



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Máster Universitario en
Investigación Matemática

**DINÁMICA DE LOS MÉTODOS
ITERATIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE
ECUACIONES NO LINEALES**

Pedro Antonio Pérez Pérez

Supervisado por: Félix Martínez Jiménez / Alfred Peris Manguillot



Valencia, España – Septiembre, 2012.

Índice general

| | |
|--|----|
| Introducción | v |
| Capítulo 1. Conceptos Básicos de la Dinámica Compleja | 1 |
| 1. Funciones en el plano complejo | 1 |
| 2. Estructura analítica y métrica de la esfera de Riemann | 5 |
| 3. Funciones racionales y su dinámica | 6 |
| Capítulo 2. Conjuntos de Julia y Fatou | 17 |
| 1. Familias normales | 17 |
| 2. Algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou | 19 |
| Capítulo 3. Convergencia en métodos iterativos para aproximar raíces de polinomios complejos | 23 |
| 1. Métodos iterativos generalmente convergentes y limitaciones algorítmicas | 23 |
| 2. Conceptos relacionados con la velocidad de convergencia | 28 |
| Capítulo 4. Métodos iterativos en el plano complejo | 31 |
| Capítulo 5. Obtención de imágenes fractales a partir de los métodos iterativos | 39 |
| Bibliografía | 45 |

Introducción

En este trabajo se estudia la dinámica de algunos métodos iterativos empleados para resolver ecuaciones no lineales. Se describirán a detalle algunas características de las funciones racionales obtenidas al aplicar estos métodos a polinomios de una variable compleja con el fin de aproximar sus raíces.

Una de estas características consiste en que, a partir de la acción de iterar sucesivamente dichas funciones racionales, se induce una división del plano complejo en dos conjuntos, el de Julia y el de Fatou. Estos conjuntos reciben tales nombres en honor a dos eminentes matemáticos, Gaston Julia y Pierre Fatou, quienes alrededor de 1918 (ver [8], [11]) hicieron importantes aportaciones y desarrollaron la teoría sobre las iteraciones de funciones racionales en el plano complejo, conocida como Teoría de Julia-Fatou .

Las bases de dicha teoría tiene su origen en dos revisiones detalladas del método de Newton por parte de Schröder (1870, [16]) y Cayley (1879 ,[5]), quienes propusieron extender el método, conocido en el caso de funciones de variable real, para polinomios en el plano complejo.

Un primer acercamiento a esta teoría de iteraciones de funciones racionales, a partir de la revisión de los artículos de Sergio Plaza [14] y Juan L. Varona [20], motivó la elaboración del presente trabajo bajo dos enfoques. El primero, que trata del estudio de las propiedades dinámicas de los métodos iterativos relacionadas con su eficiencia como algoritmos numéricos (convergencia y limitaciones algorítmicas). Y el segundo, que trata del análisis de las regiones de convergencia (cuencas de atracción) y del comportamiento caótico de su frontera, que nos permitirá generar gráficos sorprendentes (fractales) con ayuda del ordenador.

Primeramente, en el Capítulo 1 abordaremos algunos conceptos básicos de la dinámica compleja y se analizarán algunos resultados importantes para comprender el comportamiento de métodos iterativos para aproximar raíces de polinomios complejos. En el Capítulo 2 se introducirá la noción de equicontinuidad y el concepto de familia normal, con la finalidad de definir formalmente a los conjuntos de Julia y Fatou. Además, se analizarán algunas propiedades de estos conjuntos.

En el Capítulo 3 se se abordarán aspectos relacionados con la convergencia de los métodos iterativos y se estudiarán algunas limitaciones algorítmicas que presentan. En

el Capítulo 4 se describirán algunos métodos iterativos y se mostrarán las imágenes fractales generados por estos al aplicarlos a algunos polinomios complejos. Y por último, en el Capítulo 5 se explicará a detalle la forma en que se generaron las imágenes fractales incluidas en este trabajo y se mostrarán más ejemplos de imágenes fractales generadas con ayuda del ordenador.

Conceptos Básicos de la Dinámica Compleja

En esta sección abordaremos algunos conceptos básicos de la dinámica compleja y se analizarán algunos resultados importantes para comprender el comportamiento de métodos iterativos para aproximar raíces de polinomios complejos. Para la construcción de este capítulo se retomaron algunos aspectos tratados en los libros de Ahlfors [1] y Devaney [6], que nos dan una excelente introducción al estudio de funciones analíticas de variable compleja y al análisis de la dinámica compleja. El lector puede omitir leer el primer apartado de este capítulo, pues se abordan conceptos muy básicos de variable compleja.

1. Funciones en el plano complejo

Designamos por \mathbb{C} al conjunto de los números complejos. Es decir,

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $z = x + iy$ un número complejo, donde $i = \sqrt{-1}$; entonces x se denomina la parte real de z , denotada por $Re(z)$, y y se denomina la parte imaginaria de z , denotada por $Im(z)$. Si hacemos el eje x el eje real y el eje y el eje imaginario, entonces el número complejo z es representado por un punto (x, y) en el plano complejo (ver Fig. 1).

El módulo $|z|$ de z es definido como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y es la distancia entre z y el origen.

Un número complejo a menudo es representado en coordenadas polares. Sea $r = |z|$ y $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$, entonces θ es llamado el argumento de z , denotado por $arg(z)$. Puede verse que $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Por ser $z = x + iy$, se obtiene la siguiente expresión, llamada *forma polar de un número complejo*:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

donde r y θ se llaman *coordenadas polares* de z .

Nótese que cualquier múltiplo entero de 2π puede ser añadido a θ sin cambiar z , por lo que el conjunto de los argumentos, será

$$\begin{aligned} \arg(z) &= \{\theta : \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \theta, \operatorname{Im}(z) = |z| \operatorname{sen} \theta\} \\ &= \{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

donde θ está comprendido entre $[0, 2\pi)$.

La *Fórmula de Euler* ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$) permite expresar un número complejo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ de manera más compacta, en su *forma exponencial*:

$$z = r e^{i\theta}$$

donde r es un número real mayor o igual que cero ($r = |z|$) y θ cualquier argumento de z .

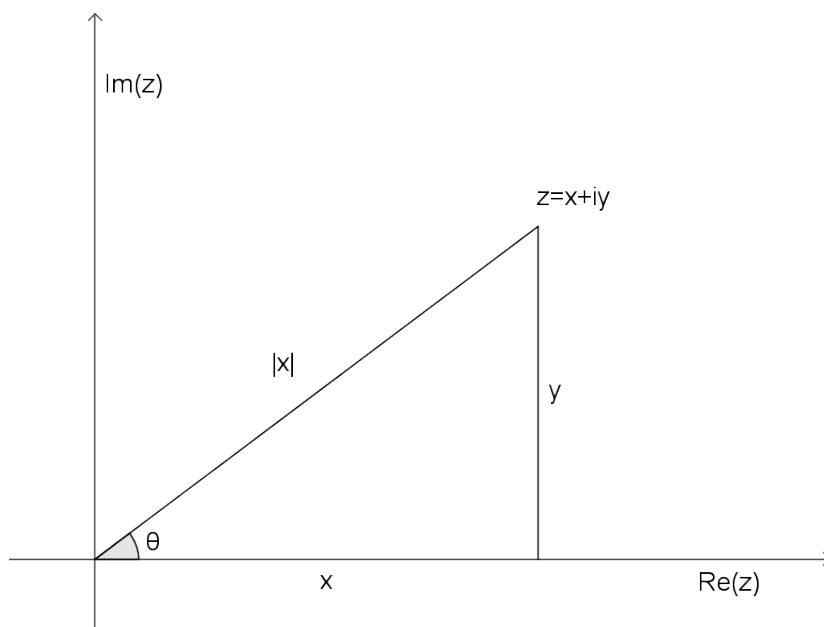


FIGURA 1. El módulo $|z|$ y el argumento θ de un número complejo.

Definición 1.1. Una *función de variable compleja* $f : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow w = f(z) \in \mathbb{C}$ es una aplicación en la cual a cada número complejo z de una cierta región Ω del plano complejo \mathbb{C} se le asigna otro número complejo $w = f(z)$.

La región Ω se llama *dominio de definición* de f y w se llama *imagen* de z por f . En los casos más importantes el dominio de definición es un conjunto abierto (no incluye a los puntos de su frontera) y conexo (dos puntos cualesquiera de Ω pueden unirse mediante una curva contenida en Ω) del plano. Dado que éste es el marco de trabajo habitual, las regiones abiertas y conexas del plano complejo reciben el nombre genérico de *dominios*.

Veamos un ejemplo muy simple que nos permitirá ilustrar algunos aspectos de interés en el estudio de las funciones de variable compleja y del mapeo de funciones en el dominio complejo (ver [7]).

Ejemplo 1.2. Consideremos una aplicación lineal $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, de la forma $f(z) = \alpha z$, donde $\alpha = a + ib$ y $z = x + iy$. Se pueden escribir α y z en su forma exponencial:

$$\alpha = se^{i\beta}, \text{ con } s = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ y } \beta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$z = re^{i\theta}, \text{ con } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Entonces, se puede expresar $f(z)$ como $f(z) = sre^{i(\theta+\beta)}$. Nótese que $f^2(z) = s^2re^{i(\theta+2\beta)}$, y generalmente

$$f^n(z) = s^n re^{i(\theta+n\beta)}. \quad (1.1)$$

Claramente, se tienen tres casos a considerar (ver Fig. 2):

1. $s < 1$: En este caso, de acuerdo a la Ec. (1.1) se observa que la órbita de z dará vueltas en espiral hacia el origen. Se puede decir entonces que el origen es asintóticamente estable.
2. $s > 1$: De la Ec. (1.1) se concluye que los espirales de la órbita de z se van alejando del origen, entonces el origen es inestable.
3. $s = 1$: En este caso la órbita de z permanece sobre el círculo de radio r_0 y el mapeo es una rotación sobre el círculo.

Consideremos ahora aplicaciones no lineales un poco más complicadas.

Definición 1.3. Dados los números complejos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ con $a_n \neq 0$, la función $p(z)$ definida en el plano complejo \mathbb{C} por

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

se llama *polinomio complejo de grado n* con coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

El Teorema Fundamental del Algebra establece que todo polinomio complejo de grado n se anula en n puntos del plano complejo z_1, z_2, \dots, z_n (contados con multiplicidad), que se llaman *raíces del polinomio*. Conocidas las raíces, el polinomio se factoriza

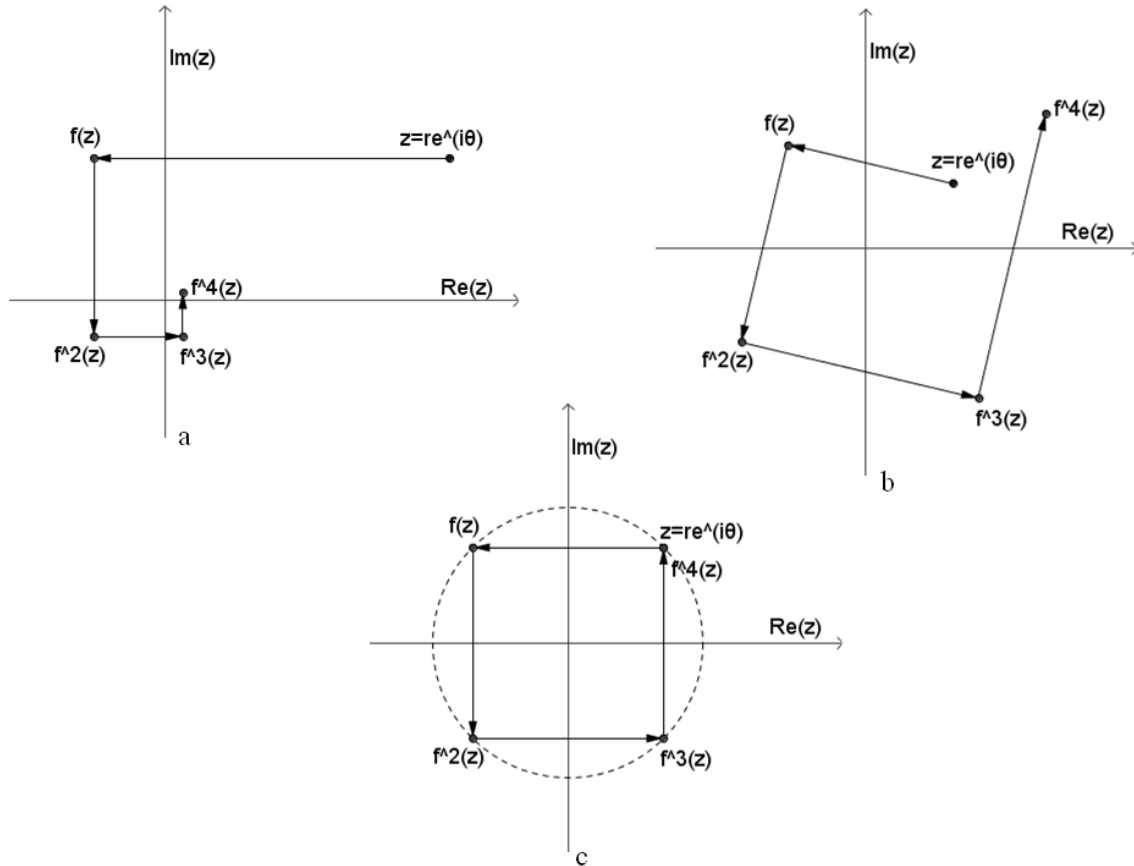


FIGURA 2. Iteración de un punto $z = re^{i\theta}$ bajo la aplicación $f(z) = \alpha z$, $\alpha = a + ib$, $s = \sqrt{a^2 + b^2}$. (a) $s < 1$: el origen es asintóticamente estable, (b) $s > 1$: el origen es inestable, (c) $s = 1$: el origen es estable.

como

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

En coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, el polinomio viene dado por

$$p(z) = a_0 + a_1 r e^{i\theta} + a_2 r^2 e^{i2\theta} + \cdots + a_n r^n e^{in\theta}.$$

Definición 1.4. Sea Ω un dominio en \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja. Sea un punto $z_0 \in \Omega$, se dice que f es *derivable* en z_0 si existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

que, en ese caso, será la *derivada* de f en z_0 . Entonces se dice que f es *analítica en Ω* cuando es derivable en todos los puntos de Ω .

Una función analítica también es conocida como *diferenciable*, *holomorfa* o *regular*. En particular, una función analítica en todo el plano \mathbb{C} se llama *entera*.

Además de los polinomios, toda función racional de la forma $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde P y Q son polinomios en la variable compleja z , es analítica en su dominio de definición, es decir, excepto en las raíces de $Q(z)$. Más adelante se analizarán algunas propiedades de las funciones racionales en el dominio complejo.

2. Estructura analítica y métrica de la esfera de Riemann

Para simplificar el estudio de la dimámica compleja, es útil ampliar el sistema \mathbb{C} de los números complejos mediante la introducción del símbolo ∞ que represente infinito, llamado en este caso *número complejo infinito*. El número complejo infinito no tiene signo ni argumento, pero puede entenderse como un número cuyo módulo es mayor que cualquier número real dado. Los puntos del plano junto con el punto del infinito constituyen el plano complejo extendido (o ampliado), $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Para describir la topología de este espacio, se introduce una representación especial del plano complejo.

