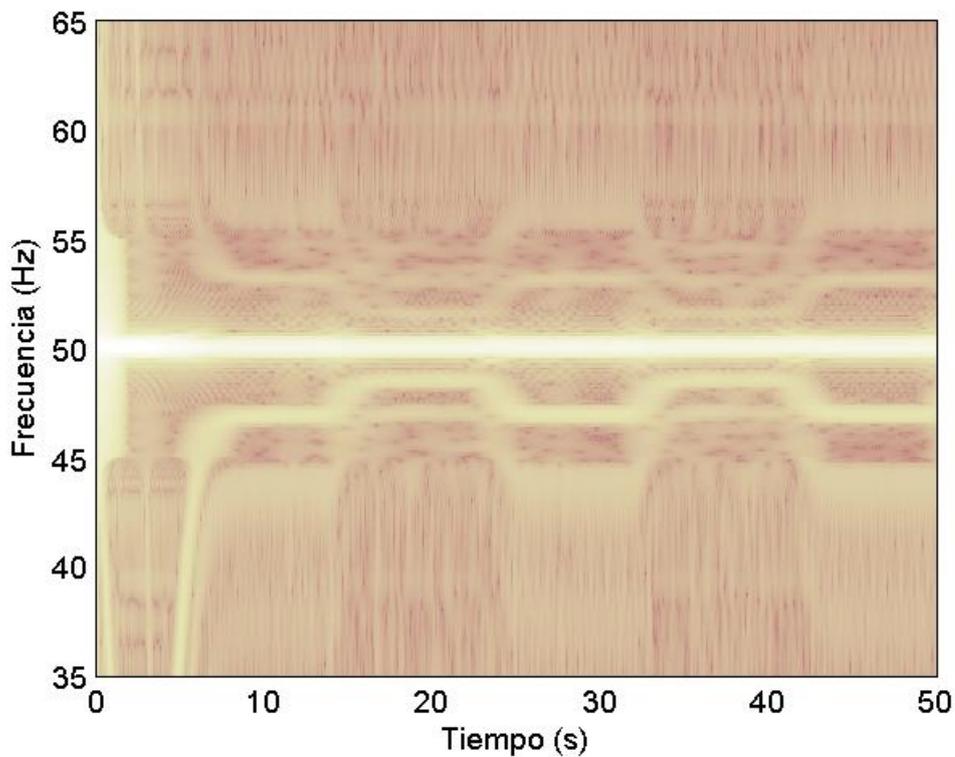


Fig. 7. 56 AST (en escala logarítmica) analizando la banda de frecuencia 35-65 Hz de la corriente 2: motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga.

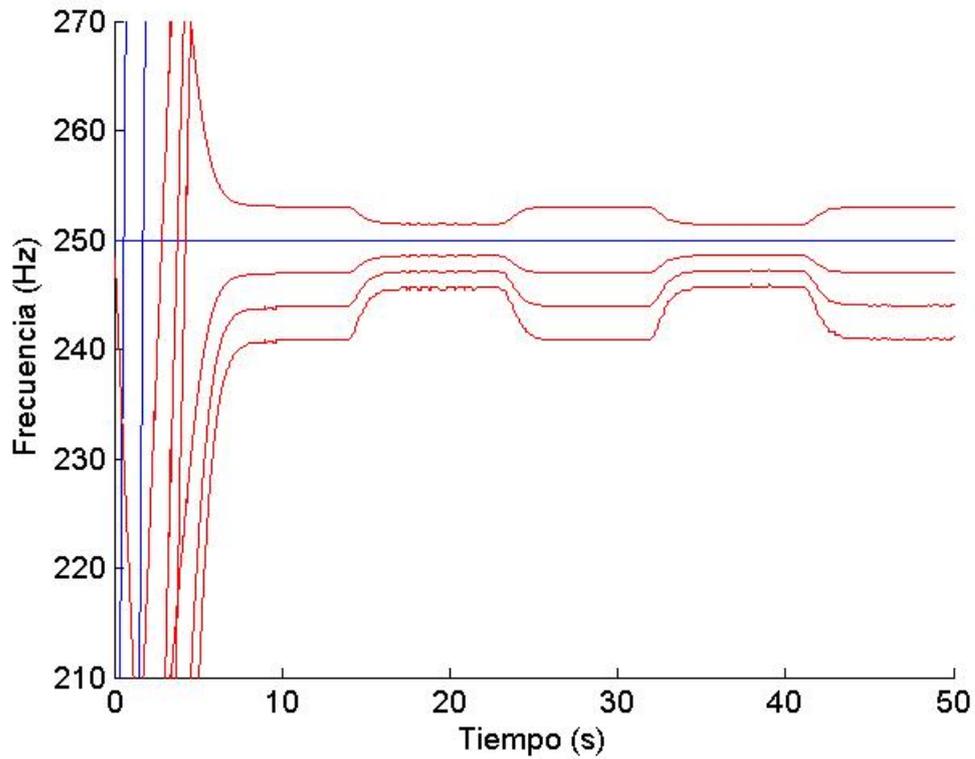


Fig. 7. 57 Estimación de las evoluciones de las frecuencias de las principales componentes de la corriente 2 (motor tipo A con una barra rota), restringidas a la banda de frecuencia 210-270 Hz, durante el transitorio capturado completo (arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

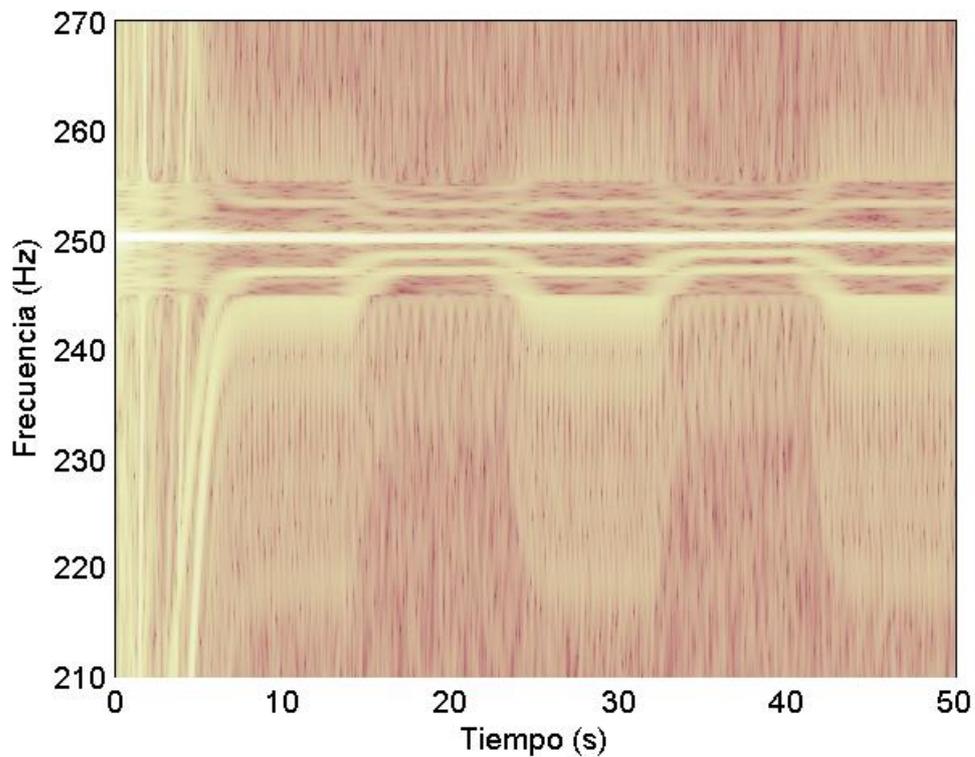


Fig. 7. 58 AST (en escala logarítmica) analizando la banda de frecuencia 210-270 Hz de la corriente 2: motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga.

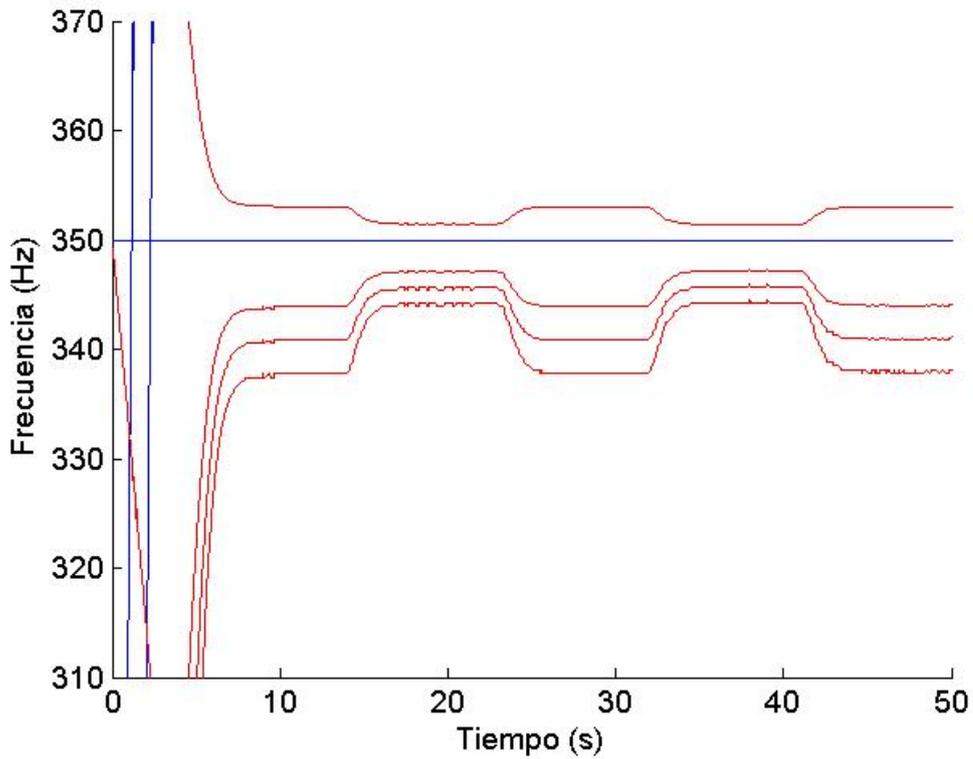


Fig. 7. 59 Estimación de las evoluciones de las frecuencias de las principales componentes de la corriente 2 (motor tipo A con una barra rota), restringidas a la banda de frecuencia 310-370 Hz, durante el transitorio capturado completo (arranque en carga seguido de oscilaciones de carga).

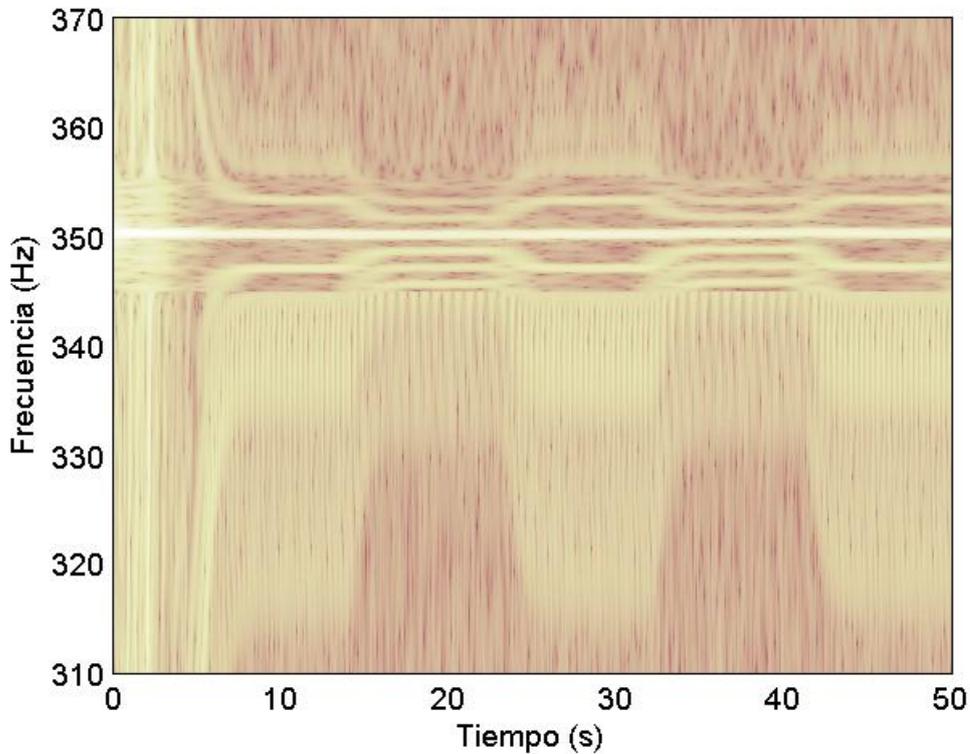


Fig. 7. 60 AST (en escala logarítmica) analizando la banda de frecuencia 310-370 Hz de la corriente 2: motor tipo A con una barra rota durante un arranque en carga seguido de oscilaciones de carga.

Algo parecido ocurre al inspeccionar los resultados mostrados en la Fig. 7.58. Con respecto a las evoluciones estimadas en la Fig. 7.57 podemos ver el WH de orden 5 (azul) así como las evoluciones de cuatro componentes de avería (rojo): dos por encima y dos por debajo del WH. Sin embargo, mientras las evoluciones de las dos componentes más cercanas a 250 Hz son captadas adecuadamente, las evoluciones de las otras dos no se captan tan bien cuando el motor se carga pues salen de la banda de frecuencia 245-255 Hz donde la pendiente es la adecuada  $P_{OC} = 0.25$  Hz/s, pasando a ser analizadas utilizando pendientes propias del arranque:  $2P_{LSH} = 33.3$  Hz/s por debajo de 245 Hz y  $3P_{LSH} = 66.7$  Hz/s por encima de 255 Hz.

Finalmente, en la Fig. 7.60 observamos el WH de orden 7 y 5 componentes de rotura de barra, 3 por debajo y 2 por encima de 350 Hz. No todas estas evoluciones han sido estimadas en la Fig. 7.59: concretamente, tanto la evolución de la segunda componente por encima de 350 Hz como la primera por debajo de 350 Hz no han sido estimadas pues en un análisis más general durante el arranque las evoluciones de estas componentes a penas se perciben. Por tanto, su presencia tampoco ha sido cuantificada. Sin embargo, al analizar las oscilaciones de carga, su evolución es perfectamente clara. Por otra parte, al igual que en los dos análisis anteriores, podemos observar cómo cuando las componentes salen de la banda 345-355 Hz la pendiente para capturar su evolución deja de ser la fijada para capturar las oscilaciones de carga  $P_{OC} = 0.25$  Hz/s, pasando a ser  $3P_{LSH} = 66.7$  Hz/s por debajo de 345 Hz y  $P_{LSH} = 16.7$  Hz/s por encima de 355 Hz, emborronando el resultado en esta zona. Concretamente la tercera evolución por debajo de 350 Hz mostrada en la Fig. 7.59 no se observa en la Fig. 7.60 pues se encuentra en todo momento por debajo de los 345 Hz.

En definitiva, avanzando algunas de las conclusiones expuestas en 7.3.4, el análisis tiempo-frecuencia propuesto en la tesis permite obtener las evoluciones completas de las componentes de avería a lo largo de un transitorio complejo como el compuesto por un arranque seguido de oscilaciones de carga. Este resultado se consigue gracias a la capacidad de la transformada para elegir la relación entre las resoluciones en tiempo y en frecuencia necesaria en cada punto del plano analizado. Sin embargo, se ha observado cómo al utilizar variación de las pendientes sólo con la frecuencia, se reduce el tiempo de cálculo pues esto nos permite calcular las correlaciones como convoluciones, pero obtenemos peores resultados, pues las evoluciones de algunas componentes no pueden ser capturadas en los tramos de las oscilaciones de carga en los que se carga al motor. Esto repercute además en el resultado de la cuantificación comentado en el siguiente apartado. Si se desean obtener las evoluciones completas de todas las componentes tan solo se tiene que permitir una variación total de las pendientes, pero siempre a costa de un aumento del tiempo de cálculo.

Al utilizar la fórmula de la convolución para obtener el resultado de la AST, el número y tipo de operaciones a realizar es el mismo que al calcular la STFT, y por tanto ambas transformadas tienen el mismo tiempo de cálculo. Concretamente, se requieren casi 4 min para analizar la corriente 1 de casi 1 min de duración, con una frecuencia de muestreo reducida de 5 a 2.5 kHz (suficiente para el análisis a realizar) y tomando 1000 frecuencias uniformemente distribuidas entre 0-450 Hz. Si se quiere obtener una cuantificación de la máxima calidad tomando 9000 frecuencias, el tiempo es 9 veces mayor: casi 36 min. Por otra parte, hay que tener en cuenta que el tiempo de cálculo depende de las pendientes utilizadas: a menor pendiente, mayor tiempo de cálculo, pues

el átomo correspondiente, definido en el dominio temporal, tendrá un soporte mayor y por tanto un mayor número de puntos.

### 7.3.2.- Cuantificación.

Al igual que las figuras 7.18 y 7.22 mostraban las evoluciones temporales de las densidades de energía tiempo-frecuencia del LSH de las corrientes 1 y 2 respectivamente, la Fig. 7.61 muestra dichas evoluciones en una única gráfica que permite su comparación, mostrando de color rojo el resultado de analizar la corriente 1 (motor con una barra rota) y de color azul el resultado de analizar la corriente 2 (motor sano). Análogamente, se muestran en las figuras restantes del capítulo las evoluciones temporales de las densidades de energía de las restantes componentes de barra rota cuya presencia se ha intentado cuantificar: desde el USH (Fig. 7.62) hasta el B75 (Fig. 7.72).

Para aquellas componentes cuya evolución se visualiza completamente al representar la densidad de energía calculada, tal y como se ha visto en los resultados comentados en 7.3.1, el método de cuantificación desarrollado permite obtener la evolución temporal de su densidad de energía tiempo-frecuencia, mostrando una evolución relativamente continua y suave. Sin embargo, para aquellas componentes cuya evolución durante las oscilaciones de carga no se ha podido obtener completamente (concretamente cuando el motor se carga), las evoluciones de sus densidades presentan fuertes oscilaciones injustificadas físicamente precisamente cuando se produce dicha carga del motor, debido a que, como se ha explicado, sus evoluciones se distancian significativamente del WH correspondiente pasando a ser analizadas con pendientes inadecuadas en estos tramos. Este fenómeno se observa en las figuras 7.66, 7.67 y 7.68.

En cualquier caso, se aprecian claramente diferencias sustanciales entre las densidades relativas al motor averiado (rojo) y las relativas al motor sano (azul): encontramos diferencias de hasta 30 dB, como se observa en los primeros 10 s de la Fig. 7.65 relativa a la componente b5+. En definitiva, las densidades de energía a lo largo de las trayectorias estimadas de las componentes de barra rota son mucho mayores para el motor con una barra rota que para el motor sano.

Por otra parte, se puede tratar de interpretar físicamente cómo evolucionan las densidades de energía de las componentes de avería. Por ejemplo, es sabido que la amplitud del LSH durante el arranque decrece a medida que lo hace su frecuencia, siendo cero justo a la mitad del arranque, para volver a crecer hasta alcanzar el mayor pico a mediados de la segunda mitad del arranque, descendiendo seguidamente la amplitud hasta el valor propio del régimen permanente. Esta evolución es precisamente la que se observa en los 6 primeros segundos de la trayectoria roja en la Fig. 7.61. Por otra parte, durante las oscilaciones de carga la densidad de energía oscila entre dos valores relativos a los estados cargado y descargado.

Finalmente, el índice propuesto que indica la presencia de una componente de avería es el valor medio de las densidades de energía a lo largo de su evolución. Estos índices calculados en el apartado 7.2.7 para las corrientes 1 y 2 se muestran en las dos primeras columnas numéricas de la Tabla 7.1. Por otra parte, para facilitar la comparación, la diferencia entre estas dos columnas se muestra en la Tabla 7.2. Podemos ver cómo prácticamente todas las componentes de avería tienen mayores

índices en el caso averiado menos la última componente (B75). Por tanto, la presencia de la avería produce un incremento simultáneo en los índices relativos a 11 componentes de barra rota, siendo el incremento mínimo de 4 dB y el máximo de 16 dB. La detección conjunta de un número tan elevado de componentes, tanto a través de su evolución en el plano como a través de la cuantificación de su densidad de energía, permite realizar un diagnóstico muy fiable.

### 7.3.3.- Corrientes de motores de tipo B.

Por último, pasamos a comentar muy brevemente los resultados obtenidos al analizar las restantes seis corrientes capturadas, pertenecientes todas ellas a motores del tipo B. Analizamos directamente los 12 índices que cuantifican la presencia de los 12 componentes de barra rota considerados mostrados en la Tabla 7.1, para cada una de las seis corrientes (corrientes 3 a 8). Se observa cómo en valor absoluto los índices son menores en los casos averiados (una y dos barras rotas) que en el caso sano, tanto para el arranque en vacío como para el arranque en carga. Más concretamente, la Tabla 7.2 muestra las diferencias entre los siguientes pares de resultados:

- Arranque en vacío:
  - Sano vs 1 barra rota: columna numérica 2.
    - Mínima diferencia: 4 dB (exceptuando a -1 dB).
    - Máxima diferencia: 14 dB.
    - Diferencia media: 7 dB.
    - Componentes por encima de la media: B1-, B1+, B2-, b5+, b7-, B35.
  - Sano vs 2 barras rotas: columna numérica 3.
    - Mínima diferencia: 1 dB.
    - Máxima diferencia: 19 dB.
    - Diferencia media: 10 dB.
    - Componentes por encima de la media: B1-, B1+, B2-, B2+, b5+, B35.
- Arranque en carga:
  - Sano vs 1 barra rota: columna numérica 4.
    - Mínima diferencia: 1 dB (exceptuando a -1 dB).
    - Máxima diferencia: 19 dB.
    - Diferencia media: 9 dB.
    - Componentes por encima de la media: B1-, B1+, B2-, B2+, b5+, B35.
  - Sano vs 2 barras rotas: columna numérica 5.
    - Mínima diferencia: 4 dB (exceptuando a -1 dB).
    - Máxima diferencia: 23 dB.
    - Diferencia media: 12 dB.
    - Componentes por encima de la media: B1-, B1+, B2-, B2+, b5+, B35.

Concluimos que existen diferencias significativas entre los índices en estado sano y en estado averiado, salvo para la componente B97. En definitiva, la rotura de barra se detecta mediante la variación simultánea de hasta 11 índices que cuantifican la presencia de 11 componentes de avería, lo cual permite un diagnóstico de elevada fiabilidad. Observamos diferencias máximas de 23 dB y mínimas de 1 dB, siendo la

## Capítulo 7.

diferencia media en todos los ensayos realizados de 10 dB, encontrando siempre 6 de las 12 componentes por encima de la media.

Las componentes que mayores incrementos de su densidad de energía experimentan en presencia de la avería, estando su diferencia con respecto al caso sano por encima de la media son: B1-, B1+, B2-, B2+, b5+, B35; y con diferencias ligeramente inferiores tenemos también: b7- y b5-. A parte de realizar el diagnóstico analizando los índices de cuantificación obtenidos, podemos observar claramente las evoluciones de estas componentes en la representación de la densidad de energía calculada y presentada al final de 7.2 (figuras 7.24, 7.28, 7.32, 7.36, 7.40 y 7.44).

### **7.3.4.- Conclusiones del capítulo.**

En este capítulo se ha validado mediante ensayos la capacidad de la metodología de diagnóstico propuesta para detectar asimetrías rotóricas, demostrándose que presenta claras ventajas frente a los métodos utilizados hasta ahora.

Analizando los resultados obtenidos se observa la capacidad de la transformada definida para obtener la mejor relación entre las resoluciones en el tiempo y en la frecuencia, adecuándose en cada punto del plano a la corriente a estudiar. Como consecuencia, se trazan las evoluciones de las componentes de la corriente con gran precisión, tanto las provocadas por la avería como las asociadas a un estado sano como los PSH. A diferencia de métodos anteriores, esto permite analizar la corriente sin necesidad de aplicar ningún tratamiento previo como puede ser el filtro de la componente fundamental, cuya energía queda confinada en una banda de frecuencia muy reducida alrededor de la frecuencia fundamental, permitiendo detectar las evoluciones de las componentes de avería de baja amplitud, incluso en las inmediaciones de la componente fundamental, como ocurre con las de barra rota durante las oscilaciones de carga. En términos generales se minimizan las interferencias entre componentes permitiendo detectar su evolución separadamente.

En definitiva, se consigue obtener por primera vez la evolución completa del LSH. Seguidamente, al contrario de otros métodos que solo se centran en el LSH, se captura claramente la evolución de otras 10 componentes provocadas por la rotura de una barra, incluso en presencia de una única barra rota, mejorando además significativamente su visualización gracias a la aplicación de las técnicas desarrolladas (en especial el uso de distintas referencias a cada frecuencia analizada). Finalmente, el diagnóstico se realiza a través del novedoso método de cuantificación desarrollado, el cual conlleva un tiempo de cálculo muy reducido, pues a diferencia de otros métodos no precisa integrar la energía de las componentes. Concretamente se diagnostica a través de la cuantificación de hasta 11 componentes de avería, cuyos índices de cuantificación aumentan simultáneamente en presencia de la avería, lo cual permite un diagnóstico de elevada fiabilidad en comparación con otros métodos.

Tal y como se analiza a lo largo del capítulo, es suficiente que las pendientes de las cajas varíen solamente con la frecuencia, pudiendo realizar el cálculo utilizando la convolución. Por tanto, los tiempos de cálculo son del orden de los de la STFT. Al utilizar FBS (novedosas en el campo del diagnóstico de máquinas eléctricas), el tiempo de cálculo se reduce con respecto al consumido utilizando otros átomos como las funciones de Gabor, pero sin renunciar a la calidad de los resultados obtenidos.

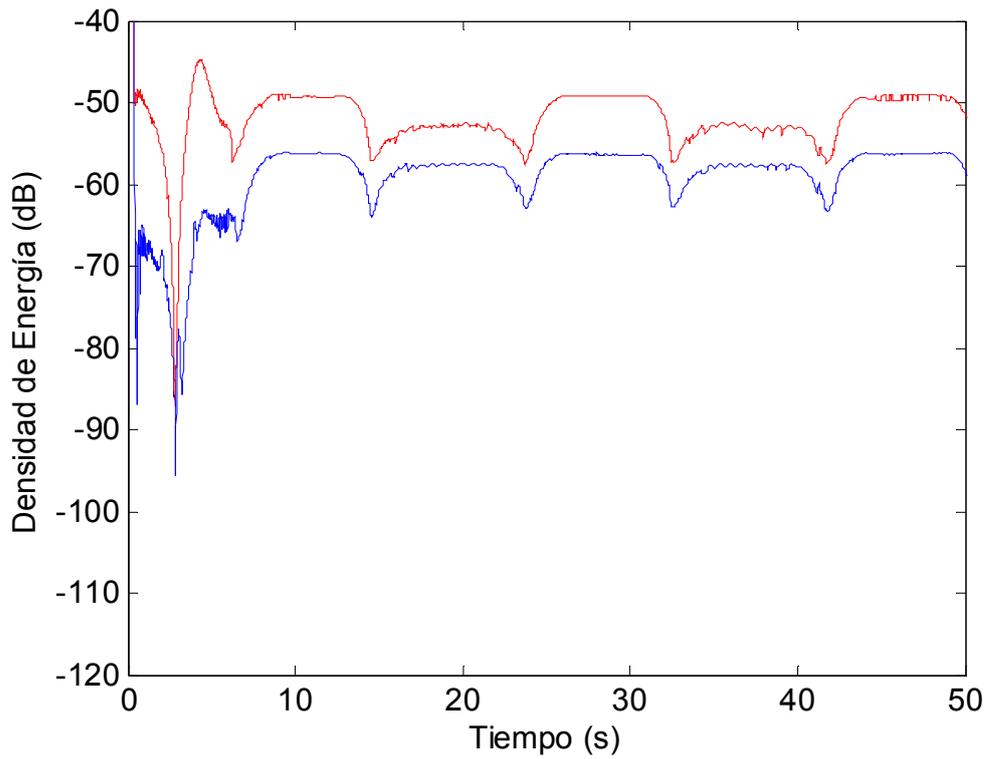


Fig. 7. 61 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente B1- (LSH).

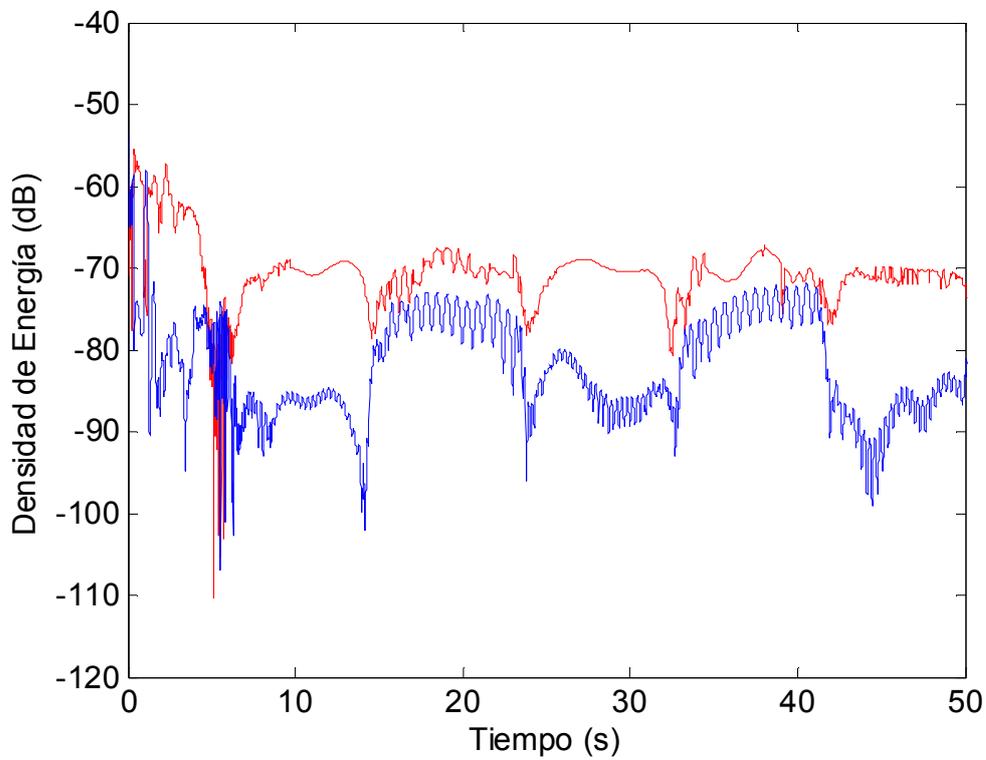


Fig. 7. 62 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente B1+ (USH).

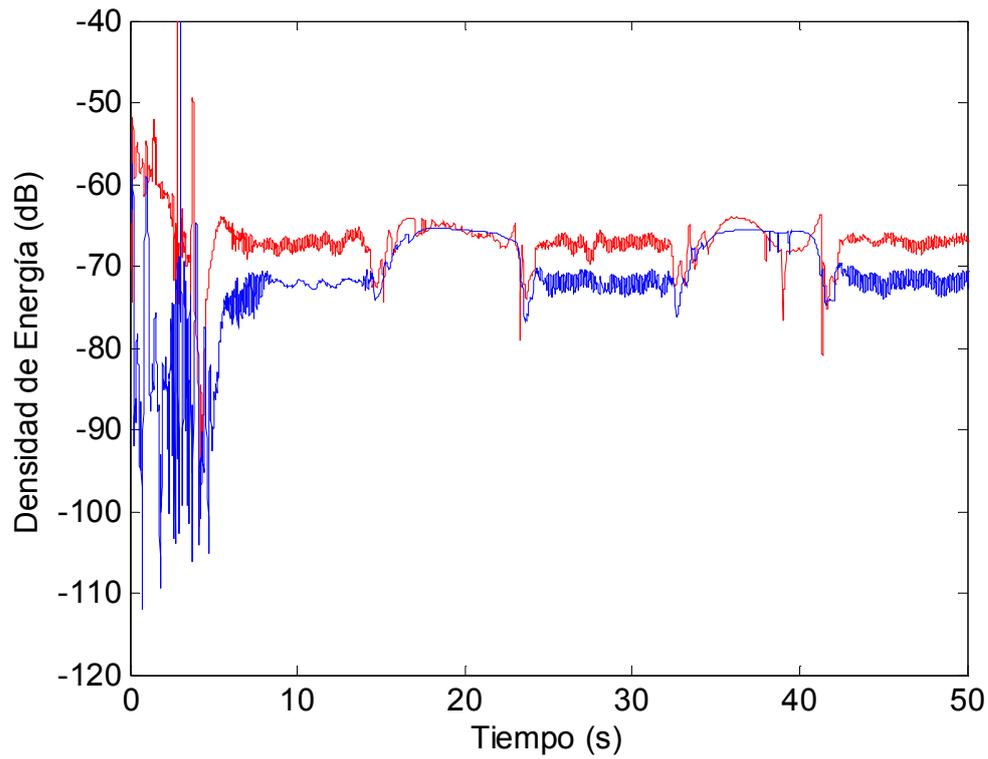


Fig. 7. 63 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente B2-.

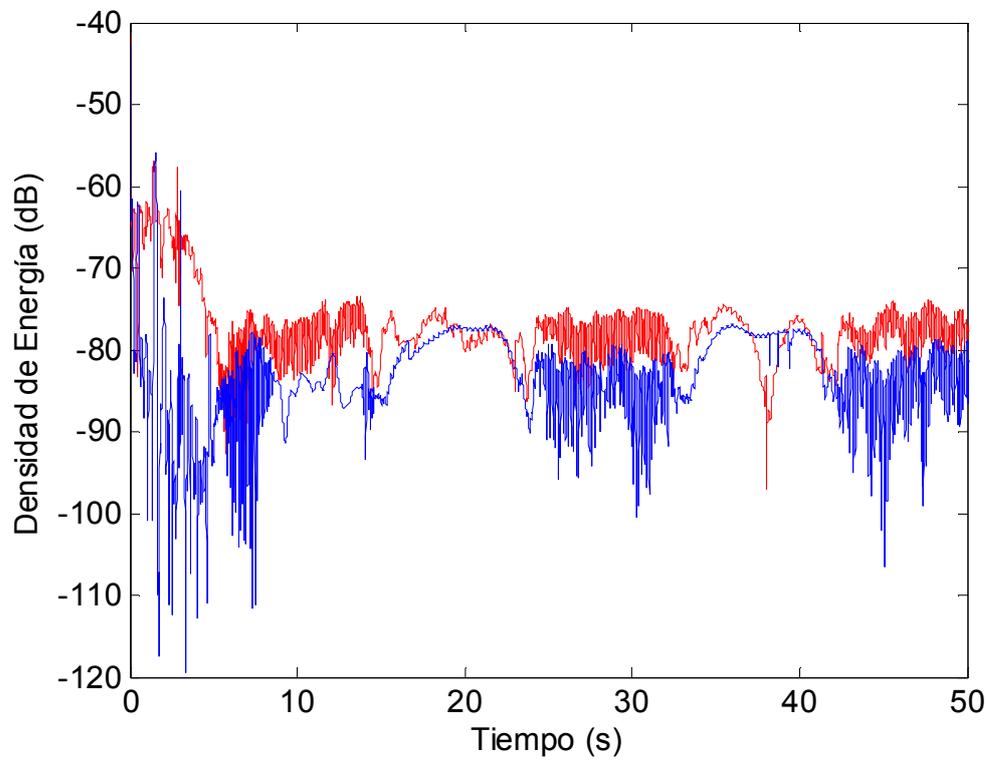


Fig. 7. 64 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente B2+.

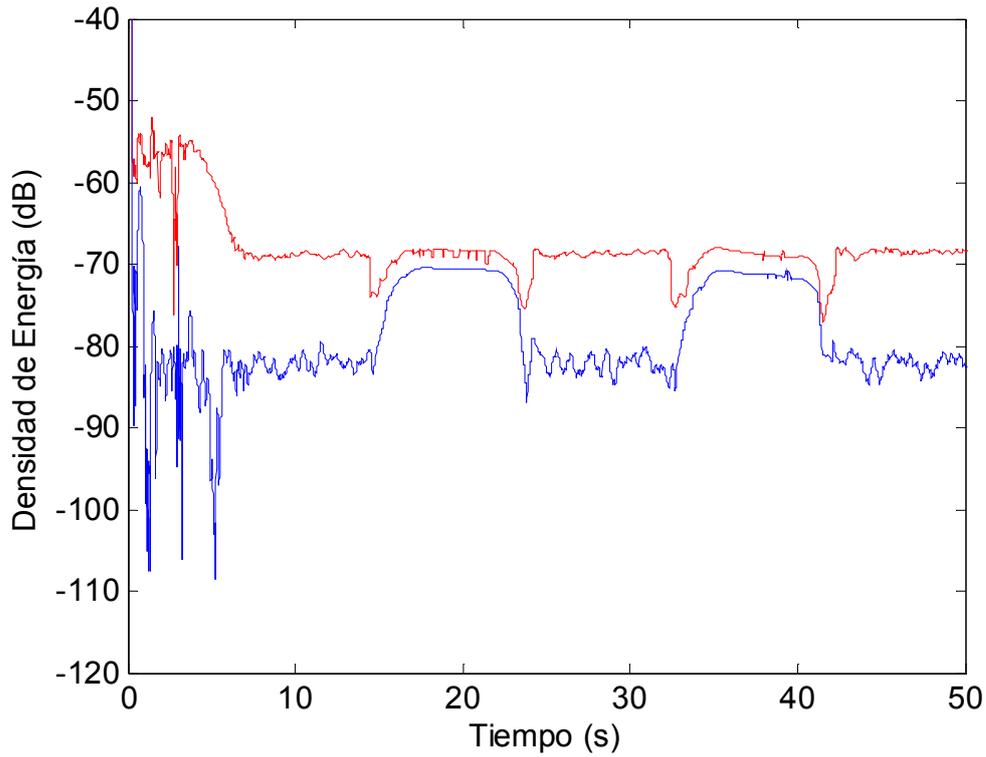


Fig. 7. 65 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente b5+ .

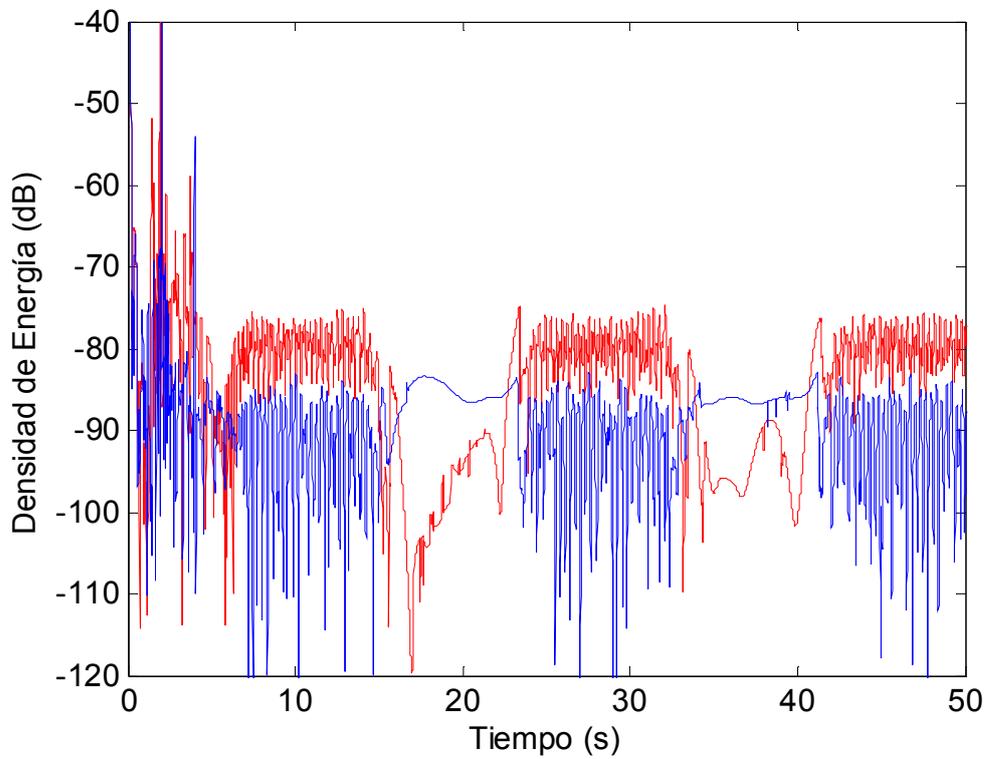


Fig. 7. 66 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente b5- .

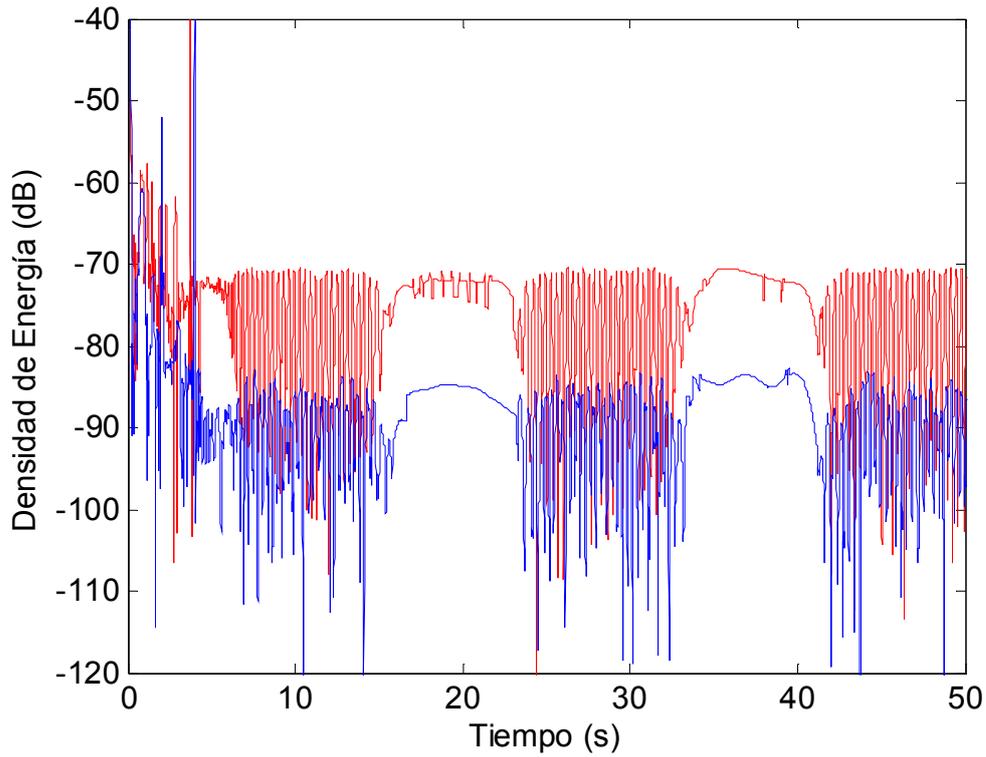


Fig. 7.67 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente b7+ .

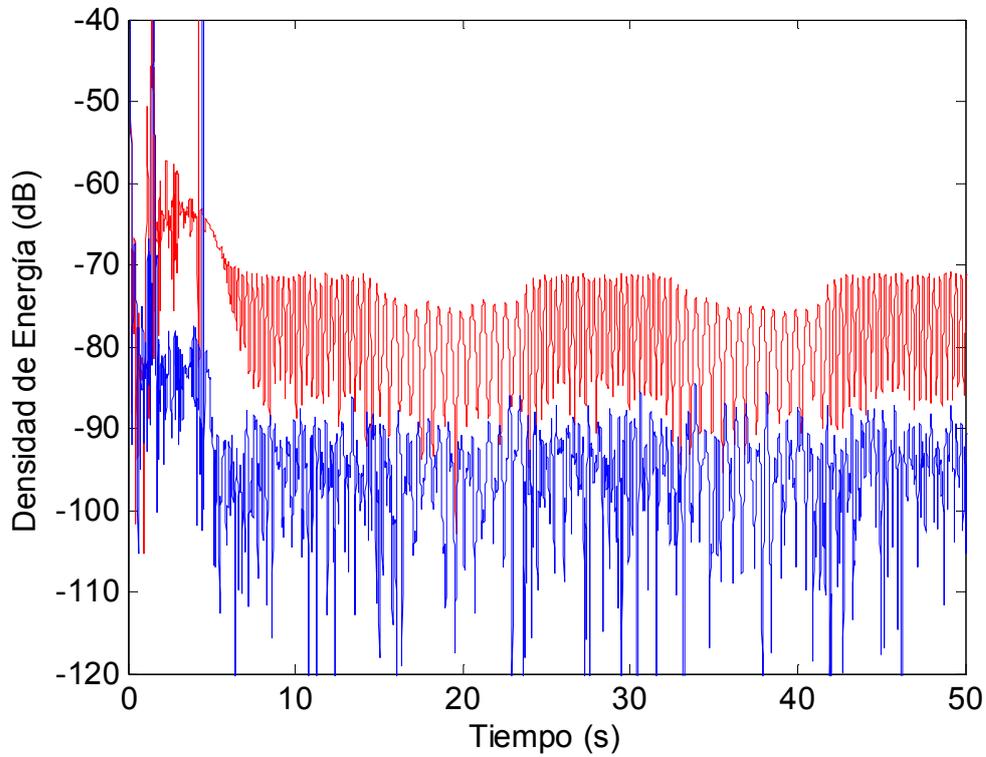


Fig. 7.68 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente b7- .

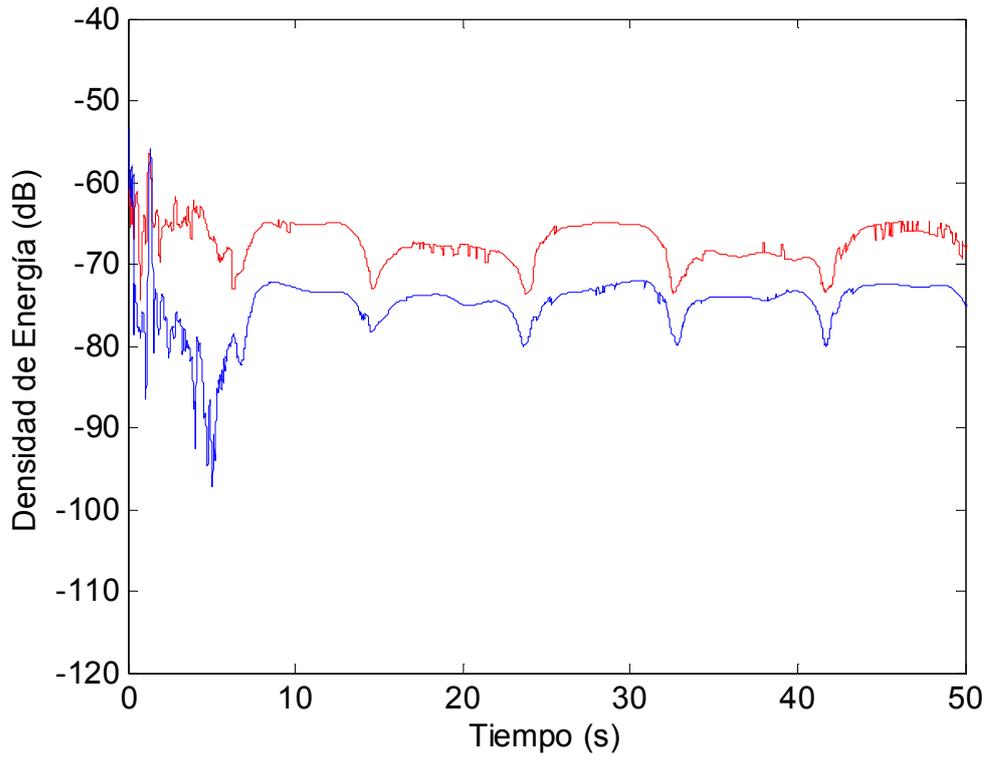


Fig. 7.69 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente B35.

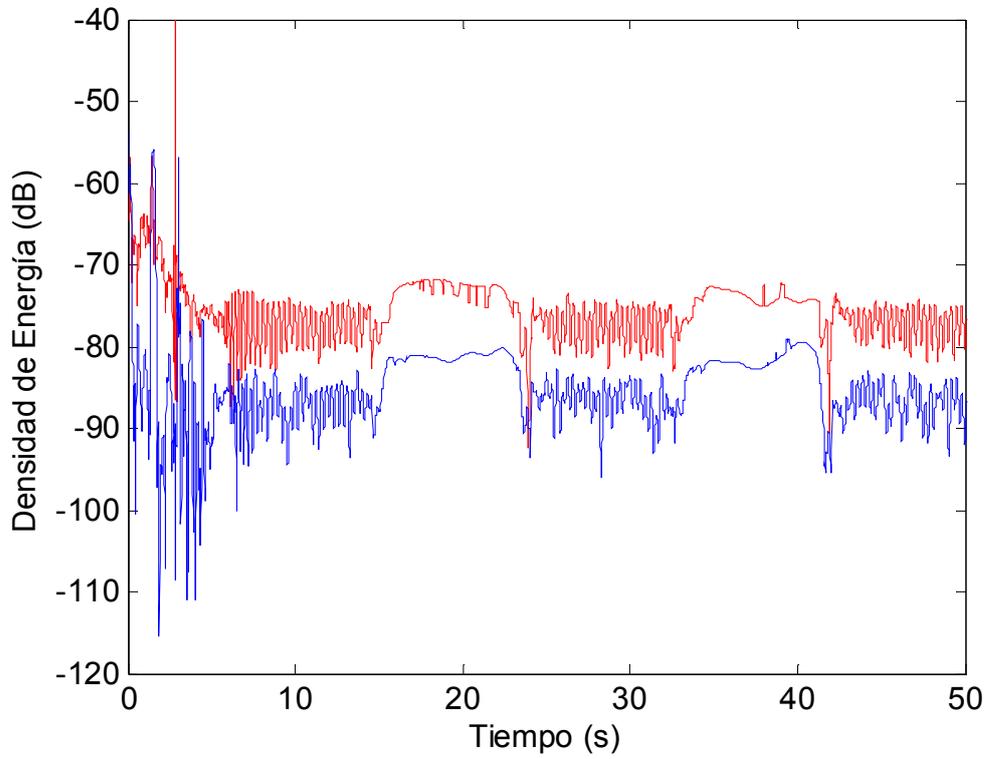


Fig. 7.70 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente B37.

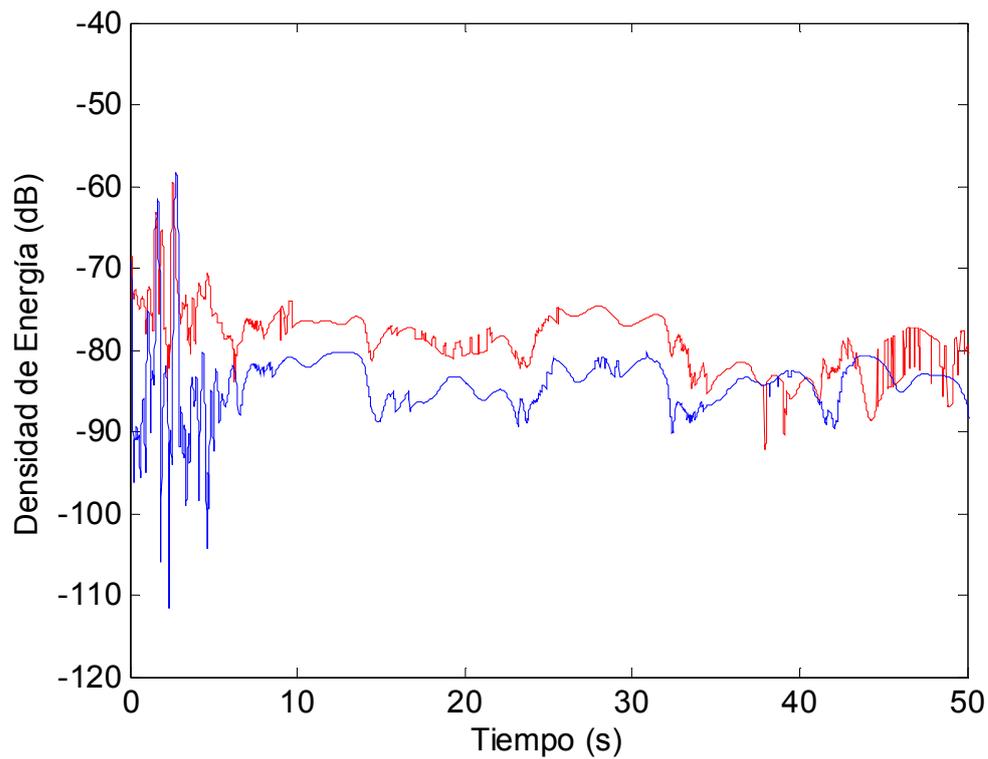


Fig. 7.71 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente B97 .

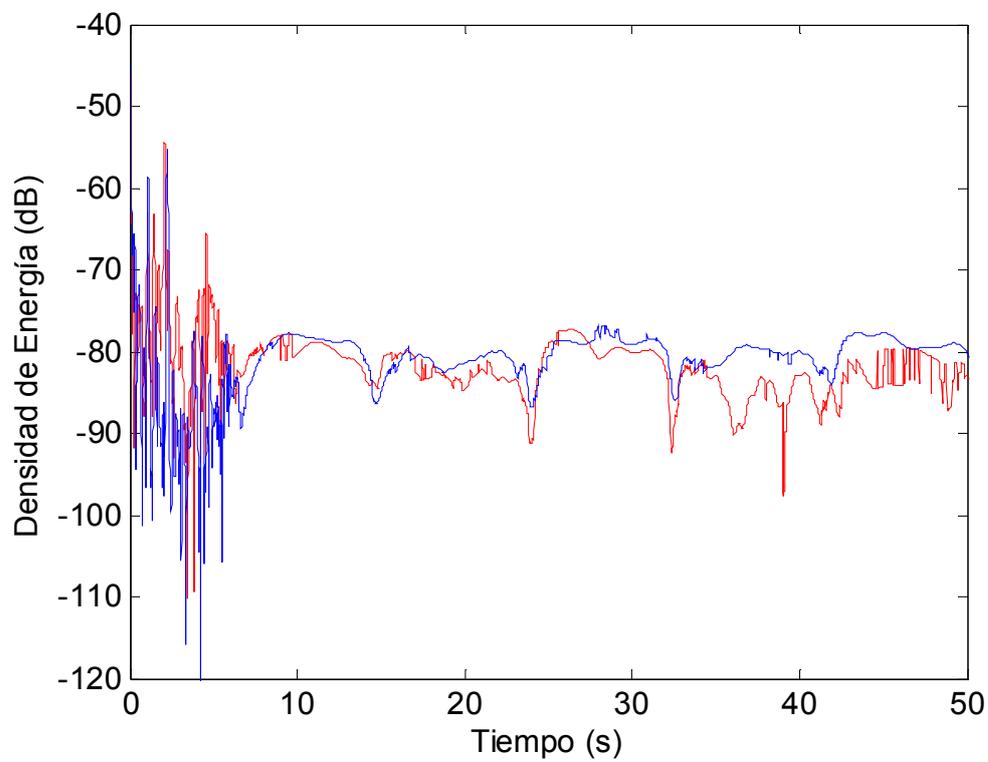


Fig. 7.72 Evolución temporal de la densidad de energía t-f de la componente B75 .

