



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA



Máster Universitario
en Tecnologías, Sistemas y
Redes de Comunicaciones

Métodos iterativos para optimizar el software de los receptores GPS

Autor: Manuel F. Abad Rodríguez

Director 1: Alicia Cordero Barbero

Director 2: Juan R. Torregrosa Sánchez

Tutora: Valery Naranjo Ornedo

Fecha de comienzo: 24/07/2012

Lugar de trabajo: Instituto de Matemática Multidisciplinar.
Universitat Politècnica de València.

Objetivos – El objetivo de este trabajo es la mejora del método de Newton, habitualmente utilizado para el cálculo de la posición de un receptor GPS, con otros métodos iterativos desarrollados por nosotros que pretenden obtener las mismas soluciones del sistema de ecuaciones no lineales con un significativamente menor número de iteraciones, de evaluaciones funcionales, mejorando los índices de eficiencia, etc. De este modo, se realiza una aportación que permite optimizar la parte software de un receptor GPS. También probamos los distintos métodos iterativos con una serie de sistemas no lineales académicos.

Metodología – El Instituto Cartográfico Valenciano nos proporciona una posición exacta conocida y datos de efemérides de satélites GPS. Con ellos y con la ayuda de una serie de programas confeccionados en lenguaje interpretado por el programa MATLAB, y que contienen las ecuaciones del GPS que presentaremos en esta memoria, obtenemos la posición exacta de los satélites y las pseudodistancias de cada satélite al receptor. A partir de la posición exacta de los satélites y de las pseudodistancias calculamos, utilizando nuevamente el software MATLAB, mediante diferentes métodos iterativos (Newton, Traub, Sharma y una serie de métodos desarrollados por nosotros combinando adecuadamente los métodos de Newton y Traub) la posición exacta del receptor y comparamos los resultados obtenidos en términos de número de iteraciones, evaluaciones funcionales, análisis del error, etc.

Desarrollos teóricos realizados – Los métodos iterativos M4 y M5 han sido específicamente diseñados para este trabajo y su desarrollo teórico aparece descrito en la sección correspondiente. El desarrollo de estos métodos nos ha permitido dar un resultado general utilizando el proceso empleado para obtener el método de quinto orden.

Desarrollo de prototipos y trabajo de laboratorio – No aplica.

Resultados – Se puede observar que todos los métodos iterativos desarrollados mejoran las prestaciones del método de Newton, que es el habitualmente utilizado en los receptores GPS. Otros métodos, como el de Traub, de orden tres, y el de Sharma, de orden cuatro, se ven superados por nuestros métodos en diversos parámetros. Concretamente, la posición del receptor GPS se obtiene con mayores órdenes de convergencia, en un considerablemente

menor número de iteraciones y con un índice de eficiencia similar, aunque con índices computacionales más competitivos.

Líneas futuras – En la comparativa entre métodos iterativos que aparece en esta memoria únicamente el método de Newton puede ser considerado como un método óptimo de orden dos. Sería necesario diseñar métodos óptimos de orden superior. Hasta donde sabemos estos métodos no existen aún, de modo que una línea futura de investigación interesante sería el diseño de un método óptimo de tales características. Asimismo, evitar evaluar matrices jacobianas permitiría un menor esfuerzo computacional, de modo que sería conveniente diseñar métodos libres de matrices Jacobianas.

Publicaciones – Hemos enviado un artículo relativo a este tema a la prestigiosa revista *Abstract and Applied Analysis*, indexada en *Journal Citation Reports*, en la posición 43 de 245 en la categoría de Matemática Aplicada.

Abstract – In this paper, two iterative methods, of orders four and five, respectively, are presented for solving nonlinear systems of equations. Numerical comparisons are made with other existing second, third and fourth-order schemes to solve the nonlinear system of equations of the *Global Positioning System (GPS)* and some academic nonlinear systems.

Autor: Manuel F. Abad Rodríguez, email: maabrod@mat.upv.es
Director 1: Alicia Cordero Barbero, email: acordero@mat.upv.es
Director 2: Juan R. Torregrosa Sánchez, email: jrtorre@mat.upv.es
Tutora: Valery Naranjo Olmedo, email: vnaranjo@dcom.upv.es
Fecha de entrega: 11/03/2013

Índice

1. Introducción	4
1.1. Historia del desarrollo del GPS	4
1.2. Métodos numéricos	5
2. Desarrollo Teórico.	6
2.1. Receptor GPS básico	6
2.2. Ventajas potenciales de una mejora del software	6
2.3. Conceptos básicos de GPS	7
2.3.1. Introducción	7
2.3.2. Requisitos GPS	7
2.3.3. Conceptos básicos GPS	8
2.3.4. Ecuaciones básicas para el cálculo de la posición del usuario	9
2.3.5. Medición de la pseudodistancia	9
2.3.6. Determinación de la posición del usuario por medio de pseudodis- tancias	10
2.4. Métodos iterativos en GPS	11
2.4.1. Introducción	11
2.4.2. Método de Newton	15
2.4.3. Método de Traub	16
2.4.4. Método de Sharma	17
2.4.5. Un método de orden 4	17
2.4.6. Un método de orden 5	19
2.4.7. Pseudocomposición de métodos	20
3. Resultados numéricos	21
3.1. Introducción	21
3.1.1. Resultados numéricos con sistemas no lineales académicos	21
3.1.2. Resultados numéricos con el sistema GPS	22
4. Conclusiones	24
5. Líneas futuras de trabajo	25
6. Agradecimientos	25
A. Artículos	27

1. Introducción

El propósito de este trabajo es contribuir a mejorar el software de los receptores GPS con dos métodos numéricos diseñados por nosotros que resultan de combinar de una manera adecuada ciertos métodos iterativos existentes y que permiten obtener la posición del receptor GPS con mayor precisión empleando un número de iteraciones considerablemente menor y de un modo más eficaz.

Para repasar los conceptos GPS básicos nos hemos apoyado en el libro de James Bao-Yen Tsui, [1]. Respecto a teoría genérica de solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones empleando métodos iterativos así como para el diseño de otros nuevos hemos recurrido a los textos de Ostrowski y Traub, [2] y [3], respectivamente. También hemos empleado diversas técnicas aparecidas en los artículos de Alicia Cordero et al., [4] y [5], y de Víctor Arroyo et al., [6].

1.1. Historia del desarrollo del GPS

El interés del ser humano por la navegación se remonta a tiempos ancestrales. De acuerdo con determinadas historias chinas, el compás fue inventado y utilizado en guerras con entornos de niebla incluso antes de la aparición de la escritura. Desde entonces han existido diferentes técnicas de navegación tanto aérea como marítima. La navegación basada en satélites se inició a principios de la década de 1970. Antes de que se instaurara el GPS se exploraron tres sistemas que ya empleaban satélites: el *U.S. Navy Navigation Satellite System* (también conocido como *Transit*) el *U.S. Navy's Timation* (TIME navigation) y el *U.S. Air Force Project 621B*. El proyecto *Transit* usaba una señal de onda continua y la posición del satélite se determinaba con la ayuda del cálculo de la máxima tasa de variación de la frecuencia *Doppler*. El programa *Timation* usaba un reloj atómico que mejora la predicción de las órbitas del satélite y reduce la tasa de actualización del control terrestre. El proyecto *U.S. Air Force Project 621B* utilizaba la señal de ruido pseudoaleatorio (PRN) para modular la frecuencia de la señal portadora.

El programa GPS se aprobó en diciembre de 1973. El primer satélite fue lanzado en 1978. En agosto de 1993, GPS tenía 24 satélites en órbita y en diciembre del mismo año se estableció su capacidad operativa inicial. En febrero de 1994 la *Federal Aviation Agency* (FAA) declaró al GPS como un sistema adecuado para la aviación.

Siguiendo con la historia del desarrollo de los sistemas de navegación por satélite, no podemos soslayar la futura implantación del sistema Galileo. Es un sistema global de navegación por satélite (GNSS) desarrollado por la Unión Europea (UE), con el objeto de evitar la dependencia de los sistemas GPS y GLONASS. Al contrario de estos dos, será de uso civil. El sistema se espera poner en marcha en 2014 después de sufrir una serie de reveses técnicos y políticos para su puesta en marcha.

Este Sistema Global de Navegación por Satélite (GNSS), además de prestar servicios de autonomía en radionavegación y ubicación en el espacio, será interoperable con los sistemas GPS y GLONASS. El usuario podrá calcular su posición con un receptor que utilizará satélites de distintas constelaciones. Al ofrecer dos frecuencias en su versión estándar, Galileo brindará ubicación en el espacio en tiempo real con una precisión del

orden de metros, algo sin precedentes en los sistemas públicos.

Del mismo modo, los satélites Galileo, a diferencia de los que forman la malla GPS, estarán en órbitas ligeramente más inclinadas hacia los polos. De este modo sus datos serán más exactos en las regiones cercanas a los polos, donde los satélites estadounidenses pierden notablemente su precisión.

Asimismo, garantizará la disponibilidad continua del servicio, excepto en circunstancias extremas, e informará a los usuarios en cuestión de segundos en caso del fallo de un satélite. Esto lo hace conveniente para aplicaciones donde la seguridad es crucial, tales como las aplicaciones ferroviarias, la conducción de automóviles o el control del tráfico aéreo. El uso combinado de Galileo y otros sistemas GNSS ofrecerá un gran nivel de prestaciones para todas las comunidades de usuarios del mundo entero.

Una preocupación importante de los actuales usuarios de la radionavegación por satélite es la fiabilidad y vulnerabilidad de la señal. En los últimos años, se han producido varios casos de interrupción del servicio por causas tales como interferencia accidental, fallos de los satélites, denegación o degradación de la señal. En este contexto, Galileo realizará una importante contribución a la reducción de estos problemas al proveer en forma independiente la transmisión de señales suplementarias de radionavegación en diferentes bandas de frecuencia.

1.2. Métodos numéricos

En matemática computacional, un *método iterativo* trata de resolver un problema modelizado por una ecuación o un sistema de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. Esta aproximación contrasta con los métodos directos, que tratan de resolver el problema de una sola vez (como resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ encontrando la inversa de la matriz A). Los métodos iterativos son útiles para resolver problemas que involucran un número muy elevado de variables (a veces del orden de millones), donde los métodos directos tendrían un coste prohibitivo incluso con la potencia del mejor computador disponible.

Probablemente, el primer método iterativo apareció en una carta de Gauss a un estudiante. Proponía resolver un sistema de ecuaciones de tamaño 4×4 mediante la repetición de la solución del componente donde el residuo era mayor.

En nuestro trabajo nos centramos en los métodos iterativos que se utilizan para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, puesto que el sistema de ecuaciones del GPS es no lineal.

En general, los métodos iterativos de resolución de sistemas no lineales generan una sucesión de vectores que vayan aproximándose hacia la solución a partir de un vector inicial $x^{(0)}$ mediante un esquema de cálculo que se traducirá en una función $G(x)$ de forma tal que el proceso iterativo se reducirá a:

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

El buen funcionamiento de un método dependerá de cómo sea la función $G(x)$ escogida. En este sentido nos interesará trabajar, cuando ello sea posible, con aplicaciones $G(x)$ para

las que se pueda asegurar que la sucesión que con ellas se genere es convergente. Los puntos de una aplicación $G(x)$ que verifican que $x = G(x)$ reciben el nombre de *puntos fijos* de la aplicación.

El método de punto fijo más utilizado por ser muy simple y efectivo, es el método de Newton. Su generalización para sistemas de ecuaciones fue propuesta por Ostrowski en [2].

Determinados autores han hecho modificaciones del método de Newton y de otros métodos clásicos para acelerar la convergencia o reducir el número de operaciones y evaluaciones de funciones en cada paso del proceso iterativo. Por ejemplo, podemos encontrar interesantes variantes del método de Newton en este sentido realizadas por Weerakoon y Fernando en [7], Özban en [8] y Gerlach en [9].

2. Desarrollo Teórico.

2.1. Receptor GPS básico

Las señales transmitidas desde los satélites de la constelación GPS se reciben en la antena del receptor. A través del canal de radiofrecuencia (RF) la señal es amplificada a una amplitud adecuada y la frecuencia se transforma en la frecuencia de salida deseada. A continuación un conversor analógico-digital se encarga de digitalizar la señal de salida. La antena, el canal RF y el conversor analógico-digital constituyen la parte hardware del receptor GPS. Después de ser digitalizada, y habitualmente también por medio de hardware se separa la señal de cada satélite, y de cada una de ellas se extraen los datos de efemérides y pseudodistancia. Posteriormente, un cierto software calcula las posiciones de cada satélite, y con dichas posiciones y las pseudodistancias se puede estimar la posición del usuario resolviendo un sistema de ecuaciones no lineales. En este trabajo nos vamos a centrar en la parte software. Como veremos con posterioridad el método iterativo que se utiliza habitualmente para el cálculo de la posición del usuario es el método de Newton. Proponemos nuevos métodos que presentan un orden de convergencia mayor que el de Newton para hallar la posición del usuario.

2.2. Ventajas potenciales de una mejora del software

Un aspecto importante de centrarse en el software de un receptor GPS es que la forma de obtener la aproximación de la posición puede diferir substancial y ventajosamente con respecto a cómo se realiza mediante hardware. Así, por ejemplo, el usuario puede coger un breve intervalo de datos del satélite y procesarlos para encontrar la posición en lugar de estar continuamente chequeando la señal. Teóricamente, son suficientes 30 segundos para localizar la posición del usuario. Como el análisis mediante software de la señal del satélite es incipiente, se abre un importante campo de investigación que permite explorar muchos métodos potenciales. En esta memoria nos vamos a centrar en tratar de mejorar los métodos iterativos que se utilizan habitualmente y llegar a las mismas soluciones en un número de iteraciones considerablemente menor.

2.3. Conceptos básicos de GPS

2.3.1. Introducción

En este apartado vamos a ver cómo un receptor GPS determina la posición del usuario. Para entender mejor el concepto discutiremos en primer lugar los requisitos del GPS. Estos requisitos determinan la configuración de la constelación de satélites. A partir de la constelación de satélites se puede determinar la posición del usuario. En cualquier caso las ecuaciones que se deben resolver conforman un sistema de ecuaciones no lineales y además incluyen un término correspondiente a la inexactitud del reloj del usuario. Dichas ecuaciones son resueltas a partir de una aproximación inicial y mediante un método iterativo. La solución es obtenida en un sistema coordenado cartesiano y se convierte a un sistema de coordenadas esféricas. Pero la Tierra no es una esfera perfecta, de modo que una vez calculada la posición del usuario se debe tener en cuenta la forma de la Tierra. La posición del usuario se traduce entonces a un sistema de coordenadas geocéntrico. Finalmente, se discute la elección de los satélites para obtener una posición exacta del usuario y la dilución de la precisión. En este trabajo nos vamos a focalizar en la parte matemática del cálculo de la solución del sistema GPS no lineal, de modo que no profundizaremos en el resto de la temática relacionada con el GPS y simplemente describiremos determinados aspectos a modo de marco introductorio de referencia.

