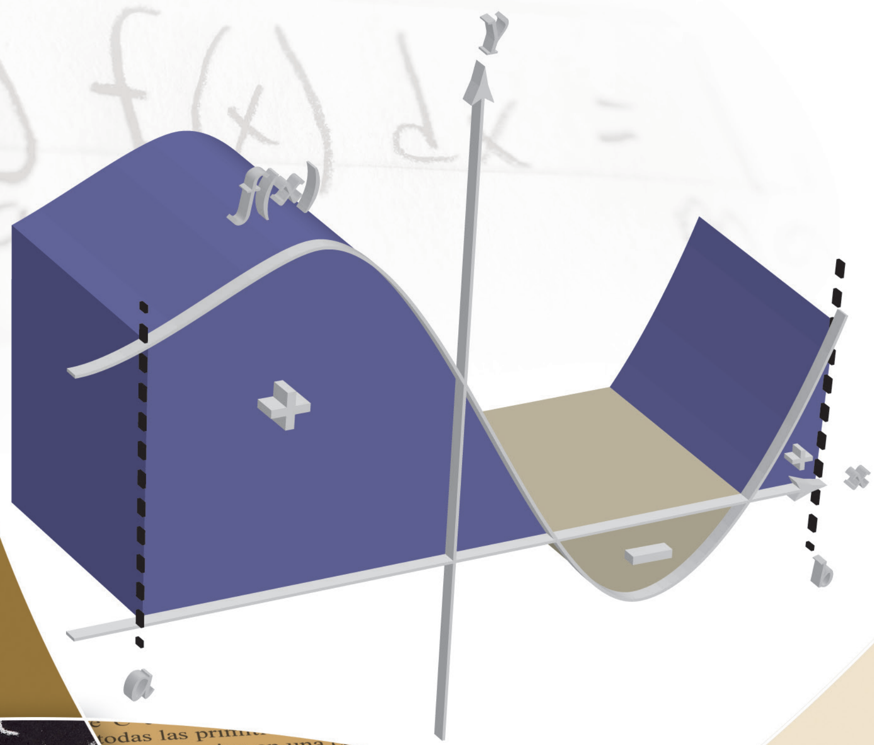
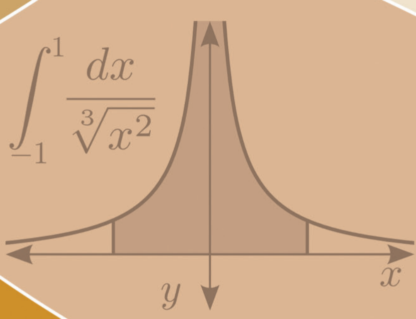
académica

Introducción al Cálculo integral

Emilio Defez Candel
Vicente Soler Basauri





EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Vicente Soler Basauri
Emilio Defez Candel

Introducción al cálculo integral

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Matemática Aplicada de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: SOLER BASAURI, VICENTE [et al] (2013) *Introducción al cálculo integral.* Valencia : Universitat Politècnica

Primera edición, 2013

Distribución: pedidos@editorial.upv.es /
Telf. 963 877 012/ www.editorial.upv.es / Ref. 6102

ISBN: 978-84-9048-018-2 (versión impresa)

Prólogo

El objetivo del presente libro es familiarizar al alumno de las escuelas de ingenierías técnicas y superiores con los métodos básicos del cálculo integral para su posterior aplicación. Nuestra intención es que el alumno disponga, al finalizar el curso, de las herramientas suficientes para abordar el cálculo de las integrales que aparecen en las aplicaciones.

Hemos pretendido crear un texto adecuado para el aprendizaje y aplicación de dichos métodos y por ello hemos suprimido las demostraciones de los resultados que aquí se utilizan. Sin embargo, pretendemos también presentar un texto lo suficientemente atractivo, por lo menos como primera aproximación, para cualquier persona interesada en el cálculo integral. Estas personas podrán encontrar una completa bibliografía al final del presente volumen, donde profundizar en la materia.

Hemos distribuido el material en siete capítulos. Cada capítulo incluye numerosos ejemplos resueltos, así como una lista final de ejercicios que se proponen al alumno y cuyas soluciones se encuentran en el capítulo séptimo. En el capítulo sexto se incorpora una colección de ejercicios completamente resueltos.

Hemos incluido tres anexos. En el primero de ellos se presentan las fórmulas de trigonometría más utilizadas en el cálculo integral. En el segundo, recogemos igualmente las fórmulas más habituales de las funciones hiperbólicas. Finalmente, en el tercer anexo, recordamos al alumno algunos resultados sobre el cálculo exacto de las raíces enteras y fraccionarias de un polinomio con coeficientes racionales. El cálculo de estas raíces se utiliza en el capítulo cuarto de este volumen.

Los autores desean expresar su agradecimiento en primer lugar a los alumnos, que a pesar de los recursos informáticos disponibles para el cálculo de integrales, con sus dudas y su deseo de aprender nos han motivado a emprender la ingrata tarea de reescribir y actualizar este texto, cuya primera redacción data de 1998, y en segundo lugar a nuestros compañeros del Departamento de Matemática Aplicada de la ETSID, por su ayuda y apoyo.

LOS AUTORES.

Índice

Capítulo 1.- Integral indefinida

1.1- Concepto y propiedades

1.1.1- Primitiva de una función.- Diremos que la función F(x) es una **primitiva** de f(x) en el intervalo $]a,b[$ de la recta real, si se verifica que:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \;]a,b[$$

En el caso de no especificar el intervalo, se entiende que es el intervalo de máxima amplitud.

1.1.2.- Integral indefinida de una función f(x).- Llamaremos **integral indefinida de f(x),** o, simplemente **integral de f(x)**, al conjunto de todas las primitivas de f(x). En general se representa por el símbolo:

$$\int f(x)dx$$

1.1.3.- Teorema 1.1- Si F(x) es una primitiva cualquiera de f(x), se verifica:

$$\int f(x)dx = F(x) \; + \; C$$

donde C es una constante real. La expresión F(x)+C representa por tanto el conjunto de todas las primitivas de la función f(x). De esta forma, dos primitivas de una función f(x) se diferencian en una constante real.

1.1.4.- Propiedades de la integral indefinida.-

Se verifica:

a).- $\int f'(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \; + \; C$

b).- $\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx \; = \; \int \mathrm{f(x)dx} \; \pm \int \mathrm{g(x)dx}$

c).- $\int Kf(x)dx = \; K\int \mathrm{f(x)dx}$. $K \in R$

EJEMPLO 1.- Calcular las integrales:

$$a)\ \int \left(x^3 + \cos(2x)\right)dx \qquad\qquad b)\ \int 8e^{-2x}dx$$

Solución:

$$a)\ \int \left(x^3 + \cos 2x\right)dx = \int x^3 dx + \int \cos 2x dx = \frac{x^4}{4} + C_1 + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C_2 =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C$$

♦

$$b)\ \int 8e^{-2x}dx \;=\; 8\int e^{-2x}dx \;=\; 8\frac{e^{-2x}}{-2} + C \;=\; -4e^{-2x} + C$$

♦

1.2.- Métodos elementales de integración

Para calcular la derivada de una función disponemos de unas reglas fijas y generales a aplicar y que nos permiten el cálculo mecánico de dicha derivada. Ésto no ocurre con el cálculo de la integral de una función. Así, para la obtención de la función primitiva, debemos someter la integral a una serie de transformaciones que la reduzcan a otra cuya solución sea conocida. A esta última integral la llamaremos INTEGRAL INMEDIATA. Muchas integrales se resuelven aplicando el mismo tipo de transformaciones; a cada uno de estos tipos les denominaremos MÉTODOS DE INTEGRACIÓN, y se estudiarán con detalle en los capítulos siguientes. En este apartado, estudiaremos el caso de las integrales inmediatas o de las que se pueden reducir a ellas mediante transformaciones sencillas:

1.2.1.- Integrales inmediatas.- Son las integrales que se obtienen de la aplicación directa de alguna regla de derivación. Según ésto, podemos elaborar una lista de integrales cuya solución es conocida a la que llamaremos "Tabla de integrales inmediatas", y que nos servirá de apoyo para la resolución de las integrales que estudiaremos a lo largo de los capítulos siguientes. A continuación presentamos una tabla de este tipo:

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

CASO GENERAL	CASO PARTICULAR
a) $\int f'(x)f(x)^n\,dx = \dfrac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
b) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
c) $\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
d) $\int f'(x)\cos[f(x)]\,dx = \operatorname{sen}[f(x)] + C$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
e) $\int f'(x)\operatorname{sen}[f(x)]\,dx = -\cos[f(x)] + C$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
f) $\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\,dx = \operatorname{tg}[f(x)] + C$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
g) $\int \dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]}\,dx = -\cot g[f(x)] + C$	$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot gx + C$
h) $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}[f(x)] + C = -\arccos[f(x)] + C$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C$
i) $\int \dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg}[f(x)] + C = -\operatorname{arccotg}[f(x)] + C$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$

$$j)\ \int \frac{\mathrm{f'(x)}}{\sqrt{\mathrm{f(x)}}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C \qquad\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$k)\ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2 \pm c^2}}dx = \ln\left|f(x) + \sqrt{f(x)^2 \pm c^2}\right| + C$$

$$l)\ \int \mathrm{f'(x)cosh[f(x)]}dx = \mathrm{senh}[f(x)] + C$$

$$m)\ \int \mathrm{f'(x)senh[f(x)]}dx = \cosh[f(x)] + C$$

$$n)\ \int \frac{\mathrm{f'(x)}}{\cosh^2[f(x9]}dx = \mathrm{tgh}[f(x)] + C$$

$$o)\ \int \frac{\mathrm{f'(x)}}{\mathrm{senh}^2[f(x)]}dx = -\coth[f(x)] + C$$

$$p)\ \int \frac{\mathrm{f'(x)}}{\sqrt{\mathrm{f(x)}^2 + 1}}dx = \arg\mathrm{senh}[f(x)] + C = \ln\left|f(x) + \sqrt{f(x)^2 + 1}\right| + C$$

$$q)\ \int \frac{\mathrm{f'(x)}}{\sqrt{\mathrm{f(x)}^2 - 1}}dx = \arg\cosh[f(x)] + C = \ln\left|f(x) + \sqrt{f(x)^2 - 1}\right| + C$$

$$r)\ \int \frac{\mathrm{f'(x)}}{1 - \mathrm{f(x)}^2}dx = \arg th[f(x)] + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \mathrm{f(x)}}{1 - \mathrm{f(x)}}\right| + \mathrm{C} \qquad |\mathrm{f(x)}| < 1$$

$$s)\ \int \frac{\mathrm{f'(x)}}{1 - \mathrm{f(x)}^2}dx = \arg\coth[f(x)] + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \mathrm{f(x)}}{1 - \mathrm{f(x)}}\right| + \mathrm{C} \qquad |\mathrm{f(x)}| > 1$$

$$t)\ \int \frac{\mathrm{f'(x)dx}}{\mathrm{f(x)}\sqrt{1 - \mathrm{f(x)}^2}} = -\arg\sec h[f(x)] + C = -\ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - f(x)^2}}{f(x)}\right| + C$$

NOTA 1.- A menudo una integral puede expresarse de varias formas distintas según el método de integración utilizado, que en principio aparentan ser dos funciones diferentes. Si los cálculos se han realizado correctamente, estas funciones representan la misma integral diferenciándose únicamente en la constante de integración (teorema 1.1).

EJEMPLO 2.- Resolver la integral $\int \frac{dx}{1+x^2}$ mediante dos métodos diferentes:

SOLUCIÓN:

$$a)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$b)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}dx = -\int \frac{-\frac{1}{x^2}dx}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + K$$

Veamos que los dos resultados se diferencian en la constante de integración. En efecto, tomando $C = K - \frac{\pi}{2}$, y teniendo en cuenta las propiedades de las funciones trigonométricas (anexo I), se obtiene:

$$\operatorname{arctg} x + C = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} + K = -\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + K =$$

$$= -arc\cot gx + K = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + K$$

Y por tanto las dos integrales obtenidas se diferencian en una constante.

NOTA 2.- Al estudiar en los textos de la bibliografía la integral definida, el alumno observará que es condición suficiente que una función f(x) sea continua en un intervalo [a,b] de la recta real, para que tenga función primitiva en dicho intervalo. No obstante, esta primitiva en ocasiones no puede ser calculada mediante los métodos de integración habituales que presentamos en el presente libro.

Por ejemplo, las integrales :

$$a)\ \int \frac{e^x}{x}dx \qquad b)\ \int \frac{dx}{\ln x} \qquad c)\ \int \frac{\operatorname{sen}x}{x}dx$$

$$d)\ \int e^{x^2}dx \qquad e)\ \int e^{-x^2}dx \qquad f)\ \int \sqrt{1+x^3}\,dx$$

pertenecen a este tipo y no pueden ser calculadas mediante métodos de integración elementales.

1.2.2.- Integrales "casi-inmediatas".- Denominaremos así al tipo de integrales que se reducen a una integral inmediata mediante la suma, resta, multiplicación o división por una constante. Estas integrales pueden clasificarse en las siguientes familias:

1- Integrales de tipo potencial: Son las integrales que tienen una expresión del tipo:

$$\int f'(x)f(x)^n\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

EJEMPLO 3.- Calcular

$$\int x^2(3x^3+14)^3\,dx\,.$$

SOLUCIÓN:

Siendo f(x)= $3x^2+14$ y $f'(x)=9x^2$, bastará multiplicar y dividir la integral por 9 para obtener una integral inmediata.

$$\int x^2(3x^3+14)^3dx = \int \frac{9}{9}x^2(3x^3+14)^3dx = \frac{1}{9}\int 9x^2(3x^3+14)^3dx =$$

$$\frac{1}{9}\frac{(3x^3+14)^4}{4} = \frac{1}{36}(3x^3+14)^4 + C \qquad \blacklozenge$$

2.- Integrales de tipo exponencial. Son las integrales que tienen una expresión de la forma:

$$\int f'(x)a^{f(x)}dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

EJEMPLO 4.- Calcular

$$\int x^2 7^{x^3+5} dx.$$

SOLUCIÓN:

Como f(x)= x^3+5 y $f'(x)=3x^2$, multiplicando y dividiendo la integral pedida por 3 obtendremos una integral inmediata:

$$\int x^2 7^{x^3+5} dx = \int \frac{3}{3} x^2 7^{x^3+5} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 7^{x^3+5} dx = \frac{1}{3}\frac{7^{x^3+5}}{\ln 7} + C \qquad \blacklozenge$$

3.- Integrales de tipo logarítmico. Son las integrales que tienen una expresión de la forma:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

EJEMPLO 5.- Calcular

$$\int \frac{27x^2+30x+3}{3x^3+5x^2+x-1} dx .$$

SOLUCIÓN:

En este caso $f(x)=3x^3+5x^2+x-1$ y $f'(x)=9x^2+10x+1$. Bastará con sacar factor común 3 en el numerador del integrando para obtener una integral inmediata:

$$I = \int \frac{27x^2+30x+3}{3x^3+5x^2+x-1} dx = \int \frac{3(9x^2+10x+1)}{3x^3+5x^2+x-1} dx$$

$$= 3\int \frac{9x^2+10x+1}{3x^3+5x^2+x-1} dx = 3\ln(3x^3+5x^2+x-1)+C$$

$\blacklozenge$

4.- Integrales del tipo $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ **. Algoritmo de los cuatro pasos.** Es una integral reducible al tipo $\int \frac{f'(x)}{1 \pm f(x)^2}dx$. Se pueden presentar dos casos:

a) Si $b^2 - 4ac < 0$, la solución es del tipo arctg (f(x)).

b) Si $b^2 - 4ac > 0$, la solución es del tipo argth (f(x)).

Apliquemos el algoritmo de los cuatro pasos a un ejemplo concreto:

EJEMPLO 6.- Calcular

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 4} .$$

SOLUCIÓN:
Procedemos de la siguiente forma:

1) Multiplicamos el numerador y denominador del integrando por la constante 4a.(En este caso 8)

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 4} = \int \frac{8dx}{16x^2 - 24x + 32}$$

2) Escribimos el denominador de la forma $(2ax + b)^2 + k$, donde a,b,k son constantes a determinar. En este caso,

$$16x^2 - 24x + 32 = (4x - 3)^2 + 23$$

de donde a=2, b=-3 y k=23. De esta forma, la integral pedida queda:

$$\int \frac{8dx}{16x^2 - 24x + 32} = 8\int \frac{dx}{(4x-3)^2 + 23}$$

3) Debemos transformar el denominador en una expresión de la forma $(f(x))^2+1$, por tanto, debemos multiplicar y dividir la integral por el valor k (en este caso, por 23).

$$8\int\frac{dx}{(4x-3)^2+23} = \frac{8}{23}\int\frac{dx}{\frac{(4x-3)^2}{23}+1} = \frac{8}{23}\int\frac{dx}{\left(\frac{4x-3}{\sqrt{23}}\right)^2+1}$$

donde en este caso deberemos obtener $f(x)=\dfrac{4x-3}{\sqrt{23}}$.

4) En el numerador debemos obtener la derivada de la función f(x) mediante multiplicación y división de constantes. Cuando se haya obtenido, la integral es inmediata. En este caso multiplicamos y dividimos la integral por $\dfrac{4}{\sqrt{23}}$:

$$\frac{8}{23}\int\frac{dx}{\left(\frac{4x-3}{\sqrt{23}}\right)^2+1} = \frac{8}{23}\frac{\sqrt{23}}{4}\int\frac{\frac{4}{\sqrt{23}}dx}{\left(\frac{4x-3}{\sqrt{23}}\right)^2+1}dx =$$

$$=\frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{23}}\right)+C \qquad \blacklozenge$$

5.- Integrales del tipo $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. **Algoritmo de los cuatro pasos.** Se pueden presentar varios casos:

a) Si a>o y $b^2-4ac<0$. Es una integral del tipo $\displaystyle\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{1+(f(x))^2}}$ y por tanto:

$$\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \ln\left|f(x)+\sqrt{(f(x))^2+1}\right|+C=\arg\operatorname{senh} f(x)+C$$

b) Si a>0 y $b^2 - 4ac > 0$. Es una integral del tipo $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{(f(x))^2 - 1}}$ y por tanto:

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{(f(x))^2 - 1}} = \ln\left|f(x) + \sqrt{(f(x))^2 - 1}\right| + C = \arg\cosh f(x) + C$$

c) Si a<0 y $b^2 - 4ac > 0$. Es una integral del tipo $\int \frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{dx}}{\sqrt{1 - (\mathrm{f}(\mathrm{x}))^2}}$ y por tanto:

$$\int \frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{dx}}{\sqrt{1 - (\mathrm{f}(\mathrm{x}))^2}} = \text{arc sen f}(x) + \text{C}$$

c) Si a<0 y $b^2 - 4ac < 0$. En este caso el radicando es siempre negativo y por tanto la integral no tiene sentido en variable real.

Veremos la aplicación del algoritmo de los cuatro pasos para este tipo de integrales en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 7.- Calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x + 3}}.$$

SOLUCIÓN:
Procedemos de la siguiente forma:
1) Multiplicaremos el numerador y denominador por $\sqrt{4|a|}$. En este caso particular por $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x + 3}} = 2\sqrt{2}\int \frac{dx}{2\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + x + 3}} = 2\sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 + 8x + 3}}$$

2) Escribiremos el radicando de la forma $(2ax + b)^2 + k$, con a, b y k a determinar.

$$16x^2 + 8x + 3 = (4x + 1)^2 + 23$$

de donde a=2, b=1, k=23. De esta forma la integral pedida queda:

$$2\sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+8x+3}} = 2\sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(4x+1)^2+23}}$$

3) Deberemos transformar el radicando en una expresión de la forma $(f(x))^2+1$; para ello multiplicaremos numerador y denominador por $\sqrt{\mathrm{k}}$, en este caso $\sqrt{23}$, obteniendo:

$$2\sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(4x+1)^2+23}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{23}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}}$$

por lo que $f(x)=\dfrac{4x+1}{\sqrt{23}}$.