## **8.- Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.**

El presente capítulo, vinculado a resultados experimentales, está dedicado a la aplicación de la metodología de diagnóstico desarrollada en la presente tesis a un conjunto de corrientes transitorias pertenecientes al estator de un motor de inducción alimentado mediante un inversor. Algunas de estas corrientes han sido capturadas creando una excentricidad en el motor, en cuyo caso se deben detectar las evoluciones de las componentes provocadas por la excentricidad y cuantificar su presencia. El objetivo es pues confirmar que la metodología es capaz de detectar un problema de excentricidad en un motor de inducción alimentado mediante un inversor, independientemente del tipo de transitorio analizado.

El capítulo se divide en tres apartados. En el primero se describe el montaje experimental y las corrientes transitorias capturadas en distintas condiciones de funcionamiento. En el segundo se describe la aplicación de la metodología siguiendo la guía propuesta en 4.7. Finalmente, en el tercero se analizan los resultados obtenidos, realizando el correspondiente diagnóstico y exponiendo las conclusiones finales.

### **8.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.**

- 8.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.
- 8.1.2.- Generación de la avería: excentricidad por desalineamiento.
- 8.1.3.- Tipos de transitorios.
- 8.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.
- 8.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.

### **8.2.- Aplicación de la metodología.**

- 8.2.1.- Captura de la corriente.
- 8.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.
- 8.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.
- 8.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.
- 8.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.
- 8.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.
- 8.2.7.- Cuantificación.

### **8.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.**

- 8.3.1.- Corriente en régimen permanente.
- 8.3.2.- Corriente de arranque.
- 8.3.3.- Transitorio de variación de la frecuencia.
- 8.3.4.- Variación de la carga sin compensación del deslizamiento.
- 8.3.5.- Variación de la carga con compensación del deslizamiento.
- 8.3.6.- Conclusiones del capítulo.

## **8.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.**

El trabajo realizado en el presente capítulo ha sido fruto de una colaboración con los profesores Dr. Daniel Moriñigo y Dr. Óscar Duque, ambos pertenecientes a la Universidad de Valladolid. El autor de la tesis les agradece el tremendo trabajo realizado en los montajes experimentales realizados para capturar las corrientes en las distintas condiciones de funcionamiento descritas a continuación.

Con el objetivo de validar la capacidad de la metodología de diagnóstico propuesta para detectar excentricidades en motores de inducción alimentados mediante un inversor, se han realizado una serie de ensayos de laboratorio.

### **8.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.**

El motor de inducción, el inversor y la carga utilizados tienen las siguientes características:

- Motor:
  - Tensión nominal: 400 V.
  - Potencia nominal: 1.1 kW.
  - Corriente del estator nominal: 2.55 A.
  - 2 pares de polos.
  - Velocidad nominal: 1410 rpm.
  - 28 barras en el rotor.
- Inversor: Micromaster 420 (Siemens).
  - Potencia nominal: 4 kW.
  - Tensión de entrada: 380-480 V.
  - Frecuencia de conmutación: 4 kHz.
  - Estrategia de control tensión/frecuencia en lazo abierto con una característica tensión/frecuencia lineal.
- Carga: freno de polvo magnético (Lucas-Nuelle).

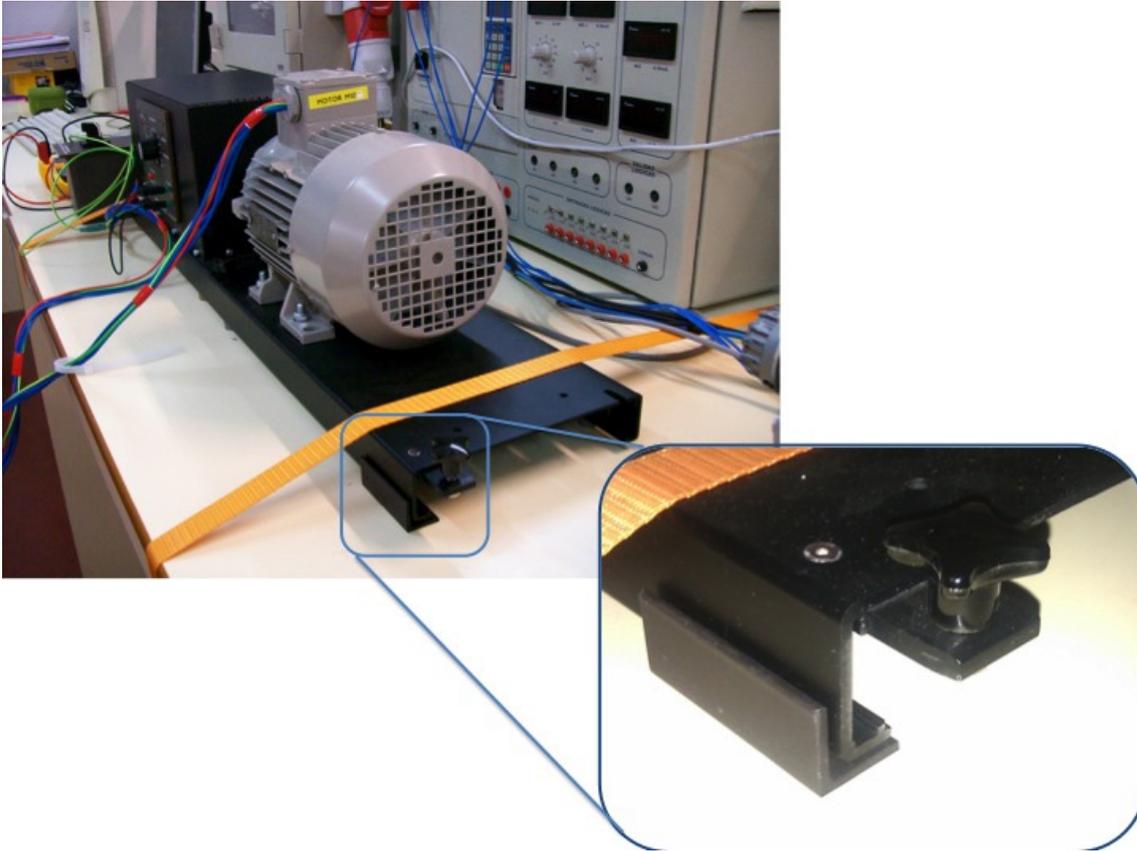
### **8.1.2.- Generación de la avería: excentricidad por desalineamiento.**

La aparición de un problema de excentricidad en un motor de inducción tiene muchas posibles causas [102]. La causa más directa es una asimetría en el entrehierro debido a tolerancias de manufactura, una mala colocación o montaje de las partes del motor o una degeneración de los rodamientos de bolas por problemas de fricción. También pueden causar un problema de excentricidad resonancias mecánicas propias del sistema, acople con cargas desequilibradas, un desalineamiento del eje de la carga y el eje del rotor del motor o una posible inclinación del eje del rotor.

En los ensayos realizados, la excentricidad ha sido generada por medio de un alineamiento inadecuado entre el eje del rotor y el de su carga. Dicho alineamiento inadecuado ha sido causado por la colocación de una pletina de acero en forma de L de 3 milímetros de espesor debajo de uno de los extremos de la plataforma, tal y como se muestra en la fotografía tomada al montaje (Fig. 8.1). Las consecuencias de este tipo de

Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.

desalineamiento entre el motor y la carga en términos de la excentricidad generada han sido estudiados en [103], mostrando que el desalineamiento del eje induce cargas en los rodamientos, las cuales resultan ser suficientemente elevadas para tener un impacto significativo en la excentricidad del entrehierro. Además, los efectos de esta excentricidad creada artificialmente, han sido analizados con profundidad en [9], a través del espectro de la corriente del estator del motor de inducción alimentado mediante el inversor y operando en régimen permanente.



**Fig. 8. 1** Fotografía del montaje realizado en el laboratorio: freno de polvo magnético, motor de inducción de jaula de ardilla (ambos sujetos con cinchas) y detalle de la cuña posicionada en un extremo para forzar un desalineamiento entre los ejes del motor y de la carga.

### 8.1.3.- Tipos de transitorios.

En primer lugar, el motor de inducción ha sido ensayado desconectado de la carga, sin provocar ningún tipo de fallo artificial, con la intención de detectar cualquier tipo de excentricidad inherente, la cual, tal y como se verá en el siguiente apartado, ha resultado ser prácticamente inexistente. Seguidamente, se ha provocado artificialmente una excentricidad en el motor de inducción, y se ha capturado su corriente de estator durante distintos tipos de transitorios.

Tal y como se ha comentado anteriormente, resulta fundamental disponer de una metodología de diagnóstico capaz de analizar motores de inducción trabajando en régimen transitorio. Las aplicaciones en las que se alimentan los motores de inducción mediante un inversor suelen ser de velocidad variable, en las cuales los motores raramente trabajan en régimen permanente, siendo además este régimen demasiado corto en caso de aparecer. La velocidad varía cambiando la frecuencia asignada del inversor mientras la frecuencia de deslizamiento se mantiene en valores muy reducidos.

Este tipo de transitorio resulta muy común: la frecuencia asignada puede aumentar, como es el caso de un arranque, o puede disminuir para bajar la velocidad. Por supuesto, a este tipo de transitorios se unen los provocados por una oscilación de carga. En definitiva, hay varios tipos de transitorios, debiendo enfrentarse la metodología de diagnóstico a uno u otro dependiendo del tipo de aplicación: varios arranques, aumentos y disminuciones de la frecuencia asignada o variaciones de carga con o sin compensación del deslizamiento.

#### 8.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.

En definitiva, se han realizado varios ensayos en varias condiciones de funcionamiento, capturando en cada caso la corriente transitoria absorbida por el estator. Todas las corrientes capturadas, las cuales se muestran en la Fig. 8.2, han sido capturadas utilizando un sensor de efecto Hall con una frecuencia de muestreo de 5 kHz. Anteriormente a su análisis utilizando MatLab, la frecuencia de muestreo ha sido reducida a 1 kHz utilizando la función decimate de MatLab, pues el límite superior de frecuencia analizado es 100 Hz, resultando más que suficiente la frecuencia de muestreo de 1 kHz, reduciendo de esta forma el tiempo de computación al trabajar con señales con un menor número de puntos.

#### 8.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.

El conjunto de las corrientes capturadas se muestran en la siguiente figura:

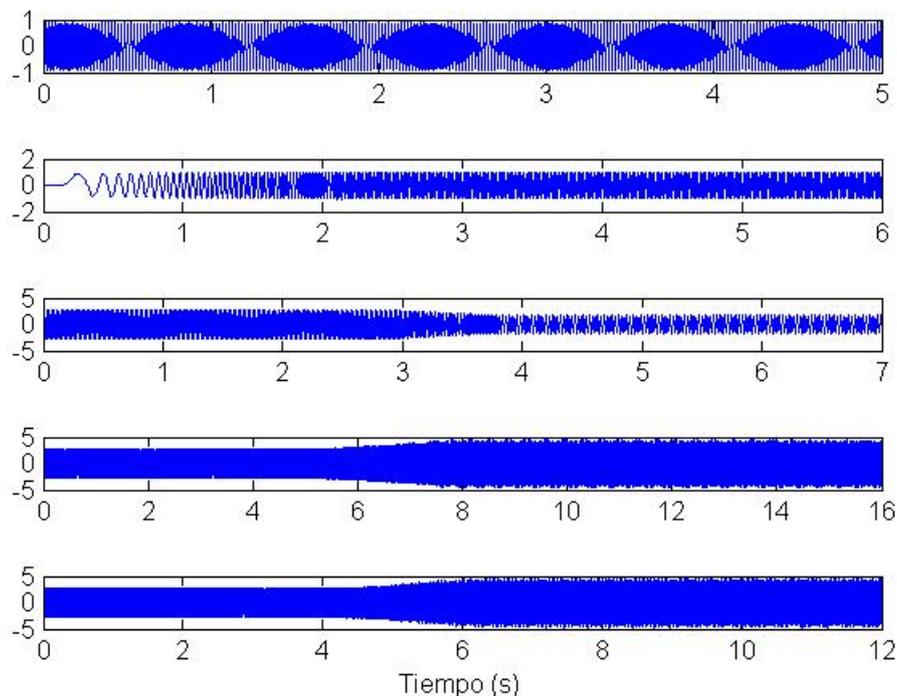


Fig. 8. 2 Corrientes del estator del motor de inducción capturadas durante los cinco ensayos realizados.

En primer lugar, tal y como se ha avanzado, se ha ensayado el motor funcionando en régimen permanente desacoplado de la carga, sin crear ningún tipo de

## Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.

excentricidad (Fig. 8.2, primera corriente). Las cuatro siguientes corrientes han sido capturadas con el motor acoplado a la carga y generando la excentricidad artificial. Así pues, durante el segundo ensayo se ha programado el inversor para que aumente linealmente la frecuencia asignada desde 0 hasta 50 Hz en aproximadamente 2.5 segundos. Se trata pues de un arranque, siendo la corriente capturada la segunda de la Fig. 2.9. Durante el tercer ensayo, en un segundo se ha disminuido la frecuencia también linealmente desde 50 Hz hasta 33, encontrando tanto antes como después los respectivos regímenes permanentes (Fig. 2.9, tercera corriente). Tanto el cuarto como el quinto ensayo (corrientes cuarta y quinta de la Fig. 2.9) han consistido en una sobrecarga del motor. La única diferencia entre ambos ensayos es que en el quinto la compensación del deslizamiento durante la variación de carga está activada (la frecuencia de la FC varía) y en el cuarto está desactivada (la frecuencia de la FC permanece constante).

## 8.2.- Aplicación de la metodología.

En el presente apartado se aplica la metodología de diagnóstico desarrollada en la tesis a las señales capturadas según lo indicado en el apartado anterior, mostrando los resultados obtenidos. A tal efecto se sigue la “Guía de aplicación de la metodología de diagnóstico” presentada en el apartado 4.7, detallándose las particularidades de los análisis realizados. De especial importancia es el apartado 8.2.4, en el que se comenta la elección de las pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada caso. En el siguiente apartado (8.3) se analizan los resultados obtenidos concluyendo el diagnóstico.

### 8.2.1.- Captura de la corriente.

El primer paso para diagnosticar una máquina eléctrica utilizando la metodología desarrollada en la presente tesis es capturar una de sus corrientes. Con lo que respecta al diagnóstico de motores de inducción realizado en el presente capítulo, este primer paso ya ha sido expuesto en el punto anterior al comentar los montajes experimentales y la correspondiente captura de distintas corrientes estatóricas del motor a diagnosticar en distintas condiciones transitorias.

### 8.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.

Para poder fijar las pendientes de las cajas de Heisenberg a utilizar siguiendo el criterio de la pendiente definido en 4.2, se necesita conocer las evoluciones de las componentes de avería; en este caso, componentes de excentricidad. Cuando el motor es alimentado desde un inversor, estas evoluciones se pueden determinar si se conoce la evolución de la frecuencia fundamental suponiendo frecuencia de deslizamiento nula, tal y como se explica en 4.1.3. En la presente tesis, con el objetivo de eliminar la necesidad de instalar sensores adicionales, se ha propuesto un método que permite obtener la evolución de la frecuencia fundamental a través de la corriente del estator capturada. Dicho método se ha expuesto en el capítulo 5, apartado 5.1, aplicándolo como ejemplo a una de las corrientes cuya captura se detalla en el apartado anterior (8.1).

Así pues, en primer lugar se debe aplicar el método descrito en el capítulo 5 para la obtención de la evolución temporal de la frecuencia de la FC. Esta evolución se muestra trazada en azul en las siguientes figuras:

- Corriente en régimen permanente: Fig. 8.3.
- Corriente de arranque: Fig. 8.5.
- Transitorio de disminución de la frecuencia: Fig. 8.7.
- Transitorio de variación de carga sin compensación del deslizamiento: Fig. 8.9.
- Transitorio de variación de carga con compensación del deslizamiento: Fig. 8.11.

Al despreciar la frecuencia de deslizamiento, la frecuencia de los EH principales viene dada por (4.16) tomando  $k = 1$ :  $f_{EH} = [1 \pm k/p] f_{FC}$ . Como el motor de inducción tiene dos pares de polos, la frecuencia de los EH principales es respectivamente 1.5 y 0.5 la del FC. Por tanto, se debe multiplicar la evolución de la FC por 1.5 y por 0.5,

Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.

obteniéndose una estimación (pues se desprecia la frecuencia de deslizamiento) de la evolución de los EH. Dichas evoluciones se muestran de color rojo en las correspondientes figuras. Se recuerda que la corriente en régimen permanente pertenece al motor desacoplado de la carga sin excentricidad artificial, estando en los 4 transitorios siguientes acoplado a la carga y con la excentricidad creada.

### **8.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.**

#### **Banda de frecuencia**

La banda de frecuencia analizada debe cubrir la evolución de la FC y la de los EH principales: E1+ y E1-. Tal y como ya se ha comentado, despreciando la frecuencia de deslizamiento la frecuencia de los EH principales es respectivamente 1.5 y 0.5 la del FC. Teniendo en cuenta que en todos los transitorios capturados la evolución de la frecuencia del FC programada tiene como puntos máximo y mínimo 50 y 30 Hz respectivamente (salvo durante el arranque), las frecuencias máximas y mínimas de los EH resultan ser 75 y 15 Hz aproximadamente. Para que las evoluciones se observen cómodamente, resulta suficiente analizar la banda de frecuencia entre 10 y 90 Hz. Como excepción, durante el transitorio de arranque analizado, la frecuencia del FC empieza obviamente en 0 Hz. Por lo tanto, al analizar la corriente de arranque, el mínimo de la banda de frecuencia analizada es obviamente 0 Hz.

#### **Intervalo de tiempo**

Con respecto al intervalo de tiempo considerado, aunque en cada caso se ha analizado la corriente completa, al presentar los resultados se han recortado los tramos inicial y final donde se encuentra el EB producido por la transformada, el cual no aporta ninguna información adicional. En los casos del régimen permanente, la disminución de la frecuencia y las variaciones de carga (sin y con compensación del deslizamiento), los pequeños tramos inicial y final recortados contienen continuaciones de los correspondientes regímenes permanentes, con lo cual se pueden recortar sin perder información. Sin embargo, en lo que respecta al arranque, no se puede recortar el tramo inicial, pues es una parte importante del arranque. Por lo tanto, en su respectivo resultado se puede observar el EB.

### **8.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.**

#### **Diccionario de partida**

El siguiente paso es el de seleccionar la familia de átomos tiempo-frecuencia con los cuales se correlacionará la corriente capturada. Recordamos que el conjunto de átomos posibles a utilizar para calcular la transformada (es decir, el diccionario) es el formado por las Frequency B-Splines de parámetro entero  $m = 2$ . Una vez seleccionadas las FBS finalmente a utilizar, estas funciones se recortan temporalmente para reducir el tiempo de cálculo según un parámetro de precisión  $x = 10.13 \%$ , tal y como se explica en el apartado 6.5.

### **Matriz de átomos.**

Tal y como se explica en el apartado de la guía de aplicación relativo al presente paso (4.7.4), el conjunto de puntos del plano tiempo-frecuencia en los cuales se calculará la correlación forman una matriz donde cada columna se asocia a un instante de tiempo muestreado al capturar la señal a analizar, y cada fila se asocia a una frecuencia analizada, siendo el número de frecuencias analizadas suficientemente elevado y encontrándose uniformemente distribuidas sobre la banda de frecuencia a estudiar.

Concretamente, para observar la representación de la densidad de energía, resulta suficiente considerar 200 frecuencias uniformemente distribuidas en la banda de frecuencia a analizar. Sin embargo, para obtener una cuantificación de máxima calidad hace falta considerar aproximadamente 1000 frecuencias cada 50 Hz analizados. En los análisis realizados, se han considerado 1000 frecuencias uniformemente distribuidas en la banda correspondiente.

Tal y como se observa en (4.45), para fijar una FBS debemos especificar el punto del plano en el que se encuentra centrada y su ancho de banda. Los puntos del plano han quedado definidos al definir la matriz. La pendiente utilizada en cada uno de dichos puntos se especifica en el siguiente apartado, la cual permitirá calcular el ancho de banda utilizando (4.46).

### **Pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas: consideraciones generales.**

Al conocer las estimaciones de las evoluciones del FC y de  $E1+$  y  $E1-$ , se puede aplicar ya el criterio de la pendiente a cada caso. Pero previamente se realizan algunas observaciones de carácter general. A diferencia de las corrientes analizadas en capítulos anteriores, en los que el motor se alimentaba directamente desde la red, y para las cuales se concluyó que una buena opción era tomar una pendiente distinta a cada frecuencia analizada (permitiendo calcular las correlaciones asociadas a una misma frecuencia con una única convolución), aquí las evoluciones a capturar tienen características muy diferentes y por tanto las conclusiones son diferentes.

En primer lugar, los análisis realizados en el presente capítulo tienen como objetivo capturar las evoluciones de tan solo tres componentes: la FC y los EH, las cuales se encuentran relativamente juntas, cubriendo una banda de frecuencia relativamente estrecha. Además, las pendientes de las tres evoluciones en cada instante son bastante parecidas. Así pues, si la FC traza una recta horizontal, los EH también. Y si la FC aumenta o disminuye con una determinada pendiente, los EH también aumentan o disminuyen, con pendientes aproximadamente 1.5 y 0.5 la del FC.

Concluyendo, a la hora de analizar estas corrientes parece más adecuado tomar una pendiente distinta en cada instante de tiempo (y la misma para todos las frecuencias en dicho instante). Por ejemplo, si en un determinado instante la pendiente de la FC es nula (traza en ese instante una línea horizontal en el plano tiempo-frecuencia), entonces siguiendo el criterio de la pendiente, resulta adecuado utilizar cajas de Heisenberg con mucha base y poca altura para analizarlo. No resulta adecuado perder por completo la localización temporal anulando por completo la pendiente, siendo un buen valor  $P = 0.25$  Hz/s. En ese mismo instante, las pendientes de los EH son también nulas, y

por tanto resulta adecuado utilizar la misma pendiente para analizarlas. ¿Y en las frecuencias comprendidas entre el FC y los EH? ¿Qué pendientes se utilizan? Como no hay ninguna componente importante a dichas frecuencias, se puede utilizar la misma pendiente, siendo por tanto constante respecto a la frecuencia considerada, una vez fijado el instante de tiempo.

Si por el contrario, en un determinado instante la evolución del FC tiene una determinada pendiente, pues su frecuencia está aumentando o disminuyendo, entonces hay que utilizar una caja de Heisenberg cuya pendiente sea idéntica a la de la evolución del FC. Para analizar los EH en ese mismo instante, si se aplica el criterio de la pendiente, las cajas de Heisenberg deben tener pendientes aproximadamente 1.5 y 0.5 la utilizada para analizar la FC. Sin embargo, los resultados son suficientemente buenos si las pendientes utilizadas para analizar dichas componentes son iguales a la utilizada para analizar la FC. Análogamente al ejemplo anterior, en las frecuencias comprendidas entre dichas componentes no hay ninguna otra componente importante a detectar. En definitiva, se puede tomar, para cada instante de tiempo, una única pendiente válida para todas las frecuencias asociadas a dicho instante, e igual a la de la evolución de la FC.

### **Pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas: aplicación a cada corriente.**

Por ejemplo, en el caso de la corriente en régimen permanente (Fig. 8.3), tanto el FC (evolución azul) como los EH (evoluciones rojas) trazan líneas horizontales en el plano tiempo-frecuencia. Por tanto, la pendiente adecuada en este caso es  $P = 0.25 \text{ Hz/s}$ , independientemente de cuál de las tres componentes se analice (pues ambas tienen la misma pendiente) y del instante considerado (pues dichas pendientes no cambian con el tiempo). La evolución de la pendiente de las cajas de Heisenberg consideradas en cada instante se muestra en la Fig. 8.4.

Al analizar la corriente de arranque (Fig. 8.5), se observa como la frecuencia de la FC aumenta linealmente de 0 a 50 Hz en aproximadamente 2 segundos (teniendo en cuenta que empieza a aumentar pasados los 0.2 segundos iniciales, y finaliza la evolución a los 2.2 segundos). Por tanto, como la evolución es lineal, la pendiente de la caja adecuada para este tramo es constante e igual a  $P = 25 \text{ Hz/s}$ . Para analizar las evoluciones de los EH, las pendientes de las cajas utilizadas deberían multiplicarse por 1.5 y 0.5 respectivamente. Sin embargo, tal y como se ha comentado, nos contentamos con aplicar la misma pendiente utilizada para el FC. Así pues, en los distintos instantes que dura el arranque, la pendiente en cada uno de ellos es igual a  $P = 25 \text{ Hz/s}$ , independientemente de la frecuencia considerada. Y una vez ha terminado el arranque, como las evoluciones se tornan horizontales, la pendiente de las cajas utilizadas debe caer a un valor 10 veces menor  $P = 0.25 \text{ Hz/s}$ . Este cambio en la pendiente no se produce de forma instantánea: una vez finalizado el arranque en 2.2 segundos, la pendiente de las cajas disminuye linealmente con el tiempo alcanzando el valor propio de un régimen permanente a los 3 segundos de iniciarse el transitorio. Sin embargo, para que la transición no sea demasiado brusca, en vez de tomar una pendiente  $P = 0.25 \text{ Hz/s}$  en régimen permanente se toma  $P = 1 \text{ Hz/s}$ . En definitiva, la evolución de la pendiente de las cajas de Heisenberg consideradas en cada instante de tiempo se muestra en la Fig. 8.6.

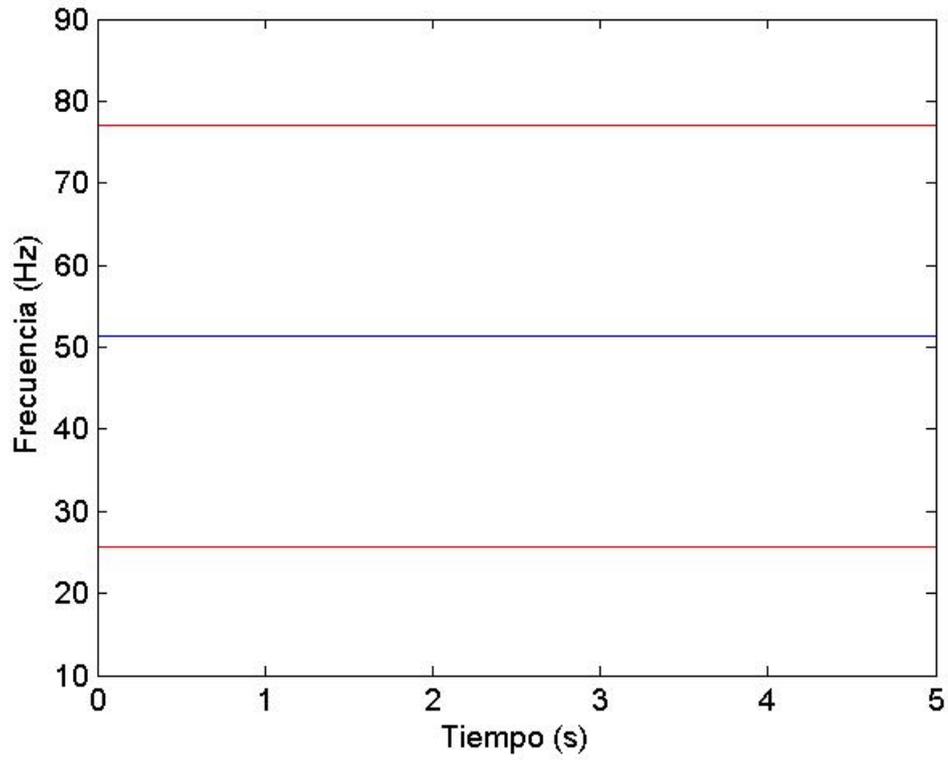


Fig. 8. 3 Análisis de la corriente en régimen permanente: estimación de la evolución temporal de las frecuencias de la FC (azul) y los EH (rojo).

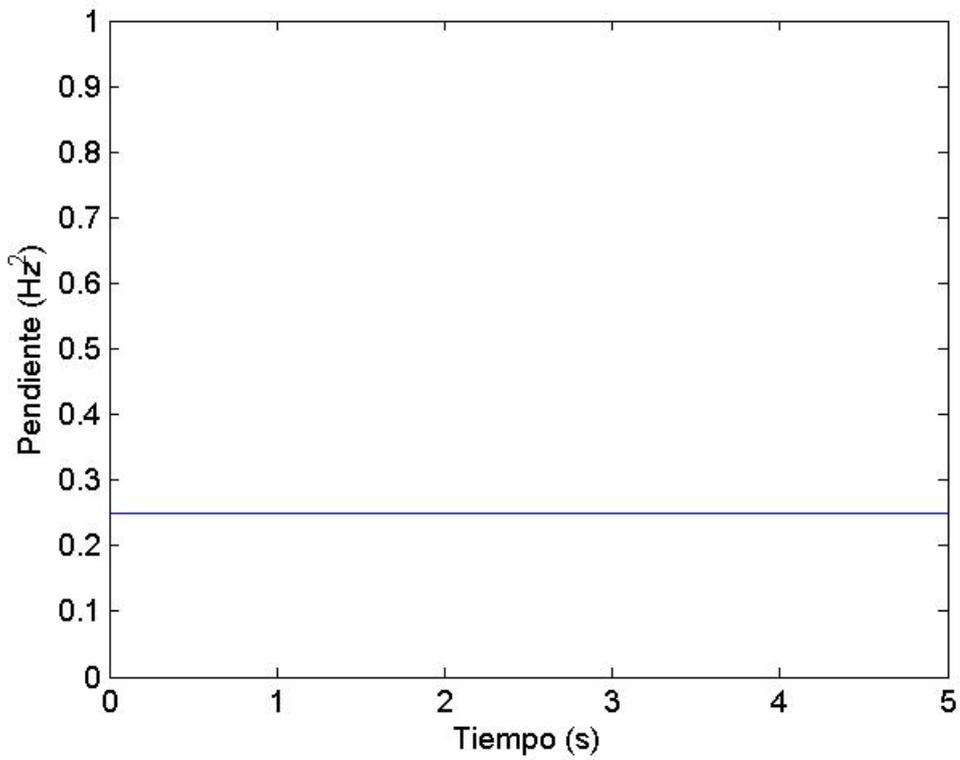


Fig. 8. 4 Análisis de la corriente en régimen permanente: pendiente de las cajas de Heisenberg a utilizar en función del instante de tiempo analizado.

Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.

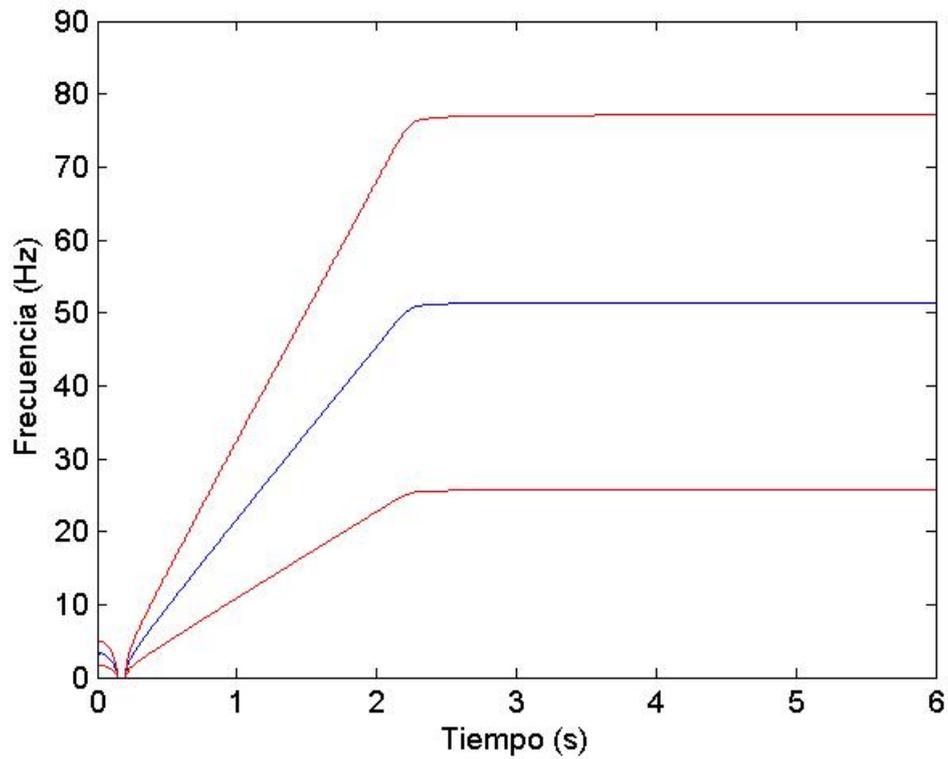


Fig. 8. 5 Análisis de la corriente de arranque: estimación de la evolución temporal de las frecuencias de la FC (azul) y los EH (rojo).

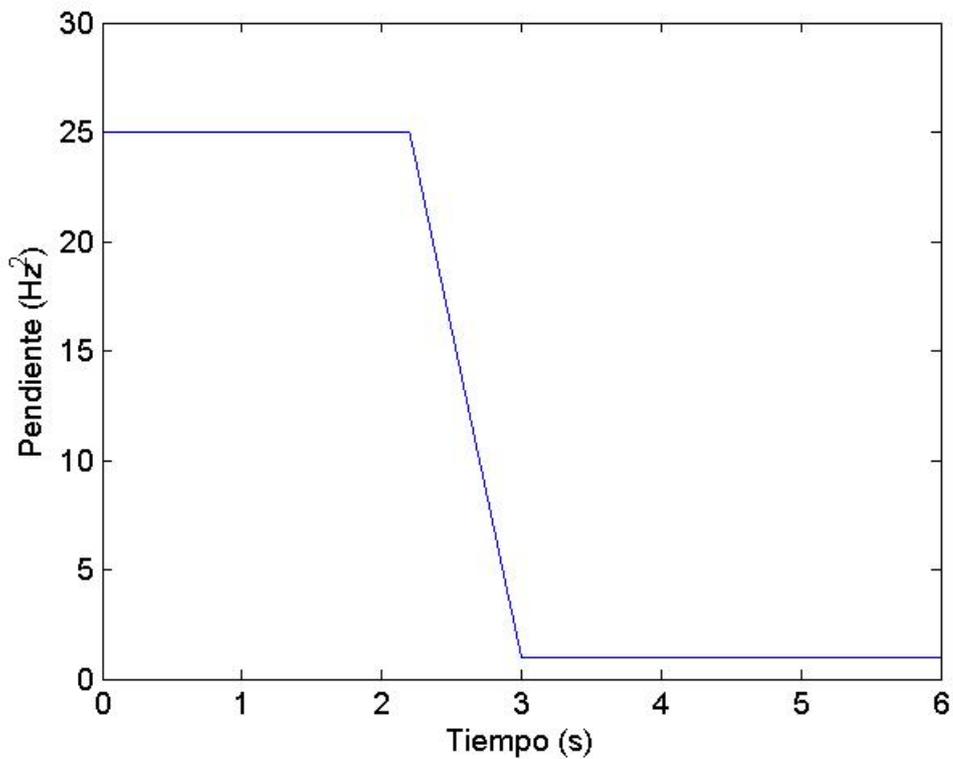


Fig. 8. 6 Análisis de la corriente de arranque: pendiente de las cajas de Heisenberg a utilizar en función del instante de tiempo analizado.

## Capítulo 8.

Al analizar el transitorio en el que la frecuencia asignada disminuye (Fig. 8.7), se observa que la frecuencia del FC es constante e igual a 50 Hz durante los tres primeros segundos del transitorio, disminuyendo linealmente con el tiempo hasta 33 Hz en 1 segundo, quedándose en dicho valor hasta el final. Para analizar el segundo durante el cual la frecuencia del FC disminuye linealmente, se toma una caja de pendiente igual a la de su evolución:  $P = (50 - 33)/1 = 17 \text{ Hz/s}$ . Para analizar los regímenes permanentes anterior y posterior se toma una caja de pendiente  $P = 1 \text{ Hz/s}$  (no utilizando  $P = 0.25 \text{ Hz/s}$  con el objetivo de que la transición entre ambas pendientes no sea demasiado brusca). Así pues, se toma una pendiente  $P = 1 \text{ Hz/s}$  durante los dos primeros segundos (Fig. 8.8), evolucionando linealmente con el tiempo hasta llegar a  $P = 17 \text{ Hz/s}$  cuando se cumplen los tres segundos de duración, manteniéndose en dicho valor durante el segundo que dura la disminución de frecuencia y volviendo linealmente en un segundo al valor correspondiente al régimen permanente. Como en los ejemplos anteriores, las pendientes utilizadas para analizar la evolución del FC en cada instante son las mismas que las utilizadas en las otras frecuencias.

Análogamente se obtienen las pendientes a utilizar al analizar las variaciones de carga sin (Fig. 8.9) y con (Fig. 8.11) compensación del deslizamiento. En el primer caso las pendientes son las mismas que si se trata de un régimen permanente (Fig. 8.10), pues la evolución del FC es una recta horizontal y aunque las evoluciones de los EH no son completamente rectilíneas debido a los cambios en el deslizamiento provocados por la variación de carga, esta particularidad no se ha tenido en cuenta al trazarlas en la Fig. 8.9, pues en esta etapa de estimación de la evolución de las componentes se ha supuesto precisamente frecuencia de deslizamiento nula. Así pues, teniendo en cuenta la Fig. 8.9, las pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada instante de tiempo se muestran en la Fig. 8.10.

En el segundo caso las pendientes de las cajas durante la variación de carga se ajustan a las de la evolución del FC que aparece para compensar el cambio en el deslizamiento (Fig. 8.11). Concretamente, la frecuencia del FC evoluciona de 50.5 a 53 en 3 segundos según una tendencia aproximadamente lineal. Por tanto, la pendiente de las cajas durante este transitorio es constante e igual a  $P = (53 - 50.5)/3 \approx 0.83 \text{ Hz/s}$ . En los regímenes posterior y anterior se utilizan pendientes propias de un régimen permanente:  $P = 0.25 \text{ Hz/s}$ . A los 3 segundos la pendiente cambia linealmente con respecto al tiempo partiendo de  $P = 0.25 \text{ Hz/s}$  y llegando a  $P \approx 0.83 \text{ Hz/s}$  a los cuatro segundos. A los 7 segundos, cuando la variación de carga ya ha finalizado, la pendiente vuelve a bajar linealmente, alcanzando otra vez el valor propio del régimen permanente a los 8 segundos, manteniéndose así hasta el final (Fig. 8.12).

### 8.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.

Una vez fijada la familia de átomos tiempo-frecuencia, el siguiente paso es calcular la correlación habitual entre los elementos de la familia y la señal a analizar:

$$\langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi_{t_c, f_c}^*(t) dt \quad (8.1)$$

Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.

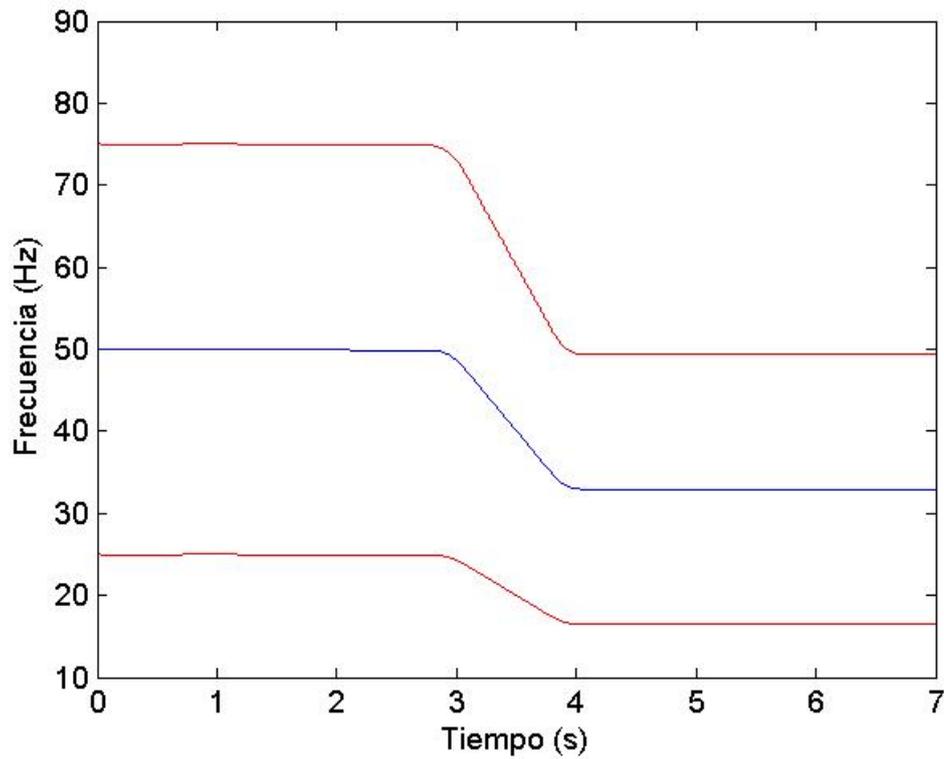


Fig. 8. 7 Análisis del transitorio de disminución de la frecuencia: estimación de la evolución temporal de las frecuencias de la FC (azul) y los EH (rojo).

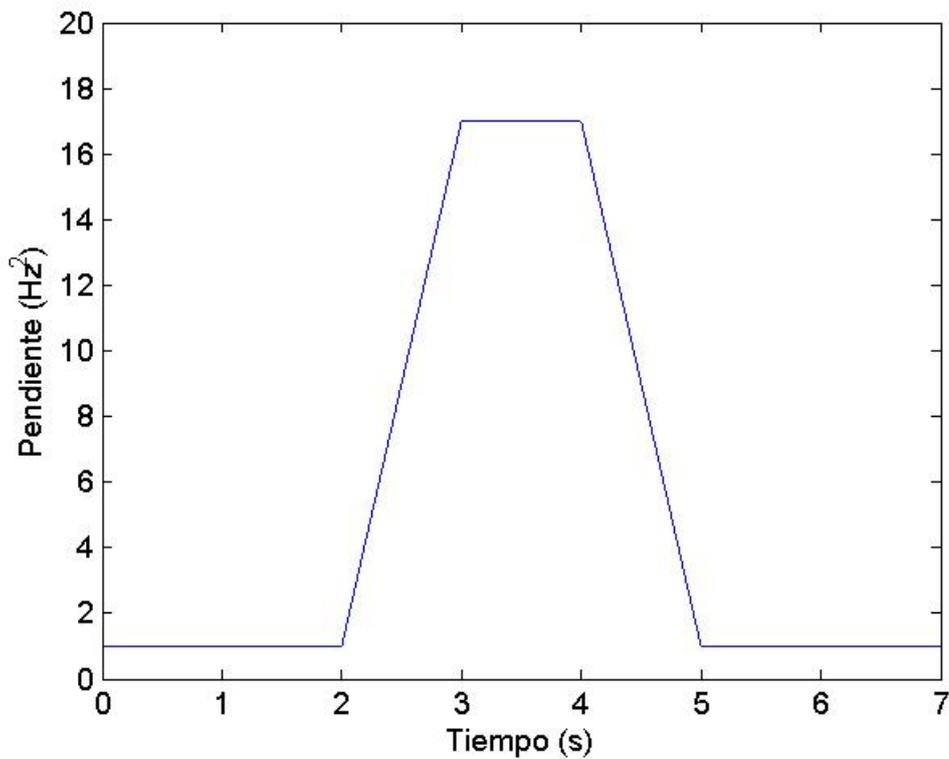


Fig. 8. 8 Análisis del transitorio de disminución de la frecuencia: pendiente de las cajas de Heisenberg a utilizar en función del instante de tiempo analizado.

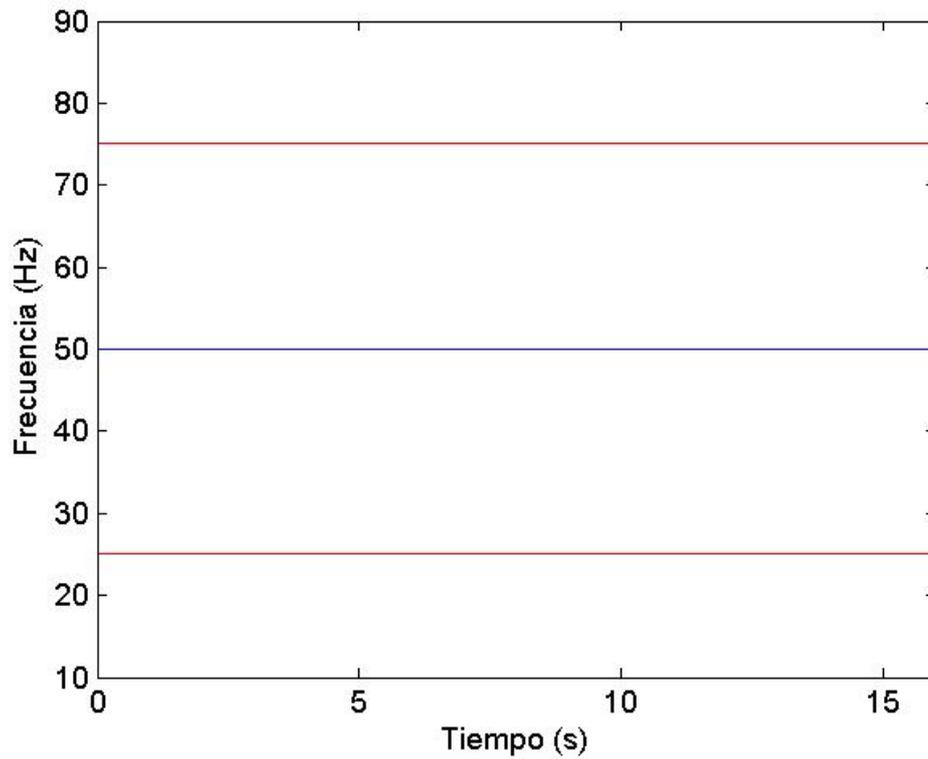


Fig. 8.9 Análisis del transitorio de variación de carga sin compensación del deslizamiento: estimación de la evolución temporal de las frecuencias de la FC (azul) y los EH (rojo).

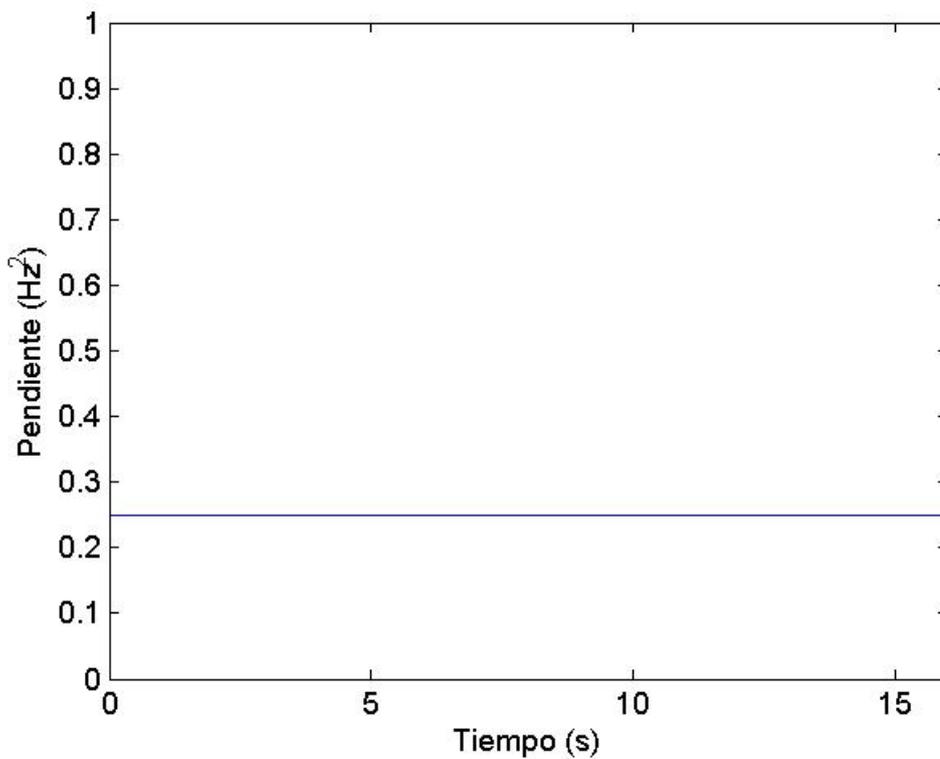


Fig. 8.10 Análisis del transitorio de variación de carga sin compensación del deslizamiento: pendiente de las cajas de Heisenberg a utilizar en función del instante de tiempo analizado.

Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.

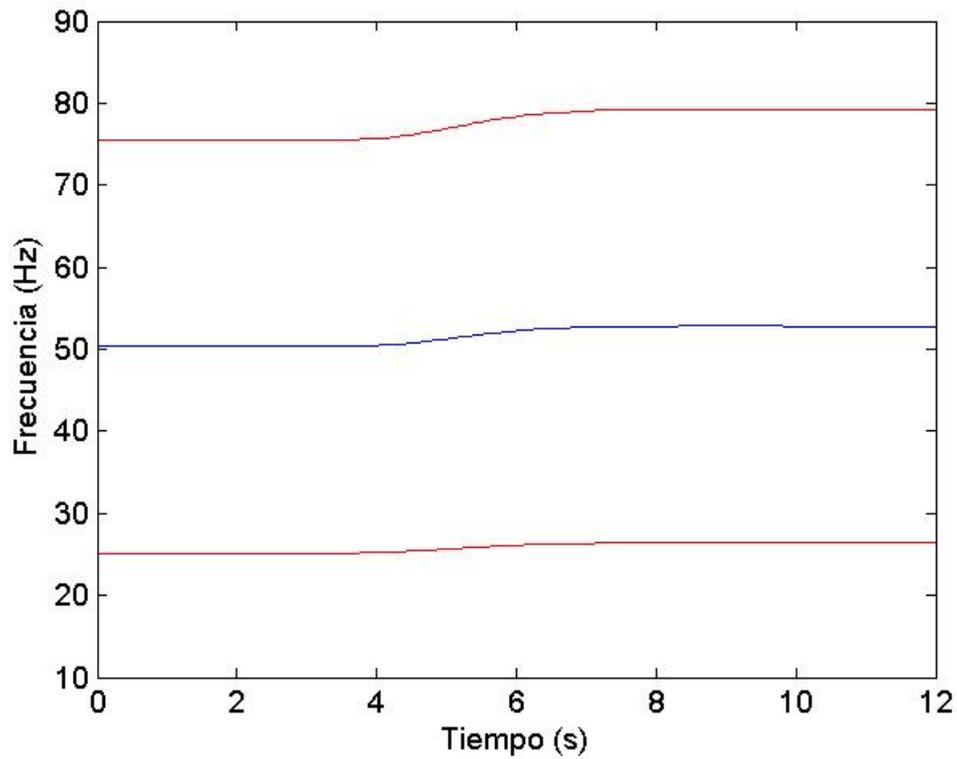


Fig. 8. 11 Análisis del transitorio de variación de carga con compensación del deslizamiento: estimación de la evolución temporal de las frecuencias de la FC (azul) y los EH (rojo).

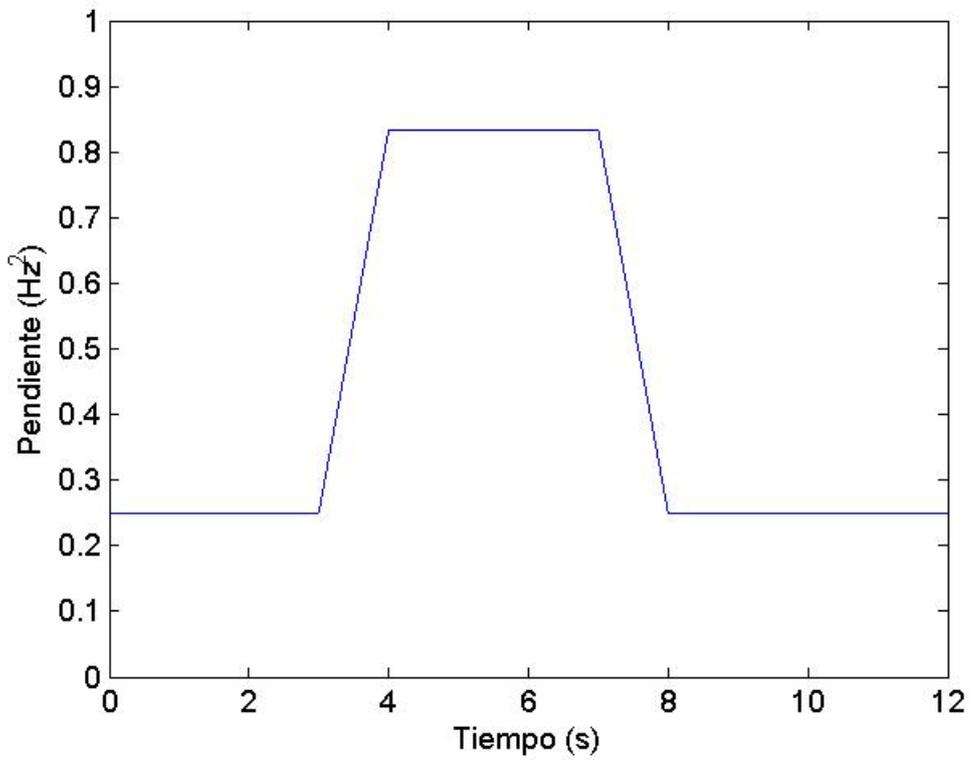


Fig. 8. 12 Análisis del transitorio de variación de carga con compensación del deslizamiento: pendiente de las cajas de Heisenberg a utilizar en función del instante de tiempo analizado.

## Capítulo 8.

Finalmente, se calculan las densidades de energía en cada punto del plano analizado:

$$\rho_h(t_c, f_c) = \left| \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle \right|^2 \quad (8.2)$$

Como los átomos de la familia están centrados en una matriz de puntos en el plano tiempo-frecuencia, al aplicar (8.2) obtenemos como resultado una matriz de densidades de energía. Las densidades de energía obtenidas se representan en 2D en el plano tiempo-frecuencia localizando los puntos de la matriz de resultados que contienen los valores máximo y mínimo, asignándoles respectivamente los dos extremos de una determinada escala de colores, para proceder seguidamente a asignar colores intermedios al resto de resultados en función de sus valores relativos a dichos extremos. Concretamente, la escala de colores utilizada es la escala 'jet' de MatLab y se han considerado 1024 colores. Por otra parte, para poder observar mejor las evoluciones de las componentes de menor amplitud, mejorando la visualización de los resultados obtenidos, se ha aplicado escala logarítmica.

En definitiva, al aplicar la metodología con las pendientes indicadas y según lo explicitado en los subapartados anteriores, los resultados son los mostrados en el siguiente conjunto de figuras:

- Corriente en régimen permanente: Fig. 8.13.
- Corriente de arranque: Fig. 8.17.
- Transitorio de disminución de la frecuencia: Fig. 8.21.
- Transitorio de variación de carga sin compensación del deslizamiento: Fig. 8.25.
- Transitorio de variación de carga con compensación del deslizamiento: Fig. 8.29.

Las tres figuras siguientes que acompañan a cada una de las recién mencionadas muestran los resultados de aplicar, a cada corriente, el método de cuantificación explicado en 8.2.7.

### 8.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.

Las figuras obtenidas en el apartado anterior se han generado utilizando escala logarítmica. Por lo demás, evitando alargar demasiado el capítulo, en el presente apartado no se utilizan otras de las técnicas propuestas en la tesis para mejorar la visualización, pues aplicando escala logarítmica ya se observan claramente las evoluciones de las componentes.

### 8.2.7.- Cuantificación.

Para cuantificar la presencia de excentricidad en el motor cuya corriente del estator se analiza, se ha utilizado el método expuesto en el apartado 4.6.2. Se recuerda que, en el primer paso del método se obtiene la evolución real de los EH. Para ello se considera una banda de frecuencia de 2 Hz de amplitud alrededor de la estimación inicial de su evolución. Seguidamente se calcula, para cada instante, el máximo dentro de las respectivas bandas. Las figuras 8.14, 8.18, 8.22, 8.26 y 8.30 (vinculada cada figura a uno de los transitorios analizados), muestran las evoluciones temporales del FC

Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.