2.3.2. Requisitos GPS

Algunos de los requisitos del sistema GPS se citan a continuación.

1. El error cuadrático medio en la posición del usuario no debe ser superior a 30 metros.
2. Debe ser aplicable a la navegación en tiempo real para cualquier usuario incluyendo los muy dinámicos como por ejemplo un avión a elevada velocidad y con una muy flexible maniobrabilidad.
3. Debe tener cobertura mundial. Así que para cubrir la región polar los satélites deben estar en órbitas inclinadas.
4. Las señales transmitidas deben tolerar en cierto grado señales interferentes tanto intencionadas como no intencionadas.
5. No debe ser necesario que el receptor utilice relojes atómicos.
6. Cuando el receptor se inicializa, deben transcurrir como máximo unos pocos minutos en lugar de horas para localizar la posición del usuario.
7. El tamaño de la antena receptora debe ser pequeño. La atenuación de la señal a través del espacio debe ser razonablemente pequeña.

Estos requisitos combinados con la disponibilidad de la distribución de banda de frecuencias determinan que la frecuencia portadora de GPS se encuentre en la banda L (1-2 GHz) del rango de microondas.

2.3.3. Conceptos básicos GPS

La posición de un determinado punto del espacio se puede determinar con la distancia medida desde este punto a algunas posiciones conocidas. Los puntos equidistantes en el espacio a un satélite se encuentran en la superficie de una esfera. Si entra en escena un segundo satélite, la intersección de dos esferas es un círculo, el cual interseca con una tercera esfera (tercer satélite) para conseguir dos posibles puntos. De modo que se necesita un cuarto satélite para determinar cuál de los dos puntos corresponde a la posición del usuario. Se ilustra el caso bidimensional de la localización de un usuario U , con la ayuda de tres satélites S_1 , S_2 y S_3 en la Figura 1. En el GPS la posición del satélite es conocida a

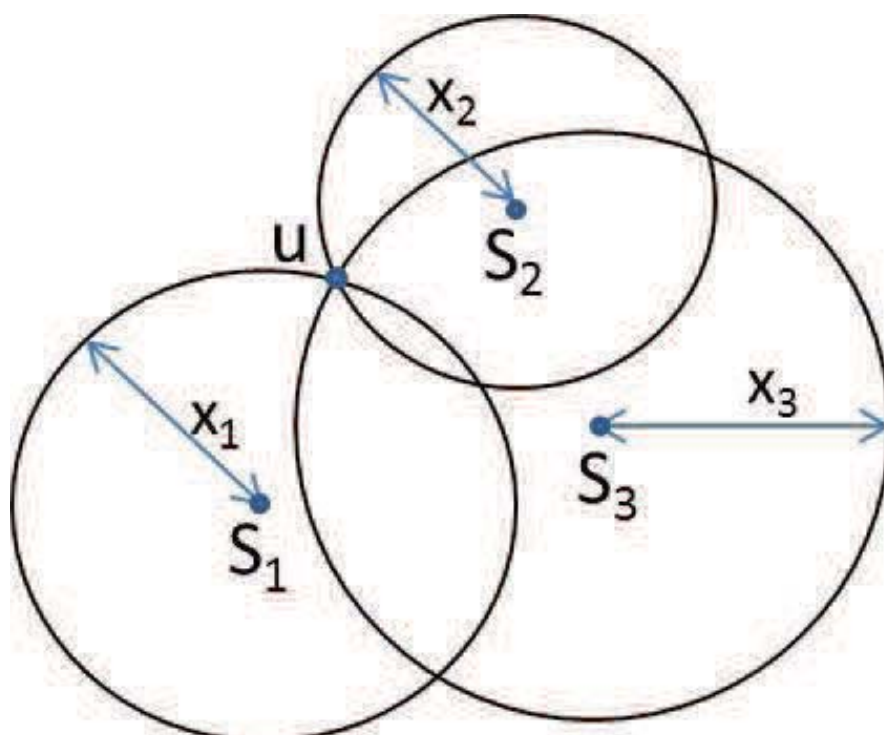


Figura 1: Posición del usuario en dos dimensiones.

partir de los datos de efemérides transmitidos por él. Se puede medir la distancia desde el receptor al satélite, de modo que la posición del usuario queda así determinada. La distancia medida entre el receptor y el satélite tiene un error sistemático desconocido, debido a que el reloj de usuario es habitualmente diferente del reloj del GPS. Para resolver este error sistemático se necesita un quinto satélite. En cualquier caso, si únicamente se utilizan cuatro satélites para calcular la posición del usuario con error sistemático, teóricamente obtendremos entonces dos posibles soluciones. Una de ellas es cercana a la superficie de la Tierra y la otra se encuentra en el espacio exterior, pero como habitualmente el usuario se encuentra cercano a la superficie de la tierra se suele decir que basta con cuatro satélites para determinar con precisión la posición de un receptor GPS. El método empleado para resolver la posición del usuario es iterativo, está basado en el método de Newton, y los métodos alternativos que presentaremos también son iterativos y variantes del método

de Newton. La posición inicial típicamente seleccionada es el centro de la Tierra. Todos los métodos deben converger a la solución que se encuentra cercana a la superficie de la Tierra, de modo que bastará con emplear cuatro satélites para realizar los cálculos.

2.3.4. Ecuaciones básicas para el cálculo de la posición del usuario

En esta sección se presentan las ecuaciones básicas para el cálculo de la posición del usuario. Asumimos temporalmente que la distancia medida es exacta y por tanto que tres satélites son suficientes. Supongamos que hay tres puntos conocidos en (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) y un punto desconocido, donde se encuentra el usuario, en la posición (x_u, y_u, z_u) . Si las distancias entre los tres puntos conocidos y el punto desconocido pueden ser medidas y corresponden a ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 , estas distancias se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2}, \\ \rho_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2}, \\ \rho_3 &= \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2}.\end{aligned}\tag{1}$$

Como hay tres ecuaciones y tres incógnitas se pueden determinar los valores de x_u , y_u y z_u . Teóricamente habría dos conjuntos de soluciones porque son ecuaciones de segundo orden. Estas ecuaciones pueden ser fácilmente resueltas mediante linealización y aplicación de métodos iterativos, como veremos en secciones posteriores. En el proceso del GPS las posiciones de los satélites son datos. Esta información se puede obtener de los datos transmitidos por los satélites. Las distancias del usuario (posición desconocida) a los satélites deben ser medidas simultáneamente en un cierto instante de tiempo. Cada satélite transmite una señal con una referencia temporal asociada. Midiendo el tiempo que transcurre desde que el satélite envía la señal hasta que llega al receptor se puede calcular la distancia entre el receptor y el satélite. Discutimos esta medición en la siguiente sección.

2.3.5. Medición de la pseudodistancia

Cada satélite envía una señal en un cierto instante t_{si} . El receptor recibirá esta señal en un instante posterior t_u . La distancia entre el usuario y el satélite i es

$$\rho_{iT} = c(t_u - t_{si}),\tag{2}$$

donde c es la velocidad de la luz, ρ_{iT} es a menudo considerado como la pseudodistancia real desde el usuario al satélite i , t_{si} es el valor real del instante de transmisión desde el satélite i , y t_u es el instante real de recepción. Desde un punto de vista práctico es difícil, si no imposible, disponer de los instantes exactos del satélite o del usuario. Los instantes de los relojes del satélite t'_{si} y del usuario t'_u están relacionados con los tiempos reales de la siguiente manera

$$\begin{aligned}t'_{si} &= t_{si} + \Delta b_i, \\ t'_u &= t_u + b_{ut},\end{aligned}\tag{3}$$

donde Δb_i es el error del reloj del satélite, y b_{ut} es el error sistemático de usuario. Además de los errores de reloj, existen otros factores que afectan a la medición de la pseudodistancia. La pseudodistancia medida ρ_i puede ser escrita como

$$\rho_i = \rho_{iT} + \Delta D_i - c(\Delta b_i - b_{ut}) + c(\Delta T_i + \Delta I_i + v_i + \Delta v_i), \quad (4)$$

donde ΔD_i es el efecto del error de la posición del satélite en la distancia, ΔT_i es el error de retardo debido a la troposfera, ΔI_i es el error de retardo debido a la ionosfera, v_i es el error de ruido medido en el receptor, y Δv_i es la corrección del tiempo debido a la relatividad. Algunos de estos errores se pueden corregir; por ejemplo, el retardo troposférico puede ser modelado y el error ionosférico puede ser corregido en un receptor de dos frecuencias. Los errores causarían inexactitud en el cálculo de la posición del receptor. En cualquier caso el error del reloj del usuario no se puede corregir con la información recibida. Así que permanecerá como un término desconocido. Como resultado, el sistema (1) se verá modificado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} + b_u, \\ \rho_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} + b_u, \\ \rho_3 &= \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2} + b_u, \\ \rho_4 &= \sqrt{(x_4 - x_u)^2 + (y_4 - y_u)^2 + (z_4 - z_u)^2} + b_u, \end{aligned} \quad (5)$$

donde b_u es el error sistemático de reloj de usuario expresado en términos de distancia, el cual está relacionado con el término b_{ut} por medio de la relación $b_u = cb_{ut}$. En el sistema (5) se necesitan cuatro ecuaciones para estimar las cuatro incógnitas x_u , y_u , z_u y b_u . De modo que en un receptor GPS se necesitan como mínimo 4 satélites para determinar la posición del usuario.

2.3.6. Determinación de la posición del usuario por medio de pseudodistancias

Un método muy común para resolver el sistema (5) es linealizar cada uno de sus componentes, como se puede comprobar en [10]. Siguiendo el procedimiento que se describe en ese trabajo, el sistema de ecuaciones anterior se puede reescribir de un modo más simplificado de la siguiente manera

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} + b_u, \quad (6)$$

con $i = 1, 2, 3, 4$ y siendo las incógnitas x_u , y_u , z_u y b_u . La pseudodistancia ρ_i y las posiciones de los satélites x_i , y_i , z_i son conocidas. Realizando derivadas parciales sobre este sistema de ecuaciones el resultado que obtenemos es el siguiente, siendo $\delta\rho_i$ un valor conocido.

$$\begin{aligned} \delta\rho_i &= \frac{(x_i - x_u)\delta x_u + (y_i - y_u)\delta y_u + (z_i - z_u)\delta z_u}{\sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2}} + \delta b_u \\ &= \frac{(x_i - x_u)\delta x_u + (y_i - y_u)\delta y_u + (z_i - z_u)\delta z_u}{\rho_i - b_u} + \delta b_u. \end{aligned} \quad (7)$$

En este sistema, δx_u , δy_u , δz_u , y δb_u se pueden considerar como las únicas incógnitas. Las cantidades x_u , y_u , z_u y b_u son tratadas como valores conocidos porque podemos trabajar con ciertos valores iniciales preestablecidos para las mismas. A partir de estos valores iniciales calculamos un primer conjunto de soluciones δx_u , δy_u , δz_u , y δb_u . Estos valores se usan para modificar los valores iniciales de x_u , y_u , z_u y b_u y encontrar un nuevo conjunto de soluciones. Este nuevo conjunto de x_u , y_u , z_u y b_u se puede considerar de nuevo como valores conocidos. Este proceso continúa hasta que los valores absolutos de δx_u , δy_u , δz_u , y δb_u sean menores que un cierto valor preestablecido. Los valores finales de x_u , y_u , z_u y b_u cuando finaliza el algoritmo se toman como la solución deseada. A este método de llegar a la solución se le conoce como *método iterativo de punto fijo*. Con δx_u , δy_u , δz_u , y δb_u como incógnitas, el sistema de ecuaciones anterior se convierte en un conjunto de ecuaciones lineales. Este procedimiento recibe el nombre de *linealización*. El sistema anterior se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \delta\rho_3 \\ \delta\rho_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_u \\ \delta y_u \\ \delta z_u \\ \delta b_u \end{bmatrix}, \quad (8)$$

donde

$$\alpha_{i1} = \frac{x_i - x_u}{\rho_i - b_u}, \quad \alpha_{i2} = \frac{y_i - y_u}{\rho_i - b_u}, \quad \alpha_{i3} = \frac{z_i - z_u}{\rho_i - b_u}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (9)$$

La solución del sistema (8) es

$$\begin{bmatrix} \delta x_u \\ \delta y_u \\ \delta z_u \\ \delta b_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \delta\rho_3 \\ \delta\rho_4 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Obviamente este proceso no proporciona las soluciones deseadas directamente pero con su ayuda se pueden obtener, de manera iterativa. Para definir el criterio de parada habitualmente se suele utilizar un determinado valor que es el siguiente

$$\delta v = \sqrt{\delta x_u^2 + \delta y_u^2 + \delta z_u^2 + \delta b_u^2}. \quad (11)$$

Cuando δv es menor que un cierto umbral predeterminado el proceso iterativo se detiene. En ocasiones la componente temporal b_u no se incluye en la ecuación anterior. En esta memoria utilizamos como criterio de parada el valor $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|F(x^{(k+1)})\|$ porque es más robusto que (11). El método iterativo recién descrito, empleado habitualmente para calcular la posición del receptor GPS, corresponde al conocido método de Newton, método óptimo de orden de convergencia dos, el cual presentaremos, junto con otros métodos, en la Sección 2.4.

2.4. Métodos iterativos en GPS

2.4.1. Introducción

El problema de encontrar las soluciones no singulares de una ecuación no lineal $f(x) = 0$ ó un sistema no lineal $F(x) = 0$ es muy importante para la ciencia y en la ingeniería.

La construcción de métodos iterativos para aproximar la solución del sistema no lineal $F(x) = 0$ es una tarea muy interesante en análisis numérico y diferentes ramas de la ciencia aplicada.