4) En el numerador deberemos conseguir la derivada de f(x), por tanto multiplicaremos y dividiremos la integral por la constante adecuada. Una vez obtenido esto, la integral pedida es inmediata. En este caso, multiplicaremos y dividiremos por $\dfrac{4}{\sqrt{23}}$:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{23}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{23}}\frac{\sqrt{23}}{4}\int \frac{\frac{4}{\sqrt{23}}dx}{\sqrt{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{4x+1}{\sqrt{23}}+\sqrt{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}\right|+C \quad = \quad \operatorname{argsenh}\left(\frac{4\mathrm{x}+1}{\sqrt{23}}\right)+C \ \blacklozenge$$

1.2.3.- Integración por descomposición.- Este método consiste en descomponer la función que deseamos integrar en suma o diferencia de otras funciones más sencillas para su posterior resolución.

1.2.3.1.- Descomposición trigonométrica e hiperbólica.- Denominaremos así al proceso que permite obtener la descomposición utilizando fórmulas trigonométricas, incluidas en los anexos 1 y 2. Veremos los casos más importantes:

1.- Integrales del tipo $\int \operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} Bx dx$. Aplicaremos la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} Bx = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B)x - \cos(A+B)x\right)$$

EJEMPLO 8.- Calcular $$\int \operatorname{sen}^2 3x dx$$

SOLUCIÓN: En este caso particular, consideramos A=B=3, por lo que se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}^2 3x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C \quad \blacklozenge$$

2.- Integrales del tipo $\int \operatorname{sen} Ax \cos Bx dx$. Aplicamos la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} Ax \cos Bx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A-B)x + \operatorname{sen}(A+B)x)$$

EJEMPLO 9.- Calcular $$\int \operatorname{sen} 2x \cos 5x dx$$

SOLUCIÓN: En este caso particular, consideramos A=2, B=5, por lo que se obtiene:

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(-3x) + \operatorname{sen} 7x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(-3x)dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 7x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 3x dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 7x dx = \quad \blacklozenge$$

$$= \frac{1}{6}\cos 3x \ - \ \frac{1}{14}\int \cos 7x dx + C$$

3.- Integrales del tipo $\int \cos Ax \cos Bxdx$. Aplicaremos la fórmula trigonométrica:

$$\cos Ax \cos Bx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(A - B\right)x + \cos\left(A + B\right)x\right)$$

EJEMPLO 10.- Integrar

$$\int \cos 4x \cos xdx$$

SOLUCIÓN: En este caso particular, consideramos A=4, B=1, por lo que se obtiene:

$$\int \cos 4x \cos xdx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 3x + \cos 5x\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \cos 3xdx + \frac{1}{2}\int \cos 5xdx = \frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x + C \quad \blacklozenge$$

Se procede análogamente cuando se consideran integrales de productos de funciones hiperbólicas.

1.2.3.2.- Descomposición racional. Se utiliza para el tipo de Integrales racionales $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}dx$. Para resolver este tipo de integrales, procederemos de la siguiente forma:

1) Multiplicaremos y dividiremos la integral por una determinada constante H para que el numerador se transforme en una expresión del tipo:

$$2ax + b + k$$

2) Descompondremos la integral en suma de dos integrales:

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{1}{H}\int \frac{H(mx + n)}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{1}{H}\int \frac{2ax + b + k}{ax^2 + bx + c}dx =$$

$$\frac{1}{H}\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}dx + \frac{1}{H}\int \frac{kdx}{ax^2 + bx + c}$$

La solución de la primera integral es $\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C$; La segunda se resolverá mediante la regla de los cuatro pasos.

EJEMPLO 11.- Calcular

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+2}dx$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+x+2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+5}{x^2+x+2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+2\right| + \frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C\end{aligned}$$

♦

1.2.3.3.- Descomposición irracional. Se utiliza para calcular las integrales del tipo $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Se procede de forma análoga a la descomposición racional:

1) Transformaremos la integral para que en el numerador obtengamos la derivada del radicando más una constante K.

b) Descompondremos la integral así obtenida en suma de dos integrales. la la primera integral es inmediata y vale:

$$2\sqrt{ax^2+bx+c}+\mathrm{C}$$

El cálculo de la segunda integral se efectuará mediante la regla de los cuatro pasos.

EJEMPLO 12.- Calcular

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}}\,dx$$

SOLUCIÓN:

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}}\,dx = 3\int \frac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt{2x^2+x+3}}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x+\frac{4}{3}}{\sqrt{2x^2+x+3}}\,dx =$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{4x+1+1/3}{\sqrt{2x^2+x+3}}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+3}} =$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+x+3} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{4x+1}{\sqrt{23}} + \sqrt{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}\right| + C \;\blacklozenge$$

EJERCICIOS.- Calcular las siguientes integrales:

1.1.- $\int \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$

1.2.- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

1.3 .- $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$

1.4.- $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+5}\,dx$

1.5.- $\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx$

1.6.- $\int \frac{-3}{1+x+2x^2}dx$

1.7.- $\int \frac{\sqrt{3}}{3x^2+2\sqrt{3}x+2}dx$

1.8.- $\int \frac{3}{\sqrt{-3x^2+x+5}}dx$

1.9.- $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+3}}dx$

1.10.- $\int \cos(-3x)\operatorname{sen}(8x)\ dx$

1.11.- $\int \operatorname{sen}(x-1)\cos(x+2)dx$

1.12.- $\int \frac{(x-1)}{x^2+2x+3}dx$

1.13.- $\int \frac{(x+4)}{-x^2+x-3}dx$

1.14.- $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

1.15.- $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5-3x^2}}dx$

1.16.- $\int \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}dx$

Capítulo 2.- Integración por sustitución

2.1.- Concepto

Este método denominado también **cambio de variable**, consiste en encontrar una función *x=g(t)* que, al sustituirla en la integral, la convi erta en otra más sencilla.
La sustitución debe cumplir dos condiciones:
1ª.- *x=g(t)* debe ser una función derivable y con derivada no nula en todo el intervalo de integración.

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \ , \quad \text{de donde } \ dx = g'(t)dt$$

2ª.- *x=g(t)* admite función inversa, esto es:

$$x = g(t) \quad \text{de donde } \ t = h(x)$$

Este método es de los que más variantes admite en el cálculo integral, ya que la función de cambio será diferente para cada tipo de función que exista bajo el signo integral. A continuación examinaremos algunos de los tipos de cambio más habituales.

2.2.- Aplicación al cálculo de integrales racionales

Representaremos por *R(x, f(x))* cualquier función racional que dependa tanto de la variable *x* como de la función *f(x)*. De forma análoga representaremos por *R(g(x), h(x))* cualquier función racional con respecto a dos funciones *g(x)* y *h(x)*. En los siguientes apartados estudiaremos los tipos más frecuentes de integrales de funciones racionales que se expresan de esta forma:

2.2.1.- Integrales De Funciones Racionales *R(X, F(X)):*

CASO 1.- Integrales del tipo $\int R(x, a^x)dx$ donde *a*>0. Se efectúa el cambio $a^x = t$ .Calculamos a continuación *dx* y *x*, en función de la nueva variable *t:*

$$a^x = t \ \Rightarrow \quad x = \frac{\ln t}{\ln a} \quad , \ dx = \frac{dt}{t \ln a}$$

EJEMPLO 1.- Calcular:

$$\int \frac{dx}{9a^x + 4a^{-x}}$$

SOLUCIÓN:

$$\int \frac{dx}{9a^x + 4a^{-x}} = \left\{ \begin{array}{l} a^x = t \\ dx = \dfrac{dt}{t \ln a} \end{array} \right\} =$$

$$\int \frac{\frac{dt}{t\ln a}}{9t + 4t^{-1}} = \frac{1}{\ln a}\int \frac{dt}{9t^2 + 4} = \frac{1}{4\ln a}\int \frac{dt}{\frac{9}{4}t^2 + 1} =$$

$$\int \frac{1}{4\ln a}\frac{2}{3}\int \frac{3/2\ dt}{\left(\frac{3t}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{6\ln a}\operatorname{arctg}\frac{3t}{2} + C$$

Deshaciendo el cambio el cambio de variable en la solución obtenida:

$$\int \frac{dx}{9a^x + 4a^{-x}} = \frac{1}{4\ln a}\operatorname{arctg}\frac{3a^x}{2} + C \qquad \blacklozenge$$

CASO 2.- Integrales del tipo $\int R(x, e^x)dx$. Se efectúa el cambio $e^x = t$. De aquí:

$$e^x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = \ln t} \quad , \quad \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}}$$

CASO 3.- Integrales del tipo $\int R(x, \ln x)dx$. Se efectúa el cambio *lnx=t* . De aquí:

$$\ln x = t \quad \Rightarrow x = e^t \quad , \quad \mathrm{dx = e^t\ dt}$$

CASO 4.- Integrales del tipo $\int R(x, \operatorname{arctg} x)dx$. Se efectúa el cambio arctg$x$=t. De aquí:

$$\operatorname{arctg} x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = tg\ t} \quad , \quad \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{\cos^2 t}$$

CASO 5.- Integrales del tipo $\int R(x, \operatorname{arcsen} x)dx$ .Se efectúa el cambio arcsen$x$=t De aquí:

$$\operatorname{arcsen} x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = sent} \quad , \quad \mathrm{dx = cost\ dt}$$

CASO 6.- Integrales del tipo $\int R(x, \arccos x)dx$. Se efectúa el cambio arccos$x$=t. De aquí:

$$\arccos x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = cost} \quad , \quad \mathrm{dx = \text{-}sent\ dt}$$

CASO 7.- Integrales del tipo $\int R(x, \arg thx)dx$. Se efectúa el cambio argth$x$=t. De aquí:

$$\arg thx = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = tght} \quad , \quad \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{\cosh^2 t}$$

CASO 8.- Integrales del tipo $\int R(x, \arg \operatorname{senh} x)dx$. Se efectúa el cambio argsenh$x$=t. de aquí:

$$\arg \operatorname{senh} x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = senht} \quad , \quad \mathrm{dx = cosht\ dt}$$

CASO 9.- Integrales del tipo $\int R(x, \arg \cosh x)dx$. Se efectúa el cambio aegcosh$x$=t. De aquí:

$$\arg \cosh x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = cosht} \quad , \quad \mathrm{dx = senht\ dt}$$

2.2.2.- Integrales de funciones racionales *R(Sen(X), Cos(X))*.

Definición 1.- Diremos que la función R(sen*x*,cos*x*) es **impar en sen*x***, cuando al sustituir en la función sen*x* por -sen*x* , la función cambia de signo. Es decir:

$$R(\text{sen}x, \cos x)=-R(-\text{sen}x, \cos x)$$

Definición 2.- Diremos que la función R(sen*x*, cos*x*) es **par en sen*x***, cuando al sustituir en la función, sen*x* por -sen*x*, la función no cambia de signo. Es decir:

$$R(\text{sen}x, \cos x)=R(-\text{sen}x, \cos x)$$

Análogamente se definiría función **impar en cos*x*** y **par en cos*x*.** Resolvamos las integrales de estas funciones racionales según los diferentes casos que pueden presentarse:

CASO 1.- Integrales del tipo $\int R(\text{sen}\, x, \cos x)dx$, donde R es una función impar en sen*x*. En este caso se efectúa el cambio cos*x*=*t*. Por tanto:

$$\cos x = t \quad \Rightarrow \quad \text{senx} = \sqrt{1 - t^2} \quad \Rightarrow \quad x = \text{arccost} \quad , \quad dx = \frac{- dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

EJEMPLO 2.- Calcular:

$$\int \frac{\text{sen}\, x\, dx}{1 + 4\cos^2 x}$$

SOLUCIÓN:

En este caso, la función racional

$$R(senx \;, \cos\; x) = \frac{\text{senx}}{1 + 4\cos^2 x} \quad ,$$

es impar en $\text{sen}\, x$, puesto que

$$R(-\,\text{sen}\, x, \cos x) = \frac{-\,\text{senx}}{1 + 4\cos^2 x} = -\,R(\text{sen}\, x, \cos x) \quad .$$

Efectuando el cambio de variable propuesto:

$$\cos(x) = t \ ,$$

se obtiene :

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)\ dx}{1+4\cos^2(x)} = \int \frac{-\,dt}{1+4t^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t) + C = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\big(2\cos(x)\big) + C \ \blacklozenge$$

EJEMPLO 3.- Calcular: $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}dx$$

SOLUCIÓN:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}dx = \{\text{impar en sen}x\} = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2} \\ dx = \dfrac{-\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{t^4}\frac{-\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2-1}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^4}$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C \qquad \blacklozenge$$

CASO 2.- Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$, donde R es una función Impar en cos$x$. El cambio a efectuar en este caso es sen$x$=t. De donde:

$$\operatorname{sen} x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x = \sqrt{1-t^2} \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcsen} t \quad , \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

EJEMPLO 4.- Calcular:

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

SOLUCIÓN:

En este caso, la función racional

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{\cos x}$$

es impar en $\cos x$, puesto que

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = \frac{1}{-\cos x} = -R(\operatorname{sen} x, \cos x) \; .$$

Efectuando el cambio de variable propuesto,

$$\operatorname{sen} x = t \; ,$$

se obtiene :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| + C$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x - 1| + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x + 1| + C$$

♦

EJEMPLO 5.- Calcular:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1-\operatorname{sen} x} dx$$

SOLUCIÓN:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1-\operatorname{sen} x} dx = \{\text{impar en } \cos x\} = \int \frac{t\sqrt{1-t^2}}{1-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t\,dt}{1-t}$$

$$\{\text{dividiendo los dos polinomios}\} = \int \left(-1 + \frac{1}{1-t}\right) dt = -t - \ln|1-t| + C$$

$$= -\operatorname{sen} x - \ln|1-\operatorname{sen} x| + C$$

♦

CASO 3.- Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ en donde R es una función par en sen$x$ y cos$x$ simultáneamente. El cambio a efectuar en este caso es tg$x$=t.
De aquí:

$$* \quad \operatorname{tg} x = t \quad \Rightarrow \mathrm{x} = \operatorname{arctg} \mathrm{t} \quad , \quad \mathrm{d\,x} = \frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = t \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \mathrm{x} = \mathrm{t} \cos \mathrm{x} = \mathrm{t}\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

de donde:

$$\operatorname{sen}^2 x = t^2(1 - \operatorname{sen}^2 x) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \mathrm{x} = \frac{\mathrm{t}}{\sqrt{1+\mathrm{t}^2}};$$

como:

$$\cos \mathrm{x} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{x}}{\mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad \cos \mathrm{x} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{t}^2}}$$

EJEMPLO 6.- Calcular:

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

SOLUCIÓN:

La función a integrar es par en sen$x$ y cos$x$, por tanto, efectuamos el cambio

$$\operatorname{tg} x = t$$

resultando:

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x\right) + C$$

♦

CASO 4.- Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ en la que R no es de ninguno de los tipos considerados anteriormente. En este caso el cambio a efectuar es tg$x/2=t$. De aquí:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}=2\operatorname{arctg} t \quad , \quad \mathrm{dx}=\frac{2\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos últimas igualdades se obtiene:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=t^2 \quad \Rightarrow \quad \cos \mathrm{x}=\frac{1-\mathrm{t}^2}{1+t^2}$$

y de forma análoga:

$$\operatorname{sen} x=\sqrt{1-\cos^2 x} \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\ \mathrm{x}\ =\frac{2t}{1+t^2}$$

EJEMPLO 7.- Calcular:

$$\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx$$

SOLUCIÓN:

Efectuando el cambio

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\mathrm{t} \qquad ,$$

la integral propuesta queda de la forma :

$$\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx = \int \frac{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\dfrac{1+2t+t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{t^2+2t+1}{1+t^2}dt = \int \left(\frac{t^2+1}{t^2+1}+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = \int \left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt$$

$$= t + \ln\left|1+t^2\right| + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ln\left|1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| + C \qquad \blacklozenge$$

EJEMPLO 8.- Calcular:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$$

SOLUCIÓN:

Efectuando el cambio:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad ,$$

la integral propuesta queda de la forma :

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + C \qquad \blacklozenge$$

EJEMPLO 9.- Calcular:

$$\int \frac{dx}{4+5\ \cos(x)}$$

SOLUCIÓN:

Efectuando el cambio

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

la integral propuesta queda de la forma :

$$\int \frac{dx}{4+5\cos(x)} = \int \frac{2\ dt}{9-t^2} = -\frac{1}{3}\ \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 3\right| + \frac{1}{3}\ \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 3\right| + C$$

♦

NOTA 2.- En la práctica hay que evitar utilizar el cambio indicado en el apartado anterior para el cálculo de integrales trigonométricas siempre que sea posible, porque puede dar lugar a integrales más complejas de calcular que aplicando los cambios correspondientes a los casos 1, 2 y 3 .

2.2.3.- Integrales de funciones racionales R(Senh(*X*), Cosh(*X*)).

CASO 1.- Integrales del tipo $\int (\operatorname{senh} x, \cosh x)dx$, en la que *R* es una función impar en senh*x*. El cambio a efectuar en este caso es cosh*x*=*t*. Análogamente a los casos anteriores se tiene:

$$\cosh x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = argcosht} \quad , \quad \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{\mathrm{t}^2 - 1}}$$

Recordando las propiedades de las funciones hiperbólicas (Anexo 2), se tiene:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{senhx} = \sqrt{\cosh^2 x - 1} \ \Rightarrow \ \mathrm{senh\ x} = \sqrt{t^2 - 1}$$

CASO 2.- Integrales del tipo $\int(\operatorname{senh} x, \cosh x)dx$ en la que *R* es una función impar en cosh*x* El cambio a efectuar es senh*x*=*t*. de aquí:

$$\operatorname{senh} x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \mathrm{argsenht} \quad , \quad \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{\mathrm{t}^2 + 1}}$$

Recordando las propiedades de las funciones hiperbólicas (Anexo 2), se tiene:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{coshx} = \sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1} \;\Rightarrow\; \cosh \mathrm{x} = \sqrt{t^2 + 1}$$

CASO 3.- Integrales del tipo $\int(\operatorname{senh} x, \cosh x)dx$ en la que *R* es función par en cosh*x* y senh*x*. El cambio a efectuar es tgh*x*=*t*. de donde:

$$\operatorname{tgh} x = t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \mathrm{argtht} \quad , \quad \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{1 - \mathrm{t}^2}$$

análogamente a los casos anteriores (5 y 6):

$$\operatorname{senh} x = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad \mathrm{coshx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{t}^2}}$$

CASO 4.- Integrales del tipo $\int(\operatorname{senh} x, \cosh x)dx$ en la que *R* no es de ninguno de los tipos considerados anteriormente. En este caso el cambio a efectuar es $\operatorname{tgh}\frac{x}{2} = t$. De donde:

$$\operatorname{tgh}\frac{x}{2} = t \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = 2\mathrm{argtht} \quad , \quad \mathrm{dx} = \frac{2\mathrm{dt}}{1 - \mathrm{t}^2}$$

análogamente a los casos anteriores (5 , 6 y 7):

$$\operatorname{senh} x = \frac{2t}{1 - t^2} \qquad \mathrm{coshx} = \frac{1 + \mathrm{t}^2}{1 - t^2}$$

EJERCICIOS.- Resolver las siguientes integrales:

2.1.- $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$

2.2.- $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} dx$

2.3.- $\int \frac{dx}{\cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x}$

2.4.- $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 2x} dx$

2.5.- $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{2 + \cos 3x} dx$

2.6.- $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \cos x}$

Capítulo 3.- Método de integración por partes

3.1.- Concepto. Casos

Este método se aplica cuando queremos calcular una integral $\int f(x)\,dx$, tal que f(x) puede descomponerse como producto de otras dos funciones, de la forma:

$$f(x) = u(x)\ v'(x)$$

siendo u(x), v(x), u´(x), v´(x) funciones definidas en el mismo campo de definición de f(x). Si calculamos la diferencial de la función producto de u(x) v(x) obtendremos:

$$d(u(x)\ v(x)) = u(x)\ v'(x)\ dx + v(x)\ u'(x)\ dx$$

Para mayor comodidad en la notación, y teniendo en cuenta que u(x) y v(x) verifican $v'(x)\ dx = dv,\ \ u'(x)\ dx = du$, podremos escribir:

$$d(uv) = u\ dv + v\ du$$

Integrando esta última expresión se obtiene:

$$\int d(uv) = uv = \int udv + \int vdu$$

O lo que es lo mismo:

$$\int f(x)dx = \underbrace{\int udv}_{A} = uv - \underbrace{\int vdu}_{B}$$

Este método se aplica siempre que la integral del segundo miembro B es más fácil de integrar que A.