Consideremos el plano complejo provisto de un tercer eje ortogonal ξ que pase por $(0, 0)$ y una esfera unitaria centrada en dicho punto. Es decir, se considera una representación de la esfera S^2 en \mathbb{R}^3 a través de los tres ejes ortogonales x, y, ξ en la que los ejes x e y son los ejes real e imaginario de \mathbb{C} respectivamente. Se identifican los puntos correspondientes al polo norte y sur de la esfera, y se denotan por $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ respectivamente. Esta esfera se conoce como *esfera de Riemann*.

Entonces, sea $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la esfera de Riemann, más precisamente

$$S^2 = \{(x, y, \xi) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \xi^2 = 1\},$$

ésta se encuentra dotada de un atlas analítico que contiene las cartas $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ y $\varphi_2 : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{S\}$, dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) = \varphi_1(x + iy) &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right), \\ \varphi_2(z) = \varphi_2(x + iy) &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Estas cartas son llamadas *proyecciones estereográficas* (ver Fig. 3), y determinan la estructura analítica y métrica de la esfera de Riemann. Para la estructura métrica, se usa, por ejemplo, la *métrica cordal*, que se denota por d_c , la cual es definida como la

distancia euclídeana entre las proyecciones estereográficas de los puntos, es decir, dados $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$d_c(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}},$$

y

$$d_c(z, \infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} d_c(z, w) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Se puede definir otra métrica de $\bar{\mathbb{C}}$, llamada métrica esférica, que se denota por d_e , y se obtiene mediante las geodésicas de S^2 . Estas métricas son equivalentes, y cuando se necesite de la estructura métrica de $\bar{\mathbb{C}}$, se usará la métrica cordal.

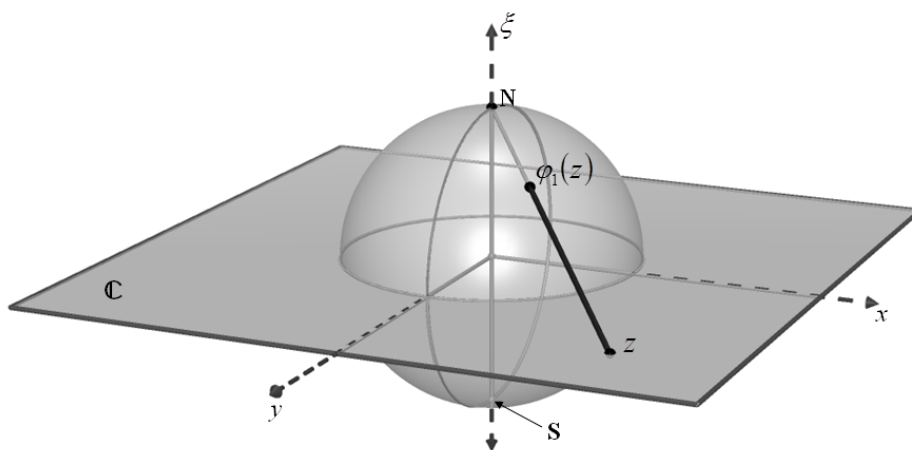


FIGURA 3. Proyección estereográfica de un número complejo z sobre la esfera de Riemann.

3. Funciones racionales y su dinámica

Una función racional $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es una función de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (1.2)$$

donde P y Q son polinomios sin factores comunes. Como se vió anteriormente, las funciones racionales son funciones analíticas en $\bar{\mathbb{C}}$.

Por ejemplo, si aplicamos el método de Newton para el cálculo aproximado de raíces de un polinomio complejo, $p(z)$, obtenemos la siguiente función racional

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = \frac{zp'(z) - p(z)}{p'(z)}. \quad (1.3)$$

El método de Newton tiene una interpretación geométrica sencilla, para el caso real, que nos ayuda a entender su funcionamiento numérico. Como se puede apreciar en la Figura 4, el método consiste en una linealización de la función, pues está basado en el uso de rectas tangentes como aproximaciones de $f(x)$ cerca de los puntos donde el valor de la función es cero, $f(x) = 0$. Una interpretación geométrica en el caso complejo puede ser consultada en [23].

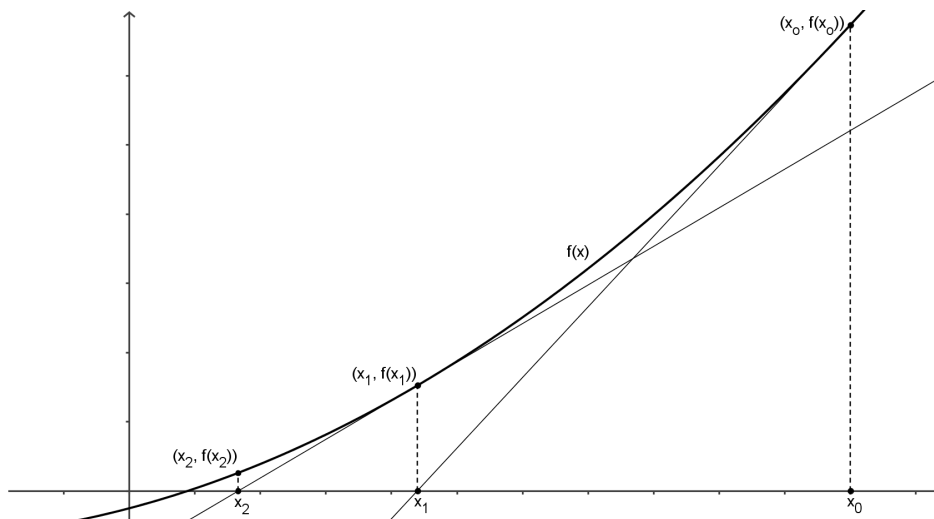


FIGURA 4. Interpretación geométrica del método de Newton para el caso real.

El grado de una función racional $R(z) = P(z)/Q(z)$ es definido como

$$\text{grado}(R) = \max\{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}. \quad (1.4)$$

Informalmente, el grado indica cuántas veces la aplicación R enrolla la esfera alrededor de sí misma, y éste es igual al número (contado con multiplicidades) de preimágenes de un punto arbitrario.

Dada una función racional $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ de grado d , una propiedad importante es que, excepto posiblemente, por una cantidad finita de puntos $w \in \bar{\mathbb{C}}$, el conjunto $R^{-1}(w) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : R(z) = w\}$ consiste de d elementos distintos. Esto puede verse al aplicar el Teorema Fundamental del Algebra al polinomio $p_w(z) = P(z) - wQ(z)$, el cual excepto para $w = 0$ y para otro valor de w que anule el coeficiente principal de p_w , el grado de p_w es exactamente d . Ahora, si $R(z) = w$ y $p'_w(z) = P'(z) - wQ'(z) = 0$, obtenemos $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P'(z)}{Q'(z)}$, o equivalentemente $P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) = 0$, esta ecuación tiene sólo una cantidad finita de soluciones. En otras palabras, excepto posiblemente para una cantidad finita de valores de z , el polinomio p_w no tiene raíces múltiples, por

lo tanto tiene d soluciones distintas. Un punto $w \in \bar{\mathbb{C}}$ para el cual la cardinalidad de R^{-1} es menor que d es llamado un *valor crítico* de R , y un punto $z \in R^{-1}(w)$ que es una raíz de $R(z) - w$ con multiplicidad mayor que 1, es llamado un *punto crítico* de R . Es fácil ver que los puntos críticos consisten de los ceros de $R'(z)$, los polos de $R(z)$ con multiplicidad mayor que 1, es decir, los ceros de $Q(z)$ de multiplicidad mayor que 1, y posiblemente ∞ .

Sea $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una función racional.

Definición 1.5. Dado un punto $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, la órbita positiva o conjunto de iterados positivos (y en contexto de métodos numéricos, simplemente iterados) de z_0 por R es el conjunto

$$orb_R^+(z_0) = \{z_0, z_1 = R(z_0), z_2 = R(z_1) = R^2(z_0), \dots, z_n = R^n(z_0), \dots\},$$

donde la notación R^n significa $\underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n\text{-veces}}$.

Una manera elemental de distinguir órbitas, es contar el número de puntos en ellas.

Definición 1.6. Sea $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ y $orb_R^+(z_0)$ su conjunto de iterados por R . Se dice que $orb^+(z_0)$ es un n -ciclo u órbita periódica de periodo n si, $z_0 = R^n(z_0)$ y $R^j(z_0) \neq z_0$ para $1 \leq j \leq n-1$. Un 1-ciclo, es decir, $R(z_0) = z_0$, es llamado *punto fijo* de R . En otras palabras, un n -ciclo consiste de los n puntos $\{z_0, R(z_0), \dots, R^{n-1}(z_0)\}$.

Respecto a la cantidad de puntos fijos que puede poseer una función racional, se tiene el siguiente resultado (los detalles de la prueba pueden ser consultados en [3] y [13]).

Teorema 1.7. *Una función racional de grado $d \geq 1$ tiene precisamente $d + 1$ puntos fijos contados con multiplicidad.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquier función racional R puede ser conjugada a una función racional S que no fija a ∞ , tal que, el número de puntos fijos de S y de R sean el mismo, así como sus grados. Entonces, se puede asumir que R no fija a ∞ . Ahora se escribe a R como el cociente $R(z) = P(z)/Q(z)$ con P y Q coprimos, y sea r algún punto fijo de R . Como $Q(r) \neq 0$, el número de ceros de $R(z) - z$ en r es exactamente el mismo que el número de ceros de $P(z) - zQ(z)$ en r ; de ahí, el número de puntos fijos de R es exactamente el número de soluciones de $P(z) = zQ(z)$ en \mathbb{C} . Como R no fija a ∞ , se tiene

$$\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) = \text{grado}(R),$$

así el grado de $P(z) - zQ(z)$ es exactamente $\text{grado}(R) + 1$, lo que completa la prueba. \square

Definición 1.8. Sea $r \in \mathbb{C}$ un punto fijo de una función racional R . Se dice que r tiene multiplicidad $m \geq 1$ si, r es una raíz de multiplicidad m de la ecuación $F(z) = R(z) - z = 0$, esto es, $F^{(j)}(r) = 0$ para $j = 0, \dots, m-1$ y $F^{(m)}(r) \neq 0$. En el caso de que $m = 1$, se dice que r es un cero simple de R , es decir, $F(r) = 0$ y $F'(r) \neq 0$.

Si aplicamos el método de Newton a una ecuación no lineal $f(z) = 0$, se puede ver claramente que los ceros de f son puntos fijos de N_f y recíprocamente. Nótese que si $p(z)$ es un polinomio de grado $d \geq 2$, entonces el grado de $N_p(z)$ es menor o igual que d , en el caso de que $p(z)$ tenga raíces múltiples, y será exactamente d en caso de que el polinomio $p(z)$ tenga raíces simples. Como las raíces de $p(z)$ son puntos fijos de N_p , si este tiene d raíces y $z = \infty$ es siempre un punto fijo de N_p se tiene la cantidad máxima de $d + 1$ puntos fijos para N_p .

El siguiente ejemplo, se podrá ver que lo anterior no siempre ocurre.

Ejemplo 1.9. Sea el polinomio $p(z) = z^3 - 1$ que tiene las raíces $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $e^{\frac{4\pi i}{3}}$, al cual se le aplica la función de iteración siguiente, conocida como *método del punto medio* (ver [19]):

$$M_f(z) = z - \frac{f(z)}{f' \left(z - \frac{f(z)}{2f'(z)} \right)}, \quad (1.5)$$

entonces se obtiene $M_p(z) = \frac{z(13z^6 + 22z^3 + 1)}{(5z^3 + 1)^2}$, que tiene $z = 0$ como punto fijo, el cual no corresponde a una raíz de $p(z)$. En la Figura 5 puede analizarse la interpretación geométrica del método del punto medio, para el caso real, a fin de entender su funcionamiento.

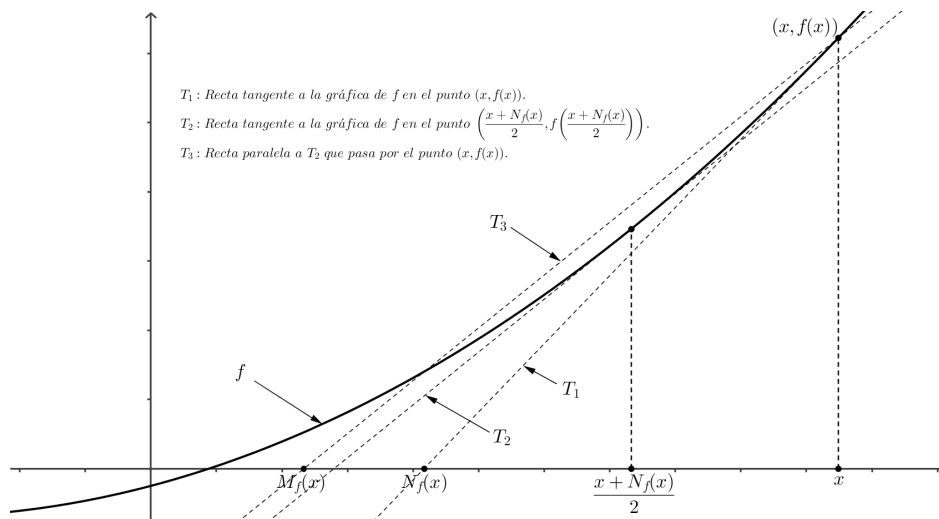


FIGURA 5. Interpretación geométrica del método del punto medio para el caso real.

Los métodos iterativos usados para calcular aproximaciones a las raíces de una función, deben cumplir con la propiedad básica de que dichas raíces sean puntos fijos de los métodos utilizados.

Un problema serio es que al aplicar algún método iterativo, la función de iteración obtenida, puede tener puntos fijos distintos de las raíces de la función, a estos puntos fijos se les denomina *puntos fijos extraños*; como se vió en el Ejemplo 1.9, la función de iteración tiene a $z = 0$ como un punto fijo extraño. Aparte de los puntos fijos extraños, también puede ocurrir que algunas funciones iterativas tengan ciclos de largo mayor que 1. Es obvio que una condición inicial sobre un ciclo no convergerá a una raíz de la función.

Por ejemplo, para el polinomio $p(z) = z^3 - 2z + 2$, se tiene $N_p(z) = 2(z^3 - 1)/(3z^2 - 2)$ y para la condición inicial $z_0 = 0$, sus iterados son $z_0 = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, es decir, $orb^+(0) = \{0, 1\}$.

Definición 1.10. Sea $\alpha = \{z_0, R(z_0), \dots, R^{n-1}(z_0)\}$ un n -ciclo de R . Su multiplicador $\lambda = \lambda(\alpha)$ se define como $\lambda(\alpha) = (R^n)'(z_0)$.

Por la regla de la cadena se tiene que $(R^n)'(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} R'(R^j(z_0))$, y el valor $\lambda(\alpha)$ solo depende de α , y no del punto particular elegido sobre el ciclo.

Observación 1.11. Cuando $z = \infty$, usando la transformación de Möbius $m(z) = \frac{1}{z}$, la cual aplica $m(\infty) = 0$ y $m(0) = \infty$, se define $S(z) = m \circ R \circ m^{-1}(z)$, entonces $S(0) = \frac{1}{R(\infty)}$. Así, cuando $z = \infty$ sea un punto fijo, se tiene $S(0) = 0$ y $S'(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{R'(z)}$.

Definición 1.12. Se dice que un n -ciclo, $\alpha = \{z_0, R(z_0), \dots, R^{n-1}(z_0)\}$, es:

- *superatractor*, si $\lambda = 0$,
- *atractor*, si $0 < |\lambda| < 1$,
- *repulsor*, si $|\lambda| > 1$, e
- *indiferente*, si $|\lambda| = 1$.