A lo largo de los últimos años se han publicado numerosas contribuciones de métodos iterativos que tratan de resolver sistemas no lineales, se han hecho diversas modificaciones a los métodos clásicos para acelerar la convergencia o reducir el número de operaciones y evaluaciones funcionales en cada paso del método iterativo. La extensión de las variantes del método de Newton descritas por Weerakoon y Fernando en [7], por Özban en [8] y Gerlach en [9], a funciones de varias variables ha sido desarrollada en [11, 12, 13, 14]. En [11, 12] se han diseñado familias de variantes de tercer orden del método de Newton usando fórmulas de cuadratura abiertas y cerradas, incluyendo las familias de los métodos definidos por Frontini et al. en [13]. Usando la fórmula genérica de la cuadratura de interpolación, en [14] es obtenida una familia de métodos con orden de convergencia $2d + 1$, bajo ciertas condiciones, donde d es el orden hasta el cual las derivadas parciales de cada función coordenada evaluada en la solución se cancelan. De hecho, Darvishi et al. mejoraron en [15] el método de Frontini et al., consiguiendo un método de cuarto orden.

Además de métodos multipunto basados en cuadratura de interpolación, han sido desarrollados otros esquemas utilizando diferentes técnicas, como por ejemplo la extensión a varias variables de esquemas unidimensionales (ver [16]), la descomposición de Adomian (ver [17, 18], por ejemplo), la propuesta por Darvishi y Barati en [19, 20] con convergencia super cúbica y los métodos de Cordero et al. en [4] con órdenes de convergencia cuatro y cinco.

Otro procedimiento para desarrollar métodos iterativos para sistemas no lineales es reemplazar la segunda derivada por alguna aproximación de la misma. En [3], Traub presentó una familia de métodos multipunto basados en la aproximación de la segunda derivada que aparece en la fórmula iterativa de Chebyshev y, más recientemente, Babajee et al. en [21] diseñaron dos métodos similares al de Chebyshev libres de segundas derivadas.

Por otra parte, una conocida técnica de aceleración del orden de convergencia de un método iterativo que podemos encontrar en [3], consiste en la composición de dos métodos iterativos de órdenes p_1 y p_2 , respectivamente, para obtener un método de orden $p_1 p_2$. En consecuencia, habitualmente se requieren nuevas evaluaciones de la matriz Jacobiana y de la función no lineal para incrementar el orden de convergencia y el nuevo método suele acabar siendo menos eficiente que los métodos originales. De hecho, si componemos un método de función de iteración $g(x)$ de orden p con el método de Newton clásico, se obtiene un nuevo método de orden $2p$ que requiere $n^2 + n$ evaluaciones funcionales más que $g(x)$. De modo que para conseguir un método más eficiente, en [5] se estima en cada paso del método iterativo la matriz Jacobiana $F'(g(x^{(k)}))$ en términos de matrices Jacobianas utilizadas previamente. Con esta idea, el nuevo método tiene en general un orden de convergencia menor que $2p$ pero el número de evaluaciones funcionales por iteración disminuye.

En nuestro trabajo vamos a emplear una técnica de aceleración de la convergencia que recuerda a la composición de dos métodos pero con una variación. La técnica empleada en esta memoria la consideraremos del tipo *pseudocomposición* por su similitud con la descrita por Cordero et al. en [22].

Presentamos a continuación una serie de nociones que necesitaremos posteriormente para analizar la convergencia del nuevo método.

Sea $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ una secuencia en \mathbb{R}^n convergente a \bar{x} . Entonces, la convergencia se dice que es

(a) lineal, si existen M , $0 < M < 1$, y k_0 tales que

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq M \|x^{(k)} - \bar{x}\|, \forall k \geq k_0. \quad (12)$$

(b) de orden p , $p > 1$, si existen M , $M > 0$, y k_0 tales que

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq M \|x^{(k)} - \bar{x}\|^p, \forall k \geq k_0. \quad (13)$$

Vamos en este momento a introducir la notación que utilizaremos en la demostración de la convergencia del nuevo método. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en D . Utilizando la notación introducida en [5], la q -ésima derivada parcial de F en $u \in \mathbb{R}^n$, $q \geq 1$ es la función q -lineal $F^{(q)}(u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^n$. Es sencillo observar que

1. $F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \dots, v_{q-1}, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,
2. $F^{(q)}(u)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \dots, v_q)$ para cualquier permutación σ de $\{1, 2, \dots, q\}$,

donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de operadores lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . Las propiedades anteriores nos permiten utilizar la siguiente notación.

1. $F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \dots, v_q) = F^{(q)}(u)v_1 \cdot \dots \cdot v_q$,
2. $F^{(q)}(u)v^{q-1}F^{(p)}v^p = F^{(q)}(u)F^{(p)}(u)v^{q+p-1}$.

Por otra parte, para $\bar{x} + h \in \mathbb{R}^n$ suficientemente cercano a la solución \bar{x} de $F(x) = 0$ podemos aplicar el desarrollo en serie de Taylor y, asumiendo que la matriz Jacobiana $F'(\bar{x})$ no es singular, tenemos que

$$F(\bar{x} + h) = F'(\bar{x}) \left[h + \sum_{q=2}^{p-1} C_q h^q \right] + O(h^p), \quad (14)$$

donde $C_q = (1/q!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(q)}(\bar{x})$, $q \geq 2$. Se puede observar que $C_q h^q \in \mathbb{R}^n$ ya que $F^{(q)}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $[F'(\bar{x})]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Además, se puede expresar F' como

$$F'(\bar{x} + h) = F'(\bar{x}) \left[I + \sum_{q=2}^{p-1} qC_q h^{q-1} \right] + O(h^p) = F'(\bar{x})D(h) + O(h^p), \quad (15)$$

donde I es la matriz identidad. Por lo tanto, $qC_q h^{q-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. De la ecuación anterior se obtiene

$$[F'(\bar{x} + h)]^{-1} = D(h)^{-1}[F'(\bar{x})]^{-1} + O(h^p). \quad (16)$$

Entonces, asumimos que la inversa de $D(h)$ sea

$$D(h)^{-1} = I + X_2 h + X_3 h^2 + X_4 h^3 + \dots, \quad (17)$$

de modo que X_i , $i = 2, 3, \dots$ verifique

$$D(h)D(h)^{-1} = D(h)^{-1}D(h) = I. \quad (18)$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} X_2 &= -2C_2, \\ X_3 &= 4C_2^2 - 3C_3, \\ X_4 &= -8C_2^3 + 6C_2C_3 + 6C_3C_2 - 4C_4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Denotamos $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$ el error en la k -ésima iteración. La ecuación

$$e^{(k+1)} = L e^{(k)p} + O(e^{(k)p+1}), \quad (19)$$

donde L es una función p -lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, recibe el nombre de *ecuación de error* y p es el *orden de convergencia*. Obsérvese que $e^{(k)p}$ es $(e^{(k)}, e^{(k)}, \dots, e^{(k)})$. En [12] se introdujo el concepto de *orden de convergencia computacional*, que describimos a continuación

Definición 2.1 Sea \bar{x} un cero de la función F y supongamos que $x^{(k-1)}$, $x^{(k)}$, y $x^{(k+1)}$ son tres iteraciones consecutivas cercanas a \bar{x} . Entonces, el orden de convergencia computacional p , puede ser aproximado utilizando la fórmula

$$p \approx ACOC = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| / \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|)}.$$

Además, para comparar los diferentes métodos, utilizamos el *índice de eficiencia*, $I = p^{1/d}$, donde p es el orden de convergencia y d es el número total de nuevas evaluaciones funcionales (por iteración) requeridas por el método. Este es el índice más utilizado pero no el único. En [3] Traub usa un *índice computacional* definido como $CI = p^{1/op}$, donde op es el número de productos/cocientes por iteración. Recordemos que el número de productos y cocientes que necesitamos para resolver m sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes, utilizando factorización LU , es

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n,$$

donde n es el tamaño de cada sistema. Utilizaremos estos índices para comparar los diferentes métodos iterativos. Para el caso unidimensional Kung y Traub en [23] conjeturaron

que el orden de convergencia de un método multipunto sin memoria no puede exceder el límite 2^{d-1} , (denominado *orden óptimo*). Los métodos de Ostrowski [2], Jarrat [24] y King [25] son métodos óptimos de orden cuatro. En [6] se adaptó la definición de orden óptimo al caso de métodos iterativos para resolver los sistemas no lineales. En ese trabajo, la extensión a varias variables de la conjetura de Kung y Traub se hizo de la siguiente manera:

Conjetura 2.1 *Sea un método iterativo multipunto para resolver sistemas de ecuaciones no lineales que requiere $d = k_1 + k_2$ evaluaciones funcionales por paso tal que k_1 de ellas corresponden a la matriz Jacobiana y k_2 a evaluaciones de la función no lineal. Conjeturamos que el orden óptimo de este método es $2^{k_1+k_2-1}$ si $k_1 \leq k_2$.*

Este concepto de orden óptimo es una importante herramienta para establecer una clasificación entre los métodos iterativos para resolver sistemas no lineales. En este trabajo proponemos dos nuevos y competitivos métodos iterativos de órdenes cuatro y cinco respectivamente que mejoran los métodos de Newton y Traub y a otro método de orden cuatro existente que mencionaremos en la Sección 2.4.4. En general, los receptores GPS llevan implementado por defecto el método iterativo de Newton, que pasamos a describir a continuación.

2.4.2. Método de Newton

En análisis numérico, el método de Newton (conocido también como el método de Newton-Raphson o el método de Newton-Fourier) es un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada.

El método de Newton fue descrito por Isaac Newton en *De analysi per aequationes número terminorum infinitas* (escrito en 1669, publicado en 1711 por William Jones) y en *De methodis fluxionum et serierum infinitarum* (escrito en 1671, traducido y publicado como Método de las fluxiones en 1736 por John Colson). Sin embargo, su descripción difiere en forma sustancial de la descripción moderna. Newton aplicaba el método sólo a polinomios, y no consideraba las aproximaciones sucesivas x_n , sino que calculaba una secuencia de polinomios para llegar a la aproximación de la raíz x . Finalmente, Newton ve el método como puramente algebraico y falla al no ver la conexión con el Cálculo.

Isaac Newton probablemente derivó su método de forma similar aunque menos precisa del método de François Viète. La esencia del método de Viète puede encontrarse en el trabajo del matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi.

El método de Newton-Raphson es llamado así por la razón de que el matemático inglés Joseph Raphson (contemporáneo de Newton) se hizo miembro de la Royal Society en 1691 por su libro *Aequationum Universalis*, análisis que publicó en 1690 y el cual contenía este método para aproximar raíces. Mientras que Newton en su libro *Método de las fluxiones* describe el mismo método escrito en 1671, no fue publicado hasta 1736, lo que significa que Raphson había publicado este resultado casi 50 años antes, aunque no fue tan popular como los trabajos de Newton y se le reconoció posteriormente.

El método de Newton-Raphson es un método abierto, en el sentido de que su convergencia global no está garantizada. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque o valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor supuesto cercano a la raíz. Una vez que se ha hecho esto, el método linealiza la función por la recta tangente en esa estimación inicial. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que se cumplan unos ciertos criterios de parada que nos permitan asegurar que estamos lo suficientemente cerca de la solución.

El método de Newton-Raphson puede generalizarse a la resolución de sistemas no lineales, de la siguiente manera. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, consideremos el problema de encontrar un cero real de la función F , esto es, una solución real \bar{x} del sistema no lineal $F(x) = 0$ de n ecuaciones y n incógnitas. Esta solución se puede obtener por medio de una aproximación por el plano tangente de acuerdo al siguiente proceso iterativo.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

donde $x^{(0)}$ es la estimación inicial y $F'(x^{(k)})$ es la matriz Jacobiana de la función F evaluada en la iteración k -ésima. Es conocido que el método de Newton tiene orden de convergencia dos si se cumplen determinadas condiciones.

Aunque existen multitud de autores que a través de su trabajo han aportado su granito de arena en el desarrollo de nuevos métodos iterativos que, bien por el incremento del orden de convergencia, bien por la mejora de otros parámetros han contribuido a presentar alternativas al método de Newton, lo cierto es que aún a día de hoy el método de Newton es uno de los métodos iterativos más utilizados y es un método óptimo de orden dos. No obstante, resulta interesante el método de Traub, de orden tres, que combinado de un modo adecuado con el de Newton nos proporcionará dos métodos de orden cuatro y cinco, respectivamente, que constituyen nuestra propuesta de mejora del software de los receptores GPS y nos permiten generalizar un resultado teórico a dos métodos iterativos cualesquiera de órdenes p y q , respectivamente. Además, por ser uno de los métodos propuestos de orden cuatro, realizamos también la comparación con un método reciente (Sharma, ver [26]), y como veremos posteriormente nuestros métodos mejoran al de Sharma en diversos parámetros.

2.4.3. Método de Traub

Traub estableció en [3] el método que lleva su nombre, cuyo orden de convergencia es tres y cuya expresión iterativa viene dada por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}(F(x^{(k)}) + F(y^{(k)})). \quad (21)$$

donde $y^{(k)}$ es la k -ésima iteración del método de Newton. Podemos observar que lo que realmente hizo Traub fue componer el método de Newton consigo mismo pero manteniendo la matriz Jacobiana evaluada en $x^{(k)}$, en lugar de en $y^{(k)}$, lo que hubiera supuesto mayor coste computacional. De este modo consiguió aumentar el orden de convergencia del método en una unidad.

Utilizaremos en este trabajo con posterioridad una combinación del método de Newton con el de Traub para obtener un método de orden cuatro que nos permitirá resolver el sistema GPS de un modo más eficiente, e incluso un método de orden cinco que nos permitirá generalizar el método de combinación empleado con Newton y Traub a métodos genéricos de órdenes p y q cualesquiera.

2.4.4. Método de Sharma

Recientemente, Sharma et al. en [26] han desarrollado un método de cuarto orden para resolver sistemas no lineales de ecuaciones. El algoritmo se compone de dos pasos que realizan una ponderación de Newton, dados por

$$y^{(k)} = x^{(k)} - \frac{2}{3}F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2}[-I + \frac{9}{4}F'(y^{(k)})^{-1}F'(x^{(k)}) + \frac{3}{4}F'(x^{(k)})^{-1}F'(y^{(k)})]F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}).$$

Comprobaremos que nuestro método M4 mejora la eficiencia computacional y las estimaciones del error de este método.

2.4.5. Un método de orden 4

En esta sección proponemos un nuevo método para resolver sistemas no lineales al que llamamos M4, y es diseñado utilizando el método de Newton combinado con el de Traub. Demostramos que el método tiene orden de convergencia cuatro. Su expresión iterativa es

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}(F(x^{(k)}) + F(y^{(k)})) \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [F'(z^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (22)$$

donde $y^{(k)}$ es la k -ésima iteración del método de Newton. En el siguiente resultado vamos a probar que el orden de convergencia del método es cuatro.