(negro), las bandas de frecuencia que deben contener las evoluciones de E1+ y E1- (azul y verde respectivamente), y las evoluciones de dichas componentes finalmente calculadas (trazadas en rojo).

El siguiente paso consiste en localizar en la matriz resultado de calcular la AST las evoluciones definitivas de E1+ y E1- trazadas en rojo. El resultado se muestra en tres dimensiones en las figuras 8.15, 8.19, 8.23, 8.27 y 8.31.

Finalmente, prescindiendo de la información frecuencial, se obtiene para cada instante (figuras 8.16, 8.20, 8.24, 8.28 y 8.32), la densidad de energía a lo largo de las evoluciones del FC (negro), el E1+ (azul) y el E1- (verde). Las medias de las evoluciones de dichas densidades son los índices que se utilizan para cuantificar la presencia de la avería (Tabla 8.1). Tan solo en el caso del arranque se han suprimido los primeros 1.4 segundos antes de calcular la media, pues durante esta parte las evoluciones de las componentes de avería se confunden con la del FC, falseando por tanto el resultado. El límite a partir del cual se ha calculado la media se ha indicado con una línea vertical roja en la Fig. 8.20.

**Tabla. 8. 1 Índices que cuantifican la presencia de los dos componentes vinculados a la avería, para cada uno de los transitorios analizados.**

Transitorio	E1+ (dB)	E1- (dB)
Régimen permanente	58.04	59.08
Arranque	34.43	32.29
Disminución de la frecuencia	38.26	37.03
Variación de carga sin compensación	28.39	25.75
Variación de carga con compensación	31.30	28.84

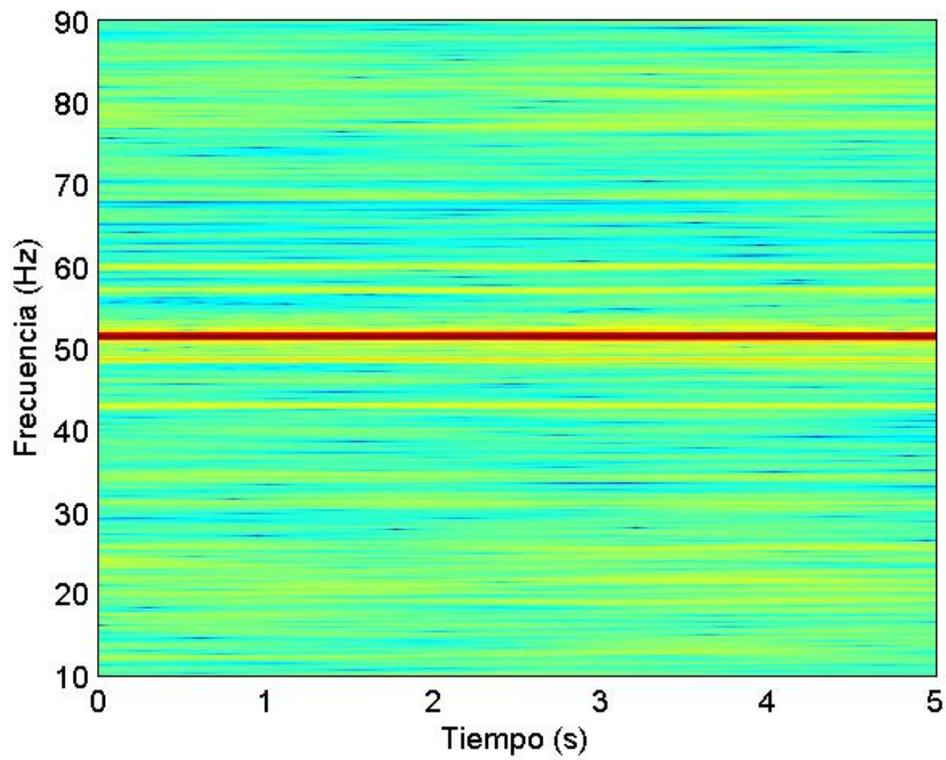


Fig. 8. 13 AST de la corriente en régimen permanente. La pendiente de las cajas utilizadas varía con el instante analizado según lo indicado en la Fig. 8.4.

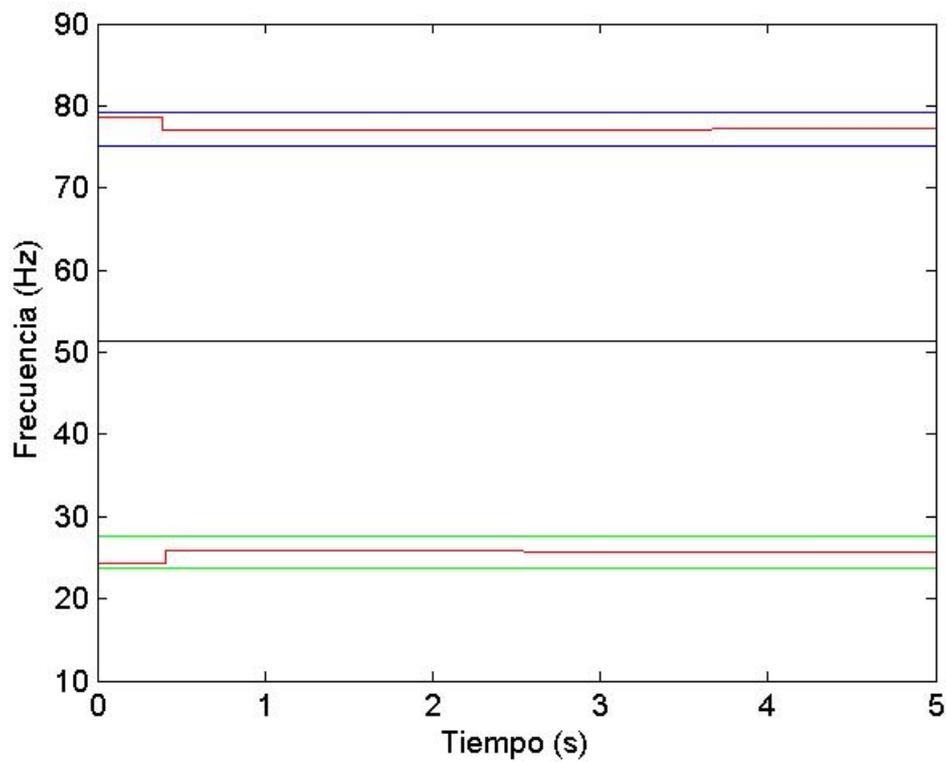


Fig. 8. 14 Análisis de la corriente en régimen permanente: Estimación de la evolución de la FC (azul), bandas de frecuencia alrededor de la frecuencia estimada de los EH (azul EH superior y verde EH inferior) y evoluciones de los EH finalmente calculadas (rojo).

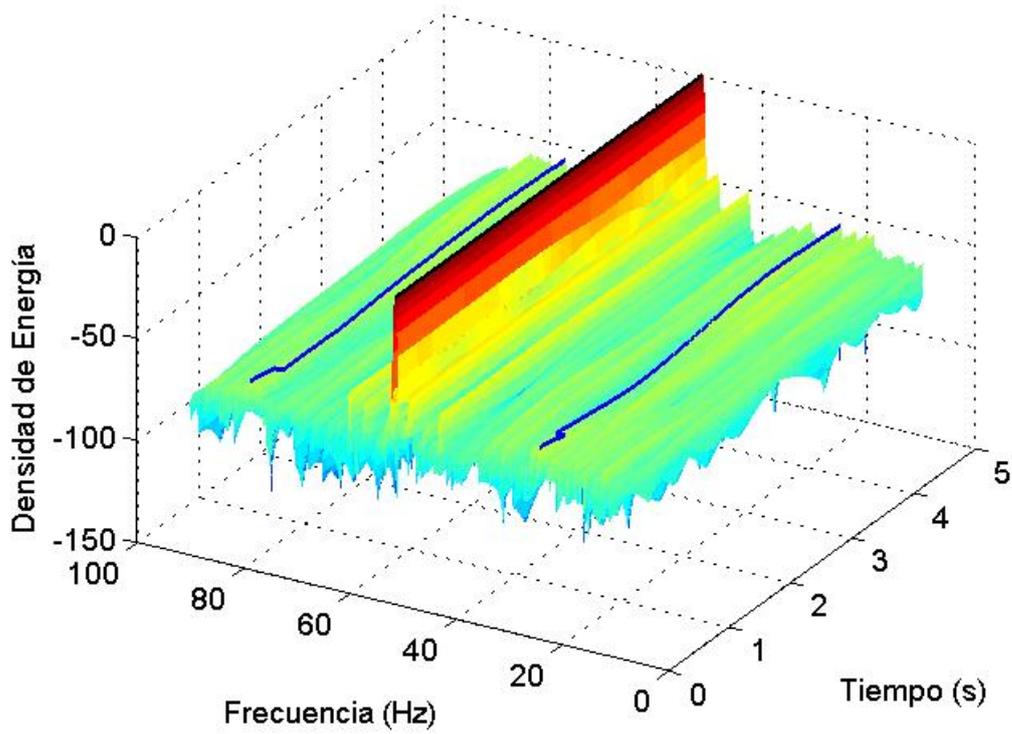


Fig. 8. 15 Visualización tridimensional del acople de los resultados de las figuras 8.13 y 8.14: localización de los puntos de la evolución temporal de los EH en la matriz que describe la densidad de energía.

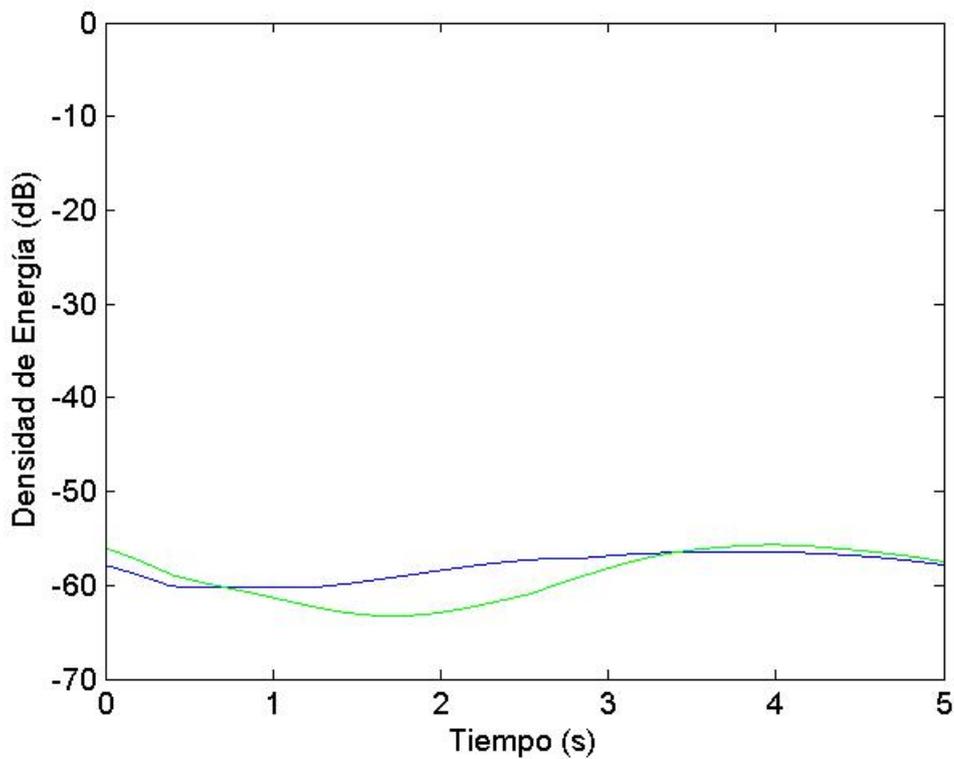


Fig. 8. 16 Análisis de la corriente en régimen permanente: Evolución temporal de la densidad de energía vinculada al FC (negro, coincidente con 0 dB) al EH superior (azul) y al EH inferior (verde).

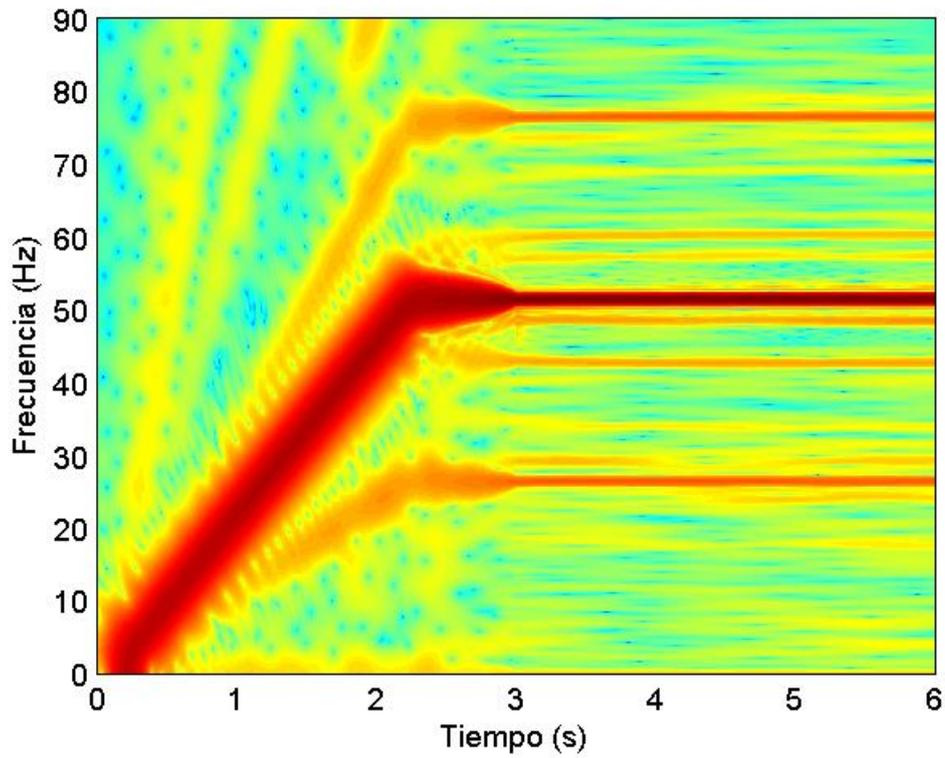


Fig. 8.17 AST de la corriente de arranque. La pendiente de las cajas utilizadas varía con el instante analizado según lo indicado en la Fig. 8.6.

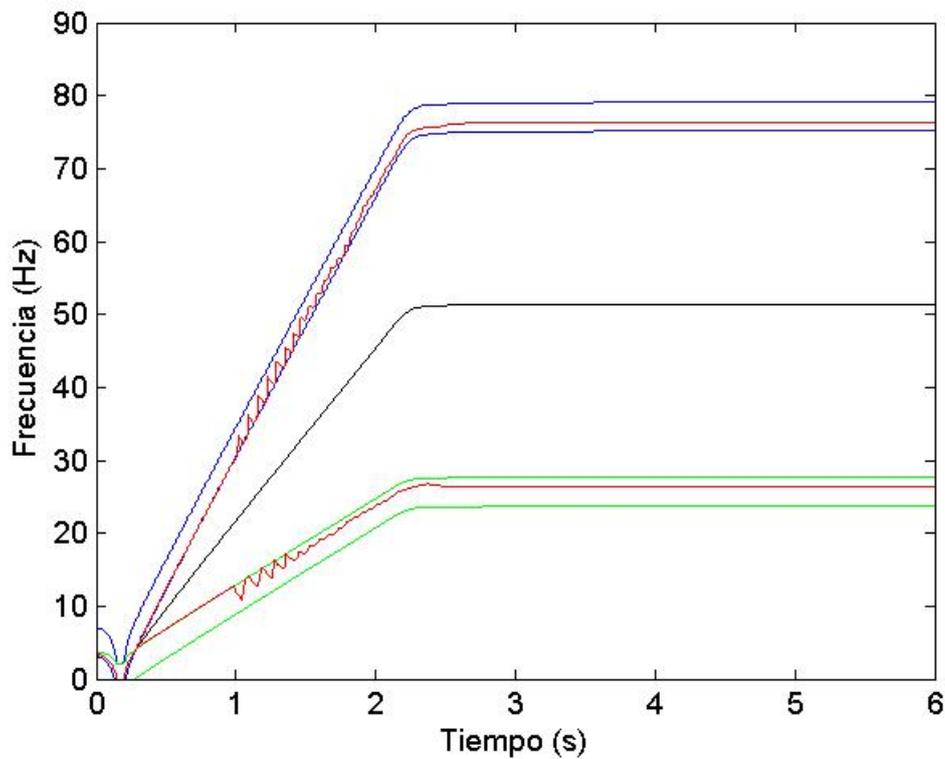


Fig. 8.18 Análisis de la corriente de arranque: Estimación de la evolución de la FC (azul), bandas de frecuencia alrededor de la frecuencia estimada de los EH (azul EH superior y verde EH inferior) y evoluciones de los EH finalmente calculadas (rojo).

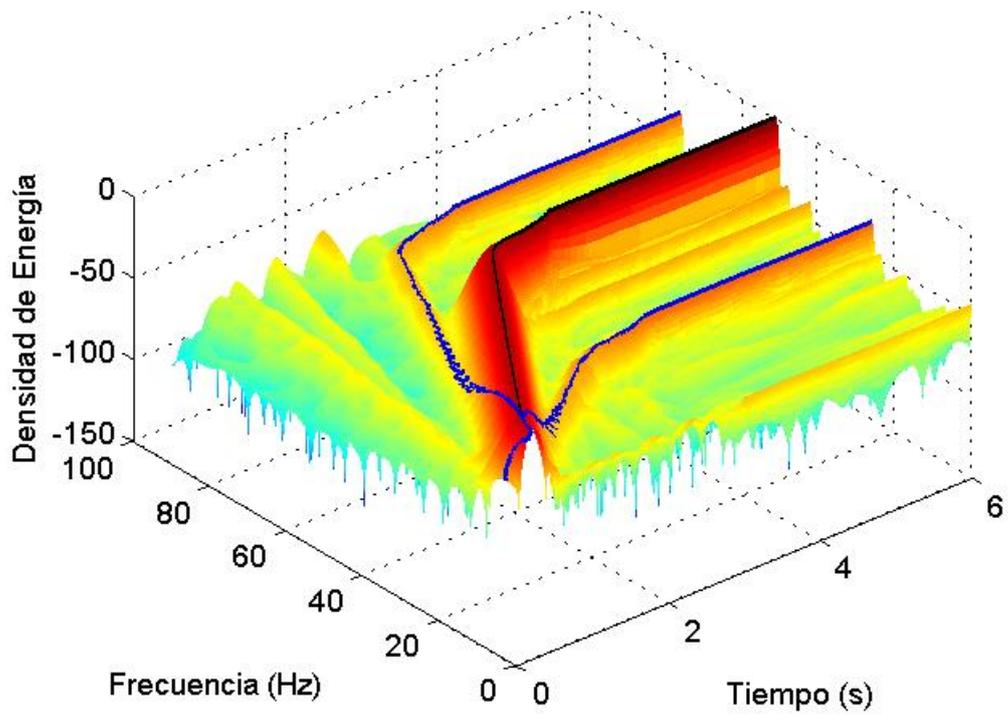


Fig. 8. 19 Visualización tridimensional del acople de los resultados de las figuras 8.17 y 8.18: localización de los puntos de la evolución temporal de los EH en la matriz que describe la densidad de energía.

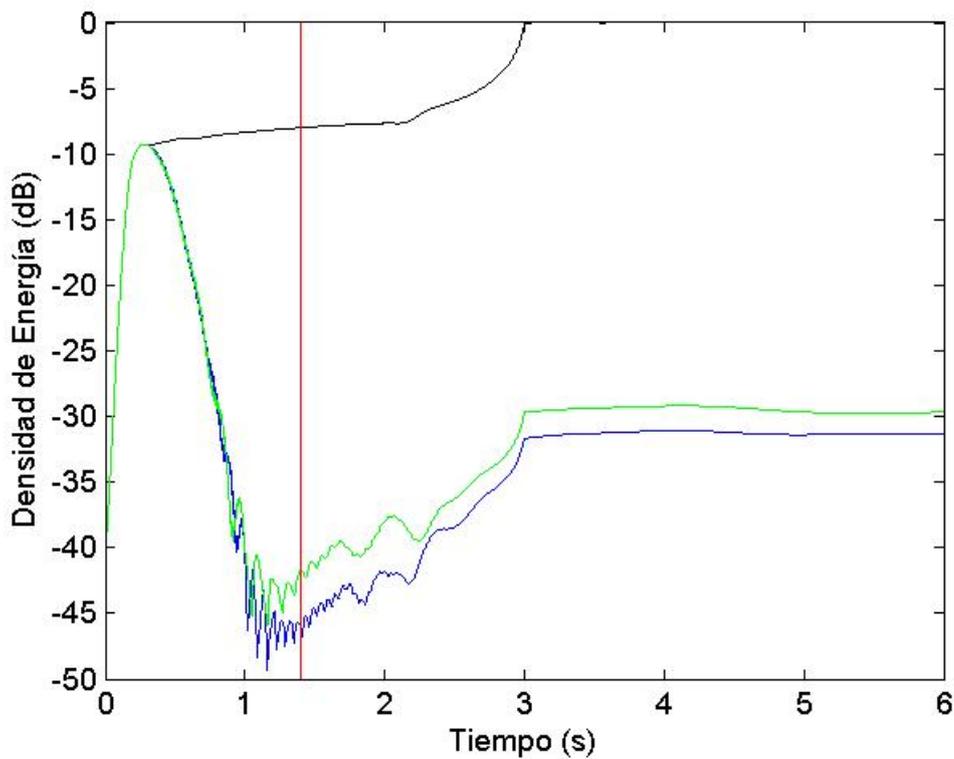


Fig. 8. 20 Análisis de la corriente de arranque: Evolución temporal de la densidad de energía vinculada al FC (negro) al EH superior (azul) y al EH inferior (verde).

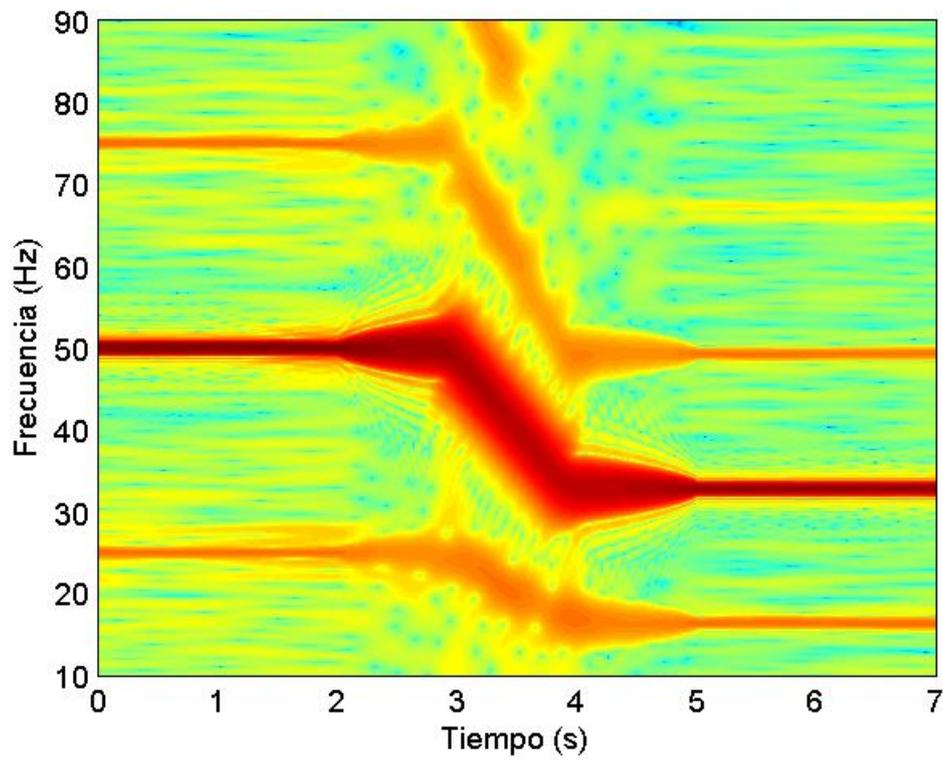


Fig. 8. 21 AST del transitorio de disminución de la frecuencia. La pendiente de las cajas utilizadas varía con el instante analizado según lo indicado en la Fig. 8.8.

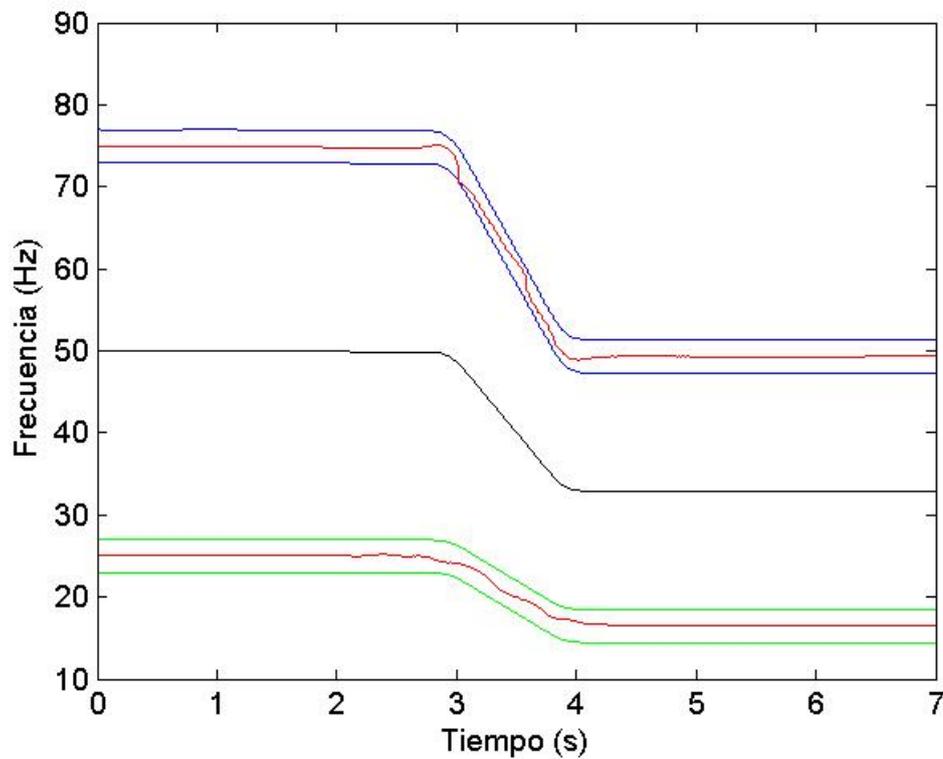


Fig. 8. 22 Análisis del transitorio de disminución de la frecuencia: Estimación de la evolución de la FC (azul), bandas de frecuencia alrededor de la frecuencia estimada de los EH (azul EH superior y verde EH inferior) y evoluciones de los EH finalmente calculadas (rojo).

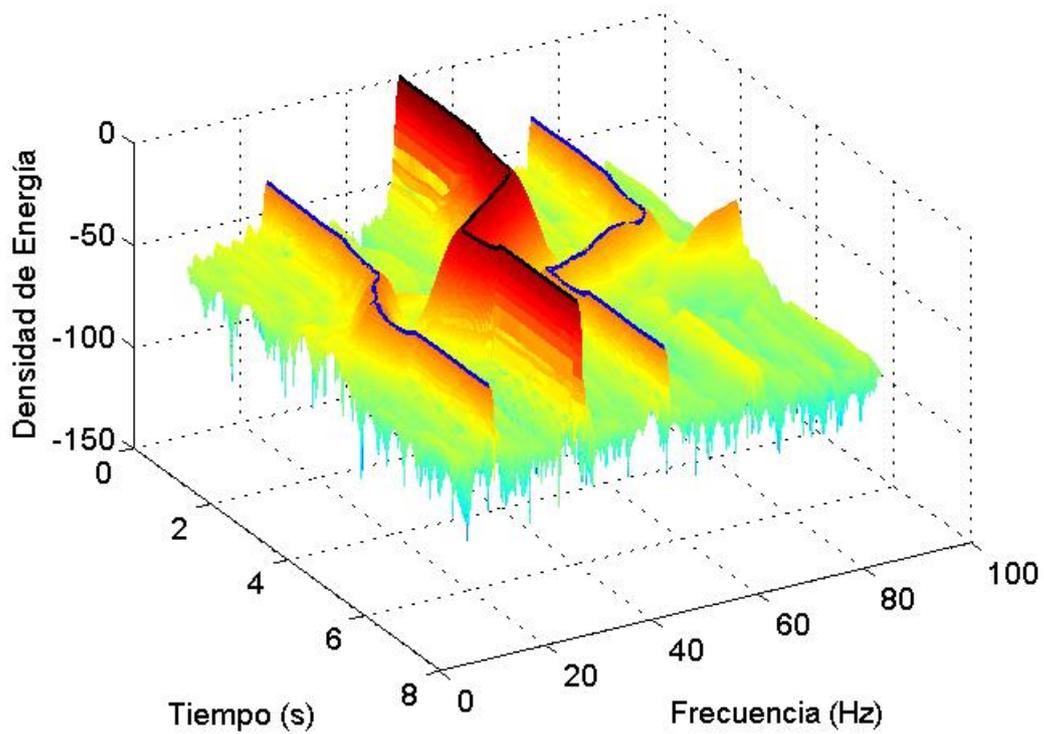


Fig. 8. 23 Visualización tridimensional del acople de los resultados de las figuras 8.21 y 8.22: localización de los puntos de la evolución temporal de los EH en la matriz que describe la densidad de energía.

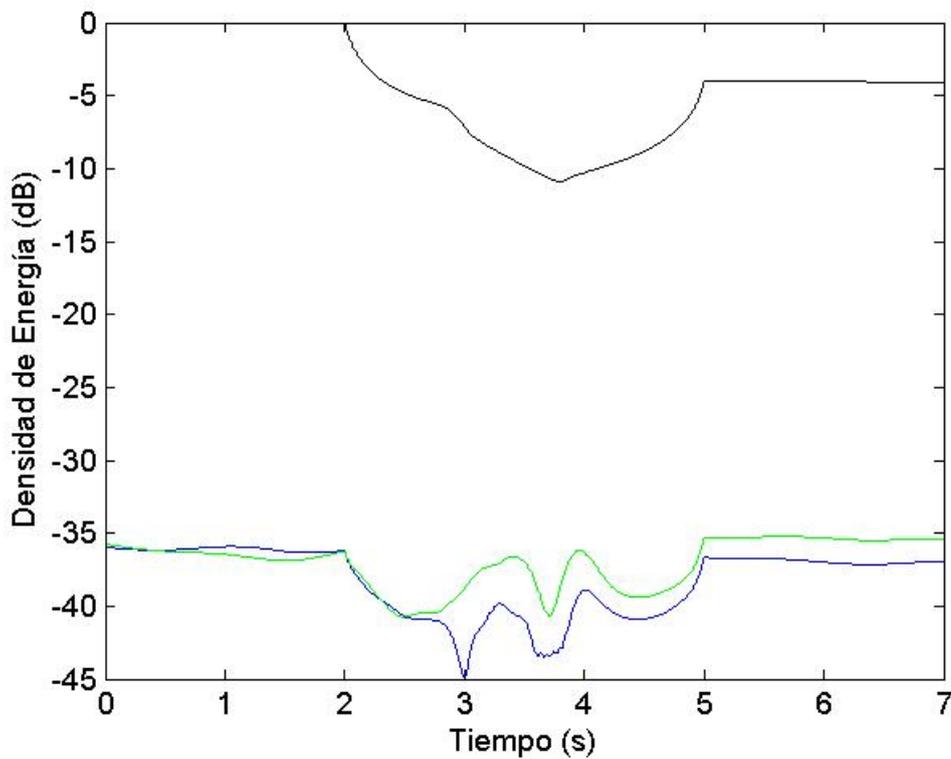


Fig. 8. 24 Análisis del transitorio de disminución de la frecuencia: Evolución temporal de la densidad de energía vinculada al FC (negro) al EH superior (azul) y al EH inferior (verde).

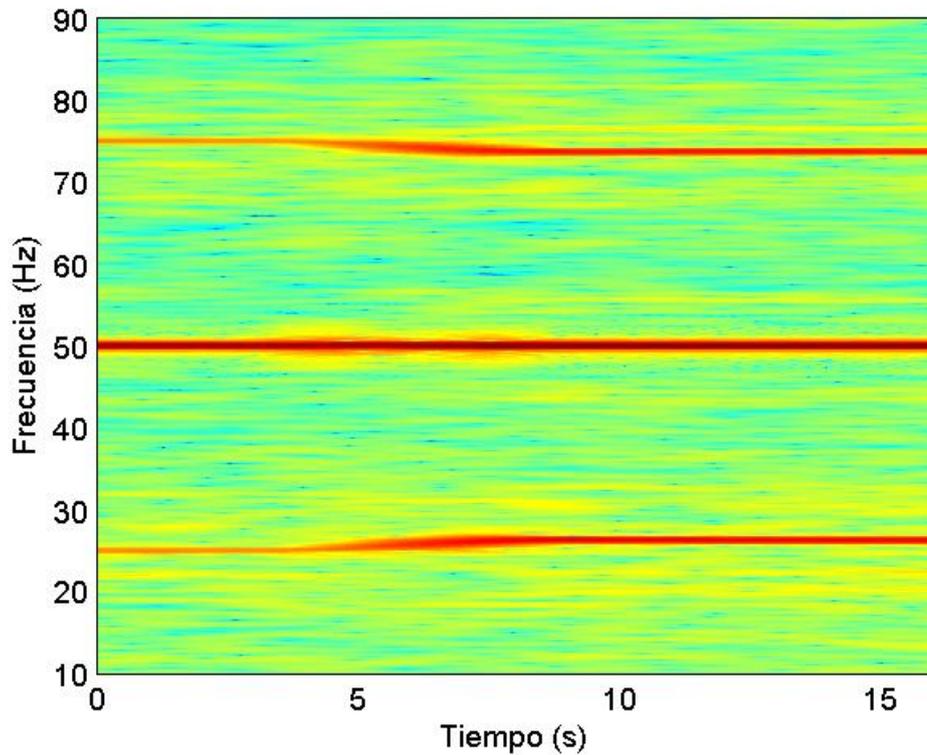


Fig. 8.25 AST del transitorio de variación de carga sin compensación del deslizamiento. La pendiente de las cajas utilizadas varía con el instante analizado según lo indicado en la Fig. 8.10.

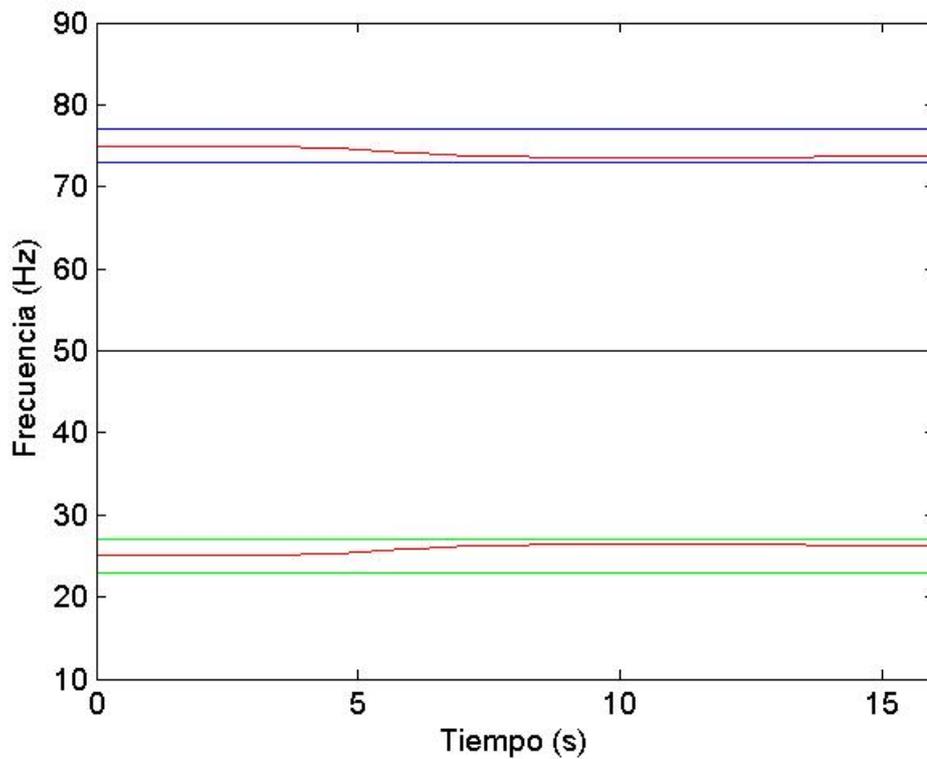


Fig. 8.26 Análisis del transitorio de variación de carga sin compensación del deslizamiento: Estimación de la evolución de la FC (azul), bandas de frecuencia alrededor de la frecuencia estimada de los EH (azul EH superior y verde EH inferior) y evoluciones de los EH finalmente calculadas (rojo).

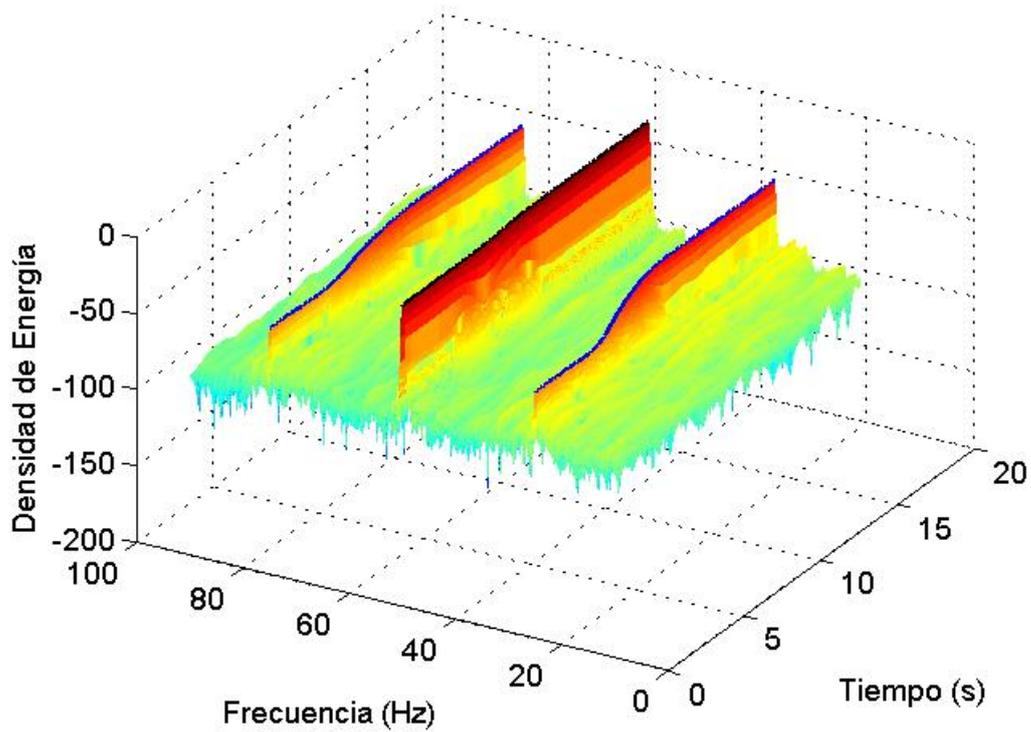


Fig. 8. 27 Visualización tridimensional del acople de los resultados de las figuras 8.25 y 8.26: localización de los puntos de la evolución temporal de los EH en la matriz que describe la densidad de energía.

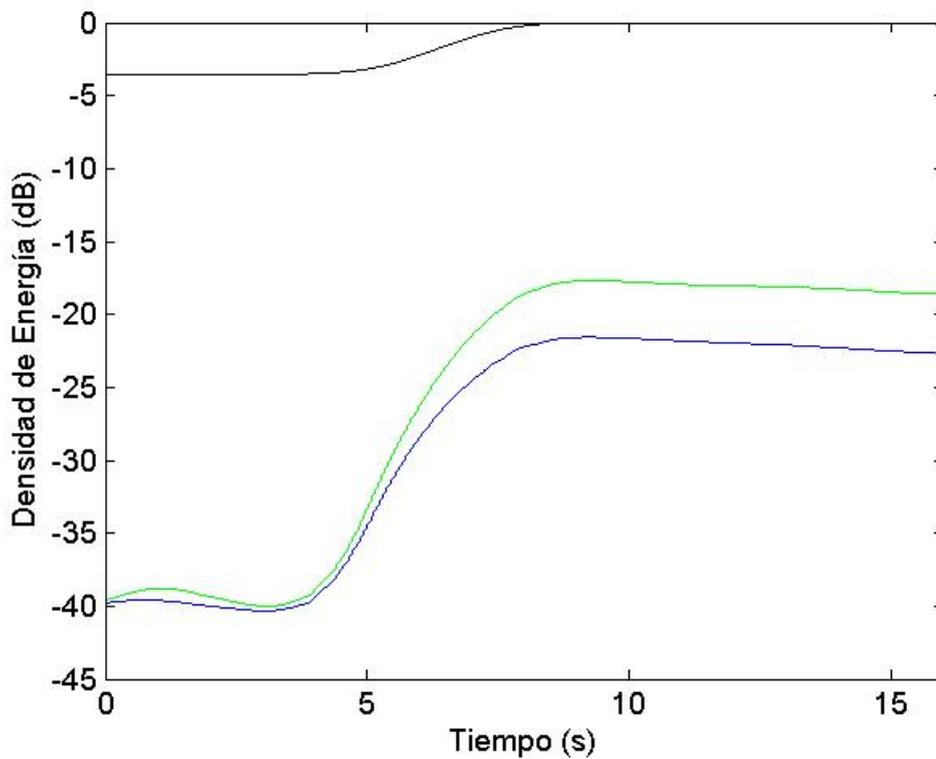


Fig. 8. 28 Análisis del transitorio de variación de carga sin compensación del deslizamiento: Evolución temporal de la densidad de energía vinculada al FC (negro) al EH superior (azul) y al EH inferior (verde).

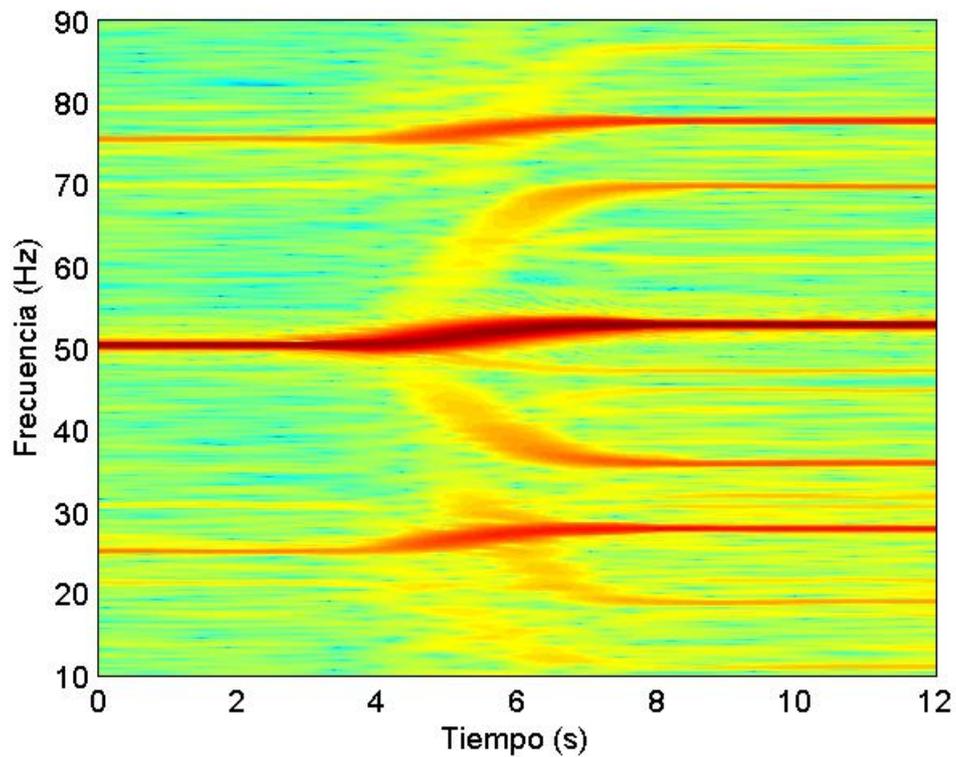


Fig. 8.29 AST del transitorio de variación de carga con compensación del deslizamiento. La pendiente de las cajas utilizadas varía con el instante analizado según lo indicado en la Fig. 8.12.

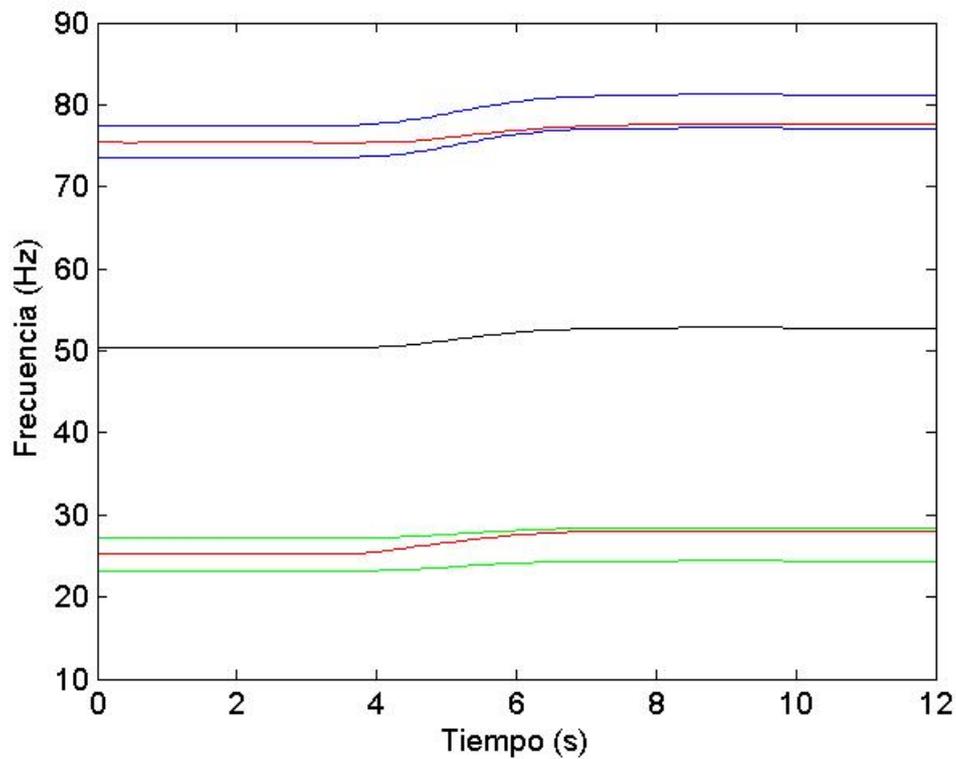


Fig. 8.30 Análisis del transitorio de variación de carga con compensación del deslizamiento: Estimación de la evolución de la FC (azul), bandas de frecuencia alrededor de la frecuencia estimada de los EH (azul EH superior y verde EH inferior) y evoluciones de los EH finalmente calculadas (rojo).

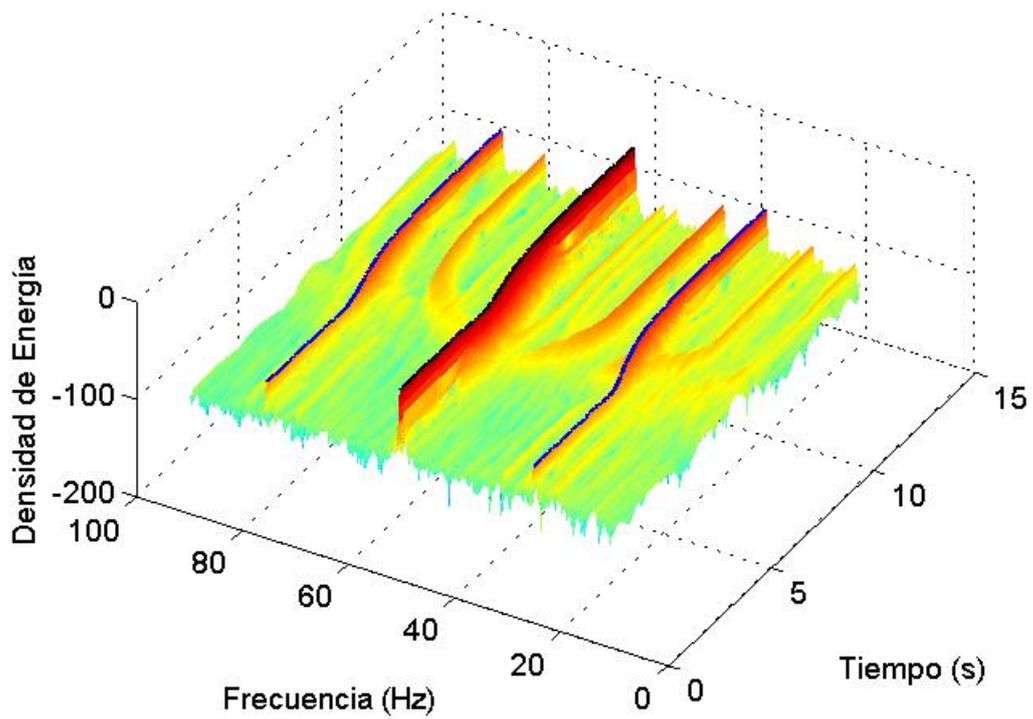


Fig. 8. 31 Visualización tridimensional del acople de los resultados de las figuras 8.29 y 8.30: localización de los puntos de la evolución temporal de los EH en la matriz que describe la densidad de energía.

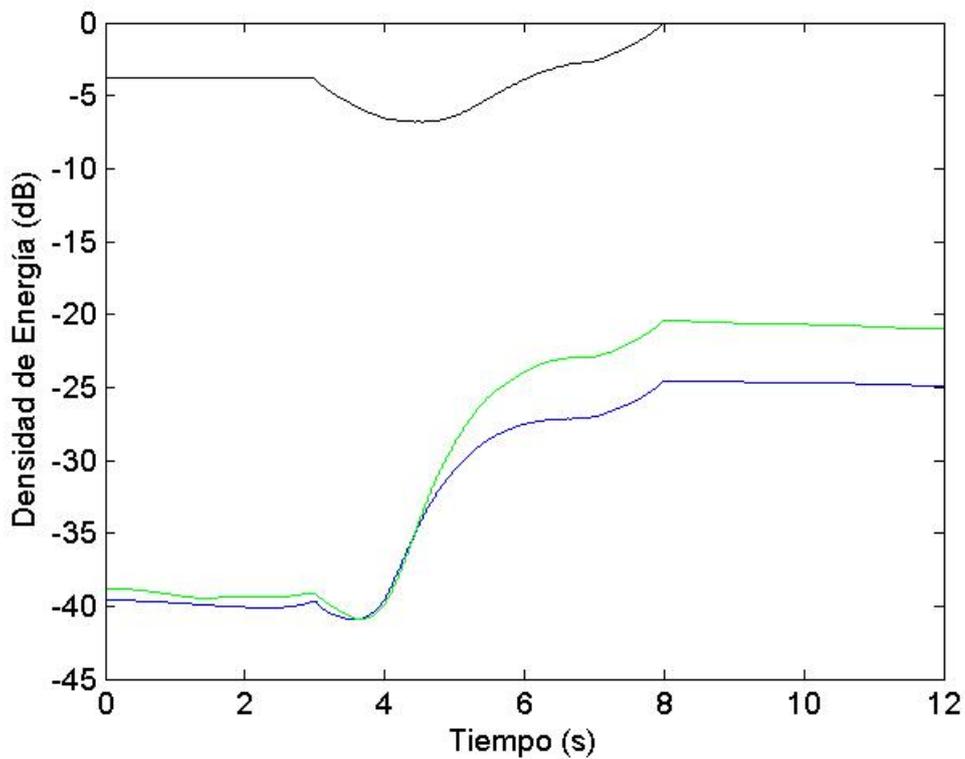


Fig. 8. 32 Análisis del transitorio de variación de carga con compensación del deslizamiento: Evolución temporal de la densidad de energía vinculada al FC (negro) al EH superior (azul) y al EH inferior (verde).

## **8.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.**

En el presente apartado se analizan los resultados obtenidos formulando un diagnóstico. En los dos párrafos siguientes se comentan a grandes rasgos los resultados. Seguidamente se analizan con más detalle cada una de las evoluciones captadas y sus resultados asociados. Finalmente se extraen las conclusiones.

Así pues, en primer lugar, al estudiar el resultado relativo al análisis de la corriente en régimen permanente (Fig. 8.13), no se observa ninguna de las dos componentes principales provocadas por la excentricidad. Esta ausencia también se refleja de forma cuantitativa al considerar la media de la densidad de energía asociada a dichas componentes, pues el resultado obtenido es el propio de un cierto nivel de ruido: 58.04 dB en el caso de E1+ y 59.08 dB en el caso de E1-. Se concluye que, según la metodología, el motor está sano. El resultado del diagnóstico es correcto, pues esta corriente se tomó con el motor desacoplado de la carga, sin ningún tipo de excentricidad creada. Por tanto se puede concluir además que la excentricidad inherente del motor analizado es prácticamente nula.

Por otra parte, en los resultados relativos a las cuatro corrientes transitorias restantes analizadas (figuras 8.17, 8.21, 8.25 y 8.29), se observa, aparte de la evolución de la FC, las evoluciones de las dos componentes principales causadas por la excentricidad, lo cual indica que dicha avería se encuentra presente en el motor. Al mismo tiempo, se ha cuantificado su presencia al calcular el valor medio de la densidad de energía a lo largo de las trayectorias de E1+ y de E1-, mostrándose los resultados en la tabla 8.1. Todos los resultados indican un elevado nivel energético asociado a E1+ y E1-, con una diferencia mínima con el caso sano de 20 dB. Con respecto a estas cuatro corrientes transitorias, el resultado del diagnóstico es también correcto, pues han sido capturadas creando una excentricidad en el motor.

### **8.3.1.- Corriente en régimen permanente.**

El resultado de aplicar la metodología a la corriente en régimen permanente se muestra en las figuras 8.13 a 8.16. En la Fig. 8.13 tan solo se observa la trayectoria de la FC, cuya frecuencia es constante, lo cual es normal pues el motor se encuentra funcionando en régimen permanente. Se han utilizado cajas de Heisenberg de muy poca pendiente, obteniendo una gran resolución en frecuencia, lo cual permite observar con precisión la frecuencia de la FC: 53 Hz. Por otra parte, en la banda de frecuencia analizada, las únicas componentes que pueden aparecer aparte de la FC son las provocadas por fallos como los EH vinculados a la excentricidad. Como no aparecen en el resultado, se puede concluir que el motor está sano.

No obstante, la metodología se aplica completa, trazándose en la Fig. 8.14 la estimación de la evolución de la FC (negro), así como las bandas de frecuencia que contienen la evolución de los EH en caso de estar presentes en la corriente (azul y verde). Evidentemente, como los EH no se encuentran presentes en la señal, la hipotética estimación final de su evolución trazada en rojo, está en realidad vinculada a los puntos con mayor nivel de ruido dentro de las respectivas bandas.

Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por un inversor.

En la Fig. 8.15 se observa la evolución de la FC en tres dimensiones, con una densidad de energía mucho mayor que el resto de puntos del plano, estando las evoluciones de los EH vinculadas a un determinado nivel de ruido.