A la fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

se la conoce como **fórmula de la integración por partes**.

EJEMPLO 1.- Calcular:

$$\int \ln x dx$$

SOLUCIÓN:

Efectuamos el cambio $\left\{\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{array}\right\}$ y, aplicando la fórmula de integración por partes, obtendremos:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C \qquad \blacklozenge$$

Pueden presentarse muchas variantes en la aplicación del método de integración por partes, según como sea la función f(x) y su posible descomposición en producto de otras dos. Veremos a continuación una tabla resumen de los casos más frecuentes en los que es conveniente aplicar el método:

$$f(x)=A(x)\ B(x)$$

CASOS	A(x)	B(x)	u	v´
1º	Polinomio en x	Función exponencial	A	B
2º	Polinomio en x	Función trigonométrica directa	A	B
3º	Función trigonométrica inversa, o logarítmica	Polinomio en x o función racional en x	A	B
4º	Función exponencial	Función trigonométrica directa	A ó B	B ó A

Veremos algunos ejemplos de aplicación del método de integración por partes en los diferentes casos:

EJEMPLO 2.- Calcular $$\int \left(x^2 - 3x\right)e^{2x}dx$$

SOLUCIÓN:

La integral propuesta se incluye en las del primer caso, por tanto efectuaremos la integración por partes tal como se propone en la tabla.

Efectuamos el cambio $\left\{\begin{array}{l} u = \left(x^2 - 3x\right) \\ dv = e^{2x}dx \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = (2x-3)dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$, obteniendo:

$$\int \left(x^2 - 3x\right)e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - 3x\right) - \frac{1}{2}\int (2x-3)e^{2x}dx$$

Esta última integral es también del caso 1º, y se calcula de la misma forma:

$$\int (2x-3)e^{2x}dx = \left\{\begin{array}{l} u = (2x-3) \\ dv = e^{2x}dx \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = 2dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} = \frac{(2x-3)}{2}e^{2x} - \int e^{2x}dx$$

luego:

$$\int (2x-3)e^{2x}dx = \frac{(2x-3)}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Sustituyendo en la integral propuesta, se obtiene:

$$\int \left(x^2 - 3x\right)e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - 3x\right) - \frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C \qquad \blacklozenge$$

EJEMPLO3.- Calcular

$$\int x\cos 3x dx$$

SOLUCIÓN:

La integral propuesta se incluye en las del segundo caso, por tanto efectuaremos la integración por partes tal como se propone en la tabla.

Efectuamos el cambio: $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos 3x dx \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = dx \\ v = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \end{array}\right\}$ con lo que la integral inicial queda:

$$\int x\cos 3x dx = \frac{x}{3}\operatorname{sen} 3x - \int \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x dx$$

Resolviendo ésta última:

$$\int x\cos 3x dx =$$

$$\frac{x}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

♦

EJEMPLO 4.- Calcular:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx$$

SOLUCIÓN:

La integral propuesta se incluye en las del tercer caso, por tanto efectuaremos la integración por partes tal como se propone en la tabla.

Efectuamos el cambio $\left\{\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = x dx \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}.$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \mathrm{x}\,\operatorname{arctg} \mathrm{xdx} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\mathrm{A}$$

Donde A= $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$

Sustituyendo en la integral inicial:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{arctg} x\right) + C \qquad \blacklozenge$$

EJEMPLO 5.- Calcular:

$$\int \operatorname{sen} x\, e^{2x} dx$$

SOLUCIÓN:

La integral propuesta se incluye en las del cuarto caso, por tanto efectuaremos la integración por partes tal como se propone en la tabla.

Efectuamos el cambio: $\left\{\begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x \\ dv = e^{2x}dx \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = \cos x dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$ con lo que la integral inicial queda:

$$\int \operatorname{sen} x e^{2x} dx = \operatorname{sen} x \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int \cos x e^{2x} dx$$

Esta última integral es también del mismo tipo, por tanto, se calcula de la misma forma:

$$\int \cos x e^{2x} dx = \left\{\begin{array}{l} u = \cos x \\ dv = e^{2x}dx \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = -\operatorname{sen} x dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\cos x\, e^{2x} + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x e^{2x} dx$$

Sustituyendo en la integral inicial, queda:

$$\int \operatorname{sen} x\, e^{2x} dx = \operatorname{sen} x \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} \cos x\, e^{2x} - \frac{1}{4} \int \operatorname{sen} x\, e^{2x} dx$$

Observemos que la integral del segundo miembro es la misma que la integral inicial, por tanto, pasándola al primer miembro y simplificando, obtendremos su valor:

$$\int \operatorname{sen} x e^{2x} dx = \frac{2}{5}\left(\operatorname{sen} x e^{2x} - \frac{1}{2}\cos x e^{2x}\right) + C$$ ♦

3.2.- Fórmulas de reducción

Este procedimiento se aplica a integrales de funciones que, aunque en principio pueden ser resueltas por partes, debido a que en la función aparecen exponentes enteros de valor muy elevado, deberíamos aplicar el método de integración por partes repetidas veces. El procedimiento a seguir consiste en que partiendo de una integral con exponente entero n, (que denominaremos I_n) , aplicando la integración por partes , obtengamos otra integral de la misma forma que la primera pero con el exponente reducido , ésto es:

$$I_n = K(x) + I_{n-h}$$

Aplicando sucesivamente la fórmula de reducción deberemos llegar a una integral inmediata.

A continuación obtendremos algunas fórmulas de reducción:

• 1.- Fórmula de reducción de la integral $\int x^n e^x dx$:

Denominaremos $I_n = \int x^n e^x dx$ y aplicaremos la fórmula de integración por partes:

$$I_n = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^n & du = nx^{n-1} dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} = x^n e^x - \int nx^{n-1} e^x dx$$

Por tanto:

$$\boxed{I_n = x^n e^n - nI_{n-1}}$$

Con esta fórmula, obtenemos una reducción de h=1. Aplicándola sucesivamente llegaremos a la integral I_0, que es inmediata:

$$I_0 = \int e^x dx = e^x + C$$

EJEMPLO 6.- Calcular:

$$\int x^3 e^x dx$$

SOLUCIÓN:

Observemos que para la integral propuesta se tiene la siguiente fórmula de reducción:

$$I_n = x^n e^n - nI_{n-1}$$

Por tanto la integral propuesta es I_3 : De esta forma se tiene:

$$I_3 = x^3 e^n - 3I_2,$$

$$I_2 = x^2 e^n - 2I_1 \ ,$$

$$I_1 = x\, e^n - I_0, \text{ donde } I_0 = e^n + C.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 e^x - 3I_2 \\ &= x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2I_1\right) \\ &= x^3 e^x - 3\left[x^2 e^x - 2(x)e^x - I_0\right] \\ &= x^3 e^x - 3\left[x^2 e^x - 2(x)e^x - e^x\right] \\ &= e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C \end{aligned}$$

♦

• 2.- Fórmula de reducción para la integral $\int \text{sen}^m x \cos^n x dx$ m, n $\in$ **N,** para reducir el exponente de cos x.

Denominaremos $I_{m,\text{n}} = \int \text{sen}^m x \cos^n x dx$, aplicamos el método de integración por partes:

$$I_{m,n} = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos^{m-1} x & \text{du} = (\text{m - 1})\cos^{m-2} x(-\text{sen}\, x)dx \\ dv = \text{sen}^n x \cos x & v = \dfrac{\text{sen}^{n+1} x}{n+1} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\cos^{m+1} x \,\text{sen}^{\text{n}+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{m-2} x \,\text{sen}^{n+2} x dx$$

Por tanto:

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x \,\text{sen}^{\text{n}+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \text{sen}_n x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^{m-2} x dx$$

$$= \frac{\cos^{m-1} x \,\text{sen}^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \text{sen}^n x \cos^{m-2} x dx - \frac{m-1}{n+1}\int \text{sen}^n x \cos^m x dx$$

O lo que es lo mismo:

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x \,\text{sen}^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n} - \frac{m-1}{n+1} I_{m,n}$$

Pasando $I_{m,n}$ al primer miembro, obtenemos:

$$\left(1+\frac{m-1}{n+1}\right) I_{m,n} = \frac{m+n}{n+1} I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x \,\text{sen}^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n}$$

Despejando, obtenemos una fórmula de reducción en la que h=2:

$$\boxed{I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x \,\text{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}}$$

Aplicando sucesivamente esta fórmula de reducción llegaremos a dos tipos de integrales según sea m un número par o impar:

- Si m es par $\Rightarrow$ $I_{0,n} = \int \operatorname{sen}^n x dx$ que se puede calcular mediante el cambio tg x =t

- Si m es impar $\Rightarrow$ $I_{1,n} = \int \operatorname{sen}^n x \cos x dx$ que es una integral inmediata:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x dx = \frac{1}{n+1} \operatorname{sen}^{n+1} x + C$$

EJEMPLO 7.- Calcular:

$$\int \cos^8 x \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

SOLUCIÓN:

Observemos que para la integral propuesta se tiene la siguiente fórmula de reducción:

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

Por tanto la integral propuesta es $I_{8,2}$: De esta forma se tiene:

$$I_{8,2} = \frac{\cos^7 x \operatorname{sen}^3 x}{10} + \frac{7}{10} I_{6,2}$$

$$= \frac{\cos^7 x \operatorname{sen}^3 x}{10} + \frac{7}{10}\left(\frac{\cos^5 x \operatorname{sen}^3 x}{8} + \frac{5}{8} I_{4,2}\right)$$

$$= \frac{\cos^7 x \operatorname{sen}^3 x}{10} + \frac{7}{80}\cos^5 x \operatorname{sen}^3 x + \frac{7}{16}\left(\frac{\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x}{6} + \frac{3}{6} I_{2,2}\right)$$

$$= \frac{\cos^7 x \operatorname{sen}^3 x}{10} + \frac{7}{80}\cos^5 x \operatorname{sen}^3 x + \frac{7\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x}{96} + \frac{7}{32}\left(\frac{\cos x \operatorname{sen}^3 x}{4} + \frac{1}{4} I_{0,2}\right)$$

Finalmente llegamos a la integral $I_{0,2} = \int \operatorname{sen}^2 x dx$ que es inmediata:

$$I_{0,2} = \int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

Sustituyendo en lo anterior y simplificando, se obtiene:

$$I_{8,2} = \operatorname{sen}^3 x\left(\frac{\cos^7 x}{10} + \frac{7\cos^5 x}{80} + \frac{7\cos^3 x}{96} + \frac{7\cos x}{128}\right) - \frac{7\operatorname{sen} x \cos x}{256} + \frac{7x}{256} + C$$

♦

• 3º.- Fórmula de reducción para la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ m, n $\in$ **N,** para reducir el exponente de senx:.

Aplicando un método análogo al anterior, se obtiene la fórmula de reducción:

$$\boxed{I_{m,n} = -\frac{\cos^{m+1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}}$$

EJEMPLO 8.- Calcular:

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x\, dx$$

SOLUCIÓN:

Observemos que para la integral propuesta se tiene la siguiente fórmula de reducción:

$$\boxed{I_{m,n} = -\frac{\cos^{m+1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}}$$

Por tanto la integral propuesta es $I_{2,4}$: De esta forma se tiene:

$$I_{2,4} = -\frac{\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x}{6} + \frac{3}{6} I_{2,2}$$
$$= -\frac{\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x}{6} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos^3 x \operatorname{sen} x}{4} + \frac{1}{4} I_{2,0} \right)$$

$$= -\frac{\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x}{6} - \frac{\cos^3 x \operatorname{sen} x}{8} + \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{16} + \frac{x}{16} + C \qquad \blacklozenge$$

NOTA.- Las anteriores fórmulas de reducción se pueden aplicar indistintamente, e incluso es posible aplicar una combinación de ellas en la resolución de la integral $I_{m,n}$

Otras fórmulas de reducción que se pueden obtener por el mismo método, son:

- 4.- $I_m = \int \operatorname{sen}^m x dx = -\frac{1}{m} \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}$

- 5.- $I_m = \int \cos^m x dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \operatorname{sen} x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}$

- 6.- $I_m = \int \operatorname{tg}^m x dx = \frac{1}{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} x - I_{m-2}$

- 7.- $I_m = \int x^m \cos x dx = x^m \operatorname{sen} x + m x^{m-1} \cos x - m(m-1) I_{m-2}$

- 8.- $I_m = \int (\ln x)^m dx = x(\ln x)^m - m I_{m-1}$

3.3.- Algunos casos especiales

En este aparatado vamos a estudiar dos tipos de integrales, ambas resolubles por partes, para las que vamos a presentar un método alternativo de cálculo.

a) Integrales del tipo

$$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx, \quad \int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx, \ \ \alpha,\beta \ \in \mathbf{R}$$

Para la resolución de este tipo de integrales vamos a utilizar números complejos, y en particular la conocida **identidad de Euler**:

$$\boxed{e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + isen(\beta x), \beta \in R}$$

Para ello consideremos la expresión dada por

$$(A) = \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx + i\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx\,.$$

Aplicando la identidad de Euler y las propiedades de la exponencial compleja, se tiene:

$$\begin{aligned}(A) \ &= \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx + i\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx = \int e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + isen(\beta x))dx \\ &= \int e^{\alpha x}e^{i\beta x}dx \ = \int e^{\alpha x + i\beta x}dx \ = \int e^{x(\alpha + i\beta)}dx.\end{aligned}$$

La integral $\int e^{x(\alpha+i\beta)}dx$ es formalmente inmediata, por lo que, aplicando las propiedades de los números complejos

$$\begin{aligned}(A) = \int e^{x(\alpha+i\beta)}dx &= \frac{e^{x(\alpha+i\beta)}}{\alpha + i\beta} \\ &= \frac{(\alpha - i\beta)e^{\alpha x}e^{i\beta x}}{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)} \\ &= \frac{e^{\alpha x}(\alpha - i\beta)(\cos(\beta x) + isen(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2} \\ &= \frac{e^{\alpha x}\left[\alpha\cos(\beta x) + \beta\, sen(\beta x) + i(\alpha\, sen(\beta x) - \beta\cos(\beta x))\right]}{\alpha^2 + \beta^2}.\end{aligned}$$

Igualando partes reales e imaginarias en la expresión obtenida para (A) tenemos

$$\int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, dx = \frac{e^{\alpha x}\left(\alpha \cos(\beta x) + \beta\, sen(\beta x)\right)}{\alpha^2 + \beta^2} + C,$$

$$\int e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, dx = \frac{e^{\alpha x}\left(\alpha\, sen(\beta x) - \beta \cos(\beta x)\right)}{\alpha^2 + \beta^2} + C.$$

b) Integrales del tipo

$$\int e^{\alpha x} P_n(x)\, dx \;,\; n \in \mathrm{N}$$

Este tipo de integrales pueden resolverse aplicando partes n veces. Vamos a resolverlas resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. Para ello observemos que

$$\int e^{\alpha x} P_n(x)\, dx \;=\; e^{\alpha x} Q_n(x) + C$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio indeterminado del mismo grado n que $P_n(x)$. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 9.- Calcular:

$$\int e^{3x}\left(2\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 1\right) dx$$

SOLUCIÓN:

En este caso es $n = 2$, con $P_2(x) = 2\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 1$ y $\alpha = 3$. Consideramos por tanto un polinomio indeterminado de grado $n = 2$, $Q_2(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$, y tenemos

$$\int e^{3x}\left(2\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 1\right) \mathrm{dx} = e^{3x}\left(\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}\right) + C \quad \text{(B)}$$

Para determinar los coeficientes del polinomio $Q_2(x)$, derivamos en (B) y obtenemos:

$$e^{3x}\left(2x^2+2x-1\right)=3e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)+e^{3x}\left(2ax+b\right)$$
$$=e^{3x}\left(3ax^2+(3b+2a)x+3c+b\right)$$

Cancelando el término e^{3x} en la igualdad anterior obtenemos la identidad de polinomios

$$2x^2+2x-1=3ax^2+(3b+2a)x+3c+b,$$

De donde igualando coeficientes del mismo gado, obtenemos el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & = & 3a \\ 2 & = & 3b+2a \\ -1 & = & 3c+b \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{2}{3}, b=\frac{2}{9}, c=-\frac{11}{27}$$

Y por tanto

$$\int e^{3x}\left(2x^2+2x-1\right)dx=e^{3x}\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{11}{27}\right)+C \qquad \blacklozenge$$

EJERCICIOS.- Resolver las siguientes integrales:

3.1.- $\int\left(x-3x^2\right)e^x dx$

3.2.- $\int(2x-2)\ln x dx$

3.3.- $\int e^{3x}\operatorname{sen}2x\, dx$

3.4.- $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

3.5.- $\int x\operatorname{sen}^2 x\, dx$

3.6.- $\int (x^2 - 3x)(sen2x + e^x)dx$

3.7.- $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x \, dx$

3.8.- $\int \operatorname{sen}^m (Ax) \cos(Ax) \; dx$

Capítulo 4.- Integración de funciones racionales

4.1.- Descomposición factorial de un polinomio

Comencemos este capítulo recordando un resultado sobre polinomios que suponemos ya conocido.

4.1.1.- Teorema 4.1.- Para cualquier polinomio de grado n≥ 1,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

con coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales, existen números reales o complejos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que :

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n).$$

A la expresión:

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$

se la denomina **descomposición factorial del polinomio** $P(x)$**.** A los valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se les denomina **raíces** del polinomio $P(x)$ y al término a_n se le denomina **coeficiente director** del polinomio $P(x)$**.**

Si en la descomposición factorial de un polinomio $P(x)$ una raíz α_i aparece solo una vez, se dice entonces que α_i es una ***raíz simple*** de $P(x)$ o equivalentemente, que su orden de multiplicidad es 1. En caso contrario, se dice que α_i es una ***raíz múltiple****,* y si aparece n_i veces, se dice que su orden de multiplicidad es n_i o también que es una raíz de orden n_i. Así, si hay n_1 raíces iguales a α_1, n_2 raíces iguales a α_2 y, en general, n_i raíces iguales a α_i, se verificará:

$$n_1 + \mathrm{n}_2 + \cdots + n_\mathrm{p} = n,$$

y la factorización del polinomio $P(x)$ quedará de la forma:

$$P(x) = a_n\left(x-\alpha_1\right)^{n_1}\left(x-\alpha_2\right)^{n_2}\left(x-\alpha_3\right)^{n_3}\cdots\left(x-\alpha_p\right)^{n_p}.$$

4.2.- Descomposicion en fracciones simples de una funcion racional

El siguiente resultado es clave pues nos proporciona la descomposición en fracciones simples de una función racional.

4.2.1.- Teorema 4.2.- Sea $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional, cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de grados respectivos p y q $(p<q)$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ las raíces reales de $Q(x)=0$ con órdenes de multiplicidad respectivos $m_1, m_2, \cdots, m_k$ y sean $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \cdots, a_l \pm ib_l$ sus raíces complejas con órdenes de multiplicidad respectivos $n_1, n_2, \cdots, n_l$, verificándose :

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_l) = q \ ,$$

entonces existen q constantes reales únicas :

$$\begin{gathered}
A^1{}_1, A^1{}_2, A^1{}_3, \cdots, A^1{}_{m_1}, \cdots, A^k{}_1, A^k{}_2, A^k{}_3, \cdots, A^k{}_{m_k}, \\
B^1{}_1, B^1{}_2, B^1{}_3, \cdots, B^l{}_{n_l}, \cdots, B^l{}_1, B^l{}_2, B^l{}_3, \cdots, B^l{}_{n_l}, \\
C^1{}_1, C^1{}_2, C^1{}_3, \cdots, C^l{}_{n_l}, \cdots, C^l{}_1, C^l{}_2, C^l{}_3, \cdots, C^l{}_{n_l},
\end{gathered}$$

tales que se verifica :

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A^1{}_1}{x-\alpha_1} + \frac{A^1{}_2}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A^1{}_{m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A^k{}_1}{x-\alpha_k} + \frac{A^k{}_2}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{A^k{}_{m_k}}{(x-\alpha_k)^{m_k}} \\
&+ \frac{B^1{}_1 x + C^1{}_1}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \frac{B^1{}_2 x + C^1{}_2}{\left[(x-a_1)^2 + b_1^2\right]^2} + \cdots + \frac{B^1{}_{n_1} x + C^1{}_{n_1}}{\left[(x-a_1)^2 + b_1^2\right]^{n_1}} + \cdots + \frac{B^l{}_1 x + C^l{}_1}{(x-a_l)^2 + b_l^2} \\
&+ \frac{B^l{}_2 x + C^l{}_2}{\left[(x-a_l)^2 + b_l^2\right]^2} + \cdots + \frac{B^l{}_{n_l} x + C^l{}_{n_l}}{\left[(x-a_l)^2 + b_l^2\right]^{n_l}} \quad .
\end{aligned}}$$

NOTA 1 : En el caso de que en la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se tenga el grado del numerador mayor o igual que el grado del denominador, se efectúa la división de los dos polinomios, de forma que se obtiene :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde en $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ se tiene el grado del numerador menor que el grado del denominador. A $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ le es aplicable el teorema 4.2, y bastará a esta descomposición en fracciones simples de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ sumarle el polinomio C(x) para obtener la descomposición en factores de la función racional original $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Veamos algunos ejemplos de la aplicación de este teorema.