Teorema 2.1 *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, suficientemente diferenciable en cada punto de un entorno abierto D de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, que es una solución del sistema no lineal $F(x) = 0$. Supongamos que $F'(x)$ es continua y no singular en \bar{x} . Entonces la secuencia $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ obtenida usando la expresión iterativa (22) converge a \bar{x} con orden cuatro. La ecuación de error es*

$$e^{(k+1)} = -C_2^3 e^{(k)4} + O(e^{(k)5}),$$

donde $C_k = (1/k!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(k)}(\bar{x})$, $k = 2, 3, \dots$, y $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$.

Demostración: El desarrollo de Taylor de $F(x^{(k)})$ y $F'(x^{(k)})$ alrededor de \bar{x} proporciona

$$\begin{aligned} F(x^{(k)}) &= F'(\bar{x})[e^{(k)} + C_2e^{(k)2} + C_3e^{(k)3} + C_4e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}), \\ F'(x^{(k)}) &= F'(\bar{x})[I + 2C_2e^{(k)} + 3C_3e^{(k)2} + 4C_4e^{(k)3} + 5C_5e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}). \end{aligned} \quad (23)$$

Utilizando (23) en la solución del sistema lineal (18) se obtiene

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = [I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2} + X_4e^{(k)3}][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)4}),$$

donde $X_2 = -2C_2$, $X_3 = 4C_2^2 - 3C_3$ y $X_4 = -8C_2^3 + 6C_2C_3 + 6C_3C_2 - 4C_4$. El desarrollo en serie de Taylor de $y^{(k)}$ es

$$y^{(k)} - \bar{x} = C_2e^{(k)2} + (2C_3 - 2C_2^2)e^{(k)3} + (4C_3^2 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4)e^{(k)4} + O(e^{(k)5}). \quad (24)$$

Por otra parte, tenemos que

$$F(y^{(k)}) = F'(\bar{x})[(y^{(k)} - \bar{x}) + C_2(y^{(k)} - \bar{x})^2] + O(e^{(k)5}),$$

y operando tenemos

$$F(y^{(k)}) = F'(\bar{x})[C_2e^{(k)2} + (2C_3 - 2C_2^2)e^{(k)3} + (5C_3^2 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4)e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}).$$

Análogamente, obtenemos la expresión de $z^{(k)} - \bar{x}$. Dado que la k -ésima iteración del método de Traub es

$$z^{(k)} = y^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}),$$

entonces

$$z^{(k)} - \bar{x} = 2C_2^2e^{(k)3} + (-9C_2^3 + 4C_2C_3 + 3C_3C_2)e^{(k)4} + O(e^{(k)5}). \quad (25)$$

Además,

$$F'(z^{(k)}) = F'(\bar{x})[I + 2C_2(z^{(k)} - \bar{x})] + O(e^{(k)5}),$$

o, equivalentemente, de (25)

$$F'(z^{(k)}) = F'(\bar{x})[I + 4C_2^3e^{(k)3} + (-18C_2^4 + 8C_2^2C_3 + 6C_2C_3C_2)e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}).$$

Así que,

$$[F'(z^{(k)})]^{-1} = [I + W_2e^{(k)} + W_3e^{(k)2} + W_4e^{(k)3} + W_5e^{(k)4}][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)5}),$$

y dado que $[F'(z^{(k)})]^{-1}F'(z^{(k)}) = I$, resolviendo el sistema lineal de ecuaciones tenemos $W_2 = W_3 = 0$, $W_4 = -4C_2^3$ y $W_5 = 18C_2^4 - 8C_2^2C_3 - 6C_2C_3C_2$, de modo que,

$$[F'(z^{(k)})]^{-1} = [I - 4C_2^3e^{(k)3} + (18C_2^4 - 8C_2^2C_3 - 6C_2C_3C_2)e^{(k)4}][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)5}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} [F'(z^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}) &= C_2e^{(k)2} + 2(C_3 - C_2^2)e^{(k)3} \\ &\quad + (5C_3^2 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4)e^{(k)4} + O(e^{(k)5}). \end{aligned} \quad (26)$$

Finalmente, reemplazando (24) y (26) en la expresión iterativa (22) obtenemos la ecuación de error

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \bar{x} = y^{(k)} - \bar{x} - [F'(z^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}) = -C_2^3e^{(k)4} + O(e^{(k)5}),$$

lo cual completa la demostración del teorema. \square

2.4.6. Un método de orden 5

En esta sección mostramos un nuevo método utilizado para resolver sistemas no lineales al que hemos llamado M5, obtenido nuevamente por la combinación del método de Newton con el de Traub pero de un modo distinto. Demostramos que este nuevo método tiene orden de convergencia cinco. Su expresión iterativa es

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}(F(x^{(k)}) + F(y^{(k)})) \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \end{aligned} \quad (27)$$

donde $y^{(k)}$ es la k -ésima iteración del método de Newton. En el siguiente resultado probamos que el orden de convergencia de este método es cinco.

Teorema 2.2 *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, suficientemente diferenciable en cada punto de un entorno abierto D de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, que es una solución del sistema no lineal $F(x) = 0$. Supongamos que $F'(x)$ es continua y no singular en \bar{x} . Entonces la secuencia $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ obtenida utilizando la expresión iterativa (27) converge a \bar{x} con orden cinco. La ecuación de error es*

$$e^{(k+1)} = 4C_2^4 e^{(k)5} + O(e^{(k)6}),$$

donde $C_k = (1/k!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(k)}(\bar{x})$, $k = 2, 3, \dots$, y $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$.

Demostración: Siguiendo el procedimiento utilizado en el Teorema 2.1, tenemos que

$$\begin{aligned} F(y^{(k)}) &= F'(\bar{x})[C_2 e^{(k)2} + (2C_3 - 2C_2^2)e^{(k)3} \\ &\quad + (5C_2^3 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4)e^{(k)4} + (-6C_3^2 - 12C_2^4 + 10C_2^2C_3 \\ &\quad + 8C_2C_3C_2 + 6C_3C_2^2 - 6C_2C_4 - 4C_4C_2 + 4C_5)e^{(k)5}] + O(e^{(k)6}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z^{(k)} - \bar{x} &= 2C_2^2 e^{(k)3} + (-9C_2^3 + 4C_2C_3 + 3C_3C_2)e^{(k)4} \\ &\quad + (30C_2^4 - 18C_2^2C_3 + 6C_3^2 - 12C_3C_2^2 - 14C_2C_3C_2 \\ &\quad + 6C_2C_4 + 4C_4C_2)e^{(k)5} + O(e^{(k)6}). \end{aligned} \quad (28)$$

Por otra parte,

$$F(z^{(k)}) = F'(\bar{x})[(z^{(k)} - \bar{x})] + O(e^{(k)4}).$$

Además,

$$[F'(y^{(k)})]^{-1} = [I + X_2(y^{(k)} - \bar{x}) + X_3(y^{(k)} - \bar{x})^2][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)5}). \quad (29)$$

Finalmente, reemplazando (28) y (29) en la expresión iterativa (27) obtenemos la ecuación de error

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \bar{x} = z^{(k)} - \bar{x} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}) = 4C_2^4 e^{(k)5} + O(e^{(k)6}).$$

con lo cual el teorema queda demostrado. \square

2.4.7. Pseudocomposición de métodos

En [22] fue introducida una técnica denominada *pseudocomposición* que utiliza un esquema iterativo conocido cualquiera como predictor y otro método proveniente de la cuadratura Gaussiana como corrector. El orden de convergencia del esquema resultante depende, entre otros factores, del orden de los dos últimos pasos del predictor. Utilizando esta idea generalizamos el procedimiento usado para diseñar el método M5.

Entonces podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 2.3 *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, suficientemente diferenciable en cada punto de un entorno abierto D de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, que es una solución del sistema no lineal $F(x) = 0$. Supongamos que $F'(x)$ es continua y no singular en \bar{x} . Sea $y^{(k)}$ la k -ésima iteración de un método iterativo de orden q y $z^{(k)}$ la k -ésima iteración de un método iterativo de orden p , con $p \geq q$. La secuencia $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ obtenida por la expresión iterativa*

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}) \quad (30)$$

converge a \bar{x} con orden de convergencia $p + q$.

Demostración: Los desarrollos de Taylor de $y^{(k)}$ y $z^{(k)}$ son

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \bar{x} + M_1 e^{(k)q} + M_2 e^{(k)q+1} + \dots + M_{p+1} e^{(k)q+p} + O(e^{(k)p+q+1}), \\ z^{(k)} &= \bar{x} + N_1 e^{(k)p} + N_2 e^{(k)p+1} + \dots + N_{q+1} e^{(k)p+q} + O(e^{(k)p+q+1}). \end{aligned} \quad (31)$$

El desarrollo de Taylor de $F(z^{(k)})$ alrededor de \bar{x} proporciona

$$\begin{aligned} F(z^{(k)}) &= F'(\bar{x})[z^{(k)} - \bar{x} + C_2(z^{(k)} - \bar{x})^2] + O(e^{(k)2(p+q)+1}) \\ &= F'(\bar{x})[N_1 e^{(k)p} + N_2 e^{(k)p+1} + \dots + N_{q+1} e^{(k)p+q} \\ &\quad + C_2(N_1 e^{(k)p} + N_2 e^{(k)p+1} + \dots + N_{q+1} e^{(k)p+q})^2] + O(e^{(k)2(p+q)+1}), \end{aligned} \quad (32)$$

donde $C_k = (1/k!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(k)}(\bar{x})$, $k = 2, 3, \dots$, y $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$. Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} [F'(y^{(k)})]^{-1} &= [I + X_2(y^{(k)} - \bar{x}) + X_3(y^{(k)} - \bar{x})^2][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)2q+1}) \\ &= [I + X_2(M_1 e^{(k)q} + M_2 e^{(k)q+1} + \dots + M_{p+1} e^{(k)q+p})][F'(\bar{x})]^{-1} \\ &\quad + X_3(R_1 e^{(k)2q} + \dots) + O(e^{(k)m}), \end{aligned} \quad (33)$$

donde $X_2 = -2C_2$ y $m = \min\{p + q + 1, 2q + 1\} = p + q + 1$. Finalmente, reemplazando (31), (32) y (33) en la expresión iterativa (30) obtenemos la ecuación de error

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \bar{x} = z^{(k)} - \bar{x} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}) = -X_2 M_1 N_1 e^{(k)p+q} + O(e^{(k)p+q+1}),$$

entonces el orden de convergencia del método que resulta de esta combinación de un método de orden q con otro de orden p con $p \geq q$ es $p + q$. \square

3. Resultados numéricos

3.1. Introducción

La computación numérica ha sido llevada a cabo utilizando aritmética de precisión variable, con 2000 dígitos de mantisa, en MATLAB 7.1. El criterio de parada utilizado ha sido $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-250}$, de modo que comprobamos que la sucesión de iterados no sólo converge, sino que lo hace a una aproximación de la solución del sistema no lineal. Para cada método contamos el número de iteraciones necesarias para alcanzar la tolerancia deseada, calculamos el orden de convergencia computacional aproximado, *ACOC*, el índice de eficiencia *I*, el índice computacional *CI* y una estimación del error utilizando los últimos valores de $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ y de $\|F(x^{(k+1)})\|$.

3.1.1. Resultados numéricos con sistemas no lineales académicos

Realizamos una comparativa entre los métodos de Newton (N), Traub (T), Sharma (S), M4 y M5 con una serie de sistemas no lineales académicos para poder comprobar la efectividad y el orden de convergencia de los métodos aquí desarrollados.

$$(a) \quad F(x_1, x_2) = (\exp(x_1^2) - \exp(\sqrt{2}x_1), x_1 - x_2), \quad \bar{x} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})^T.$$

$$(b) \quad F(x_1, x_2) = (x_1 + \exp(x_2) - \cos(x_2), 3x_1 - x_2 - \sin(x_2)), \quad \bar{x} = (0, 0)^T.$$

$$(c) \quad F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \text{ donde } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ y } f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ tal que}$$

$$f_i(x) = x_i x_{i+1} - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$f_n(x) = x_n x_1 - 1.$$

Cuando n es impar los ceros de F son $\bar{x}_1 = (1, 1, \dots, 1)$ y $\bar{x}_2 = (-1, -1, \dots, -1)$.

En la Tabla 1 podemos encontrar una comparativa entre los métodos iterativos N, T, S, M4 y M5 para los sistemas (a) y (b).

Como se puede observar los *ACOC*s son los esperados, y los métodos *M4* y *M5* son claramente muy competitivos comparados con los de Newton, Traub y Sharma en términos de estimación del error.

En la Tabla 2 podemos encontrar una comparativa entre los diferentes métodos numéricos para el sistema no lineal (c). Los resultados mostrados son para $n = 39$, $n = 59$, $n = 79$ y $n = 99$ y todos los métodos convergen a \bar{x}_1 . Se puede observar que nuevamente nuestros métodos *M4* y *M5* son muy competitivos en términos de estimación de error, aunque éste es independiente del número de ecuaciones del sistema.

Además, en las Figuras 2 y 3, mostramos los índices de eficiencia (*I*) y los índices computacionales (*CI*), respectivamente, de los métodos propuestos, comparados con los de Newton, Traub y Sharma y entre sí. Lo hacemos para $n = 2, 3, \dots, 10$. Se puede concluir que nuestros métodos mejoran al método de Sharma en términos de *CI*, aunque la eficiencia clásica del procedimiento de Sharma es mejor para $n \leq 6$.