Finalmente, la evolución de la densidad de energía de la FC, trazada en negro en la Fig. 8.16, se confunde con el eje de abscisas, pues al aplicar escala logarítmica y tratarse del máximo valor en todo instante, su densidad de energía asociada es de 0 dB en todo instante. Por otra parte, las densidades de energía asociadas a los hipotéticos EH (verde y azul), se encuentran alrededor de 60 dB, oscilando en función del nivel de ruido en cada instante considerado.

### **8.3.2.- Corriente de arranque.**

En la Fig. 8.17, resultado de analizar la corriente de arranque, se observan las trayectorias de la FC y los EH. Las evoluciones captadas son exactamente las que se esperaban plasmadas en la Fig. 8.5. Además, al iniciarse el régimen permanente se pueden ver un conjunto de componentes próximas a la FC evolucionando paralelamente a ella. Dichas componentes son introducidas por el inversor debido a que la compensación del deslizamiento se encuentra activada.

Por otra parte, se observa claramente el efecto que produce sobre los resultados el cambio en las dimensiones de las cajas de Heisenberg utilizadas. Durante el aumento de la frecuencia asignada, las cajas tienen una pendiente igual a la de la FC, capturando su energía de la mejor forma posible. Sin embargo, dicha pendiente es demasiado elevada para analizar el régimen permanente. Así pues en 2.2 segundos, cuando ha terminado el arranque, la pendiente de la caja decrece, y por tanto la banda de frecuencia en la que se extiende la presencia de la FC disminuye hasta alcanzar una buena localización en frecuencia. En definitiva, la componente refleja su presencia sobre el plano entre 2.2 y 3 segundos en forma de cuña, debido a que a medida que avanza el tiempo, la pendiente de la caja utilizada disminuye, aumentando la resolución en frecuencia, disminuyendo por tanto el ancho de banda en frecuencia que ocupa la componente. Esto permite determinar con precisión la frecuencia de la FC, resultando ser ligeramente superior a 50 Hz como consecuencia de que la compensación del deslizamiento se encuentra activada. Idénticos comentarios se pueden realizar respecto a la captación de las evoluciones de los EH. Si se hubiera utilizado por ejemplo la STFT, podríamos captar bien el arranque y tener muy mala resolución en frecuencia durante el régimen permanente, o captar muy bien la frecuencia durante el permanente y emborronar por completo la información durante el arranque.

Con respecto a la estimación final de las evoluciones de los EH mostradas en la Fig. 8.18, se observa cómo, hasta pasados los primeros 1.5 segundos no se captan adecuadamente, pues los EH se encuentran demasiado cerca de la FC, solapándose y confundiéndose con ella: es por ello que los máximos locales calculados durante estos primeros instantes, los cuales deberían estar asociados a las evoluciones de los EH, se encuentran en los extremos de las respectivas bandas, lo más próximos posibles a la evolución de la FC, vinculados a esta última. En la Fig. 8.17 es a partir del primer segundo que se empiezan a observar los EH, pero hasta llegar a 1.4 segundos el algoritmo de cálculo de máximos locales aplicado para obtener la estimación final de las evoluciones obtiene resultados asociados al FC. Esto mismo se observa muy bien en la Fig. 8.19 (donde se han acoplado en 3D los resultados de las figuras 8.17 y 8.18): las

evoluciones de los EH al principio se solapan con la evolución de la FC, siendo las densidades de energía asociadas significativas de la FC y no de los EH. En el resto de puntos, donde los máximos calculados sí están asociados a la presencia de los EH, los resultados se encuentran más cerca del FC debido a que en funcionamiento motor la frecuencia de deslizamiento es ligeramente superior a cero, desplazando la estimación final con respecto a la inicial del centro de la banda hacia la FC.

En la Fig. 8.19, aparte de los 1.4 primeros segundos, la metodología obtiene adecuadamente las evoluciones de las densidades de energía asociadas a la FC y los EH, representadas a su vez en 2D en la Fig. 8.20. En esta última figura se observa la evolución de la densidad de energía de la FC (negro). Durante los primeros 0.2 segundos, la corriente es todavía muy baja y la densidad de energía tiene valores propios de un nivel de ruido. Durante el arranque, (entre 0.2 y 2.2 segundos), la densidad de energía de la FC es relativamente constante, con una ligera pendiente ascendente. Cuando termina el arranque a los 2.2 segundos y se empiezan a cambiar las dimensiones de las cajas utilizadas, la densidad de energía aumenta pues la caja adquiere una forma más adecuada para capturar la energía de la componente. Una vez se ha terminado ese proceso transitorio de cambio de las dimensiones de las cajas, concretamente a los 3 segundos, la densidad de energía se estabiliza en un determinado valor, el máximo obtenido al calcular la transformada, y que por tanto tiene asignado en escala logarítmica el valor de 0 dB.

Por otra parte, la densidad de energía de los EH durante los primeros 1.4 segundos, marcados por una línea vertical roja, está más asociada a la presencia del FC que a la suya (lo cual se observa muy bien en la Fig. 8.19). Una vez terminados estos primeros instantes, existen unas ciertas oscilaciones durante el arranque, y una vez pasados los primeros 2.2 segundos, hay una tendencia ascendente debido al cambio en la pendiente de las cajas, estabilizándose al llegar a 3 segundos, siendo la densidad de energía de  $E1-$  un tanto superior. Los valores medios de las funciones azul ( $E1+$ ) y verde ( $E1-$ ) representadas en la Fig. 8.20 descartando los primeros 1.4 segundos son (tal y como se indica en la Tabla 8.1): 34.43 dB y 32.29 dB respectivamente.

### **8.3.3.- Transitorio de variación de la frecuencia.**

El ensayo en el que se ha disminuido la frecuencia asignada desde 50 hasta 32.9 Hz se ha realizado sin compensar la variación del deslizamiento. Es por ello que en el resultado correspondiente (Fig. 8.21), se observan las evoluciones de la FC y los EH, pero no hay ninguna otra componente introducida por el inversor. Estas evoluciones obtenidas son las previstas en la Fig. 8.7.

Tal y como se ha explicado, se han tomado cajas propias de un análisis en régimen permanente hasta los 2 primeros segundos y después de los 5 (Fig. 8.8). Entre 2 y tres hay una evolución creciente de la pendiente, adaptándose para obtener adecuadamente la evolución durante la disminución de la frecuencia. Es por ello que se observa cómo se pierde paulatinamente la resolución en frecuencia y tanto la FC como los EH ocupan una banda de frecuencia de amplitud mayor alrededor de su frecuencia real. Seguidamente se capta la disminución de la frecuencia, capturando la energía de las componentes de forma óptima, y a partir de los 3 segundos se recupera la resolución en frecuencia adecuada para volver a analizar las evoluciones horizontales. Si se hubiera utilizado la STFT, se podrían haber captado las frecuencias en permanente con elevada

precisión pero emborronando la trayectoria con frecuencia decreciente o se podría haber obtenido adecuadamente dicha disminución de frecuencia renunciando a la resolución durante los permanentes anterior y posterior.

En la Fig. 8.22 se observan trazadas de color rojo la estimación final de las evoluciones de los EH, las cuales se encuentran prácticamente en el centro de la banda de frecuencia considerada inicialmente pues el motor está poco cargado y en estas condiciones el suponer frecuencia de deslizamiento nula resulta muy aproximado. Al acoplar este resultado con el mostrado en la Fig. 8.21 trazando ambos en 3D se obtiene la Fig. 8.23. Aquí se observa que la estimación final de las evoluciones de los EH debe ser muy precisa para obtener correctamente su densidad de energía asociada pues a poco que aparezca una desviación, en vez de medir su densidad de energía se mide el nivel de ruido.

Finalmente, en la Fig. 8.24 se aprecian las evoluciones de las densidades de energía de las tres componentes consideradas. En el caso de la FC, al principio, cuando la frecuencia asignada es 50 Hz, su densidad de energía asociada es máxima, tomando por tanto un valor de 0 dB. Cuando la pendiente de la caja empieza a aumentar para captar la variación de frecuencia, la densidad de energía no se captura en permanente de forma óptima y ésta desciende (intervalo entre 2 y 3 segundos). Seguidamente (entre 3 y 4 segundos), aunque la pendiente de las cajas utilizadas es constante, la disminución de la frecuencia asignada provoca que la amplitud de la FC sea cada vez menor y por tanto su densidad de energía asociada disminuye. Finalmente (entre 4 y 5 segundos), la pendiente de las cajas disminuye y por tanto aumenta la energía que capturan al calcular la correlación, aumentando la densidad de energía en los respectivos puntos analizados, pero estabilizándose, cuando la frecuencia fundamental es de 32.9 Hz, alrededor de un nivel menor que el que se tenía al funcionar a 50 Hz.

Finalmente, según lo que se observa en la Fig. 8.24 acerca de la evolución de la densidad de los EH, ésta no depende prácticamente de la frecuencia asignada, pues los niveles antes y después del transitorio son prácticamente los mismos. Justamente antes y después del transitorio observamos respectivamente un descenso y un ascenso de la densidad que es debido justamente al cambio en la pendiente de las cajas utilizadas. Durante el transitorio observamos unas oscilaciones de la densidad a las cuales por el momento no se les ha encontrado explicación física.

#### **8.3.4.- Variación de la carga sin compensación del deslizamiento.**

Al igual que el ensayo anterior, la presente variación de carga se ha realizado sin compensar la variación del deslizamiento. Es por ello que en el resultado correspondiente (Fig. 8.25), se observan las evoluciones de la FC y los EH, pero no hay ninguna otra componente introducida por el inversor. Por otra parte, dichas evoluciones concuerdan con la previsión realizada (Fig. 8.9), salvando las diferencias por despreciar la frecuencia de deslizamiento.

Como la pendiente de las cajas para cada instante analizado es igual a la pendiente de la FC y en este caso la FC traza una evolución completamente horizontal, las cajas utilizadas son perfectamente constantes, no solo en frecuencia sino también en el tiempo. Así pues, al aplicar el criterio utilizado en el presente capítulo a esta corriente, la transformada converge a la STFT. La FC se ha capturado de la mejor forma

## Capítulo 8.

posible, con una pendiente suficientemente reducida. Sin embargo, las evoluciones de los EH podrían haberse capturado mejor si se hubiera utilizado un criterio de asignación de pendientes que permitiera su variación también en frecuencia. Al no ser así, las variaciones de las frecuencias de los EH durante el aumento de carga se capturan con mala resolución temporal, a cambio de un tiempo de cálculo menor al que se hubiera tenido que invertir si las cajas hubiesen variado también en frecuencia.

Seguidamente, en la Fig. 8.26 observamos cómo cuando el motor está descargado los EH se encuentran en el centro de las bandas estimadas y cuando el motor se carga se desplazan hacia la FC. Finalmente, el acoplar resultados en la Fig. 8.27 nos permite trazar las evoluciones de las densidades mostradas en la Fig. 8.28. Al tratarse de la STFT, en este resultado no observamos variaciones en la densidad debidas a los cambios en las pendientes utilizadas. Simplemente observamos cómo la amplitud de las tres componentes aumenta al aumentar la carga.

### **8.3.5.- Variación de la carga con compensación del deslizamiento.**

En el resultado de este ensayo, idéntico al anterior pero con la compensación de deslizamiento activa, podemos observar (Fig. 8.29) las evoluciones de la FC, los EH y las componentes introducidas por el inversor al compensar el deslizamiento. Otra vez, las evoluciones son aproximadamente las esperadas (Fig. 8.11).

La resolución en frecuencia obtenida antes y después del transitorio es excelente, pudiendo determinar con elevada precisión la frecuencia de cada una de las componentes. Al mismo tiempo las cajas se adaptan para capturar adecuadamente los incrementos de frecuencia durante el aumento de carga. Eso sí, utilizando variación en frecuencia las cajas podrían haberse acoplado mejor a las componentes introducidas por el inversor al activar la compensación del deslizamiento, las cuales tienen pendientes más pronunciadas.

Posteriormente, en la Fig. 8.30 observamos cómo las bandas de frecuencia aumentan debido al aumento de la FC al tratar de compensar el deslizamiento. Por otra parte, el EH superior aumenta, pero en menor medida que su banda correspondiente, pues se enfrenta a dos efectos contrapuestos: el aumento de la FC que aumenta su frecuencia, y el aumento del deslizamiento que la disminuye. Estos dos mismos efectos aplicados sobre el EH inferior no son contrapuestos, por lo cual éste aumenta su frecuencia más de lo que lo hace su respectiva banda.

Al acoplar resultados en la Fig. 8.31 conseguimos trazar las densidades de energía mostradas en la Fig. 8.32. Éstas son muy parecidas a las del transitorio anterior: el aumento de carga produce aumentos en las densidades de energía de las tres componentes. Sin embargo, observamos también los cambios en la densidad medida producidos por los cambios en las pendientes utilizadas para efectuar dicha medición. Así pues, cuando la pendiente aumenta, la densidad medida en el tramo de evolución horizontal disminuye y cuando la pendiente vuelve a disminuir, la densidad medida en este mismo tramo aumenta. Estos dos efectos se superponen al del aumento de carga.

### 8.3.6.- Conclusiones del capítulo.

Como conclusión principal, la metodología de diagnóstico es capaz de detectar la presencia de un problema de excentricidad en un motor de inducción alimentado mediante un inversor, en distintas condiciones de funcionamiento transitorio, revelando las evoluciones de las dos principales componentes provocadas por este tipo de fallo, cuantificando además su densidad de energía asociada. Así pues, el diagnóstico se realiza cualitativamente a través de la inspección de la función de densidad de energía, observando claramente cómo aparecen las componentes de excentricidad al acoplar inadecuadamente el motor. También se realiza cuantitativamente, observando incrementos en las densidades de energía de como mínimo 20 dB al realizar el acople defectuoso.

La capacidad de la transformada para elegir la relación entre las resoluciones en tiempo y en frecuencia para cada punto del plano analizado permite obtener con elevada resolución las frecuencias en los pequeños tramos en régimen permanente y a la vez captar adecuadamente las evoluciones transitorias. Se ha visto cómo en algunos tramos se podría afinar el análisis permitiendo que la pendiente varíe también con la frecuencia y no solo con el tiempo, como se ha establecido al realizar los cálculos. Por otra parte, esto aumentaría el tiempo de cálculo.

Se ha validado el método para obtener la evolución temporal de la FC trabajando correctamente en transitorios muy distintos. Además, se observa cómo existe una gran correspondencia entre las evoluciones estimadas y las finalmente capturadas. Tras la experiencia adquirida, si se tiene total seguridad de que la máquina asíncrona va a trabajar como motor, las bandas de frecuencia dentro de las cuales se encuentran finalmente los EH podrían tener la estimación inicial (suponiendo frecuencia de deslizamiento nula) como uno de sus extremos (el superior para el EH superior y el inferior para el EH inferior) en vez de centrar las bandas en dicha estimación. Esto facilitaría utilizar una banda más fina o tolerar una mayor sobrecarga. Consideración inversa se debería hacer si la máquina funciona en todo momento como generador.

Al representar las densidades de energía se observan las evoluciones de las componentes principales en la corriente, además de las evoluciones de las componentes introducidas por el inversor cuando la compensación por deslizamiento se encuentra activada. Las evoluciones de las componentes de avería han podido ser capturadas perfectamente excepto durante el primer segundo de arranque, donde se solapan con la evolución de la FC, resultando imposible separarlas. La visión en 2D resulta más fácil de interpretar en los casos simples, pero en casos más complejos la visión en 3D aporta una mayor información.

Finalmente, observamos la evolución de la densidad de energía, que está conceptualmente vinculada con la amplitud instantánea de la componente. Las cajas variables permiten capturar de la mejor forma posible esta densidad, pero al mismo tiempo complican su interpretación, pues la densidad de energía medida en un punto del plano depende de la caja utilizada, lo cual se observa especialmente bien al analizar los resultados experimentales de este capítulo. Esto dificulta el poder establecer un nivel de dB que marque el límite entre el estado sano y el averiado, pues éste depende del resultado de medir las densidades de energía, no sólo de las componentes de avería, sino también de la FC, siendo estas medidas función de las cajas utilizadas y éstas a su vez

## Capítulo 8.

del transitorio capturado. Es por ello que en este sentido la metodología que en el momento actual se encuentra en un estado incipiente, habiéndose aplicado tan sólo en el contexto de la tesis, necesita ser testada hasta que la experiencia dicte normas para establecer los límites mencionados.

Con respecto al tiempo de cálculo, como los análisis se han realizado variando las pendientes con respecto al tiempo, no se ha podido utilizar la fórmula de la convolución como en el capítulo anterior. Como consecuencia, el tiempo de cálculo es mucho más elevado que el consumido por la STFT. Por ejemplo, el cálculo de la AST de la corriente capturada al disminuir la frecuencia asignada es de 24 min, mientras que el cálculo de la STFT es de 14 s si la pendiente se fija a los valores utilizados en los tramos de pequeños regímenes permanentes inicial y final, siendo de 4 s si la pendiente se fija al valor utilizado durante la disminución de la frecuencia. Se observa como el tiempo de cálculo disminuye con la pendiente: a menor pendiente, mayor tiempo de cálculo, pues el átomo correspondiente, definido en el dominio temporal, tendrá un soporte mayor y por tanto un mayor número de puntos. A pesar del incremento del tiempo de cálculo respecto a la STFT, es un tiempo reducido en comparación al que se consumiría al aplicar el método iterativo de selección de átomos del MP. Así pues, se trata de un tiempo de cálculo reducido para el tipo de resultado que la transformada genera.

En definitiva, la metodología de diagnóstico permite detectar la presencia del fallo de excentricidad en los cuatro transitorios analizados, representativos de las distintas formas de funcionamiento del motor de inducción alimentado mediante un inversor.

## **9.- Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por la red.**

En el presente capítulo se valida la capacidad de la metodología de diagnóstico desarrollada en la presente tesis para la detección de excentricidad en motores de inducción alimentados directamente desde la red y trabajando en condiciones transitorias. Para ello se analizan corrientes estatísticas de motores en distintos estados (sano y excéntrico), obtenidas mediante ensayos de laboratorio en los que los motores experimentan transitorios complejos como arranques seguidos de oscilaciones de carga. Se comprueba que la metodología es capaz de obtener las evoluciones completas de las componentes introducidas por la excentricidad, además de las introducidas por la asimetría rotórica inherente. Finalmente se cuantifica la presencia de estas componentes permitiendo obtener, de forma simultánea, un diagnóstico de alta fiabilidad de los dos tipos de averías.

El capítulo está estructurado en tres apartados. En el primer apartado se describen los montajes experimentales detallando las características de la captura de las corrientes transitorias. En el segundo apartado se aplica a cada motor a diagnosticar la metodología de diagnóstico desarrollada siguiendo la guía propuesta en 4.7. En el tercer y último apartado se analizan los resultados obtenidos, emitiendo un diagnóstico de cada motor ensayado y exponiendo las conclusiones finales.

### **9.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.**

- 9.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.
- 9.1.2.- Generación de la avería: excentricidad por rodamiento defectuoso.
- 9.1.3.- Carga arrastrada y tipos de transitorios.
- 9.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.
- 9.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.

### **9.2.- Aplicación de la metodología.**

- 9.2.1.- Captura de la corriente.
- 9.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.
- 9.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.
- 9.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.
- 9.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.
- 9.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.
- 9.2.7.- Cuantificación.

### **9.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.**

- 9.3.1.- Diagnóstico visual (cualitativo).
- 9.3.2.- Cuantificación.
- 9.3.3.- Conclusiones del capítulo.

## 9.1.- Montajes experimentales. Captura de las corrientes.

Se han realizado una serie de ensayos de laboratorio con el objetivo de validar la capacidad de la metodología de diagnóstico propuesta para detectar excentricidad en motores de inducción alimentados directamente desde la red.

La siguiente figura muestra la fotografía (superior) y el esquema eléctrico (inferior) del montaje realizado en el laboratorio. En primer lugar, las distintas máquinas son alimentadas desde distintas salidas del cuadro eléctrico mostrado a la derecha de la figura. Fundamentalmente, del cuadro parte una línea hacia el interruptor 1 y de éste al motor a ensayar conectado en triángulo, alimentándolo directamente desde una red de tensión 230 V y 50 Hz (obtenida con un autotransformador). El osciloscopio mide la corriente de fase del estator del motor a ensayar, la cual es analizada en el ordenador. El resto del montaje actúa de carga del motor a ensayar, permitiendo variar sus condiciones de funcionamiento.

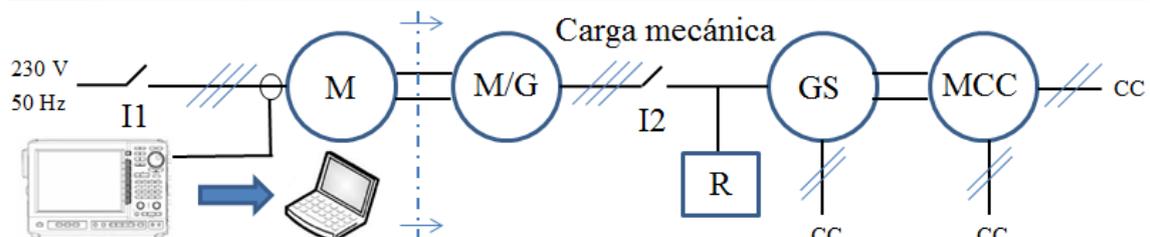
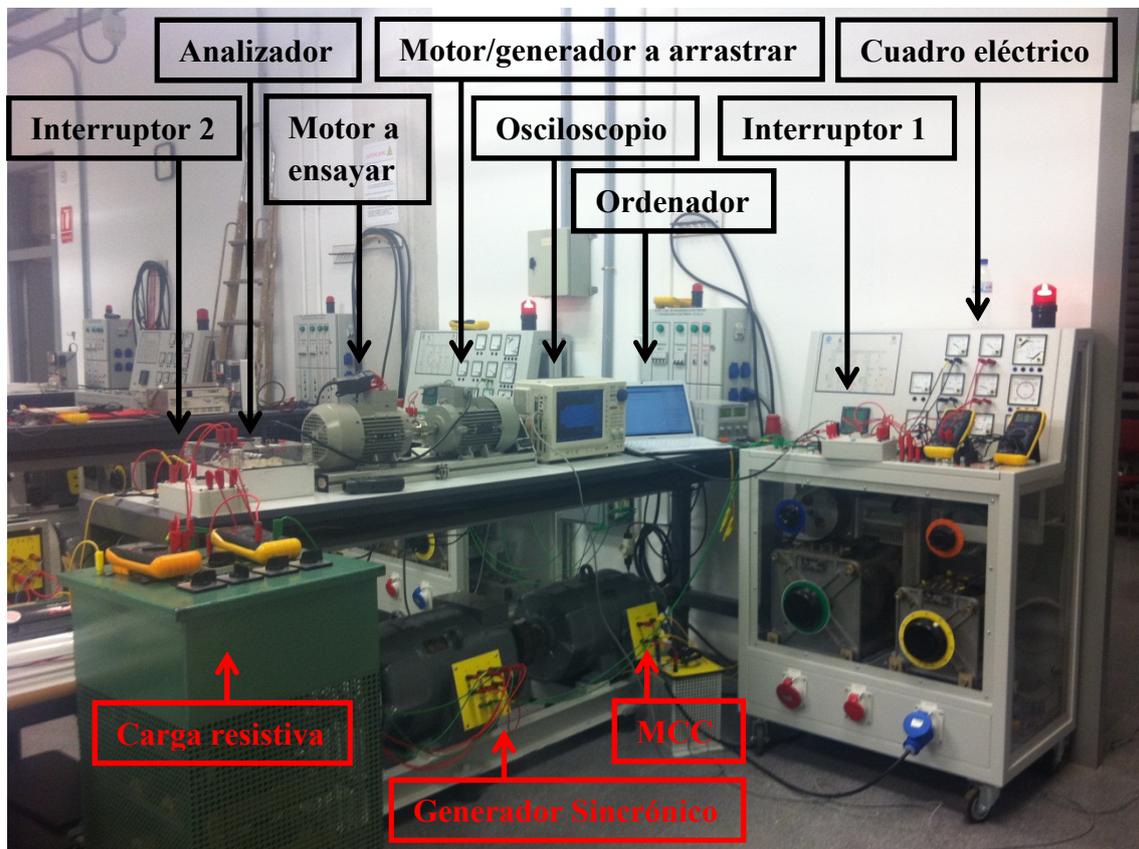


Fig. 9. 1 Fotografía (superior) y esquema eléctrico (inferior) del montaje realizado en el laboratorio.

Así pues, el motor a ensayar se encuentra a su vez acoplado a un segundo motor (motor/generador a arrastrar, de características idénticas), el cual en realidad trabaja como generador comportándose por tanto como una carga del motor ensayado. El interruptor 2 permite conectar el estator del motor/generador a arrastrar a una segunda fuente de tensión proporcionada por el estator de la máquina sincrónica situada en la parte inferior del montaje. Entre el motor/generador a arrastrar y el segundo interruptor se sitúa un analizador de redes que indica cómo trabaja este segundo motor (tensión, corriente y potencia).

Finalmente, acoplada mecánicamente a la máquina sincrónica se encuentra una máquina de corriente continua (MCC), la cual, alimentando desde el cuadro tanto su excitación como su inducido de forma independiente, funciona como motor, arrastrando a la máquina sincrónica. Desde una tercera salida de continua del cuadro se alimenta la excitación del generador sincrónico produciendo un sistema trifásico de tensiones que se inyecta a una carga resistiva situada en paralelo y al motor/generador a arrastrar al cerrar el interruptor 2 que actúa como carga del motor ensayado.

### 9.1.1.- Características principales de las máquinas ensayadas.

Las características del motor ensayado, de la red que lo alimenta y de las máquinas que proporcionan una carga al motor a ensayar (motor/generador arrastrado, máquina sincrónica, máquina de corriente continua y carga resistiva) son las siguientes:

- Red:
  - Frecuencia: 50 Hz.
  - Valor eficaz de la tensión de línea: 230 V (la tensión de línea reducida se consigue a través de un autotransformador trifásico).
- Motor ensayado:
  - Trifásico de jaula de ardilla.
  - Frecuencia: 50 Hz.
  - Potencia nominal: 1.1 kW.
  - Tensión nominal: 230/400 V (conexión en triángulo).
  - Corriente del estator nominal: 4.5/2.6 A.
  - 2 pares de polos.
  - Velocidad nominal: 1415 rpm.
  - 28 barras en el rotor.
  - Factor de potencia: 0.81.
- Carga:
  - Motor/generador arrastrado:
    - Trifásico de jaula de ardilla.
    - Frecuencia: 50 Hz.
    - Potencia nominal: 1.1 kW.
    - Tensión nominal: 230/400 V (conectado en triángulo).
    - Corriente del estator nominal: 4.4/2.55 A.
    - 2 pares de polos.
    - Velocidad nominal: 1415 rpm.
    - Factor de potencia: 0.81.
  - Máquina sincrónica:
    - Trifásica.
    - Frecuencia: 50 Hz.

## Capítulo 9.

- Potencia nominal: 5 kVA.
- Tensión nominal: 220/380 V (conectada en triángulo).
- Corriente nominal del estator: 13/7.5 A.
- 2 pares de polos.
- Velocidad nominal: 1480 rpm.
- Factor de potencia: 0.8.
- Máquina de corriente continua:
  - Potencia nominal: 5 kW.
  - Tensión y corriente nominales de la excitación: 170 V y 0.9 A.
  - Tensión y corriente nominales del inducido: 220 V y 23 A.
- Carga resistiva:
  - Carga trifásica.
  - Potencia nominal: regulable entre 500 W y 5 kW (ajustado a 1 kW).
  - Tensión nominal: 220/380 V (conectada en triángulo).
  - Corriente nominal a la potencia máxima: 7.5 A.

### **9.1.2.- Generación de la avería: excentricidad por rodamiento defectuoso.**

La aparición de un problema de excentricidad en un motor de inducción tiene muchas posibles causas [102]. La causa más directa es una asimetría en el entrehierro debido a tolerancias de manufactura, una mala colocación o montaje de las partes del motor o una degeneración de los rodamientos de bolas por problemas de fricción. También pueden causar un problema de excentricidad resonancias mecánicas propias del sistema, acople con cargas desequilibradas, un desalineamiento del eje de la carga y el eje del rotor del motor o una posible inclinación del eje del rotor.

En los ensayos realizados, la excentricidad ha sido generada cambiando los rodamientos originales por unos rodamientos nuevos, un par en estado sano para la máquina sana y un par con defecto para la máquina averiada, tal y como se muestra en las dos fotografías mostradas en la Fig. 9.2.

En la parte superior de la figura se muestra el nuevo rodamiento utilizado (a), así como su despiece en dos casquillos excéntricos exterior (b) e interior (c) además del rodamiento (d) de menor diámetro exterior y mayor diámetro interior. Las caras interna y externa del casquillo externo (b) no son concéntricas, habiendo un desplazamiento de 0.15 mm. De esta forma, el casquillo externo (b) permite el ajuste del nuevo rodamiento en el alojamiento del escudo del motor, pero provocando una excentricidad estática calibrada de 0.15 mm. Por otra parte, las caras interna y externa del casquillo interno (c) tampoco son concéntricas, habiendo un desplazamiento de 0.25 mm. De esta forma, el casquillo interno (c) permite el ajuste del eje con el nuevo rodamiento, pero provocando una excentricidad dinámica de 0.25 mm.

En definitiva, al montar el rodamiento (acoplar las piezas b, c y d formando la pieza a) y acoplarlo al eje del rotor tal y como se muestra en la parte inferior de la figura, se consigue una excentricidad estática del 30 % y dinámica del 50 % (el entrehierro es de 0.5 mm).

Diagnóstico de excentricidad cuando el motor es alimentado por la red.

A su vez, se han fabricado para el motor sano rodamientos del mismo material y con el mismo procedimiento pero sin introducir ningún tipo de defecto, de tal forma que la única diferencia entre el motor sano y el averiado es la excentricidad introducida en los casquillos interno y externo de los rodamientos montados en el motor averiado.

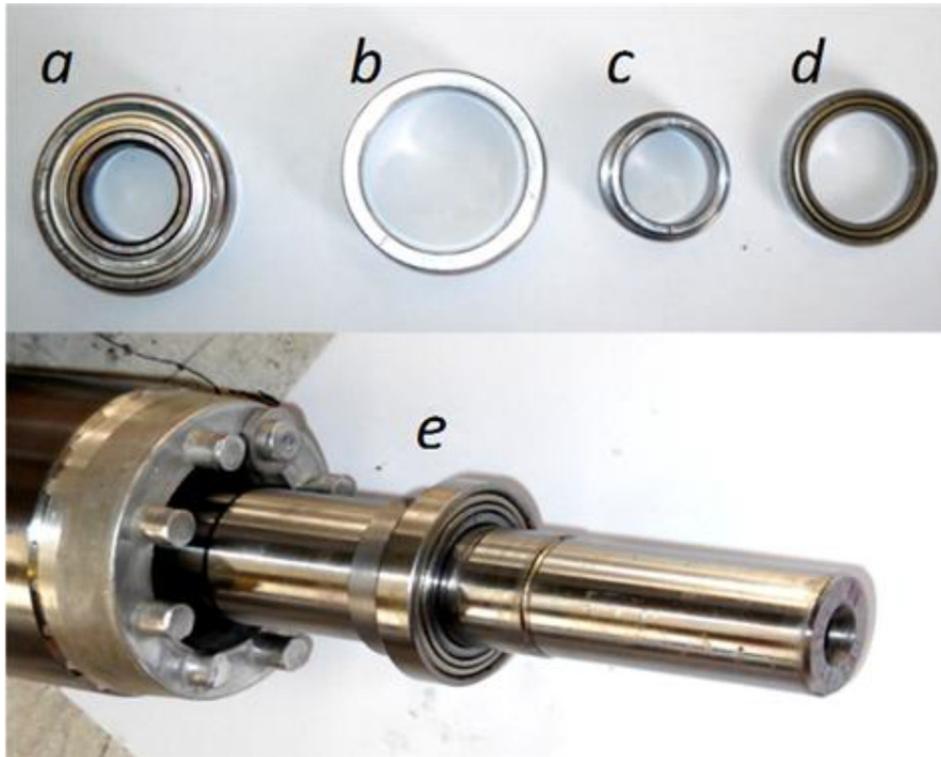


Fig. 9. 2 Superior: Rodamiento fabricado con defecto (a) y su despiece en casquillo externo (b), casquillo interno (c) y parte central (d). Inferior: Montaje del rodamiento defectuoso en el eje del rotor del motor.

### 9.1.3.- Carga arrastrada y tipos de transitorios.

Del análisis expuesto en el presente apartado se puede concluir que el transitorio capturado consiste en un arranque en vacío del motor a ensayar seguido de oscilaciones de carga. A continuación se explica cómo se genera dicho proceso transitorio.

Tal y como ya se ha comentado, el motor a ensayar se encuentra acoplado mecánicamente a otro motor idéntico (motor/generador a arrastrar), el cual funcionará como generador para poder cargar al motor a ensayar. Básicamente, si se alimenta al motor/generador arrastrado con un sistema trifásico de tensiones de frecuencia suficientemente baja como para que el campo magnético giratorio que genera el estator gire a una velocidad menor a la del rotor, entonces la máquina asíncrona de rotor de jaula trabaja como generador volcando energía al sistema que ha generado el mencionado sistema trifásico de tensiones.

Para generar dicho sistema trifásico de tensiones se dispone de un generador sincrónico cuya excitación se alimenta desde una fuente de tensión continua del cuadro eléctrico y a su vez es arrastrado por una MCC a la cual se encuentra mecánicamente acoplado y que también es alimentada desde dos fuentes de tensión continua independientes provenientes también del mismo cuadro. En definitiva, se arranca la MCC y se alimenta la excitación de la máquina sincrónica, el estator de la cual está

## Capítulo 9.

conectado a la carga resistiva y en paralelo al motor/generador a arrastrar a través del interruptor 2 el cual se encuentra en un primer momento abierto.

La tensión aplicada al inducido de la MCC se mantiene constante, mientras se regula la tensión aplicada a la excitación, lo cual permite controlar la velocidad a la que gira el generador sincrónico y por tanto la frecuencia del sistema de tensiones generado. En un inicio toda la energía generada por la máquina sincrónica es absorbida por la carga pues el motor/generador conectado en paralelo se encuentra desconectado. Se procede a regular la velocidad de giro del eje del generador (a través de la tensión aplicada a la excitación de la MCC) y la tensión aplicada a la excitación del generador (a través del autotransformador correspondiente del cuadro) hasta que la velocidad de giro es de 1500 rpm y la tensión en bornes del generador es de 230 V.

Una vez se han alcanzado dichas condiciones de funcionamiento se cierra el interruptor 1 alimentando al motor a ensayar directamente desde la red (230 V y 50 Hz). El motor arranca prácticamente en vacío, pues el motor/generador a arrastrar está desconectado (interruptor 2 abierto) y por tanto actúa como una inercia pura. Inmediatamente se cierra también el interruptor 2 y por tanto la máquina sincrónica aplica al estator del motor/generador arrastrado una tensión de 230 V y 50 Hz. Por lo tanto, cuando se cierra el interruptor 2, como sobre ambas máquinas asíncronas se aplican dos sistemas trifásicos de tensiones de características prácticamente idénticas, y además ambos se han conectado de tal forma que introducen par motor en el mismo sentido, el motor a ensayar se encuentra todavía más descargado si cabe, pues el motor/generador a arrastrar ayuda a mover la inercia del conjunto.

Para cargar el motor a ensayar basta con reducir la tensión aplicada a la excitación de la MCC, lo cual produce un descenso de la velocidad de giro del generador sincrónico y por tanto un descenso en la frecuencia del sistema de tensiones que genera. Por tanto, como la frecuencia de las tensiones aplicadas al estator del motor/generador arrastrado ha disminuido, el campo magnético que genera dicho estator gira a una velocidad menor, por debajo de la velocidad del rotor (el cual giraba en un inicio casi a 1500 rpm pues ambas máquinas asíncronas se encontraban en vacío). Como el rotor de jaula de ardilla gira más deprisa que el campo magnético generado por el motor/generador a arrastrar, esta máquina funciona como generador volcando energía a la carga resistiva conectada en paralelo con el generador sincrónico. Como consecuencia el motor a ensayar se carga, pues debe aportar exactamente la energía generada por el motor/generador que actúa como carga, además de las pérdidas. Oscilando la tensión aplicada a la excitación de la MCC provocamos las deseadas variaciones de carga sobre el motor a ensayar.

En definitiva, el transitorio capturado que se analiza consiste en un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

### **9.1.4.- Instrumentación de medida utilizada.**

En cada uno de los ensayos realizados se ha capturado la corriente de fase del estator del motor ensayado conectado en triángulo. Las corrientes han sido capturadas utilizando una pinza amperimétrica (10 A – 1 V, clase de precisión 0.5) que traslada la información de la corriente a medir a la entrada de 12 bits de un osciloscopio digital,

ajustando la frecuencia de muestreo a 5 kHz, la cual resulta más que suficiente para realizar los estudios pertinentes.

### 9.1.5.- Resumen de corrientes capturadas.

En la Fig. 9.3 se muestra una fotografía de la parte principal del montaje realizado. Se observa el motor a ensayar (izquierda), acoplado mecánicamente al motor/generador arrastrado, ambos montados sobre la misma bancada. Apoyada sobre el estator del motor a ensayar se encuentra la pinza, de color negro y rojo, abrazando un conductor en serie con una de las fases del motor, la cual a su vez se encuentra conectada a uno de los canales de 12 bits del osciloscopio. La corriente medida se descarga a través de internet al ordenador a su derecha, el cual procede al análisis detallado en los siguientes apartados. El esquema eléctrico del montaje realizado en el laboratorio se muestra en la parte inferior de la Fig. 9.1.

Resumiendo, se ha capturado la corriente de fase del estator de dos motores de inducción conectados en triángulo, el primero sano y el segundo excéntrico, y con las condiciones de funcionamiento indicadas en la Tabla 9.1. Si en la tabla se indica que el motor esta en vacío quiere decir que el interruptor 2 está abierto, sobre el motor/generador no se aplica ninguna tensión y por tanto el motor a ensayar arrastra una inercia pura. Si se indica que el motor esta en carga quiere decir que el motor/generador a arrastrar está conectado funcionando como generador y por tanto el motor arrastra una carga mecánica que opone cierto par resistente. Si se indica que el motor sufre oscilaciones de carga quiere decir que se impone al motor que actúa como carga una frecuencia fluctuante, menor de 50 Hz, con lo que se consigue que esta máquina genere un par resistente variable.

**Tabla. 9. 1 Ensayos realizados.**

Corriente	Estado	Transitorio y carga
1	Sano	Arranque en vacío y posteriores oscilaciones de carga.
2	Excéntrico	Arranque en vacío y posteriores oscilaciones de carga.

Las corrientes transitorias absorbidas por una fase del estator conectado en triángulo, capturadas con el osciloscopio, se muestran en la Fig. 9.4, mostrando en la parte superior la corriente correspondiente al motor sano (corriente 1) y en la parte inferior la corriente correspondiente al motor excéntrico (corriente 2). El arranque en vacío con tan poca inercia es tan corto que al representar la corriente completa (70 segundos de duración), no se aprecia. Se observa un pico de corriente en el instante en el que se conecta el motor/generador que actúa como carga (un poco después del arranque, antes de cumplirse los 10 primeros segundos), así como las oscilaciones de carga posteriores.

Para analizar corrientes transitorias como las capturadas se necesita una metodología de diagnóstico capaz de operar con señales no estacionarias. En el siguiente apartado se explica la aplicación de la metodología desarrollada en la presente tesis, habiendo sido programada en MatLab.

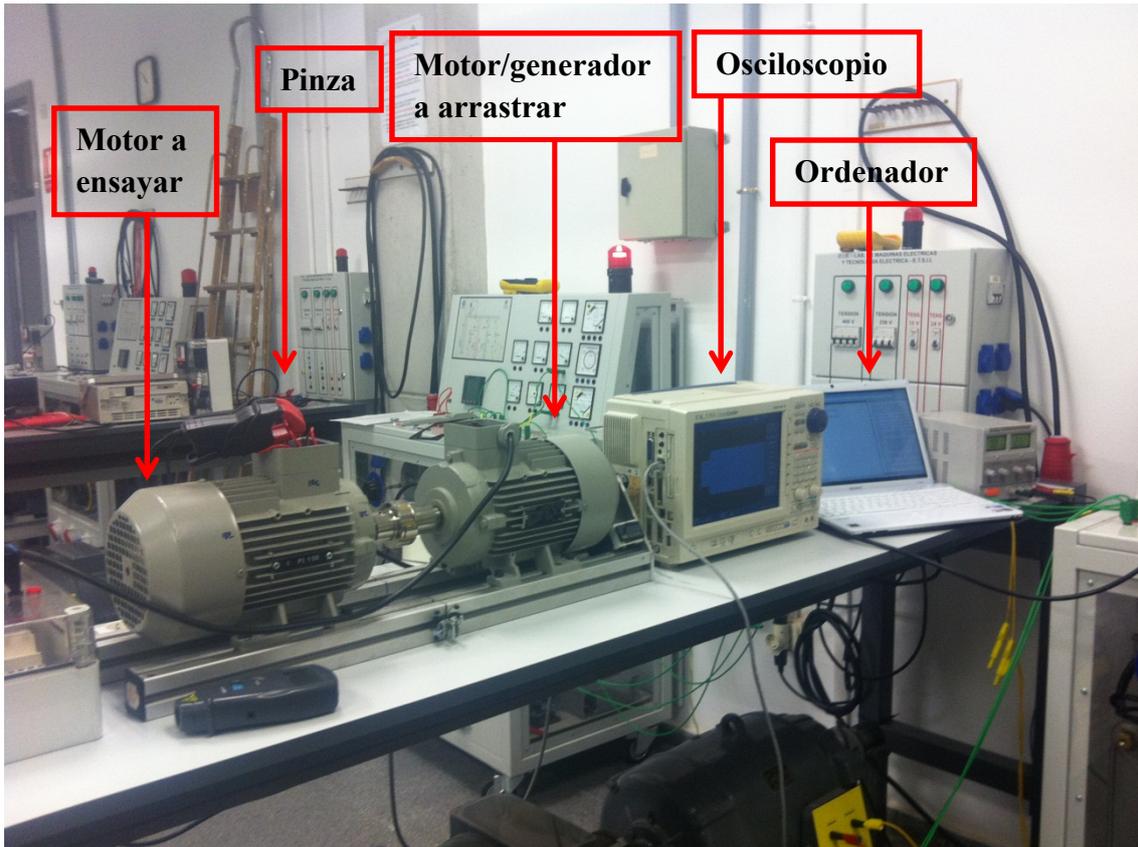


Fig. 9. 3 Fotografía de la parte fundamental del montaje realizado.

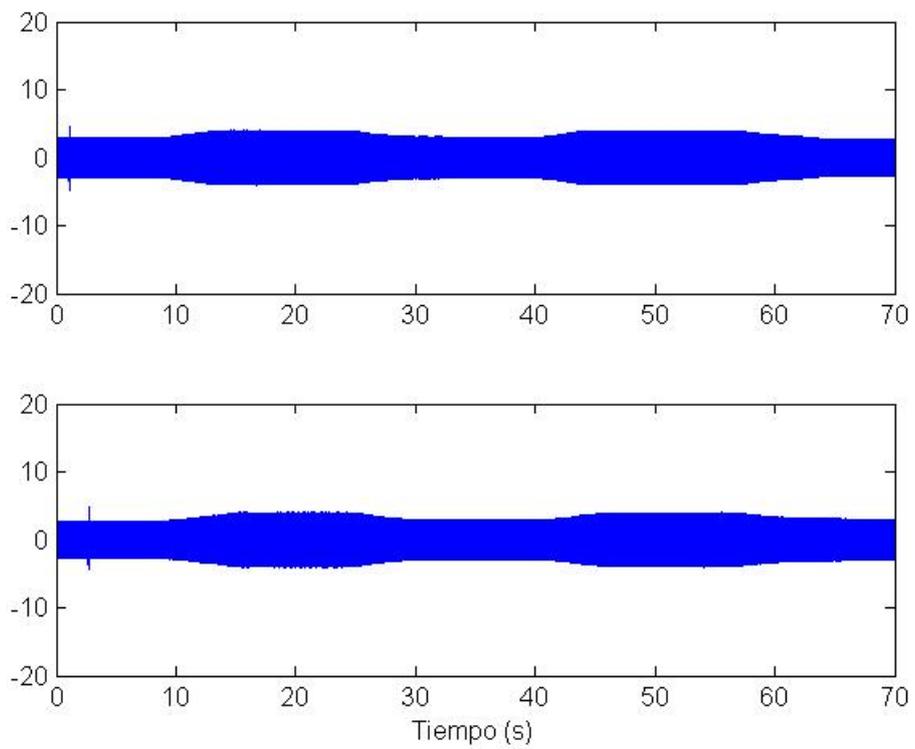


Fig. 9. 4 Corrientes de fase del estator del motor de inducción a ensayar conectado en triángulo: en estado sano (superior) y excéntrico (inferior) durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

## **9.2.- Aplicación de la metodología.**

En el presente apartado se aplica la metodología de diagnóstico desarrollada en la tesis a las señales capturadas según lo indicado en el apartado anterior, mostrando los resultados obtenidos. A tal efecto se sigue la “Guía de aplicación de la metodología de diagnóstico” presentada en el apartado 4.7, detallándose las particularidades de los análisis realizados. De especial importancia es el apartado 9.2.4, en el que se comenta la elección de las pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada caso. En el siguiente apartado (9.3) se analizan los resultados aquí obtenidos concluyendo el diagnóstico.

### **9.2.1.- Captura de la corriente.**

El primer paso para diagnosticar una máquina eléctrica utilizando la metodología desarrollada en la presente tesis es capturar una de sus corrientes. Con lo que respecta al diagnóstico de motores de inducción realizado en el presente capítulo, este primer paso ya ha sido expuesto en el punto anterior al comentar los montajes experimentales y la correspondiente captura de la corriente estatórica de cada motor en determinadas condiciones transitorias, resumidas en la Tabla 9.1.

### **9.2.2.- Estimación de las evoluciones de las componentes de averías.**

Para poder fijar las pendientes de las cajas de Heisenberg a utilizar siguiendo el criterio de la pendiente definido en 4.2, se necesita conocer las evoluciones de las componentes de avería. En este caso se procede a detectar la excentricidad y simultáneamente evaluar la asimetría inherente del motor. Cuando el motor es alimentado directamente desde la red, las evoluciones de las correspondientes componentes de avería se pueden determinar, tal y como se explica en 4.1.2 y 4.1.3, si se conoce la evolución del deslizamiento. A su vez, la evolución del deslizamiento se puede obtener fácilmente midiendo la velocidad. Sin embargo, en la presente tesis, con el objetivo de eliminar la necesidad de instalar un sensor de velocidad, se ha propuesto un método que permite obtener la evolución del deslizamiento a través de la corriente del estator capturada, incluso en presencia de averías.

El método para obtener la evolución del deslizamiento se aplica en el presente apartado a las dos corrientes capturadas enumeradas en la Tabla 9.1. Las figuras 9.8 y 9.12 muestran la estimación de las evoluciones de los SH tanto de excentricidad como de barra rota junto a la evolución de la FC, al analizar las corrientes 1 y 2 respectivamente. A continuación se encuentran las figuras restantes generadas al aplicar la metodología de diagnóstico propuesta (las cuales se comentarán más adelante). Sin embargo, para poder ilustrar la aplicación del criterio de la pendiente, se avanza el primer resultado. Concretamente, la figura 9.6 es una réplica de la Fig. 9.8 sobre la cual se apoya la explicación mostrada en el apartado 9.2.4 sobre las pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas.

En el capítulo 5 (apartado 5.2) se expone el método para la estimación de la evolución del deslizamiento, aplicándolo como ejemplo a dos corrientes. Veamos cómo, teniendo en cuenta las distintas características de los motores ensayados en el presente capítulo, se han cambiado los valores de algunas de las variables. En primer lugar, el

## Capítulo 9.

PSH de mayor amplitud en este tipo de motor es  $P1+$  en vez de  $P1-$ . Como consecuencia, la banda de frecuencia a analizar en lugar de ser  $\{0, (R/p-1) f_{FC}\}$  es  $\{0, (R/p+1) f_{FC}\}$ . Además, dos de los parámetros que determinan la evolución del PSH cambian de un tipo de motor al otro: el número de pares de polos deja de ser 1 para valer 2 ( $p = 2$ ) y el número de ranuras del rotor pasa de 20 a 28 ( $R = 28$ ). Sustituyendo en la ecuación anterior, la banda de frecuencia que cubre  $P1+$  en su evolución es  $\{0, (28/2+1) \cdot 50\} = \{0, 750\}$  Hz.

Por otra parte, recordamos que el análisis realizado en el capítulo 5 divide la evolución del PSH en dos partes: una primera zona lineal en la que se analiza parte del arranque y una segunda zona en la que se analiza el resto del arranque y las posibles oscilaciones de carga. En los dos transitorios capturados (Tabla 9.1), el arranque es extremadamente corto: tiene una duración de 0.2 s. Así pues, en primer lugar no se pueden recortar los primeros instantes del transitorio para eliminar la influencia del EB izquierdo sumado al TEM, pues como el arranque es tan corto, recortaríamos precisamente dicho arranque y no solo el EB sumado al TEM. Además, resulta muy difícil capturar la evolución del PSH en estos primeros 0.2 s pues se solapa completamente con el EB izquierdo y el TEM. Teniendo en cuenta que en estas condiciones el PSH evoluciona de forma totalmente rectilínea desde 50 hasta prácticamente 750 Hz en los 0.2 s que dura el arranque, para poder seguir su evolución y conectar con la zona de las oscilaciones de carga, se realiza una pequeña modificación: en vez de calcular la recta de aproximación se presupone una pendiente de  $700/0.2$  Hz/s (banda de frecuencia barrida durante el arranque dividida por el tiempo de arranque) y fijamos el final de la zona lineal en 740 Hz. Con esto conseguimos seguir la evolución del PSH durante un arranque tan rápido y sobre todo, conseguimos que una vez pasados los 0.2 segundos el algoritmo tenga localizado el PSH y pueda seguirlo a lo largo de las oscilaciones siguientes, que son la parte más significativa del transitorio (70 s).

La segunda zona analizada tiene como frecuencia máxima la frecuencia del PSH en régimen estacionario descargado (750 Hz) y como frecuencia mínima 600 Hz, a la cual desciende el PSH si el deslizamiento supera el 20%, lo cual es un margen suficiente. Finalmente, aunque en el capítulo 5 se realiza el cálculo de máximos locales en esta zona utilizando vectores fila de longitud un 5% de la duración del arranque, esto no tiene sentido si el arranque es muchísimo más corto que el posterior transitorio, como es el caso. Por esta razón, se han tomado vectores fila de 0.3 s para calcular máximos locales a cada frecuencia, que es precisamente la longitud que se utilizaba en los ejemplos del capítulo 5.

### 9.2.3.- Elección de la zona del plano tiempo-frecuencia a analizar.

#### Banda de frecuencia

La banda de frecuencia analizada debe cubrir la evolución completa de las componentes introducidas por la avería a detectar, en las condiciones del ensayo realizado. El presente capítulo está dedicado a la detección de excentricidades mixtas en motores de inducción alimentados directamente desde la red. Sin embargo, se procede a cuantificar también la asimetría rotórica del motor, verificando que no existen barras

rotas. De esta forma se muestra como la metodología presentada es capaz de detectar fallos dobles en un único análisis. En este capítulo nos limitaremos a realizar el seguimiento de los dos principales armónicos introducidos por cada avería: los SH, tanto de excentricidad ( $E1+$  y  $E1-$ ), como de rotura de barra ( $B1+$  y  $B1-$ ). Como las evoluciones de estas componentes han sido estimadas en el apartado anterior, basta con determinar cuáles son las frecuencias máxima y mínima alcanzadas por las componentes de avería durante el transitorio y tomar una banda de frecuencia con límites superior e inferior iguales al máximo y mínimo calculados respectivamente. Sin embargo, la experiencia diagnosticando motores puede determinar la banda de frecuencia que es necesario analizar siguiendo el siguiente razonamiento, sin necesidad de inspeccionar los resultados del apartado anterior.

Tal y como se analizó con detalle en 4.1.2 y 4.1.3, las evoluciones de estas componentes de avería cuando el motor es alimentado directamente desde la red y el deslizamiento cubre todos sus posibles valores variando de 1 a 0 son:

- $E1+$ : De  $f_{FC}$  hasta  $[1+1/p]f_{FC}$ .
- $E1-$ : De  $f_{FC}$  hasta  $[1-1/p]f_{FC}$ .
- $B1+$ : De  $3f_{FC}$  hasta  $f_{FC}$ .
- $B1-$ : De  $f_{FC}$  hasta 0 y vuelta a  $f_{FC}$ .

Siendo  $f_{FC}$  la frecuencia de la FC y  $p$  el número de pares de polos. En otras palabras, independientemente del régimen de funcionamiento, si el motor es alimentado directamente desde la red, la frecuencia de las componentes de avería a analizar se encuentra entre los límites indicados más arriba. Para cubrir la evolución completa de las componentes de avería, se debe considerar como frecuencias mínima y máxima a analizar la frecuencia mínima que puede adoptar la componente de avería de más baja frecuencia y la frecuencia máxima que puede adoptar la componente de avería de frecuencia más elevada. Tan solo hay que localizar las componentes de menor y mayor frecuencia ( $B1-$  y  $B1+$  respectivamente) y, una vez fijada la frecuencia de la FC, analizar cuáles son las mínimas y máximas frecuencias que pueden alcanzar al variar el deslizamiento (0 Hz y  $3f_{FC}$  Hz respectivamente). Por tanto, para obtener la evolución completa de dichas componentes se debería analizar la banda de frecuencia  $0-3f_{FC}$ .

Concluyendo, con el objetivo de capturar las evoluciones de los SH provocados por la excentricidad y por una rotura de barra, se debe analizar la banda de frecuencia entre 0 y  $3f_{FC}$  Hz, independientemente de las características de la máquina analizada, pues, aunque las frecuencias de las componentes de excentricidad dependen del número de pares de polos, sus evoluciones se encuentran siempre dentro de la citada banda. Sin embargo, los transitorios de arranque capturados son extremadamente cortos (0.2 segundos), pues se han producido en vacío y con baja inercia. Como en un arranque tan corto resulta complicado separar las evoluciones de los SH causados por la barra rota del EB izquierdo y el TEM, se ha renunciado a esta parte, lo cual permite limitar la banda de frecuencia de tal forma que comprenda las evoluciones de los armónicos durante las oscilaciones de carga. Durante estas oscilaciones los SH de barra rota se encuentran cerca del FC y los de excentricidad se encuentran, el superior ligeramente por debajo de  $[1+1/p]f_{FC}$  y el inferior ligeramente por encima de  $[1-1/p]f_{FC}$ . Por

## Capítulo 9.

tanto, resulta suficiente analizar una banda ligeramente más ancha a la comprendida entre  $[1-1/p]f_{FC}$  y  $[1+1/p]f_{FC}$  (lo cual por otra parte incluye el arranque de los SH de excentricidad).

En definitiva, teniendo en cuenta que la máquina ensayada es de dos pares de polos y que los ensayos han sido realizados con una tensión de frecuencia fundamental igual a 50 Hz, la banda de frecuencia finalmente analizada es 15-85 Hz (10 Hz por encima y 10 Hz por debajo de lo estrictamente necesario).