EJEMPLO 1 :. Calcular la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{x+1}{2+3x-9x^2}$$

SOLUCIÓN:

El numerador tiene grado estrictamente menor que el denominador, por lo que es aplicable el teorema 4.2. Las raíces del denominador $2+3x-9x^2$ son x=$\dfrac{2}{3}$ y x= $-\dfrac{1}{3}$. Por tanto, aplicando el teorema 4.2 la descomposición pedida será de la forma:

$$\frac{x+1}{2+3x-9x^2} = \frac{A}{x-\frac{2}{3}} + \frac{B}{x+\frac{1}{3}} \quad ,$$

donde hay que determinar el valor de las constantes A, B. Para determinarlas, sumamos las fracciones en la descomposición anterior, y aplicando que por el teorema 4.1 se obtiene:

$$2+3x-9x^2=-9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) \quad ,$$

identificando los numeradores de las fracciones resultantes, se obtiene :

$$x+1=A\left(x+\frac{1}{3}\right)+B\left(x-\frac{2}{3}\right) \quad .$$

A partir de este momento, podemos seguir dos caminos. En primer lugar, la última igualdad es una igualdad entre polinomios, y por tanto, deberán ser iguales sus coeficientes. Podemos por tanto desarrollar la expresión

$$A\left(x+\frac{1}{3}\right)+B\left(x-\frac{2}{3}\right)=\left(A+B\right)x+\frac{1}{3}\left(A-2B\right),$$

e igualar coeficientes con el polinomio $x+1$. De esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones que permite obtener los valores de las constantes:

$$\begin{cases} 1=A+B \\ 1=\dfrac{A}{3}-\dfrac{2}{3}B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{3} \\ B=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Otro camino posible es sustituir la variable x por algunos valores concretos en la expresión:

$$x+1=A\left(x+\frac{1}{3}\right)+B\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

Para simplificar, daremos a x los valores que anulan términos en el lado derecho de la igualdad. Así, dando a x los valores x=$-\dfrac{1}{3}$ y x= $\dfrac{2}{3}$, obtenemos un sistema de ecuaciones , que resuelto, nos proporciona el valor de las constantes.

En este caso:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} = -B \\ \dfrac{5}{3} = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{2}{3} \\ A = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

(Este método se conoce como **método de coeficientes indeterminados**).

De esta forma, la descomposición en fracciones simples quedará :

$$\frac{x+1}{2+3x-9x^2} = \frac{\frac{5}{3}}{x-\frac{2}{3}} - \frac{\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}}.$$

♦

EJEMPLO 2:. Calcular la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{x^2+x-15}{x^4-10x^2+9}$

SOLUCIÓN:

El grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador, por lo que es aplicable el teorema 4.2. Las raíces del denominador x^4-10x^2+9 son x=± 1 y x= ± 3. Por tanto, aplicando el teorema 4.2 la descomposición pedida será de la forma:

$$\frac{x^2+x-15}{x^4-10x^2+9} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3},$$

donde hay que determinar el valor de las constantes A, B, C, D. Para determinarlas, quitamos denominadores en la expresión en fracciones simples. De esta forma, aplicando que

$$x^4-10x^2+9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3),$$

se obtiene

$$x^2+x-15=A(x+1)(x-3)(x+3)+B(x-1)(x-3)(x+3)+C(x-1)(x+1)(x+3)$$
$$+D(x-1)(x+1)(x-3)\ .$$

Aquí de nuevo podemos seguir dos caminos, desarrollar la expresión e igualar coeficientes o aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Desarrollando la expresión :

$$A(x+1)(x-3)(x+3)+B(x-1)(x-3)(x+3)+C(x-1)(x+1)(x+3)$$
$$+D(x-1)(x+1)(x-3)$$

e igualando sus coeficientes con los del polinomio x^2+x-15 obtendríamos un sistema de ecuaciones. El método de los coeficientes indeterminados es en este caso más sencillo, utilizando los valores de x que anulan términos en el lado derecho de la igualdad. Así, dando a x los valores x=± 1 y x= ± 3, obtenemos el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} -13=-16A \\ -15=16B \\ -3=48C \\ -9=-48D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{16}{13} \\ B=-\dfrac{15}{16} \\ C=-16 \\ D=\dfrac{16}{3} \end{cases}$$

por lo que la descomposición en fracciones simples quedará de la forma :

$$\frac{x^2+x-15}{x^4-10x^2+9}=\frac{\frac{16}{13}}{x-1}-\frac{\frac{15}{16}}{x+1}-\frac{16}{x-3}+\frac{\frac{16}{3}}{x+3}\ . \qquad \blacklozenge$$

EJEMPLO 3:. Calcular la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{x^2+4}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

SOLUCIÓN:

El numerador tiene grado estrictamente menor que el denominador, por lo que es aplicable el teorema 4.2. Las raíces del denominador $(x-1)^2(x+1)^2$ son x=1 con multiplicidad 2 y x= -1 con multiplicidad también 2. Por tanto, aplicando el teorema 4.2 la descomposición pedida será :

$$\frac{x^2+4}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{x+1},$$

donde hay que determinar el valor de las constantes A, B, C, D. Para determinarlas, quitamos denominadores en la expresión en fracciones simples. De esta forma se obtiene :

$$x^2+4=A(x+1)^2+B(x+1)^2(x-1)+C(x-1)^2+D(x-1)^2(x+1).$$

Aquí podemos seguir el camino de igualar los coeficientes en los dos lados de la igualdad, desarrollando la expresión :

$$\begin{aligned}x^2+4&=A\left(x^2+2x+1\right)+B\left(x^3+x^2-x-1\right)+C\left(x^2-2x+1\right)+D\left(x^3-x^2-x+1\right)\\&=(\mathrm{B}+\mathrm{D})x^3+(A+B+C-D)x^2+(2A-B-2C-D)x+(A-B+C+D)\end{aligned}$$

e igualando coeficientes con el polinomio x^2+4, obtenemos el sistema de ecuaciones :

$$\left\{\begin{array}{c}0=B+D\\1=A+B+C-D\\0=2A-B-2C-D\\4=A-B+C+D\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\dfrac{5}{4}\\B=-\dfrac{3}{4}\\C=\dfrac{5}{4}\\D=\dfrac{3}{4}\end{array}\right..$$

Otro camino es utilizar el método de los coeficientes indeterminados. Damos a x los valores que anulan términos en el lado derecho de la igualdad, x=1 y x=-1, y como nos faltan valores para determinar todas las constantes, damos a la variable x otros dos valores arbitrarios, por ejemplo x=0 y x=2, obteniendo el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 5 = 4A \\ 5 = 4C \\ 4 = A - B + C + D \\ 8 = 9A + 9B + C + 3D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{4} \\ B = -\dfrac{3}{4} \\ C = \dfrac{5}{4} \\ D = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

por lo que la descomposición en fracciones simples quedará de la forma :

$$\frac{x^2+4}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{\frac{5}{4}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{x+1}\,.$$ ♦

EJEMPLO 4 :. Calcular la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{2x+3}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$$

SOLUCIÓN:

El numerador tiene grado estrictamente menor que el denominador, por lo que es aplicable el teorema 4.2. Las raíces del denominador $\left(x \quad +1\right)\left(x^2+4\right)$ son x = i , x = -i , x= 2i, x=2i. Por tanto, aplicando el teorema 4.2 la descomposición pedida será :

$$\frac{2x+3}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)}\,,$$

donde hay que determinar el valor de las constantes A, B, C, D.

Para determinarlas, quitamos denominadores en la expresión en fracciones simples. De esta forma se obtiene :

$$x+3=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1).$$

Aquí de nuevo podemos seguir dos caminos. Desarrollando la expresión :

$$x+3=(\mathrm{A}+\mathrm{C})x^3+(\mathrm{B}+\mathrm{D})x^2+(\mathrm{C}+4\mathrm{A})x+(4B+D),$$

e igualando coeficientes con el polinomio $x+3$, obtenemos el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 0=A+C \\ 0=B+D \\ 1=C+4A \\ 3=4B+D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=1 \\ C=-\frac{1}{3} \\ D=-1 \end{cases}$$

El otro camino es el **método de los coeficientes indeterminados**. En este caso no hay valores de x reales que hagan ceros las expresiones de la parte derecha de la ecuación. Así, habría que dar valores arbitrarios a x.

Utilizando los valores calculados anteriormente de A, B, C, y D, obtenemos la descomposición en fracciones simples pedida :

$$\frac{2x+3}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{\frac{1}{3}x+1}{(x^2+1)}-\frac{\frac{1}{3}x+1}{(x^2+4)}.$$ ♦

EJEMPLO 5 :. Calcular la descomposición en fracciones simples de:

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$

SOLUCIÓN:

El numerador tiene grado estrictamente menor que el denominador, por lo que es aplicable el teorema 4.2. Las raíces del denominador $(x\ \ +1)^2(x^2+4)$ son x = $\pm i$

con multiplicidad 2, x= $\pm 2i$ con multiplicidad 1. Por tanto, aplicando el teorema 4.2 la descomposición pedida será :

$$\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+4\right)},$$

donde hay que determinar el valor de las constantes A, B, C, D, E, F. Para determinarlas, quitamos denominadores en la expresión en fracciones simples, obteniendo :

$$x+1=(Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)+(Ex+F)\left(x^2+1\right)^2.$$

Igualando coeficientes en los dos términos de esta última igualdad, se obtiene un sistema de soluciones :

$$\begin{cases} A=-\dfrac{1}{9} \\ B=-\dfrac{1}{9} \\ C=\dfrac{1}{3} \\ D=\dfrac{1}{3} \\ E=\dfrac{1}{9} \\ F=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

(Otra forma sería aplicar el método de los coeficientes indeterminados, pero en este caso no hay valores de x reales que hagan ceros las expresiones de la parte derecha de la ecuación. Así, habría que dar valores arbitrarios a x.)

Utilizando los valores calculados anteriormente de A, B, C, D, E y F obtenemos la descomposición en fracciones simples pedida:

$$\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)}=\frac{-\frac{1}{9}x-\frac{1}{9}}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{\left(x^2+1\right)}+\frac{\frac{1}{9}x+\frac{1}{9}}{\left(x^2+4\right)}. \qquad \blacklozenge$$

EJEMPLO 6 : Calcular la descomposición en fracciones simples de:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}.$$

.

SOLUCIÓN:
El numerador tiene el mismo grado que el denominador, por lo que para aplicar el teorema 4.2 debemos antes efectuar la división entre los dos polinomios, obteniendo.

$$\frac{x^7+5x^6+5x^5+9x^4+6x^3+2x^2+x+1}{x^7+x^6+2x^5+2x^4+x^3+x^2}$$

$$= 1+\frac{4x^6+3x^5+7x^4+5x^3+x^2+x+1}{x^7+x^6+2x^5+2x^4+x^3+x^2},$$

y calculamos ahora la descomposición en fracciones simples de la función racional

$$\frac{4x^6+3x^5+7x^4+5x^3+x^2+x+1}{x^7+x^6+2x^5+2x^4+x^3+x^2},$$

que tiene ya el grado del numerador menor que el grado del denominador.

El denominador $x^7+x^6+2x^5+2x^4+x^3+x^2$ se factoriza como

$$x^7+x^6+2x^5+2x^4+x^3+x^2 = x^2(x+1)\left(x^2+1\right)^2$$

Por tanto, aplicando el teorema 4.2, la descomposición será :

$$\frac{4x^6+3x^5+7x^4+5x^3+x^2+x+1}{x^7+x^6+2x^5+2x^4+x^3+x^2}$$

$$=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)}+\frac{Fx+G}{\left(x^2+1\right)^2},$$

donde hay que determinar el valor de las constantes A, B, C, D, E, F y G.

Para determinarlas, quitamos denominadores en la expresión en fracciones simples e igualando numeradores se obtiene un sistema de ecuaciones, que resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{c} 4 = B + C + D \\ 3 = A + B + D + E \\ 7 = A + 2B + 2C + D + E + F \\ 5 = 2A + 2B + D + E + F + G \\ 1 = 2A + B + C + E + G \\ 1 = A + B \\ 1 = A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \\ D = 3 \\ E = -1 \\ F = 2 \\ G = -1 \end{array}\right.$$

Sustituyendo estos valores, se obtiene la descomposición en fracciones simples pedida :

$$\frac{x^7 + 5x^6 + 5x^5 + 9x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^7 + x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)} + \frac{3x-1}{(x^2+1)} + \frac{2x-1}{(x^2+1)^2}\,. \qquad \blacklozenge$$

4.3.- Cálculo de integrales de funciones racionales

El procedimiento a seguir para el cálculo de una integral racional $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ será en primer lugar asegurarse que en la expresión racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ el polinomio numerador tiene grado estrictamente menor que el polinomio denominador. En caso contrario, se procedería a efectuar la división de los polinomios.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Una vez se tiene ya una expresión racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en las condiciones del teorema 4.2, se calcula la descomposición en fracciones simples de $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Por último, aplicando las propiedades de la integral indefinida, se descompone la integral dada en suma de diversos factores, que serán de alguna de las siguientes formas :

TIPO 1º.- Integrales de la forma $\int C(x)dx$, donde C(x) es un polinomio. El cálculo de estas integrales es inmediato.

TIPO 2º.- Integrales de la forma $\int \frac{dx}{x-r}$, que se calculan de la siguiente forma:

$$\int \frac{dx}{x-r} = \ln|x-r|$$

TIPO 3º.- Integrales de la forma $\int \frac{dx}{(x-r)^m}$, que se calculan de la siguiente forma:

$$\int \frac{dx}{(x-r)^m} = \frac{(x-r)^{-m+1}}{-m+1} = -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x-r)^{m-1}}$$

TIPO 4º.- Integrales de la forma:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx \ , \ \left(\mathrm{M,N,p,q} \in \mathrm{R}, \mathrm{p}^2-4q<0\right)$$

Este tipo de integrales está estudiado en el capítulo 1º y se calculan mediante el algoritmo de los cuatro pasos.

TIPO 5º.- Integrales de la forma:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx \ , \ \left(\mathrm{M,N,p,q} \in \mathrm{R}, \mathrm{m} \in \mathrm{N}, \mathrm{p}^2-4q<0\right)$$

Estas integrales se calculan por reducción de la siguiente manera :

Escribiendo el polinomio $x^2 + px + q$ de la forma $(x-a)^2 + b^2$ con $b \neq 0$, la integral $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx$ quedará de la siguiente forma :

.

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \int \frac{M(x-a)}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^m}dx$$

$$= \int \frac{M(x-a)}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^m}dx + (Ma+N)\int \frac{dx}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^m}$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^m}dx + (Ma+N)\int \frac{dx}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^m}$$

donde la integral $\int \frac{dx}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^m}$ se calcula ahora por un procedimiento recurrente. Llamando $J_n = \int \frac{dx}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}$, se tiene :

$$J_n = \int \frac{dx}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n} = \frac{1}{b^2}\int \frac{b^2dx}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^m}$$

$$= \frac{1}{b^2}\left[\int \frac{(x-a)^2+b^2}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}dx - \int \frac{(x-a)^2}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}dx\right] = \frac{1}{b^2}J_{n-1} - \frac{1}{b^2}K_n$$

donde $K_n = \int \frac{(x-a)^2}{\left[(x-a)^2 + b^2\right]^m} dx$. Calculamos esta última integral por partes, tomando

$$\begin{cases} u = x - a \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{du} = \mathrm{dx} \\ \mathrm{dv} = \dfrac{\mathrm{x - a}}{\left[(\mathrm{x - a})^2 + b^2\right]^n} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{v} = \dfrac{1}{2(1-\mathrm{n})\left[(\mathrm{x - a})^2 + b^2\right]^{n-1}} \end{cases}$$

de donde se obtiene

$$K_n = \frac{x-a}{2(1-n)\left[(x-a)^2 + b^2\right]^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1}.$$

Sustituyendo este valor para K_n en la expresión recurrente de J_n, queda finalmente:

$$J_n = \frac{x-a}{2b^2\,(1-n)\left[(x-a)^2 + b^2\right]^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\,\mathrm{b}^2\,(n-1)} J_{n-1} \quad , \mathrm{n} \geq 1$$

donde el valor de J_1 se calcula por ser una integral del tipo 4.

NOTA 2 : Como ha podido observarse, el cálculo de integrales de la forma $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2 + px + q\right)^m} dx$ resulta ser bastante laborioso. Este es uno de los motivos para introducir el **método de Hermite** (Apartado 4.4) para el caso de integrales racionales donde en la factorización del denominador se tengan raíces complejas múltiples, que son las que dan lugar a integrales de la forma $\int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^m} dx$. Sin embargo, el método de Hermite será aplicable también al caso de raíces reales múltiples.

EJEMPLO 7 : Calcular: $\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-5x+3}}dx$

SOLUCIÓN:

El grado del numerador es menor que el grado del denominador, por lo que directamente se tiene la descomposición en fracciones simples :

$$\frac{2x^2+3}{x^3-3x^2+3x+1}=\frac{5}{(x-1)^3}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)}$$

por lo que la integral pedida queda de la forma :

$$\int \frac{2x^2+3}{x^3-3x^2+3x+1}dx=5\int \frac{dx}{(x-1)^3}+4\int \frac{dx}{(x-1)^2}+2\int \frac{dx}{(x-1)}$$
$$=-\frac{5}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)}+2\ln|x-1|+C$$

♦

EJEMPLO 8 : Calcular $\int \frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx$

SOLUCIÓN:

El grado del numerador es menor que el grado del denominador, por lo que directamente se tiene la descomposición en fracciones simples :

$$\frac{2x+3}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{\frac{2}{3}x+1}{x^2+1}-\frac{\frac{2}{3}x+1}{x^2+4}\quad ,$$

por lo que la integral queda de la forma :

$$\int \frac{2x+3}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx = \int \frac{\frac{2}{3}x+1}{x^2+1}dx - \int \frac{\frac{2}{3}x+1}{x^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\ln\left(x^2+4\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C \ .$$

♦

4.4.- Método de Hermite

Sea $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional, cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de grados respectivos p y q $(p<q)$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ las raíces reales de $Q(x)=0$ con órdenes de multiplicidad respectivos $m_1, m_2, \cdots, m_k$ y sean $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \cdots, a_l \pm ib_l$ sus raíces complejas con órdenes de multiplicidad respectivos $n_1, n_2, \cdots, n_l$, verificándose :

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_l) = q \ ,$$

entonces existe una descomposición única de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ del tipo :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{S(x)}\right) + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_k}{x-\alpha_k} \\ &+ \frac{B_1 x + C_1}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \cdots + \frac{B_l x + C_l}{(x-a_l)^2 + b_l^2} \ .\end{aligned}}$$

donde

$$A_1, A_2, \cdots, A_k, B_1, B_2, \cdots, B_l, C_1, C_2, \cdots, C_l \ ,$$

son constantes reales, $S(x)$ es un polinomio en x con un cero para cada raíz múltiple α de $Q(x)$ =0, pero de modo que α es un cero de $S(x)$=0 con una multiplicidad una unidad menor que la multiplicidad de α como cero de $Q(x)=0$ y $R(x)$ es un polinomio en x de grado una unidad menor que $S(x)$. Una vez determinados $S(x)$ y $R(x)$, y las constantes $A_1, A_2, \cdots, A_k, B_1, B_2, \cdots, B_l, C_1, C_2, \cdots, C_l$, se puede afirmar que :

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{R(x)}{S(x)} + \int \frac{A_1}{x-\alpha_1}dx + \int \frac{A_2}{x-\alpha_2}dx + \cdots + \int \frac{A_k}{x-\alpha_k}dx \\ + \int \frac{B_1x+C_1}{(x-a_1)^2+b_1^2}dx + \cdots + \int \frac{B_lx+C_l}{(x-a_l)^2+b_l^2},\end{aligned}}$$

donde las integrales a calcular son de los tipos 2, 3 y 4.