<i>Función</i>	$x^{(0)}$	<i>Método</i>	<i>Iter</i>	<i>ACOC</i>	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $
(a)	$(2, 2)^T$	<i>N</i>	13	2	0.163e-338	0
		<i>T</i>	9	3	0.43e-328	0
		<i>S</i>	7	4	0.962e-270	0
		<i>M4</i>	7	4	0.140e-805	0
		<i>M5</i>	7	5	0.893e-831	0
(b)	$(-0,1, -0,1)^T$	<i>N</i>	9	2	0.94e-307	0.28e-921
		<i>T</i>	6	3	0.160e-251	0.101e-1006
		<i>S</i>	5	4	0.53e-276	0.83e-1106
		<i>M4</i>	5	4	0.98e-300	0.32e-1801
		<i>M5</i>	5	5	0.435e-647	0.1e-3941

Tabla 1: Comparativa entre los métodos iterativos aplicados a los sistemas no lineales (a) y (b)

<i>Función (c)</i>	$x^{(0)}$	<i>Método</i>	<i>Iter</i>	<i>ACOC</i>	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $
$n = 39$	$(2, 2, \dots, 2)^T$	<i>N</i>	11	2	0.535e-488	0.286e-976
		<i>T</i>	7	3	0.688e-278	0.326e-834
		<i>S</i>	6	4	0.113e-408	0.960e-1636
		<i>M4</i>	6	4	0.380e-704	0
		<i>M5</i>	6	5	0.122e-1201	0
$n = 59$	$(2, 2, \dots, 2)^T$	<i>N</i>	11	2	0.535e-488	0.286e-976
		<i>T</i>	7	3	0.688e-278	0.326e-834
		<i>S</i>	6	4	0.113e-408	0.960e-1636
		<i>M4</i>	6	4	0.380e-704	0
		<i>M5</i>	6	5	0.122e-1201	0
$n = 79$	$(2, 2, \dots, 2)^T$	<i>N</i>	11	2	0.535e-488	0.286e-976
		<i>T</i>	7	3	0.688e-278	0.326e-834
		<i>S</i>	6	4	0.113e-408	0.960e-1636
		<i>M4</i>	6	4	0.380e-704	0
		<i>M5</i>	6	5	0.122e-1201	0
$n = 99$	$(2, 2, \dots, 2)^T$	<i>N</i>	11	2	0.535e-488	0.286e-976
		<i>T</i>	7	3	0.688e-278	0.326e-834
		<i>S</i>	6	4	0.113e-408	0.960e-1636
		<i>M4</i>	6	4	0.380e-704	0
		<i>M5</i>	6	5	0.122e-1201	0

Tabla 2: Comparativa entre los métodos iterativos aplicados al sistema no lineal (c)

3.1.2. Resultados numéricos con el sistema GPS

Hemos solicitado al Instituto Cartográfico Valenciano que nos proporcione los datos exactos de posiciones conocidas en coordenadas cartesianas geocéntricas y, siendo advertidos de que para cada época el satélite tendrá una posición distinta, se nos adjunta unos

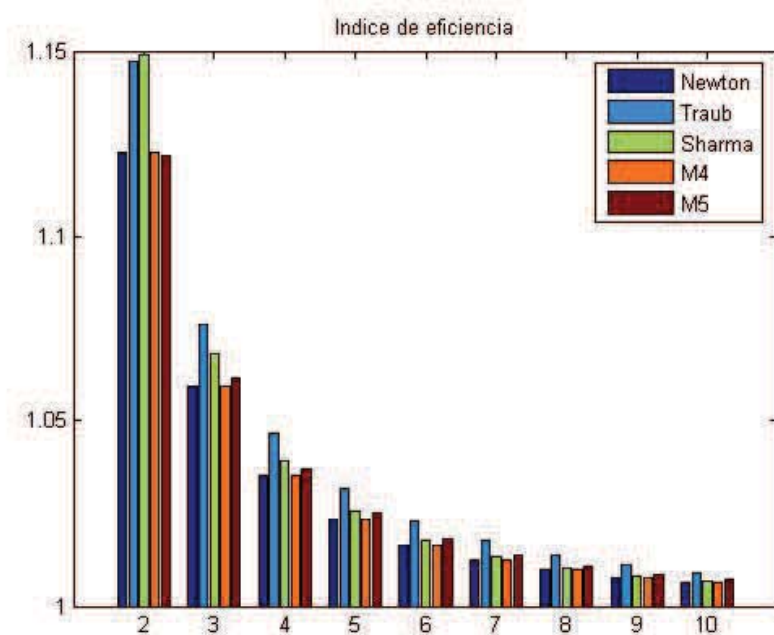


Figura 2: Comparativa entre el índice de eficiencia de los métodos

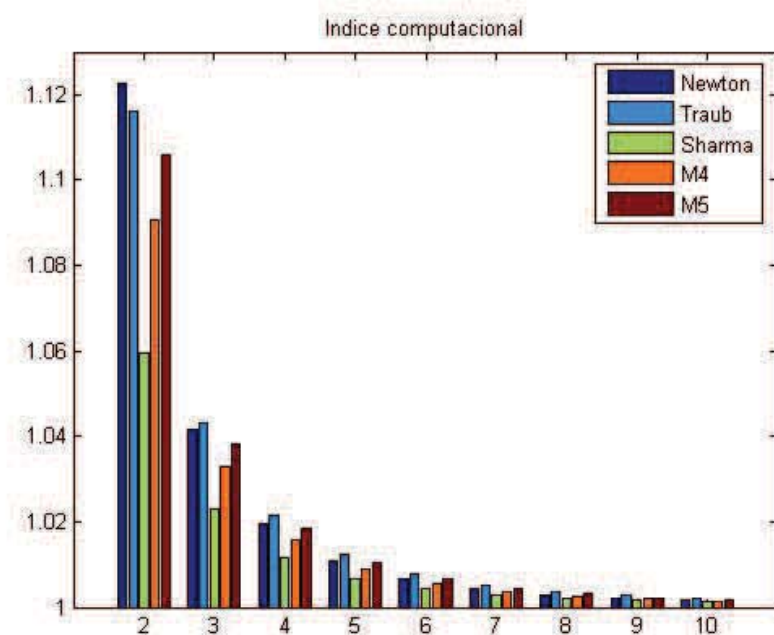


Figura 3: Comparativa entre el índice computacional de los métodos

datos de muestra en un archivo comprimido, la mayoría accesibles en la propia web del ICV. Desde la página web del ICV www.icv.gva.es, se accede a la página de la red GNSS de Valencia <http://icverva.icv.gva.es:8080>, de donde se pueden descargar observaciones

de satélites.

Concretamente, el ICV nos proporciona:

- * Ejemplo de punto fijo GPS en cartesianas geocéntricas MARCO ITRF (global): $x = 4984687,426$, $y = -41199,155$, $z = 3966605,952$. Se trata de un punto situado en Alcoy (Alicante).
- * Observaciones desde ese punto fijo (fichero *.09o) para un día.
- * Posiciones de los satélites para ese día: fichero *.09n y fichero *.sp3.
- * Descripción del formato RINEX (fichero *.09o): <http://www.igs.org/components/formats.html>
- * Descripción del fichero de efemérides y posiciones del satélite sp3: <http://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/data/format/sp3c.txt>
- * Enlace a otras librerías para cálculos de análisis: <http://www.ngs.noaa.gov/gps-toolbox/exist.htm>

Con estos datos obtenemos las posiciones de los satélites visibles en el instante correspondiente a los datos proporcionados. Con esas posiciones podemos calcular unas pseudodistancias aproximadas para cada satélite las cuales nos permiten configurar el sistema GPS (ver sistema (6) Sección 2.3.6) con el que evaluamos los métodos iterativos.

En la Tabla 3 podemos encontrar una comparativa entre los métodos iterativos N, T, S, M4 y M5 para el sistema GPS. Es conveniente recordar que habitualmente se suele tomar como primera aproximación el centro de la Tierra y $b_u = 0$, esto es $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$. A pesar de ello hemos probado también los métodos iterativos con otras condiciones iniciales. Denotamos $x^* = (4984687,426, -41199,155, 3966605,952, 0,116e-8)^T$ la solución terrestre y $x^s = (-39720114,893, -16748760,539, -23938190,113, -0,159)^T$ la solución del espacio exterior.

Como se puede observar, para este particular sistema de ecuaciones el método de Newton no converge a la posición del usuario para todas las condiciones iniciales, al igual que ocurre con M5, debido a un mal condicionamiento de la matriz del sistema, pero M4 es un buen método en todos los sentidos, muy competitivo en general respecto a los métodos conocidos.

4. Conclusiones

En esta memoria se ha profundizado en una línea de investigación emergente, la mejora del software de los receptores GPS. Concretamente, los receptores GPS actualmente usan el método de Newton (orden de convergencia dos) para resolver el sistema no lineal (6) y calcular su posición exacta con la información obtenida de las señales recibidas de la constelación de satélites GPS. Proponemos dos combinaciones diferentes de los métodos de Newton y de Traub, obteniendo dos métodos de órdenes cuatro (M4) y cinco (M5). Utilizando la idea presentada en [22], denominada *pseudocomposición*, se prueba que, en

Método	$x^{(0)}$	Iter	ACOC	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	\bar{x}
<i>N</i>		12	2	0.6e-374	0.830e-739	x^*
<i>T</i>		8	3	0.204e-389	0.355e-1156	x^*
<i>S</i>	$(0, 0, 0, 0)^T$	7	4	0.173e-767	0.2e-1991	x^*
<i>M4</i>		7	4	0.823e-512	0.1e-1991	x^*
<i>M5</i>		7	5	0.222e-814	0.3e-1991	x^s
<i>N</i>		15	2	0.421e-317	0.537e-627	x^s
<i>T</i>		9	3.0118	0.724e-575	0.122e-1717	x^s
<i>S</i>	$(10^6, 10^6, 10^6, 10^6)^T$	8	4	0.739e-799	0.1e-1991	x^*
<i>M4</i>		7	4	0.191e-735	0	x^*
<i>M5</i>		8	5	0.104e-563	0.1e-1991	x^s
<i>N</i>		12	2	0.371e-381	0.317e-753	x^*
<i>T</i>		8	3	0.220e-384	0.445e-1141	x^*
<i>S</i>	$(-10^4, -10^4, -10^4, -10^4)^T$	7	4	0.138e-784	0.3e-1991	x^*
<i>M4</i>		7	4	0.704e-520	0	x^*
<i>M5</i>		7	4.9968	0.510e-692	0.1e-1991	x^s

Tabla 3: Comparativa entre los métodos iterativos aplicados al sistema no lineal de ecuaciones del GPS

general, si se combinan adecuadamente dos métodos de órdenes p y q respectivamente, con $p \geq q$, el orden de convergencia del método resultante es $p + q$. Hemos comprobado numéricamente los diferentes métodos y hemos concluido que M4 y M5 son muy competitivos en términos de estimación de error y mejoran el CI del método de Sharma.

5. Líneas futuras de trabajo

A pesar del hecho de que se ha mejorado el orden de convergencia de los métodos de Newton y Traub, el número de evaluaciones funcionales de M4 y M5 todavía es demasiado elevado, y no son métodos óptimos en el sentido de la conjetura de Kung y Traub extendida al caso multidimensional. Se debe investigar con mayor profundidad en el futuro para conseguir métodos óptimos para resolver sistemas no lineales. Otra línea de investigación muy interesante en la que estamos trabajando actualmente es la de diseñar métodos iterativos para resolver sistemas no lineales que no evalúen matrices Jacobianas, para así conseguir un menor esfuerzo computacional.

6. Agradecimientos

Nuestro más sincero agradecimiento al Instituto Cartográfico Valenciano, cuya inestimable ayuda ha sido muy importante para la realización de este trabajo. Asimismo, quiero agradecer a mis compañeros Alicia, Valery y Juan Ramón el apoyo prestado, la orientación en el enfoque del trabajo que me han proporcionado y principalmente y por

encima de todo su compañerismo y amistad.

Referencias

- [1] J. Bao-Yen Tsui, *Fundamentals of Global Positioning System Receivers, a Software Approach*, Wiley Interscience, (2005).
- [2] A.M. Ostrowski, *Solution of equations and systems of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1964.
- [3] J.F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- [4] A. Cordero, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* 231 (2009) 541–551.
- [5] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, A modified Newton-Jarratt's composition, *Numer. Algor.* 55 (2010) 87–99.
- [6] V. Arroyo, A. Cordero, Juan R. Torregrosa, Approximation of artificial satellites' preliminary orbits: The efficiency challenge, *Mathematical and Computer Modelling* 54 (2011) 1802-1807.
- [7] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, *Applied Mathematics Letters* 13 (8) (2000) 87-93.
- [8] A.Y. Özban, Some new variants of Newton's method, *Appl. Math. Lett.* 17 (2004) 677–682.
- [9] J. Gerlach, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Rev.* 36 (2) (1994) 272–276.
- [10] X. Sun, Yuanfa Ji, Huli Shi, Yingchun Li, Evaluation of Two Methods for Three Satellites Position of GPS With Altimeter Aiding, 5th International Conference on Information Technology and Applications (ICITA 2008), 667-670.
- [11] A. Cordero, J.R. Torregrosa, Variants of Newton's method for functions of several variables, *Appl. Math. Comput.* 183 (2006) 199–208.
- [12] A. Cordero, J.R. Torregrosa, Variants of Newton's Method using fifth-order quadrature formulas, *Applied Mathematics and Computation* 190 (2007) 686–698.
- [13] M. Frontini, E. Sormani, Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 149 (2004) 771–782.
- [14] A. Cordero, J.R. Torregrosa, On interpolation variants of Newton's method for functions of several variables, *J. Comput. Appl. Math.* 234 (2010) 34–43.

- [15] M.T. Darvishi, A. Barati, A fourth-order method from quadrature formulae to solve systems of nonlinear equations *Appl. Math. Comput.* 188 (1) (2007) 257–261.
- [16] M.T. Darvishi, Some three-step iterative methods free from second order derivative for finding solutions of systems of nonlinear equations, *Int. J. Pure Appl. Math.* 57 (4) (2009) 557–573.
- [17] G. Adomian, *Solving Frontier Problem of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers., Dordrecht, 1994.
- [18] D.K.R. Babajee, M.Z. Dauhoo, M.T. Darvishi, A. Barati, A note on the local convergence of iterative methods based on Adomian decomposition method and 3-node quadrature rule, *Appl. Math. Comput.* 200 (1) (2008) 452–458.
- [19] M.T. Darvishi, A. Barati, A third-order Newton-type method to solve systems of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 187 (2007) 630–635.
- [20] M.T. Darvishi, A. Barati, Super cubic iterative methods to solve systems of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 188 (2007) 1678–1685.
- [21] D.K.R. Babajee, M.Z. Dauhoo, M.T. Darvishi, A. Karami, A. Barati, Analysis of two Chebyshev-like third order methods free from second derivatives for solving systems of nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* 233 (8) (2010) 2002–2012.
- [22] A. Cordero, J.R. Torregrosa, M. P. Vassileva, Pseudocomposition: A technique to design predictor-corrector methods for systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 11496–11504.
- [23] H.T. Kung, J.F. Traub, Optimal order of one-point and multi-point iterations, *J. Assoc. Comput. Math.* 21 (1974) 643–651.
- [24] P. Jarrat, Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations, *Math. Comput.* 20 (1966) 434–437.
- [25] R.F. King, A family of fourth order methods for nonlinear equations, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 10 (1973) 876–879.
- [26] J. R. Sharma, R. Kumar Guha, R. Sharma, An efficient fourth order weighted-Newton method for systems of nonlinear equations. *Numer. Algor.* 62 (2013) 307–323.

A. Artículos

Hemos enviado un artículo relativo a este tema a la prestigiosa revista *Abstract and Applied Analysis*, indexada en *Journal Citation Reports*, en la posición 43 de 245 en la categoría de Matemática Aplicada, y cuyo contenido es el siguiente.