### Intervalo de tiempo

En todos los análisis realizados en el presente capítulo se ha tenido en cuenta el transitorio capturado en su totalidad. Sin embargo, una vez efectuado el análisis, a la hora de cuantificar se han recortado las partes inicial y final para evitar los EB izquierdo y derecho así como el TEM.

### 9.2.4.- Selección de la familia de átomos tiempo-frecuencia.

#### Diccionario de partida

El siguiente paso es el de seleccionar la familia de átomos tiempo-frecuencia con los cuales se correlacionará la corriente capturada. Recordamos que el conjunto de átomos posibles a utilizar para calcular la transformada (es decir, el diccionario) es el formado por las Frequency B-Splines de parámetro entero  $m = 2$ . Una vez seleccionadas las FBS finalmente a utilizar, estas funciones se recortan temporalmente para reducir el tiempo de cálculo según un parámetro de precisión  $x = 10.13 \%$ , tal y como se explica en el apartado 6.5.

#### Matriz de átomos.

Tal y como se explica en el apartado de la guía de aplicación relativo al presente paso (4.7.4), el conjunto de puntos del plano tiempo-frecuencia en los cuales se calculará la correlación forman una matriz donde cada columna se asocia a un instante de tiempo muestreado al capturar la señal a analizar, y cada fila se asocia a una frecuencia analizada, siendo el número de frecuencias analizadas suficientemente elevado y encontrándose uniformemente distribuidas sobre la banda de frecuencia a estudiar.

Concretamente, para observar la representación de la densidad de energía, resulta suficiente considerar 200 frecuencias uniformemente distribuidas en la banda de frecuencia a analizar; para obtener una cuantificación de máxima calidad hace falta considerar aproximadamente 1000 frecuencias cada 50 Hz analizados. En el presente apartado se han tomado 1000 frecuencias a lo largo de la banda 15-85 Hz.

Tal y como se observa en (4.45), para fijar una FBS debemos especificar el punto del plano en el que se encuentra centrada y su ancho de banda. Los puntos del plano han quedado definidos al definir la matriz. La pendiente utilizada en cada uno de dichos puntos se especifica en el siguiente apartado, la cual permitirá calcular el ancho de banda utilizando (4.46).

### Pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas.

Recordemos en primer lugar el criterio de la pendiente (definido en el apartado 4.2), el cual permite determinar las dimensiones de las cajas de Heisenberg a utilizar. Si se quiere capturar la evolución de una componente en un determinado punto del plano tiempo-frecuencia, se toma un átomo centrado en dicho punto. Seguidamente, el criterio de la pendiente (ilustrado en la Fig. 4.12, la cual se repite a continuación en la Fig. 9.5, para comodidad del lector), indica que, la pendiente de la caja de Heisenberg del átomo debe ser igual a la pendiente de la evolución de la componente a detectar en el punto del plano en el cual el átomo se encuentra centrado.

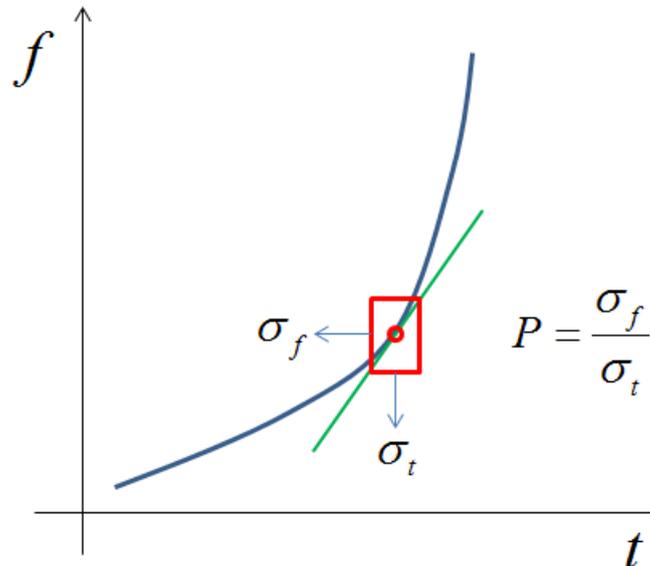


Fig. 9. 5 Criterio de la pendiente: la pendiente de la caja de Heisenberg en un punto es igual a la de la tangente a la evolución en dicho punto de la componente que se quiere detectar.

Como el objetivo final es el diagnóstico de la máquina eléctrica, resulta prioritario detectar las componentes producidas por la avería. Es por ello que, tras capturar la corriente, el primer paso para aplicar la metodología es estimar la evolución de dichas componentes, tal y como se ha comentado en el subapartado 9.2.2. Conociendo la evolución se conoce la pendiente de dicha evolución en cada uno de los puntos del plano por los que pasa y por tanto, aplicando el criterio de la pendiente se conoce también la pendiente que las cajas deben tener en cada uno de estos puntos.

En los capítulos anteriores no se aplicó el criterio de la pendiente de forma estricta. En el capítulo 7 se justifica que puede resultar suficiente considerar la variación de la pendiente solo con la frecuencia considerada, lo cual permite calcular las correlaciones como un conjunto de convoluciones, disminuyendo el tiempo de cálculo pero renunciando a la mejor resolución posible. Para analizar las corrientes relativas al capítulo 8 hace falta que la pendiente varíe con el tiempo, aumentando el tiempo de cálculo con respecto al caso anterior, pero sin que sea necesario que varíen también en frecuencia. Por otra parte, en ambos capítulos se establecen criterios adicionales para definir la pendiente a utilizar, especialmente en los puntos del plano por los que no evoluciona ninguna componente. En definitiva, se ha renunciado a aplicar de forma estricta el criterio de la pendiente, permitiendo realizar los cálculos en tiempos más reducidos.

## Capítulo 9.

Finalmente, en el presente capítulo se utilizan átomos cuya pendiente varía arbitrariamente a lo largo del plano (tanto en tiempo como en frecuencia), de tal forma que el criterio de la pendiente se aplica de forma estricta, obteniendo los mejores resultados posibles a costa de un mayor tiempo de cálculo. Faltaría determinar la pendiente en los puntos donde no encontramos ninguna componente. Veamos cómo se ha resuelto este interrogante con un ejemplo. La Fig. 9.6 muestra la estimación de las evoluciones de los SH de excentricidad y rotura de barra, además de la evolución de la componente fundamental, en el caso de la corriente 1 perteneciente al motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga. A su vez, la Fig. 9.7 muestra las pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada punto del plano tiempo-frecuencia para analizar la corriente 1.

En los puntos del plano por los que evolucionan las componentes de avería, la pendiente de las cajas utilizadas debe ser igual a la pendiente de dichas componentes. Como se puede ver en la Fig. 9.6 hay básicamente cuatro tipos de pendientes. En primer lugar, cuando la pendiente es cero, tal y como ocurre cuando la evolución es horizontal (e.g., a lo largo de la trayectoria de la FC), la pendiente de la caja no puede ser cero, pues esto implica una pérdida total de resolución temporal, convirtiéndose la correlación en el cálculo de la FFT a la frecuencia correspondiente. Por tanto, hay que seleccionar una pendiente suficientemente baja como para capturar adecuadamente la evolución de la componente, pero no tanto como para que la resolución temporal descienda excesivamente, pudiendo emborronar el resultado. Por otra parte, teniendo en cuenta que salvo durante el arranque las pendientes en el resto de puntos no son excesivamente elevadas, se puede seleccionar una pendiente muy reducida que permita el mejor filtrado posible sin que esto implique cambios de pendiente muy bruscos al analizar puntos vecinos. En definitiva, la pendiente adecuada para analizar los tramos de trayectorias horizontales es:  $P = 0.1 \text{ Hz/s}$ .

Con lo que respecta a los cambios en la frecuencia, hay que tener en cuenta que si la frecuencia de un SH aumenta, entonces la del SH gemelo disminuye con la misma pendiente. Por tanto, la pendiente necesaria para analizar un SH en un instante de tiempo es la misma que se necesita para analizar su gemelo en ese mismo instante. Por otra parte, los cuatro procesos de variación de carga que se observan se han producido a un ritmo de cambio constante siendo además el mismo en los cuatro procesos. Por tanto, para una determinada componente, la pendiente de su evolución en los tramos de cambio es siempre la misma e igual a la de su SH gemelo. Concretamente, la pendiente necesaria para analizar los puntos en los que la frecuencia de los SH de excentricidad cambia es:  $P = 0.25 \text{ Hz/s}$ . La pendiente necesaria para analizar los puntos en los que la frecuencia de los SH de barra rota cambia es:  $P = 0.75 \text{ Hz/s}$ .

En tercer lugar, para que al pasar de analizar tramos horizontales a incrementos o decrementos de frecuencia, la variación de la pendiente utilizada no sea demasiado brusca, al igual que en el capítulo 8 la pendiente utilizada se empieza a cambiar linealmente con el tiempo, incrementándola unos instantes antes de llegar a los puntos de cambio de frecuencia en la evolución. De esta forma se consigue obtener una función de densidad de energía tiempo-frecuencia suave, sin cambios bruscos como los que introduciría realizar cambios bruscos en las pendientes utilizadas.

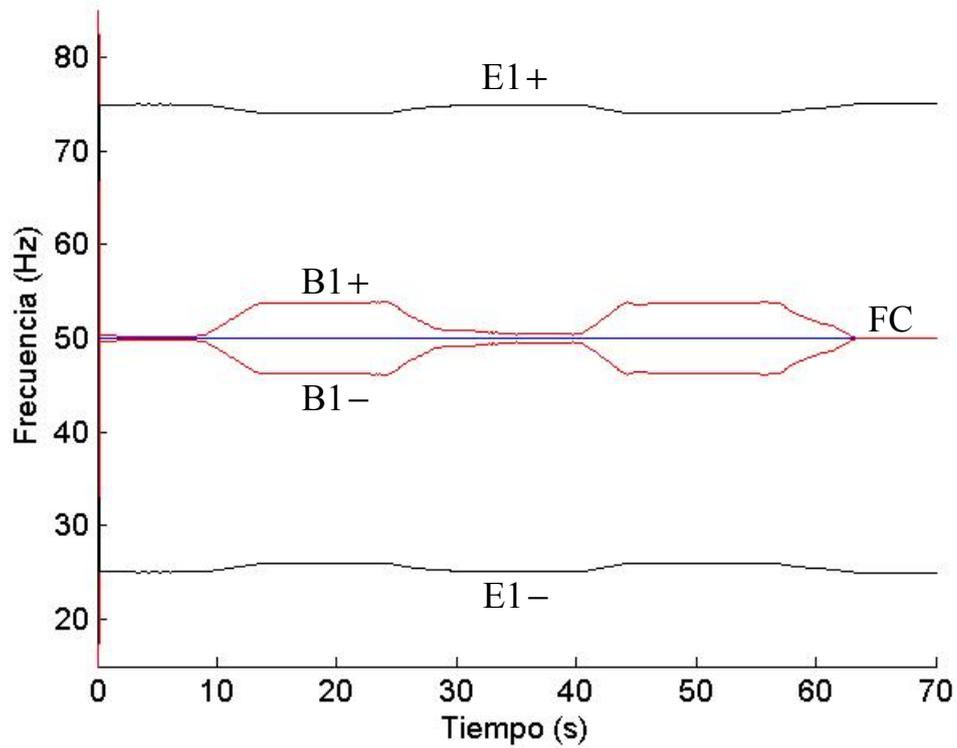


Fig. 9. 6 Corriente 1 (motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga): estimación de las evoluciones de los SH de excentricidad y rotura de barra y de la componente fundamental.

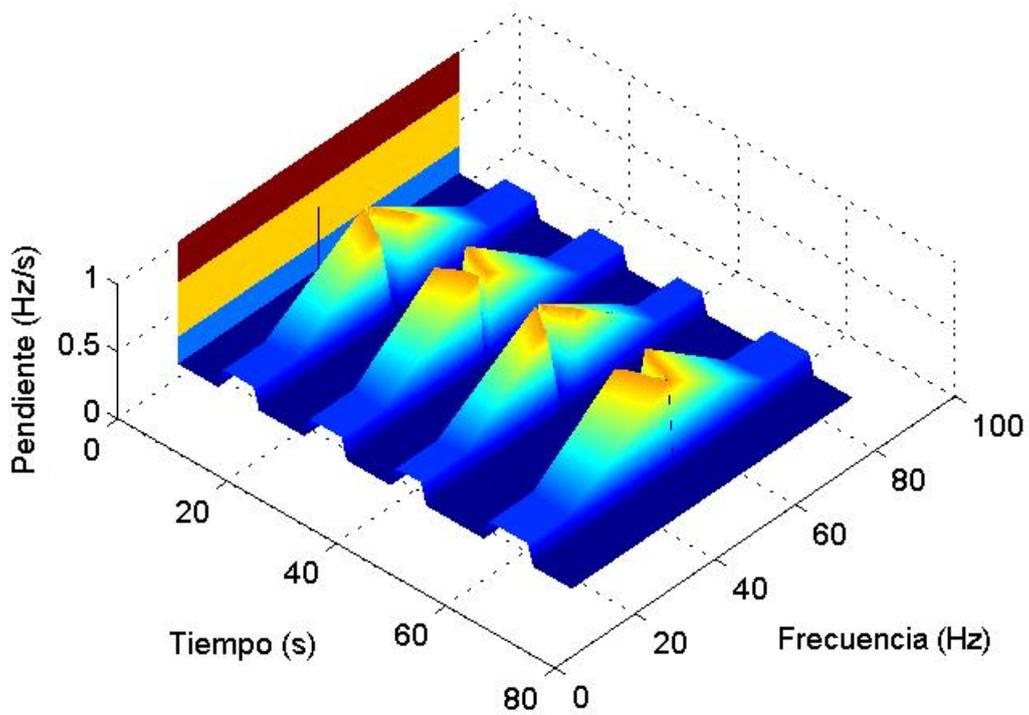


Fig. 9. 7 Corriente 1 (motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga): pendientes de las cajas de Heisenberg utilizadas en cada punto del plano tiempo-frecuencia.

Finalmente, una vez se ha definido la pendiente a lo largo de las evoluciones de cada una de las cinco componentes consideradas (SH de excentricidad, SH de barra rota y FC), tan solo falta definir la pendiente en cada uno de los puntos restantes del plano donde no existe ninguna componente que detectar. Al igual que en el paso anterior, el criterio es el de obtener una función de densidad suave. Así pues, para cada instante de tiempo...

- Las frecuencias por debajo de la frecuencia del SH inferior de excentricidad se analizan con la misma pendiente utilizada para analizar este primer SH.
- Las frecuencias comprendidas entre el SH inferior de excentricidad y el SH inferior de barra rota se analizan con pendientes que evolucionan linealmente con la frecuencia analizada, partiendo de la necesaria para analizar el SH inferior de excentricidad y terminando en la necesaria para analizar el SH inferior de barra rota.
- Las frecuencias comprendidas entre cualquier otro par de componentes se analizan procediendo de forma análoga al caso anterior, evolucionando linealmente con la frecuencia desde la pendiente necesaria a la frecuencia de la primera componente hasta la pendiente necesaria a la frecuencia de la segunda componente.
- Las frecuencias por encima de la frecuencia del SH superior de excentricidad se analizan con la misma pendiente utilizada para analizar dicha componente.

Finalmente, los primeros 0.2 s pertenecientes al arranque, para no complicar el análisis y teniendo en cuenta que es una parte insignificante en comparación con la totalidad del transitorio, se analizan con pendientes  $P=1$  Hz/s. En definitiva, las pendientes utilizadas en cada punto del plano se muestran en la Fig. 9.7.

### 9.2.5.- Cálculo y representación gráfica de la función de densidad tiempo-frecuencia.

Una vez fijada la familia de átomos tiempo-frecuencia, el siguiente paso es calcular la correlación habitual entre los elementos de la familia y la señal a analizar, así como las densidades de energía en cada punto del plano analizado:

$$\langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi_{t_c, f_c}^*(t) dt \rightarrow \rho_h(t_c, f_c) = \left| \langle h, \psi_{t_c, f_c} \rangle \right|^2 \quad (9.1)$$

Como los átomos de la familia están centrados en una matriz de puntos en el plano tiempo-frecuencia, al aplicar (9.2) obtenemos como resultado una matriz de densidades de energía. Las densidades de energía obtenidas se representan en 2D en el plano tiempo-frecuencia localizando los puntos de la matriz de resultados que contienen los valores máximo y mínimo, asignándoles respectivamente los dos extremos de una determinada escala de colores, para proceder seguidamente a asignar colores intermedios al resto de resultados en función de sus valores relativos a dichos extremos. Concretamente, la escala de colores utilizada es la escala 'jet' de MatLab y se han considerado 1024 colores. Por otra parte, para poder observar mejor las evoluciones de las componentes de menor amplitud, mejorando la visualización de los resultados obtenidos, se ha aplicado escala logarítmica. El resultado de analizar las dos corrientes son las figuras 9.9 y 9.13. Para cada figura mencionada, la figura anterior corresponde,

tal y como ya se ha indicado anteriormente, a la estimación de las evoluciones de los SH de excentricidad (negro), los SH de rotura de barra (rojo) y la FC (azul). Por otra parte, las dos figuras posteriores corresponden respectivamente, tal y como se explica en el apartado 9.2.7 destinado a la cuantificación, al seguimiento de la densidad de energía de cada uno de las componentes consideradas y a la evolución de la densidad de energía de los SH de excentricidad y de la FC.

### 9.2.6.- Aplicación de técnicas de mejora de la visualización.

Las figuras obtenidas en el apartado anterior se han generado utilizando escala logarítmica. Por lo demás, evitando alargar demasiado el capítulo, en el presente apartado no se utilizan otras de las técnicas propuestas en la tesis para mejorar la visualización, pues aplicando escala logarítmica ya se observan claramente las evoluciones de las componentes. Sin embargo, podría resultar interesante utilizar distintas referencias a cada frecuencia analizada o aplicar compresión.

### 9.2.7.- Cuantificación.

Para cuantificar tanto la excentricidad como la asimetría rotórica del motor cuya corriente del estator se analiza, se ha utilizado el método expuesto en el apartado 4.6.1. Este consiste básicamente en acoplar el resultado de estimar las evoluciones de las componentes de avería con el resultado de calcular las densidades de energía. En otras palabras, se localizan los puntos de la evolución temporal de los SH, tanto de excentricidad como de rotura de barra, en la matriz que describe la densidad de energía. En este caso se ha localizado también la evolución de la densidad de energía de la FC. La aplicación de este paso a las dos corrientes analizadas se muestra en las figuras 9.10 y 9.14.

Seguidamente, prescindiendo de la información frecuencial, se obtiene para cada instante de tiempo, la densidad de energía a lo largo de la evolución de cada componente. En primera instancia se muestran tan solo la evolución de la densidad de los SH de excentricidad (negro) y de la FC (azul) para cada corriente analizada: figuras 9.11 y 9.15.

Finalmente, las medias de las evoluciones de dichas densidades son los índices que se utilizan para cuantificar la presencia de la avería, desechando como ya se ha comentado los extremos evitando incluir los EB. La Tabla 9.1 muestra las medias de las densidades para cada componente (columna) de cada máquina analizada (fila, marcando de color rojo la máquina con excentricidad), además de la diferencia entre ambas corrientes en el caso de los SH de excentricidad (tercera fila).

**Tabla. 9. 1 Índices que cuantifican la presencia de las componentes vinculadas a la avería (columnas), para cada una de las corrientes capturadas (filas).**

Componente	E1- (dB)	E1+ (dB)	B1- (dB)	B1+ (dB)
Corriente				
1	-57	-56	-62	-62
2	-33	-43	-77	-66
2 - 1	24	13		

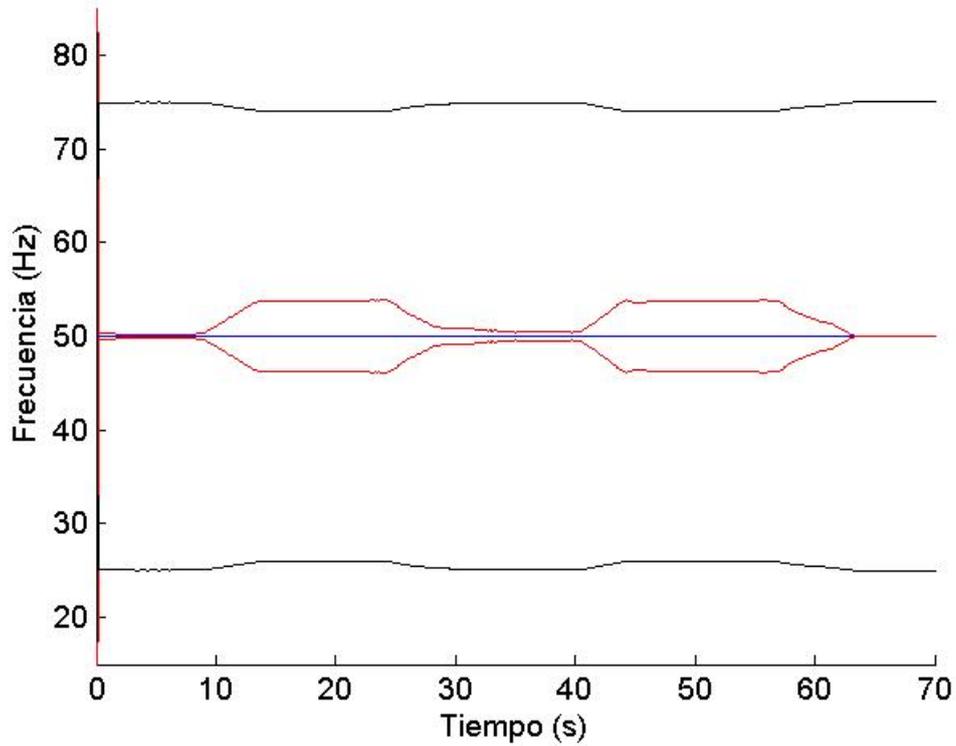


Fig. 9. 8 Corriente 1 (motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga): estimación de las evoluciones de la FC (azul) y de los SH tanto de excentricidad (negro) como de rotura de barra (rojo).

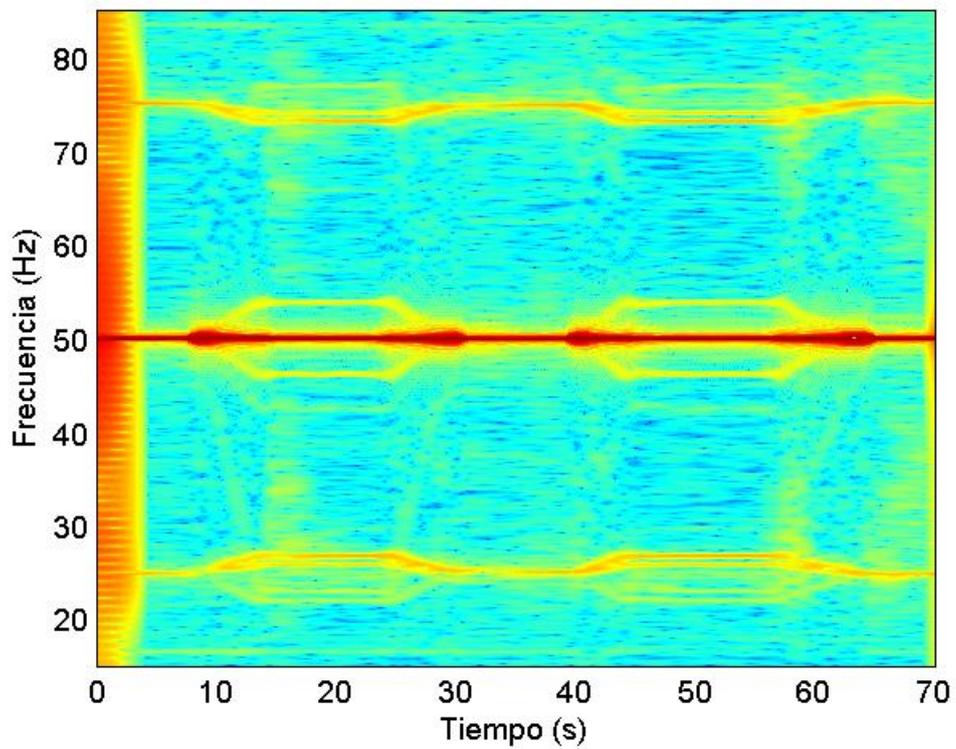


Fig. 9. 9 AST de la corriente 1: motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

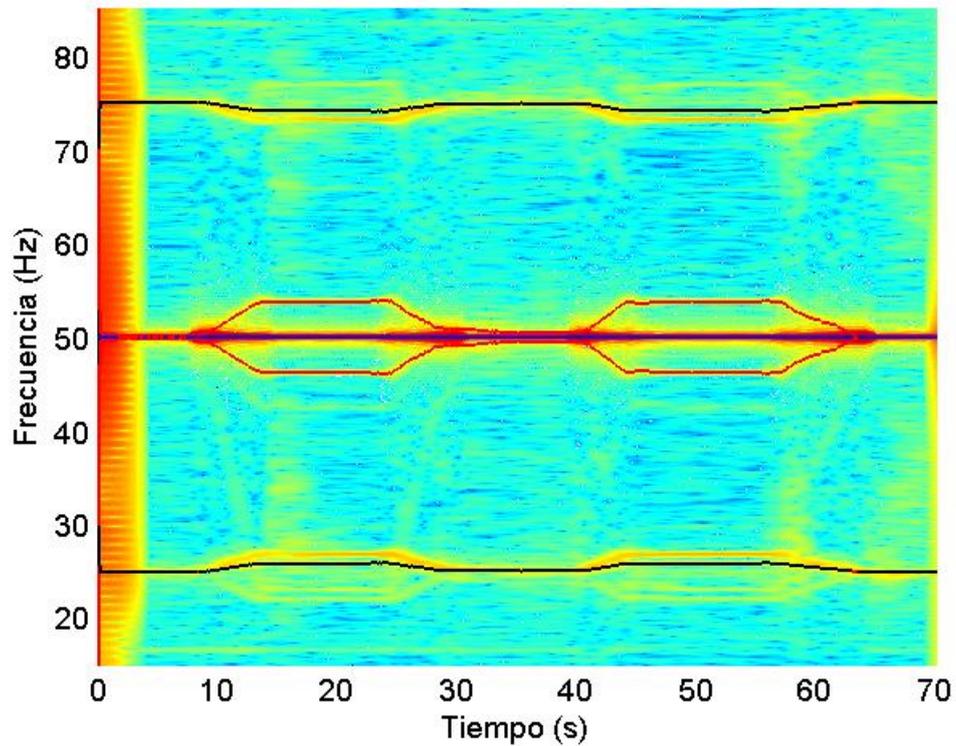


Fig. 9. 10 Acople de los resultados de las figuras 9.8 y 9.9: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes analizadas en la matriz que describe la densidad de energía.

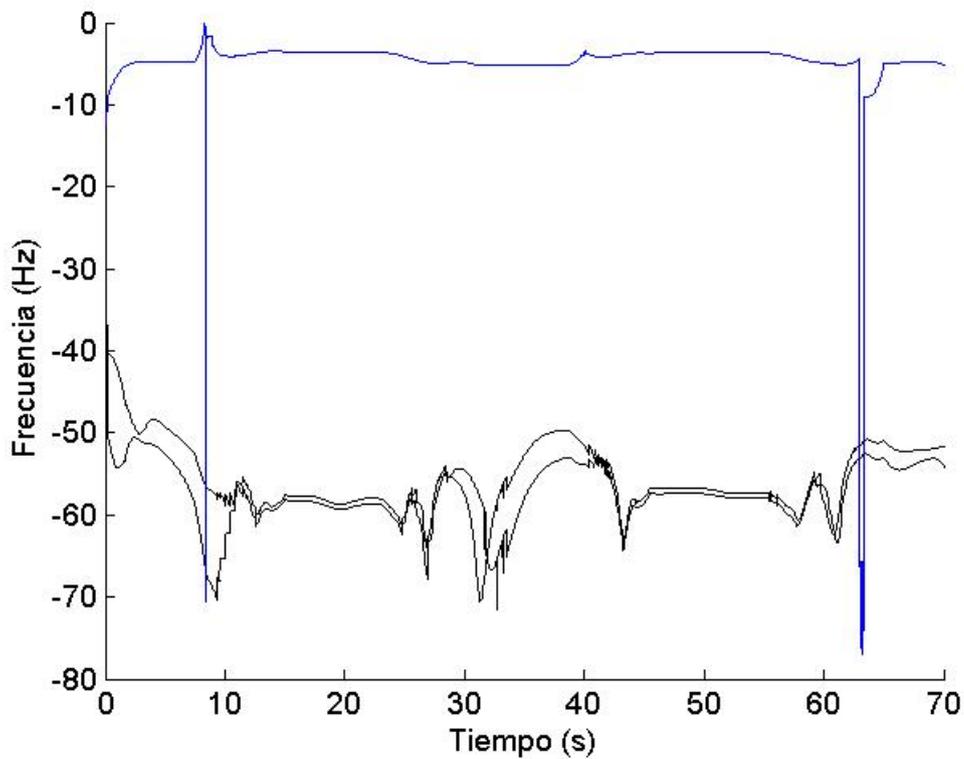


Fig. 9. 11 Corriente 1 (motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al FC (azul) y los SH de excentricidad (negro).

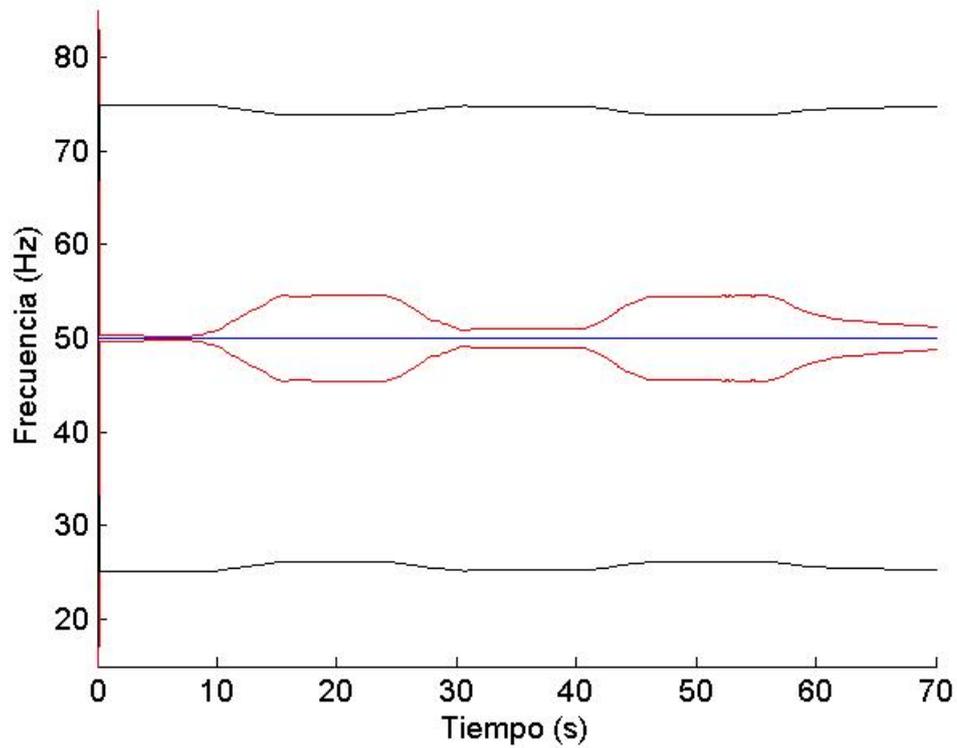


Fig. 9. 12 Corriente 2 (motor excéntrico durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga): estimación de las evoluciones de la FC (azul) y de los SH tanto de excentricidad (negro) como de rotura de barra (rojo).

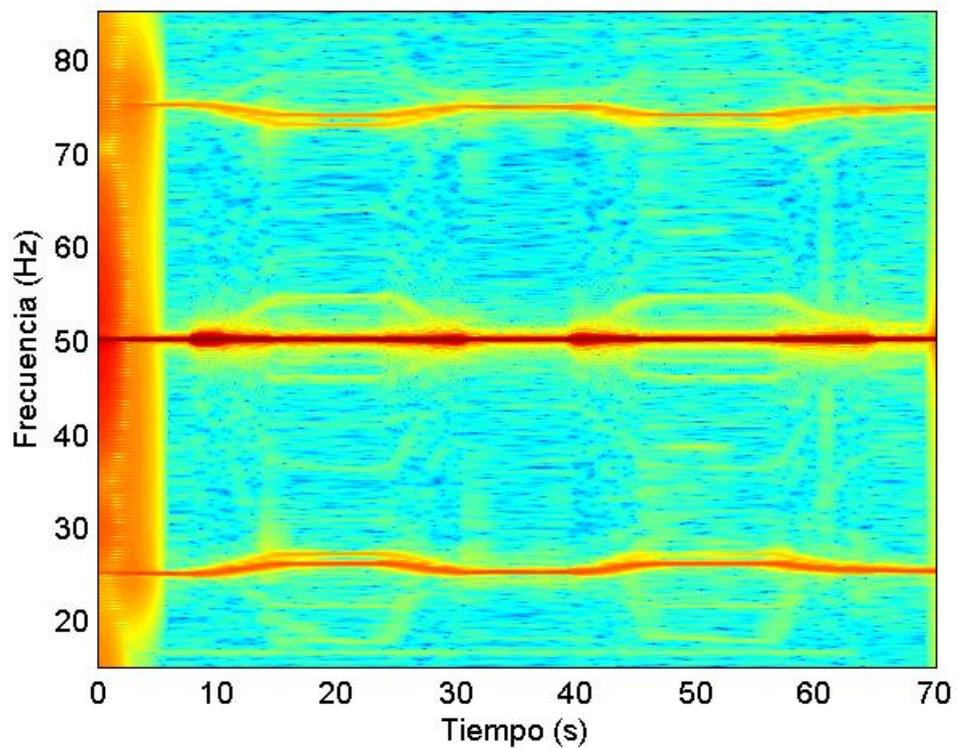


Fig. 9. 13 AST de la corriente 2: motor excéntrico durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

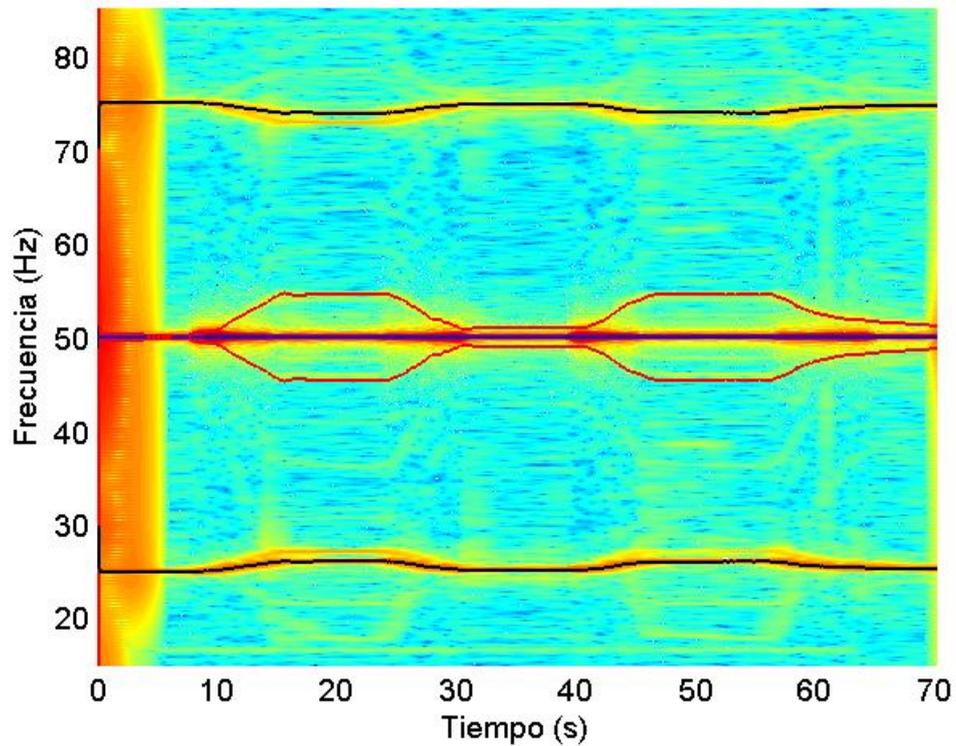


Fig. 9. 14 Acople de los resultados de las figuras 9.12 y 9.13: localización de los puntos de la evolución temporal de las componentes analizadas en la matriz que describe la densidad de energía.

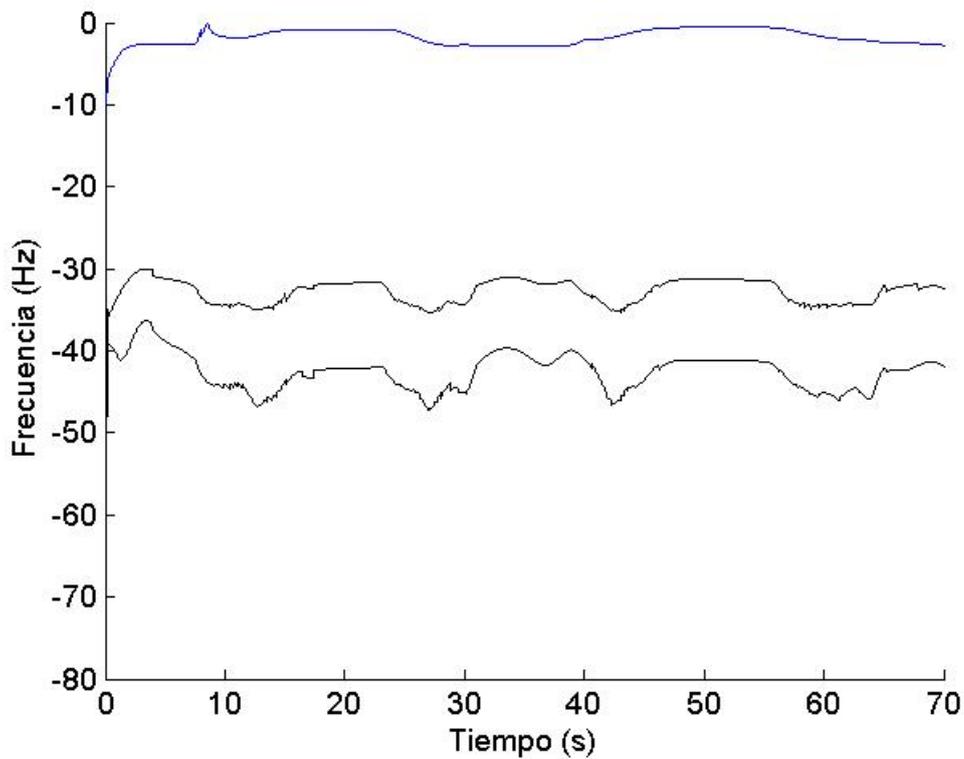


Fig. 9. 15 Corriente 2 (motor excéntrico durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga): evolución temporal de la densidad de energía vinculada al FC (azul) y los SH de excentricidad (negro).

## 9.3.- Análisis de los resultados. Diagnóstico.

En el presente apartado se interpretan los resultados obtenidos en el apartado anterior al aplicar la metodología de diagnóstico propuesta siguiendo la guía expuesta en 4.7. En primer lugar (9.3.1) se realiza un diagnóstico visual examinando los gráficos de las densidades de energía, detectando las evoluciones de las componentes presentes en la corriente. Seguidamente se procede a diagnosticar definitivamente analizando los resultados de la cuantificación de la presencia de las componentes de avería (9.3.2). Finalmente se extraen las conclusiones (9.3.3).

### 9.3.1.- Diagnóstico visual (cualitativo).

El primer paso al realizar el diagnóstico es determinar las componentes cuyas evoluciones se observan al representar la densidad de energía calculada, con el objetivo principal de detectar patrones vinculados a componentes de fallo, pero también para revelar la presencia de componentes inesperadas que pueden variar el análisis realizado. Las densidades de energía obtenidas al aplicar la metodología a las corrientes 1 y 2 se muestran en las figuras 9.9 y 9.13 respectivamente, repetidas a continuación (figuras 9.17 y 9.19) para facilitar la comparación y acompañándolas además del resultado de estimar las evoluciones de las componentes (figuras 9.8 y 9.12 repetidas en las figuras 9.16 y 9.18).

Como la zona del plano tiempo-frecuencia analizada es demasiado amplia, las evoluciones se observan demasiado pequeñas. Es por ello que a continuación se muestran detalles de los resultados obtenidos. Básicamente se muestran los mismos resultados restringidos a tres bandas dentro de las cuales observamos las evoluciones de las componentes más importantes:

- Banda 70-80 Hz: evolución del USH de excentricidad.
  - Corriente 1: Fig. 9.20.
  - Corriente 2: Fig. 9.21.
- Banda 40-60 Hz: evolución de los SH de barra rota.
  - Corriente 1: Fig. 9.22.
  - Corriente 2: Fig. 9.23.
- Banda 20-30 Hz: evolución del LSH de excentricidad.
  - Corriente 1: Fig. 9.24.
  - Corriente 2: Fig. 9.25.

En primer lugar, analizando las figuras 9.17 y 9.19 observamos cómo en ambas figuras se detecta la presencia de los SH de excentricidad, los SH de barra rota y la FC. Esta detección se clarifica sobre todo al observar las densidades de energía (figuras 9.17 y 9.19) comparándolas con las figuras inmediatamente superiores (9.16 y 9.18), las cuales muestran las estimaciones de las evoluciones, permitiendo además comprobar la precisión con la que se representan estas evoluciones al aplicar la transformada y trazar la densidad de energía obtenida. El poder observar los dos pares de SH en ambas corrientes quiere decir que la metodología de diagnóstico es capaz incluso de detectar asimetrías rotóricas y excentricidades inherentes. Sin embargo, se observa claramente como los SH de excentricidad tienen una mayor presencia en la corriente 2 perteneciente al motor excéntrico (Fig. 9.19) que en la corriente 1 perteneciente al

motor sano (Fig. 9.17). Sucede al contrario con la asimetría rotórica, la cual es mayor en la corriente 1 que en la 2. Finalmente, en cuanto a las componentes detectadas, además de las ya mencionadas existen un par de componentes muy cercanas a los SH de excentricidad cuyas evoluciones se observan claramente pero cuya presencia no está prevista teóricamente. Pasemos a realizar un análisis más detallado.

Al comparar las figuras 9.20 y 9.21 observamos en ambas un par de componentes: el USH de excentricidad y una segunda componente cuya frecuencia coincide con la del USH cuando el motor está descargado y que se separa evolucionando hacia más bajas frecuencias cuando el motor se carga. El análisis del origen físico de esta componente no prevista teóricamente queda como futuro trabajo. En cuanto al diagnóstico, vemos como el USH de excentricidad se encuentra mucho más presente en la figura inferior relativa al motor excéntrico. Sin embargo, en la figura superior relativa al motor sano también se observa su evolución. Por tanto, es necesaria la cuantificación para determinar la diferencia entre ambos casos. Finalmente, podemos constatar como las pendientes variables consiguen trazar adecuadamente la evolución tanto durante los cambios de frecuencia como durante los pequeños tramos de regímenes permanentes, gracias a que la relación entre las resoluciones en tiempo y en frecuencia se ajusta en cada punto a la evolución a detectar. Sin embargo, se observa también el mayor inconveniente de los análisis tiempo-frecuencia: cuando las evoluciones de dos componentes se encuentran muy juntas, resulta imposible separarlas completamente. Así pues, a medida que el motor pasa del estado cargado al estado descargado, las dos evoluciones tienden a coincidir y a pesar de haber seleccionado adecuadamente las pendientes, llega un momento en el que se solapan y no es posible separarlas.

Comparando las figuras 9.22 y 9.23 observamos en ambas las evoluciones de la FC y de los SH de rotura de barra. Obviamente la FC, siendo la componente de mayor amplitud en este tipo de corrientes, tiene en ambos casos la misma presencia. Sin embargo, los SH de rotura de barra se observan más claramente en la figura superior que en la inferior, lo cual indica que la asimetría rotórica inherente del motor 1 es mayor que la del motor 2. En cuanto a la FC, la banda de frecuencia que ocupa no es constante, aumentando alrededor de 4 puntos: cuando los SH de excentricidad se separan o convergen a la FC. Esto es debido a que en estos instantes, al encontrarse los SH de excentricidad próximos a la FC y con frecuencia cambiante, las pendientes utilizadas alrededor de la FC en estos instantes es mayor que en los otros cuando los SH están separados o su frecuencia no cambia. En definitiva, alrededor de estos cuatro instantes el FC parece abarcar una banda de mayor grosor. Por otra parte, análogamente al caso anterior, existen tramos donde los SH se acercan demasiado a la FC y no se pueden distinguir separadamente sus trayectorias. En especial, en la corriente 1 existen instantes en los que las frecuencias de los SH coinciden con la frecuencia de la FC y resulta imposible separarlas.

Finalmente, al comparar las figuras 9.24 y 9.25 podemos sacar conclusiones análogas a las obtenidas al analizar las figuras 9.20 y 9.21. Se observan dos componentes: el LSH de excentricidad y una componente cuya frecuencia coincide con la del LSH cuando el motor está descargado adoptando más altas frecuencias al cargar el motor. Esta segunda componente tampoco está prevista teóricamente. La presencia del LSH de excentricidad es mayor en la figura inferior, relativa al motor excéntrico. Aun así, resulta conveniente comparar mediante la cuantificación.

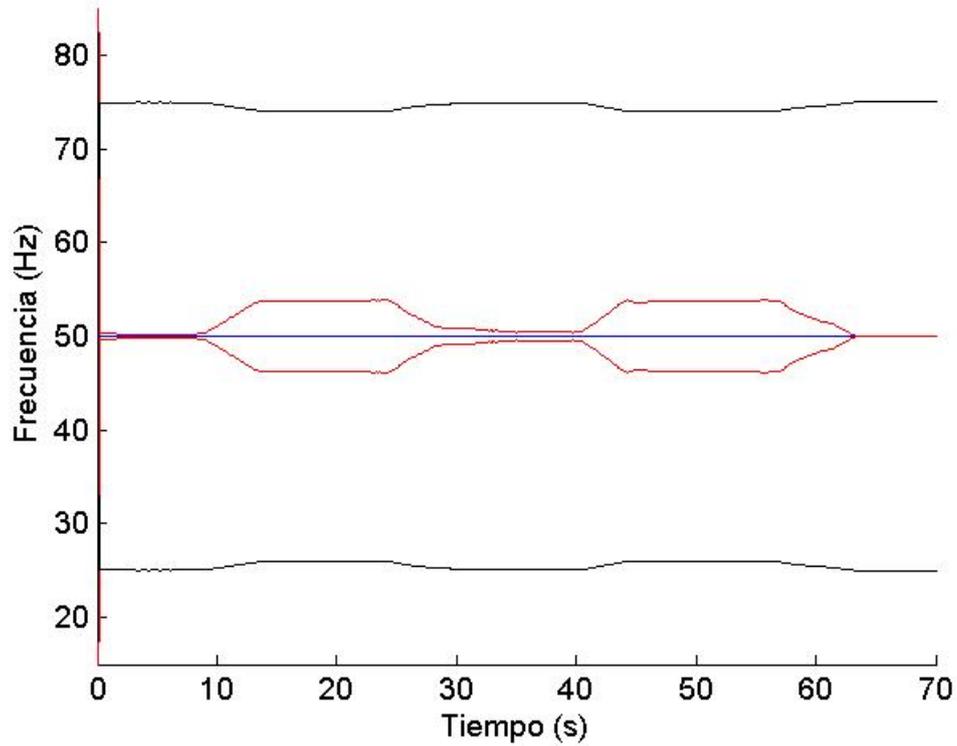


Fig. 9. 16 Corriente 1 (motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga): estimación de las evoluciones de la FC (azul) y de los SH tanto de excentricidad (negro) como de rotura de barra (rojo).

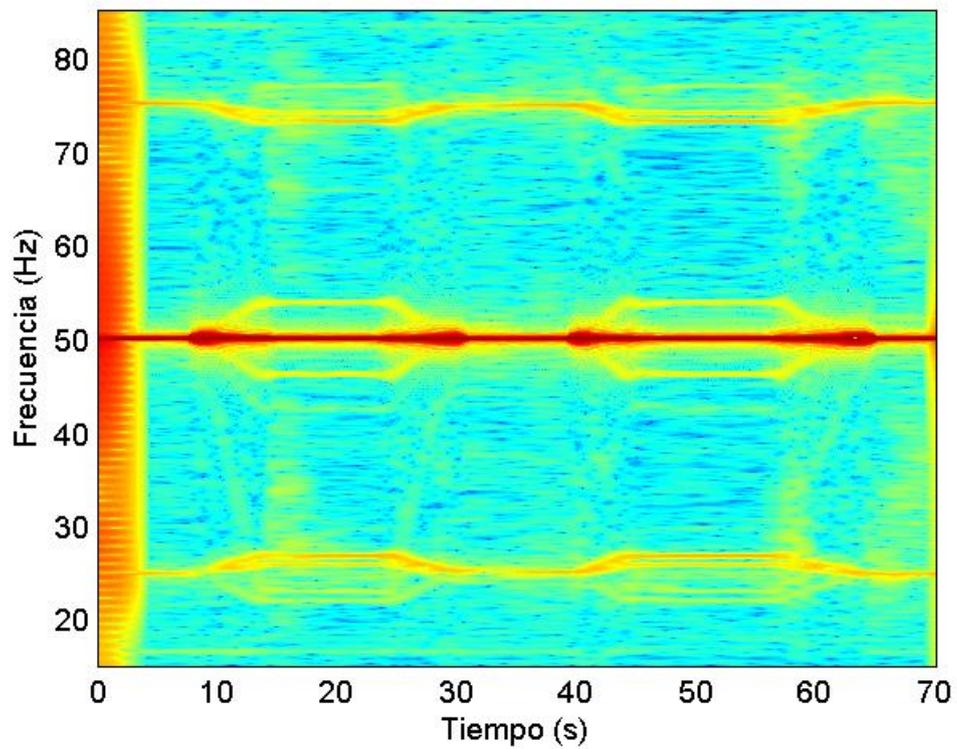


Fig. 9. 17 AST de la corriente 1: motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

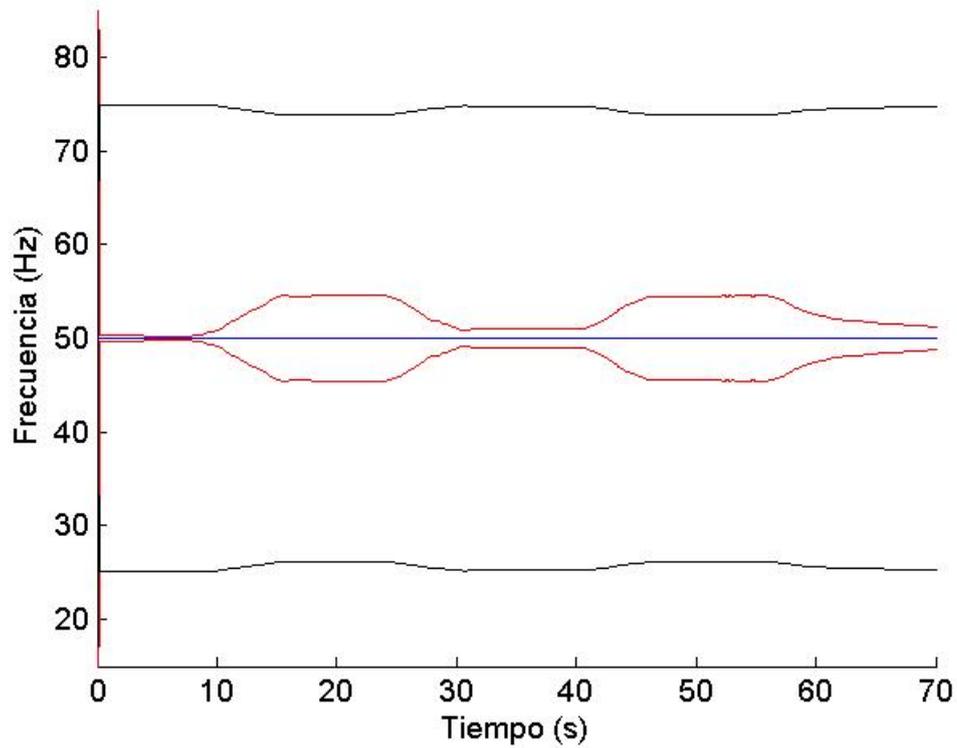


Fig. 9. 18 Corriente 2 (motor excéntrico durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga): estimación de las evoluciones de la FC (azul) y de los SH tanto de excentricidad (negro) como de rotura de barra (rojo).