Los ciclos indiferentes se clasifican en dos tipos:

1. *Racionalmente indiferente* o *parabólico* si λ es una raíz de la unidad, es decir, si existe un número natural n , tal que $\lambda^n = 1$, y
2. *Irracionalmente indiferente*, en otro caso.

Ejemplo 1.13. Para el método de Newton, se tiene $N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}$, que es el grado de convexidad logarítmica de p . De esta expresión es claro que las raíces de p son puntos fijos superatractores de N_p , de hecho se tiene que si r es una raíz de multiplicidad $m \geq 1$

de p , entonces $N'_p(r) = (m-1)/m$, de donde se concluye que r es superatractor si es una raíz simple de p y sólo atractor si es una raíz de multiplicidad mayor que 1 de p . También, $z = \infty$ es un punto fijo de N_p y se tiene que $N'_p(\infty) = \frac{d}{d-1} > 1$, es decir, es un punto fijo repulsor. Por otro lado, para el método del punto medio, aparte de las raíces pueden existir puntos fijos extraños, como se vio en el Ejemplo 1.9. Haciendo un cálculo directo se tiene

$$M'(z) = 1 - \frac{p'(z)}{p'(z - \frac{1}{2}u_p(z))} + \frac{p(z)p''(z - \frac{1}{2}u_p(z)) \left(\frac{1}{2} + \frac{p(z)p''(z)}{2p'(z)^2} \right)}{p'(z - u_p(z))^2},$$

donde $u_p(z) = p(z)/p'(z)$. De aquí se puede ver que r es una raíz simple de p , esto es, $p(r) = 0$ y $p'(r) \neq 0$, entonces $M'(r) = 0$, es decir, son puntos fijos superatractores de M , también puede verse que $M''(r) = 0$, y en general, $M'''(r) \neq 0$. Por otro lado, si r es una raíz de multiplicidad $m > 1$ de p , entonces $0 < |M'(r)| < 1$, es decir, son puntos fijos atractores de M . Ahora, para el polinomio $p(z) = z^3 - 1$, se vio que $z = 0$ es un punto fijo, y se tiene que $M'(z) = 1$, entonces este es un punto fijo racionalmente indiferente.

Si M es un método iterativo que se aplica al polinomio complejo $p(z)$ para encontrar sus raíces, y se cumple que las raíces de p son puntos fijos superatractores, sea r uno de esos puntos y suponemos que $M'(r) \neq 0$ es de orden $k \geq 1$. entonces se puede escribir el desarrollo de Taylor de M alrededor de r de la siguiente forma:

$$M(z) = r + \frac{M^{(k)}(r)}{k!}(z-r)^k + O\left((z-r)^{k+1}\right),$$

de donde, si $z - r$ es pequeño, se tiene que $M(z) - r \approx \frac{M^{(k)}(r)}{k!}(z-r)^k$, en otras palabras, si se inician las iteraciones con z_0 , y se sabe que $orb^+(z_0)$ converge a r , llamando $z_{n+1} = M(z_n)$ se tiene que $z_{n+1} - r \approx \frac{M^{(k)}(r)}{k!}(z_n - r)^k$, es decir, localmente se tiene un buen comportamiento de los iterados por M para condiciones iniciales “próximas” a los valores de las raíces de $p(z)$, pero cuando se elige una condición inicial arbitraria, es preciso tener una descripción global del comportamiento de los iterados en un método iterativo para aproximar raíces.

Los siguientes teoremas describen la conducta local de las iteraciones en vecindades de órbitas periódicas atractoras y superatractoras, respectivamente; las pruebas pueden consultarse en [4]. Para $r > 0$, se denota por D_r al disco abierto de centro en el origen y radio r , es decir, $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Se usa la notación $(R^n)^{(k)}(z_0)$ para representar la k -ésima derivada de R^n .

Teorema 1.14. (König) *Si z_0 pertenece a un n -ciclo atractor, con multiplicador $\lambda = (R^n)'(z_0)$, que satisface $0 < |\lambda| < 1$, entonces existe una vecindad U de z_0 y un homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow D_r$ (para algún $r > 0$), único, tal que $\phi(z_0) = 0$, $\phi'(z_0) = 1$*

y $\phi(R^n(z_0)) = \lambda\phi(z)$ para todo $z \in U$.

Teorema 1.15. *Sea $\text{orb}^+(z_0)$ un n -ciclo superatractor. Supongamos que $k \geq 2$, el multiplicador $\lambda = (R^n)^{(k)}(z_0) \neq 0$, y que*

$$(R^n)'(z_0) = (R^n)^{(2)}(z_0) = \dots = (R^n)^{(k-1)}(z_0) = 0.$$

Entonces existe una vecindad U de z_0 y un homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow D_r$ (para algún $r > 0$) tal que $\phi(z_0) = 0$, $\phi'(z_0) = 1$ y $\phi(R^n(z)) = (\phi(z))^k$, para todo $z \in U$.

Ahora, sea ζ un punto fijo superatractor de una función racional R , entonces existe un disco abierto $D_r(\zeta)$ de radio $r > 0$ y centro en ζ , tal que, para cada $z_0 \in D_r(\zeta)$, los iterados $R^n(z_0)$ (definidos para todo $n \in \mathbb{N}$), están contenidos en $D_r(\zeta)$, y convergen a ζ cuando $n \rightarrow \infty$. El conjunto

$$\mathfrak{B}(\zeta) = \bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(D_r(\zeta)) \quad (1.6)$$

consiste de todos los puntos en $\bar{\mathbb{C}}$ que por iteraciones por R convergen a ζ . Tomando en cuenta los dos resultados anteriores, se puede definir la *cuenca de atracción* de un punto fijo superatractor como sigue.

Definición 1.16. Sea ζ un punto fijo superatractor de una función racional R . Su *cuenca de atracción* o región de convergencia es el conjunto

$$\mathfrak{B}(\zeta) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : R^n(z) \rightarrow \zeta, \text{ cuando } n \rightarrow \infty\},$$

y la *cuenca de atracción inmediata*, $\mathfrak{B}^*(\zeta)$, es la componente conexa de $\mathfrak{B}(\zeta)$ que contiene a ζ .

La cuenca de atracción de un punto fijo superatractor es el conjunto abierto maximal con la propiedad de que si elegimos un punto $w \in \mathfrak{B}(\zeta)$, sus iterados $R^n(w)$ convergen a ζ cuando $n \rightarrow \infty$.

Si $\alpha = \{z_0, R(z_0), \dots, R^{n-1}(z_0)\}$ es un n -ciclo superatractor, entonces su cuenca de atracción es

$$\mathfrak{B}(\alpha) = \bigcup_{j=0}^{n-1} R^j(\mathfrak{B}(z_0)).$$

Sean $D_j(\alpha)$ las componentes conexas de $\mathfrak{B}(\alpha)$ que contienen los puntos $z_0, R(z_0), \dots, R^{n-1}(z_0)$, respectivamente. Se denota a $D(\alpha) = \bigcup_{j=0}^{n-1} D_j(\alpha)$ como la cuenca de atracción inmediata de α , aunque este conjunto no es conexo.

Para los siguientes resultados, supongamos que el grado de la función racional R es $\text{grado}(R) \geq 2$. Recordemos que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto crítico de R si $R'(z_0) = 0$ y su imagen $w_0 = R(z_0)$ es llamado un valor crítico.

El siguiente resultado ubica los valores críticos de los iterados R^n en función de los puntos críticos de R . La prueba es una consecuencia de la regla de cadena (ver [3]).

Teorema 1.17. *Sea $C = C(R)$ el conjunto de puntos críticos de una función racional R . Entonces*

(a) *El conjunto de puntos críticos de R^n es*

$$C(R^n) = C \cup R^{-1}(C) \cup \dots \cup R^{-n}(C).$$

(b) *El conjunto de valores críticos de R^n es*

$$R(C) \cup R^2(C) \cup \dots \cup R^n(C).$$

Sea ζ un punto fijo indiferente de una función racional R de grado $d \geq 2$. Si se hace un cambio de coordenadas, se puede asumir que $\zeta = 0$. Se asume que $\lambda = R'(\zeta) = 1$. Así se tiene que

$$R(z) = z - az^{m+1} + O(z^{m+2}), \quad a \neq 0 \text{ y } m \geq 1, \quad (1.7)$$

esto es, $\zeta = 0$ es un punto fijo de multiplicidad $m + 1$. Además, se asumirá que $a = 1$, es decir, localmente se tiene

$$R(z) = z - z^{m+1} + O(z^{m+2}), \quad a \neq 0 \text{ y } m \geq 1. \quad (1.8)$$

El siguiente teorema describe las cuencas de atracción para una función racional como la descrita en la Ec. 1.8. Si $a \neq 1$ la prueba es análoga (ver [3]).

Teorema 1.18. *Sea R una función racional que tiene en $\zeta = 0$ un punto fijo racionalmente indiferente como en (1.8). Sean $\omega_1, \dots, \omega_m$ las m -ésimas raíces de la unidad y sean η_1, \dots, η_m las m -ésimas raíces de -1 . Entonces para $j = 1, \dots, m$, y para valores positivos suficientemente pequeños del radio r_0 y el ángulo θ_0 , se tiene:*

(i) $|R(z)| < |z|$ en el sector

$$S_j = \left\{ z : 0 < \left| \frac{z}{\omega_j} \right| < r_0, \left| \arg \left(\frac{z}{\omega_j} \right) \right| < \theta_0 \right\};$$

y

(ii) $|R(z)| > |z|$ en el sector

$$\Sigma_j = \left\{ z : 0 < \left| \frac{z}{\eta_j} \right| < r_0, \left| \arg \left(\frac{z}{\eta_j} \right) \right| < \theta_0 \right\}.$$

Teorema 1.19. (De los pétalos, [3]) Sea R una función racional como en la Ec. (1.8). Para un $t > 0$ dado y para cada $k = 0, \dots, m-1$, se definen los pétalos

$$\Pi_k(t) = \left\{ re^{i\theta} : r < t(1 + \cos(m\theta)), \left| \frac{2k\pi}{m} - \theta \right| < \frac{\pi}{m} \right\} \quad (1.9)$$

Entonces, para t suficientemente pequeño, R aplica cada pétalo en si mismo. Además, para cada $z \in \Pi_k(t)$, los iterados de z por R convergen a 0 .

En la Figura 6 se ilustran los pétalos definidos en (1.9) cuando $m = 6$. Nótese que los pétalos son disjuntos entre sí, y cada uno subtiende un ángulo $2\pi/m$ en el origen (el ángulo total subtendido por todos los pétalos es de 2π). La línea de simetría de $\Pi_k(t)$ (la línea $\theta = 2k\pi/m$) es llamada el eje de $\Pi_k(t)$.

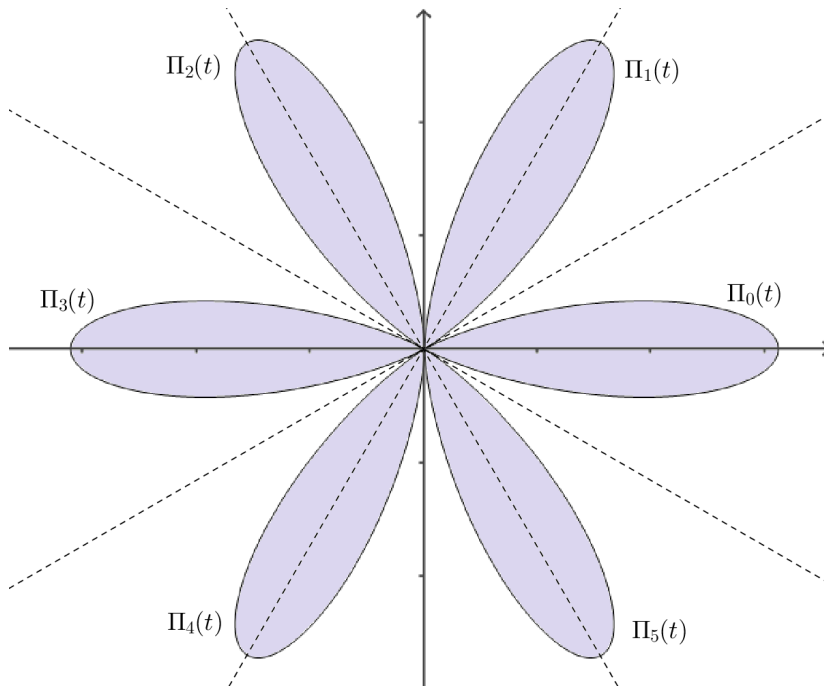


FIGURA 6. Seis pétalos en el origen.

Teorema 1.20. (Fatou, Julia) *La cuenca de atracción inmediata de una ciclo superatractor, contiene al menos un punto crítico.*

El resultado anterior relaciona las cuencas de atracción y los $n - \text{ciclos}$ atractores (la demostración puede consultarse en [13]). Entonces para determinar los ciclos superatractores, se deben estudiar las iteraciones de los puntos críticos de la función de iteración utilizada.

Teorema 1.21. *Una función racional de grado $d \geq 2$ tiene $2d - 2$ puntos críticos contados con multiplicidad.*

Una función racional de grado 2 o mayor, tiene al menos un número finito de ciclos, ya sea atractores o indiferentes. Shishikura en 1987 (ver [17]) aportó el siguiente resultado sobre la cantidad máxima de ciclos atractores o indiferentes que puede tener una función racional. La demostración puede consultarse en [3] y [13].

Teorema 1.22. *Una función racional $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ de grado d tiene a lo más $2d - 2$ ciclos, los cuales pueden ser superatractores o indiferentes.*

Teorema 1.23. (Hurley, 1986 [10]) *Para $d \geq 2$ existe un polinomio $p(z)$ de grado d , con coeficientes reales, tal que el método de Newton N_p tiene exactamente $2d - 2$ ciclos atractores en el plano complejo, es decir, tiene el número maximal de ciclos atractores que una función racional de grado d puede tener.*

Respecto a la conducta del punto $z = \infty$ para una función racional $R = P/Q$, se tiene:

Teorema 1.24. *Sea la función racional*

$$R(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}.$$

Si $n > m$ entonces $z = \infty$ es un punto fijo de R y es:

- superatractor, si $m < n - 1$,
- atractor, si $m = n - 1$ y $|a_n| > |b_m|$,
- repulsor, si $m = n - 1$ y $|a_n| < |b_m|$, e
- indiferente, si $m = n - 1$ y $|a_n| = |b_m|$.