Fourth and fifth-order methods for solving nonlinear systems of equations. Application to the Global Positioning System

Manuel F. Abad, Alicia Cordero, and Juan R. Torregrosa

Instituto de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València
Camino de Vera s/n, 40022 Valencia, Spain
maabrod@mat.upv.es, acordero@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es

Abstract

In this paper, two iterative methods of order four and five, respectively, are presented for solving nonlinear systems of equations. Numerical comparisons are made with other existing second and fourth-order schemes to solve the nonlinear system of equations of the *Global Positioning System* and some academic nonlinear systems.

keywords: Nonlinear systems, Iterative methods, Jacobian matrix, Convergence order, Efficiency index, Global Positioning System

1 Introduction

The search for solutions of nonlinear systems of equations is an old and difficult problem with wide applications in sciences and engineering. The best known method, for being very simple and effective, is the Newton's method. Its generalization to a system of equations was proposed by Ostrowski [1] and to Banach spaces by Kantorovic [2]. In the literature, several modifications have been made on classical methods in order to accelerate the convergence or to reduce the number of operations and evaluations of functions in each step of the iterative process. The extension of the variants of Newton's method described by Weerakoon and Fernando in [3], by Özban in [4] and Gerlach in [5], to the functions of several variables have been developed in [6, 7, 8, 9]. In [6, 7] families of variants of Newton's method of third-order have been designed by using open and closed formulas of quadrature, including the families of the methods defined by Frontini et al. in [8]. Using the generic formula of the interpolatory quadrature, in [9] a family of methods is obtained with order of convergence $2d + 1$, under certain conditions, where d is the order up to which the partial derivatives of each coordinate function evaluated in the solution are canceled. Indeed, Darvishi et al. improved in [10] the method from Frontini et al., getting a fourth-order scheme. In addition to multi-step methods based on interpolatory quadrature, other schemes have been developed by using different techniques, as extension to several variables of one-dimensional schemes (see [11]), Adomian decomposition (see [12, 13], for example), the one proposed by Darvishi and Barati in [14, 15] with super cubic convergence and the methods proposed by Cordero et al. in [16] with orders of convergence four and five. Another procedure to develop iterative methods for nonlinear systems is the replacement of the second derivative by some approximation. In [17], Traub presented a family of multi-point methods based on approximating the second derivative that appears in the iterative formula of Chebyshev's scheme and, more recently, Babajee et al. in [18] designed two Chebyshev-like methods free from second derivatives. Recently, Sharma et al. [19] designed a fourth-order scheme by using weight-function technique. Another well known acceleration technique is the composition of two iterative methods of orders p_1 and p_2 , respectively, obtaining a method of order $p_1 p_2$ (see [17]). New evaluations of the Jacobian matrix and the nonlinear function are usually needed in order to increase the order of convergence.

Now, we are going to introduce the problem and some necessary concepts in order to develop the modified methods and to analyze their convergence. Let us consider the problem of finding a real zero of a function $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, that is, a solution $\bar{x} \in D$ of the nonlinear system $F(x) = 0$ of n equations with n unknowns. The best known iterative method is the classical Newton's method given by

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

where $F'(x^{(k)})$ is the Jacobian matrix of the function F evaluated in the k th iteration $x^{(k)}$. Traub, in [17], introduced a variant of Newton's method of convergence order three. We are going to describe it because our methods combine Traub with Newton's method. Traub's scheme consists of the composition of Newton's method with itself but with a frozen Jacobian matrix, its iterative expression is

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}(F(x^{(k)}) + F(y^{(k)})), \quad k = 0, 1, \dots,$$

where $y^{(k)}$ is the k th iteration of the Newton's method.

On the other hand, recently Sharma et al. in [19] have developed a fourth order method for solving nonlinear systems of equations. The algorithm is composed of two weighted-Newton steps and is given by

$$y^{(k)} = x^{(k)} - \frac{2}{3}F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}),$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2}\left[-I + \frac{9}{4}F'(y^{(k)})^{-1}F'(x^{(k)}) + \frac{3}{4}F'(x^{(k)})^{-1}F'(y^{(k)})\right]F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

In the following, we remember some known notions and results that we need in order to analyze the convergence of the new methods. Let $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be sufficiently Frechet differentiable in D . By using the notation introduced in [20], the q th derivative of F at $u \in \mathbb{R}^n$, $q \geq 1$ is the q -linear function $F^{(q)}(u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that $F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^n$. It is easy to observe that

1. $F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \dots, v_{q-1}, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,
2. $F^{(q)}(u)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \dots, v_q)$ for all permutation σ of $\{1, 2, \dots, q\}$,

where $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ is the set of lineal operators of \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n .

From the above properties we can use the following notation:

1. $F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \dots, v_q) = F^{(q)}(u)v_1 \cdot \dots \cdot v_q$,
2. $F^{(q)}(u)v^{q-1}F^{(p)}v^p = F^{(q)}(u)F^{(p)}(u)v^{q+p-1}$.

On the other hand, for $\bar{x} + h \in \mathbb{R}^n$ lying in a neighborhood of a solution \bar{x} of $F(x) = 0$ we can apply Taylor's expansion and assuming that the Jacobian matrix $F'(\bar{x})$ is nonsingular, we have

$$F(\bar{x} + h) = F'(\bar{x}) \left[h + \sum_{q=2}^{p-1} C_q h^q \right] + O(h^p),$$

where $C_q = (1/q!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(q)}(\bar{x})$, $q \geq 2$. We observe that $C_q h^q \in \mathbb{R}^n$ since $F^{(q)}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $[F'(\bar{x})]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

In addition, we can express F' as

$$F'(\bar{x} + h) = F'(\bar{x}) \left[I + \sum_{q=2}^{p-1} qC_q h^{q-1} \right] + O(h^p) = F'(\bar{x})D(h) + O(h^p),$$

where I is the identity matrix. Therefore, $qC_q h^{q-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. From the previous equation we obtain

$$[F'(\bar{x} + h)]^{-1} = D(h)^{-1}[F'(\bar{x})]^{-1} + O(h^p).$$

Then, if the inverse of $D(h)$ is

$$D(h)^{-1} = I + X_2 h + X_3 h^2 + X_4 h^3 + \dots,$$

provided that X_i , $i = 2, 3, \dots$ verify

$$D(h)D(h)^{-1} = D(h)^{-1}D(h) = I. \tag{1}$$

Solving the system involved in (1) we have that

$$\begin{aligned} X_2 &= -2C_2, \\ X_3 &= 4C_2^2 - 3C_3, \\ X_4 &= -8C_2^3 + 6C_2C_3 + 6C_3C_2 - 4C_4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

We denote $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$ the error in the k th iteration. The equation

$$e^{(k+1)} = Le^{(k)p} + O(e^{(k)p+1}),$$

where L is a p -linear function $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, is called the *error equation* and p is the *order of convergence*. Observe that $e^{(k)p}$ is $(e^{(k)}, e^{(k)}, \dots, e^{(k)})$.

In [7] it was introduced the concept of *computational order of convergence*, as follows

Definition 1.1 *Let \bar{x} be a zero of a function F and suppose that $x^{(k-1)}$, $x^{(k)}$, and $x^{(k+1)}$ are three consecutive iterations close to \bar{x} . Then, the computational order of convergence p , can be approximated using the formula*

$$p \approx ACOC = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|/\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|/\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|)}.$$

In addition, in order to compare different methods, we use the *efficiency index*, $I = p^{1/d}$, where p is the order of convergence and d is the total number of new functional evaluations (per iteration) required by the method. This is the most used index, but not the only one. In [17] Traub use a *computational index* defined as $CI = p^{1/op}$, where op is the number of products/quotients per iteration. We recall that the number of products and quotients that we need for solving m linear systems with the same matrix of coefficients, by using LU factorization, is

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n,$$

where n is the size of each system. We will use these indices in order to compare the different iterative methods. Kung and Traub in [21] conjectured that the order of convergence of any multipoint method without memory for solving nonlinear equations cannot exceed the bound 2^{d-1} , (called the *optimal order*). Ostrowski's method [1], Jarrat's scheme [22] and King's procedure [23] are some of optimal one-dimensional fourth order methods. We have adapted the definition of optimal order of convergence to the case of iterative methods to solve nonlinear systems. The extension to several variables of the conjecture of Kung and Traub could be done in the following way [24]:

Conjecture 1.1 *Given a multipoint iterative method to solve nonlinear systems of equations which requires $d = k_1 + k_2$ functional evaluations per step such that k_1 of them correspond to the functional evaluations of the Jacobian matrix and k_2 to evaluations of the nonlinear function. We conjecture that the optimal order for this method is $2^{k_1+k_2-1}$ if $k_1 \leq k_2$.*

In this paper we propose two new and competitive iterative methods of orders four and five respectively that improve other known methods.

The rest of this paper is organized as follows: in Section 2 we make an introduction to the Global Positioning System (GPS), focusing on the way that the receiver calculates the user position using the ephemeris data of the artificial satellites. In Section 3 we present our new iterative methods, analyze its convergence order and by using the idea of a technique presented in [25], it is also proved that, in general, if we combine two methods of orders p and q respectively, with $p \geq q$, in the same way that we do it in our method of order five, the order of convergence of the resultant method is $p+q$. In Section 4 we show an application of this analysis in order to solve the nonlinear system of the GPS and several academic nonlinear systems of equations. It is established a comparison among the new methods and Newton and Sharma's methods in terms of convergence order, approximated computational convergence order (ACOC), and computational and efficiency indices, CI and I, respectively.

2 Basic GPS concepts

This section introduces the basic concept of how a GPS receiver determines its position. From the satellite constellation, the equations required for solving the user position conform a nonlinear system of equations. In addition, some practical considerations, (i.e. the inaccuracy of the user clock) will be included in these equations. These equations are usually solved through a linearization and a fixed point iteration method. The obtained solution is in a Cartesian coordinate system and after that the result will be converted into a spherical coordinate system. However, the Earth is not a perfect sphere; therefore, once the user position is estimated, the shape of the Earth must be taken into consideration. The user position is then translated into the Earth-based coordinate system. In this paper we are going to focus our attention in solving the nonlinear system of equations of the GPS giving the results in a Cartesian coordinate system. We can find further information about GPS in [26].

2.1 Basic GPS concept

The position of a point in space can be found from distance measured from this point to some known position in space. We are going to use an example to illustrate this point.

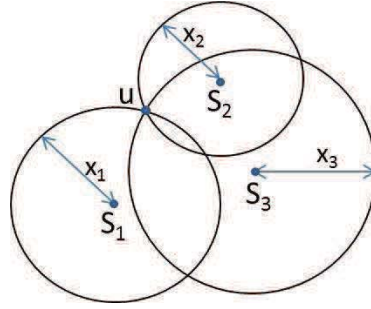


Figure 1: Two-dimensional user position

Figure 1 shows a two-dimensional case. In order to determine the user position U , three satellites S_1 , S_2 and S_3 and three distances are required. The trace of a point with constant distance to a fixed point is a circle in the two-dimensional case. Two satellites and two distances give two possible solutions because two circles intersect at two points. A third circle is needed to uniquely determine the user position. For similar reasons in a three-dimensional case four satellites and four distances are needed. The equal-distance trace to a fixed point is a sphere in a three-dimensional case. Two spheres intersect to make a circle. This circle intersects another sphere and this intersection produces two points. In order to determine which point is the user position, one more satellite should be needed. In GPS the position of the satellite is known from the ephemeris data transmitted by the satellite. By measuring the distance from the receiver to the satellite the position of the receiver can be determined. In the above discussion, the distance measured from the user to the satellite is assumed to be very accurate and there is no bias error. However, the distance measured between the receiver and the satellite has a constant unknown bias, because the user clock usually is different from the GPS clock. In order to solve this bias error one more satellite is required. Therefore, in order to find the user position five satellites are needed. If one uses four satellites and the measured distance with bias error to measure a user position, two possible solutions can be obtained. Theoretically, one cannot determine the user position. However, one of the solutions is close to the Earth's surface and the other one is in the space. In fact, as we will see in Section 4, in this memory we have used four satellites and sometimes we have found the solution in the space. Since the user position is usually close to the surface of the earth, it can be uniquely determined. Therefore, the general statement is that four satellites can be used to determine a user position, even though the distance measured has a bias error. The method of solving the user position discussed in the next subsections is through iteration. The initial position is often selected at the center of the earth. The iteration method will converge on the correct solution rather than the one in space if there is not a bad conditioning of the matrices appearing in the linear systems involved in the iterative process. In the following discussion four satellites are considered as the minimum number required for finding the user position.

2.2 Basic equations for finding user position

In this section the basic equations for determining the user position will be presented. Assume that the distance measured is accurate and under this condition three satellites should be sufficient. Let us suppose that there are three known points at locations r_1 or (x_1, y_1, z_1) , r_2 or (x_2, y_2, z_2) and r_3 or (x_3, y_3, z_3) , and an unknown point at r_u or (x_u, y_u, z_u) . If the distances between the three known points to the unknown point can be measured as ρ_1 , ρ_2 , and ρ_3 , these distances can be written as

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2}, \\ \rho_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2}, \\ \rho_3 &= \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2}.\end{aligned}\tag{2}$$

Because there are three unknown and three equations, the values of x_u , y_u and z_u can be determined from these equations. Theoretically, there should be two sets of solutions as they are second-order equations. These equations can be solved linearizing them and an making an iterative approach. The solution of these equations will be discussed later in Section 2.5. In GPS operation, the positions of the satellites are given. This information can

be obtained from the data transmitted from the satellites. The distances from the user (the unknown position) to the satellites must be measured simultaneously at a certain time instance. Each satellite transmits a signal with a time reference associated with it. By measuring the time of the signal traveling from the satellite to the user the distance between the user and the satellite can be found. The distance measurement is discussed in the next section.