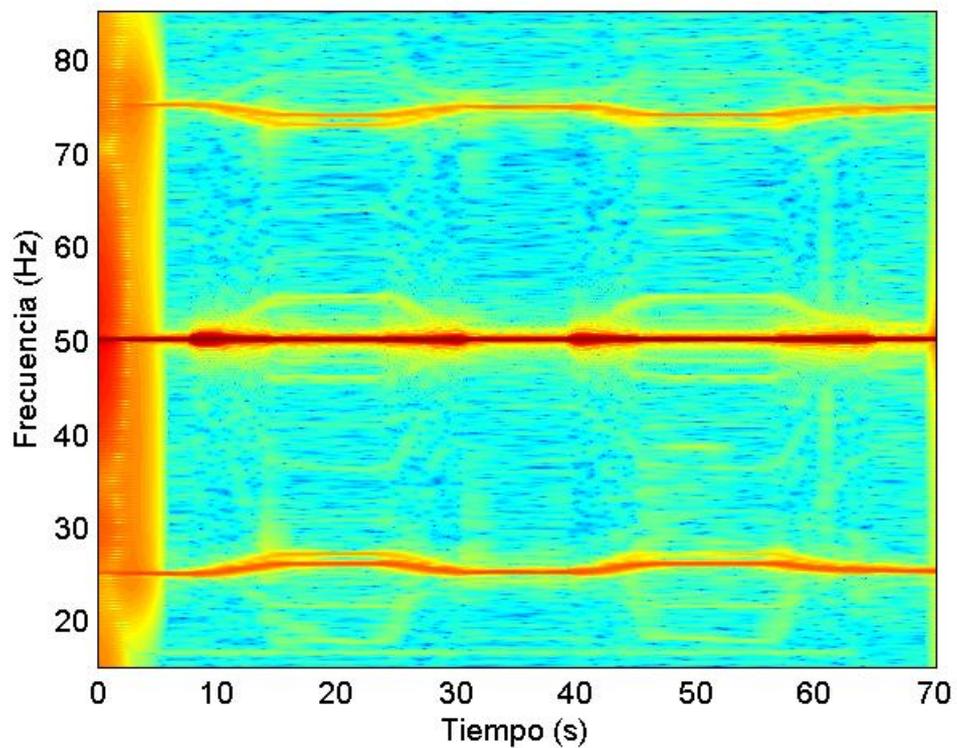


Fig. 9. 19 AST de la corriente 2: motor excéntrico durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

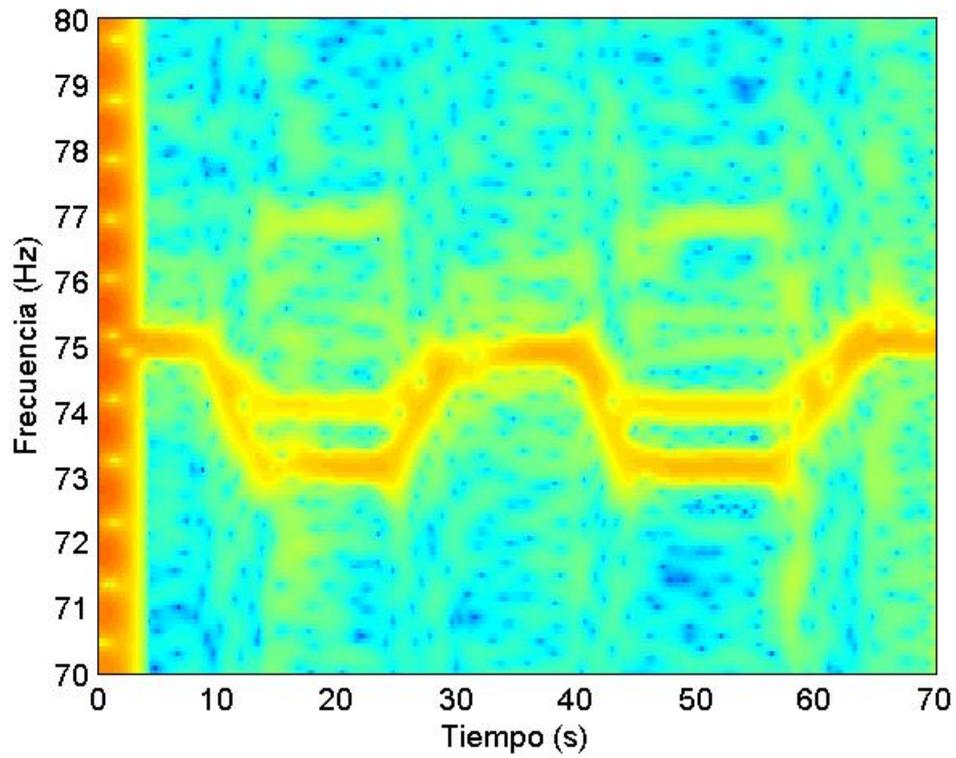


Fig. 9. 20 Limitación a la banda 70-80 Hz de la AST de la corriente 1: motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

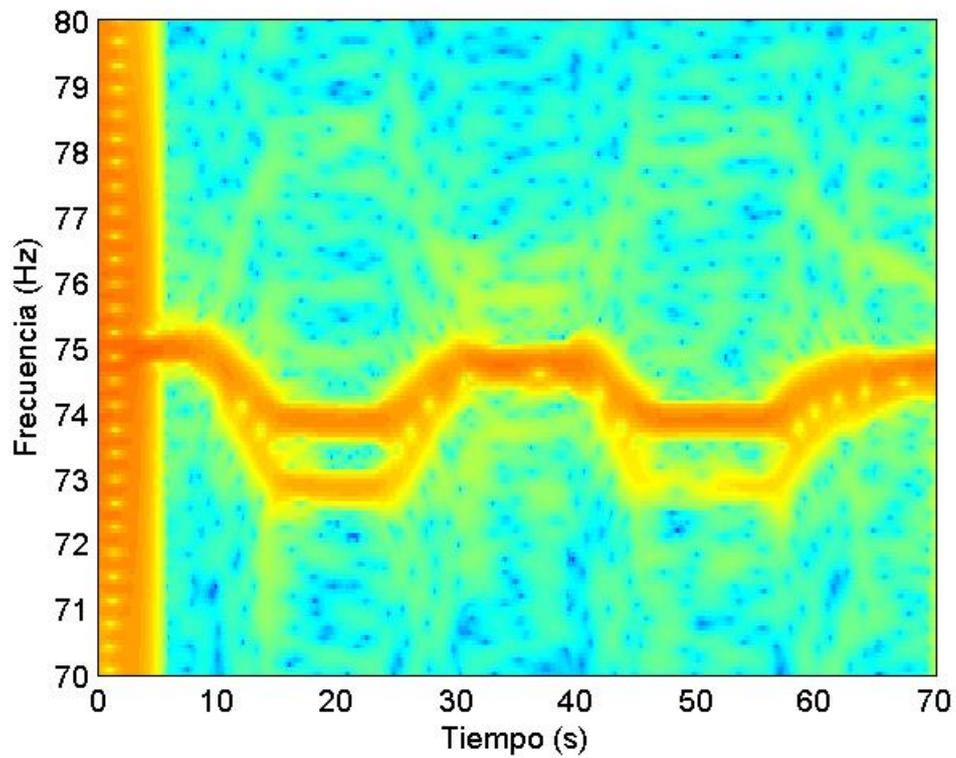


Fig. 9. 21 Limitación a la banda 70-80 Hz de la AST de la corriente 2: motor excéntrico durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

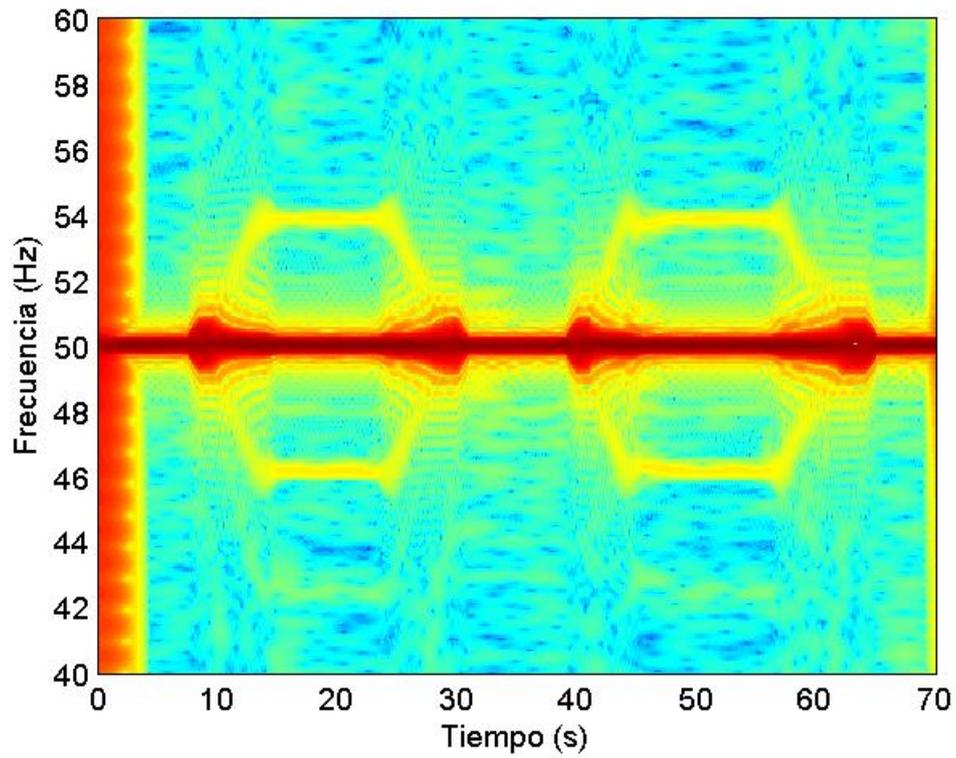


Fig. 9. 22 Limitación a la banda 40-60 Hz de la AST de la corriente 1: motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

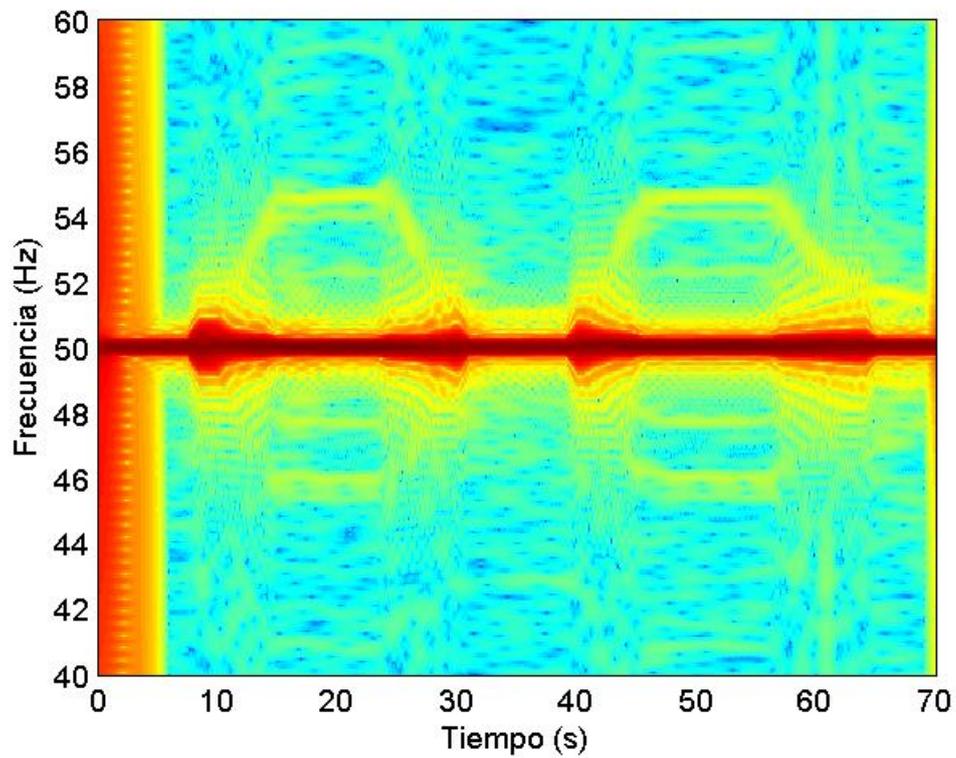


Fig. 9. 23 Limitación a la banda 40-60 Hz de la AST de la corriente 2: motor excéntrico durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

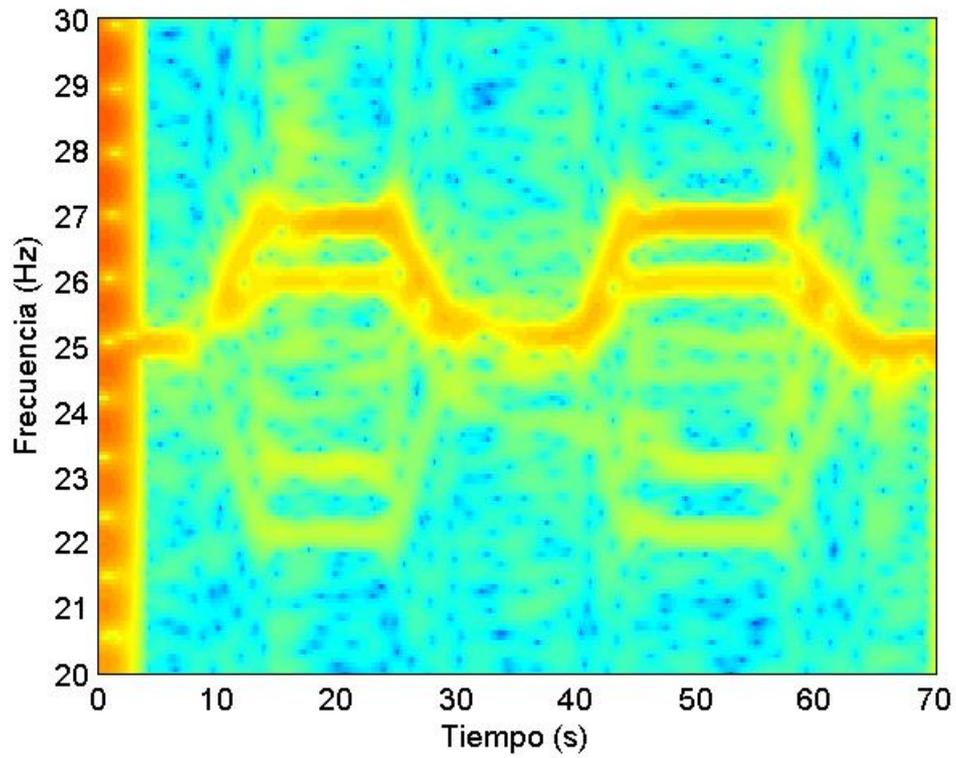


Fig. 9. 24 Limitación a la banda 20-30 Hz de la AST de la corriente 1: motor sano durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

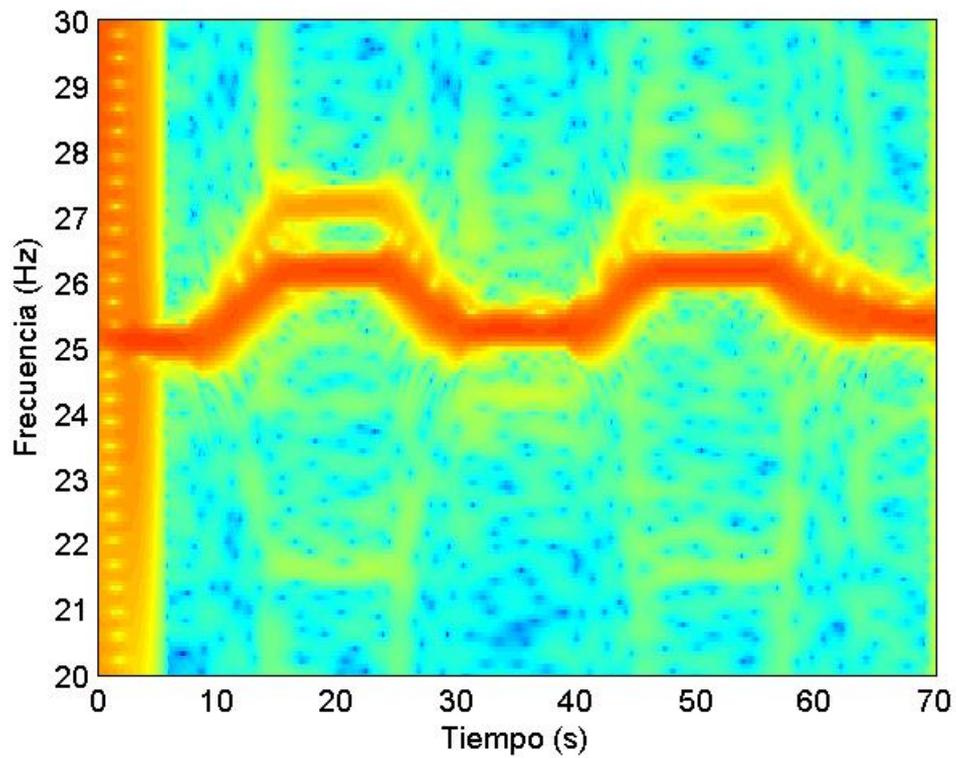


Fig. 9. 25 Limitación a la banda 20-30 Hz de la AST de la corriente 2: motor excéntrico durante un arranque en vacío seguido de oscilaciones de carga.

### 9.3.2.- Cuantificación.

Las siguientes figuras muestran la comparación entre las evoluciones temporales de las densidades de energía tiempo-frecuencia relativas a las componentes presentes en la corriente 1 perteneciente al motor sano (azul) y la corriente 2 perteneciente al motor excéntrico (rojo):

- Fig. 9.26: USH de excentricidad.
- Fig. 9.27: LSH de excentricidad.
- Fig. 9.28: USH de barra rota.
- Fig. 9.29: LSH de barra rota.

Las medias de estas evoluciones se observan en la Tabla 9.1, descartando para el caso de los SH de barra rota aquellos intervalos de tiempo en los que la evolución se confunde con la FC. La primera fila muestra las medias de las densidades de energía que cuantifican la presencia de los SH de excentricidad y de barra rota para la corriente 1 (motor sano). La segunda fila muestra idéntico resultado relativo a la corriente 2 (motor excéntrico). Al restar los índices de cuantificación de los SH de excentricidad relativos a la corriente 2 y 1 obtenemos la fila 3.

Al analizar directamente los resultados de la tabla vemos como los SH de excentricidad tienen una amplitud mucho mayor en el caso del motor 2, lo cual indica la presencia de la avería. Concretamente, existe una diferencia de 24 dB en el caso del LSH de excentricidad y de 13 dB en el caso del USH. Con respecto a la asimetría rotórica, aunque los niveles de densidad de energía relativos a los SH correspondientes son muy bajos (inferiores a -60 dB en todos los casos), la asimetría rotórica inherente es mayor en el motor 1.

Al analizar las figuras 9.26 y 9.27, observamos diferencias instantáneas significativas entre las densidades de energía de los SH de excentricidad en la corriente del motor sano (azul) y del motor excéntrico (rojo), llegando a diferencias máximas de hasta 16 dB en el caso del USH y de casi 30 dB en el caso del LSH. Con lo que respecta a los SH de barra rota, al analizar las figuras 9.28 y 9.29 observamos diferencias de hasta 6 dB en el caso del USH y de 20 dB en el LSH. Sin embargo, en ambos casos las variaciones son entorno a valores de por sí muy reducidos.

La captación de la evolución instantánea de las densidades de energía de las componentes analizadas resulta ser relativamente suave, siendo más abruptas cuanto menor es la densidad medida. En el caso de los SH de excentricidad, esta evolución es especialmente suave cuando el motor está cargado. En los procesos de cambio la pendiente utilizada cambia y esto produce obviamente oscilaciones en la densidad medida, como ya se ha comentado en los capítulos 7 y 8. Además, cuando el motor se encuentra descargado, como la evolución de estos SH coincide con este otro par de componentes no previstas por la teoría, su coincidencia en el plano altera la medida de la densidad, provocando oscilaciones.

Finalmente, las evoluciones de las densidades de los SH de barra rota tienen básicamente dos tipos de tramos: aquellos en los que el motor se encuentra cargado y los SH están alejado de la FC, encontrándose en valores muy reducidos y

confundiéndose con el ruido de fondo (de aquí las oscilaciones) y los tramos en los que se solapan con la FC (sobre todo en los extremos del transitorio capturado).

### **9.3.3.- Conclusiones del capítulo.**

En el presente capítulo se utiliza la metodología de diagnóstico permitiendo una variación total de las pendientes utilizadas a lo largo del plano. Esto permite ajustar la relación entre las resoluciones en tiempo y en frecuencia adecuándola a la necesaria en cada punto para obtener las evoluciones de las componentes de la corriente. De esta forma se capturan las evoluciones de los SH tanto de excentricidad como de barra rota, cuantificando de forma simultánea la presencia de estas dos averías en el motor. Las evoluciones se trazan con gran precisión, resultando muy fácil su detección en el plano, hasta el punto que la metodología permite detectar el grado de avería inherente en cada motor. Además, se elimina la necesidad de realizar pretratamientos como el filtrado de la FC, la cual queda confinada en una banda de frecuencia muy fina alrededor de su frecuencia. En definitiva, las evoluciones se capturan adecuadamente tanto en los tramos de cambio como en los pequeños regímenes permanentes gracias a la capacidad de la transformada para adecuar la relación entre las resoluciones en el plano. Esto permite minimizar las interferencias entre las evoluciones de las componentes favoreciendo la capacidad para detectar fallos dobles. Por otra parte, se podrían haber analizado otros pares de componentes de excentricidad introducidos alrededor de otros WH, tal y como en el capítulo 7 se detecta la presencia de hasta 11 componentes de rotura de barra, pero teniendo en cuenta la complejidad inherente a utilizar pendientes completamente variables, este análisis se ha eludido. Finalmente, el método de cuantificación consigue obtener de forma muy precisa la evolución de la densidad de energía tiempo-frecuencia relativa a las componentes presentes en la corriente y con tiempos de cálculo prácticamente nulos gracias a la estimación previa de su evolución en el plano. Las diferencias entre los índices de cuantificación del motor sano y el averiado no dejan lugar a dudas acerca de los estados de cada motor, permitiendo un diagnóstico muy fiable.

En cuanto a los inconvenientes, a pesar de utilizar una variación total de las pendientes, se ha podido observar que cuando las evoluciones de dos componentes convergen, llega un punto en el que su proximidad es tal que resulta imposible separarlas. Este es un inconveniente inherente a los análisis tiempo-frecuencia. Por otra parte, el tiempo de cálculo aumenta considerablemente respecto a los capítulos anteriores. Por ejemplo, en el Capítulo 7, utilizando la fórmula de la convolución se analiza en 4 min una corriente de 1 min, mientras que en el presente capítulo se analiza en 240 min una corriente de la misma duración. No obstante, hay que tener en cuenta que el aumento de tiempo de cálculo es debido tanto al uso de pendientes completamente variables como al orden de magnitud de las pendientes utilizadas, el cual es bajo en comparación a las utilizadas para analizar corrientes en capítulos anteriores, lo cual implica un mayor tiempo de computación. Por otra parte, a pesar del incremento del tiempo de cálculo, es un tiempo reducido en comparación al que se consumiría al aplicar el método iterativo de selección de átomos del MP. Así pues, se trata de un tiempo de cálculo reducido para el tipo de resultado que la transformada genera.

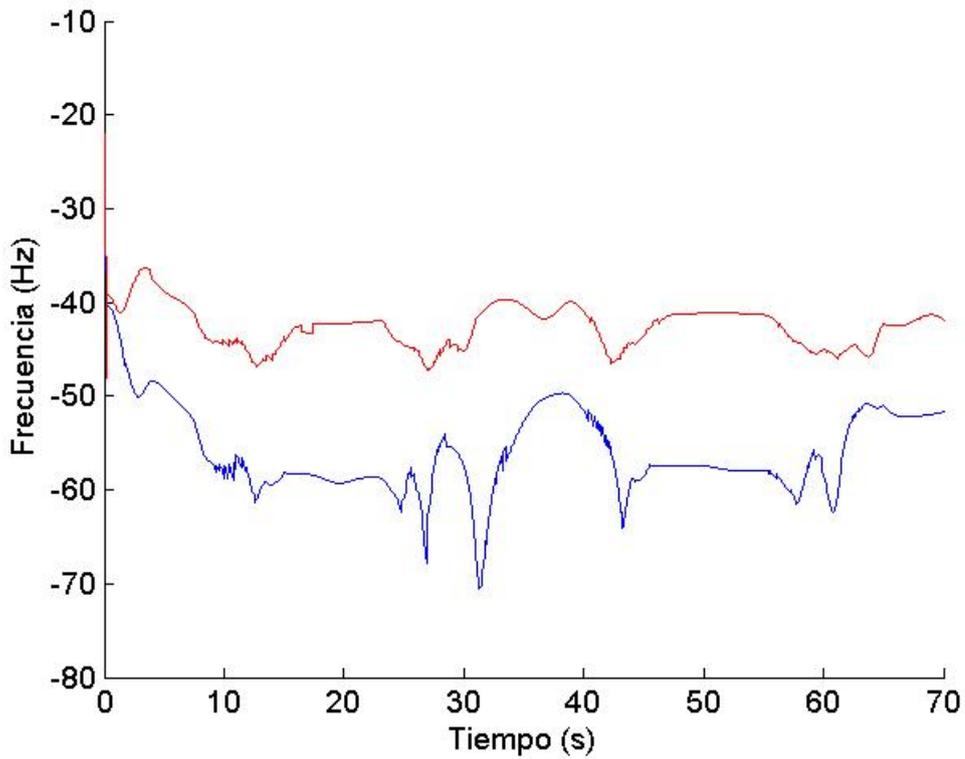


Fig. 9. 26 Evolución temporal de la densidad de energía t-f del USH de excentricidad.

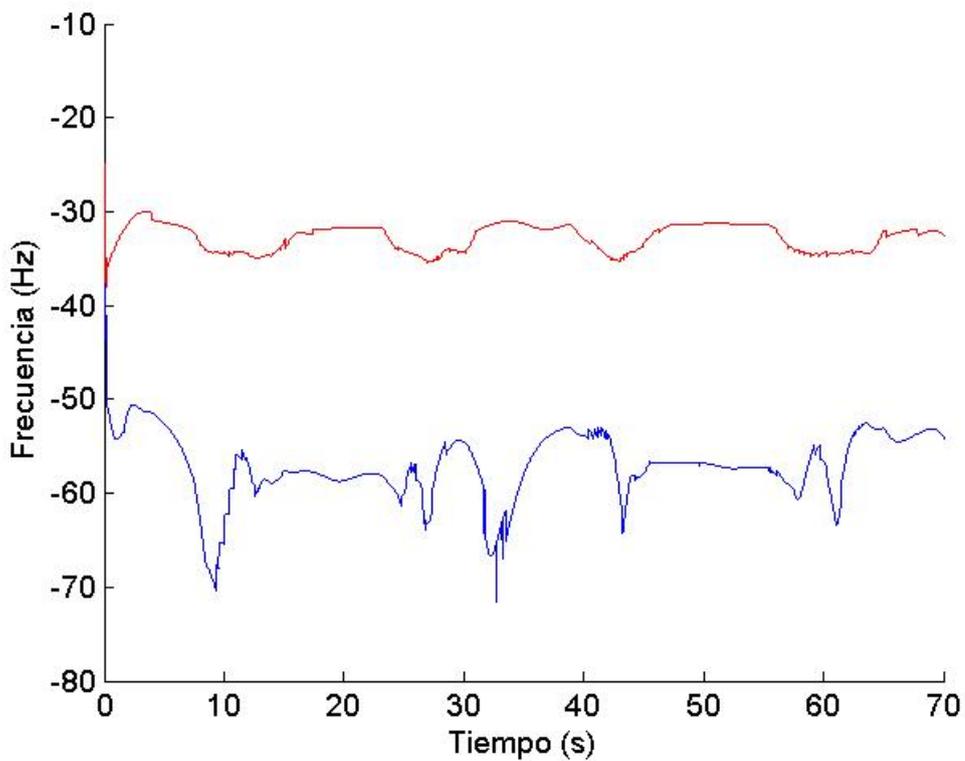


Fig. 9. 27 Evolución temporal de la densidad de energía t-f del LSH de excentricidad.

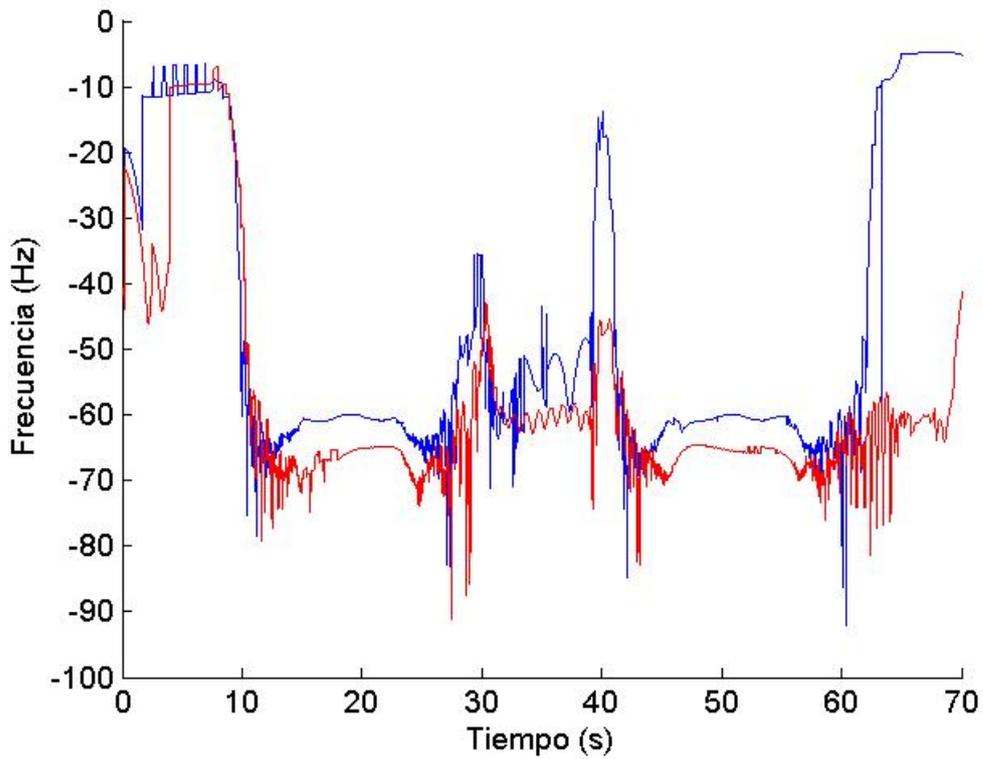


Fig. 9. 28 Evolución temporal de la densidad de energía t-f del USH de barra rota.

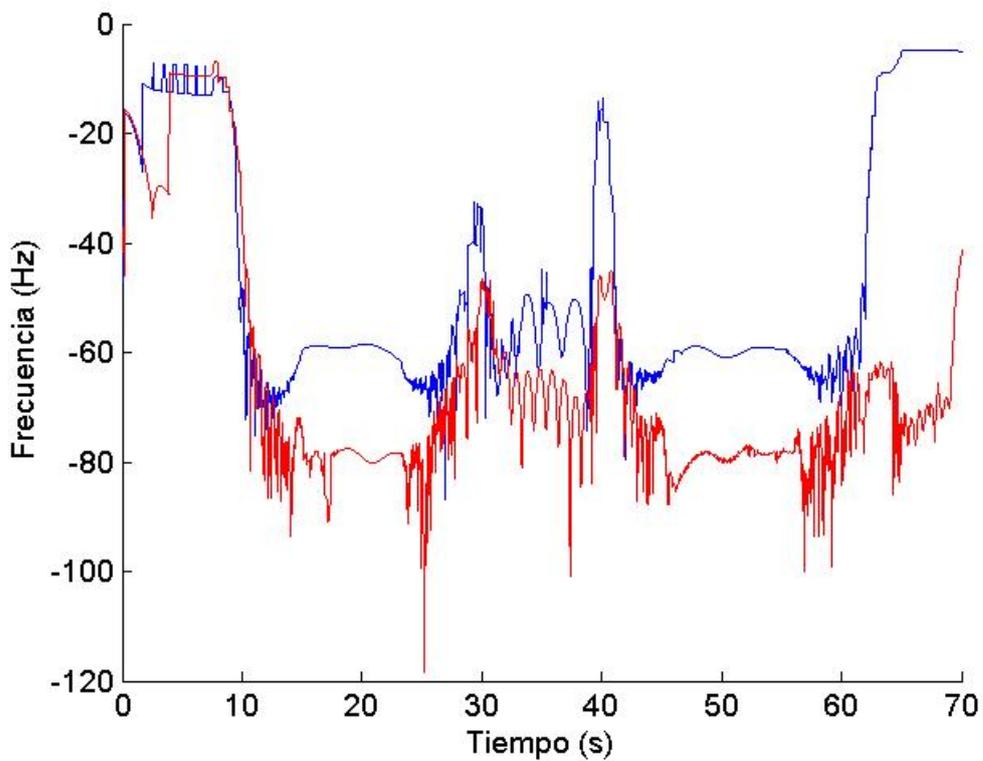


Fig. 9. 29 Evolución temporal de la densidad de energía t-f del LSH de barra rota.

## 10.- Aportaciones y Conclusiones.

En la presente tesis se ha desarrollado una metodología original de diagnóstico de máquinas eléctricas capaz de analizar corrientes transitorias, basada en la definición de una nueva transformada tiempo-frecuencia, la AST, la cual, al contrario de las técnicas anteriores presentes en el estado del arte, se ha concebido con la capacidad de adaptarse a la corriente a analizar, consiguiendo un resultado óptimo en términos de diagnóstico y tiempo de procesamiento. El desarrollo de la metodología ha consistido en el siguiente conjunto de pasos.

### **Análisis de las componentes de la corriente a analizar y su evolución.**

Se ha investigado en profundidad cómo, gracias a trabajos previos comentados en el estado del arte, se conocen las componentes tanto sanas como vinculadas a averías que pueden estar presentes en la corriente, así como las fórmulas que determinan sus frecuencias, pudiendo calcular cuáles deben ser las evoluciones temporales de estas frecuencias si se conocen las evoluciones de las magnitudes de las cuales dependen (el deslizamiento en el caso de alimentar el motor directamente desde la red y la frecuencia fundamental en el caso de alimentar el motor desde un inversor). Esto permite definir una transformada capaz de adaptarse a la corriente a analizar escogiendo en cada punto el átomo que captura de forma óptima la evolución correspondiente (desmarcándose de la otra transformada adaptable, el MP, la cual no parte de ninguna información inicial de la señal a analizar).

### **Desarrollo de métodos para la obtención de las evoluciones de la frecuencia fundamental y del deslizamiento a partir de la corriente.**

Se han desarrollado dos métodos para, utilizando la corriente capturada, obtener las evoluciones de la frecuencia fundamental al alimentar con inversor y del deslizamiento cuando se aplica alimentación directa, las cuales a su vez permiten calcular las evoluciones de las componentes sin utilizar sensores adicionales.

El método presentado para obtener la evolución del deslizamiento (y por tanto de la velocidad), presenta importantes mejoras respecto a trabajos anteriores basados también en obtener la evolución del PSH a través de la corriente del motor:

- El cálculo del espectrograma propuesto utilizando la STFT obtiene una buena resolución sin introducir términos cruzados como la WVD, ni deja zonas vacías de información como los algoritmos de cálculo de crestas aplicados a la STFT y la WT.
- A diferencia de trabajos anteriores, se ha detallado el algoritmo diseñado en la presente tesis para la detección automática de la evolución del PSH a partir de la matriz de densidades de energía obtenida al aplicar la STFT.
- Este algoritmo permite capturar la evolución del PSH con un nivel de precisión muy elevado con respecto a trabajos anteriores, sin presentar zonas donde la evolución no es estimada, consiguiendo capturar al PSH a lo largo de todo el transitorio, incluso en los puntos de cruce con componentes de amplitud semejante, como los WH o las componentes introducidas por averías (barras rotas y excentricidad), lo cual es imprescindible en el contexto de la tesis.

Aportaciones y conclusiones.

- No precisa utilizar modelos de motores para completar la captura de la evolución, ni necesita aplicar filtros previamente al cálculo de la STFT, los cuales pueden eliminar información importante en determinadas zonas del plano.
- Finalmente, este tipo de métodos, al contrario de los estimadores de la velocidad basados en modelos, no necesitan estimar ningún parámetro de la máquina ni construir ningún modelo y solo precisan la medida de una corriente

### **Definición de la pendiente de un átomo tiempo-frecuencia, proposición del criterio de la pendiente y análisis de las FBS.**

La definición de la AST ha sido la conclusión de un proceso complejo que se inicia con la comprensión de la importancia que tiene la forma de la caja de Heisenberg de un átomo cuando trata de medir la densidad de energía en el punto en el cual está centrado.

En primer lugar, en la presente tesis se ha definido el concepto de pendiente de un átomo tiempo-frecuencia como el cociente entre la altura y la base de su caja de Heisenberg, el cual resulta muy útil pues aporta, con un único parámetro, la información relativa a la relación entre las resoluciones en tiempo y en frecuencia que se obtienen al utilizar dicho átomo para, correlacionándolo con la corriente, calcular la densidad de energía en el punto del plano en el que se encuentra centrado.

Seguidamente, se ha definido el criterio de la pendiente, el cual, conociendo cuáles deben ser las evoluciones de las componentes de avería, permite captar la máxima energía de una evolución en un punto, tomando la pendiente del átomo centrado en dicho punto igual a la pendiente de la evolución, lo cual a su vez permite determinar los parámetros óptimos del átomo a utilizar.

Se ha verificado también que las transformadas presentes en el estado del arte (como la STFT y la WT) no son capaces de cumplir el criterio de la pendiente mostrando las carencias en los resultados obtenidos. Tan solo el MP se aproxima al criterio de la pendiente pero sin considerar el objetivo final del diagnóstico, pues no prioriza la captura de las componentes de avería, consumiendo además un tiempo de cálculo muy elevado (superior a semanas), debido al proceso iterativo en el que se basa.

Por otra parte, se han analizado en profundidad las propiedades de las FBS, cuya aplicación es novedosa en el campo del diagnóstico, comparándolas con las funciones de Gabor (utilizadas habitualmente en el análisis de la señal), demostrando que pueden generar resultados casi con la misma calidad, pero consumiendo un tiempo de cálculo menor, siendo finalmente escogidas como el átomo a utilizar. Se ha obtenido la fórmula que determina la pendiente de las FBS en función de sus parámetros, la cual permite determinar los parámetros óptimos de la FBS a utilizar al aplicar el criterio de la pendiente.

### **Definición de la Adaptive Slope Transform.**

Finalmente, se ha definido una nueva transformada designada como la AST, basada en la aplicación del criterio de la pendiente y en el uso de las FBS, la cual permite obtener la relación óptima entre la resolución en tiempo y en frecuencia en cada

punto del plano analizado en función de las necesidades de la corriente a analizar, sin incurrir en tiempos de cálculo elevados.

Como consecuencia, tal y como se concluye al analizar los resultados obtenidos, se trazan las evoluciones de las componentes de la señal con gran precisión y detalle, tanto las provocadas por la avería como las asociadas a un estado sano como los PSH, minimizando las interferencias entre componentes y detectando su evolución separadamente, lo cual permite una clara distinción entre las componentes.

A diferencia de métodos anteriores, esto permite analizar la corriente sin necesidad de aplicar ningún tratamiento previo como puede ser, en el caso de alimentación desde la red, el filtro de la componente fundamental, cuya energía queda confinada en una banda de frecuencia muy reducida alrededor de la frecuencia fundamental, permitiendo detectar las evoluciones de las componentes de avería de baja amplitud, incluso en las inmediaciones de la componente fundamental, como ocurre con las de barra rota durante las oscilaciones de carga.

Los patrones vinculados al fallo son fácilmente identificados, permitiendo un diagnóstico de gran fiabilidad. La variación arbitraria de las cajas permite analizar transitorios complejos que en ningún trabajo previo habían sido analizados (e.g. arranques seguidos de oscilaciones de carga), capturando las evoluciones completas.

Las ventajas de la AST respecto a las otras transformadas han sido analizadas a través de su aplicación a la detección de tres tipos de averías en motores de inducción: barras rotas alimentando el motor desde la red, excentricidad alimentando el motor mediante un inversor y excentricidad alimentando el motor desde la red.

### **Desarrollo de técnicas para mejorar la visualización.**

Aunque la aplicación de la AST permite obtener con gran precisión las evoluciones de las componentes de la corriente, en la presente tesis se han desarrollado cuatro técnicas que mejoran notablemente la visualización, especialmente en el caso de las componentes de baja amplitud como pueden ser las provocadas por las averías:

- Escala logarítmica: mejora notablemente la visualización y permite cuantificar a continuación (el resto de técnicas no permiten interpretar físicamente el índice de cuantificación obtenido).
- Compresión: elimina el ruido, aumenta el contraste con el fondo y disminuye las diferencias con las componentes de mayor amplitud.
- Distintas referencias para cada frecuencia analizada combinado con la representación de la raíz cuadrada de la matriz de densidades: aumenta significativamente el contraste permitiendo una visualización excelente de las evoluciones (adecuada al analizar motores alimentados desde la red o cuando el EB es significativo).
- Recorte temporal: disminuye o elimina el EB (se combina con la anterior).

### **Desarrollo de un método de cuantificación sencillo, rápido y preciso.**

Se ha propuesto un método simple, rápido y preciso que resuelve el complejo problema de la cuantificación en este tipo de transformadas continuas. Al contrario que otros métodos, no requiere integrar la densidad de energía, evitando el uso de matrices

## Aportaciones y conclusiones.

muy grandes, los problemas de convergencia asociados y el incremento en el tiempo de cálculo. Combinando el resultado de la AST con las evoluciones obtenidas de las componentes de avería, el método permite obtener por vez primera la evolución temporal de la densidad de energía de cada componente de avería. Esta evolución, que es además una extensión lógica de la cuantificación en permanente, se obtiene con gran precisión gracias a la calidad de los dos resultados anteriormente obtenidos. El tiempo de cálculo es insignificante, pues tan solo se deben seleccionar puntos de una matriz.

### **Validación de la metodología. Análisis de los resultados obtenidos.**

Al aplicar la AST para detectar barras rotas en motores de inducción alimentados directamente desde la red, se consigue obtener por primera vez la evolución completa del LSH durante el arranque seguido de funcionamiento con oscilaciones de carga. Además, al contrario de otros métodos que sólo se centran en el LSH, se captura claramente la evolución de otras 10 componentes provocadas por la rotura de una barra, incluso en presencia de una única barra rota, mejorando además significativamente su visualización gracias a la aplicación de las técnicas desarrolladas (en especial el uso de distintas referencias a cada frecuencia analizada), hasta el punto de detectar asimetrías rotóricas inherentes. Finalmente, la AST permite obtener la evolución de la densidad de energía de hasta 11 componentes de avería, cuyos niveles aumentan simultáneamente en presencia de la avería (entre 4 y 16 dB en vacío), lo cual permite un diagnóstico de elevada fiabilidad en comparación con otros métodos. En este tipo de avería, como es suficiente que las pendientes de las cajas varíen solamente con la frecuencia, se puede realizar el cálculo utilizando la convolución, obteniéndose tiempos de cálculo del orden de los de la STFT.

En relación con el diagnóstico de la excentricidad en un motor de inducción alimentado mediante un inversor, en este trabajo se consigue por primera vez trazar las evoluciones de los EH de modo continuo, cuantificando además su presencia, no en un único transitorio, sino en diferentes condiciones de operación, siendo este un resultado de gran interés, teniendo en cuenta la importancia de los motores alimentados mediante inversor y velocidad variable en el entorno industrial. Así pues, se ha validado el método para estimar la evolución temporal de la FC trabajando correctamente en transitorios muy distintos, existiendo una gran correspondencia entre las evoluciones estimadas y las finalmente capturadas. Por otra parte, la capacidad de la AST para elegir la relación óptima entre las resoluciones en tiempo y en frecuencia para cada punto del plano analizado permite obtener con elevada resolución las frecuencias en los pequeños tramos en régimen permanente y a la vez captar adecuadamente las evoluciones transitorias. Se observan además las evoluciones de las componentes introducidas por el inversor cuando la compensación por deslizamiento se encuentra activada. La evolución de la densidad de energía experimenta incrementos en sus valores medios de como mínimo 20 dB en presencia de la avería.

Finalmente, la AST ha demostrado su capacidad para diagnosticar dobles fallos (excentricidad-barra rota) en un motor de inducción alimentado desde la red. En este caso se consigue capturar las evoluciones de los SH tanto de excentricidad como de barra rota y cuantificar de forma simultánea la presencia de estas dos averías en el motor. Gracias a la capacidad de la transformada para adecuar la relación entre las resoluciones en el plano, las evoluciones se trazan con gran precisión, tanto en los pequeños regímenes permanentes como en los procesos transitorios, resultando muy

fácil su detección en el plano pues se minimizan las interferencias entre las componentes de ambas averías. Finalmente, el método de cuantificación consigue obtener de forma muy precisa la evolución de la densidad de energía tiempo-frecuencia relativa a las componentes presentes en la corriente, con diferencias entre los índices de cuantificación del motor sano y el averiado (entre 13 y 24 dB) que no dejan lugar a dudas acerca de los estados de cada motor, permitiendo un diagnóstico muy fiable.

### **Inconvenientes.**

El mayor inconveniente del método para obtener la evolución del deslizamiento es que para afinar la captura del PSH se supone una evolución lineal al principio del arranque, lo cual no es siempre cierto. Además, existe el inconveniente inherente a este tipo de métodos: en motores con determinadas combinaciones de las ranuras de estator y rotor, los PSH tienen una menor presencia en la corriente, dificultando su detección.

Con respecto a la evolución de la densidad de energía (que está conceptualmente vinculada con la amplitud instantánea de la componente), las cajas variables utilizadas al aplicar la AST permiten capturar de la mejor forma posible esta densidad, pero al mismo tiempo complican su interpretación, pues la densidad de energía medida en un punto del plano depende de la caja utilizada, lo cual se observa especialmente bien al analizar los resultados experimentales relativos a la detección de excentricidad en un motor de inducción alimentado mediante un inversor. Esto dificulta el poder establecer un nivel de dB con validez general que marque el límite entre el estado sano y el averiado, pues éste depende del resultado de medir las densidades de energía, no sólo de las componentes de avería, sino también de la FC, siendo estas medidas función de las cajas utilizadas y éstas a su vez del transitorio capturado. Es por ello que en este sentido la metodología que en el momento actual se encuentra en un estado incipiente, habiéndose aplicado tan sólo en el contexto de la tesis, necesita ser probada hasta que la experiencia dicte normas para establecer los límites mencionados.

Por otra parte, a pesar de utilizar una variación total de las pendientes, se ha podido observar cómo cuando las evoluciones de dos componentes convergen, llega un punto en el que su proximidad es tal que resulta imposible separarlas. Este es un inconveniente inherente a los análisis tiempo-frecuencia. Por otra parte, el tiempo de cálculo aumenta considerablemente respecto a los capítulos anteriores, aunque esto es debido en gran parte, no al uso de pendientes completamente variables, sino al orden de magnitud de las pendientes utilizadas, el cual es bajo en comparación a las utilizadas para analizar corrientes en capítulos anteriores.



# 11.- Futuros trabajos.

La presente tesis deja abiertas varias líneas de investigación que pueden ser objeto de futuros trabajos. Estas líneas nacen del intento de resolver los inconvenientes apuntados en el apartado de conclusiones, explorar en general mejoras en cuanto a la metodología de diagnóstico desarrollada o ampliar su campo de aplicación. Entre éstas futuras líneas se pueden apuntar:

## **Mejoras de la metodología de diagnóstico desarrollada:**

- Mejoras en cuanto al método de estimación de las evoluciones de las componentes de avería:
  - Adaptar el método de estimación de la evolución del deslizamiento a arranques con características menos lineales.
  - Estimación de la frecuencia fundamental cuando el motor es alimentado directamente desde la red.
  - Estimación de la frecuencia de deslizamiento cuando el motor es alimentado mediante un inversor.
- Investigación del umbral sano-averiado: ampliación de los ensayos realizados diagnosticando un mayor espectro de máquinas en distintas condiciones de funcionamiento transitorio con el objetivo de establecer una relación entre el tipo de transitorio, las pendientes utilizadas, el grado de avería y el índice de cuantificación obtenido.
- Reducción del tiempo de cálculo para la incorporación de la metodología en dispositivos portátiles: aplicación de la metodología limitando el cálculo de la correlación a lo largo de los puntos descritos por las evoluciones de las componentes de avería, renunciando a la representación de la densidad de energía pero no a la cuantificación, con el objetivo de reducir drásticamente el tiempo de cálculo (en vez de analizar 1000 frecuencias cada 50 Hz se realizaría un cálculo equivalente a analizar tantas frecuencias como componentes a detectar).

## **Ampliación del campo de aplicación:**

- Aplicar la metodología de diagnóstico a las mismas máquinas con las mismas averías pero capturando otros transitorios distintos que pueden incluir:
  - Parada por desconexión.
  - Parada por inversión del sentido de giro.
  - Variaciones de carga más bruscas.
  - Funcionamiento generador.
- Aplicar la metodología de diagnóstico para la detección de otros tipos de averías en motores de inducción
  - Asimetrías estáticas como las producidas por cortocircuitos entre espiras o cortocircuitos entre bobinas.
  - Fallos en rodamientos.
- Aplicar la metodología para el diagnóstico otras máquinas eléctricas:
  - Máquinas sincrónicas.
  - Máquinas de corriente continua.
  - Máquinas de imanes permanentes.



# Abreviaciones.

## Alfanumérico:

- $Bk$ signo : componente de barra rota cuya frecuencia se determina mediante la primera ecuación de (4.9) utilizando el valor de  $k$  y el signo (positivo o negativo) indicados.
- $B_{nm}$ : componente de barra rota no prevista por las fórmulas presentes en el estado del arte (4.9), cuya frecuencia evoluciona desde  $nf_{FC}$  hasta  $mf_{FC}$  cuando el deslizamiento evoluciona de 1 a 0.
- $b k/p$ signo : componente de barra rota cuya frecuencia se determina mediante la segunda ecuación de (4.9) utilizando el valor de  $k/p$  y el signo (positivo o negativo) indicados.
- $E_k$ signo : armónico producido por una excentricidad cuya frecuencia se determina mediante (4.13) utilizando el valor de  $k$  y el signo (positivo o negativo) indicados.
- $P_\nu$ signo : armónico principal de ranura cuya frecuencia se determina mediante (4.4) utilizando el valor de  $\nu$  y el signo (positivo o negativo) indicados.
- $WH_n$ : armónico de devanado de orden  $n$  ( $n$  order Winding Harmonic).

## A:

- AGT: transformada de Gabor adaptativa (Adaptive Gabor Transform).
- AST: transformada de pendiente adaptable (Adaptive Slope Transform).
- AWT: transformada wavelet analítica (Analytic Wavelet Transform).

## B:

- BBH: armónicos de rotura de barra (Broken Bar Harmonics).

## C:

- CWD: distribuciones de Choi y Williams (Choi-Williams Distributions).
- CWT: transformada wavelet continua (Continuous Wavelet Transform).

## D:

- $Db$ : Familia de wavelets ortogonales designadas con la abreviación del apellido de Ingrid Daubechies, inventora de este tipo de wavelet.
- DWT: transformada wavelet discreta (Discrete Wavelet Transform).

## E:

- EB: efecto de borde (EB).
- EH: armónico de excentricidad (Eccentricity Harmonic).
- EMD: modo de descomposición empírico (Empirical Mode Decomposition).

## **F:**

- FBS: Frequency B-Splines.
- FC: componente fundamental (Fundamental Component).
- FFT: Transformada Rápida de Fourier (FFT).
- FT: Transformada de Fourier (Fourier Transform).

## **H:**

- HHT: transformada de Hilbert-Huang (Hilbert-Huang Transform).

## **L:**

- LSH: armónico lateral inferior (Lower Sideband Harmonic).

## **M:**

- MCC: máquina de corriente continua.
- MCSA: análisis de las firmas en la corriente del motor (Motor Current Signature Analysis).
- MI: Motor de Inducción.
- MP: Matching Pursuit (MP).
- MSIP: motores sincrónicos de imanes permanentes.
- MUSIC: método de clasificación de señales múltiples (Multiple Signal Classification).

## **P:**

- PSH: armónicos principales de ranura (Principal Slot Harmonics).
- PWVD: Pseudo WVD.

## **S:**

- SH: armónicos laterales (Sideband Harmonics).
- STFT: transformada de Fourier de tiempo corto (Short Time Fourier Transform).

## **T:**

- t-f: tiempo-frecuencia.
- TEM: transitorio electro-magnético.
- TMCSA: MCSA en transitorio (Transient MCSA).

## **U:**

- USH: armónico lateral superior (Upper Sideband Harmonic).

## **V:**

- VM: ventanas moduladas.

**W:**

- WH: armónicos de devanado (Winding Harmonics).
- WT: transformada wavelet (Wavelet Transform).
- WVD: Distribuciones de Wigner-Ville (Wigner-Ville Distributions).

**Z:**

- ZAMD: distribuciones de Zhao, Atlas y Marks (Zhao-Atlas-Marks Distributions).



# Bibliografía

- [1] P. Vas, *Parameter estimation, condition monitoring, and diagnosis of electrical machines*. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- [2] S. Nandi, S. Ahmed, and H. A. Toliyat, "Detection of rotor slot and other eccentricity related harmonics in a three phase induction motor with different rotor cages," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 16, no. 3, pp. 253-260, Sept. 2001.
- [3] W. Deleroi, "Squirrel cage motor with broken bar in the rotor—Physical phenomena and their experimental assessment," in *Proc. ICEM*, pp. 767–770, 1982.
- [4] G. B. Kliman, R. A. Koegl, J. Stein, R. D. Endicott, and M. W. Madden, "Noninvasive detection of broken rotor bars in operating induction motors," *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 3, no. 4, pp. 873-879, Dec. 1988.
- [5] F. Filippetti, G. Franceschini, C. Tassoni, and P. Vas, "AI techniques in induction machines diagnosis including the speed ripple effect," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 34, no. 1, pp. 98–108, Jan./Feb. 1998.
- [6] J.R. Cameron, W.T. Thomson, A.B. Dow, "Vibration and current monitoring for detecting airgap eccentricity in large induction motors," *Electric Power Applications, IEE Proceedings B*, vol.133, no.3, pp.155-163, May 1986.
- [7] S. Nandi, R. M. Bharadwaj, and H. A. Toliyat, "Performance analysis of a three phase induction motor under incipient mixed eccentricity condition," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 17, no. 3, pp. 392–399, Sep. 2002.
- [8] B. Akin, U. Orguner, H. A. Toliyat, and M. Rayner, "Low order PWM inverter harmonics contributions to the inverter-fed induction machine fault diagnosis," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, no. 2, pp. 610–619, Feb. 2008.
- [9] D. Morinigo-Sotelo, L. A. Garcia-Escudero, O. Duque-Perez, and Marcelo Perez-Alonso, "Practical aspects of mixed-eccentricity detection in PWM voltage-source-inverter-fed induction motors," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 1, pp. 252–262, Jan. 2010.
- [10] J. Park, B. Kim, J. Yang, K. Lee, S.B. Lee, E.J. Wiedenbrug, M. Teska, and S. Han, "Evaluation of the detectability of broken rotor bars for double squirrel cage rotor induction motors," in *Proc. IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, pp. 2493-2500, Sep. 2010.
- [11] W. T. Thomson, and M. Fenger, "Current signature analysis to detect induction motor faults," *IEEE Ind. Appl. Mag.*, vol. 7, no. 4, pp. 26–34, Jul./Aug. 2001.
- [12] A. M. Trzynadlowski, and E. Ritchie, "Comparative investigation of diagnostic media for induction motors: a case of rotor cage faults," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 47, no. 5, pp. 1092–1099, Oct. 2000.
- [13] R. Pucho-Panadero, M. Pineda-Sanchez, M. Riera-Guasp, J. Roger-Folch, E. Hurtado-Perez, and J. Perez-Cruz, "Improved resolution of the MCSA method via Hilbert transform, enabling the diagnosis of rotor asymmetries at very low slip," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 24, no. 1, pp. 52–59, Mar. 2009.
- [14] A. M. da Silva, R. J. Povinelli, and N. A. O. Demerdash, "Induction machine broken bar and stator short-circuit fault diagnostics based on three-phase stator current envelopes," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 55, no. 3, pp. 1310-1318, March 2008.
- [15] S. H. Kia, H. Henao, and G.-A. Capolino, "A high-resolution frequency estimation method for three-phase induction machine fault detection," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 54, no. 4, pp. 2305-2314, Aug. 2007.
- [16] M. Aiello, A. Cataliotti, and S. Nuccio, "An induction motor speed measurement method based on current harmonic analysis with the chirp-z transform," *IEEE Trans. Instrumentation and Measurement*, vol. 54, no. 5, pp. 1811-1819, Oct. 2005.
- [17] A. Bellini, G. Franceschini, C. Tassoni, "Monitoring of induction machines by maximum covariance method for frequency tracking," *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 42, no. 1, pp. 69-78, Jan./Feb. 2006.