EJEMPLO 9 : Calcular

$$\int \frac{8x^2+14x+20}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx \cdot$$

SOLUCIÓN:

El grado del numerador es menor que el grado del denominador, y las raíces del denominador son x=-1 (simple) y las complejas correspondientes al polinomio x^2+x+1 (complejas múltiples) por lo que aplicamos el método de Hermite :

$$\frac{x^3-x+1}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right) + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1},$$

donde el polinomio x^2+x+1 tiene las mismas raíces que el denominador del integrando, pero con un orden de multiplicidad una unidad menor (la raíz x=-1 no aparece por ello en este polinomio) y el polinomio indeterminado $Ax+B$ tiene un grado menos que su denominador x^2+x+1.

Nos queda determinar los coeficientes A, B, C, D y E. Para determinarlos, derivando en la última expresión se obtiene :

$$\frac{x^3 - x + 1}{(x+1)\left(x^2 + x + 1\right)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Ax + B}{x^2 + x + 1}\right) + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{\mathrm{A}\left(\mathrm{x}^2 + x + 1\right) - (Ax + B)(2x + 1)}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1},$$

de donde, quitando denominadores:

$$\left(x^3 - x + 1\right) = \left(-Ax^2 - 2Bx + A - B\right)(x+1) + C\left(x^2 + x + 1\right)^2$$
$$+ (Dx + E)(x+1)\left(x^2 + x + 1\right),$$

e identificando coeficientes, se tiene el sistema de ecuaciones :

$$\left\{\begin{array}{c} 0 = C + D \\ 1 = -A + 2C + 2D + E \\ 0 = -A - 2B + 3C + 2D + 2E \\ -1 = A - 3B + 2C + D + 2E \\ 1 = A - B + C + E \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} = \frac{1}{3} \\ \mathrm{B} = \frac{5}{3} \\ \mathrm{C} = 1 \\ \mathrm{D} = \text{-}1 \\ \mathrm{E} = \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

De esta forma:

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{(x+1)\left(x^2 + x + 1\right)^2}\,dx = \frac{\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}{x^2 + x + 1} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-1x + \frac{4}{3}}{x^2 + x + 1}\,dx$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}{x^2 + x + 1} + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] + \frac{11}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right] + C.$$

♦

Ejemplo 10.- Calcular $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}$.

SOLUCIÓN:

El grado del numerador es menor que el grado del denominador, y las raíces del denominador son x=0 (triple) y x=$\pm\, i$ (dobles), por lo que aplicamos el método de Hermite :

$$\frac{x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2 x^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2\left(x^2+1\right)}\right)+\frac{E}{x}+\frac{Fx+G}{x^2+1},$$

donde el polinomio $x^2\left(x^2+1\right)$ tiene las mismas raíces que el denominador del integrando, pero con un orden de multiplicidad una unidad menor (la raíz x=0 será doble y la raíz compleja x=$\pm\, i$ simple) y el polinomio indeterminado Ax^3+Bx^2+Cx+D tiene un grado menos que su denominador $x^2\left(x^2+1\right)$. Nos queda determinar los coeficientes A, B, C, D, E, F y G. Para ello, derivando en la última expresión, se obtiene :

$$\frac{x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2 x^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2\left(x^2+1\right)}\right)+\frac{E}{x}+\frac{Fx+G}{x^2+1}$$

$$=\frac{\left(3Ax^2+2Bx+C\right)x^2\left(x^2+1\right)-2x\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)}{\left(x^2\left(x^2+1\right)\right)^2}+\frac{E}{x}+\frac{Fx+G}{x^2+1},$$

de donde, quitando denominadores e identificando coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones que resolvemos, obteniendo:

$$\begin{cases} A=0 \\ B=\frac{5}{2} \\ C=0 \\ D=1 \\ E=5 \\ F=-5 \\ G=0 \end{cases}$$

De este modo:

$$\int \frac{x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2 x^3}dx = \frac{\frac{5}{2}x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)} + \int \frac{5}{x}dx + \int \frac{-5x}{x^2+1}dx = \frac{\frac{5}{2}x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)} +.$$

$$+5\ln|x| - \frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C \ .$$

♦

EJERCICIOS.- Resolver las siguientes integrales:

4.1.- $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-5x^2+6x}dx$

4.2.- $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-1}dx$

4.3.- $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(2x^2+2\right)\left(x^2+4\right)}$

4.4.- $\displaystyle\int \frac{3x^4+2x^3+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$

4.5.- $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2\left(x^2+2\right)^2}dx$

4.6.- $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{2x^3-x^2-1}dx$

4.7.- $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$

Capítulo 5.- Integración de funciones irracionales

5.1.- Integración de funciones racionales en x y potencias racionales de $\left(\frac{\mathrm{ax+b}}{\mathrm{cx+d}}\right)$

TEOREMA 5.1.- Una integral de una función racional en x y en potencias racionales de $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$, escrita de la forma :

$$I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{m_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{m_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{m_n}}\right)dx\ ,$$

donde $\frac{p_1}{m_1},\frac{p_2}{m_2},\frac{p_3}{m_3},\ldots,\frac{p_n}{m_n}$ son números racionales, expresados de forma irreducible, se reduce a una integral racional mediante el cambio de variable :

$$t^M=\frac{ax+b}{cx+d}$$

donde M es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones $\frac{p_1}{m_1},\frac{p_2}{m_2},\frac{p_3}{m_3},\ldots,\frac{p_n}{m_n}$,

$$M=m.c.m.\left(m_1,m_{2,\ldots},m_n\right).$$

Veamos algunos ejemplos de la utilización del teorema 5.1.

EJEMPLO 1º.- Calcular:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

SOLUCIÓN:
El integrando es una expresión racional en x y de potencias racionales de x, donde $\frac{p_1}{m_1}=\frac{1}{2},\frac{p_2}{m_2}=\frac{1}{4}$ y $a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1.$

Se tiene $M=m.c.m.(2,4)=4$, por lo que efectuamos el cambio de variable :

$$t^4=x\,,\ dx=4t^3\ dt\,,$$

y por tanto la integral pedida queda de la forma :

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{t}{1+t^2}4t^3dt=4\int \frac{t^4}{1+t^2}dt=4\int t^2-1+\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=4\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}(t)\right)+C$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[4]{x}+4\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{x}\right)+C\ .$$

♦

EJEMPLO 2: Calcular :

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{6\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx\,.$$

SOLUCIÓN:
El integrando es una expresión racional en x y de potencias racionales de x, donde

$$\frac{p_1}{m_1}=\frac{1}{2},\frac{p_2}{m_2}=\frac{1}{3}\ \text{y}\ a=1,b=0,c=0,d=1.$$

Se tiene $M=m.c.m.(2,3)=6$, por lo que efectuamos el cambio de variable :

$$t^6=x\,,\ dx=6t^5\ dt\,,$$

y por tanto la integral pedida queda de la forma :

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{6\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx = \int \frac{t^3-1}{6\left(t^2+1\right)}6t^5 dt = \int \frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt = \int \left(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{t-1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \operatorname{arctg}(t) + C$$

$$= \frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{4}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{2}\ln\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right) + \operatorname{arctg}\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + C \quad .$$

♦

EJEMPLO 3: Calcular:

$$\int \frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}dx .$$

El integrando es una expresión racional en x y de potencias racionales de $\frac{4x+1}{x-3}$,

donde $\frac{p_1}{m_1} = \frac{1}{2}$ y $a = 4,\ \ b = 1,\ \ c = 1,\ \ d = -3.$

Se tiene $M = m.c.m.(2) = 2$, por lo que efectuamos el cambio de variable :

$$t^2 = \frac{4x+1}{x-3},$$

de donde, despejando la variable x, se obtiene :

$$x = \frac{1+3t^2}{t^2-4},$$

diferenciando, se obtiene :

$$dx = \frac{6t\left(t^2-4\right) - 2t\left(1+3t^2\right)}{\left(t^2-4\right)^2}dt = -\frac{26t}{\left(t^2-4\right)^2}dt$$

y por tanto la integral pedida queda de la forma :

$$\int \frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}dx = \int \frac{1}{\frac{1+3t^2}{t^2-4}-2}\,t\,\frac{-26t}{\left(t^2-4\right)^2}dt = \int \frac{-26t^2}{\left(t^2-4\right)\left(t^2+9\right)}dt$$

$$= 2\ln\left(\frac{t+2}{t-2}\right) - 6\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + C$$

Deshaciendo el cambio:

$$= 2\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}+2}{\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}-2}\right) - 6\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}}{3}\right) + C \quad .$$

♦

5.2.- Integración de funciones racionales en x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Teorema 5.2.- Una integral de una función racional en x y en $\sqrt{ax^2+bx+c}$, escrita de la forma :

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \ ,$$

con $a,b,c \in R$, $a \neq 0$ puede transformarse en una integral racional mediante alguno de los siguientes cambios de variable :

CASO 1 : Si $a>0$ $\Rightarrow$ Efectuar el cambio $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}\,x$.

CASO 2 : Si $c \geq 0$ $\Rightarrow$ Efectuar el cambio $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

CASO 3 : Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene raíces reales α_1, α_2, entonces efectuar el cambio :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t \ ,$$

siendo α cualquiera de las dos raíces α_1, α_2 . (Eventualmente, las dos raíces pueden ser iguales).

NOTA 1 : El teorema 5.2 nos proporciona el cambio general a efectuar en integrales del tipo $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$. Estos cambios se denominan en la literatura **cambios de Euler**. Estos cambios no tienen por que ser incompatibles entre si, es decir, una misma integral irracional del tipo $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ puede calcularse por más de uno de los cambios descritos. El signo $\pm$ que se utiliza en los cambios de los casos 1 y 2 indica que es indiferente tomar un signo u otro, siendo válido emplear cualquiera de los dos (habitualmente se toma el signo +).

EJEMPLO 4 : Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx$

SOLUCIÓN:

La integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx$ es una función racional en x y en $\sqrt{x^2 + x + 1}$, luego le son aplicables los cambios del teorema 5.2, en particular, los cambios 1 y 2, puesto que el polinomio $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales. Procedamos mediante el cambio del caso 1 :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t + x \ ,$$

de donde, elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t + x \Rightarrow x^2 + x + 1 = t^2 + x^2 + 2xt \Rightarrow x + 1 = t^2 + 2xt$$
$$\Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \Rightarrow dx = \frac{2\left(t^2 + t + 1\right)}{(1 + 2t)^2}dt \ ,$$

con lo que el cambio quedará de la forma :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t + \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} = \frac{3t^2 + t - 1}{1 + 2t} \ ,$$

y la integral quedará :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{\frac{3t^2+t-1}{1+2t}} \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt = 2\int \frac{t^2+t+1}{(3t^2+t-1)(1+2t)}dt$$

que es ya una integral racional. Si en lugar del cambio $\sqrt{x^2+x+1} = t+x$, efectuamos el cambio $\sqrt{x^2+x+1} = t-x$, obtenemos :

$$\sqrt{x^2+x+1} = t-x \Rightarrow x^2+x+1 = t^2+x^2-2xt \Rightarrow x+1 = t^2-2xt$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2-1}{1+2t} \Rightarrow dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt \ ,$$

con lo que el cambio de variable quedará de la forma :

$$\sqrt{x^2+x+1} = t - \frac{t^2-1}{1+2t} = \frac{t^2+t+1}{1+2t} \ ,$$

y la integral quedará ahora:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2+t+1}{1+2t}} \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt = 2\int \frac{1}{1+2t}dt = \ln|2t+1| + C$$

$$= \ln\left|2\mathrm{x}+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + C \ .$$

Observemos que efectuando el segundo cambio de variable, la integral racional es mucho más sencilla de resolver que la obtenida a partir del primer cambio. Vamos ahora a calcular la integral propuesta a partir del cambio del caso 2 :

Efectuamos ahora el cambio de variable :

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt+1 \ ,$$

de donde, elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene :

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt+1 \Rightarrow x^2+x+1 = t^2x^2+2xt+1 \Rightarrow x^2+x = t^2x^2+2xt$$

$$(\text{Dividiendo por } x) \Rightarrow x+1 = t^2x+2t \;\Rightarrow x = \frac{2t-1}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}dt \;\;,$$

con lo que el cambio quedará de la forma :

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{2t-1}{1-t^2}\; t+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2} \;\;,$$

y la integral quedará :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2-t+1}{1-t^2}} \frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}dt = 2\int \frac{1}{1-t^2}dt =$$

$$= \ln|1+t| + \ln|1-t| + C$$

$$= \ln\left|1+\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right| + \ln\left|1 - \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right| + C \;\; .$$

De forma análoga podría efectuarse el segundo cambio de variable del caso 2 :

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt-1 \;.$$

♦

EJEMPLO 5 : Calcular

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} .$$

SOLUCIÓN:

La integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ es una función racional en x y en $\sqrt{x^2+4}$, luego le son aplicables los cambios del teorema 5.2, en particular, los cambios 1 y 2, puesto que el polinomio x^2+4 no tiene raíces reales.

Procedamos mediante el cambio del caso 2 :

$$\sqrt{x^2+4}=tx+2 \ ,$$

de donde, elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene :

$$\sqrt{x^2+4}=tx+2 \Rightarrow x^2+4=t^2x^2+4+4tx \Rightarrow \left(\text{Simplificando y dividiendo por x}\right)$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{x}=t^2x+4t \quad \Rightarrow x=\frac{4t}{1-t^2} \Rightarrow dx=\frac{4+4t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt \ ,$$

con lo que el cambio quedará de la forma :

$$\sqrt{x^2+4}=t\,\frac{4t}{1-t^2}+2=\frac{2t^2+2}{1-t^2} \ ,$$

y la integral quedará :

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}dx=\int\frac{1}{\dfrac{4t}{1-t^2}\ \dfrac{2t^2+2}{1-t^2}}\ \frac{4t^2+4}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\int\frac{4t^2+4}{4t\left(2t^2+2\right)}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right|+C \ .$$

♦

EJEMPLO 6 : Calcular

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}} \ .$$

SOLUCIÓN:

La integral $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ es una función racional en x y en $\sqrt{-x^2-3x+4}$, luego le es aplicable los cambios del teorema 5.2, en particular, el cambio 2. Puesto que el polinomio $-x^2-3x+4$ factoriza como $-x^2-3x+4=-(x-1)(x+4)$ con raíces reales 1 y -4, podemos aplicar a la integral también el cambio del caso 3. Procedamos mediante el cambio del caso 3, para la raíz x = -4:

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=(x+4)t \ ,$$

de donde, elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene :

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2-3x+4}=(x+4)t &\Rightarrow -(x+4)(x-1)=(x+4)^2t^2\\ &\Rightarrow \left(\text{Dividiendo por } (x+4)\right)\Rightarrow \ (x-1)=(x+4)\ t^2\\ &\Rightarrow x=\frac{1-4t^2}{1+t^2}\Rightarrow dx=\frac{-10t}{\left(1+t^2\right)^2}dt,\end{aligned}$$

y de esta forma, la integral quedará :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx&=\int\frac{1}{\frac{t-4t^3}{1+t^2}\ +\ 4\text{t}}\ \frac{-10t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=-2\int\frac{1}{t^2+1}dt\\ &=-2\,\text{arctg}(t)+C=\text{-2arctg}\left(\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x+4}\right)+C\ .\end{aligned}$$

♦

NOTA 2 : El tipo de integrales $I=\int\frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ se puede resolver también mediante el método de los cuatro pasos estudiado en el capítulo 1º

EJEMPLO 7 : Calcular :

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-5x+3}}dx .$$

SOLUCIÓN:

Aplicamos el método de los cuatro pasos (Capítulo 1º), por lo que escribimos:

$$-2x^2-5x+3=-2(x-\alpha)^2+\beta \Rightarrow -2x^2-5x+3=-2x^2+4\alpha x-2\alpha^2+\beta$$

$$\Rightarrow \alpha=-\frac{5}{4}, \beta=\frac{37}{4} \Rightarrow \quad -2x^2-5x+3=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{37}{4},$$

de donde nuestra integral quedará de la forma :

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-5x+3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{37}{4}-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2}}dx ,$$

Efectuamos ahora el cambio de variable : $u=x+\dfrac{5}{4} \Rightarrow dx=du$, con lo que se tiene :

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-5x+3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{37}{4}-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{37}{4}-2u^2}}du ,$$

Sacando factor común 2 en el radical de la última integral, se tiene :

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{37}{4}-2u^2}}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{37}{8}-u^2}}du ,$$

y efectuando ahora el cambio de variable : $u=\sqrt{\frac{37}{8}}t \Rightarrow du=\sqrt{\frac{37}{8}}dt$, la última integral se resuelve y se deshacen los cambios efectuados :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{37}{8}-u^2}}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{\frac{37}{8}}}{\sqrt{\frac{37}{8}-\frac{37}{8}t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}(t)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{8}{37}}u\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(2\sqrt{\frac{2}{37}}\left(x+\frac{5}{4}\right)\right)+C \ ,$$

de donde:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-5x+3}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(2\sqrt{\frac{2}{37}}\left(x+\frac{5}{4}\right)\right)+C \ . \qquad \blacklozenge$$

5.3.- Método alemán

Para resolver integrales del tipo $I=\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, donde $P_n(x)$ es un polinomio en la variable x de grado $n\geq 1,\ a,b,c\in R,\ a\neq 0$, es aplicable el método del teorema 5.2. Sin embargo, puede suponer una economía de cálculo utilizar el siguiente método, conocido como método alemán, que consiste en descomponer el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{d}{dx}\left(Q_{n-1}(x)\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)+\frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \ ,$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio indeterminado de grado n-1 y K es una constante real. Una vez determinados $Q_{n-1}(x)$ y K, se tiene :

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\ \sqrt{ax^2+bx+c}+\int \frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \ ,$$

donde la integral $\int \frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ puede calcularse utilizando el método del teorema 5.2 o utilizando el método de los cuatro pasos.(Véase nota 2). En el caso de que el polinomio $P_n(x)$ tenga grado 1, es interesante señalar que sin necesidad de utilizar el método alemán podemos reducirla al cálculo de una integral del tipo $\int \frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, mediante el método de descomposición estudiado en el capítulo 1.