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la conjugación $M(z) = \frac{1}{z}$ se tiene, $Q = M \circ R \circ M^{-1}$, $M(\infty) = 0$. Así, se estudian las propiedades de $Q(w) = \frac{1}{R(\frac{1}{w})}$ en el 0.

$$Q(w) = \frac{b_m w^n + b_{m-1} w^{n+1} + O(w^{n+2})}{a_n w^m + a_{n-1} w^{m+1} + O(w^{m+2})}.$$

Calculando la derivada, se tiene

$$Q'(w) = \frac{(n-m)a_n b_m w^{n+m-1} + O(w^{n+m})}{a_n^2 w^{2m} + O(w^{2m+1})}.$$

Entonces se obtienen los siguientes casos para $w = 0$:

- *superatractor*: $Q'(0) = 0 \Leftrightarrow n + m - 1 > 2m \Leftrightarrow n - 1 > m$,
- *atractor*: $Q'(0) \neq 0$ y $|Q'(0)| < 1 \Leftrightarrow n - 1 = m$ y $|\frac{(n-m)a_n b_m}{a_n^2}| < 1 \Leftrightarrow$
 $|b_m| = \left| \underbrace{(n-m)}_{=1} b_m \right| < |a_n|$,
- *repulsor*: $Q'(0) \neq 0$ y $|Q'(0)| > 1 \Leftrightarrow n - 1 = m$ y $|\frac{(n-m)a_n b_m}{a_n^2}| > 1 \Leftrightarrow |b_m| > |a_n|$, e
- *indiferente*: $Q'(0) \neq 0$ y $|Q'(0)| = 1 \Leftrightarrow n - 1 = m$ y $|\frac{(n-m)a_n b_m}{a_n^2}| = 1 \Leftrightarrow |b_m| = |a_n|$.

□

Conjuntos de Julia y Fatou

La dinámica de una aplicación racional R , induce una subdivisión del plano complejo extendido $\bar{\mathbb{C}}$ en dos conjuntos de R , estos son, el conjunto de Julia y Fatou, denotados por $\mathcal{J}(R)$ y $\mathcal{F}(R)$ respectivamente. Para definir formalmente a estos conjuntos es preciso introducir la noción de equicontinuidad de una familia de aplicaciones y el concepto de *familia normal* (ver [1], [3]). En este capítulo se introducirán dichos conceptos y se analizarán algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou.

1. Familias normales

Una familia \mathfrak{F} de funciones de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es *equicontinua* en x_0 , si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, y para toda $f \in \mathfrak{F}$,

$$d_X(x_0, x) < \delta \quad \text{implica} \quad d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Recordemos que una función f se dice que es *meromorfa* en el abierto U del plano complejo si f es analítica en U excepto en un conjunto de puntos aislados, llamados *polos* de la función. Cuando el abierto U esta en $\bar{\mathbb{C}}$, el cuerpo de funciones meromorfas no es mas que el cuerpo de funciones racionales sobre el plano complejo, por lo que se puede demostrar que toda función meromorfa sobre $\bar{\mathbb{C}}$ es racional.

Definición 2.1. Una familia \mathfrak{F} de funciones meromorfas definidas en un dominio $U \subset \bar{\mathbb{C}}$, se dice que es *normal* si cada sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathfrak{F} tiene una sub-sucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de U .

Considerando la métrica cordal o la esférica en $\bar{\mathbb{C}}$, se tiene que: una familia de funciones meromorfas \mathfrak{F} de U en $\bar{\mathbb{C}}$ es *normal* si y sólo si es *equicontinua* sobre todos los subconjuntos compactos de U .

El siguiente teorema nos describe un criterio para determinar cuándo una familia de funciones es normal. La prueba puede consultarse en [13].

Teorema 2.2. (Montel) Sea $\mathfrak{F} = \{f : U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}\}$ una familia de funciones analíticas. Si $\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(U)$ omite tres puntos, entonces \mathfrak{F} es normal, esto es, si existen tres puntos α, β, γ tales que $\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(U) \subset \bar{\mathbb{C}} - \{\alpha, \beta, \gamma\}$, la familia \mathfrak{F} es normal.

Con estos elementos, ahora se analizará la familia de iterados $\{R^n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ de una función racional $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. En este caso, equicontinuidad significa que iteraciones de puntos próximos no divergen.

Definición 2.3. Un punto $z \in \bar{\mathbb{C}}$ pertenece al conjunto de Fatou $\mathcal{F}(R)$ (también llamado *dominio de normalidad*) si existe una vecindad U de z tal que la familia de iterados

$$\mathfrak{F} = \{R^n : U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}; n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

es normal en U .

Definición 2.4. Sea la R una función racional. El conjunto Fatou $\mathcal{F}(R)$ es el subconjunto abierto maximal de $\bar{\mathbb{C}}$ donde $\{R^n\}$ es equicontinua, y el conjunto de Julia $\mathcal{J}(R)$ es el complemento de $\mathcal{F}(R)$, esto es, $\mathcal{J}(R) = \bar{\mathbb{C}} - \mathcal{F}(R)$.

A partir de su definición, es claro que $\mathcal{F}(R)$ es abierto y en consecuencia $\mathcal{J}(R)$ es cerrado. Un dominio en el conjunto de Fatou es una componente conexa abierta del conjunto de Fatou.

A partir del Teorema 2.2 de Montel, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.5. (Montel) Si $z \in \mathcal{J}(R)$ y U es una vecindad de z , entonces $\{R^m(U)\}_{m \in \mathbb{N}}$ cubre todo $\bar{\mathbb{C}}$, excepto a lo más dos puntos.

Definición 2.6. Sea U un conjunto abierto no vacío de $\bar{\mathbb{C}}$. Se define el conjunto de puntos omitidos de la aplicación racional $R|_U$ como el conjunto

$$E_U = \bar{\mathbb{C}} - \bigcup_{n \geq 0} R^n(U),$$

estos puntos omitidos también son conocidos como puntos excepcionales.

Del Teorema 2.5, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.7. Sea $z \in \mathcal{J}(R)$ y sea U una vecindad abierta de z . entonces E_U contiene a lo más dos puntos.

Si existen dichos puntos en E_U , estos siempre son los puntos críticos de R , y pertenecen al conjunto de Fatou (ver [13]).

Teorema 2.8. *El conjunto de puntos excepcionales de una función racional R es independiente del punto $z \in \mathcal{J}(R)$ usado para definirlo. Por lo tanto, se puede denotar simplemente por E_R .*

2. Algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou

En esta sección se analizarán algunas propiedades del conjunto de Julia y Fatou. Para ello, consideremos la función racional $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ con grado mayor o igual a 2.

Teorema 2.9. *El conjunto de Julia, $\mathcal{J}(R)$, es no vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{J}(R) = \emptyset$, entonces $\mathcal{F}(R) = \bar{\mathbb{C}}$. Luego la familia de iterados $\{R^n\}$ es normal en $\bar{\mathbb{C}}$, y en consecuencia existe una subsucesión $\{R^{n_k}\}$ que converge uniformemente sobre $\bar{\mathbb{C}}$ a una función analítica G . Como G es analítica sobre $\bar{\mathbb{C}}$, es de hecho una función racional, luego $\text{grado}(G) < \infty$. Ahora como $\text{grado}(R^{n_k}) = (\text{grado}(R))^{n_k} \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Se llega a una contradicción, pues se debe tener que $\text{grado}(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{grado}(R^{n_k})$. □

Teorema 2.10. *Supongamos que $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ está sobre un ciclo. Si este ciclo es superatractor, entonces está contenido en el conjunto de Fatou, $\mathcal{F}(R)$, y si es repulsor está contenido en el conjunto de Julia, $\mathcal{J}(R)$.*

De hecho toda la cuenca de atracción \mathfrak{B} para una órbita periódica atractora está contenida en el conjunto de Fatou. Sin embargo, la frontera $\partial\mathfrak{B}$ está contenida en el conjunto de Julia, y cada órbita periódica repulsora está contenida en el conjunto de Julia. Los detalles pueden consultarse en [13].

Como se mencionó anteriormente, una propiedad fundamental que debe tener un método iterativo para aproximar soluciones de una ecuación $f(z) = 0$, es que las raíces de $f(z)$ sean puntos fijos superatractores de la función de iteración obtenida al aplicar M a f . De aquí, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *Sea M un método iterativo para aproximar raíces de una función $f(z)$. Se denota por M_f a la función de iteración obtenida al aplicar M a f . entonces las raíces de f están contenidas en el conjunto de Fatou de M_f , $\mathcal{F}(M_f)$.*

Una de las inclusiones en el siguiente teorema se deduce del Teorema 2.10, la demostración completa puede consultarse en [13].

Teorema 2.12. (*Fundamental (Fatou, Julia)*) Los ciclos repulsivos son densos en $\mathcal{J}(R)$, es decir,

$$\mathcal{J}(R) = \text{clausura}\{z \in \bar{\mathbb{C}} : z \text{ sobre un ciclo repulsor de } R\}.$$

En particular, existe una cantidad infinita de ciclos repulsivos y cada $z \in \mathcal{J}(R)$ es obtenido como límite de puntos en ciclos repulsivos.

Lo interesante de esta propiedad, es que si se elige una condición inicial sobre $\mathcal{J}(R)$ para las iteraciones, entonces los errores computacionales, por pequeños que sean, tenderán a alejar a los iterados del conjunto de Julia.

Observación 2.13. La definición del conjunto de Julia como la clausura de puntos periódicos repulsivos no es la clásica. Desde la época de Fatou y Julia, este conjunto ha sido definido de manera estándar, como el conjunto de puntos en que la familia de iterados de R falla de ser normal. En su memoria [11], G. Julia enfoca su atención en la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsivos, y muestra que su complemento es la unión de dominios sobre el cual la familia de iterados $\{R^n\}$ es normal.

El siguiente teorema muestra que las dos definiciones mencionadas en la observación anterior son equivalentes (ver [6]).

Teorema 2.14. Sea R una función racional, entonces

$$\mathcal{J}(R) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : \{R^n\} \text{ no es normal en } z\}.$$

Definición 2.15. Sean R_1 y R_2 dos funciones racionales. Se dice que son conjugadas si existe una transformación de Möbius, $M : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, tal que $R_2 \circ M(z) = M \circ R_1(z)$, para todo z .

Una característica importante de la conjugación de funciones racionales es dada por el siguiente resultado clásico.

Teorema 2.16. Sean R_1 y R_2 dos funciones racionales, y sea M una transformación de Möbius que conjugue a R_1 y R_2 , esto es, $R_2 = M \circ R_1 \circ M^{-1}$. Entonces $M(\mathcal{J}(R_1)) = \mathcal{J}(R_2)$ y $M(\mathcal{F}(R_1)) = \mathcal{F}(R_2)$.

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, la conjugación juega un papel central en la comprensión de la conducta de aplicaciones iterativas. Por ejemplo, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.17. (*Cayley (1879, [5]), Schröder (1870, [16])*). Sea $p(z)$ un polinomio cuadrático con sus dos raíces distintas, entonces el método de Newton $N_p(z)$ aplicado a p es conjugado a la función que aplica $z \mapsto z^2$.

DEMOSTRACIÓN. Sean α y β las raíces de $p(z)$, y sea $h(z) = \frac{z-\beta}{z-\alpha}$. Se tiene $h(\infty) = 1$, $h(\beta) = 0$ y $h(\alpha) = \infty$. Como $h \circ N_p \circ h^{-1}$ es una transformación racional de grado 2 que tiene dos puntos fijos superatractores, en $z = 0$ y en $z = \infty$, resulta que $h \circ N_p \circ h^{-1} = z^2$ (ver [14]). □

Para estudiar las clases de conjugación afines a los métodos iterativos para aproximar raíces de polinomios complejos, se tiene el siguiente resultado más general.

Teorema 2.18. (Teorema de Reescalamiento para el Método de Newton) Sea $T(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$, y sea $q(z) = p(T(z)) = p \circ T(z)$. Entonces

$$T \circ N_q \circ T^{-1} = N_p, \quad (\text{Ecuación de Reescalamiento})$$

esto es, T es una conjugación entre N_p y N_q .

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $p = q \circ T^{-1}$ y que $p'(z) = \alpha^{-1}q'(T^{-1}(z))$. De aquí,

$$\begin{aligned} T \circ N_q \circ T^{-1}(z) &= T(N_q(T^{-1}(z))) \\ &= T\left(T^{-1}(z) - \frac{q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z))}\right) \\ &= \alpha\left(T^{-1}(z) - \frac{q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z))}\right) + \beta \\ &= \alpha\left(\frac{z}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{q(T^{-1}(z))}{\alpha^{-1}q'(T^{-1}(z))} + \beta \\ &= z - \frac{p(z)}{p'(z)} = N_p(z). \end{aligned}$$

Esto completa la prueba del teorema (ver [9]). □

El teorema anterior nos dice que mediante una transformación afín se puede transformar las raíces de p sin modificar cualitativamente la dinámica del método de Newton. En general, si el reescalamiento es aplicable al método iterativo considerado, aplicando estos métodos se reduce el estudio de la dinámica de las funciones racionales obtenidas.

Observación 2.19. El teorema 2.18 es válido para muchos métodos iterativos, como por ejemplo, los métodos de Halley, König, Schröder, Chebyshev, entre otros, excepto para ciertos métodos, como el de Stirling, que no satisface la ecuación de reescalamiento (ver [2] y [15]).

Teorema 2.20. Si $\bar{z} \in \mathcal{J}(R)$ (en particular si \bar{z} pertenece a un ciclo repulsor) entonces

$$\mathcal{J}(R) = \text{clausura}\{z \in \bar{\mathbb{C}} : R^n(z) = \bar{z}, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

La proposición anterior sugiere un buen algoritmo para graficar a los conjuntos de Julia. Simplemente se debe encontrar un punto fijo o un punto en un ciclo repulsor para R y calcular sus preimágenes. Este método es efectivo para polinomios de grado pequeño, como en el caso cuadrático, puesto que las ecuaciones cuadráticas son fáciles

de resolver. Pero para polinomios de grado mayor no es muy efectivo, dado que computacionalmente el algoritmo es lento.

Teorema 2.21. *Sea R una función racional, entonces $\mathcal{J}(R)$ es un conjunto perfecto.*

Teorema 2.22. *El conjunto de Julia $\mathcal{J}(R)$ es completamente invariante, esto es $R(\mathcal{J}(R)) = \mathcal{J}(R) = R^{-1}(\mathcal{J}(R))$. En particular, el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(R)$ es completamente invariante.*

Teorema 2.23. *Los conjuntos de Julia de R y de R^m , con $m \in \mathbb{N}$, son el mismo. Esto es, $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^m)$.*

Teorema 2.24. *Sea z_a un punto periódico atractor para una función racional R , entonces $\mathcal{J}(R) = \partial\mathfrak{B}(z_a)$ (∂A denota la frontera del conjunto A).*

Esta proposición da un algoritmo muy eficiente para graficar el conjunto de Julia. Para esto, basta encontrar un punto fijo atractor z_a de R y se fija un error $\varepsilon > 0$, luego se pintan de un color determinado los puntos z en una región acotada (un rectángulo generalmente) tales que para algún $n \geq 1$, se tiene $|R^n(z) - z_a| < \varepsilon$. Este algoritmo se conoce como *algoritmo tiempo de escape*. Por otra parte, se pueden definir los conjuntos de nivel, $L_k(z_a)$, como sigue: sea $0 < \varepsilon \ll 1$ (\ll significa "bastante menor que") y sea

$$L_0(z_a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_a| < \varepsilon\},$$

y para $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$L_{k+1}(z_a) = \{z \in \mathbb{C} - L_k(z_a) : R^k(z) \in L_k(z_a)\}.$$

Se tiene que

$$\partial L_k(z_a) \rightarrow \mathcal{J}(R),$$

donde el límite es tomado respecto de la métrica Hausdorff en $\mathcal{K}(\bar{\mathbb{C}}) = \{K \subset \bar{\mathbb{C}} : K \text{ es compacto}\}$. Una forma de obtener gráficas más atractivas del conjunto de Julia con el algoritmo descrito anteriormente, es asignándole un color k (módulo P) a cada conjunto de nivel L_k , donde P es el número de colores de la resolución gráfica utilizada (monitor o tarjeta gráfica del ordenador), generalmente $P = 16$. En caso que z_a sea periódico, tomamos $|R^{pn}(z) - z_a| < \varepsilon$, donde p es el período de z_a .