- [18] A. Bellini, A. Yazidi, F. Filippetti, C. Rossi, and G.-A. Capolino, "High frequency resolution techniques for rotor fault detection of induction machines," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 55, no. 12, pp. 4200-4209, Dec. 2008.
- [19] J. R. Stack, R. G. Harley, and T. G. Habetler, "Bearing fault detection via autoregressive stator current modeling," *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 40, no. 3, pp. 740-747, May/Jun. 2004.
- [20] B. Ayhan, H. J. Trussell, M.-Y. Chow, and M.-H. Song, "On the use of a lower sampling rate for broken rotor bar detection with DTFT and AR-based spectrum methods," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 55, no. 3, pp. 1421-1434, Mar. 2008.
- [21] C. L. Nikias, and J. M. Mendel, "Signal processing with higher-order spectra," *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 10-38, Jul. 1993.
- [22] N. Arthur, and J. Penman, "Induction machine condition monitoring with higher order spectra," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 47, no. 5, pp. 1031-1041, Oct. 2000.
- [23] J. R. Stack, R. G. Harley, and T. G. Habetler, "An amplitude modulation detector for fault diagnosis in rolling element bearings," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 51, no. 5, pp. 1097-1102, Oct. 2004.
- [24] W. Zhou, T. G. Habetler, and R. G. Harley, "Bearing fault detection via stator current noise cancellation and statistical control," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 55, no. 12, pp. 4260-4269, Dec. 2008.
- [25] J. R. Stack, T. G. Habetler, and R. G. Harley, "Fault classification and fault signature production for rolling element bearings in electric machines," *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 40, no. 3, pp. 735-739, May/June 2004.
- [26] B. Trajin, J. Regnier, and J. Faucher, "Comparison between stator current and estimated mechanical speed for the detection of bearing wear in asynchronous drives," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 56, no. 11, pp. 4700-4709, Nov. 2009.
- [27] S. H. Kia, H. Henao, G.-A. Capolino, "Analytical and experimental study of gearbox mechanical effect on the induction machine stator current signature," *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 45, no. 4, pp. 1405-1415, Jul./Aug. 2009.
- [28] S.H. Kia, H. Henao, G.-A. Capolino, "Torsional vibration assessment using induction machine electromagnetic torque estimation," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 57, no. 1, pp. 209-219, Jan. 2010.
- [29] M. Riera-Guasp, J. A. Antonino-Daviu, M. Pineda-Sanchez, R. Puche-Panadero, and J. Perez-Cruz, "A general approach for the transient detection of slip-dependent fault components based on the discrete wavelet transform," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, no. 12, pp. 4167-4180, Dec. 2008.
- [30] H. Douglas, P. Pillay, and A. K. Ziarani, "Broken rotor bar detection in induction machines with transient operating speeds," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 20, no.1, pp. 135-141, Mar. 2005.
- [31] J. A. Antonino-Daviu, M. Riera-Guasp, J. R. Folch, and M. Pilar Molina Palomares, "Validation of a new method for the diagnosis of rotor bar failures via wavelet transform in industrial induction machines," *IEEE Trans. on Industry Applications*, vol. 42, pp. 990-996, Jul./Aug. 2006.
- [32] J. Antonino-Daviu, M. Riera-Guasp, J. Roger-Folch, F. Martínez-Giménez, and A. Peris, "Application and optimization of the discrete wavelet transform for the detection of broken rotor bars in induction machines," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 21, pp. 268-279, Sep. 2006.
- [33] M. Riera-Guasp, J.A. Antonino-Daviu, J. Roger-Folch and M.P. Molina-Palomares, "The use of the wavelet approximation signal as a tool for the diagnosis of rotor bar failures," *IEEE Trans. on Industry Applications*, vol. 44, pp. 716-726, May./Jun. 2008.
- [34] J. Antonino-Daviu, P. Jover, M. Riera, A. Arkkio, and J. Roger-Folch, "DWT analysis of numerical and experimental data for the diagnosis of dynamic eccentricities in induction motors," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, pp. 2575-2589, Feb. 2007.
- [35] J. Antonino-Daviu, P. Jover Rodriguez, M. Riera-Guasp, M. Pineda-Sánchez, A. Arkkio, "Detection of combined faults in induction machines with stator parallel

- branches through the DWT of the startup current” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, no. 7, pp. 2336-2351, Oct. 2009.
- [36] A. Ordaz-Moreno, R. de J. Romero-Troncoso, J. A. Vite-Frias, J. R. Rivera-Gillen, and A. Garcia-Perez, “Automatic online diagnosis algorithm for broken-bar detection on induction motors based on Discrete Wavelet Transform for FPGA implementation,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, no. 5, pp. 2193–2202, May 2008.
- [37] M. A. S. K. Khan, and M. Azizur Rahman, “Development and implementation of a novel fault diagnostic and protection technique for IPM motor drives,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 1, pp. 85–92, Jan. 2009.
- [38] A. Yazdanpanah Goharrizi, and N Sepehri, “A wavelet-based approach to internal seal damage diagnosis in hydraulic actuators,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 5, pp. 1755–1763, May 2009.
- [39] M. Pineda-Sanchez, M. Riera-Guasp, J. A. Antonino-Daviu, J. Roger-Folch, J. Perez-Cruz, and R. Puche-Panadero, “Instantaneous frequency of the left sideband harmonic during the start-up transient: a new method for diagnosis of broken bars,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 11, pp. 4557–4570, Nov. 2009.
- [40] J. Ville, “Theorie et applications de la notion de signal analytique,” *Cables et Transmission*, vol. 2, no. 1, pp. 61–74, 1948.
- [41] S.H. Kia, H. Henao, and G.-A. Capolino, “Diagnosis of broken-bar fault in induction machines using discrete wavelet transform without slip estimation,” *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol.45, no.4, pp.1395-1404, Jul./Aug. 2009.
- [42] S.H. Kia, A. Mpanda-Mabwe, and R. Ceschi, “Slip independent monitoring of wound-rotor induction machines,” in *Proc. IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 1485-1490, Jul. 2010.
- [43] S.H. Kia, H. Henao, and G.-A. Capolino, “Windings monitoring of wound rotor induction machines under fluctuating load conditions,” in *Proc. 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 3459-3465, Nov. 2011.
- [44] Y. Gritli, A. Stefani, A. Chatti, C. Rossi, and F. Filippetti, “The combined use of the instantaneous fault frequency evolution and frequency sliding for advanced rotor fault diagnosis in DFIM under time-varying condition,” in *Proc. 35th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 3471-3476, Nov. 2009.
- [45] Y. Gritli, A. Stefani, C. Rossi, F. Filippetti, and A. Chatti, “Advanced rotor fault diagnosis for DFIM based on Frequency Sliding and wavelet analysis under time-varying conditions,” in *Proc. IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 2607-2614, Jul. 2010.
- [46] Y. Gritli, A. Stefani, C. Rossi, F. Filippetti, and A. Chatti, “Doubly fed induction machine stator fault diagnosis under time-varying conditions based on frequency sliding and wavelet analysis,” in *Proc. 7th IEEE International Symposium on [Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives](#)*, pp. 1-7, Aug./Sept. 2009.
- [47] Y. Gritli, A. Stefani, C. Rossi, F. Filippetti, A. Chatti, and L. Zarri, “Experimental validation of doubly fed induction machine rotor fault diagnosis based on wavelet analysis in closed-loop operations,” in *Proc. IEEE International Symposium on Power Electronics Electrical Drives Automation and Motion*, pp. 513-518, Jun. 2010.
- [48] Y. Gritli, C. Rossi, L. Zarri, F. Filippetti, A. Chatti, D. Casadei, and A. Stefani, “Advanced diagnosis of broken bar fault in induction machines by using Discrete Wavelet Transform under time-varying condition,” in *Proc. IEEE International Electric Machines & Drives Conference*, pp. 424-429, May 2011.
- [49] Y. Gritli, C. Rossi, L. Zarri, F. Filippetti, A. Chatti, and D. Casadei, “Double frequency sliding and wavelet analysis for rotor fault diagnosis in induction motors under time-varying operating condition,” in *Proc. 8th IEEE International Symposium on [Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives](#)*, pp. 676-683, Sep. 2011.
- [50] Y. Gritli, A. Stefani, C. Rossi, F. Filippetti, and A. Chatti, “Experimental validation of doubly fed induction machine electrical faults diagnosis under time-varying conditions,” *Electric Power Systems Research*, vol. 81, pp. 751-766, Mar. 2011.

- [51] R.N. Dash, B. Subudhi, S. Das, "Induction motor stator inter-turn fault detection using wavelet transform technique," in *Proc. International Conference on Industrial and Information Systems*, pp. 436-441, Jul./Aug. 2010.
- [52] J. Antonino-Daviu, S. Aviyente, E. Strangas, and M. Riera-Guasp, "A scale invariant algorithm for the automatic diagnosis of rotor bar failures in induction motors," in *Proc. IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 496-501, Jun. 2011.
- [53] A. Bouzida, O. Touhami, R. Ibtouen, A. Belouchrani, M. Fadel, and A. Rezzoug, "Fault diagnosis in industrial induction machines through discrete wavelet transform," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol.58, no.9, pp. 4385-4395, Sept. 2011.
- [54] J. Antonino-Daviu, V. Climente-Alarcón, J. Pons-Llinares, R. Puche-Panadero, and M. Pineda-Sanchez, "Transient-based analysis for the detection of broken damper bars in synchronous motors," *Mechanical Systems and Signal Processing*, pendiente de publicación.
- [55] J. Cusido, L. Romeral, J. A. Ortega, J. A. Rosero, and A. Garcia Espinosa, "Fault detection in induction machines using power spectral density in wavelet decomposition," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, no. 2, pp. 633–643, Feb. 2008.
- [56] H. Henao, J. Rastegar, G.-A. Capolino, and S. Sieg-Zieba, "Wire rope fault detection in a hoisting winch system by motor torque and current signature analysis," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, pendiente de publicación.
- [57] J. M. Aller, T. G. Habetler, R. G. Harley, R. M. Tallam, and S. B. Lee "Sensorless speed measurement of ac machines using analytic wavelet transform," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 38, no. 5, pp. 1344–1350, Sep/Oct. 2002.
- [58] R. Supangat, N. Ertugrul, W. L. Soong, D. A. Gray, C. Hansen, and J. Grieger, "Detection of broken rotor bars in induction motor using starting-current analysis and effects of loading," *IEE Proc. Electr. Power Appl.*, vol. 153, no. 6, pp. 848–855, Nov. 2006.
- [59] F. Briz, M. W. Degner, P. Garcia, and D. Bragado, "Broken rotor bar detection in line-fed induction machines using complex wavelet analysis of startup transients," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 44, no. 3, pp. 760–768, May/Jun. 2008.
- [60] Z. Zhang, Z. Ren, and W. Huang, "A novel detection method of motor broken rotor bars based on wavelet ridge," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 18, no. 3, pp. 417–423, Sep. 2003.
- [61] S. Rajagopalan, J. M. Aller, J. A. Restrepo, T. G. Habetler, and R. G. Harley, "Analytic-wavelet-ridge-based detection of dynamic eccentricity in brushless direct current (BLDC) motors functioning under dynamic operating conditions," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 54, no. 3, pp. 1410-1419, 2007.
- [62] A. Restrepo, M. I. Giménez, V. M. Guzmán, J. M. Aller and A. Bueno, "Kernel Selection for Sensorless Speed Measurement of AC machines (Wigner vs Page Representation)," in *Proc. 24th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, vol. 2, pp. 991-996, Aug./Sep. 1998.
- [63] S. Ahmed, and H. A. Toliyat, "A novel DSP based speed sensorless performance evaluation tool for induction motors," in *Proc. IEEE Industry Applications Conference*, vol. 3, pp. 1551-1557, Sep./Oct. 2001.
- [64] S. Nandi, S. Ahmed, H. A. Toliyat, and R. M. Bharadwaj "Selection criteria of induction machines for speed-sensorless drive applications," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 39, no. 3, pp. 704–712, May/Jun. 2003.
- [65] S. Rajagopalan, J. M. Aller, J. A. Restrepo, T. G. Habetler, and R. G. Harley, "Detection of rotor faults in brushless DC motors operating under nonstationary conditions," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 42, no. 6, pp. 1464-1477, 2006.
- [66] S. Rajagopalan, J. A. Restrepo, J. M. Aller, T. G. Habetler, and R. G. Harley, "Nonstationary motor fault detection using recent quadratic time-frequency representations," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 44, no. 3, pp. 735-744, 2008.
- [67] J. A. Rosero, L. Romeral, J. A. Ortega, and E. Rosero, "Short-circuit detection by means of empirical mode decomposition and Wigner–Ville distribution for PMSM

- running under dynamic condition,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 11, pp. 4534-4547, 2009.
- [68] J. Urresty, J. Riba, J. Ortega, and J. Cárdenas, “Stator short circuits in PMSM by means of the Zhao-Atlas-Marks distribution and energy calculation,” in *Proc. 13th European Conference on Power Electronics and Applications*, pp. 1-9, Sep. 2009
- [69] J. Rosero, J. Cusido, A. Garcia-Espinosa, J. A. Ortega, and L. Romeral, “Broken bearings fault detection for a permanent magnet synchronous motor under non-constant working conditions by means of a joint time frequency analysis,” in *Proc. IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 3415-3419, Jun. 2007.
- [70] M. Blödt, M. Chabert, J. Regnier, and J. Faucher, “Mechanical load fault detection in induction motors by stator current time-frequency analysis,” *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 42, no. 6, pp. 1454-1463, Nov./Dec. 2006.
- [71] M. Blödt, D. Bonacci, J. Regnier, M. Chabert, and J. Faucher, “Online monitoring of mechanical faults in variable-speed induction motor drives using the Wigner distribution,” *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 55, no. 2, pp. 522-533, Feb. 2008.
- [72] M. Blödt, J. Regnier, and J. Faucher, “Distinguishing load torque oscillations and eccentricity faults in induction motors using stator current Wigner distributions,” *IEEE Trans. Ind. Appl.* vol. 45, no. 6, pp. 1991-2000, 2009.
- [73] A. Lebaroud, and G. Clerc, “Accurate diagnosis of induction machine faults using optimal time–frequency representations,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 22, no. 4-5, pp. 815-822, Jun. 2009.
- [74] M. Pineda-Sanchez, M. Riera-Guasp, J. Roger-Folch, J. A. Antonino-Daviu, J. Perez-Cruz, and R. Puche-Panadero, “Diagnosis of induction motor faults in time-varying conditions using the polynomial-phase transform of the current,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 4, pp. 1428-1439, 2011.
- [75] M. Pineda-Sanchez, M. Riera-Guasp, J. A. Antonino-Daviu, J. Roger-Folch, J. Perez-Cruz, and R. Puche-Panadero, “Diagnosis of induction motor faults in the fractional Fourier domain,” *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, no. 8, pp. 2065-2075, 2010.
- [76] V. Climente-Alarcon, J. Antonino-Daviu, M. Riera-Guasp, J. Pons-Llinares, J. Roger-Folch, P. Jover-Rodriguez, and A. Arkkio, “Transient tracking of low and high-order eccentricity-related components in induction motors via TFD tools,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, no. 2, pp. 667–679, Feb. 2011.
- [77] V. Climente-Alarcon, J.A. Antonino-Daviu, M. Riera-Guasp, R. Puche-Panadero, and L. Escobar, “Application of the Wigner-Ville distribution for the detection of rotor asymmetries and eccentricity through high-order harmonics,” *Electric Power Systems Research*, vol. 91, pp. 28-36, Oct. 2012.
- [78] Z. K. Peng, P. W. Tse, and F. L. Chu, “A comparison study of improved Hilbert-Huang transform and wavelet transform: application to fault diagnosis for rolling bearing,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 19, no. 5, pp. 974-988, Sep. 2005.
- [79] J. A. Antonino-Daviu, M. Riera-Guasp, M. Pineda-Sanchez, and R. B. Perez, “A critical comparison between DWT and Hilbert Huang-based methods for the diagnosis of rotor bar failures in induction machines,” *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 45, no. 5, pp. 1794-1803, Sep./Oct. 2009.
- [80] J. Antonino-Daviu, P. Jover-Rodriguez, M. Riera-Guasp, A. Arkkio, J. Roger-Folch, and R.B. Pérez, “Transient detection of eccentricity related components in induction motors through the Hilbert-Huang transform,” *Energy Conversion and Management*, vol. 50, no. 7, pp. 1810- 1820, Jul. 2009.
- [81] N. E. Huang and S. S. P. Shen, *Hilbert-Huang Transform and its Applications*. Singapore: World Scientific, 2005.
- [82] J.A. Antonino-Daviu, M. Riera-Guasp, J. Pons-Llinares, J. Roger-Folch, R.B. Perez, and C. Charlton-Perez, “Toward condition monitoring of damper windings in synchronous motors via EMD analysis,” *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 27, no. 2, pp. 432-439, Jun. 2012.

- [83] V. Choqueuse, M. E. H. Benbouzid, J. F. Charpentier, and G. Barakat, "A comparative study of time-frequency representations for fault detection in wind turbine," in *Proc. 37<sup>th</sup> Annual conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 3584-3589, Nov. 2011.
- [84] N. M. Elkasabgy, A. R. Eastham, and G. E. Dawson, "Detection of broken bars in the cage rotor on an induction machine," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 28, no. 1, pp. 165-171, Jan./Feb. 1992.
- [85] J. Milimonfared, H. M. Kelk, S. Nandi, A. D. Minassians, and H. A. Toliyat, "A novel approach for broken-rotor-bar detection in cage induction motors," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 35, no. 5, pp. 1000-1006, Sep./Oct. 1999.
- [86] F. Cupertino, E. de Vanna, L. Salvatore, and S. Stasi, "Analysis techniques for detection of IM broken rotor bar after supply disconnection," *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 40, no. 2, pp. 562-533, Mar./Apr. 2004.
- [87] R. Supangat, J. Grieger, N. Ertugrul, W. L. Soong, D. A. Gray, and C. Hansen, "Detection of broken rotor bar faults and effects of loading in induction motors during rundown," in *Proc. IEEE International Electric Machines & Drives Conference*, pp. 196-201, May 2007.
- [88] S. H. Kia, H. Henao, G.-A. Capolino, and C. Martis, "Induction machine broken bars fault detection using stray flux after supply disconnection," in *Proc. 32<sup>nd</sup> Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*, pp. 1498-1503, Nov. 2006.
- [89] S. Nandi, T. C. Ilamparithi, S. B. Lee, and D. Hyun, "Detection of eccentricity faults in induction machines based on nameplate parameters," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 5, pp. 1673-1683, May 2011.
- [90] C. Kral, R. S. Wieser, F. Pirker, and M. Shagginger, "Sequences of field-oriented control for the detection of faulty rotor bars in induction machines-the Vienna Monitoring Method," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 47, no. 5, pp. 1042-1050, Oct. 2000.
- [91] A. Stefani, A. Bellini, and F. Filippetti, "Diagnosis of induction machines' rotor faults in time-varying conditions," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 11, pp. 4548-4556, Nov. 2009.
- [92] B. Akin, U. Orguner, H. A. Toliyat, and M. Rayner, "Phase-sensitive detection of motor fault signatures in the presence of noise," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, no. 6, pp. 2539-2550, Jun. 2008.
- [93] X. Huang, T. G. Habetler, and R. G. Harley, "Detection of rotor eccentricity faults in a closed-loop drive-connected induction motor using an artificial neural network," *IEEE Trans. Power Electronics*, vol. 22, no. 4, pp. 1552-1541, July 2007.
- [94] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. New York: Academic, 1998.
- [95] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*. Siam, 1992.
- [96] S. Qian, *Introduction to time-frequency and wavelet transforms*. Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 2002.
- [97] D. Gabor, "Theory of communication," *J. IEE*, vol. 93, pp. 429-457, 1946.
- [98] S. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415, Dec. 1993.
- [99] S. Qian and D. Chen, "Signal representation in adaptive Gaussian functions and adaptive spectrogram," in *Proc. 27<sup>th</sup> Annual Conference on Information Sciences and Systems*, pp. 59-65, Mar. 1993.
- [100] S. Qian and D. Chen, "Signal representation using adaptive normalized Gaussian functions," *Signal Processing*, vol. 36, no. 1, pp. 1-11, Mar. 1994.
- [101] M. Riera-Guasp, J. Pons-Llinares, F. Vedreno-Santos, J. A. Antonino-Daviu, and M. Fernandez Cabanas, "Evaluation of the amplitudes of high-order fault related components in double bar faults," in *Proc. 8<sup>th</sup> IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives*, pp. 307-315, Sep. 2011.

- [102] J. Faiz and M. Ojaghi, "Different indexes for eccentricity faults diagnosis in three-phase squirrel-cage induction motors: A review," *Mechatronics*, vol. 19, no. 1, pp. 2–13, Feb. 2009.
- [103] S.B. Chaudhury, and S. Gupta, "Online identification of AC motor misalignment using current signature analysis and modified K-mean clustering technique," in *Proc. IEEE International Conference on Industrial Technology*, pp. 2331-2336, Dec. 2006.



# Listado de publicaciones.

En la fecha de la actual impresión, la presente tesis ha dado lugar al siguiente conjunto de publicaciones:

## Revistas

1. J. Pons-Llinares, J. Antonino-Daviu, M. Riera-Guasp, M. Pineda-Sanchez, and V. Climente-Alarcon, "Induction motor diagnosis based on a transient current analytic wavelet transform via Frequency B-Splines," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, no. 5, pp. 1530-1544, May 2011.
2. J. Pons-Llinares, M. Riera-Guasp, J. Antonino-Daviu, and J. Roger-Folch, "An adaptive time-frequency transform using Frequency B-Splines for electric machines transient diagnosis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Preparado pendiente de envío.

## Congresos

1. J. Pons-Llinares, J. Antonino-Daviu, J. Roger-Folch, D. Morinigo-Sotelo, and O. Duque-Perez, "Eccentricity diagnosis in inverter - fed induction motors via the analytic wavelet transform of transient currents," in *Proc. 19th International Conference on Electrical Machines*, Rome, Italy, 2010, pp. 1-6.
2. J. Antonino-Daviu, V. Climente-Alarcon, J. Pons-Llinares, M. Pineda-Sanchez, P. Jover-Rodriguez, A. Arkkio, "Application of TFD tools for the tracing of eccentricity-related components in induction machines," in *Proc. 35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*, 2009, pp. 1039-1044.
3. M. Riera-Guasp, J. Pons-Llinares, F. Vedreno-Santos, J. A. Antonino-Daviu, and M. Fernandez-Cabanas, "Evaluation of the amplitudes of the high-order fault related components in double bar faults," in *Proc. 8th IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives*, Bologna, Italy, 2011, pp. 1-9.
4. J. Pons-Llinares, J. A. Antonino-Daviu, M. Riera-Guasp, M. Pineda-Sanchez, and V. Climente-Alarcon, "Induction motor fault diagnosis based on analytic wavelet transform via frequency B-splines," in *Proc. 7th IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives*, Cargèse, France, 2009, pp. 1-7.
5. J. Pons-Llinares, V. Climente-Alarcon, F. Vedreno-Santos, J. Antonino-Daviu, and M. Riera-Guasp, "Electric machines diagnosis techniques via transient current analysis," in *Proc. 38th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*, Montreal, Canada, 2012, pp. 1-8.
6. J. Pons-Llinares, V. Climente-Alarcon, R. Puche-Panadero, and J. A. Antonino-Daviu, "Bar breakage detection on squirrel cage induction motors via transient motor current signal analysis based on the wavelet transform. A review.," in *Proc. 11th Spanish Portuguese conference on electrical engineering*, Zaragoza, Spain, 2009, pp. 1-9.
7. R. Puche-Panadero, J. Pons-Llinares, V. Climente-Alarcon, and M. Pineda-Sanchez, "Review diagnosis methods of induction electrical machines based on steady state current", in *Proc. 11th Spanish Portuguese conference on electrical engineering*, Zaragoza, Spain, 2009, pp. 1-9.



# Apéndice Matemático

El presente apéndice matemático tiene tres puntos. En el primer apartado se exponen, con el objeto de facilitar la comprensión al lector no experto en la materia, definiciones varias, así como el enunciado y demostración de algunas propiedades, que se utilizarán en los siguientes apartados del apéndice y sobre todo en otras partes de la tesis (por ejemplo, la definición de transformada de Fourier utilizada). En definitiva, definiciones y propiedades cuya revisión permite realizar una cómoda lectura del resto.

En el segundo apartado se introduce en primer lugar el concepto de ventana modulada. Los dos tipos de átomos tiempo-frecuencia utilizados a lo largo de la tesis (funciones de Gabor y Frequency B-Splines) son ventanas moduladas. En éste apartado se explica la forma de construir éste tipo de átomos en términos de las propiedades que debe cumplir la ventana utilizada (AM 2.1), se calcula su frecuencia central (AM 2.2) y se deducen las expresiones simplificadas de las dimensiones de las cajas de Heisenberg de éste tipo de función (AM 2.3), las cuales se utilizarán para calcular las pendientes de las cajas de Heisenberg de las Frequency B-Splines en el capítulo 6 (formula clave en la metodología de diagnóstico desarrollada) y de las funciones de Gabor en el apartado AM 3 del presente apéndice.

Por último, en el apartado AM 3 se definen las funciones de Gabor analizando algunas de sus propiedades (AM 3.1), realizando un recordatorio de la función Gaussiana en la cual están basadas (AM 3.2) y demostrando que cumplen con la condición de ventana modulada estudiada en AM 2.1 (AM 3.3), pudiendo por tanto utilizar las fórmulas deducidas en AM 2.2 y AM 2.3 para calcular la frecuencia central de una función de Gabor, así como las dimensiones y la pendiente de su caja de Heisenberg (AM 3.4). En el capítulo 6 se realiza un análisis paralelo al realizado en AM 3, pero en este caso centrado en las Frequency B-Splines, con el objetivo final de calcular la pendiente de sus cajas de Heisenberg y comparar finalmente las Frequency B-Splines con las funciones de Gabor.

Aunque lo que se dice en el apéndice no es del todo novedoso, pues son temas que han sido analizados ya en la literatura científica [94], [95], [96], el análisis realizado si lo es: ha sido redactado de forma original durante el transcurso de la tesis.

## **AM 1.- Base matemática.**

### **AM 2.- Ventanas moduladas.**

AM 2.1.- Construcción de ventanas moduladas.

AM 2.2.- Cálculo de la frecuencia central de una ventana modulada.

AM 2.3.- Cálculo de la caja de Heisenberg de una ventana modulada.

### **AM 3.- Funciones de Gabor.**

AM 3.1.- Definición de las funciones de Gabor.

AM 3.2.- Recordatorio de la función gaussiana.

AM 3.3.- Estudio de las propiedades de la ventana utilizada.

AM 3.4.- Cálculo de la pendiente de las funciones de Gabor.

## AM 1.- Base matemática.

A continuación se recuerdan ciertas definiciones varias que se han utilizado a lo largo del texto, así como las propiedades utilizadas en las demostraciones.

**Definición 1** (Función real, función compleja y función de variable real)

Una función  $f : X \rightarrow Y$  es real si  $Y = \mathbb{R}$ , es compleja si  $Y = \mathbb{C}$  y es de variable real si  $X = \mathbb{R}$ . Las funciones analizadas en nuestro contexto son funciones reales de variable real.

**Definición 2** (Función par)

Una función  $f : X \rightarrow Y$  es par si y solo si  $f(-x) = f(x) \forall x \in X$ . Si  $f$  es además una función real de variable real, esto es  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , su representación gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es impar si y solo si  $f(-x) = -f(x) \forall x \in X$ . Si  $f$  es además una función real de variable real, esto es  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , su representación gráfica es simétrica respecto al origen del sistema de referencia.

**Definición 3** (Conjunto  $L^p(\mathbb{R})$ )

El conjunto  $L^p(\mathbb{R})$  se define como sigue:

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt < +\infty \right\} \quad (\text{AM 1.1})$$

Siendo  $\int$  la integral de Lebesgue. En particular,  $L^1(\mathbb{R})$  es el conjunto de las funciones Lebesgue integrables:

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \right\} \quad (\text{AM 1.2})$$

Por otra parte,  $L^2(\mathbb{R})$  es el conjunto de las funciones de energía finita:

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\} \quad (\text{AM 1.3})$$

Algunas de las funciones utilizadas en el contexto del trabajo, tienen energía igual a 1:

$$\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1 \quad (\text{AM 1.4})$$

**Definición 4** (Función de soporte compacto)

Se dice que una función  $f$  es de soporte compacto si  $\exists a, b \in \mathbb{R}, b > a / f(x) = 0 \forall x \notin [a, b]$ . Es decir, la función es nula en toda la recta real salvo en los puntos pertenecientes a cierto intervalo compacto  $[a, b]$ . A dicho intervalo se le llama soporte de  $f$ .

Nota: Para una correcta interpretación de la definición, recordar que el conjunto  $\mathbb{R}$  no comprende a  $+\infty$  y  $-\infty$ .

**Definición 5** (Transformada de Fourier.)

La definición de Transformada de Fourier de una función  $g \in L^1(\mathbb{R})$  adoptada en el presente texto es la siguiente:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{AM 1.5})$$

**Propiedad 1** Demostración de que la Transformada de Fourier de una función par es también par.

La TF de la función  $g$  es:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{AM 1.6})$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} t' = -t &\Rightarrow t = -t' \Rightarrow dt = -dt' \\ \text{Si } t = +\infty &\Rightarrow t' = -\infty \\ \text{Si } t = -\infty &\Rightarrow t' = +\infty \end{aligned} \quad (\text{AM 1.7})$$

Con lo cual:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{+\infty}^{-\infty} g(-t') e^{i\omega t'} - dt' \quad (\text{AM 1.8})$$

Si permutamos los límites de integración, el valor de la integral cambia de signo:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{+\infty}^{-\infty} g(-t') e^{i\omega t'} - dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-t') e^{i\omega t'} dt' \quad (\text{AM 1.9})$$

Teniendo en cuenta que la función es par, llegamos al resultado:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-t') e^{i\omega t'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t') e^{i\omega t'} dt' = \hat{g}(-\omega) \quad (\text{AM 1.10})$$

**Propiedad 2** Demostración de que la Transformada de Fourier de una función real y par es también real.

De forma general se cumple:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} [\hat{g}(\omega) + \hat{g}(\omega)] \quad (\text{AM 1.11})$$

Teniendo en cuenta que  $g$  es una función par, entonces  $\hat{g}$  también es par:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} [\hat{g}(\omega) + \hat{g}(-\omega)] \quad (\text{AM 1.12})$$

Por definición de TF tenemos:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{i\omega t} dt \right] \quad (\text{AM 1.13})$$

Agrupando términos:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{1}{2} [e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}] dt \quad (\text{AM 1.14})$$

Utilizando la fórmula de Moivre:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos(\omega t) dt \quad (\text{AM 1.15})$$

Como  $g$  es una función real, el resultado de la integral  $\hat{g}$  es también una función real.

### **Propiedad 3**

Enunciado:

Sea una función  $f$  tal que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Sea  $\hat{f}$  su TF tal que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Si  $\hat{f}$  es par, entonces  $2\pi f$  es la Transformada de Fourier de  $\hat{f}$ .

Demostración:

Según el Teorema de la Transformada de Fourier Inversa:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \hat{f}(t') \exp(it'\omega) dt' \quad (\text{AM 1.16})$$

Las variables independientes de  $f$  y de  $\hat{f}$  suelen representarse como  $t$  y  $\omega$  respectivamente, símbolos habituales del tiempo y la frecuencia angular. Sin embargo, en este caso hemos utilizado las letras  $\omega$  y  $t'$  con el fin de, después de realizar los cambios de variable adecuados, obtener una presentación del resultado final más fácil de entender. Realizando el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} t = -t' &\Rightarrow t' = -t \Rightarrow dt' = -dt \\ \text{Si } t' = \pm\infty &\Rightarrow t = \mp\infty \end{aligned} \quad (\text{AM 1.17})$$

obtenemos:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\omega}^{-\omega} \hat{f}(-t) \exp(i-t\omega) - dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \hat{f}(-t) \exp(-it\omega) dt \quad (\text{AM 1.18})$$

Si además  $f$  es par, entonces  $\hat{f}$  también es par. Teniendo en cuenta esto e invirtiendo el orden del producto en la exponencial:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \hat{f}(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{AM 1.19})$$

Finalmente obtenemos que,  $2\pi f$  es la Transformada de Fourier de  $\hat{f}$ :

$$2\pi f(\omega) = \int_{-\omega}^{+\omega} \hat{f}(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{AM 1.20})$$

**Definición 6** (Función analítica)

Una función  $h \in L^2(\mathbb{R})$  es analítica si su transformada de Fourier  $\hat{h}$  es cero para valores negativos de la frecuencia, es decir,  $h \in L^2(\mathbb{R})$  es analítica si  $\hat{h}(f) = 0 \quad \forall f < 0$ .

## AM 2.- Ventanas moduladas

Los átomos tiempo-frecuencia que se han utilizado a lo largo de la presente tesis (Frequency B-Splines y funciones de Gabor), se generan utilizando un mismo método o filosofía de construcción [94]. El método está basado en la modulación en frecuencia (adecuada, tal y como veremos más adelante) de una ventana real y par cuya transformada de Fourier (TF) sea de soporte compacto. Como el átomo final se va a utilizar para calcular un producto interno en  $L^2(\mathbb{R})$ , se requiere que la ventana pertenezca a  $L^2(\mathbb{R})$ , es decir, que se trate de una función de energía finita. Además, se normaliza la ventana multiplicándola por una constante de tal forma que su energía sea igual a 1. Por último se requiere que la ventana pertenezca a  $L^1(\mathbb{R})$  para que su concentración de la energía en el dominito temporal sea relativamente buena. La llamada ventana es pues una función  $g$  que en resumen cumple las siguientes propiedades (consultar en caso de necesidad las correspondientes definiciones en el apartado anterior):

- $g$  es real.
- $g$  es par.
- $g \in L^1(\mathbb{R})$
- Su TF  $\hat{g}$  es de soporte compacto, siendo dicho soporte  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$ .
- $g \in L^2(\mathbb{R})$
- Su energía es igual a 1:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ .

Una vez elegida la ventana, realizamos su modulación a una frecuencia angular  $\omega_c$ :  $\psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t)$ . Tal y como veremos en el siguiente punto, la función resultado de la modulación  $\psi$ , hereda muchas de las propiedades de la ventana: pertenece a  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , su energía es igual a 1 y su TF es también de soporte compacto, estando su energía confinada frecuencialmente en el intervalo  $[\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2]$  y distribuida alrededor de  $\omega_c$ . Por otra parte,  $\psi$  es una función compleja cuya parte real es par y cuya parte imaginaria es impar (estando pues centrada alrededor del origen). Eligiendo adecuadamente el valor de la frecuencia de modulación ( $\omega_c > \omega_b/2 > 0$ ), su TF es cero para las frecuencias iguales o menores a cero, tratándose por tanto de una función analítica. Además, al ser su TF nula en 0, su valor medio es por tanto cero (uno de los requisitos para ser una wavelet). Las funciones construidas mediante este método se llaman ventanas moduladas (VM).

Para poder calcular las dimensiones de las cajas de Heisenberg de una VM, resulta necesario conocer previamente el valor de su frecuencia central, la cual, tal y como veremos, es igual a la frecuencia de modulación utilizada (Mallat, último párrafo de la página 87 de [94]). Esta propiedad ha sido analizada en profundidad (apartado AM 2.2), concluyendo que, para que la frecuencia central de la VM sea igual a la frecuencia

de modulación, la ventana utilizada debe ser par, su energía debe ser igual a 1 y debe pertenecer a  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

A la hora de analizar una señal, la correcta selección del átomo tiempo-frecuencia, así como la asignación de valores a sus parámetros, resultan vitales para obtener un análisis con buena resolución. Para ello es necesario que las Cajas de Heisenberg del átomo tiempo-frecuencia seleccionado, tengan dimensiones adecuadas a la evolución temporal de las frecuencias presentes en la señal a analizar. Las fórmulas que determinan las dimensiones de las Cajas de Heisenberg para el caso de VM, han sido deducidas en el apartado AM 2.3 de forma novedosa, hasta donde el autor conoce.

Como ya se ha dicho, los átomos tiempo-frecuencia utilizados en el presente trabajo de investigación (Gabor y FBS), se construyen mediante la modulación en frecuencia de una ventana. Se trata pues de VM. Sin embargo, las ventanas utilizadas no cumplen todas las propiedades anteriormente mencionadas. Más concretamente, las funciones de Gabor utilizan una ventana cuya TF no es de soporte compacto. Por otra parte, las FBS utilizan una ventana que, en algunos casos, no es Lebesgue integrable (es decir, no pertenece al conjunto  $L^1(\mathbb{R})$ ). Así pues, en cualquier caso, la frecuencia central de una función de Gabor será igual a la frecuencia de modulación, pues cumple todas las hipótesis necesarias, pero no ocurrirá otro tanto con respecto a las FBS, pues en algunos casos no pertenece al conjunto  $L^1(\mathbb{R})$ . El apartado AM 3 y el capítulo 6 presentan el análisis de las propiedades de ambos tipos de átomos tiempo-frecuencia. El cálculo de las dimensiones de sus respectivas cajas de Heisenberg en función de sus parámetros se realiza al final de estos apartados, basando sus conclusiones en el análisis que aquí se realiza.

### AM 2.1.- Construcción de ventanas moduladas.

Una forma simple de construir una función analítica es mediante la modulación en frecuencia (adecuada) de una función real y par  $g$ , cuya Transformada de Fourier  $\hat{g}$  sea de soporte compacto. Justifiquémoslo tanto de forma analítica como de forma gráfica.

Al ser  $g$  una función par, entonces su TF  $\hat{g}$  también es par. Como además de par  $g$  es real, su TF  $\hat{g}$  es también real<sup>1</sup>. Por último,  $\hat{g}$  es de soporte compacto. Como  $\hat{g}$  es par, su soporte estará centrado en el origen. Si llamamos  $\omega_b \in \mathbb{R}$  a la longitud del soporte de  $\hat{g}$ , podemos escribir  $\hat{g}(\omega) = 0 \forall |\omega| > \omega_b/2$ .

Al realizar la modulación de la función  $g$  a una determinada frecuencia  $\omega_c$  obtenemos la siguiente función:

$$\psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t) \tag{AM 2.1}$$

---

<sup>1</sup> La definición de transformada de Fourier utilizada en el presente texto, así como las demostraciones de estas dos propiedades, se exponen en el punto anterior AM 1.

## Apéndice Matemático

Si tomamos un valor de la frecuencia de modulación tal que  $\omega_c > \omega_b/2$  (modulación adecuada), entonces la función que obtenemos  $\psi$  es analítica. Veamos porqué. Su TF  $\hat{\psi}$  es:

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_c) \quad (\text{AM 2.2})$$

Por hipótesis la función  $\hat{g}$  cumple  $\hat{g}(\omega) = 0 \forall |\omega| > \omega_b/2$ . Como  $\omega_c > \omega_b/2$  tenemos  $\hat{g}(\omega) = 0 \forall |\omega| > \omega_c$  y en particular  $\hat{g}(\omega) = 0 \forall \omega < -\omega_c$ . O lo que es lo mismo  $\hat{g}(\omega - \omega_c) = 0 \forall \omega - \omega_c < -\omega_c$ . Finalmente tenemos que  $\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_c) = 0 \forall \omega < 0$ , con lo cual  $\psi$  cumple con la definición de función analítica.

Pongamos un ejemplo que nos facilite realizar el análisis de forma gráfica. Resulta trivial demostrar que la siguiente función es real y par:

$$g(t) = \sqrt{0,075} \cdot \begin{cases} \frac{\sin^2(0,05\pi t)}{(0,05\pi t)^2} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases} \quad (\text{AM 2.3})$$

Su representación gráfica se muestra en la Figura AM 2.1. Además, si calculamos su TF:

$$\hat{g}(\omega) = 20\sqrt{0,075} \cdot \begin{cases} 1 - \left| \frac{10\omega}{\pi} \right| & |\omega| < \frac{\pi}{10} \\ 0 & |\omega| \geq \frac{\pi}{10} \end{cases} \quad (\text{AM 2.4})$$

vemos que es de soporte compacto, siendo dicho soporte el intervalo  $[-\pi/10, \pi/10]$ . En la Figura AM 2.2 se muestra la representación gráfica (de color azul), de la función  $\hat{g}$  definida en (AM 2.4).

En definitiva, la función  $\hat{g}$  definida en (AM 2.4) y representada en la Figura AM 2.2, es una función real, par y de soporte compacto, siendo la longitud de dicho soporte igual a  $\pi/5$ . La función  $\hat{\psi}$  no es más que una traslación de  $\hat{g}$ . Si trasladamos  $\hat{g}$  lo suficiente, esto es cumpliéndose  $\omega_c > \pi/10$ , teniendo en cuenta que el soporte de  $\hat{g}$  es  $[-\pi/10, \pi/10]$ , entonces  $\hat{\psi}(\omega) = 0 \forall \omega < 0$ . La Figura AM 2.2 muestra la función  $\hat{\psi}$  asociada al ejemplo cuando  $\omega_c = \pi/8$  (representada en color rojo).

Observar que, para que  $\psi$  sea una función analítica, tan sólo es necesario que  $\hat{g}(\omega) = 0 \forall \omega < -\omega_c$ . Las condiciones restantes impuestas a  $g$  aportan propiedades interesantes al utilizar  $\psi$  como átomo tiempo-frecuencia. Analicemos con detalle estas propiedades.

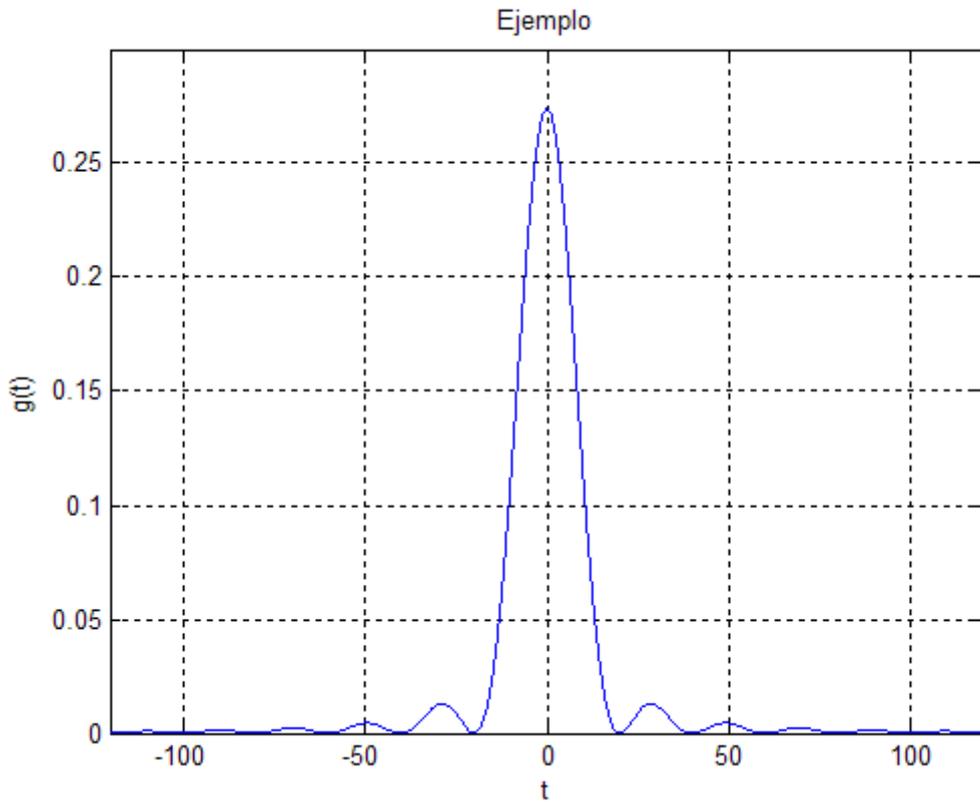


Fig. AM 2.1 Representación gráfica de la función  $g$  definida en (AM 2.3).

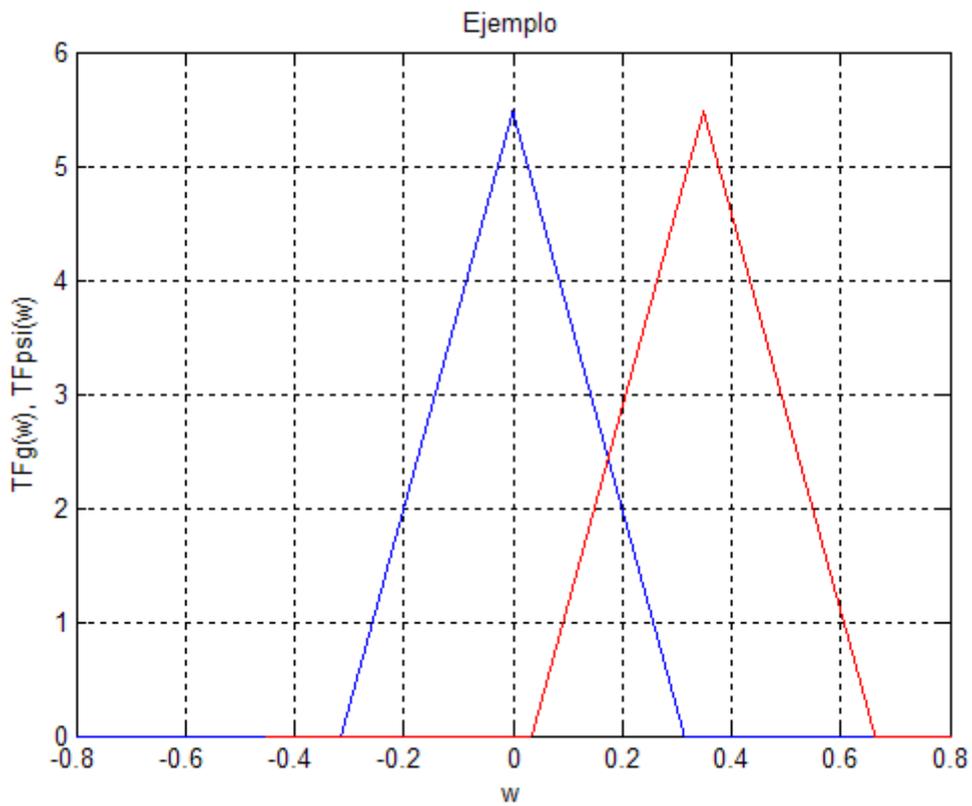


Fig. AM 2.2 Representación gráfica de la función  $\hat{g}$  definida en (AM 2.4) (azul) y de la función  $\hat{\psi}$  asociada al ejemplo tomando  $\omega_c = \pi/8$  (rojo).

## Apéndice Matemático

En primer lugar, el hecho de que  $\hat{g}$  sea una función real implica que  $\hat{\psi}$  es también real. Esto facilita su interpretación como filtro pasa-banda. Facilita también el cálculo de los distintos tipos de transformadas sobre funciones reales aplicando la fórmula de Parseval.

Por otra parte, escribamos  $\psi$  separando su parte real y su parte imaginaria teniendo en cuenta que  $g$  es real:

$$\psi(t) = \operatorname{Re}[\psi](t) + \operatorname{Im}[\psi](t)i = g(t)\cos(\omega_c t) + g(t)\sin(\omega_c t)i \quad (\text{AM 2.5})$$

Al ser  $g$  par, la parte real de  $\psi$  también lo es:

$$\operatorname{Re}[\psi](-t) = g(-t)\cos(-\omega_c t) = g(t)\cos(\omega_c t) = \operatorname{Re}[\psi](t) \quad (\text{AM 2.6})$$

Siguiendo un razonamiento análogo vemos que su parte imaginaria es impar:

$$\operatorname{Im}[\psi](-t) = g(-t)\sin(-\omega_c t) = -g(t)\sin(\omega_c t) = -\operatorname{Im}[\psi](t) \quad (\text{AM 2.7})$$

Como consecuencia, en el caso de tener la función  $\psi$  una buena localización temporal de su energía (condición que requeriremos más adelante), esta estaría necesariamente distribuida alrededor del origen. Dicho en otras palabras,  $\psi$  esta centrada alrededor del origen (condición deseable para que  $\psi$  sea un buen átomo tiempo-frecuencia).

Por otra parte, al ser  $\hat{g}$  de soporte compacto (siendo su soporte  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$ ),  $\hat{\psi}$  también lo es (siendo su soporte  $[\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2]$ ). La función  $\psi$  tiene por tanto una buena localización frecuencial de su energía: esta se encuentra confinada en el intervalo  $[\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2]$ . Como además  $\hat{g}$  es par,  $\hat{\psi}$  es par con respecto a  $\omega_c$ :  $\hat{\psi}(\omega_c - \omega) = \hat{\psi}(\omega_c + \omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, la energía de  $\psi$  se encuentra distribuida frecuencialmente alrededor de  $\omega_c$ . Esto favorece la localización frecuencial de la energía de  $\psi$  (lo cual resulta interesante al utilizarla como átomo tiempo-frecuencia).

No obstante, como átomo tiempo-frecuencia, interesa que  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  cumpla una serie de propiedades adicionales:

- $\psi \in L^1(\mathbb{R})$
- $\psi \in L^2(\mathbb{R})$
- Tiene valor medio nulo:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ .
- Su energía es igual a 1:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$ .
- Está centrada alrededor de  $t = 0$ .

Analicemos las propiedades que debe cumplir  $g$  para que  $\psi$  cumpla lo anterior. Veamos en primer lugar qué relación existe entre el módulo de  $\psi$  y el módulo de  $g$ :

$$|\psi(t)| = |g(t)e^{i\omega_c t}| = |g(t)||e^{i\omega_c t}| = |g(t)| \quad (\text{AM 2.8})$$

¿Qué condición debe cumplir  $g$  para que  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ ? En primer lugar:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \quad (\text{AM 2.9})$$

Como:

$$\psi \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt < +\infty \quad (\text{AM 2.10})$$

Entonces  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow g \in L^1(\mathbb{R})$ . Ya habíamos indicado anteriormente que la parte real de la función  $\psi$  es par y que su parte imaginaria es impar. Por lo tanto, la energía de  $\psi$  se encuentra distribuida de igual forma a ambos lados del eje de ordenadas. O lo que es lo mismo,  $\psi$  está centrada alrededor de  $t = 0$ . Si  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $\psi$  decae suficientemente rápido (tiende a cero con relativa rapidez cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ ). O lo que es lo mismo, su energía se encuentra relativamente bien concentrada en el tiempo. Concluimos que la energía de  $\psi$  se encuentra relativamente bien localizada en el tiempo alrededor de  $t = 0$ .

De la misma forma,  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow g \in L^2(\mathbb{R})$  pues:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \quad (\text{AM 2.11})$$

Esto nos permitirá calcular las transformadas expuestas a continuación (STFT, CWT, MP y AGT) pues no son más que productos escalares en  $L^2(\mathbb{R})$  entre una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*(t) dt \quad (\text{AM 2.13})$$

Por otra parte, según (3.11), las energías de  $\psi$  y de  $g$  son iguales. Por tanto debemos requerir que la energía de  $g$  sea igual a 1. Como ya habíamos requerido que  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , como mucho deberemos multiplicar  $g$  por una cierta constante de normalización.

Por último, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t) \\ \hat{g}(\omega) = 0 \quad \forall \omega < -\omega_b/2 \\ \omega_c > \omega_b/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\psi}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \leq 0 \quad (\text{AM 2.14})$$

Es decir, como la desigualdad es estricta ( $\omega_c > \omega_b/2$ ), la función no es sólo analítica ( $\hat{\psi}(\omega) = 0 \quad \forall \omega < 0$ ), sino que también se cumple  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Teniendo en cuenta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = \hat{\psi}(0) \quad (\text{AM 2.15})$$

podemos afirmar que el valor medio de  $\psi$  es cero. En este caso no tenemos que exigir ninguna propiedad adicional a  $g$ .

Resumimos el presente apartado en la siguiente propiedad:

**Propiedad** (Construcción de Ventanas Moduladas):

**Enunciado:**

Sea una función  $g$  tal que:

- $g$  es real.
- $g$  es par.
- $g \in L^1(\mathbb{R})$
- Su TF  $\hat{g}$  es de soporte compacto, siendo dicho soporte  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$ .
- $g \in L^2(\mathbb{R})$
- Su energía es igual a 1:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ .

su modulación a una determinada frecuencia angular  $\omega_c$  tal que  $\omega_c > \omega_b/2$ :

$$\psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t) \quad (\text{AM 2.16})$$

da como resultado una función  $\psi$  analítica, estando además su energía confinada frecuencialmente en el intervalo  $[\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2]$  y distribuida alrededor de  $\omega_c$ . Dicha función posee las propiedades adecuadas para ser un átomo tiempo-frecuencia.

**Demostración:**

A continuación se esquematiza el razonamiento realizado:

Primero:

$$g \text{ par} \Rightarrow \hat{g} \text{ par}$$

Segundo:

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ par} \\ g \text{ real} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{g} \text{ real}$$

Tercero:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{g} \text{ par} \\ \hat{g} \text{ de soporte compacto} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{soporte de } \hat{g} \text{ centrado en } \omega = 0 : [-\omega_b/2, \omega_b/2]$$

La energía de  $g$  se encuentra frecuentemente localizada en  $[-\omega_b/2, \omega_b/2]$  y distribuida alrededor de  $\omega = 0$ .

Cuarto:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t) \\ \omega_c > \omega_b/2 \\ \hat{g}(\omega) = 0 \quad \forall \omega < -\omega_b/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \psi \text{ función analítica}$$

Como además:

$$\hat{g} \text{ real} \Rightarrow \hat{\psi} \text{ real}$$

$$\text{Soporte de } \hat{g} : [-\omega_b/2, \omega_b/2] \Rightarrow \text{Soporte de } \hat{\psi} : [\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2]$$

$$\hat{g} \text{ par} \Rightarrow \hat{\psi} \text{ par respecto a } \omega_c$$

En definitiva:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t) \\ \omega_c > \omega_b/2 \\ \text{Soporte de } \hat{g} : [-\omega_b/2, \omega_b/2] \\ \hat{g} \text{ real} \\ \hat{g} \text{ par} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi \text{ función analítica} \\ \hat{\psi} \text{ real} \\ \text{Soporte de } \hat{\psi} : [\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2] \\ \hat{\psi} \text{ simétrica respecto a } \omega_c \end{array} \right.$$

Además de ser  $\psi$  una función analítica, su energía se encuentra frecuentemente localizada en  $[\omega_c - \omega_b/2, \omega_c + \omega_b/2]$  y distribuida alrededor de  $\omega_c$ . Como  $\hat{\psi}$  es real, se puede interpretar fácilmente como filtro paso – banda, facilitando también el cálculo de las transformadas sobre funciones reales aplicando la fórmula de Parseval.

## Apéndice Matemático

### Quinto:

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ par} \\ g \text{ real} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}[\psi] \text{ par} \\ \operatorname{Im}[\psi] \text{ impar} \end{array} \right.$$

La función  $\psi$  esta centrada alrededor del origen.

### Sexto:

$$g \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \psi \in L^1(\mathbb{R})$$

La energía de  $\psi$  se encuentra relativamente bien localizada en el tiempo. Se concentra, según la propiedad demostrada en el paso anterior, alrededor de  $t = 0$ .

### Séptimo:

$$g \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

La función  $\psi$  se puede utilizar para calcular las distintas transformadas de una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :  $\langle f, \psi \rangle$ .

### Octavo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$$

La energía de  $\psi$  es igual a 1.

### Noveno:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t) \\ \omega_c > \omega_b/2 \\ \hat{g}(\omega) = 0 \quad \forall \omega < -\omega_b/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

El valor medio de  $\psi$  es cero.

### **Fin de la demostración.**

Para terminar, resulta interesante comentar que, en algunos casos, se utilizan ventanas cuya TF presenta una caída muy pronunciada en ambos extremos de la recta real, pero que no son estrictamente de soporte compacto. En este caso, la “Ventana Modulada” que se obtiene por modulación no cumple tres de las propiedades de este tipo de funciones:

- Su valor medio no es cero (no cumple por tanto la condición de admisibilidad de la Transformada Wavelet; no cumple la definición de wavelet).
- Su TF no es de soporte compacto.
- No es, en sentido estricto, una función analítica.

No obstante, tomando un valor de  $\omega_c$  suficientemente elevado, podemos afirmar que estas tres propiedades si se cumplen de forma aproximada y obtener también buenos resultados.

### AM 2.2.- Cálculo de la frecuencia central de una ventana modulada.

La frecuencia central de una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  se define como:

$$\eta = \frac{1}{2\pi \|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.17})$$

Su cálculo resulta útil, entre otras cosas, para calcular las dimensiones de las cajas de Heisenberg en el siguiente apartado. Si la función tiene, como es el caso de una ventana modulada, energía unitaria entonces  $\|\psi\|^2 = 1$ . Y si es analítica, como también es el caso, teniendo en cuenta que entonces su TF es nula para valores negativos de la frecuencia tenemos:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.18})$$

Aunque pretendemos calcular la frecuencia central de una Ventana Modulada, la cual es una función analítica, integramos a lo largo de toda la recta real y no solo en el tramo positivo, pues de esta forma el análisis que sigue resultará también válido cuando lo apliquemos a una “Ventana Modulada” construida a partir de una ventana cuya TF no sea estrictamente de soporte compacto, pero que presente una caída muy pronunciada en ambos extremos de la recta real.