EJEMPLO 8 : Calcular :

$$\int \frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx .$$

SOLUCIÓN:

En este caso el polinomio -4x + 10 tiene grado 1, por tanto, aplicando el método alemán:

$$\begin{aligned}\int \frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx &= 4\sqrt{-x^2+4x-3}+\int \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx \\ &= 4\sqrt{-x^2+4x-3}+2\operatorname{arcsen}(x-2)+C \quad .\end{aligned}$$

♦

EJEMPLO 9 : Calcular :

$$\int \frac{8x^2+14x+20}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx .$$

SOLUCIÓN:

En este caso el polinomio $8x^2+14x+20$ tiene grado 2. Aplicando el método alemán, se tiene :

$$\frac{8x^2+14x+20}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{d}{dx}\left[(Ax+B)\sqrt{x^2+2x+3}\right]+\frac{C}{\sqrt{x^2+2x+3}} ,$$

de donde, derivando la expresión anterior y quitando denominadores, se obtiene :

$$8x^2 + 14x + 20 = A\left(x^2 + 2x + 3\right) + (Ax + B)(x + 1) + C,$$

igualando coeficientes en la última igualdad, se sigue :

$$\begin{cases} 8 = 2A \\ 14 = 3A + B \\ 20 = 3A + B + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 2 \\ C = 6 \end{cases}$$

y por tanto :

$$\int \frac{8x^2 + 14x + 20}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\,dx = (4x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \int \frac{6}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\,dx,$$

Aplicando ahora el método de los cuatro pasos, se obtiene :

$$\int \frac{6}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\,dx = 6 \arg sh\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right),$$

y por tanto :

$$\int \frac{8x^2 + 14x + 20}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\,dx = (4x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 6 \arg sh\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + C. \qquad \blacklozenge$$

NOTA 4: Para resolver integrales del tipo $I = \int \frac{dx}{(Ax + B)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, donde $A, B,\ a, b, c \in R,\ \mathrm{A} \neq 0, a \neq 0,\ n \in N$, es aplicable el teorema 5.2, pero puede ser más sencillo su cálculo si se realiza el cambio de variable :

$$Ax + B = \frac{1}{t},$$

con lo que se obtendrá : $x = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{t} - B\right) \Rightarrow dx = -\frac{1}{At^2}\,dt$. De esta forma, el radical del integrando quedará :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{Mt^2 + Nt + P}}{t},$$

donde $M.N.P \in R$ se calculan a partir de $A, B,\ a, b, c$ y la integral queda ahora de la forma :

$$\int \frac{dx}{(Ax+B)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{-\frac{1}{At^2}dt}{\left(\frac{1}{t}\right)^n \frac{\sqrt{Mt^2+Nt+P}}{t}} = -\frac{1}{A}\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{Mt^2+Nt+P}},$$

donde la integral $-\frac{1}{A}\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{Mt^2+Nt+P}}$, se puede calcular de distintas formas según sean los valores de *n*:

- Si $n = 1$ utilizaremos el método de los cuatro pasos y buscaremos una integral del tipo arcsen, argsh, argch.
- Si $n = 2$ utilizaremos una descomposición irracional (Véase el apartado 1.2.3.3, del capítulo 1º).
- Si $n \geq 2$ la integral es calculable por el cambio del teorema 5.2, o utilizando el método alemán.

EJEMPLO 10 : Calcular:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

SOLUCIÓN:

La integral pedida pertenece al tipo de las estudiadas en la nota 4, por tanto efectuamos el cambio de variable:

$$x + 1 = \frac{1}{t},$$

con lo que se obtendrá :

$$x=\frac{1}{t}-1 \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}\,dt\ .$$

De esta forma, el radical quedará :

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}\ ,$$

y la integral queda de la forma :

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=\int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}}=-\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-t+1}}\ ,$$

Escribimos ahora esta última integral como suma de dos, siendo una de ellas inmediata :

$$-\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-t+1}}=-\left\{\frac{1}{2}\int \frac{2t-1\,dt}{\sqrt{t^2-t+1}}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\sqrt{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}\ .$$

Calculamos ahora la última integral : $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$.

Descomponiendo el radicando en suma de cuadrados. en este caso, se tiene:

$$t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

por tanto :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}=\arg sh\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Sustituyendo en la integral original :

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=-\frac{1}{2(x+1)}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\arg sh\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\right)\right)+C\ .$$

♦

5.4.- Integración de funciones racionales en x y el radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$ incompleto

Las integrales que estudiaremos en esta sección se dividen en cuatro tipos:

TIPO 1.- Son integrales de la forma $I=\int R\left(x,\sqrt{c^2-a^2x^2}\right)dx$. Estas integrales se reducen a integrales de tipo trigonométrico mediante el cambio de variable :

$$x=\frac{c}{a}\operatorname{sen}(t) \text{ ó } x=\frac{c}{a}\cos(t) .$$

TIPO 2.- Son integrales de la forma $I=\int R\left(x,\sqrt{c^2+a^2x^2}\right)dx$. Estas integrales se reducen a integrales de tipo trigonométrico mediante el cambio de variable :

$$x=\frac{c}{a}\operatorname{tg}(t) .$$

TIPO 3.- Son integrales de la forma $I=\int R\left(x,\sqrt{a^2x^2-c^2}\right)dx$. Estas integrales se reducen a integrales de tipo trigonométrico mediante el cambio de variable :

$$x=\frac{c}{a}\sec(t) .$$

TIPO 4.- Son integrales de la forma $I=\int R\left(x,\sqrt{ax\pm c}\right)dx$. Estas integrales son en realidad de la forma $I=\int R\left(x,(ax\pm b)^{\frac{1}{2}}\right)dx$, que se calculan utilizando el teorema 5.1.

EJEMPLO 11 : Calcular: $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

SOLUCIÓN:

La integral dada pertenece al tipo 3, por lo que efectuamos el cambio de variable :

$$x=\sec(t)\Rightarrow dx=\sec(t)\operatorname{tg}(t)dt ,$$

de esta forma, la integral propuesta quedará :

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec(t)\sec(t)\operatorname{tg}(t)}{\sqrt{\sec^2(t)-1}}dt = \int \sec^2(t)dt = \operatorname{tg}(t) + C = \operatorname{tg}(arc\sec(x)) + C.$$

♦

5.5.- Integrales binomias

5.5.1.- Definición : Una integral binomia es una integral irracional de la forma :

$$I = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx \quad .$$

donde $a, b \in R, m, n, p \in Q$.

5.5.2.- Resolución de integrales binomias.

Las integrales binomias se pueden transformar en integrales racionales cuando alguno de los números : $\frac{m+1}{n}, p, \frac{m+1}{n} + p$ es un número entero. Para resolverlas, efectuamos previamente el cambio de variable :

$$x^n = t \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \,,$$

con lo que la integral binomia queda de la forma :

$$I = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx \;\; = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bt)^p dt \quad .$$

El segundo cambio de variable a efectuar depende de cuál de los números $\frac{m+1}{n}, p, \frac{m+1}{n} + p$ es un entero. Estudiemos caso por caso :

- **CASO** 1.- Si $\frac{m+1}{n}$ es un entero, se efectúa ahora el cambio de variable :

$a + bt = z^r$, siendo r el denominador de p cuando p viene expresado como una fracción irreducible.

- **CASO** 2.- Si p es un entero, se efectúa ahora el cambio de variable :

$$t = z^r ,$$

siendo r el denominador de $\frac{m+1}{n} - 1$ cuando $\frac{m+1}{n} - 1$ viene expresado como una fracción irreducible.

- **CASO** 3.- Si $\frac{m+1}{n} + p$ es un entero, multiplicamos y dividimos el integrando $t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p$ por t^p, por lo que la integral se transforma en :

$$I = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx \; = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p \, dt \; = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1+p}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$$

que es ahora una integral del tipo : $I = \int R\left(t, \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right) dx$, que ya se ha

estudiado en el teorema 5.1, por lo que efectuando ahora el cambio de variable :

$$\frac{a+bt}{t} = z^r ,$$

siendo r el denominador de p cuando p viene expresado como una fracción irreducible.

Los cambios estudiados en los tres casos, transforman la integral binomia, en una integral racional. Si la integral binomia no puede clasificarse en ninguno de los tres casos anteriores, no será resoluble mediante operaciones elementales. (Véase la nota 2 del capítulo 1º).

EJEMPLO 12 : Calcular:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

SOLUCIÓN:

Esta integral es una integral binomia, ya que puede escribirse de la forma:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \int x^2\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m}=2, n=3, p=-\frac{1}{2}.$$

Por tanto, se tiene : $\frac{m+1}{n}=1, \quad p=-\frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}$, por lo que podemos mediante cambios de variable convertir la integral propuesta en una integral racional. Efectuamos primero el cambio general:

$$x^3 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt,$$

con lo que la integral binomia queda de la forma :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \int x^2\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int (1+t)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

,

y teniendo en cuenta que $\frac{m+1}{n}$ es un entero, efectuamos el cambio de variable del caso 1:

$$1+t=z^2 \quad \Rightarrow \quad dt = 2zdz,$$

con lo que obtenemos :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \int x^2\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int (1+t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}\int z^{-1}zdz = \frac{2}{3}z + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1+t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C \quad .$$

♦

EJEMPLO 13 : Calcular : $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^{2}}dx$

SOLUCIÓN:

Esta integral es una integral binomia, ya que puede escribirse de la forma:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^{2}}dx = \int x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m}=\frac{1}{3}, n=\frac{1}{2}, p=-2 .$$

Por tanto, se tiene : $\frac{m+1}{n}=\frac{8}{3}, p=-2, \frac{m+1}{n}+p=\frac{2}{3}$, por lo que podemos mediante cambios de variable convertir la integral propuesta en una integral racional. Efectuamos primero el cambio general :

$$x^{\frac{1}{2}}=t \;\Rightarrow\; dx=2tdt ,$$

con lo que la integral binomia queda de la forma :

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^{2}}dx = \int x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} dx \quad = 2\int \mathrm{t}^{\frac{5}{3}}(1+t)^{-2}\,dt ,$$

y teniendo en cuenta que p es un entero, efectuamos el cambio de variable del caso 2:

$$t=z^{3} \quad \Rightarrow \quad dt=3z^{2}dz ,$$

con lo que obtenemos :

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^{2}}dx = \int x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} dx \quad = 2\int \mathrm{t}^{\frac{5}{3}}\left(1+t\right)^{-2}dt = 6\int \frac{z^{7}}{1+2z^{3}+z^{6}}dz .$$

La última integral es ya una integral racional. Resolviéndola, se obtiene :

$$6\int \frac{z^7}{1+2z^3+z^6}\,dz = -\frac{10\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}(2z-1)}{3}\right] - \frac{10}{9}\ln\left(z^2-z+1\right) +$$

$$+\frac{10}{3}\ln\left(z+1\right) + \frac{z^2\left(3z^3+5\right)}{\left(z^3+1\right)} + c$$

por lo que, deshaciendo los cambios de variable efectuados, se tiene :

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\,dx = -\frac{10\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}-1\right)}{3}\right] - \frac{10}{9}\ln\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}+1\right) +$$

$$+\frac{10}{3}\ln\left(\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}+1\right) + \frac{\sqrt[3]{x}\left(3x^{\frac{1}{2}}+5\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)} + C \quad .$$

♦

EJEMPLO 14 : Calcular : $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}$

SOLUCIÓN:

Esta integral es una integral binomia, ya que puede escribirse de la forma:

$$\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m} = -2, \mathrm{n} = 3, \mathrm{p} = -\frac{5}{3}.$$

Por tanto, se tiene : $\dfrac{m+1}{n}=-\dfrac{1}{3}, p=-\dfrac{5}{3}, \dfrac{m+1}{n}+p=-2$, por lo que podemos mediante cambios de variable convertir la integral propuesta en una integral racional. Efectuamos primero el cambio general:

$$x^3=t \Rightarrow dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt,$$

con lo que la integral binomia queda de la forma :

$$\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}=\int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx=\frac{1}{3}\int \mathrm{t}^{-\frac{4}{3}}(2+t)^{-\frac{5}{3}}dt \quad ,$$

y teniendo en cuenta que $\dfrac{m+1}{n}+p$ es un entero, siguiendo los pasos estudiados en el caso 3, multiplicamos y dividimos el integrando por $t^{-\frac{5}{3}}$, por lo que la integral se transforma en

$$\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}=\int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx=\frac{1}{3}\int \mathrm{t}^{-\frac{4}{3}}(2+t)^{-\frac{5}{3}}dt=\frac{1}{3}\int \mathrm{t}^{-3}\left(\frac{2+t}{t}\right)^{-\frac{5}{3}}dt$$

Efectuamos ahora el cambio de variable del teorema 5.1:

$$\frac{2+t}{t}=z^3 \Rightarrow \mathrm{t}=\frac{2}{1-\mathrm{z}^3}, \quad dt=\frac{6z^2}{\left(1-\mathrm{z}^3\right)^2}dz,$$

con lo que se obtiene :

$$\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}=\int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx=\frac{1}{3}\int \mathrm{t}^{-\frac{4}{3}}(2+t)^{-\frac{5}{3}}dt=\frac{1}{3}\int \mathrm{t}^{-3}\left(\frac{2+t}{t}\right)^{-\frac{5}{3}}dt=$$

$$=2\int\left(\frac{2}{1-z^3}\right)^{-3}z^{-5}\frac{z^2}{\left(1-z^3\right)^2}dz=\frac{1}{4}\int \frac{1-z^3}{z^2}dz \quad .$$

La última integral es ya racional. Integrándola y deshaciendo los cambios de variable efectuados, se obtiene :

$$\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{1}{4}\frac{\left(2+x^3\right)^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{\left(2+x^3\right)^{\frac{2}{3}}} + C$$

♦

EJERCICIOS.- Resolver las siguientes integrales:

5.1.- $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}}dx$

5.2.- $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$

5.3.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

5.4.- $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

5.5.- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}$

5.6.- $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1\pm x^2}}$

5.7.- $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$

Capítulo 6.- Ejercicios resueltos

EJERCICIO 1º.- Calcular las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{9x^2-4}$ 2) $\int \frac{2x+7}{2x^2+2x+1}dx$ 3) $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

SOLUCIONES:

1) Es una integral del tipo estudiado en el apartado 1.2.2:

$$I=\int \frac{dx}{9x^2-4}=\int \frac{dx}{(3x)^2-4}$$
$$=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}dx}{\left(\frac{3x}{2}\right)-1}=\frac{1}{6}\arg Th\,\frac{3x}{2}+C$$

♦

2) Es una integral racional del tipo estudiado en el apartado 1.2.3.2:

$$I=\int \frac{2x+7}{2x^2+2x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{4x+14}{2x^2+2x+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx+6\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(2x^2+2x+1\right)+I_1$$

Calculando aparte I_1:

$$I_1=\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}=2\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}=$$
$$=\int \frac{2dx}{(2x+1)^2+1}=\text{arctg}\,(2x+1)+C$$

Sustituyendo en la integral pedida:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left(2x^2+2x+1\right)+\operatorname{arctg}\left(2x+1\right)+C \qquad \blacklozenge$$

3) Es del tipo estudiado en el apartado 1.2.3.3:

$$I=\int\frac{5xdx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{5}{2}\int\frac{2xdx}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}=\frac{5}{2}arc\operatorname{sen}x^2+C \qquad \blacklozenge$$

EJERCICIO 2 .- Calcular las siguientes integrales:

4) $\displaystyle\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ 5) $\displaystyle\int\frac{6x^2-1}{4x^3-2x+1}dx$ 6) $\displaystyle\int\frac{6-x}{\sqrt{4x^2-12x+7}}dx$

SOLUCIONES:

4) Es una integral irracional que se resuelve según lo estudiado en el apartado 1.2.3.3.-

$$I=\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}dx+\int\frac{7dx}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+I_1$$

Calculamos aparte I_1:

$$I_1=7\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+4}}=7\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2x+1\right)^2+3}}$$

$$=\frac{7}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}=\frac{7}{2}\int\frac{{}^2\!/\!_{\sqrt{3}}\,dx}{\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$

Por tanto:

$$I_1 = \frac{7}{2} \arg Sh \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

La integral pedida será:

$$I = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{7}{2} \arg Sh \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \qquad \blacklozenge$$

5) Es una integral casi inmediata, estudiada en el apartado 1.2.2:

$$\int \frac{6x^2 - 1}{4x^3 - 2x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{12x^2 - 2}{4x^3 - 2x + 1} dx = \frac{1}{2} \ln\left(4x^3 - 2x + 1\right) + C \qquad \blacklozenge$$

6) Es una integral estudiada en el apartado 1.2.3.3.:

$$\int \frac{6-x}{\sqrt{4x^2 - 12x + 7}} dx = -\int \frac{x-6}{\sqrt{4x^2 - 12x + 7}} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{8x - 48}{2\sqrt{4x^2 - 12x + 7}} dx$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{4x^2 - 12x + 7} + \int \frac{36dx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 7}} = -\frac{1}{4}\sqrt{4x^2 - 12x + 7} + I_1$$

Calculando aparte la integral I_1 (Es del tipo 1.2.2):

$$I_1 = 18\sqrt{2} \int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{\left(\frac{2x-3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}} = 9\sqrt{2} \arg Ch\left(\frac{2x-3}{\sqrt{2}}\right) + C$$

La integral pedida será:

$$I = -\frac{1}{4}\sqrt{4x^2 - 12x + 7} + 9\sqrt{2} \arg Ch\left(\frac{2x-3}{\sqrt{2}}\right) + C \qquad \blacklozenge$$

EJERCICIO 3.- Calcular las siguientes integrales:

7) $\int \frac{x^3 dx}{\left(4+x^2\right)^3}$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\ \operatorname{arcsen} x}$ 9) $\int \left(4+2x+x^2\right)e^{-2x}dx$

SOLUCIONES:

7) Es una integral racional, pudiendo simplificar los cálculos mediante un cambio de variable previo:

$$I=\int \frac{x^3 dx}{\left(4+x^2\right)^3}=\left\{\begin{array}{l} x^2+4=t \\ x^2=t-4 \\ 2x\,dx=dt \end{array}\right\}=\int \frac{x^2 x\,dx}{\left(4+x^2\right)^3}=\frac{1}{2}\int \frac{(t-4)dt}{t^3}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{t^3}\right)dt$$

Calculando el valor de los parámetros *a, b, c:*

$$I=\left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \\ c=4 \end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}-2\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{t^2}+C$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$I=\frac{-1}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}+C \qquad \blacklozenge$$

8) Es una integral casi inmediata del tipo 1.2.2. Efectuamos un cambio de variable para simplificar :

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\ \operatorname{arcsen} x}=\left\{\begin{array}{l} \operatorname{arcsen} x=t \\ dt=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right\}=C$$

Deshaciendo el cambio:

$$I=\ln\left|\operatorname{arcsen} x\right|+C \qquad \blacklozenge$$

9) Es una integral que se resuelve por el método de integración por partes,estudiado en el apartado 3.2-1.- En este caso se tendrá que aplicar el método, dos veces:

$$I=\int\left(4+2x+x^2\right)e^{-2x}dx=\left\{\begin{matrix} e^{-2x}dx=dv \\ u=x^2+2x+4 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} v=-\frac{1}{2}e^{-2x} \\ du=2x+2 \end{matrix}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+2x+4\right)+\frac{1}{2}\int(2x+2)e^{-2x}dx=\left\{\begin{matrix} 2x+2=u \\ dv=e^{-2x}dx \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} du=2 \\ v=\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+2x+4\right)+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(2x+2)+\int e^{-2x}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+2x+4\right)-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+2)-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

Simplificando el resultado:

$$I=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+4x+3\right)+C$$ ♦

EJERCICIO 4.- Calcular las siguientes integrales:

10) $\int x^3\ln^2 x dx$ 11) $\int\frac{x^3+1}{(x-1)^4}dx$ 12) $\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx$

SOLUCIONES:

10) Es una integral del tipo estudiado en el apartado 3.2.3: En este caso se tendrá que aplicar el método de integración por partes dos veces:

$$I=\int x^3(\ln x)^2dx=\left\{\begin{matrix} (\ln x)^2=u \\ x^3dx=dv \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} du=\frac{2\ln x}{x}dx \\ v=\frac{x^4}{4} \end{matrix}\right\}=(\ln x)^2\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\int x^3\ln x\,dx$$

$$=\left\{\begin{matrix} \ln x=u \\ x^3dx=dv \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} du=\frac{dx}{x} \\ v=\frac{x^4}{4} \end{matrix}\right\}=(\ln x)^2\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\frac{x^4}{4}+C\right]$$

Simplificando, quedará:

$$I = \frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right) + C \qquad \blacklozenge$$

11) Es una integral racional del tipo estudiado en el apartado 4.3: En este caso el denominador sólo tiene una raiz con grado de multiplicidad n=4

$$\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4}dx = \int \frac{a}{(x-1)}dx + \int \frac{b}{(x-1)^2}dx + \int \frac{c}{(x-1)^3}dx + \int \frac{d}{(x-1)^4}dx$$

Calculamos los valores de los parámetros:

$$x^3 + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$
$$a = 1 \quad b = 3 \quad c = 3 \quad d = 2$$

Quedando cuatro integrales inmediatas. El resultado es:

$$I = \ln(x-1) - \frac{3}{(x-1)} - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} + C \qquad \blacklozenge$$

12) Es una integral irracional del tipo estudiado en el apartado 5.1 :

$$I = \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx = \left\{ \begin{matrix} 1+x^3 = t^2 \\ 3x^2 = 2tdt \end{matrix} \right\} = \int \frac{x^3 x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{2}{3}\int \frac{(t^2-1)tdt}{t}$$

$$I = \frac{2}{9}t^3 - \frac{2t}{3} + C$$

Deshaciendo el cambio:

$$\boldsymbol{I} = \frac{2}{9}\sqrt{\left(1+x^3\right)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C \qquad \blacklozenge$$