Convergencia en métodos iterativos para aproximar raíces de polinomios complejos

Se entiende por convergencia de un método iterativo para aproximar raíces de un polinomio, a la seguridad que se tiene de que, al realizar un buen número de iteraciones, las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al verdadero valor buscado. Como se ha visto, una parte importante de las propiedades de convergencia de estos métodos es determinada por los valores de la derivada de la función meromorfa asociada en los puntos fijos que corresponden a las raíces del polinomio considerado. Ahora bien, el análisis de la dinámica de un método iterativo nos da información y propiedades importantes de las regiones de convergencia de los iterados en el dominio complejo. En este capítulo abordaremos estos aspectos y se estudiarán algunas limitaciones que tienen los algoritmos iterativos para aproximar raíces de polinomios en el plano complejo.

1. Métodos iterativos generalmente convergentes y limitaciones algorítmicas

Cuando se estudia la convergencia de un algoritmo iterativo para aproximar las raíces de un polinomio, surgen cuestionamientos como: ¿Qué tan bueno es el algoritmo?, o si ¿el algoritmo en cuestión converge para casi toda condición inicial? Pero, ¿qué es formalmente un algoritmo iterativo para aproximar raíces de polinomios?

Definición 3.1. Se dice que una función racional $T_p : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, que aplica un polinomio $p(z)$ de grado $d \geq 2$ en una función $T(p(z))$, es un *algoritmo iterativo* para aproximar raíces de $p(z)$, si cada una de éstas últimas es un punto fijo superatractor de $T_p(z)$, y dado una condición inicial z_0 , la sucesión de iterados $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $z_{n+1} = T_p(z_n)$, converge a una raíz $r \in \bar{\mathbb{C}}$ de $p(z)$, siempre que z_0 sea lo suficientemente cercano a r .

Observación 3.2. Si la propiedad anterior vale para todo polinomio $p(z)$ de grado d , se dice que la función racional $T_p(z)$ es un *algoritmo puramente iterativo*. Por ejemplo, el método de Newton $N_p(z)$ es un algoritmo puramente iterativo.

Respecto a la convergencia de una función de iteración, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.3. Dado un polinomio $p(z)$. Se dice que una función de iteración $T_p(z)$ es *generalmente convergente* si, para casi todo $z \in \mathbb{C}$ sus iteraciones convergen a una raíz de $p(z)$.

Como se puede ver a continuación, el método de Newton no es generalmente convergente.

Ejemplo 3.4. (Smale [18]) En un ejemplo anterior se vió que al aplicar el método de Newton al polinomio $p(z) = z^3 - 2z + 2$ se tiene un 2-ciclo superatractor $\alpha = \{0, 1\}$ para la condición inicial $z_0 = 0$. Por continuidad, si $q(z)$ es un polinomio próximo a $p(z)$, entonces N_q tiene un 2-ciclo atractor próximo al 2-ciclo $\alpha = \{0, 1\}$. Esta claro que una condición inicial sobre un ciclo no convergerá a una raíz del polinomio, entonces el método de Newton no es generalmente convergente. Otro ejemplo clásico debido a Barna (1956) es el polinomio $p(z) = 3z^5 - 10z^3 + 23z$ para el cual N_p tiene el ciclo superatractor $\alpha = \{-1, 1\}$.

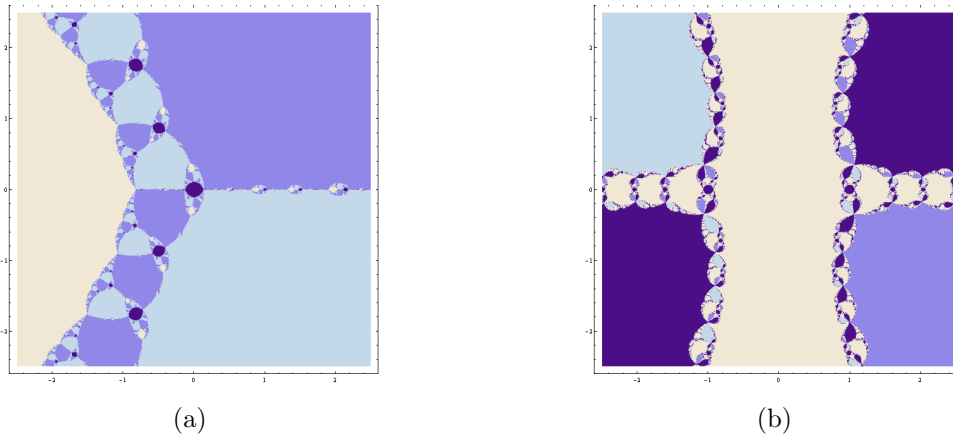


FIGURA 1. (a) Método de Newton aplicado a $p(z) = z^3 - 2z + 2$. (b) Método de Newton aplicado a $p(z) = 3z^5 - 10z^3 + 23z$.

Teorema 3.5. *El método de Newton no es generalmente convergente.*

DEMOSTRACIÓN. (Ver [14], [18]) Sea $p(z) = \sum_{i=0}^d a_j z^j$ un polinomio de grado $d \geq 3$ y se fija $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} p(z) &= 1 - z + a_3 z^3 + \cdots + a_d z^d, \\ p'(z) &= -1 + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \cdots + da_d z^{d-1}, \text{ y} \\ p''(z) &= 6a_3 z + 12a_4 z^2 + \cdots + d(d-1)a_d z^{d-2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por lo tanto

$$N_p(z) = z - \frac{1 - z + a_3 z^3 + \cdots + a_d z^d}{-1 + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \cdots + da_d z^{d-1}}$$

y como $N'_p = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}$, se tiene que $N_p(0) = 1$, $N'_p(0) = 0$ y $N'_p(1) \neq \infty$, entonces por la regla de la cadena $(N_p^2)'(0) = 0$. Así, si $N_p(1) = 0$, y si $N'_p(1) \neq \infty$, se tiene que 0 es un punto periódico superatractor, de período 2, para N_p .

Ahora bien, la condición $N_p(1) = 0$ se cumple cuando

$$-1 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + (d-1)a_d = 0, \quad (3.2)$$

y la condición $N'_p(1) \neq \infty$ se satisface si $p'(1) \neq 0$, es decir, si

$$-1 + 3a_3 + 4a_4 + \dots + da_d \neq 0, \quad (3.3)$$

Estas condiciones se cumplen en un conjunto abierto y denso de un hiperplano del espacio $\{(a_3, \dots, a_d)\} = \mathbb{C}^{d-2}$, lo que termina la prueba. \square

Ejemplo 3.6. Un caso especial se obtiene tomando $d = 3$, con lo que, de la Ec. (3.2) se obtiene que $a_3 = \frac{1}{2}$. Entonces, $p(z) = \frac{1}{2}z^3 - z + 1$, que es equivalente al polinomio del Ejemplo 3.4 debido a Smale [18]. En la Figura 1(a) se muestra la gráfica del método de Newton aplicado a este polinomio, las regiones más oscuras corresponden a la cuenca de atracción de la órbita periódica de período 2, $\{0, 1\}$, de $N_p(z)$.

Ejemplo 3.7. Para $d = 4$, de las ecuaciones (3.2) y (3.3) se obtienen respectivamente las siguientes ecuaciones

$$-1 + 2a_3 + 3a_4 = 0 \quad \text{y} \quad -1 + 3a_3 + 4a_4 \neq 0.$$

Así, de la primera ecuación se obtiene $a_4 = \frac{1-2a_3}{3}$, y sustituyendo en la segunda se obtiene que $a_3 \neq 1$. Entonces, al hacer $t = a_3$ se obtiene la familia (a 1-parámetro) de polinomios de grado 4,

$$p_t(z) = 1 - z + tz^3 + \frac{1-2t}{3}z^4,$$

o de forma más simple

$$q_t(z) = 3 - 3z + 3tz^3 + (1-2t)z^4.$$

Éste último al aplicarle en método de Newton, tiene a $\{0, 1\}$ como órbita periódica superatractora. En la Figura 2 se muestra la gráfica de N_p , en donde las regiones de color más oscuro corresponden a la cuenca de atracción de la órbita periódica.

De lo anterior queda claro que el método de Newton tiene ciertas *limitaciones algorítmicas*, puesto que a partir de un polinomio cúbico el método puede fallar debido a la existencia de un ciclo atractor. El siguiente teorema, pone de manifiesto las limitaciones de los algoritmos puramente iterativos.

Teorema 3.8. (McMullen [12]) *No existen algoritmos puramente iterativos generalmente convergentes para resolver polinomios de grado mayor o igual que 4.*

El siguiente resultado permite construir polinomios $p(z)$, para los cuales en Método de Newton asociado $N_p(z)$ tenga un 2-ciclo superatractor $\{0, 1\}$. Como se ha visto, una condición inicial sobre un ciclo no convergerá a una raíz del polinomio en cuestión.

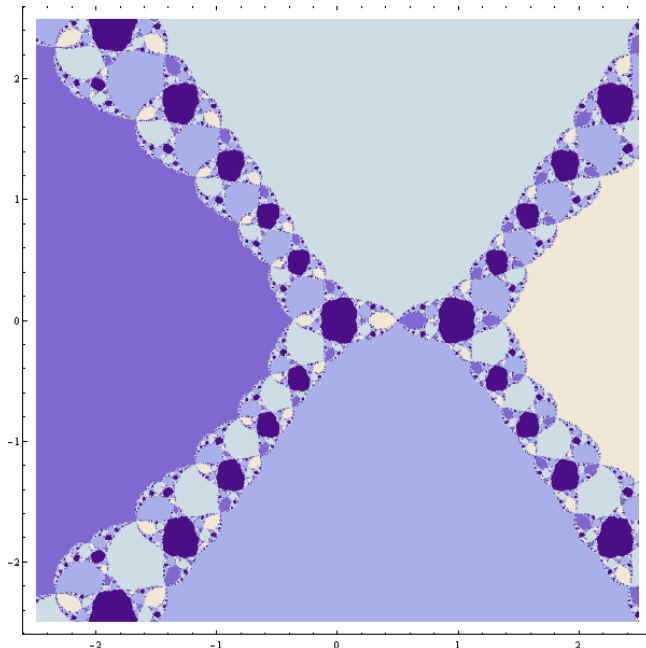


FIGURA 2. Método de Newton aplicado a $p_t(z) = 1 - z + tz^3 + \frac{1-2t}{3}z^4$, para $t = 2$.

Teorema 3.9. *Para cada $d \geq 3$, el método de Newton no es generalmente convergente para el polinomio*

$$p(z) = z^d - (d-1)z + d-1.$$

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo las ideas de Smale [18]. Se considera un polinomio de grado $d \geq 3$ de la forma $p(z) = z^d + az + b$ para el cual se impone que $\alpha = \{0, 1\}$ sea un 2-ciclo superatractor del método de Newton asociado N_p , esto es

$$N_p(0) = 1, \quad N_p(1) = 0 \quad N_p'(0) = 0 \quad \text{y} \quad N_p'(1) \neq \infty.$$

Se tiene $N_p^2(0) = 0$, y por la regla de la cadena $(N_p^2)'(0) = N_p'(N_p(0)) = N_p'(1)N_p'(0) = 0$. Por otra parte, como

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = z - \frac{z^n + az + b}{nz^{n-1} + a} = \frac{(n-1)z^n - b}{nz^{n-1} + a},$$

se tiene $N_p(0) = -\frac{b}{a}$ y de la condición $N_p(0) = 1$, se obtiene que $b = -a$. Ahora, de la condición $N_p(1) = 0$, se obtiene que $(n-1) - b = 0$, de donde $b = -a = n-1$. Entonces, $p(z) = z^n - (n-1)z + n-1$. Por último, dado que $N_p'(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}$, se tiene que $(N_p^2)'(0) = 0$. □

En la Figura 3 se muestra la gráfica del método de Newton asociado al polinomio $p(z) = z^d - (d-1)z + d-1$, para $d = 5$.

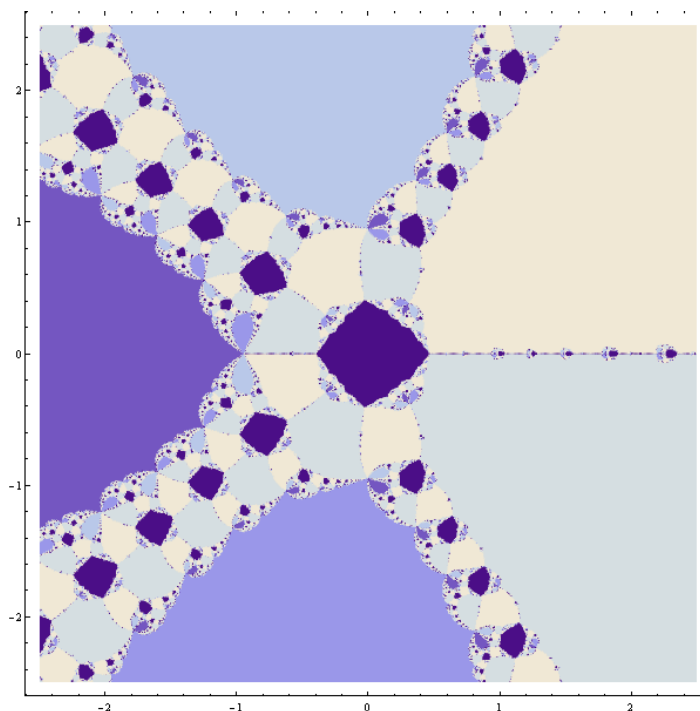


FIGURA 3. Método de Newton aplicado a $p(z) = z^5 - 4z + 4$.

Para una función de iteración $T_p(z)$ asociada a un polinomio $p(z)$, se tiene lo siguiente.

Teorema 3.10. *Una función de iteración $T_p(z)$ asociada a un polinomio $p(z)$ es generalmente convergente si y sólo si el conjunto de Julia $\mathcal{J}(T_p)$ tiene medida de Lebesgue cero y para todo $z \in \mathcal{F}(T_p)$ se tiene que $\text{orb}^+(z)$ converge a una raíz de $p(z)$. En particular, esto significa que no existen ciclos de componentes de Fatou de largo mayor o igual que dos, ya sean superatractores, parabólicos, discos de Siegel o anillos de Herman.*

Definición 3.11. Se dice que un punto crítico c de una función racional R es *preperiódico* si existe un menor entero positivo $n \geq 1$, tal que $R^n(c)$ está sobre un p -ciclo. Cuando $p = 1$, se dice que c es prefijo.

Lo anterior significa que n es el primer entero positivo, tal que $c \in R^{-n}(z_0)$, donde z_0 es un punto sobre un p -ciclo.

Teorema 3.12. *Una función de iteración $T_p(z)$ asociada a un polinomio $p(z)$ es generalmente convergente si sus puntos críticos son preperiódicos o convergen a una raíz de $p(z)$.*

Entre algoritmos generalmente convergentes pueden distinguirse una clase especial llamados *superconvergentes*. Estos algoritmos tienen la propiedad de que los puntos críticos de la función de iteración coinciden con las raíces del polinomio asociado. McMullen (ver [12]) propone uno de estos algoritmos, que se describe a continuación.