2.3 Measurement of pseudorange

Every satellite sends a signal at a certain time t_{si} . The receiver will receive the signal at a later time t_u . The distance between the user and the satellite i can be determined as

$$\rho_{iT} = c(t_u - t_{si}),$$

where c is the speed of light, ρ_{iT} is often referred to as the true value of pseudorange from user to satellite i , t_{si} is referred to as the true time of transmission from satellite i , and t_u is the true time of reception. From a practical point of view it is difficult, if not impossible, to obtain the correct time from the satellite or the user. The actual satellite clock time t'_{si} and actual user clock time t'_u are related to the true time as

$$t'_{si} = t_{si} + \Delta b_i, \quad t'_u = t_u + b_{ut},$$

where Δb_i is the satellite clock error, and b_{ut} is the user clock bias error. Besides the clock error, there are other factors affecting the pseudorange measurement. The measured pseudorange ρ_i can be written as

$$\rho_i = \rho_{iT} + \Delta D_i - c(\Delta b_i - b_{ut}) + c(\Delta T_i + \Delta I_i + v_i + \Delta v_i),$$

where ΔD_i is the satellite position error effect on range, ΔT_i is the tropospheric delay error, ΔI_i is the ionospheric delay error, v_i is the receiver measurement noise error, and Δv_i is the relativistic time correction. Some of these errors can be corrected; for example, the tropospheric delay can be modeled and the ionospheric error can be corrected in a two-frequency receiver. The errors will cause inaccuracy of the user position. However, the user clock error cannot be corrected through receiver information. Thus, it will remain as an unknown. So, the system of equations (2) must be modified as

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} + b_u, \\ \rho_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} + b_u, \\ \rho_3 &= \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2} + b_u, \\ \rho_4 &= \sqrt{(x_4 - x_u)^2 + (y_4 - y_u)^2 + (z_4 - z_u)^2} + b_u, \end{aligned} \quad (3)$$

where b_u is the user clock bias error expressed in distance, which is related to the quantity b_{ut} by $b_u = cb_{ut}$. In system of equations (3), four equations are needed to solve for four unknowns x_u , y_u , z_u and b_u . Thus, in a GPS receiver, a minimum of four satellites is required to solve the user position.

2.4 Solution of user position from pseudoranges

One common way to solve the system of equations (3) is to linearize them. The system can be written in a simplified form as

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} + b_u, \quad (4)$$

with $i = 1, 2, 3, 4$ and x_u , y_u , z_u and b_u are the unknowns. The pseudorange ρ_i and the positions of the satellites x_i , y_i , z_i are known. By differentiating (4),

$$\begin{aligned} \delta \rho_i &= \frac{(x_i - x_u)\delta x_u + (y_i - y_u)\delta y_u + (z_i - z_u)\delta z_u}{\sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2}} + \delta b_u \\ &= \frac{(x_i - x_u)\delta x_u + (y_i - y_u)\delta y_u + (z_i - z_u)\delta z_u}{\rho_i - b_u} + \delta b_u. \end{aligned} \quad (5)$$

In (5) δx_u , δy_u , δz_u , and δb_u can be considered as the only unknowns. The quantities x_u , y_u , z_u and b_u are treated as known values because one can assume some initial values for these quantities. From these initial values a new set of δx_u , δy_u , δz_u , and δb_u can be calculated. These values are used to modify the original x_u , y_u , z_u and b_u to

find another new set of solutions. This new set of x_u, y_u, z_u and b_u can be considered again as known quantities. This process continues until the absolute values of $\delta x_u, \delta y_u, \delta z_u,$ and δb_u are very small and within a certain predetermined limit. The final values of x_u, y_u, z_u and b_u are the desired solution. This method is often referred to as an iteration method of fixed point. With $\delta x_u, \delta y_u, \delta z_u,$ and δb_u as unknowns, the above equation becomes a set of linear equations. This procedure is often referred to as linearization. The expression (5) can be written in matrix form as

$$\begin{bmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \delta\rho_3 \\ \delta\rho_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_u \\ \delta y_u \\ \delta z_u \\ \delta b_u \end{bmatrix}, \quad (6)$$

where

$$\alpha_{i1} = \frac{x_i - x_u}{\rho_i - b_u}, \quad \alpha_{i2} = \frac{y_i - y_u}{\rho_i - b_u}, \quad \alpha_{i3} = \frac{z_i - z_u}{\rho_i - b_u}.$$

The solution of (6) is

$$\begin{bmatrix} \delta x_u \\ \delta y_u \\ \delta z_u \\ \delta b_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \delta\rho_3 \\ \delta\rho_4 \end{bmatrix}.$$

This process obviously does not provide the needed solutions directly. However, the desired solutions can be obtained from it. In order to find the desired position solution, this procedure must be used repetitively in an iterative way. A quantity is often used to determine whether the desired result is reached and this quantity can be defined as

$$\delta v = \sqrt{\delta x_u^2 + \delta y_u^2 + \delta z_u^2 + \delta b_u^2}. \quad (7)$$

When δv is less than a certain predetermined threshold, the iteration will stop. Sometimes, the clock bias b_u is not included in (7). In this paper we use as stopping criterion the quantity $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|F(x^{(k+1)})\|$ because it is stronger than (7). As we can verify in [27], the above iterative method used to calculate via software the receiver position in the GPS is the Newton's method, a well known method of second-order of convergence. In this work we improve the GPS software by means of two methods of order four and five respectively, that converge to the solution with less number of iterations and better I, CI or ACOC than Newton scheme.

3 Description of the methods and convergence analysis

3.1 A fourth-order method

In this section we display a new method used to solve nonlinear systems that we call M4, and obtained by combining Newton and Traub's method. Its iterative expression is

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}(F(x^{(k)}) + F(y^{(k)})), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [F'(z^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (8)$$

where $y^{(k)}$ is the k th iteration of the Newton method. In the next result we are going to prove that the convergence order of the method is four.

Theorem 3.1 *Let $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, be sufficiently differentiable at each point of an open neighborhood D of $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, that is a solution of the nonlinear system $F(x) = 0$. Let us suppose that $F'(x)$ is continuous and nonsingular in \bar{x} . Then the sequence $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ obtained using the iterative expression (8) converges to \bar{x} with order four. The error equation is*

$$e^{(k+1)} = -C_2^3 e^{(k)4} + O(e^{(k)5}),$$

where $C_k = (1/k!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(k)}(\bar{x})$, $k = 2, 3, \dots$, and $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$.

Proof: Taylor expansion of $F(x^{(k)})$ and $F'(x^{(k)})$ around \bar{x} gives

$$\begin{aligned} F(x^{(k)}) &= F'(\bar{x})[e^{(k)} + C_2 e^{(k)2} + C_3 e^{(k)3} + C_4 e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}), \\ F'(x^{(k)}) &= F'(\bar{x})[I + 2C_2 e^{(k)} + 3C_3 e^{(k)2} + 4C_4 e^{(k)3} + 5C_5 e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}), \end{aligned} \quad (9)$$

where $C_k = (1/k!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(k)}(\bar{x})$, $k = 2, 3, \dots$, and $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$. From (9) we obtain

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = [I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)^2} + X_4e^{(k)^3}][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)^4}),$$

where $X_2 = -2C_2$, $X_3 = 4C_2^2 - 3C_3$ and $X_4 = -8C_2^3 + 6C_2C_3 + 6C_3C_2 - 4C_4$. Taylor's expansion of $y^{(k)}$ is

$$y^{(k)} - \bar{x} = C_2e^{(k)^2} + (2C_3 - 2C_2^2)e^{(k)^3} + (4C_2^3 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4)e^{(k)^4} + O(e^{(k)^5}). \quad (10)$$

On the other hand, we have that

$$F(y^{(k)}) = F'(\bar{x})[(y^{(k)} - \bar{x}) + C_2(y^{(k)} - \bar{x})^2] + O(e^{(k)^5}),$$

and operating we get

$$F(y^{(k)}) = F'(\bar{x})[C_2e^{(k)^2} + (2C_3 - 2C_2^2)e^{(k)^3} + (5C_2^3 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4)e^{(k)^4}] + O(e^{(k)^5}).$$

Analogously, we obtain the expression of $z^{(k)} - \bar{x}$. Given that the k th iteration of Traub's scheme is

$$z^{(k)} = y^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}),$$

then

$$z^{(k)} - \bar{x} = 2C_2^2e^{(k)^3} + (-9C_2^3 + 4C_2C_3 + 3C_3C_2)e^{(k)^4} + O(e^{(k)^5}). \quad (11)$$

Besides, the expression of $F'(z^{(k)})$ is

$$F'(z^{(k)}) = F'(\bar{x})[I + 2C_2(z^{(k)} - \bar{x})] + O(e^{(k)^5}),$$

or, equivalently from (11)

$$F'(z^{(k)}) = F'(\bar{x})[I + 4C_2^3e^{(k)^3} + (-18C_2^4 + 8C_2^2C_3 + 6C_2C_3C_2)e^{(k)^4}] + O(e^{(k)^5}).$$

So,

$$[F'(z^{(k)})]^{-1} = [I + W_2e^{(k)} + W_3e^{(k)^2} + W_4e^{(k)^3} + W_5e^{(k)^4}][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)^5}),$$

and provided that $[F'(z^{(k)})]^{-1}F'(z^{(k)}) = I$, solving the linear system of equations involved we have $W_2 = W_3 = 0$, $W_4 = -4C_2^3$ and $W_5 = 18C_2^4 - 8C_2^2C_3 - 6C_2C_3C_2$, so,

$$[F'(z^{(k)})]^{-1} = [I - 4C_2^3e^{(k)^3} + (18C_2^4 - 8C_2^2C_3 - 6C_2C_3C_2)e^{(k)^4}][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)^5}).$$

Then,

$$[F'(z^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}) = C_2e^{(k)^2} + 2(C_3 - C_2^2)e^{(k)^3} + (5C_2^3 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4)e^{(k)^4} + O(e^{(k)^5}). \quad (12)$$

Finally, by replacing (10) and (12) in the iterative expression (8) we obtain the error equation

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \bar{x} = y^{(k)} - \bar{x} - [F'(z^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}) = -C_2^3e^{(k)^4} + O(e^{(k)^5}),$$

and the proof of the theorem is completed. \square

3.2 A fifth-order method

In this section we show a new method used to solve nonlinear systems that we call M5, which is obtained by combining again Newton and the Traub's method but in a different way. Its iterative expression is

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}(F(x^{(k)}) + F(y^{(k)})), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \end{aligned} \quad (13)$$

where $y^{(k)}$ is the k th iteration of Newton's method. We prove in the next result that the convergence order of this method is five.

Theorem 3.2 Let $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, be sufficiently differentiable at each point of an open neighborhood D of $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, that is a solution of the nonlinear system $F(x) = 0$. Let us suppose that $F'(x)$ is continuous and nonsingular in \bar{x} . Then the sequence $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ obtained using the iterative expression (13) converges to \bar{x} with order five. The error equation is

$$e^{(k+1)} = 4C_2^4 e^{(k)5} + O(e^{(k)6}),$$

where $C_k = (1/k!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(k)}(\bar{x})$, $k = 2, 3, \dots$, and $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$.

Proof: Following the procedure used in Theorem 3.1, we have that

$$\begin{aligned} F(y^{(k)}) &= F'(\bar{x})[C_2 e^{(k)2} + (2C_3 - 2C_2^2)e^{(k)3} \\ &+ (5C_3^3 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4)e^{(k)4} + (-6C_3^2 - 12C_2^4 + 10C_2^2C_3 \\ &+ 8C_2C_3C_2 + 6C_3C_2^2 - 6C_2C_4 - 4C_4C_2 + 4C_5)e^{(k)5}] + O(e^{(k)6}), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} z^{(k)} - \bar{x} &= 2C_2^2 e^{(k)3} + (-9C_2^3 + 4C_2C_3 + 3C_3C_2)e^{(k)4} \\ &+ (30C_2^4 - 18C_2^2C_3 + 6C_3^2 - 12C_3C_2^2 - 14C_2C_3C_2 \\ &+ 6C_2C_4 + 4C_4C_2)e^{(k)5} + O(e^{(k)6}). \end{aligned} \quad (14)$$

On the other hand,

$$F(z^{(k)}) = F'(\bar{x})[(z^{(k)} - \bar{x})] + O(e^{(k)4})$$

and,

$$[F'(y^{(k)})]^{-1} = [I + X_2(y^{(k)} - \bar{x}) + X_3(y^{(k)} - \bar{x})^2][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)5}). \quad (15)$$

Finally, by replacing (14) and (15) in the iterative expression (13) we obtain the error equation

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \bar{x} = z^{(k)} - \bar{x} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}) = 4C_2^4 e^{(k)5} + O(e^{(k)6})$$

and the proof of the theorem is completed. \square

3.3 Pseudocomposition

In [25] it was introduced a technique called *pseudocomposition* that uses a known method as a predictor and the Gaussian quadrature as a corrector. The order of convergence of the resulting scheme depends, among other factors, on the order of the last two steps of the predictor. Following this idea we generalize the procedure used to design method M5.

Then, we can establish the next result.

Theorem 3.3 Let $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, be sufficiently differentiable at each point of an open neighborhood D of $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, that is a solution of the nonlinear system $F(x) = 0$. Let us suppose that $F'(x)$ is continuous and nonsingular in \bar{x} . Let $y^{(k)}$ be the k th iteration of an iterative method of order q and $z^{(k)}$ the k th iteration of an iterative method of order p , with $p \geq q$. The sequence $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ obtained by the iterative expression

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \quad (16)$$

converges to \bar{x} with order of convergence $p + q$.

Proof: Taylor's expansions of $y^{(k)}$ and $z^{(k)}$ are

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \bar{x} + M_1 e^{(k)q} + M_2 e^{(k)q+1} + \dots + M_{p+1} e^{(k)q+p} + O(e^{(k)p+q+1}), \\ z^{(k)} &= \bar{x} + N_1 e^{(k)p} + N_2 e^{(k)p+1} + \dots + N_{q+1} e^{(k)p+q} + O(e^{(k)p+q+1}). \end{aligned} \quad (17)$$

Taylor's expansion of $F(z^{(k)})$ around \bar{x} gives

$$\begin{aligned} F(z^{(k)}) &= F'(\bar{x})[z^{(k)} - \bar{x} + C_2(z^{(k)} - \bar{x})^2] + O(e^{(k)2(p+q)+1}) \\ &= F'(\bar{x})[N_1 e^{(k)p} + N_2 e^{(k)p+1} + \dots + N_{q+1} e^{(k)p+q} \\ &+ C_2(N_1 e^{(k)p} + N_2 e^{(k)p+1} + \dots + N_{q+1} e^{(k)p+q})^2] + O(e^{(k)2(p+q)+1}), \end{aligned} \quad (18)$$

where $C_k = (1/k!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(k)}(\bar{x})$, $k = 2, 3, \dots$, and $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$. On the other hand, we have that

$$\begin{aligned} [F'(y^{(k)})]^{-1} &= [I + X_2(y^{(k)} - \bar{x}) + X_3(y^{(k)} - \bar{x})^2][F'(\bar{x})]^{-1} + O(e^{(k)2q+1}) \\ &= [I + X_2(M_1e^{(k)q} + M_2e^{(k)q+1} + \dots + M_{p+1}e^{(k)q+p}) + X_3(R_1e^{(k)2q} + \dots)][F'(\bar{x})]^{-1} \\ &\quad + O(e^{(k)m}), \end{aligned} \quad (19)$$

where $X_2 = -2C_2$ and $m = \min\{p + q + 1, 2q + 1\} = p + q + 1$. Finally, by replacing (17), (18) and (19) in the iterative expression (16) we obtain the error equation

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \bar{x} = z^{(k)} - \bar{x} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}) = -X_2M_1N_1e^{(k)p+q} + O(e^{(k)p+q+1}),$$

then the convergence order of the method that results from this combination of a method of order q with another of order p with $p \geq q$ is $p + q$. \square

4 Numerical results

Numerical computations have been carried out using variable precision arithmetic, with 2000 digits of mantissa, in MATLAB 7.1. The stopping criterion has been $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-250}$, therefore we check that the iterate sequence converges to an approximation of the solution of the nonlinear system. For every method, we count the number of iterations needed to reach the wished tolerance, we calculate the approximated computational order of convergence *ACOC*, the efficiency index *I*, the computational index *CI*, and an error estimation made with the last values of $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ and $\|F(x^{(k+1)})\|$.