EJERCICIO 5 .- Calcular las siguientes integrales:

13) $\int \cos^2 5x dx$ 14) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+2e^x - e^{2x}}}$ 15) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}dx$

SOLUCIONES:

13) Es del tipo estudiado en el apartado 2.2.2: Efectuamos un cambio de variable para facilitar el cálculo:

$$I = \int \cos^2 5x dx = \left\{ \begin{array}{l} 5x = t \\ dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right\} = \frac{1}{5}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$I = \frac{1}{10}\int \left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{t}{10} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{20} + C$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{5x}{10} + \frac{\operatorname{sen} 10x}{20} + C = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 10x}{20} + C \qquad \blacklozenge$$

14) Mediante un cambio de variable para facilitar el cálculo, se transforma en una integral racional:

$$I = \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+2e^x - e^{2x}}} = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{t^2\,\frac{dt}{t}}{\sqrt{1+2t-t^2}} = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{(1-t)^2}}$$

$$I = \int \frac{t\,dt}{1-t} = -\int \frac{-1+1-t}{1-t}dt = \int \frac{dt}{1-t} - \int dt$$

$$I = -\ln|1-t| - t + c = -\ln\left(1-e^x\right) - e^x + C$$

deshaciendo el cambio:

$$I = -\ln\left(1-e^x\right) - e^x + C \qquad \blacklozenge$$

15) Es una integral trigonométrica del tipo estudiado en el apartado 2.2.2:

$$I=\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}dx=\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x}dx=\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 x = t^2 \\ \dfrac{1}{\cos^4 x}=\left(1+t^2\right)^2 \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right\}$$

$$I=\int \frac{t^2\left(1+t^2\right)^2}{1+t^2}dt=\int\left(t^2+t^4\right)dt$$

$$I=\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C$$

deshaciendo el cambio:

$$\boldsymbol{I}=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$$ ♦

EJERCICIO 6 .- Calcular las siguientes integrales:

16) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}e^x dx$ 17) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$ 18) $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

SOLUCIONES:

16) Utilizando transformaciones trigonométricas, la integral se transforma en suma de cuatro integrales; dos de ellas se resuelven por partes, y su resultado se simplifica con las otras dos:

$$I=\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}e^x dx=\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}e^x dx$$

$$I=\int \frac{1-\cos x+\operatorname{sen} x-\cos x\ \operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x}e^x dx$$

$$I=\int \frac{e^x}{\operatorname{sen}^2 x}dx-\int \frac{\cos x\, e^x}{\operatorname{sen}^2 x}dx+\int \frac{e^x}{\operatorname{sen} x}dx-\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}e^x dx=I_1-I_2+I_3-I_4$$

Resolviendo aparte las integrales I_1 y I_3:

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{l|l} e^x dx = dv & v = e^x \\ \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = u & du = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \end{array} \right\} = -e^x \cot g\, x + I_4$$

$$I_3 = \left\{ \begin{array}{l|l} e^x dx = dv & v = e^x \\ \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = u & du = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx \end{array} \right\} = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x} + I_2$$

El resultado será la suma de las cuatro integrales, por tanto:

$$I = -e^x \cot g\, x + I_4 + \frac{e^x}{\operatorname{sen} x} + I_2 - I_4 - I_2 = e^x \left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \right) + C \qquad \blacklozenge$$

17) Esta integral racional del tipo estudiado en el apartado 4.3:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 \left(x^2 + x + 1\right)} = \int \frac{a\, dx}{(x-1)} + \int \frac{b\, dx}{(x-1)^2} + \int \frac{mx+n}{x^2 + x + 1} dx$$

Para calcular los parámetros, se tiene:

$$\frac{1}{(x-1)^2 \left(x^2 + x + 1\right)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{mx+n}{x^2 + x + 1}$$

$$1 = a(x-1)^2 \left(x^2 + x + 1\right) + b\left(x^2 + x + 1\right) + (mx+n)(x-1)^2$$

$$b = \frac{1}{3} \qquad a = -\frac{1}{3} \qquad m = \frac{1}{3} \qquad n = \frac{1}{3}$$

Quedando dos integrales inmediatas y otra del tipo estudiado en 1.2.3.2:

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx$$

$$I=-\frac{1}{3}\ln(x-1)+\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+I_1$$

Resolviendo esta última aparte:

$$I_1=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}$$

$$I_1=\frac{1}{6}\frac{4}{3}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

El resultado final será:

$$I=-\frac{1}{3}\ln(x-1)+\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C \qquad \blacklozenge$$

18) Es una integral que se resuelve por el método de integración por partes

$$I=\int\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\left\{\begin{array}{l|l}\ln x=u & du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=\dfrac{x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow & v=\displaystyle\int\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}=I_1\end{array}\right\}$$

Resolviendo aparte esta integral:

$$I_1=\int\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}=\left\{\begin{array}{l}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\end{array}\right.=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$$

Queda:

$$I = -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\left(1+x^2\right)} = -\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} + I_2$$

Esta I_2, se resuelve como una integral racional, quedando**:**

$$I_2 = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

El resultado final será:

$$I = -\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} + \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$ ♦

EJERCICIO 7.- Calcular las siguientes integrales:

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ 20) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1-k\operatorname{sen} x}}\,dx$ 21) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x+3)}{\cos x}\,dx$

SOLUCIONES:

19) Es una integral irracional del tipo estudiado en el apartado 5.2:

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}} = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1+x+x^2} = x+t \\ x = \dfrac{t^2-1}{1-2t} \\ dx = \dfrac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}\,dt \end{array}\right\} = \int \frac{2\dfrac{-t^2+t+1}{(1-2t)^2}\,dt}{\dfrac{t^2-2t}{1-2t}\cdot\dfrac{-t^2+t-1}{1-2t}}$$

$$I = \int \frac{2\,dt}{t\,(t-2)} = \int \frac{-dt}{t} + \int \frac{dt}{t-2} = -\ln t + \ln(t-2) + C$$

Por las propiedades de las funciones logarítmicas:

$$I = \ln\frac{(t-2)}{t} + C$$

Deshaciendo el cambio,

$$\mathrm{I} = -\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-2}{\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C \qquad \blacklozenge$$

20) Mediante transformaciones trigonométricas, y un cambio de variable para simplificar los cálculos, la integral se transforma en una integral. irracional estudiada en el apartado 1.2.3.3:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1-k\operatorname{sen} x}}dx \quad , \qquad K<1$$

$$I = \int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{1-k\operatorname{sen} x}}dx = \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = t \\ dt = \cos x\; dx \end{array}\right\} = \int \frac{2tdt}{\sqrt{1-kt}} = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1-kt} = u \\ t = \dfrac{1-u^2}{k} \\ dt = \dfrac{-2u\,du}{k} \end{array}\right\} =$$

$$I = 2\int \frac{\frac{1-u^2}{k}\cdot\frac{-2u}{k}du}{u} = \frac{-4}{k^2}\int\left(1-u^2\right)du$$

Que es una integral inmediata:

$$I = \frac{-4\sqrt{1-kt}}{k^2} + \frac{4\sqrt{(1-kt)^2}}{3k^2}$$

Deshaciendo los cambios:

$$I = -\frac{4}{k^2}\sqrt{1-k\operatorname{sen} x}\left(1-\frac{\sqrt{1-k\operatorname{sen} x}}{3}\right) + C \qquad \blacklozenge$$

21) Mediante transformaciones trigonométricas, la integral se descompone en suma de integrales trigonométricas más sencillas:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}(2x+3)}{\cos x}\,dx = \int \frac{A}{\cos x}\,dx$$

$$A = \operatorname{sen}(2x+3) = \operatorname{sen} 2x\ \cos 3 + \cos 2x\ \operatorname{sen} 3$$

$$= 2\operatorname{sen} x \cos x\ \cos 3 + \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{sen} 3$$

$$= 2\cos 3\ \operatorname{sen} x\ \cos x + \operatorname{sen} 3\ \cos^2 x - \operatorname{sen} 3\ \operatorname{sen}^2 x$$

La integral queda, por tanto:

$$I = 2\cos 3 \int \operatorname{sen} x\ dx + \operatorname{sen} 3 \int \cos x\ dx - \operatorname{sen} 3 \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx$$

o lo que es lo mismo:

$$I = 2\cos 3 I_1 + \operatorname{sen} 3 I_2 - \operatorname{sen} 3 I_3$$

Calculandolas aparte:

$$I_1 = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C_1$$

$$I_2 = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C_2$$

$$I_3 = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx$$

Como $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$ es una función impar en cos*x*, se aplica el cambio sen*x* =*t*. El resultado es:

$$I_3 = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \operatorname{sen} x + C_3$$

El resultado final será la suma de los tres integrales:

$$I = -2\cos 3\ \cos x + 2\operatorname{sen} 3\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3\ \ln\left|\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\ \right| - \operatorname{sen} 3\ \operatorname{sen} x + C$$

♦

EJERCICIO 8.- Calcular las siguientes integrales:

22) $\int x^2 \operatorname{sen}(\ln x)dx$ 23) $\int arc\ \cos 2x\, dx$ 24) $\int \frac{\ln|x+1|}{\sqrt{x+1}}dx$

SOLUCIONES:

22) Efectuamos un cambio de variable para simplificar los cálculos, quedando una integral del tipo estudiado en el apartado 3.2.4: Tendremos que aplicar el método de integración por partes dos veces

$$I = \int x^2 \operatorname{sen}\left(\ln x\right)dx = \left\{\begin{array}{l} \ln x = t \\ x = e^t \\ dx = e^t dt \end{array}\right\} = \int e^{3t} \operatorname{sen} t\ dt$$

$$I = \left\{\begin{array}{l|} u = \operatorname{sen} t \\ dv = e^{3t} dt \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \cos t\ dt \\ v = \frac{1}{3}e^{3t} \end{array}\right\} = \frac{1}{3}e^{3t} \operatorname{sen} t - \int \frac{1}{3}e^{3t} \cos t dt$$

Volviendo a aplicar el método de integración por partes

$$I = \frac{1}{3}e^{3t} \operatorname{sen} t - \int \frac{1}{3}e^{3t} \cos t\ dt = \left\{\begin{array}{l|} u = \cos t \\ dv = e^{3t} dt \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = -\operatorname{sen} t\ dt \\ v = \frac{1}{3}e^{3t} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{1}{3}e^{3t} \operatorname{sen} t - \frac{1}{9}e^{3t} \cos t - \frac{1}{9}\int e^{3t} \operatorname{sen} t\ dt$$

Esta última integral es la inicial, por tanto:

$$I = \frac{1}{3}e^{3t} \operatorname{sen} t - \frac{1}{9}e^{3t} \cos t - \frac{1}{9}I$$

Despejando el valor de *I*, y deshaciendo el cambio de variable:

$$I = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{3}e^{3\ln x} \operatorname{sen}\ \ln x - \frac{1}{9}e^{3\ln x} \cos\ \ln x\right) + C$$ ♦

23) Efectuando dos cambios de variable sucesivos para simplificar los cálculos, nos queda una integral que se puede resolver por el método de integración por partes según lo estudiado en el apartado 3.2.2:

$$I = \int arc\ \cos 2x\, dx = \begin{Bmatrix} 2x = t \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int arc \cos\, t\ \ dt$$

$$I = \begin{Bmatrix} \arccos\, t = z \\ t = \cos\, z \\ dt = -\operatorname{sen} z\ dz \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\int z\ \operatorname{sen} z\ dz$$

$$I = \left\{ \begin{matrix} u = z \\ dv = \operatorname{sen} z\ dz \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = dz \\ v = -\cos z \end{matrix} \right. \right\} = \frac{1}{2} z\ \cos z - \int \cos z\, dz$$

$$I = \frac{z}{2}\ \cos z - \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} z + C$$

Deshaciendo los cambios, queda:

$$I = x \arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$$ ♦

24) Es una integral irracional del tipo estudiado en el apartado 5.1, resolviéndose después por el método de integración por partes:

$$I = \int \frac{\ln|x+1|}{\sqrt{x+1}}\, dx = \begin{Bmatrix} x+1 = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{Bmatrix} = 4\int t\, \frac{\ln t\ \ dt}{t}$$

$$= 4\int \ln t\, dt = \left\{ \begin{matrix} \ln t = 4 \\ dt = dv \end{matrix} \right| \Rightarrow \left. \begin{matrix} du = \dfrac{dt}{t} \\ v = t \end{matrix} \right\} = 4t \ln t - 4\int dt$$

Resolviendo esta última integral, que es inmediata, y deshaciendo el cambio, queda:

$$I = 4\sqrt{x+1}\left(\ln\left|\ \sqrt{x+1}\ \right| - 1\right) + C$$ ♦

EJERCICIO 9.- Calcular las siguientes integrales:

25) $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arcsen} x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 26) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}}$ 27) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

SOLUCIONES:

25) Es una integral que se resuelve por el método de integración por partes, según lo estudiado en el apartado 3.2.3:

$$I=\int \frac{x\, arc\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{l|} arc \operatorname{sen} x = u \\ dv = \dfrac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\ arc\ \operatorname{sen} x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Resolviendo esta última integral:

$$I = -\sqrt{1-x^2}\ arc\ \operatorname{sen} x + x + C \qquad \blacklozenge$$

26) Se puede resolver mediante un cambio de variable hiperbólico (Anexo 2):

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}} = \frac{1}{a^3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)^3}} = \left\{ \begin{array}{l} sh\,t = \dfrac{x}{a} \\ dx = a\ ch\,t\ dt \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{a\,ch\,t\ dt}{\sqrt{\left(sh^2 t+1\right)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{ch^2 t}$$

Esta última integral es inmediata;

$$I = \frac{1}{a^2}t\,h\,t + C = \frac{1}{a^2}\frac{sh\,t}{ch\,t} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$I = \frac{x^2}{a^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C \qquad \blacklozenge$$

27) Es una integral irracional que se resuelve mediante el cambio estudiado en el apartado 5.1:

$$I=\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\;x\,dx=\left\{\begin{matrix} x^2-a^2=t^2 \\ x\,dx=t\,dt \end{matrix}\right\}$$

$$=\int\left(t^2+a^2\right)t^2dt=\frac{t^5}{5}+\frac{a^2t^3}{3}+C$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$I=\frac{\sqrt{\left(x^2a^2\right)^5}}{5}+\frac{a^2\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}}{3}+C$$ ♦

EJERCICIO 10.- Calcular las siguientes integrales:

28) $\displaystyle\int\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}dx$ 29) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[8]{x^5}-\sqrt[8]{x}}$

SOLUCIONES

28) Es una integral racional estudiada en el apartado 4.3:

$$I=\int\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}dx$$

Descomponiendo la función racional en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{(x+1)}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

Calculamos los parámetros a ,b y c:

$$3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)(x+1)+c(x+1)$$

$$\Rightarrow \quad a=2 \quad b=-1 \quad c=1$$

Quedando la integral como suma de tres integrales inmediatas:

$$I=\int \frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int \frac{2}{(x-1)}dx+\int \frac{-1}{(x+1)}dx+\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

Resolviendolas:

$$I=2\ln(x-1)-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}+C \qquad \blacklozenge$$

29) Es una integral irracional que se resuelve mediante el cambio estudiado en el teorema 5.1:

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt[8]{x^5}-\sqrt[8]{x}}=\left\{\begin{array}{l} x=t^8 \\ dx=8t^7dt \end{array}\right\}=\int \frac{8t^7\,dt}{t^5-t}$$

obteniendo una integral racional con numerador de mayor grado que el denominador, por tanto, efectuando la división:

$$I=\int 8\left(t^2+\frac{t^2}{t^4-1}\right)dt=\frac{8t^3}{3}+8\int \frac{t^2}{t^4-1}dt$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$I=\frac{8x^{3/8}}{3}+8I_1$$

Calculamos aparte esta segunda integral:

$$I_1=\int \frac{t^2}{t^4-1}dt=\int \frac{t^2+1-1}{(t^2-1)(t^2+1)}dt=\int \frac{dt}{t^2+1}+\int \frac{dt}{t^4-1}=I_2+I_3$$

La integral I_2 es inmediata. La integral I_3 es una integral racional que se resuelve mediante descomposición en fracciones simples:

$$I_2=\int \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} t+C_1$$

$$I_3 = \int \frac{dt}{t^4 - 1} = \int \frac{a\ dt}{t+1} + \int \frac{b\ dt}{t-1} + \int \frac{mt+n}{t^2+1} dt$$
$$= -\frac{3}{4}\ln(t+1) + \frac{3}{4}\ln(t-1) + \frac{1}{2}\ \operatorname{arctg} t + C_2$$

Deshaciendo el cambio de variable y tomando $C = C_1 + C_2$:

$$I = \frac{8}{3}x^{3/8} + 12\operatorname{arctg} x^{1/8} - \ln\left|\frac{x^{1/8}+1}{x^{1/8}-1}\right|^6 + C \qquad \blacklozenge$$

EJERCICIO 11.- Calcular las siguientes integrales:

30) $\int e^{ax}\cos^2 x dx$ 31) $\int \cos^2 2x \operatorname{sen}^3 x dx$ 32) $\int \frac{2x+104}{(x+2)(x^2-2x+2)^2} dx$

SOLUCIONES:

30) Haciendo un cambio trigonométrico tendremos una integral que se puede resolver por el método de integración por partes según lo visto en el apartado 3.2.4:

$$I = \int e^{ax}\cos^2 x dx = \int e^{ax}\frac{1+\cos 2x}{2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int e^{ax} dx + \frac{1}{2}\int e^{ax}\cos 2x\ dx = \frac{1}{2a}e^{ax} + \frac{1}{2}I_1$$

Calculamos aparte la integral I_1:

$$I_1 = \left\{\begin{array}{l|} u = \cos 2x \\ dv = e^{ax}dx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = -2\operatorname{sen} 2x\, dx \\ v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos 2x + \frac{2}{a}\int e^{ax}\operatorname{sen} 2x\, dx =$$

$$I_1 = \frac{1}{a}e^{ax}\cos 2x + \frac{2}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\operatorname{sen} 2x - \underbrace{\frac{2}{a}\int e^{ax}\cos 2x\, dx}_{-\frac{2}{a}I_1}\right]$$

Despejando I_1:

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a}\cos 2x + \frac{2e^{ax}}{a^2}\operatorname{sen} 2x - \frac{4}{a^2} I_1$$

$$\Rightarrow \quad I_1\left(1 + \frac{4}{a^2}\right) = \frac{e^{ax}}{a}\cos 2x + \frac{2e^{ax}}{a^2}\operatorname{sen} 2x$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4}\left(a\cos 2x + \operatorname{sen} 2x\right) + C$$

Sustituyendo en la integral propuesta:

$$I = \frac{e^{ax}}{2a} + \frac{e^{ax}}{2\left(a^2 + 4\right)}\left[a\ \cos\ 2x + \operatorname{sen}\ 2x\right] + C$$ ♦

31) Efectuamos un cambio trigonométrico y después un cambio de variable para simplificar el cálculo:

$$I = \int \cos^2 2x\ \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 \left(1 - \cos^2 x\right)\operatorname{sen} x\, dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x\ dx = dt \end{array}\right\} = -\int \left(t^2 - \left(1 - t^2\right)\right)^2 \left(1 - t^2\right)dt = \int \left(4t^6 - 8t^4 + t^2 - 1\right)dt$$

que es una integral inmediata:

$$I = \frac{4t^7}{7} - \frac{8t^5}{5} + \frac{5t^3}{3} - t + C$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$I = \frac{4}{7}\cos^7 x - \frac{8}{5}\cos^5 x + \frac{5}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$ ♦

32) Es una integral racional que se calcula según lo visto en el apartado 4.4 por el método de Hermite.

$$I = \int \frac{2x + 104}{\left(x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right)^2}\, dx = \frac{ax + b}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{A\ dx}{\left(x + 2\right)} + \int \frac{Mx + Ndx}{x^2 - 2x + 2}$$

Calculando los valores de las constantes *A, M , N, a, b:*

$$A = 1 \quad , \quad M = -1 \quad , \quad N = 20 \quad , \quad a = 16 \quad , \quad b = -11$$

se obtiene:

$$I = \frac{16x - 11}{x^2 - 2x + 2} + \lg\left(x + 2\right) + \int \frac{-x + 20}{x^2 - 2x + 2}\,dx$$