Proposición 3.13. Sea $p(z)$ un polinomio cúbico, de la forma $p(z) = z^3 + az + b$. Entonces un algoritmo asociado generalmente convergente de grado 4, es dado por

$$T_p(z) = z - \frac{p(z)(3az^2 + 9bz - a^2)}{(3az^4 + 18bz^3 - 6a^2z^2 - 6abz - 9b^2 - a^3)},$$

en particular, $T_p(z)$ es superconvergente.

Observación 3.14. La función de iteración de la proposición anterior, es igual a la que se obtiene al aplicar el método de Newton a la función racional

$$q(z) = \frac{z^3 + az + b}{3az^2 + 9bz - a^2}$$

(la cual tiene las mismas raíces de p). El éxito de este algoritmo puede entenderse comprobando que los puntos de inflexión de $q(z)$ coinciden con las raíces de $p(z)$. Así el método de Newton efectivamente converge si tomamos uno de los puntos de inflexión de q como condición inicial. Pero es sabido que la convergencia en los puntos de inflexión implica convergencia para un conjunto abierto denso de condiciones iniciales.

2. Conceptos relacionados con la velocidad de convergencia

Un concepto muy importante al trabajar con secuencias de sucesivas aproximaciones de un método iterativo, es el *orden de convergencia*, que puede ser entendido como la velocidad con la cual una sucesión converge a su límite.

Definición 3.15. Sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de complejos. Se dice que $\alpha \in [1, \infty)$ es el *orden de convergencia* de la sucesión si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1} - \zeta|}{|z_n - \zeta|^\alpha} = C,$$

donde ζ es un número complejo y C es una constante diferente de cero (error asintótico constante). Entonces se dice que la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge con orden α a ζ cuando $n \rightarrow \infty$. En particular, para $\alpha = 1, 2, 3$, la convergencia se dice lineal, cuadrática y cúbica respectivamente.

A continuación se analiza la velocidad de convergencia del método de Newton.

Proposición 3.16. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y ζ una raíz de f , tal que, $f(\zeta) = 0$. El método de Newton asociado a f ,

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

genera una sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge con orden 2 a ζ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, converge cuadráticamente.

DEMOSTRACIÓN. Sean $z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$ las aproximaciones en iteraciones sucesivas, sea ζ el verdadero valor de la raíz y se denota al error en la n -ésima iteración como e_n . Entonces, se tiene

$$e_n = z_n - \zeta,$$

y

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= z_{n+1} - \zeta \\ &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \zeta \\ &= e_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \\ &= \frac{(e_n f'(z_n) - f(z_n))}{f'(z_n)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ahora, expandiendo a $f(z_n - e_n)$ en serie de Taylor y sea $f(\zeta) = 0$, se tiene,

$$\begin{aligned} f(z_n - e_n) &= f(z_n) - f'(z_n)e_n + \frac{f''(c)}{2!}e_n^2 \\ f(\zeta) &= f(z_n) - e_n f'(z_n) + \frac{f''(c)}{2}e_n^2 \\ 0 &= f(z_n) - e_n f'(z_n) + \frac{f''(c)}{2}e_n^2 \\ e_n f'(z_n) - f(z_n) &= \frac{f''(c)}{2}e_n^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

De las ecuaciones 3.4 y 3.5, se obtiene

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{\frac{f''(c)}{2}e_n^2}{f'(z_n)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''(c)}{f'(z_n)}\right)e_n^2. \end{aligned}$$

Esto es, $e_{n+1} = C e_n^2$, donde $C = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''(c)}{f'(z_n)}\right)$. De aquí

$$|e_{n+1}| \leq |C| |z_n - \zeta|^2,$$

que es equivalente a

$$|z_{n+1} - \zeta| \leq |C| |z_n - \zeta|^2.$$

Por lo tanto, el método de Newton converge cuadráticamente, es decir, su orden de convergencia es 2.

□

Otra forma de definir el orden de convergencia, es la siguiente (ver [2]).

Definición 3.17. (Orden de convergencia) Sea $f(z)$ una función analítica y sea $z_{n+1} = z_n - \phi(z_n)$ un método iterativo para aproximar sus raíces, tal que, para cualquier raíz simple r de $f(z)$, se tiene

$$\phi'(r) = 1, \phi''(r) = \dots = \phi^{(k-1)}(r) = 0$$

y $\phi^{(k)}(r) \neq 0$, entonces se dice que el algoritmo iterativo es por lo menos del orden k convergente.

El orden de convergencia es usado para comparar la velocidad de convergencia de sucesiones, entendiendo la velocidad como el número de iteraciones necesarias para alcanzar el límite con la precisión requerida. Incluso puede hacer la diferencia entre necesitar diez o un millón de iteraciones. Supongamos que se tienen dos sucesiones $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{z_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ que convergen al mismo límite ζ , y se asume que estas tienen, respectivamente, órdenes de convergencia α y α^* , donde $\alpha > \alpha^*$. entonces, esta claro que, asintóticamente, la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge al límite más rápidamente (con menos iteraciones para la misma aproximación) que la otra sucesión.

Métodos iterativos en el plano complejo

Recordemos que un método iterativo trata de resolver un problema (como una ecuación o un sistema de ecuaciones) mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. En esta sección, se describirán brevemente algunos métodos iterativos $z_{n+1} = \phi(z_n)$ para resolver la ecuación $f(z) = 0$ para una función compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. En todos estos métodos se tomara $z_0 \in \mathbb{C}$ como punto inicial.

- *Método de Newton*: Este método iterativo esta dado por la expresión

$$N_f(z) = z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

y tiene convergencia cuadrática, es decir, su orden de convergencia es 2. Es el método más conocido y más usado, y se puede encontrar en cualquier libro de análisis numérico. A lo largo de este documento ya se han tratado algunas de sus características y resultados importantes.

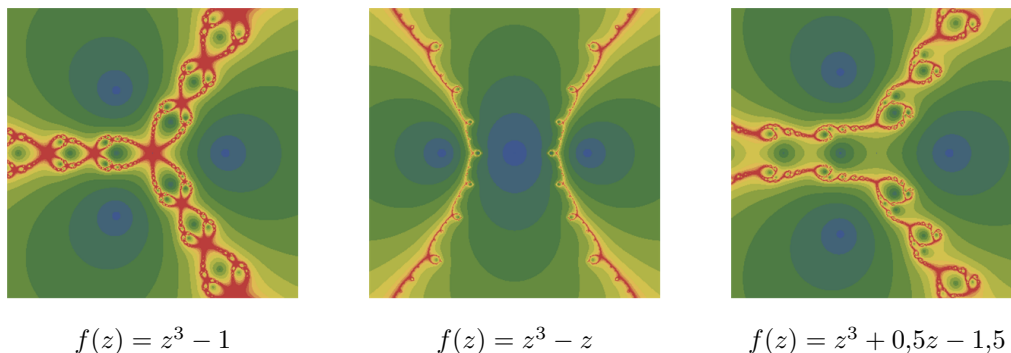


FIGURA 1. Cuencas de atracción de las raíces para $N_f(z)$.

- *Método de Newton para raíces múltiples*: Cuando el método de Newton converge lentamente se debe a que la raíz que se está aproximando es múltiple. De hecho, el método de Newton tiene orden 2 cuando la raíz de f que se quiere aproximar es simple. Para una raíz múltiple, el orden de convergencia es 1. Pero el método de Newton para raíces múltiples

$$M_f(z) = z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f'(z_n)}{f'(z_n)^2 - f(z_n)f''(z_n)}$$

recupera el orden 2. El algoritmo se deduce de esta manera: si f tiene una raíz con multiplicidad $m \geq 1$ en ζ , es fácil de verificar que $g(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$ tiene una raíz simple en ζ . Entonces, basta con aplicar el método de Newton ordinario a la ecuación $g(z) = 0$.

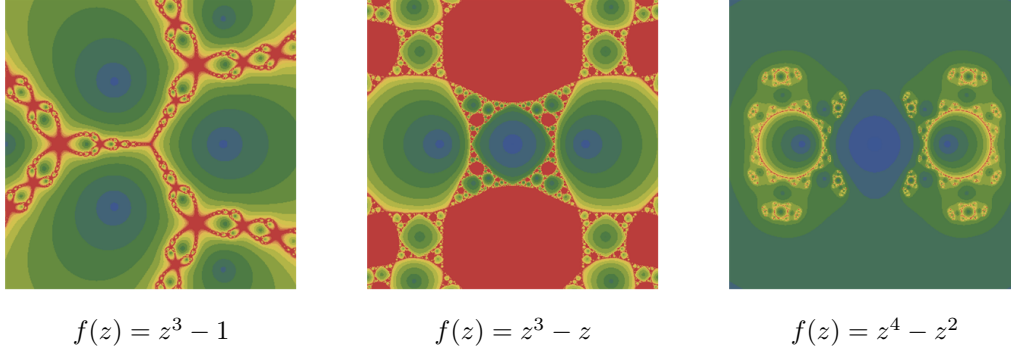


FIGURA 2. Cuencas de atracción de las raíces para $M_f(z)$.

- *Método de Halley*: Este método fue presentado cerca de 1694 por Edmund Halley, quien es reconocido por calcular la órbita del cometa Halley. De su interpretación geométrica para funciones reales, el método también es conocido como el método de hipérbolas tangentes. Este método está dado por la expresión

$$H_f(z) = z_{n+1} = z_n - \frac{2u_f(z_n)}{2 - L_f(z_n)} = z_n - \frac{2f(z_n)f'(z_n)}{2f'(z_n)^2 - f(z_n)f''(z_n)},$$

con

$$u_f(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$$

y

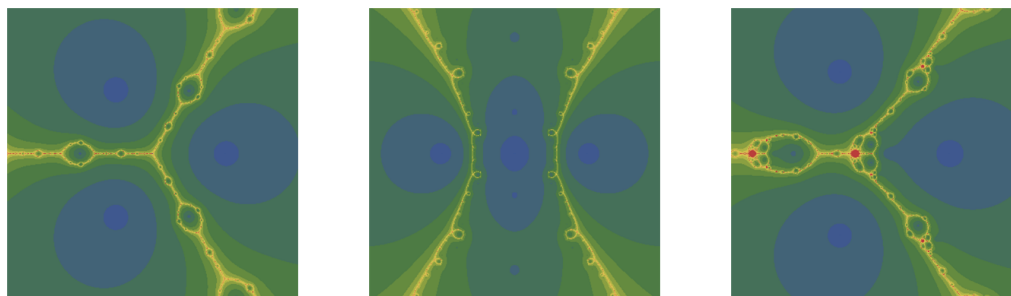
$$L_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}.$$

Este método tiene un orden de convergencia de 3. Otra forma de obtener este método es aplicando el método de Newton a la función $g(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{f'(z)}}$.

- *Aceleración convexa del método de Whittaker*:

$$W_f(z) = z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{2f'(z_n)}(2 - L_f(z_n)) = z - \frac{1}{2}u_f(z_n)(2 - L_f(z_n)).$$

El método de Whittaker es una simplificación del método de Newton en el que, para evitar calcular la derivada, se hace la aproximación $f'(z) \approx 1/\lambda$ con λ constante. Se trata de escoger el parámetro λ de tal manera que $F(z) = z - \lambda f(z)$ es una función contractiva, así que un punto fijo puede ser obtenido por medio del teorema del punto fijo (esta claro que un punto fijo para F es una raíz para f). La aceleración convexa del método de Whittaker es de orden 2.

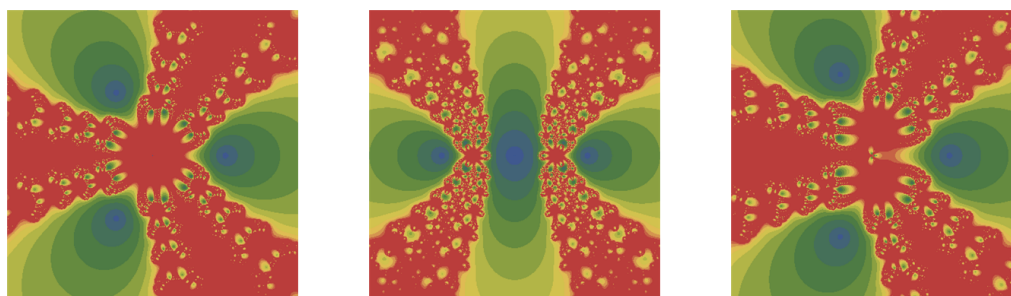


$$f(z) = z^3 - 1$$

$$f(z) = z^3 - z$$

$$f(z) = z^3 + 0,5z - 1,5$$

FIGURA 3. Cuencas de atracción de las raíces para $H_f(z)$.



$$f(z) = z^3 - 1$$

$$f(z) = z^3 - z$$

$$f(z) = z^3 + 0,5z - 1,5$$

FIGURA 4. Cuencas de atracción de las raíces para $W_f(z)$.

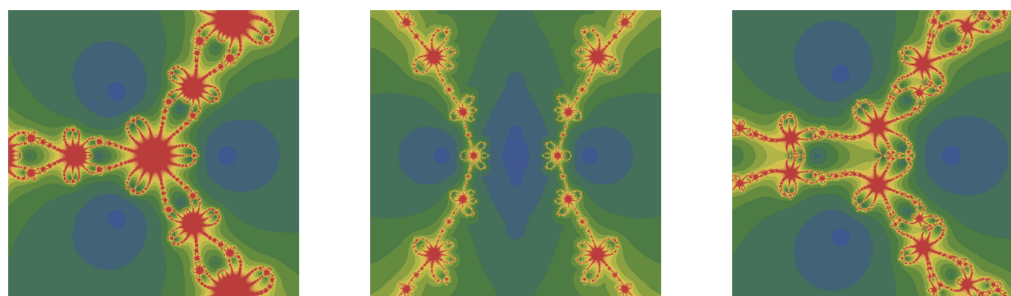
- *Método de Chebyshev*: Este método también es conocido como el método de Euler-Chebyshev, método Super-Newton, o de su interpretación geométrica para funciones reales, como método de las parábolas tangentes. Tiene orden 3 y es un elemento de la familia de funciones iterativas de Schröder, $S_{\sigma,f}$, de hecho corresponde a la función iterativa $S_{3,f}$ (el método de Newton corresponde a $S_{2,f}$, ver [2]). Viene dado por la expresión

$$\text{Cheby}_f(z) = z_{n+1} = z_n - u_f(z_n) \left(1 + \frac{L_f(z_n)}{2} \right).$$

Este método y el de Halley son probablemente los métodos de orden 3 más conocidos para resolver ecuaciones no lineales.