Si trabajamos con una Ventana Modulada entonces  $\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_c)$ . Sustituyendo en la expresión de la frecuencia central:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{g}(\omega - \omega_c)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.19})$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} \omega' = \omega - \omega_c &\Rightarrow \omega = \omega' + \omega_c \Rightarrow d\omega = d\omega' \\ \text{Si } \omega = \pm\infty &\Rightarrow \omega' = \pm\infty \end{aligned} \quad (\text{AM 2.20})$$

obtenemos:

Apéndice Matemático

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega' + \omega_c) |\hat{g}(\omega')|^2 d\omega' = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega' |\hat{g}(\omega')|^2 d\omega' + \omega_c \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega')|^2 d\omega' \right] \quad (\text{AM 2.21})$$

Renombrando  $\omega'$  como  $\omega$  tenemos:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega + \omega_c \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right] \quad (\text{AM 2.22})$$

Teniendo en cuenta que por hipótesis  $g$  es par, lo cual implica según la propiedad 1 de AM 1 que  $\hat{g}$  también es par, entonces  $\omega |\hat{g}(\omega)|^2$  es una función impar; con lo cual  $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = 0$ . La expresión de la frecuencia central de la ventana modulada queda:

$$\eta = \omega_c \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.23})$$

Por otra parte, como por hipótesis  $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , podemos aplicar la fórmula de Plancherel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \quad (\text{AM 2.24})$$

obteniendo:

$$\eta = \omega_c \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \quad (\text{AM 2.25})$$

Como, también por hipótesis, la energía de  $g$  es igual a 1, la frecuencia central de la Ventana Modulada es igual a la frecuencia angular de modulación  $\omega_c$ :

$$\eta = \omega_c \quad (\text{AM 2.26})$$

Notar que, en la demostración, no ha sido necesario tener en cuenta que se trataba de una función analítica (se ha integrado a lo largo de toda la recta real). Si se ha considerado la forma de la función  $\psi(t) = g(t) \exp(i\omega_c t)$  al escribir  $\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_c)$ , así como las tres siguientes hipótesis relativas a  $g$ :

- $g$  es par (nos permite afirmar que  $\hat{g}$  también según la propiedad 1 de AM 1).
- $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  (nos permite aplicar la fórmula de Plancherel).
- La energía de  $g$  es igual a 1 ( $\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ ).

### AM 2.3.- Cálculo de la caja de Heisenberg de una ventana modulada.

La altura de la caja de Heisenberg de una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  en el plano tiempo-frecuencia se representa como  $\sigma_\omega$  y viene dada por la siguiente fórmula:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi \|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \eta)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.27})$$

Si además la función es analítica y su energía es igual a 1 tenemos:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (\omega - \eta)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.28})$$

Como en el apartado anterior, aunque pretendemos calcular la altura de la Caja de Heisenberg de una Ventana Modulada, la cual es una función analítica, integramos a lo largo de toda la recta real y no solo en el tramo positivo. De esta forma, el análisis que sigue resultará también válido cuando lo apliquemos a una “Ventana Modulada” construida a partir de una ventana cuya TF presente una caída muy pronunciada en ambos extremos de la recta real, pero sin llegar a ser estrictamente de soporte compacto.

Si se trata de una Ventana Modulada, teniendo en cuenta que  $\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_c)$  y  $\eta = \omega_c$  tenemos:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_c)^2 |\hat{g}(\omega - \omega_c)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.29})$$

Realizando el mismo cambio de variable que en el caso anterior:

$$\begin{aligned} \omega' = \omega - \omega_c &\Rightarrow \omega = \omega' + \omega_c \Rightarrow d\omega = d\omega' \\ \text{Si } \omega = \pm\infty &\Rightarrow \omega' = \pm\infty \end{aligned} \quad (\text{AM 2.30})$$

obtenemos:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega'^2 |\hat{g}(\omega')|^2 d\omega' \quad (\text{AM 2.31})$$

Renombrando  $\omega'$  como  $\omega$  tenemos finalmente:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.32})$$

Notar que, hasta aquí, hemos utilizado las mismas hipótesis que en el apartado anterior al calcular la frecuencia central, pues hemos utilizado el resultado de dicho apartado

## Apéndice Matemático

$\eta = \omega_c$  además de escribir  $\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_c)$  y tener en cuenta que la energía de  $\hat{g}$  es igual a 1 (ambas hipótesis incluidas al escribir  $\eta = \omega_c$ ).

Intentemos simplificar todavía más la expresión. Teniendo en cuenta que:

$$\omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 = |\omega|^2 |\hat{g}(\omega)|^2 = (|\omega| |\hat{g}(\omega)|)^2 = (|i| |\omega| |\hat{g}(\omega)|)^2 = |i\omega \hat{g}(\omega)|^2 \quad (\text{AM 2.33})$$

tenemos:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |i\omega \hat{g}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{AM 2.34})$$

Por otra parte,  $i\omega \hat{g}(\omega)$  es la TF de la derivada temporal de  $g$ . Es decir:

$$\text{Si } g'(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{g}(\omega) \quad (\text{AM 2.35})$$

Si  $g' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , entonces podemos aplicar la fórmula de Plancherel:

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(t)|^2 dt \quad (\text{AM 2.36})$$

Para llegar hasta esta expresión hemos supuesto, además de las hipótesis comunes al apartado anterior, que  $g$  es derivable y además  $g' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

La anchura de la Caja de Heisenberg de una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  en el plano tiempo-frecuencia se representa como  $\sigma_t$  y viene dada por la siguiente fórmula:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |\psi(t)|^2 dt \quad (\text{AM 2.37})$$

Donde:

$$u = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt \quad (\text{AM 2.38})$$

Si se trata de una Ventana Modulada, teniendo en cuenta que  $|\psi(t)| = |g(t)|$  y  $\|\psi\|^2 = 1$  tenemos:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t)|^2 dt \tag{AM 2.39}$$

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |g(t)|^2 dt$$

Como  $g$  es par, entonces  $t|g(t)|^2$  es impar y por tanto  $u = 0$ . Finalmente podemos escribir:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|^2 dt \tag{AM 2.40}$$

En este caso tan solo hemos tenido en cuenta que, en el caso de una Ventana Modulada, la función es de la forma  $\psi(t) = g(t)\exp(i\omega_c t)$ , su energía es unitaria y la ventana es simétrica.

El área de la Caja de Heisenberg se define como:

$$A = \sigma_\omega \sigma_t \tag{AM 2.41}$$

Para el caso de una Ventana Modulada:

$$\sigma_\omega \sigma_t = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|^2 dt} \tag{AM 2.42}$$

Asumiendo las hipótesis adicionales anteriormente citadas, podemos simplificar la expresión que determina  $\sigma_\omega$  obteniendo:

$$\sigma_\omega \sigma_t = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |g'(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|^2 dt} \tag{AM 2.43}$$

## AM 3.- Funciones de Gabor

Uno de los dos tipos de átomos tiempo-frecuencia utilizados a lo largo de la tesis son las funciones de Gabor, las cuales se obtienen por modulación en frecuencia (adecuada) de una función gaussiana de media cero y energía igual a 1. Se trata pues de un tipo de ventanas moduladas, estudiadas en el apartado anterior. En otras palabras, una función de Gabor es el resultado del siguiente proceso:

- Construimos una función gaussiana de media cero.
- La multiplicamos por un escalar, de tal forma que su energía sea igual a 1.
- Finalmente la modulamos a una frecuencia apropiada.

El área de las cajas de Heisenberg de las funciones de Gabor toma siempre el mínimo valor posible:  $1/2$ . Esta es una de sus características más relevantes que aconsejan su utilización. Cuanto menor sea el área de las cajas de Heisenberg, mayor será la resolución y el detalle que conseguiremos con la función de densidad de energía obtenida. Por otra parte, para filtrar adecuadamente los armónicos presentes en la señal a analizar, deberemos fijar los valores de los parámetros que caracterizan la función de Gabor teniendo en cuenta la evolución temporal de la frecuencia de dichos armónicos (tal y como dicta el criterio de la pendiente en el apartado 4.2.4). Para poder hacerlo, es necesario calcular la pendiente de la caja de Heisenberg de una función de Gabor en función de sus parámetros, objetivo final del presente apartado.

En el presente apartado se presentan las funciones de Gabor, dando su definición y analizando algunas de sus principales propiedades. En el primer apartado se introducen este tipo de funciones partiendo de su definición. En el segundo apartado se recuerda la definición de función gaussiana, estudiando como deben estar relacionados sus parámetros para que su media sea igual a cero y su energía sea igual a 1. Las propiedades de la ventana utilizada, una función Gaussiana de media cero y energía igual a 1, se estudian en el tercer apartado. Los resultados de este estudio son la base del análisis de las propiedades de las funciones de Gabor. El análisis de éstas propiedades se realiza para poder obtener las fórmulas que determinan las dimensiones de las cajas de Heisenberg del átomo en función de sus parámetros (último apartado).

### AM 3.1.- Definición de las funciones de Gabor.

En el presente apartado se introducen un determinado tipo de átomos tiempo-frecuencia: las funciones de Gabor. Un átomo tiempo-frecuencia del tipo Gabor será siempre una función compleja de variable real de la siguiente forma<sup>2</sup>:

$$\psi(t) = C_{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{i2\pi f_c t} \quad (\text{AM 3.1})$$

Donde:

- $\sigma \in \mathbb{R}^+$  es el parámetro de desviación o de dispersión<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> El concepto de función compleja de variable real se repasa en el Apéndice AM 1.

<sup>3</sup> Notación:  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ ;  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .

- $f_c \in \mathbb{R}^+$  es la frecuencia central de la función.
- $C_\sigma \in \mathbb{R}^+$  es la constante de normalización (la cual depende a su vez de  $\sigma$ ).

Y se cumple  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$ .

Tal y como decíamos, asignando valores a los dos parámetros  $\sigma$  y  $f_c$  obtenemos una función de Gabor. Esta a su vez, realizando operaciones de traslación, modulación a una frecuencia distinta, escalado o simplemente cambiando directamente sus parámetros, genera una familia de átomos tiempo-frecuencia tipo Gabor. Tal y como se analizó en el capítulo 3, en función de la transformada que se quiere calcular (STFT, AWT, MP, AGT), la familia de átomos construida es distinta. Una vez se tiene la familia de átomos, ya se puede calcular la transformada de la señal a analizar.

Observemos en primer lugar que para construir el átomo, la función  $\exp(-t^2/2)$  ha sido escalada utilizando un factor de escalado  $a = \sigma$  obteniendo la función  $\exp(-(t/a)^2/2) = \exp(-t^2/(2\sigma^2))$ . Para que el escalado tenga sentido, el factor de escalado utilizado  $a$  no puede ser en ningún caso igual a 0 o a  $\pm\infty$ . Esta condición se cumple pues  $a = \sigma \in \mathbb{R}^+$ .

Para que la energía de la función sea igual a 1, la hemos multiplicado por una constante  $C_\sigma$  (llamada constante de normalización), la cual depende de  $\sigma$ :

$$C_\sigma = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} \quad (\text{AM 3.2})$$

Para que la constante de normalización esté bien definida y pueda por lo tanto cumplir adecuadamente su función no puede valer 0 ni  $\pm\infty$ . Como  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  entonces  $C_\sigma \in \mathbb{R}^+$ . Concluimos que la constante de normalización está bien definida.

Puede resultar de utilidad trabajar con frecuencias angulares (pulsaciones) en vez de con frecuencias. Teniendo en cuenta la relación  $\omega_c = 2\pi f_c$  la ecuación (AM 3.1) queda:

$$\psi(t) = C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{i\omega_c t} \quad (\text{AM 3.3})$$

Notar que hasta este punto hemos definido un tipo de funciones complejas de variable real, dependientes de dos parámetros, a las cuales hemos llamado funciones de Gabor. Pero todavía no hemos demostrado si efectivamente, asignando valores concretos a  $\sigma$  y  $f_c$  (teniendo en cuenta la condición  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$ ), obtenemos una ventana modulada (tal y como fue definida en AM 2). Profundicemos pues un poco más en las características de las funciones de Gabor y veamos si cumplen con las propiedades de las ventanas moduladas.

Podemos reescribir (AM 3.1) como sigue:

$$\psi(t) = g(t)\exp(i2\pi f_c t) \quad \text{con} \quad g(t) = C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{AM 3.4})$$

Vemos que la función  $\psi$  es en realidad una modulación en frecuencia de la función  $g$ . Aplicando la propiedad demostrada en el apartado AM 2.1, si la función  $g$  cumple las siguientes propiedades:

- $g$  es real.
- $g$  es par.
- $g \in L^1(\mathbb{R})$
- Su TF  $\hat{g}$  es de soporte compacto.
- $g \in L^2(\mathbb{R})$
- Su energía es igual a 1:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ .

su modulación a una determinada frecuencia  $f_c$  tal que  $f_c > f_b/2$ , da como resultado una función  $\psi$  analítica, que posee las propiedades adecuadas para ser un átomo tiempo-frecuencia, estando además su energía confinada frecuencialmente en el intervalo  $[f_c - f_b/2, f_c + f_b/2]$  y distribuida alrededor de  $f_c$ .

En el apartado AM 3.3 se demostrará que la función  $g$  descrita en (AM 3.4) cumple las seis propiedades enumeradas salvo la cuarta: su TF  $\hat{g}$  no es una función de soporte compacto. Sin embargo, en este mismo apartado veremos como, si se cumple la condición  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$ , entonces  $\hat{g}(f) \approx 0 \forall |f| > f_c$ . La función  $\hat{g}$  es pues una función real y par la cual, aunque no es estrictamente de soporte compacto, si presenta una caída suficientemente pronunciada como para asegurar que  $\hat{g}(f) \approx 0 \forall |f| > f_c$  (en el caso de cumplirse  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$ ). Para construir funciones de Gabor se utilizan por tanto ventanas cuya TF presenta una caída muy pronunciada en ambos extremos de la recta real, pero que no son estrictamente de soporte compacto.

La TF de la función  $\psi$  no será pues de soporte compacto. En particular, aunque al cumplirse la condición  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$  podemos asegurar que  $\hat{\psi}(f) \approx 0 \forall f \leq 0$ , estrictamente  $\hat{\psi}(f) \neq 0 \forall f \leq 0$ . Como consecuencia la función  $\psi$  no es estrictamente una función analítica y su valor medio no es estrictamente cero. No obstante, tomando valores de los dos parámetros que definen a la función de tal forma que se cumpla  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$ , podemos afirmar que estas dos propiedades si se cumplen de forma aproximada y obtener excelentes resultados. Por último, a pesar de que la TF de la función  $g$  no es de soporte compacto, son de aplicación las fórmulas que determinan la frecuencia central y las dimensiones de las cajas de Heisenberg de este tipo de funciones deducidas en los apartados AM 2.2 y AM 3.3.

**AM 3.2.- Recordatorio de la función gaussiana.**

Se llama función gaussiana a toda función de la forma:

$$f(t) = ae^{-\frac{(t-b)^2}{2c^2}} \tag{AM 3.5}$$

donde  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $c \in \mathbb{R}^+$ .

Calculemos su valor medio:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tae^{-\frac{(t-b)^2}{2c^2}} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{(t-b)^2}{2c^2}} dt \tag{AM 3.6}$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$t' = \frac{t-b}{\sqrt{2c}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(t-b)^2}{2c^2} = t'^2 \\ t = \sqrt{2c}t' + b \Rightarrow dt = \sqrt{2c}dt' \\ \text{Si } t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty \end{cases} \tag{AM 3.7}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \mu &= a \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{(t-b)^2}{2c^2}} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2c}t' + b)e^{-t'^2} \sqrt{2c}dt' = \sqrt{2ac} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2c}t' + b)e^{-t'^2} dt' = \\ &= \sqrt{2ac} \left[ \sqrt{2c} \int_{-\infty}^{+\infty} t' e^{-t'^2} dt' + b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} dt' \right] = \sqrt{2ac} [0 + b\sqrt{\pi}] = \sqrt{2\pi}abc \end{aligned} \tag{AM 3.8}$$

En definitiva:

$$\mu = \sqrt{2\pi}abc \tag{AM 3.9}$$

Calculemos a continuación su energía:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| ae^{-\frac{(t-b)^2}{2c^2}} \right|^2 dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-b)^2}{c^2}} dt \tag{AM 3.10}$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$t' = \frac{t-b}{c} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(t-b)^2}{c^2} = t'^2 \\ t = ct' + b \Rightarrow dt = c dt' \\ \text{Si } t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty \end{cases} \quad (\text{AM 3.11})$$

tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} c dt' = a^2 c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} dt' = \sqrt{\pi} a^2 c \quad (\text{AM 3.12})$$

En definitiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \sqrt{\pi} a^2 c \quad (\text{AM 3.13})$$

El lector habrá observado ya que la función  $g$  definida en (AM 3.4) es una función gaussiana tomando los parámetros  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $c \in \mathbb{R}^+$  los siguientes valores:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma}} \\ b &= 0 \\ c &= \sigma \end{aligned} \quad (\text{AM 3.14})$$

Aplicando las ecuaciones (AM 3.9) y (AM 3.13) podemos calcular el valor medio y la energía de esta función gaussiana en particular. La media vale:

$$\mu = \sqrt{2\pi} abc = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma}} 0 \sigma = 0 \quad (\text{AM 3.15})$$

La energía vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \sqrt{\pi} a^2 c = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} \sigma = 1 \quad (\text{AM 3.16})$$

Concluimos que, la función  $g$  utilizada como ventana para, modulándola en frecuencia adecuadamente, construir funciones de Gabor, es una función gaussiana de media cero y energía igual a 1.

### AM 3.3.- Estudio de las propiedades de la ventana utilizada.

En el presente apartado estudiaremos las propiedades de la ventana utilizada para construir funciones de Gabor. Dichas propiedades influyen directamente sobre las

propiedades de la función construida por modulación en frecuencia de la ventana (tal y como se vio en el apartado AM 2.1). En el caso de las funciones de Gabor, la ventana es siempre una función del tipo:

$$g(t) = C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{AM 3.17})$$

donde  $C_\sigma$  es la constante de normalización definida como sigue:

$$C_\sigma = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} \quad (\text{AM 3.18})$$

Esta constante garantiza, tal y como veremos al final del presente apartado, que la energía de la ventana (y por tanto la energía de la función de Gabor), sea igual a 1.

### Ventana real

Empecemos estudiando si se trata de una función real, esto es  $g(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}$ . Ya se vio en el primer apartado que  $C_\sigma \in \mathbb{R}^+ \forall \sigma \in \mathbb{R}^+$ . Por otra parte, como  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  y  $t \in \mathbb{R}$  entonces  $-t^2/(2\sigma^2) \in \mathbb{R}$ . No puede aparecer ninguna indeterminación al calcular la división pues  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  (con lo cual  $\sigma \neq 0$ ,  $\sigma \neq \pm\infty$ ). La función exponencial es una función real si depende de una variable real. Como  $-t^2/(2\sigma^2) \in \mathbb{R}$  entonces  $\exp(-t^2/(2\sigma^2)) \in \mathbb{R}$ . Finalmente, recordamos que el producto de números reales da como resultado un número real. Esta operación tampoco puede dar lugar a una indeterminación pues ninguno de los dos términos pueden tomar un valor igual a 0 o a  $\pm\infty$ . Concluimos que  $C_\sigma \exp(-t^2/(2\sigma^2)) \in \mathbb{R} \forall \sigma \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}$ .

### Ventana par

Es fácil demostrar que se trata de una función par:

$$g(-t) = C_\sigma e^{-\frac{(-t)^2}{2\sigma^2}} = C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{AM 3.19})$$

### Ventana Lebesgue integrable

Estudiemos a continuación si  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Calculemos la integral del módulo de  $g$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right| dt = C_\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \quad (\text{AM 3.20})$$

## Apéndice Matemático

Realizamos el siguiente cambio de variable (donde tenemos en cuenta que  $\sigma \neq 0$ ,  $\sigma \neq \pm\infty$ ):

$$t' = \frac{t}{\sqrt{2\sigma}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^2}{2\sigma^2} = t'^2 \\ t = \sqrt{2\sigma}t' \Rightarrow dt = \sqrt{2\sigma}dt' \\ \text{Si } t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty \end{cases} \quad (\text{AM 3.21})$$

Finalmente obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = C_\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = C_\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} \sqrt{2\sigma} dt' = C_\sigma \sqrt{2\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} dt' = C_\sigma \sqrt{2\sigma} \sqrt{\pi} \quad (\text{AM 3.22})$$

Sustituyendo la constante de normalización por su expresión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = \sqrt{2\pi} C_\sigma \sigma = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma}} \sigma = \sqrt{2} \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma} \quad (\text{AM 3.23})$$

Concluimos:

$$\sigma \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sqrt{2} \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma} < +\infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty \Leftrightarrow g \in L^1(\mathbb{R}) \quad (\text{AM 3.24})$$

## Energía de la ventana

Ocupémonos a continuación de calcular la energía de  $g$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right|^2 dt = C_\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt \quad (\text{AM 3.25})$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$t' = \frac{t}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^2}{\sigma^2} = t'^2 \\ t = \sigma t' \Rightarrow dt = \sigma dt' \\ \text{Si } t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty \end{cases} \quad (\text{AM 3.26})$$

tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = C_\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} \sigma dt' = C_\sigma^2 \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} dt' = \sqrt{\pi} C_\sigma^2 \sigma \quad (\text{AM 3.27})$$

Sustituyendo la constante de normalización por su expresión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1 \quad (\text{AM 3.28})$$

Concluimos que, no sólo  $g \in L^2(\mathbb{R}) \forall \sigma \in \mathbb{R}^+$  sino que además su energía es igual a 1.

### Transformada de Fourier de la ventana

Calculemos seguidamente la Transformada de Fourier de la función  $g$ . Para ello aplicamos directamente la definición de FT de una función perteneciente a  $L^1(\mathbb{R})$  (como es el caso), expuesta en AM 1:

$$\hat{g}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{AM 3.29})$$

Sustituyendo (AM 3.17):

$$\hat{g}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_\sigma e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i2\pi ft} dt = C_\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{AM 3.30})$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^2}{2\sigma^2} = t'^2 \\ t = \sqrt{2}\sigma t' \Rightarrow dt = \sqrt{2}\sigma dt' \\ \text{Si } t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty \end{cases} \quad (\text{AM 3.31})$$

Finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{g}(f) &= C_\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i2\pi ft} dt = C_\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} e^{-i2\pi f\sqrt{2}\sigma t'} \sqrt{2}\sigma dt' = \\ &= C_\sigma \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2} e^{-i2\pi f\sqrt{2}\sigma t'} dt' \end{aligned} \quad (\text{AM 3.32})$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$f' = \sqrt{2}\sigma f \quad (\text{AM 3.33})$$

obtenemos:

Apéndice Matemático

$$\hat{g}(f') = C_\sigma \sqrt{2\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-i2\pi f' t} dt = C_\sigma \sqrt{2\sigma} \sqrt{\pi} e^{-(\sqrt{2\pi\sigma} f')^2} \quad (\text{AM 3.34})$$

Renombrando  $f' = f$ :

$$\hat{g}(f) = C_\sigma \sqrt{2\sigma} \sqrt{\pi} e^{-(\sqrt{2\pi\sigma} f)^2} \quad (\text{AM 3.35})$$

Sustituyendo la constante de normalización por su expresión:

$$\hat{g}(f) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma}} \sqrt{2\sigma} \sqrt{\pi} e^{-(\sqrt{2\pi\sigma} f)^2} = \sqrt{2} \sqrt{\sigma} \sqrt[4]{\pi} e^{-2(\pi\sigma f)^2} \quad (\text{AM 3.36})$$

Concluimos que la FT de la función  $g$  es:

$$\hat{g}(f) = \sqrt{2} \sqrt{\sigma} \sqrt[4]{\pi} e^{-2(\pi\sigma f)^2} \quad (\text{AM 3.37})$$

la cual no es de soporte compacto.

Si expresamos (AM 3.37) en función de la frecuencia angular:

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2} \sqrt{\sigma} \sqrt[4]{\pi} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \quad (\text{AM 3.38})$$

vemos que las funciones  $g$  y  $\hat{g}$  son de la misma forma, salvando dos diferencias. En otras palabras, ambas son funciones gaussianas pero dos de sus parámetros son distintos. En el caso de  $g$  los parámetros toman los siguientes valores (función gaussiana de media cero y energía igual a 1):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma}} \\ b &= 0 \\ c &= \sigma \end{aligned} \quad (\text{AM 3.39})$$

En el caso de  $\hat{g}$  los parámetros toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} \sqrt{\sigma} \sqrt[4]{\pi} \\ b &= 0 \\ c &= \frac{1}{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{AM 3.40})$$

La media de  $\hat{g}$  es por tanto también igual a 0 pero su energía vale  $\sqrt{\pi} a^2 c = \sqrt{\pi} 2\sigma \sqrt{\pi} 1/\sigma = 2\pi$ , lo cual era de esperar, teniendo en cuenta la fórmula de Plancherel.

### Representación gráfica

Una vez estudiadas estas seis propiedades, representemos gráficamente tres funciones  $g$  construidas utilizando tres valores distintos del parámetro de dispersión  $\sigma$ , analizando el efecto de  $\sigma$  sobre cada una de las funciones: cuanto mayor sea  $\sigma$  (mayor dispersión), la función  $g$  será una campana más ancha y la función  $\hat{g}$  será una campana más estrecha.

Figura AM 3.1 en rojo:  $\sigma = \sqrt{5}$ .

Figura AM 3.1 en azul:  $\sigma = 2\sqrt{5}$ .

Figura AM 3.1 en verde:  $\sigma = 1/2\sqrt{5}$ .

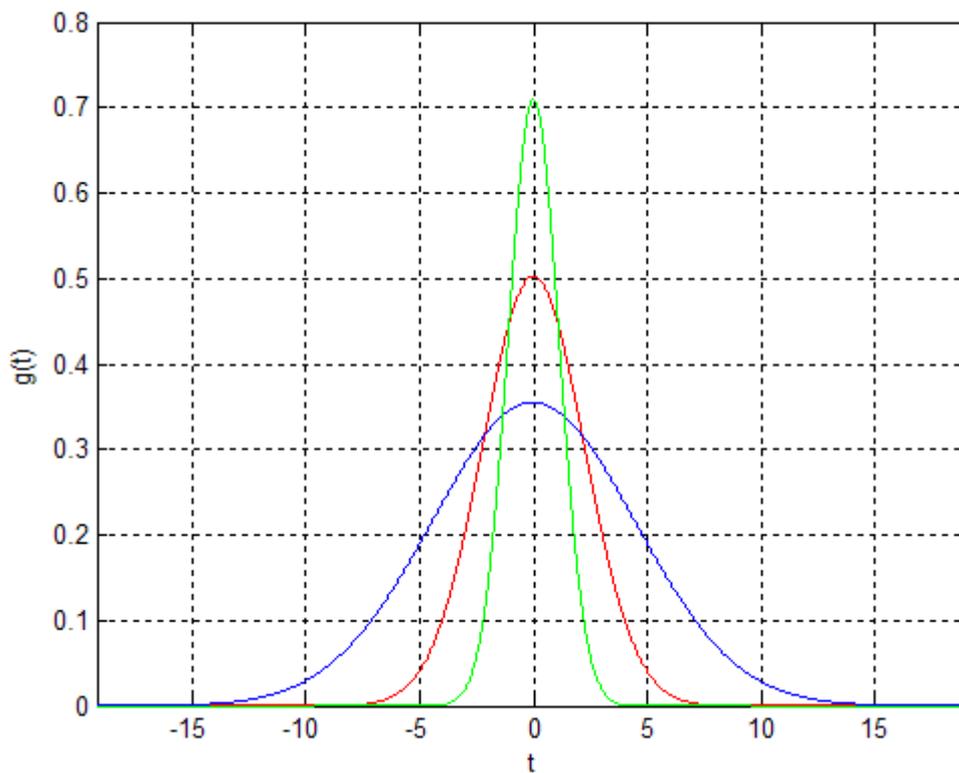


Fig. AM 3.1 Representación gráfica de  $g$ :  $\sigma = \sqrt{5}$  (rojo),  $\sigma = 2\sqrt{5}$  (azul) y  $\sigma = 1/2\sqrt{5}$  (verde).

Observamos gráficamente en la Fig. AM 3.1 que, efectivamente, se trata de una función real y par. Muestra además una rápida caída, lo cual hace intuir su pertenencia a  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Por último, vemos también gráficamente como, al aumentar el parámetro de dispersión  $\sigma$ , se ensancha la campana y disminuye su valor máximo (curva azul). Inversamente, al disminuir el valor de  $\sigma$ , se estrecha la campana y aumenta su valor máximo (curva verde).

Por último, representemos gráficamente las tres FT de las funciones representadas en la Fig. AM 3.1. En otras palabras, representemos tres funciones  $\hat{g}$  construidas utilizando los tres valores del parámetro de dispersión  $\sigma$  especificados anteriormente. Tal y como ya hemos demostrado analíticamente, observamos

gráficamente en la Fig. AM 3.2 que la FT de la función  $g$  definida en (AM 3.17) es una función real y par. Muestra también una rápida caída, perteneciendo esta función también al conjunto  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Por otra parte, en el siguiente apartado veremos que si  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$  entonces  $\hat{g}(f) \approx 0 \forall |f| > f_c$ . No obstante, no es estrictamente una función de soporte compacto. Por otra parte, tal y como dicta el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, al aumentar la dispersión temporal aumentando el valor de  $\sigma$ , se reduce la dispersión frecuencial. Efectivamente, la curva azul presenta un valor máximo más elevado y es más estrecha. Finalmente, al disminuir la dispersión temporal disminuyendo el valor de  $\sigma$ , aumentamos la dispersión frecuencial: la curva verde presenta un valor máximo menor y es más ancha.

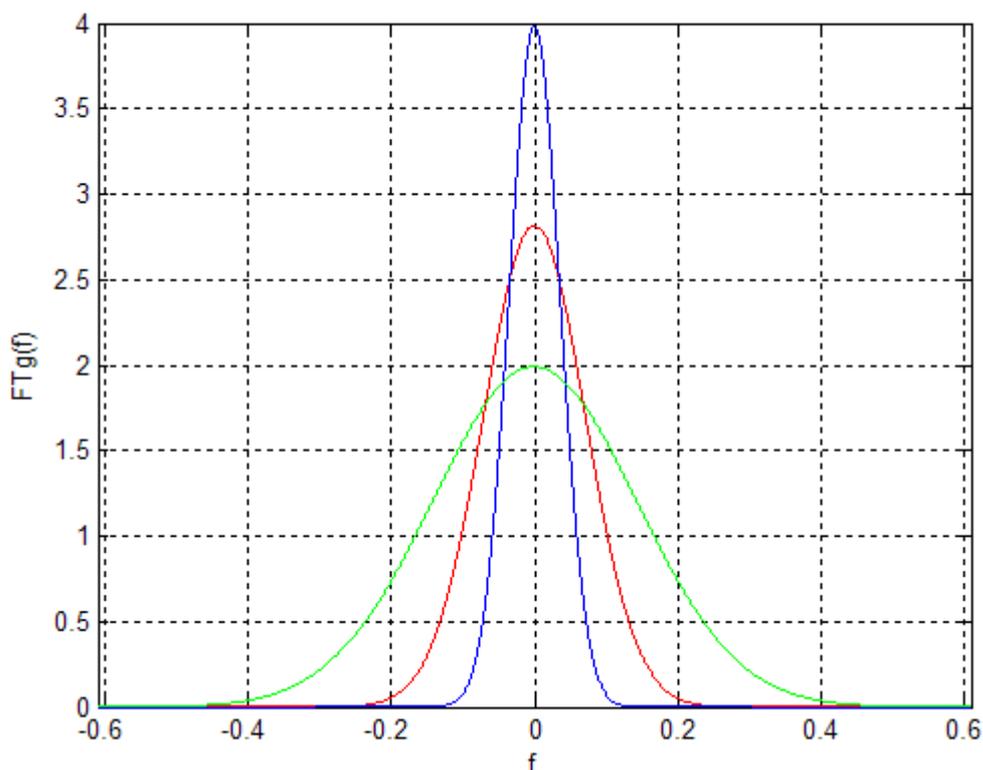


Fig. AM 3.2 Representación gráfica de  $\hat{g}$ :  $\sigma = \sqrt{5}$  (rojo),  $\sigma = 2\sqrt{5}$  (azul) y  $\sigma = 1/2\sqrt{5}$  (verde).

### AM 3.4- Cálculo de la pendiente de las funciones de Gabor.

En el presente punto se obtiene la fórmula que permite calcular la pendiente de la caja de Heisenberg de una función de Gabor en función de los valores de sus parámetros. El concepto de pendiente de una caja de Heisenberg, introducido en el apartado 4.2.1, se define en esencia como el cociente entre la altura y la base de la caja. Obtener esta fórmula es imprescindible si se quiere aplicar la metodología de diagnóstico expuesta en el capítulo 4 utilizando funciones de Gabor. Más concretamente, el criterio de asignación de parámetros al átomo tiempo-frecuencia establecido y utilizado en la metodología (definido en 4.2.4 como criterio de la pendiente), precisa, para poder ser aplicado utilizando funciones de Gabor, de la fórmula aquí deducida, que liga la pendiente de la caja de una función de Gabor con los valores de sus parámetros.

### Carácter analítico

En AM 3.3 se demuestra que la ventana utilizada para construir las funciones de Gabor, cumple con cinco de las seis propiedades siguientes, sea cual sea el valor asignado al parámetro de dispersión ( $\forall \sigma \in \mathbb{R}^+$ ).

- $g$  es real.
- $g$  es par.
- $g \in L^1(\mathbb{R})$
- Su TF  $\hat{g}$  es de soporte compacto.
- $g \in L^2(\mathbb{R})$
- Su energía es igual a 1:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ .

Sin embargo, no cumple con la cuarta propiedad: su FT no es de soporte compacto. ¿Cómo repercute esto sobre las propiedades de la función  $\psi$  construida modulando en frecuencia dicha ventana? Razonemos analíticamente, clarificando el razonamiento mediante el uso de representaciones gráficas de las funciones  $\hat{g}$  y  $\hat{\psi}$ .

Calculemos en primer lugar la función  $\hat{\psi}$ . Teniendo en cuenta (AM 3.4), vemos que la función  $\hat{\psi}$  no es más que una traslación de  $\hat{g}$ :  $\hat{\psi}(f) = \hat{g}(f - f_c)$ . Recordamos que:

$$\hat{g}(f) = \sqrt{2} \sqrt{\sigma} \sqrt[4]{\pi} e^{-2(\pi\sigma f)^2} \quad (\text{AM 3.41})$$

Por lo tanto:

$$\hat{\psi}(f) = \sqrt{2} \sqrt{\sigma} \sqrt[4]{\pi} e^{-2(\pi\sigma(f-f_c))^2} \quad (\text{AM 3.42})$$

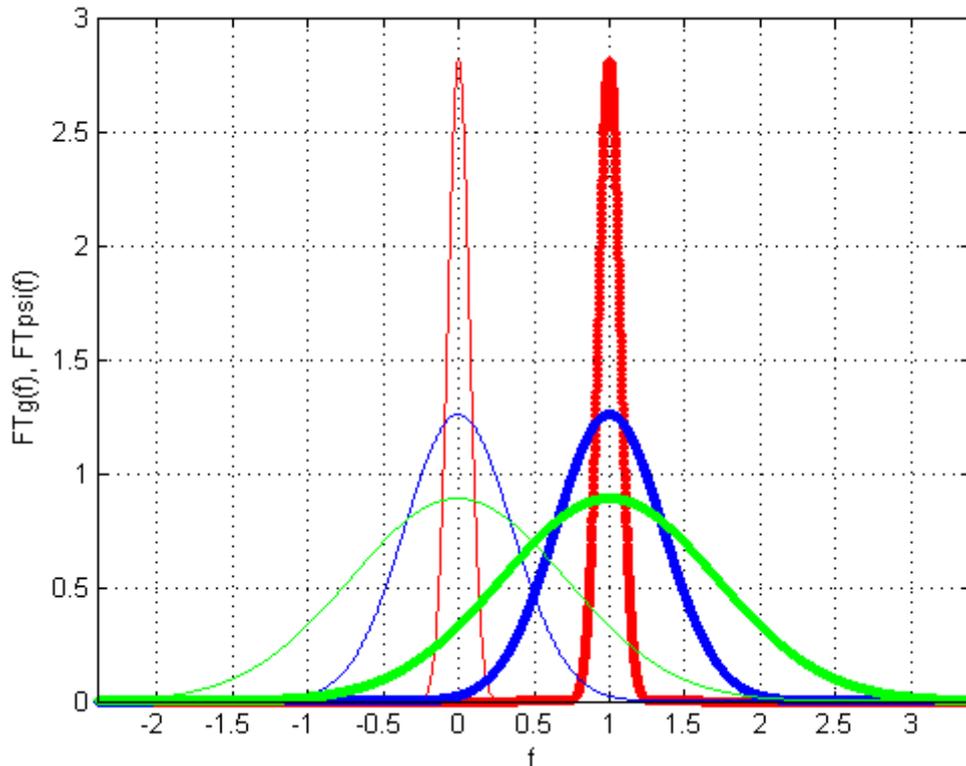
La función  $\hat{g}$  depende del valor asignado al parámetro de dispersión  $\sigma$ ; la función  $\hat{\psi}$  depende además del valor asignado a la frecuencia central  $f_c$ .

Realicemos dos estudios. En el primero estudiamos como varía la función  $\hat{\psi}$  al variar el valor asignado al parámetro de dispersión, manteniendo la frecuencia central constante. En el segundo actuamos de forma inversa: estudiamos como varía la función  $\hat{\psi}$  al variar el valor asignado a la frecuencia central, manteniendo el parámetro de dispersión constante. De esta forma observamos separadamente el efecto que tiene variar el valor asignado al parámetro de dispersión con el que tiene el variar el valor asignado a la frecuencia central.

Analicemos los resultados del primer estudio. En la Fig. AM 3.3 se representan tres funciones  $\hat{g}$  (rojo, azul y verde con trazo fino) y tres funciones  $\hat{\psi}$  (rojo, azul y verde con trazo grueso). El valor asignado al parámetro de dispersión en cada uno de los casos es el siguiente:

- Figura AM 3.3 en rojo:  $\sigma = \sqrt{5}$ .
- Figura AM 3.3 en azul:  $\sigma = 1/5\sqrt{5}$ .
- Figura AM 3.3 en verde:  $\sigma = 1/10\sqrt{5}$ .

El valor asignado a la frecuencia central es el mismo en los tres casos:  $f_c = 1$  Hz. Así pues, en este primer estudio el valor asignado al parámetro de desviación varía pero la frecuencia central se mantiene constante.



**Fig. AM 3.3** Transformadas de Fourier de funciones de Gabor y sus respectivas ventanas para un valor de la frecuencia central  $f_c = 1$  Hz y unos valores del parámetro de desviación:  $\sigma = \sqrt{5}$  (rojo),  $\sigma = 1/5\sqrt{5}$  (azul) y  $\sigma = 1/10\sqrt{5}$  (verde).

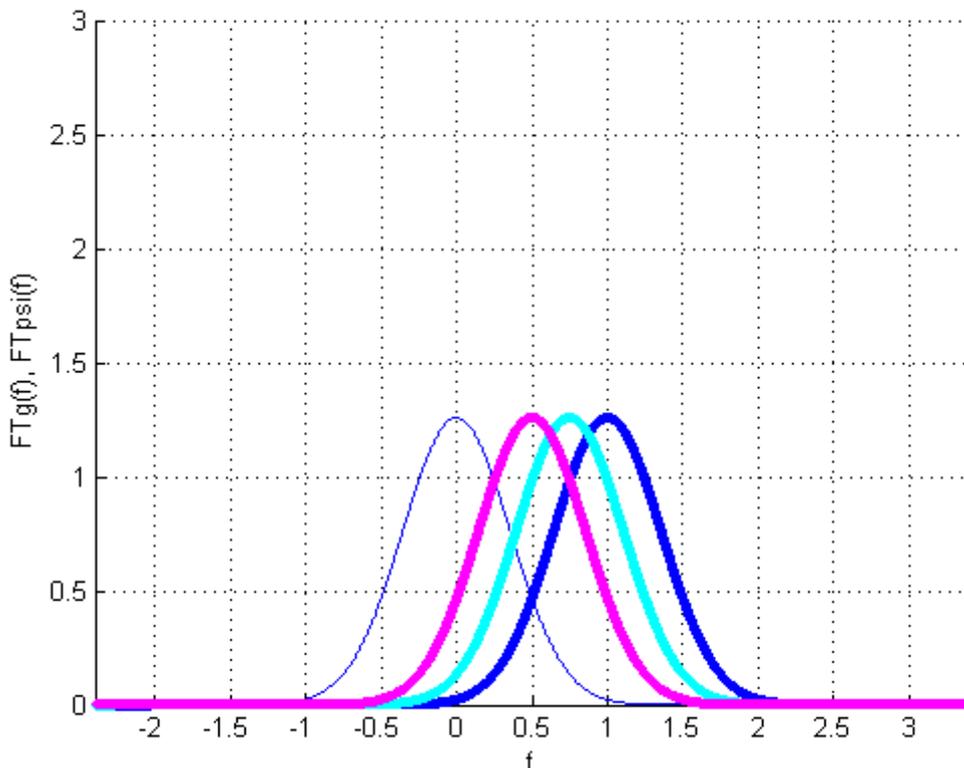
En primer lugar vemos como las gráficas en trazo grueso (funciones  $\hat{\psi}$ ) no son más que traslaciones de las gráficas en trazo fino (funciones  $\hat{g}$ ). El centro o punto de simetría de la función  $\hat{g}$  es siempre  $f = 0$ . El centro o punto de simetría de la función  $\hat{\psi}$  es siempre  $f = f_c$  (en este caso  $f_c = 1$  Hz). Se observa cómo, cuanto menor es el valor del parámetro de dispersión, más ancha resulta ser la campana (tanto la función  $\hat{g}$  como la función  $\hat{\psi}$  que en estos términos son idénticas). De esta forma, las gráficas trazadas de color verde son más anchas que las trazadas de color azul y estas a su vez más anchas que las trazadas de color rojo. En consecuencia, los valores que toma la función  $\hat{\psi}$  en el rango de frecuencias  $f \leq 0$  son elevados en el caso representado de color verde, se aproximan a cero en el caso azul y son prácticamente cero en el caso rojo. Concluimos que, una vez fijado el valor de la frecuencia central (en este caso

$f_c = 1$  Hz), podemos conseguir que  $\hat{\psi}(f) \approx 0 \forall f \leq 0$  asignando al parámetro de desviación  $\sigma$  un valor suficientemente grande (por ejemplo  $\sigma = \sqrt{5}$ ), o lo que es lo mismo, estrechando la campana lo suficiente.

Analicemos los resultados del segundo estudio. En la Fig. AM 3.4 se representa una sola función  $\hat{g}$  (azul con trazo fino, idéntica a la curva de mismo color y trazo representada en la Fig. AM 3.3) y tres funciones  $\hat{\psi}$  (azul, cian y magenta, siendo la azul idéntica a la curva de mismo color y trazo representada en la Fig. AM 3.3). El valor asignado a la frecuencia central en cada uno de los casos es el siguiente:

- Figura AM 3.4 en azul:  $f_c = 1$  Hz .
- Figura AM 3.4 en cian:  $f_c = 3/4$  Hz .
- Figura AM 3.4 en magenta:  $f_c = 1/2$  Hz .

El valor asignado al parámetro de dispersión es el mismo en los tres casos:  $\sigma = 1/5\sqrt{5}$ . Es por ello que la función  $\hat{g}$  es la misma en los tres casos, pues tan solo depende del valor de  $\sigma$ , el cual no varía. Así pues, en este segundo estudio el valor asignado a la frecuencia central varia pero el parámetro de desviación se mantiene constante.



**Fig. AM 3.4** Transformadas de Fourier de funciones de Gabor y sus respectivas ventanas para un valor del parámetro de desviación  $\sigma = 1/5\sqrt{5}$  y unos valores de la frecuencia central:  $f_c = 1$  Hz (azul),  $f_c = 3/4$  Hz (cian) y  $f_c = 1/2$  Hz (magenta).

En primer lugar vemos como, las gráficas en trazo grueso (funciones  $\hat{\psi}$ ), no son más que traslaciones de la gráfica azul en trazo fino (función  $\hat{g}$ ). El centro o punto de

simetría de la función  $\hat{g}$  es  $f = 0$ . Los centros o puntos de simetría de las funciones  $\hat{\psi}$  son:  $f_c = 1$  Hz (azul),  $f_c = 3/4$  Hz (cian) y  $f_c = 1/2$  Hz (magenta). A medida que aumenta la frecuencia central  $f_c$ , la campana se mueve hacia la derecha. Cuanto mayor sea el valor de la frecuencia central, menores serán los valores que tome la función  $\hat{\psi}$  en el rango de frecuencias  $f \leq 0$ . Por otra parte, cuanto más ancha sea la campana (menor valor de  $\sigma$ ), más tendremos que trasladar la función hacia la derecha para conseguir valores bajos en el rango de frecuencias  $f \leq 0$ . Concluimos que, una vez fijado el valor del parámetro de desviación (en este caso  $\sigma = 1/5\sqrt{5}$ ), podemos conseguir que  $\hat{\psi}(f) \approx 0 \forall f \leq 0$  asignando a la frecuencia central  $f_c$  un valor suficientemente grande (por ejemplo  $f_c = 4$  Hz), o lo que es lo mismo, trasladando la campana suficientemente hacia la derecha.

Concluimos que, ya sea aumentando el valor asignado a  $\sigma$  (estrechando la campana) o aumentando el valor asignado a  $f_c$  (moviéndola hacia la derecha), podemos conseguir que  $\hat{\psi}(f) \approx 0 \forall f \leq 0$ . Sin embargo, nunca conseguiremos que se cumpla estrictamente  $\hat{\psi}(f) = 0 \forall f \leq 0$ . Esto indica por una parte que, al ser  $\hat{\psi}(0) \neq 0$ , el valor medio de la función no es cero. Por otra parte, como  $\hat{\psi}(f) \neq 0 \forall f < 0$ , la función  $\psi$  tampoco es analítica. Por último, aunque la energía de  $\hat{\psi}$  se encuentra bien localizada (se trata de una Función Gaussiana con una caída bastante rápida), no es estrictamente una función de soporte compacto.

No obstante, aunque no sea estrictamente, si podemos conseguir que la función  $\psi$  sea de forma aproximada una función analítica, es decir, podemos conseguir que se cumpla  $\hat{\psi}(f) \approx 0 \forall f \leq 0$ . Como  $\hat{\psi}(f) < \hat{\psi}(0) \forall f < 0$ , para conseguir nuestro propósito basta que  $\hat{\psi}(0) \approx 0$ . Para ello, tal y como hemos razonado gráficamente, podemos estrechar la campana (aumentar el valor de  $\sigma$ ) o moverla hacia la derecha (aumentar el valor de  $f_c$ ). Realicemos el estudio de forma analítica. Utilizando (AM 3.42) tenemos:

$$\hat{\psi}(0) = \sqrt{2}\sqrt{\sigma}\sqrt[4]{\pi}e^{-2(\pi\sigma(0-f_c))^2} = \sqrt{2}\sqrt{\sigma}\sqrt[4]{\pi}e^{-2(\pi\sigma f_c)^2} \quad (\text{AM 3.43})$$

Veamos qué debe valer  $\sigma f_c$  para que  $\hat{\psi}(0)$  sea igual al  $x\%$  del valor máximo de  $\psi$ :

$$\hat{\psi}(0)100 = \hat{\psi}_{\max}x \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\sigma}\sqrt[4]{\pi}e^{-2(\pi\sigma f_c)^2} 100 = \sqrt{2}\sqrt{\sigma}\sqrt[4]{\pi}x \quad (\text{AM 3.44})$$

Despejando tenemos:

$$\sigma f_c = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \text{Ln}\left(\frac{100}{x}\right)} \quad (\text{AM 3.45})$$

Siendo la relación inversa:

$$x = 100e^{-2(\pi\sigma f_c)^2} \quad (\text{AM 3.46})$$

Tomando  $\sigma f_c = 10/(2\pi)$  obtenemos  $x = 1.93 \cdot 10^{-20}\% \approx 0\%$ . Por tanto, si se cumple la condición  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$ , entonces  $\hat{\psi}(f) \approx 0 \forall f \leq 0$  y por tanto, la función de Gabor es de forma aproximada una función analítica. Como ejemplo, la función de Gabor representada en rojo y con trazo grueso en la Fig. AM 3.3 cumple esta condición:  $\sigma f_c = \sqrt{5} \cdot 1 \approx 2.24 \gg 1/(2\pi) \approx 0.16$ .

Por lo tanto, aplicando la propiedad demostrada en el apartado AM 2.1 concluimos que, asignando valores a los parámetros  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  y  $f_c \in \mathbb{R}^+$  cumpliendo  $\sigma f_c \gg 1/(2\pi)$ , la función que obtenemos al sustituir dichos valores en la siguiente ecuación:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{i2\pi f_c t} \quad (\text{AM 3.47})$$

es, de forma aproximada (pues  $\hat{\psi}(f) \approx 0 \forall f \leq 0$  pero estrictamente  $\hat{\psi}(f) \neq 0 \forall f \leq 0$ ), una función analítica. Además, su FT  $\hat{\psi}$  es una función real y simétrica respecto a  $f_c$  la cual, aunque no es de soporte compacto, presenta una buena localización de su energía. En definitiva, teniendo en cuenta que con esta cumple con las seis propiedades requeridas, la función definida en (AM 3.47) responde de forma aproximada a lo que en AM 2 se definió como ventana modulada.

Además, tras demostrar que la ventana cumple con las propiedades indicadas, son de aplicación las formulas (AM 2.26), (AM 2.32) y (AM 2.40). En el siguiente subapartado, el uso de estas fórmulas permite calcular la formula que determina la pendiente de las funciones de Gabor en función de sus parámetros. Esta formula a su vez permite, aplicando el criterio de la pendiente establecido en el apartado (4.2.4), asignar valores a los parámetros  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  y  $f_c \in \mathbb{R}^+$ , para definir la función de Gabor a utilizar en cada punto del plano tiempo-frecuencia.

### Cálculo de las cajas de Heisenberg.

Las dimensiones de las cajas de Heisenberg de las funciones de Gabor en función de sus parámetros es un resultado conocido en la literatura técnica (las dimensiones de las cajas de Heisenberg de las FBS en función de sus parámetros no lo es). Aun así, a continuación se muestra la demostración planteada por el autor de la tesis.

Calculemos primero la frecuencia central de la función así como las dimensiones de su Caja de Heisenberg. El cálculo de la frecuencia central de la función resulta inmediato. La ventana utilizada para construir funciones de Gabor cumple las propiedades requeridas para utilizar la ecuación (AM 2.26) reproducida a continuación:

$$\eta = \omega_c \quad (\text{AM 3.48})$$

## Apéndice Matemático

Por esta razón, llamamos desde un inicio frecuencia central de la función al parámetro  $f_c$ . Por otra parte, también se cumplen las condiciones necesarias para utilizar las ecuaciones (AM 2.32) y (AM 2.40) reproducidas a continuación:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{AM 3.49})$$

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|^2 dt \quad (\text{AM 3.50})$$

Calculemos la altura de la Caja de Heisenberg. Es decir, calculemos  $\sigma_\omega$ . Sustituyendo (AM 3.41) en (AM 3.49) obtenemos:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \left| \sqrt{2} \sqrt{\sigma} \sqrt[4]{\pi} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \right|^2 d\omega = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-\sigma^2 \omega^2} d\omega \quad (\text{AM 3.51})$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$\omega' = \sigma\omega \Rightarrow \begin{cases} \sigma^2 \omega^2 = \omega'^2 \\ \omega = \frac{\omega'}{\sigma} \Rightarrow d\omega = \frac{d\omega'}{\sigma} \\ \text{Si } \omega = \pm\infty \Rightarrow \omega' = \pm\infty \end{cases} \quad (\text{AM 3.52})$$

Obtenemos:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega'^2}{\sigma^2} e^{-\omega'^2} \frac{d\omega'}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega'^2 e^{-\omega'^2} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (\text{AM 3.53})$$

Finalmente:

$$\sigma_\omega = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \quad (\text{AM 3.54})$$

Calculemos ahora la anchura de la Caja de Heisenberg. Es decir, calculemos  $\sigma_t$ . Sustituyendo (AM 3.17) en (AM 3.50) obtenemos:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| t \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right|^2 dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt \quad (\text{AM 3.55})$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$t' = \frac{t}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^2}{\sigma^2} = t'^2 \\ t = \sigma t' \Rightarrow dt = \sigma dt' \\ \text{Si } t = \pm\infty \Rightarrow t' = \pm\infty \end{cases} \quad (\text{AM 3.56})$$

Obtenemos:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t'^2 e^{-t'^2} \sigma dt' = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t'^2 e^{-t'^2} dt' = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sigma^2}{2} \quad (\text{AM 3.57})$$

Finalmente:

$$\sigma_t = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \quad (\text{AM 3.58})$$

Concluimos que, los lados de la Caja de Heisenberg asociada a una función de Gabor dependen solamente del parámetro de desviación  $\sigma$  tal y como indican las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_\omega &= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \\ \sigma_t &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (\text{AM 3.59})$$

Las dimensiones de la Caja de Heisenberg asociada a una función de Gabor son por tanto independientes de su frecuencia central. Por otra parte, si las unidades de la variable independiente  $t$  de  $\psi(t)$  son segundos (s), las unidades de  $\sigma_t$  son también segundos y las unidades de  $\sigma_\omega$  son rad/s. Expresemos  $\sigma_\omega$  en Hz:

$$\sigma_\omega = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\sigma} \quad (\text{AM 3.60})$$

El área de la Caja de Heisenberg asociada a la función de Gabor es (expresada en rad):

$$A = \sigma_t \sigma_\omega = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{2} = A_{\min} \quad (\text{AM 3.61})$$

Dicha área es independiente del parámetro de desviación  $\sigma$  y de la frecuencia central  $f_c$ . Según el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, el área de la Caja de Heisenberg  $A = \sigma_t \sigma_\omega$  de una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  vale como mínimo  $A_{\min} = 1/2$ . Las funciones de Gabor alcanzan dicho valor mínimo, propiedad excelente cuando se trata de calcular densidades de energía en el plano tiempo-frecuencia, pues cuanto menor sea

## Apéndice Matemático

el área de la Caja de Heisenberg del átomo tiempo-frecuencia utilizado, mayor será la resolución obtenida con la función de densidad.

Por otra parte, la pendiente de la Caja de Heisenberg asociada a una función de Gabor es:

$$P = \frac{\sigma_\omega}{\sigma_t} = \frac{1/\sqrt{2}\sigma}{\sigma/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sigma^2} \quad (\text{AM 3.62})$$

Al igual que los lados de la Caja de Heisenberg, la pendiente es independiente de la frecuencia central. Cambiando sus unidades de  $\text{rad/s}^2$  a  $1/\text{s}^2$  obtenemos:

$$P = \frac{\sigma_\omega}{\sigma_t} = \frac{1/2\sqrt{2}\pi\sigma}{\sigma/\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \quad (\text{AM 3.63})$$

Esta es la formula que permite aplicar el criterio de la pendiente utilizando funciones de Gabor para ajustar el átomo tiempo-frecuencia a la evolución del armónico a detectar.