4.1 Numerical results obtained with academic nonlinear systems

Now, we are going to compare M4, M5, Newton (N) and Sharma (S) schemes with some nonlinear academic systems in order to prove the effectiveness and the computational order of convergence of the methods developed in this work. The test systems used are:

- (a) $F(x_1, x_2) = (\exp(x_1^2) - \exp(\sqrt{2}x_1), x_1 - x_2)$, $\bar{x} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$.
- (b) $F(x_1, x_2) = (x_1 + \exp(x_2) - \cos(x_2), 3x_1 - x_2 - \sin(x_2))$, $\bar{x} = (0, 0)^T$.
- (c) $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, where $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ and $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ such that

$$f_i(x) = x_i x_{i+1} - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$f_n(x) = x_n x_1 - 1.$$

When n is odd the exact zeros of F are $\bar{x}_1 = (1, 1, \dots, 1)$ and $\bar{x}_2 = (-1, -1, \dots, -1)$.

In Table 1 we can find a comparative among the different numerical methods for the nonlinear systems (a), (b) and (c). As we can see, the approximated computational orders of convergence are the expected ones, and methods M4 and M5 are clearly very competitive in terms of error estimation.

The efficiency indices (*I*) and the computational indices (*CI*) of the different methods are:

$$\begin{aligned} I_N &= 2^{\frac{1}{n+n^2}} & I_S &= 4^{\frac{1}{n+2n^2}} & I_{M4} &= 4^{\frac{1}{2n+2n^2}} & I_{M5} &= 5^{\frac{1}{3n+2n^2}} \\ CI_N &= 2^{\frac{3}{2n^3+3n^2-n}} & CI_S &= 4^{\frac{3}{2n^3+15n^2-2n}} & CI_{M4} &= 4^{\frac{3}{2n^3+6n^2-2n}} & CI_{M5} &= 5^{\frac{3}{2n^3+6n^2-2n}} \end{aligned}$$

In Figures 2 and 3, we show these efficiency indices for $n = 2, 3, \dots, 10$. It can be concluded that our methods improve Sharma's scheme in terms of *CI*, although the classical efficiency of Sharma's procedure is better for $n \leq 6$. M4 and M5 are competitive, obtaining better error estimation than N and S, with the same number of iterations.

4.2 Numerical results for the GPS problem

In order to test the proposed schemes on the problem of a user position of a GPS device we have requested to the Cartographic Institute of Valencia to provide us data of known geocentric coordinates.

Concretely, the Cartographic Institute of Valencia provided us:

<i>Function</i>	$x^{(0)}$	<i>Method</i>	<i>Iter</i>	<i>ACOC</i>	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $
(a)	$(2, 2)^T$	<i>N</i>	13	2	0.163e-338	0
		<i>S</i>	7	4	0.962e-270	0
		<i>M4</i>	7	4	0.140e-805	0
		<i>M5</i>	7	5	0.893e-831	0
(b)	$(-0.1, -0.1)^T$	<i>N</i>	9	2	0.94e-307	0.28e-921
		<i>S</i>	5	4	0.53e-276	0.83e-1106
		<i>M4</i>	5	4	0.98e-300	0.32e-1801
		<i>M5</i>	5	5	0.435e-647	0.1e-3941
(c)	$(2, 2, \dots, 2)^T$	<i>N</i>	11	2	0.535e-488	0.286e-976
		<i>S</i>	6	4	0.113e-408	0.960e-1636
		<i>M4</i>	6	4	0.380e-704	0
$n = 99$		<i>M5</i>	6	5	0.122e-1201	0

Table 1: Comparative of the iterative methods with nonlinear systems (a) to (c)

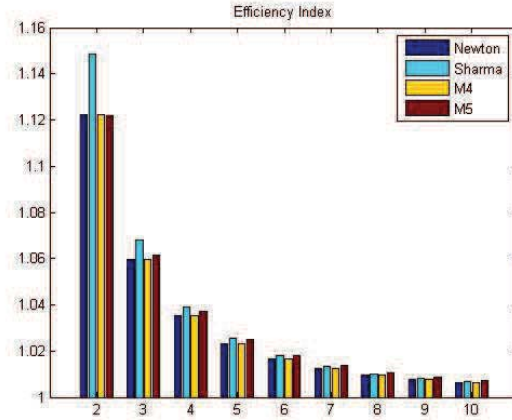


Figure 2: Comparative among the efficiency indices of the methods.

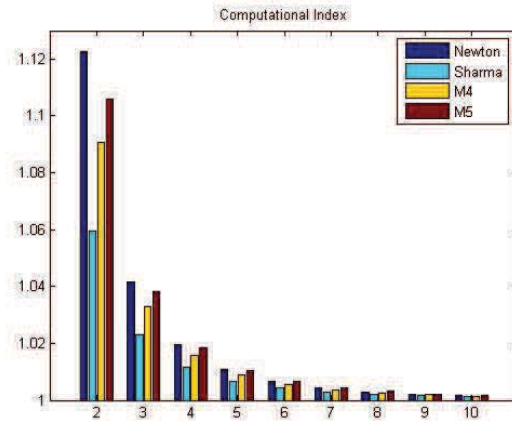


Figure 3: Comparative among the computational indices of the methods.

* An example of a fixed point GPS in the geocentric coordinates: $x = 4984687, 426$, $y = -41199, 155$, $z = 3966605, 952$. It is a point located in Alcoy (Alicante, Spain).

* Observations from that fixed point (file *.09o) for a day.

* Positions of the satellites for that day: *.09n and *.sp3 files.

- * Description of RINEX format (*.09o file): <http://www.igs.org/components/formats.html>
- * Description of the ephemeris file and satellite positions sp3: <http://igsb.jpl.nasa.gov/igsb/data/format/sp3c.txt>
- * Link to other libraries for analysis calculations: <http://www.ngs.noaa.gov/gps-toolbox/exist.htm>

With these data we obtain the positions of the visible satellites in the instant that corresponds to the provided data. With these coordinates we calculate the approximated pseudoranges for every satellite and then we are able to build the nonlinear system of equations of GPS (4) using four of the satellites, with which we check the iterative methods of Newton, Sharma, M4 and M5.

In Table 2 we can find a comparative among the iterative methods N, S, M4 and M5 for the nonlinear system of the GPS. We recall that the coordinates of the center of the Earth and $b_u = 0$, this is, $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$, are usually used as initial estimation. Despite this, we have also tested the methods with some other initial conditions. We denote $x^* \approx (4984687.426, -41199.155, 3966605.952, 0.116e - 8)^T$ as the Earth solution and $x^s \approx (-39720114.893, -16748760.539, -23938190.113, -0.159)^T$ as the exterior space solution.

<i>Method</i>	$x^{(0)}$	<i>Iter</i>	<i>ACOC</i>	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	\bar{x}
<i>N</i>	$(0, 0, 0, 0)^T$	12	2	0.6e-374	0.830e-739	x^*
<i>S</i>		7	4	0.173e-767	0.2e-1991	x^*
<i>M4</i>		7	4	0.823e-512	0.1e-1991	x^*
<i>M5</i>		7	5	0.222e-814	0.3e-1991	x^s
<i>N</i>	$(10^6, 10^6, 10^6, 10^6)^T$	15	2	0.421e-317	0.537e-627	x^s
<i>S</i>		8	4	0.739e-799	0.1e-1991	x^*
<i>M4</i>		7	4	0.191e-735	0	x^*
<i>M5</i>		8	5	0.104e-563	0.1e-1991	x^s
<i>N</i>	$(-10^4, -10^4, -10^4, -10^4)^T$	12	2	0.371e-381	0.317e-753	x^*
<i>S</i>		7	4	0.138e-784	0.3e-1991	x^*
<i>M4</i>		7	4	0.704e-520	0	x^*
<i>M5</i>		7	4.9968	0.510e-692	0.1e-1991	x^s

Table 2: Comparative of the iterative methods with the nonlinear system of equations of the GPS

As we can see, for this particular system of equations Newton's method does not converge to the users position for all the initial estimations, so does M5, but M4 is a good method in all senses, very competitive respect known methods.

5 Conclusions

In this paper we have gone in depth on an emerging line of investigation, the GPS receivers software improvement. Concretely, GPS receivers currently use Newton's method to solve the nonlinear system (4) and to calculate their exact position with the information obtained from signals received from the GPS constellation of satellites. We propose two different combinations of Newton method and Traub's methods, obtaining two methods of fourth (M4) and fifth-order (M5). Using the idea presented in [25], called *pseudocomposition*, it is proved that combining in a particular way two methods of order p and q respectively, with $p \geq q$, the order of convergence of the resulting scheme is $p + q$. We have numerically compared the different methods and we have concluded that M4 and M5 are very competitive in terms of the error estimation.

6 Acknowledgements

This research was supported by Ministerio de Ciencia y Tecnología MTM2011-28636-C02-02 and FONDOCYT 2011-1-B1-33 República Dominicana.

References

- [1] A.M. Ostrowski, "Solution of equations and systems of equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1964.

- [2] L.V. Kantorovic, "Functional Analysis and Applied Mathematics" (Russian), *Uspehi Mat. Nauk* vol. 3, pp. 89–185, 1948.
- [3] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, "A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence", *Applied Mathematics Letters*, vol. 13, no.8, pp. 87-93, 2000.
- [4] A.Y. Özban, "Some new variants of Newton's method", *Appl. Math. Lett.*, vol. 17, pp. 677–682, 2004.
- [5] J. Gerlach, "Accelerated convergence in Newton's method", *SIAM Rev.*, vol. 36, no.2, pp. 272–276, 1994.
- [6] A. Cordero, J.R. Torregrosa, "Variants of Newton's method for functions of several variables", *Appl. Math. Comput.*, vol. 183, pp. 199–208, 2006.
- [7] A. Cordero, J.R. Torregrosa, "Variants of Newton's Method using fifth-order quadrature formulas", *Applied Mathematics and Computation*, vol.190, pp. 686-698, 2007.
- [8] M. Frontini, E. Sormani, "Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations", *Appl. Math. Comput.*, vol. 149, pp. 771–782, 2004.
- [9] A. Cordero, J.R. Torregrosa, "On interpolation variants of Newton's method for functions of several variables", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 234, pp.34–43, 2010.
- [10] M.T. Darvishi, A. Barati, "A fourth-order method from quadrature formulae to solve systems of nonlinear equations", *Appl. Math. Comput.*, vol. 188, no.1, pp. 257–261, 2007.
- [11] M.T. Darvishi, "Some three-step iterative methods free from second order derivative for finding solutions of systems of nonlinear equations", *Int. J. Pure Appl. Math.*, vol. 57, no.4, pp. 557–573, 2009.
- [12] G. Adomian, "Solving Frontier Problem of Physics: The Decomposition Method", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [13] D.K.R. Babajee, M.Z. Dauhoo, M.T. Darvishi, A. Barati, "A note on the local convergence of iterative methods based on Adomian decomposition method and 3-node quadrature rule", *Appl. Math. Comput.*, vol. 200, no.1, pp. 452–458, 2008.
- [14] M.T. Darvishi, A. Barati, "A third-order Newton-type method to solve systems of nonlinear equations", *Appl. Math. Comput.*, vol. 187, pp. 630–635, 2007.
- [15] M.T. Darvishi, A. Barati, "Super cubic iterative methods to solve systems of nonlinear equations", *Appl. Math. Comput.*, vol. 188, pp. 1678–1685, 2007.
- [16] A. Cordero, E. Martínez, J.R. Torregrosa, "Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 231, pp.541–551, 2009.
- [17] J.F. Traub, "Iterative Methods for the Solution of Equations", Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- [18] D.K.R. Babajee, M.Z. Dauhoo, M.T. Darvishi, A. Karami, A. Barati, "Analysis of two Chebyshev-like third order methods free from second derivatives for solving systems of nonlinear equations", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 233, no.8, pp. 2002–2012, 2010.
- [19] J. R. Sharma, R. Kumar Guha, Rajni Sharma, "An efficient fourth order weighted-Newton method for systems of nonlinear equations", *Numer. Algor.*, vol. 62, pp. 307–323, 2013.
- [20] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, "A modified Newton Jarratt's composition", *Numer. Algor.*, vol. 55, pp. 87–99, 2010.
- [21] H.T. Kung, J.F. Traub, "Optimal order of one-point and multi-point iterations", *J. Assoc. Comput. Math.*, vol. 21, pp. 643-651, 1974.
- [22] P. Jarrat, "Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations", *Math. Comput.*, vol. 20, pp. 434–437, 1966.
- [23] R.F. King, "A family of fourth order methods for nonlinear equations", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 10, pp. 876-879, 1973.

- [24] V. Arroyo, A. Cordero, Juan R. Torregrosa, "Approximation of artificial satellites' preliminary orbits: The efficiency challenge", *Mathematical and computer modelling*, vol. 54, pp.1802-1807, 2011.
- [25] A. Cordero, J.R. Torregrosa, María P. Vassileva, "Pseudocomposition: A technique to design predictor-corrector methods for systems of nonlinear equations", *Applied Mathematics and Computation*, vol.218, pp. 11496-11504, 2012.
- [26] J. Bao-Yen Tsui, "Fundamentals of Global Positioning System Receivers, a Software Approach", Wiley Interscience, 2005.
- [27] X. Sun, Yuanfa Ji, Huli Shi, Yingchun Li, "Evaluation of Two Methods for Three Satellites Position of GPS With Altimeter Aiding", *5th International Conference on Information Technology and Applications (ICITA 2008)*, pp. 667-670.