- *Aceleración convexa del Método de Newton*: También se conoce como el método Super-Halley. Es un método de orden 3, dado por la expresión

$$\text{SH}_f(z) = z_{n+1} = z_n - u_f(z_n) \left(1 + \frac{L_f(z_n)}{2(1 - L_f(z_n))} \right).$$

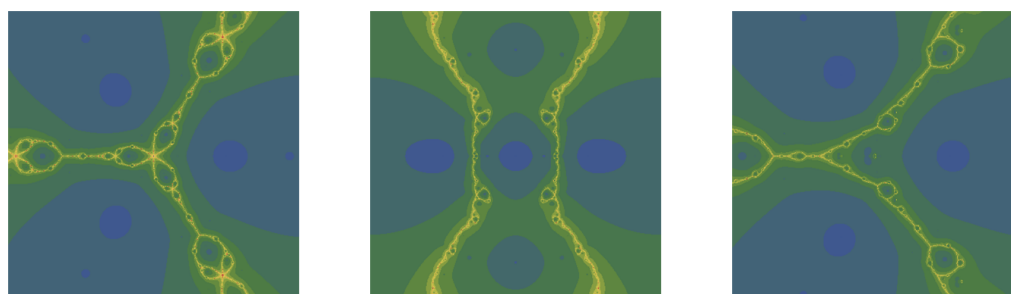


$$f(z) = z^3 - 1$$

$$f(z) = z^3 - z$$

$$f(z) = z^3 + 0,5z - 1,5$$

FIGURA 5. Cuencas de atracción de las raíces para $Cheby_f(z)$.



$$f(z) = z^3 - 1$$

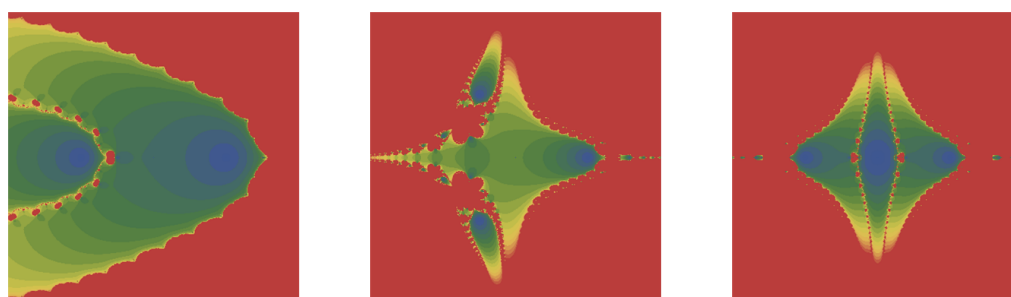
$$f(z) = z^3 - z$$

$$f(z) = z^3 + 0,5z - 1,5$$

FIGURA 6. Cuencas de atracción de las raíces para $SH_f(z)$.

• *Método de Stirling (Modificado)*: Este es un método de orden 2, y es dado por la expresión

$$St_f(z) = z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n - f(z_n))}.$$



$$f(z) = z^2 - 1$$

$$f(z) = z^3 - 1$$

$$f(z) = z^3 - z$$

FIGURA 7. Cuencas de atracción de las raíces para $St_f(z)$.

En todos los métodos vistos hasta ahora, la función f o sus derivadas son evaluadas, en cada paso del método, para un solo punto. Hay otras técnicas para resolver ecuaciones no lineales que requieren la evaluación de f o sus derivadas en más de un punto en cada paso. Estos métodos iterativos son conocidos como *métodos multipunto*. Son empleados generalmente para aumentar el orden de convergencia sin calcular más derivadas de la función asociada. Un estudio general de los métodos multipunto puede ser encontrado en [19]. A continuación describiremos algunos de estos métodos.

- *Método de Steffensen*: Este es uno de los métodos multipunto más sencillos. Está dado por la expresión

$$Stef_f(z) = z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{g(z_n)},$$

con

$$g(z) = \frac{f(z + f(z)) - f(z)}{f(z)}.$$

La función iterativa es generada por una estimación derivada: en el método de Newton, para $h = f(z)$ suficientemente pequeña, se estima $f'(z) \approx \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$. Esto evita calcular la derivada de f . Este método es de orden 2 (preserva el orden de convergencia del método de Newton).

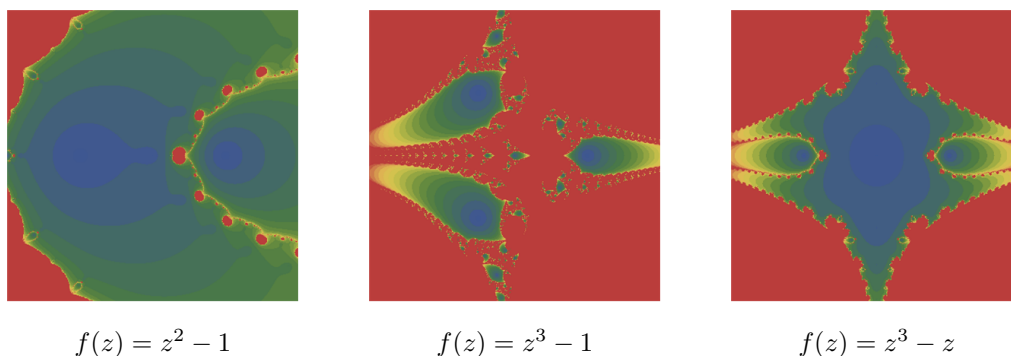


FIGURA 8. Cuencas de atracción de las raíces para $Stef_f(z)$.

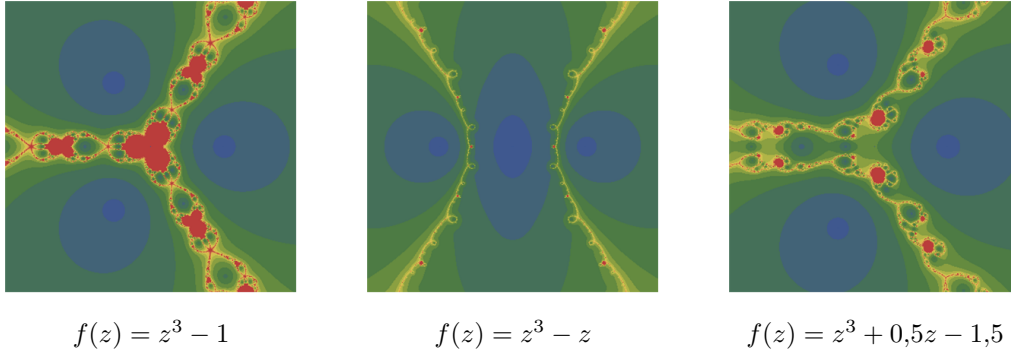
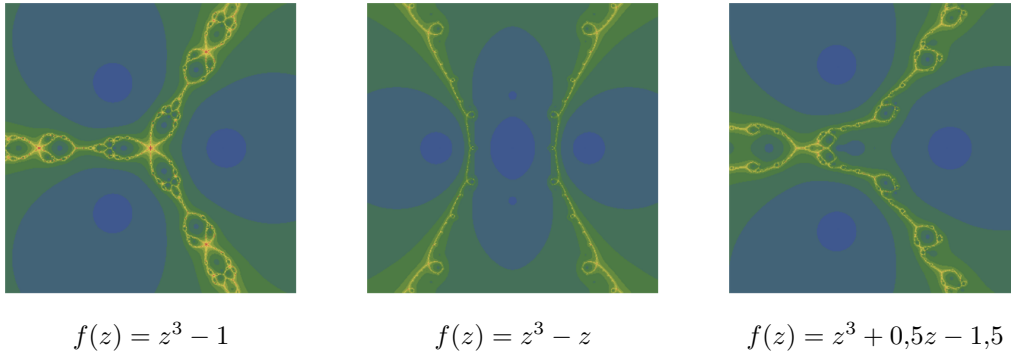
- *Método del punto medio*: Esta dado por la expresión

$$Mdp_f(z) = z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n - \frac{1}{2}u_f(z_n))}.$$

Es un método de orden 3.

- *Método de Traub-Ostrowski*: Es un método de orden de convergencia 4, el orden más alto para los métodos tratados en este trabajo. Está dado por la expresión

$$TO_f(z) = z_{n+1} = z_n - u_f(z_n) \frac{f(z_n - u_f(z_n)) - f(z_n)}{2f(z_n - u_f(z_n)) - f(z_n)}.$$

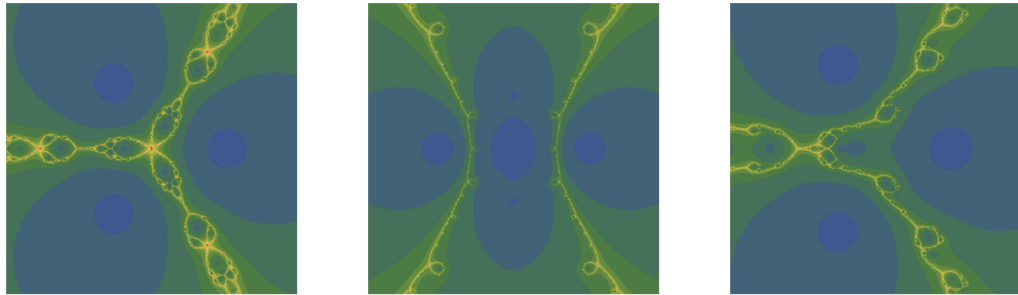
FIGURA 9. Cuencas de atracción de las raíces para $Mdp_f(z)$.FIGURA 10. Cuencas de atracción de las raíces para $TO_f(z)$.

- *Método de Jarratt*: Es un método de orden 4, dado por la expresión

$$J_f(z) = z_{n+1} = z_n - \frac{1}{2}u_f(z_n) + \frac{f(z_n)}{f'(z_n) - 3f'(z_n - \frac{2}{3}u_f(z_n))}.$$

- *Método de Jarratt Inverso-Libre*: Es un método de orden 4. El cual es obtenido como sigue. Sea $h_f(z) = \frac{f'(z - \frac{2}{3}u_f(z)) - f'(z)}{f'(z)}$. Entonces el algoritmo es dado por

$$IJ_f(z) = z_{n+1} = z_n - u_f(z_n) + \frac{3}{4}u_f(z_n)h_f(z_n) \left(1 - \frac{3}{2}h_f(z_n)\right).$$

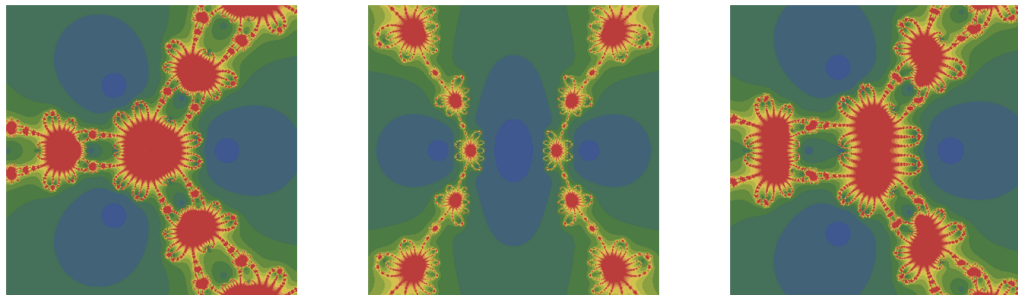


$$f(z) = z^3 - 1$$

$$f(z) = z^3 - z$$

$$f(z) = z^3 + 0,5z - 1,5$$

FIGURA 11. Cuencas de atracción de las raíces para $J_f(z)$.



$$f(z) = z^3 - 1$$

$$f(z) = z^3 - z$$

$$f(z) = z^3 + 0,5z - 1,5$$

FIGURA 12. Cuencas de atracción de las raíces para $IJ_f(z)$.

Obtención de imágenes fractales a partir de los métodos iterativos

En esta sección, se explicará a detalle la forma en que se generaron las imágenes (fractales) incluidas en este trabajo. Para esto, se describirán paso a paso los algoritmos programados en el software Wolfram Mathematica 8.0 (ver [21]).

Para iniciar el proceso, primero se define la función $f(z)$, y sus derivadas. Como ejemplo, se definirá la función $f(z) = z^3 - 1$, que es la más común en los tratados de la teoría de iteraciones de funciones racionales. Para los métodos iterativos analizados es preciso definir hasta la segunda derivada. Esto se realiza con las siguientes instrucciones:

```
f[z_] := z^3 - 1;
df[z_] := D[f[z], z];
d2f[z_] := D[f[z], {z, 2}];
```

El proceso se agiliza computacionalmente si se compila la definición de las funciones:

```
f = Compile[{{z, _Complex}}, z^3 - 1];
df = Compile[{{z, _Complex}}, D[f[z], z]];
d2f = Compile[{{z, _Complex}}, D[f[z], {z, 2}]];
```

Se obtienen las raíces de f y se almacenan en la lista `roots`:

```
in[ ] := lista = NSolve[f[z] == 0, z]
out[ ] := {{z -> -0.5 - 0.866025 I}, {z -> -0.5 + 0.866025 I}, {z -> 1.}}

in[ ] := roots = z /. lista
out[ ] := {-0.5 - 0.866025 I, -0.5 + 0.866025 I, 1.}
```

El siguiente procedimiento permite identificar qué raíz ha sido aproximada con una tolerancia de 10^{-3} :

```
rootPosition = Compile[{{z, _Complex}},
  Block[{temp = Abs[roots - z]},
    If[Min[temp] < 10.^(-3),
```

```

      Ordering[temp, -1][[1]],
      0]]
];

```

por ejemplo, si se escribe `in[] := rootPosition[1]`, nos devolverá `out[] := 3`, que es la posición que tiene el 1 en la lista `roots`.

Ahora, se deben definir los métodos iterativos, es decir, los diferentes $z_{n+1} = \phi(z_n)$. Para el método de Newton, sería de la siguiente forma:

```
iterNewton = Compile[{{z, _Complex}}, z - f[z]/df[z]]
```

y para el método de Halley:

```

iterHalley = Compile[{{z, _Complex}},
  Block[{uf = f[z]/df[z], Lf = f[z] d2f[z]/(df[z])^2},
    z - (2 uf[z])/(2 - Lf[z])]
]

```

en este último se puede observar que las variables `uf` y `Lf` se usaron para evaluar por separado a $\frac{f(z)}{f'(z)}$ y $\frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}$ respectivamente. De esta misma manera, se pueden definir el resto de los métodos iterativos.

Para iterar la función `iterMethod` (que a manera de ejemplo será `iterNewton`) con el fin de aproximar una raíz en un máximo de `lim` iteraciones, se aplica el siguiente algoritmo:

```

iterAlgorithm[iterMethod_, x_, y_, lim_] :=
  Block[{z, ct, r}, z = x + y I; ct = 0;
    r = rootPosition[z];
    While[(r == 0) && (ct < lim),
      ++ct; z = iterMethod[z];
\verb  r = rootPosition[z]    ];
    If[Head[r] == Which, r = 0];
    Return[r]
]

```

Es claro que habrá iteraciones donde el software no podrá realizar la evaluación numérica de `z`, entonces no podrá asignar un valor para `z` in `rootPosition`. En vez de eso, el software regresa la instrucción `Which` que indica que no se ha podido evaluar. Esta situación se produce en los puntos donde el algoritmo iterativo se encuentra con

puntos que no convergen a una raíz de f .

Antes dar la instrucción al software para que dibuje las imágenes, es necesario establecer ciertos parámetros que le permitirán hacerlo. Se establece el límite de iteraciones que deseamos que haga el algoritmo iterativo y se define el espacio gráfico donde se generará la imagen, que en este caso serán 25 iteraciones y el rectángulo complejo $[-2,5, 2,5] \times [-2,5, 2,5]$ respectivamente. Para esto, solo basta establecer en el software las siguientes variables:

```
limIterations = 25;
xxMin = -2.5; xxMax = 2.5;
yyMin = -2.5; yyMax = 2.5;
```

La estrategia que debe seguir el software para generar las imágenes consiste en tomar el rectángulo $D \subset \mathbb{C}$, definido con anterioridad, y se asigna un color (o escala de grises) a cada punto $z_0 \in D$ de acuerdo a la raíz a la que el método iterativo converge partiendo desde z_0 . En el caso de que el método no alcance convergencia en tal punto (con la tolerancia deseada en el número máximo de iteraciones), a éste se le asigna el color negro. Con esta estrategia se logran distinguir las cuencas de atracción de las raíces de f por sus colores y se identifican de color negro las regiones donde no hay convergencia. En el software, esta estrategia se codifica de la siguiente manera:

```
plotFractal[iterMethod_, points_] :=
  DensityPlot[iterAlgorithm[iterNewton,
    x, y, limIterations],
    {x, xxMin, xxMax}, {y, yyMin, yyMax},
    PlotPoints -> points, Mesh -> False,
    ImageSize -> {600, 600}
  ]
```

Por último, se le da la instrucción al software para que genere la imagen (la instrucción `// Timing` permite observar a lado de la figura, el tiempo que el software ha empleado para ejecutar la instrucción `plotFractal`):

```
plotFractal[iterNewton, 256] // Timing
```

La imagen resultante de este procedimiento puede verse en la Figura 1.(a), que corresponde a la cuenca de atracción de las raíces de la función $f(z) = z^3 - 1$, como se estableció al inicio. Las figuras del Capítulo 3, fueron obtenidas con este procedimiento, y cuyo esquema de color es el dado por defecto por el software. Para cambiar el esquema de color, a fin de que la imagen se vea más atractiva, se puede agregar

la opción `ColorFunction -> Hue` dentro de la instrucción `DensityPlot`. Con esto se obtiene una imagen con el esquema de color HUE del software, como se puede ver en la Figura 1.(b).

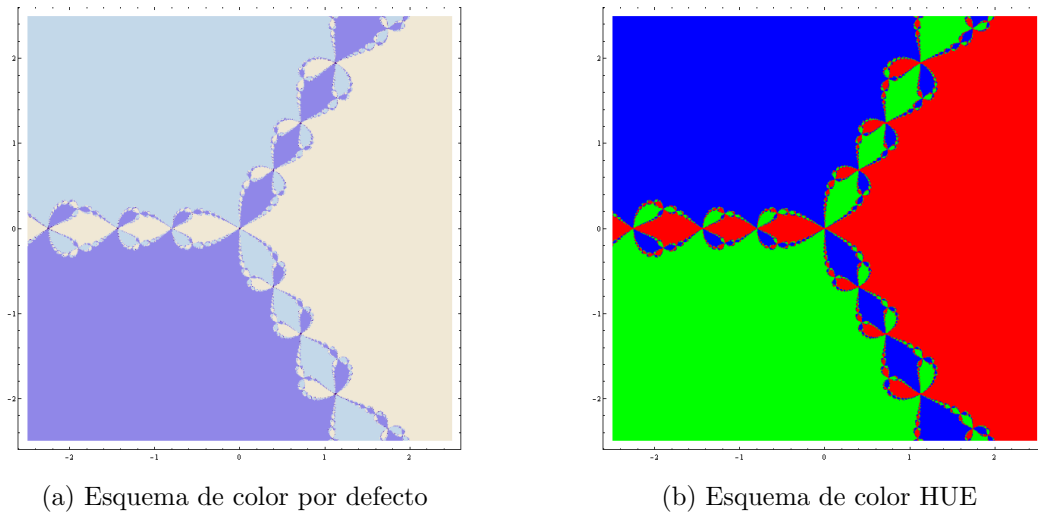


FIGURA 1. Método de Newton aplicado a $f(z) = z^3 - 1$.

Con la finalidad de obtener imágenes aún más atractivas, como las que aparecen en el Capítulo 4, se elaboró el siguiente Manipulable en Mathematica, tomando como referencia algunos ya existentes en Wolfram Demonstration Project (ver [22]).

```
Manipulate[
  NewtonAprox =
    Compile[{{z, _Complex}}, Module[{w, k = 0, n = p}, w = z;
      While[Abs[-1 + w^n] > .01 && k <= iter && w != 0,
        w = w - (w^(1 - n) (-1 + w^n))/n; k++; k]];
  ArrayPlot[
    Quiet@Table[NewtonAprox[x + y I], {y, -2, 2, res}, {x, -2, 2, res}],
    ColorFunction -> ColorData[cf] , Frame -> False,
    ImageSize -> {400, 400}],
  {{iter, 12, "Iteraciones"}, 1, 20, 1, Appearance -> "Labeled"},
  {{res, .01, "Resoluci\ 'o}n"}, {.01, .02, .04, .08}},
  {{cf, "DarkRainbow",
    "Esquema de color"}, # ->
    Show[ColorData[#, "Image"], ImageSize -> 90] & /@
    ColorData["Gradient"]}],
  {{p, 3, "Ptalos n"}, {3, 4, 5, 6, 7, 8},
  ControlType -> RadioButtonBar},
  SynchronousUpdating -> False, TrackedSymbols -> True,
  AutorunSequencing -> {2}]
```


El resultado del código anterior puede verse en la Figura 2. Como se podrá observar, este manipulable se programó para aplicar el método de Newton a la función $f(z) = z^n - 1$ con la finalidad de modificar el grado n de la función. Así también, desde la interfaz del manipulable pueden controlarse directamente la cantidad de iteraciones, la resolución de la imagen, el esquema de color (que es este caso se utilizó el esquema de ‘‘Gradients’’ -> ‘‘DarkRainbow’’).

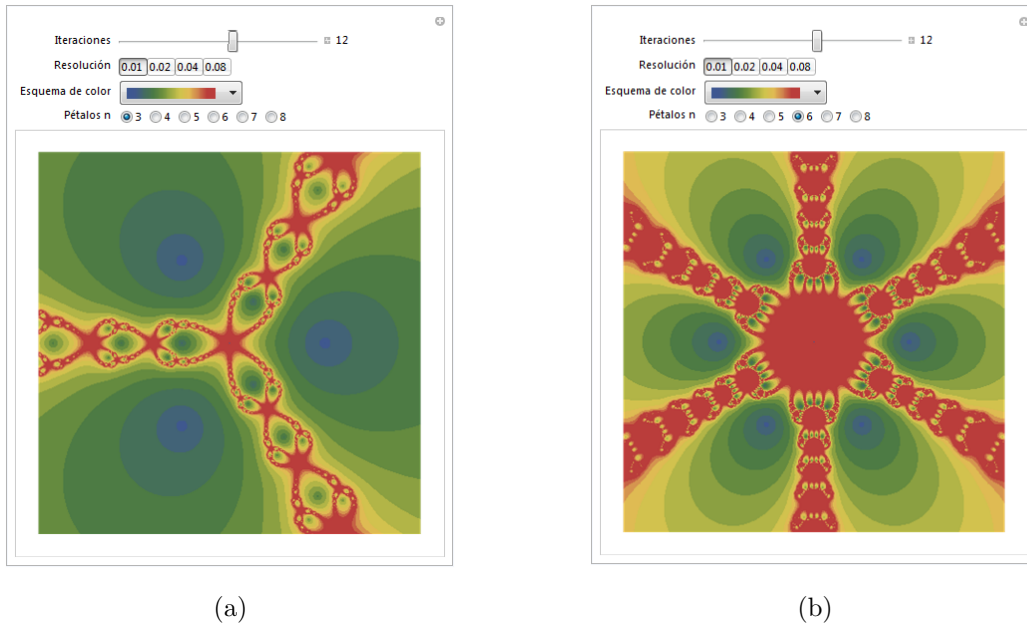


FIGURA 2. (a) Manipulable para el Método de Newton aplicado a $f(z) = z^3 - 1$.
(b) Manipulable para el Método de Newton aplicado a $f(z) = z^6 - 1$.

Haciendo pequeñas modificaciones al código del manipulable se pueden obtener sorprendentes imágenes fractales, aplicando diversos métodos iterativos a polinomios complejos, como las que se ven a continuación.

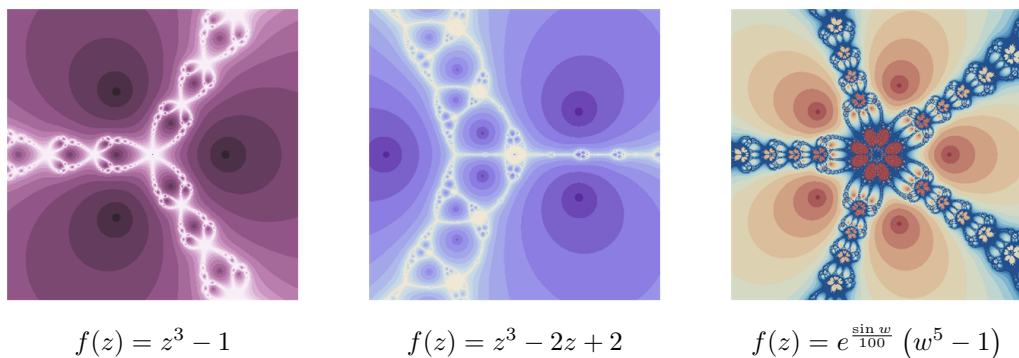


FIGURA 3. Método de Newton aplicado a $f(z)$.

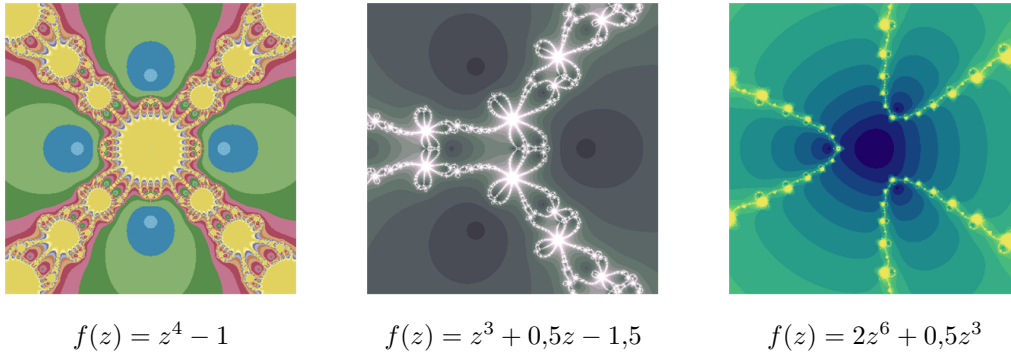


FIGURA 4. Método de Chebyshev aplicado a $f(z)$.

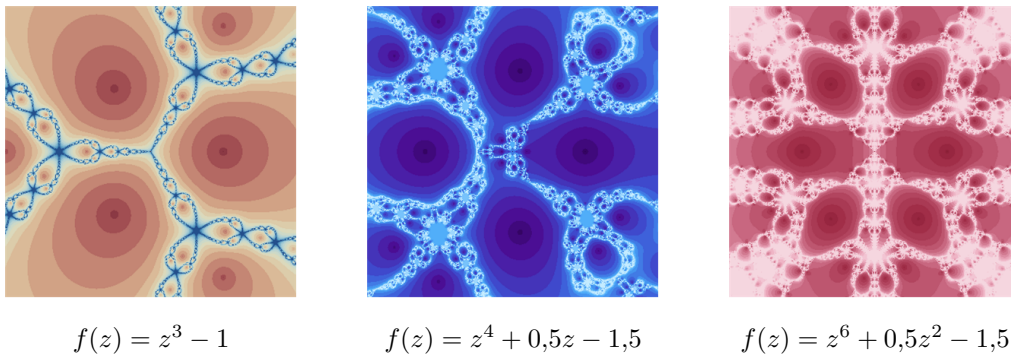


FIGURA 5. Método Newton para raíces múltiples aplicado a $f(z)$.

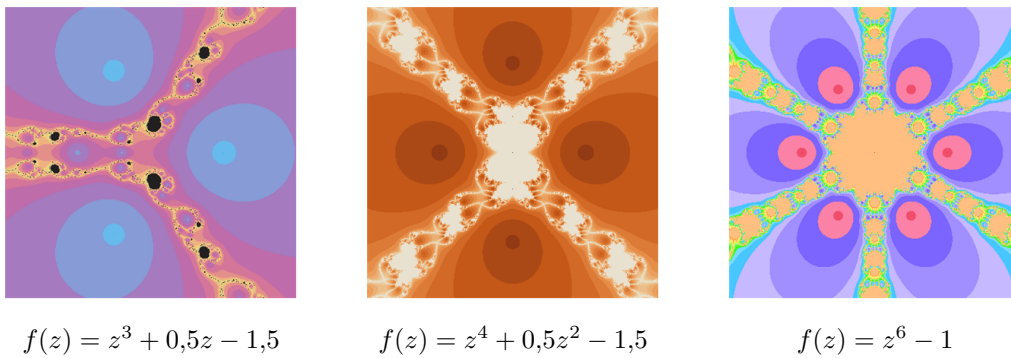


FIGURA 6. Método del punto medio aplicado a $f(z)$.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Second Edition, McGraw-Hill, 1966.
- [2] Amat, S., Busquier, S., Plaza, S., *Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view*. Scientia, Series A: Mathematical Sciences, Vol. 10, 2004, p. 3-35.
- [3] Beardon, A. F., *Iteration of rational functions*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] Blanchard, P., *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*. Bull. of AMS (new series), Vol. 11, Number 1, July 1984, p. 85-141.
- [5] Cayley, A., *The Newton-Fourier imaginary problem.*, Amer. J. Math. 2, 1879, p. 97.
- [6] Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989.
- [7] Elaydi, S. N., *Discrete Chaos*. Chapman & Hall/CRC. 2000.
- [8] Fatou, P., *Sur les équations fonctionnelles*. Bull. Soc. Math. France, Vol. 47 (1919), p. 161-271, Vol. 48 (1920), p. 208-314.
- [9] Honorato, G., Plaza, S., Romero, N., *Dynamics of a hogher-order family of iterative methods*. Journal of Complexity, Vol. 27, 2011, p. 221-229.
- [10] Hurley, M., *Multiple attractors in Newton's method*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol. 6, Num. 4, 1986 , p. 561 - 569.
- [11] Julia, G., *Mémoire sur litération des fonctions rationnelles*. Journal de mathématiques pures et appliquées, Série 8, Tome 1, 1918, p. 47-246.
- [12] McMullen, C., *Families of rational maps and iterative root-finding algorithms*. Annals of Mathematics, 125, 1987, p. 467-493.
- [13] Milnor, J., *Dynamics in one complex variable: Introductory Lectures*. Institute for Mathematical Sciences, SUNY, Stony Brook NY, 1991.
- [14] Plaza, S., *Dinámica y Métodos Numéricos en el Plano Complejo*. Depto. de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile, Proyecto Fondecyt, 2010.
- [15] Plaza, S., *Conjugacy classes of some numerical methods*. Proyecciones, Vol. 20, Num. 1, 2001, p. 1-17.
- [16] Schröder, E., *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*. Math. Ann. 2, (1870), p. 317-365. Traducido por G. W. Stewart como *On Infinitely Many Algorithms for Solving Equations* en 1992 (Revisdo en enero de 1993).
- [17] Shishikura, M., *On the quasiconformal surgery of rational functions*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., Tome 20, Number 1, 1987, p. 1-29.
- [18] Smale, S., *On the efficiency of algorithms of analysis*. Bull. of AMS (new series), Vol. 13, Number 2, October 1985, p. 87-121.
- [19] Traub, J. F., *Iterative methods for the solution of equations*. Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- [20] Varona, J. L., *Graphic and Numerical Comparison Between Iterative Methods*. The Mathematical Intelligencer, Vol. 24, Number 1, Springer-Verlag, New York, 2002, p. 37-46.
- [21] Wolfram Mathematica ©2012. <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [22] Wolfram Demonstration Project ©2012. <http://demonstrations.wolfram.com>

- [23] Yau, L., Ben-Israel, A., *The Newton and Halley Methods for Complex Roots*. The American Mathematical Monthly 105, 1998, p. 806-818.