La segunda integral se resuelve por el método de los cuatro pasos, según el apartado 1.2.2. El resultado final es:

$$I = \frac{16x - 11}{x^2 - 2x + 2} + \lg\left(x + 2\right) - \frac{1}{2}\lg\left(x^2 - 2x + 2\right) + 19\,\mathrm{arctg}\left(x - 1\right) + C \qquad \blacklozenge$$

EJERCICIO 12.- Calcular**:**

$$33) \int \frac{\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt{x + 2}}{\sqrt[4]{x + 6}}\,dx$$

SOLUCIÓN:

33) Es una integral irracional, que se resuelve mediante el cambio estudiado en el apartado 2.6.1:

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt{x + 2}}{\sqrt[4]{x + 6}}\,dx = \left\{ \begin{aligned} x + 2 &= t^{12} \\ dx &= 12t^{11}\,dt \end{aligned} \right\} = 12\int \frac{t^4 + t^6}{t^3}\,t^{11}\,dt$$

$$= 12\int \left(t^{12} + t^{14}\right)dt = 12\left(\frac{t^{13}}{13} + \frac{t^{15}}{15}\right) + C$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{12}{13}\left(x + 2\right)^{13/12} + \frac{12}{15}\left(x + 2\right)^{15/12} + C \qquad \blacklozenge$$

Capítulo 7.- Soluciones de los ejercicios propuestos

Soluciones de los ejercicios del Capítulo 1º

1.1.- $\int \operatorname{sen}\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2} + C$

1.2.- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + C$

1.3 .- $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}dx = -2\sqrt{1+\cos x} + C$

1.4.- $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|3x^2-2x+5\right| + C$

1.5.- $\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \operatorname{arctg} x^2 + C$

1.6.- $\int \frac{-3}{1+x+2x^2}dx = \frac{-6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C$

1.7.- $\int \frac{\sqrt{3}}{3x^2+2\sqrt{3}x+2}dx = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x+1\right) + C$

1.8.- $\int \frac{3}{\sqrt{-3x^2+x+5}}dx = \sqrt{3}\operatorname{arcsen}\frac{6x-1}{\sqrt{61}} + C$

1.9.- $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+3}}dx = \ln\left|\sqrt{\frac{2}{3}}x + \sqrt{\frac{2x^2}{3}+1}\right| + C$

1.10.- $\int \cos(-3x)\operatorname{sen} 8x dx = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos 9x}{18} + C$

1.11.- $\int \operatorname{sen}(x-1)\cos(x+2)dx = -\frac{x}{2}\operatorname{sen}3 - \frac{\cos(2x+1)}{4} + C$

1.12.- $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

1.13.- $\int \frac{(x+4)dx}{-x^2+x-3} = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+3\right| - \frac{9}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}} + C$

1.14.- $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\ln\left|\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right| + C$

1.15.- $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5-3x^2}}dx = -\sqrt{5-3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{3}{5}}x + C$

1.16.- $\int \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}dx = -\sqrt{-x^2+2x} + C$

Soluciones de los ejercicios del Capítulo 2º

2.1.- $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right| + C$

2.2.- $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\operatorname{sen} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\operatorname{sen} x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| + C$

2.3.- $\int \frac{dx}{\cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x} = \ln\left|1+\operatorname{tg} x\right| + C$

2.4.- $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 2x}dx = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\cos 2x) + C$

2.5.- $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{2+\cos 3x}dx = -\frac{1}{3}\ln\left|2+\cos 3x\right| + C$

2.6.- $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\cos x} = \ln\left|1+\cos x\right| - \ln\left|\cos x\right| + C$

Soluciones de los ejercicios del Capítulo 3º

3.1.- $\int \left(x-3x^2\right)e^x dx = e^x\left(-3x^2+7x-7\right)+C$

3.2.- $\int (2x-2)\ln x dx = \left(x^2-2x\right)\ln x - \frac{x^2}{2} + 2 + C$

3.3.- $\int e^{3x}\operatorname{sen} 2x dx = \frac{3}{13}\operatorname{sen} 2x\, e^{3x} - \frac{2}{13}e^{3x}\cos 2x + C$

3.4.- $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\left(\ln\left|x\right|-2\right)+C$

3.5.- $\int x\operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C$

3.6.- $\int \left(x^2-3x\right)\left(\operatorname{sen} 2x + e^x\right)dx$

$$= \left(x^2-5x+5\right)e^x + \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\operatorname{sen} 2x + C$$

3.7.- $\int \cos^4 x\operatorname{sen}^3 x dx = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$

3.8.- $\int \operatorname{sen}^m Ax\cos Ax dx = \frac{1}{A}\frac{\operatorname{sen}^{m+1} Ax}{m+1} + C$

Soluciones de los ejercicios del Capítulo 4º

4.1.- $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-5x^2+6x}dx = -\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x-3| + C$

4.2.- $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

4.3.- $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(2x^2+2\right)\left(x^2+4\right)} = \frac{1}{40}\ln|x-2| - \frac{1}{40}\ln|x+2| + \frac{11}{4}\ln|x+3| + C$

4.4.- $\displaystyle\int \frac{3x^4+2x^3+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx = \ln|x| + \ln\left|x^2+1\right| + \operatorname{arctg} x + \frac{2-x}{x^2+1} + C$

4.5.- $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2\left(x^2+2\right)^2}dx = -\frac{5}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{5x^2+8}{4x\left(x^2+2\right)} + C$

4.6.- $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{2x^3-x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left|2x^2+x+1\right| + \frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C$

4.7.- $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + C$

Soluciones de los ejercicios del Capítulo 5º

5.1.- $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}}dx = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{12}{13}x\sqrt[12]{x} + C$

5.2.- $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = 8 \operatorname{arcsen} \frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + C$

5.3.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \right| + C$

5.4.- $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx = \sqrt{x^2 - 1} + \arg\cosh x + C$

5.5.- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + x)} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$

5.6.- $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 \pm x^2}} = -\frac{\sqrt{1 \pm x^2}}{x} + C$

5.7.- $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{9 + x^2} + \frac{9}{2} \ln \left| x + \sqrt{9 + x^2} \right| + C$

Anexo 1.- Fórmulas trigonométricas

Recogemos a continuación las principales fórmulas que relacionan las diversas funciones trigonométricas:

a).- $-Sen\,x = Sen(-x)$ Función Impar

b).- $Cosx = Cos(-x)$ Función Par

c).- $Tg(-x) = -Tgx$ Función Impar

d).- $Cos^2x + Sen^2x = 1$ Propiedad fundamental o pitagórica.

e).- $Sen(x \pm y) = SenxCosy \pm CosxSeny$

f).- $Sen2x = 2SenxCosx$

g).- $Cos(x \pm y) = CosxCosy \mp SenxSeny$

h).- $Cos2x = Cos^2x - Sen^2x$

i).- $Tg(x \pm y) = \dfrac{Tgx \pm Tgy}{2 \mp TgxTgy}$

Derivadas de las funciones trigonométricas.

a).- $\dfrac{d}{dx}(Senx) = Cosx$

b).- $\dfrac{d}{dx}(Cosx) = -Senx$

c).- $\dfrac{d}{dx}(Tgx) = \dfrac{1}{Cos^2x}$

d).- $\frac{d}{dx}(\mathrm{Co\,tg\,x}) = -\frac{1}{\mathrm{Sen}^2 x}$

e).- $\frac{d}{dx}(\mathrm{Secx}) = \mathrm{SecxTgx}$

f).- $\frac{d}{dx}(\mathrm{Co\,sec\,x}) = -\mathrm{Co\,sec\,xCo\,tg\,x}$

g).- $\frac{d}{dx}(\mathrm{Arc\,sen\,x}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

h).- $\frac{d}{dx}(\mathrm{ArcCosx}) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

i).- $\frac{d}{dx}(\mathrm{ArcTgx}) = \frac{1}{1+x^2}$

j).- $\frac{d}{dx}(Arc\ Co\,\mathrm{tg}\,x) = \frac{-1}{1+x^2}$

k).- $\frac{d}{dx}(Arc\ Secx) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

l).- $\frac{d}{dx}(Arc\ Co\,\mathrm{sec}\,x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Anexo 2.- Funciones hiperbólicas

Definiciones.

$$\mathrm{SenHx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{CosHx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{TgHx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\mathrm{Co\,tg\,Hx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} \qquad \mathrm{SecHX} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} \qquad \mathrm{CosecHX} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

Funciones inversas. Equivalencia con funciones irracionales.

FUNCIÓN HIPERBÓLICA	FUNCIÓN IRRACIONAL	DOMINIO DE DEFINICIÓN
ArgSenHx	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 + 1}\right\|$	$-\infty < x < \infty$
ArgCosHx	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 - 1}\right\|$	$1 \le x < \infty$
ArgTgHx	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$	$-1 < x < 1$
ArgCotgHx	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x+1}{x-1}\right\|$	$x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,\infty\right[$
ArgSecHx	$\ln\left\|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right\|$	$0 < x \le 1$
ArgCosecHx	$\ln\left\|\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\|x\|}\right\|$	$x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,\infty\right[$

Propiedades.

a).- CosHx = CosH(-x) Función par

b).- SenHx = -SenH(-x) Función impar

c).- $\mathrm{CosH}^2\mathrm{x} - \mathrm{SenH}^2\mathrm{x} = 1$ Propiedad fundamental.

d).- CosH(x+y) = CosHx CosHy + SenHx SenHy

e).- $CosH2x = CosH^2x + SenH^2x$

f).- CosH(x-y) = CosHx CosHy - SenHx SenHy

g).- SenH(x+y) = SenHx CosHy + CosHx SenHy

h).- $SenH2x = 2SenHx + 2CosHx$

i).- SenH(x-y) = SenHx CosHy - CosHx SenHy

j).- $\mathrm{TgH}(\mathrm{x} \pm \mathrm{y}) = \dfrac{\mathrm{TgHx} \pm \mathrm{TgHy}}{1 \pm \mathrm{TgHx}\ \mathrm{TgHy}}$

Derivadas de las funciones hiperbólicas.

a).- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{SenHx}\right) = \mathrm{CosHx}$

b).- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{CosHx}\right) = \mathrm{SenHx}$

c).- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{TgHx}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{CosH}^2\mathrm{x}}$

d).- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{Co\,tg\,Hx}\right) = \dfrac{-1}{\mathrm{SenH}^2\mathrm{x}}$

e).- $\frac{d}{dx}\left(\text{SecHx}\right) = -\text{SecHxTgHx}$

f).- $\frac{d}{dx}\left(\text{Co}\sec\text{Hx}\right) = -\text{Co}\sec\text{HxCo}\,\text{tg}\,\text{Hx}$

g).- $\frac{d}{dx}\left(\text{ArgSenHx}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

h).- $\frac{d}{dx}\left(\text{ArgCosHx}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x \in \left]1,+\infty\right[$

i).- $\frac{d}{dx}\left(\text{ArgTgHx}\right) = \frac{1}{1-x^2} \qquad x \in \left]-1,1\right[$

j).- $\frac{d}{dx}\left(\text{ArgCo}\,\text{tg}\,\text{Hx}\right) = \frac{1}{1-x^2} \qquad x \notin \left[-1,1\right]$

k).- $\frac{d}{dx}\left(\text{ArgSecHx}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in \left]0,1\right[$

l).- $\frac{d}{dx}\left(\text{ArgCo}\sec\text{Hx}\right) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \qquad x \neq 0$

Anexo 3.- Cálculo de las raíces enteras y racionales de un polinomio

Sabemos que un polinomio tiene tantas raíces como su grado indica, contando cada una de las raíces tantas veces como indique su multiplicidad. Otra cuestión diferente es cómo calcularlas. En esta sección veremos el procedimiento a seguir para encontrar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales. De hecho, nos bastará suponer que los coeficientes del polinomio son números enteros, puesto que dado un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0$$

con coeficientes racionales, multiplicando los coeficientes del polinomio por su mínimo común múltiplo, M = m.c.m ($a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$), obtenemos el polinomio M P(x) que tiene los coeficientes enteros y las mismas raíces que el polinomio P(x). Por tanto, en todo este anexo supondremos que el polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0,$$

tiene coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros.

Cálculo de las raíces enteras.

Para calcular las raíces enteras de un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

utilizaremos los siguientes resultados :

Teorema 1: Las raíces enteras del polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

son divisores del término independiente a_0.

Así, dado un polinomio P(x), para calcular sus raíces enteras, lo primero que tendremos que calcular son los divisores del término independiente de P(x) y luego comprobar cuál de ellas es raíz. El problema que muchas veces se plantea es que el número de divisores del término independiente puede ser muy elevada. Para disminuir el número de *candidatos* a raíz utilizaremos el siguiente resultado :

Teorema 2 : Las raíces enteras de P(x)=0 disminuidas en una unidad, deben ser divisores de P(1), y aumentadas en una unidad, deben ser divisores de P(-1).

NOTA 1: Téngase en cuenta que cuando obtengamos una raíz entera, α , se sigue que :

$$P_n(x) = (x-\alpha)P_{n-1}(x)$$

siendo $P_{n-1}(x)$ un polinomio de grado n-1, calculable fácilmente por medio de la **Regla de Ruffini** y cuyos coeficientes son todos enteros. Al polinomio P_{n-1} (x) le podemos aplicar de nuevo los teorema 1 y 2.

Como consecuencia de los teoremas 1 y 2 y de la nota 1, la forma de proceder para calcular las raíces enteras de una polinomio será la siguiente :

1º) Calculamos P(1) y P(-1). Si 1 ó -1 es raíz de P(x)=0, se dividirá el polinomio original por $(x-1)$ o $(x+1)$, según sea el caso, tantas veces como sea el orden de multiplicidad de dichas raíces. Y con el polinomio resultante, el cual no tiene a 1 ó -1 como raíces, continuaremos con el paso 2.

2º) Calculamos la lista de los divisores, llamémoslos b_i, del término independiente del polinomio obtenido en el paso 1º. Tomando una de las posibles raíces b, le sumaremos y le restaremos una unidad, obteniendo los valores b+1 y b-1. Comprobaremos si se verifican las dos condiciones del teorema 2. Si para la raíz b se verifican estas condiciones, comprobamos si b es una raíz del polinomio. En caso de no serlo, se elimina b de la lista de posibles raíces enteras y se procede con la siguiente. En el caso de ser raíz, se dividirá el polinomio original por (x-b) tantas veces como sea el orden de multiplicidad de dicha raíz b. Y con el polinomio resultante, el cual no tiene a b como raíz, calculamos la lista de los divisores de su término independiente, llamémoslos c_i , eliminando de la lista de los b_i aquellos términos que no aparezcan en la lista c_i y repetiremos el paso 2º con el siguiente término de la lista resultante. Cuando ya no quede ningún candidato a raíz, el polinomio P(x) ya no tiene más raíces enteras.

Después de calcular las raíces enteras del polinomio P(x), procedemos al cálculo de las raíces fraccionarias.

Cálculo de las raíces fraccionarias.

Para calcular las raíces fraccionarias de un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

utilizaremos los siguientes resultados :

Teorema 3: Las raíces fraccionarias irreducibles $\frac{h}{k}$ del polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

verifican que su numerador h es un divisor del término independiente a_0 y su denominador k es un divisor de a_n.

Como consecuencia del teorema 3, se tiene :

Corolario 1 : Si un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

con coeficientes enteros tiene coeficiente director a_0=1, entonces todas sus posibles raíces racionales serán enteras.

Un procedimiento para descartar valores de la lista de posibles raíces fraccionarias del polinomio P(x) es utilizar el siguiente resultado :

Teorema 4: Las raíces racionales irreducibles de *P(x)=0* satisfacen que expresadas en forma de fracción irreducible, la diferencia entre su numerador y su denominador debe ser divisor de *P(1),* y la suma de su numerador y de su denominador debe ser divisor de *P(-1)*.

Así, para determinar las raíces racionales del polinomio *P(x),* suponiendo que ya se han calculado las enteras, podemos proceder de la siguiente forma :

1º) Calculamos *P(1)* y *P(-1),* donde ya se supone que 1 y -1 no son raíces de *P(x)=0.*

2º) Calculamos la lista de los divisores del término independiente y del término director del polinomio *P(x)* y a continuación escribimos todos los racionales no enteros, cuya fracción irreducible que los representa tiene un numerador entre los divisores del término independiente y un denominador entre los divisores del coeficiente director del polinomio.

3º) Descartamos de esta lista los términos que no verifiquen las condiciones del teorema 4. Tras esta *criba* nos quedarán algunos términos que serán las posibles raíces racionales del polinomio. Procedemos ahora a su comprobación.

Otro procedimiento para calcular las raíces fraccionarias es utilizar el corolario 1, transformando el polinomio dado

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en otro cuyo coeficiente director sea la unidad. Para ello, basta tomar una nueva incógnita :

$$y = x\, \mathrm{a_n} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{a_n}}$$

con lo que el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se transforma en el polinomio

$$P(x) = a_n \frac{y^n}{a_n{}^n} + a_{n-1} \frac{y^{n-1}}{a_n{}^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{y}{a_n} + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow P(x) = y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} a_n y^{n-2} + \cdots + a_1 a_n{}^{n-2} y + a_0\, a_n{}^{n-1} = 0$$

en el que el coeficiente director es la unidad, y que por el corolario 1 carece de soluciones fraccionarias. Cada raíz entera de este polinomio, pongamos α, según el cambio, da lugar a las raíz fraccionaria $\beta = \dfrac{\alpha}{\mathrm{a_n}}$.

Por tanto, se tiene la siguiente regla para determinar las raíces fraccionarias de un polinomio :

1º) Una vez calculadas las raíces enteras de la ecuación

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

y suprimiendo dichas raíces por división por los binomios correspondientes, se transforma la ecuación resultante en otra cuyo primer coeficiente sea la unidad, mediante la sustitución :

$$y = x\, \mathrm{a_n} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{a_n}}$$

con lo que se obtiene un nuevo polinomio *Q(y)* y una nueva ecuación en la variable "*y*" de la que se determinan las raíces enteras.

2º) Una vez determinadas las raíces enteras del polinomio *Q(y)*, para cada raíz entera de dicho polinomio α , se tiene una raíz fraccionaria $\beta = \dfrac{\alpha}{a_n}$ del polinomio inicial *P(x)*.

EJEMPLO 1 : Calcular la descomposición factorial del polinomio $P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$

SOLUCIÓN:

En primer lugar calculamos sus raíces enteras : para ello lo primero a efectuar es calcular la lista de los divisores del término independiente, estos divisores son : 1, 2, -1, -2. Calculamos a continuación *P(1)* y *P(-1)*. Se tiene que *P(1)=0*, por lo que tenemos determinada una raíz entera.

Dividiendo el polinomio *P(x)* por el binomio $(x-1)$ se obtiene :

$$P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 = (x-1)\left(6x^2 - 7x + 2\right)$$

Podemos comprobar que no hay ya más raíces enteras. Procedemos ahora al cálculo de las raíces fraccionarias. Aplicando la transformación :

$$y = 6\mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\mathrm{y}}{6} ,$$

se tiene el nuevo polinomio en la variable "*y*" , $Q(y) = y^2 - 7y + 12$, que carece de soluciones fraccionarias. Procedemos ahora al cálculo de las raíces enteras de $y^2 - 7y + 12$, elaborando la lista de los divisores del término independiente 12. Estos son: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12.

Calculamos a continuación Q(1)=6 y Q(-1)=20, por lo que en nuestra lista podemos eliminar a 1 y a -1 como posibles raíces. Descartamos de nuestra lista aquellos términos que disminuidos en una unidad no dividen a Q(1) , descartando 6,12,-3,-4,-6,-12, y que aumentados en una unidad no dividen a Q(- 1), descartando 2. Quedan en nuestra lista los candidatos: 3, 4, -2. Aplicando Ruffini podemos comprobar que 3 y 4 son raíces enteras de Q(y), y que por tanto

$$\mathrm{x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} , \quad \mathrm{x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

son las raíces racionales de P(x). Por tanto, P(x) quedará factorizado como :

$$P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 = (x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad .$$

También se podría haber simplificado el problema a partir de la factorización

$$P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 = (x-1)\left(6x^2 - 7x + 2\right)$$

pues el polinomio $6x^2 - 7x + 2$ es un polinomio de segundo grado y por tanto resoluble por radicales.

♦

EJEMPLO 12 : Calcular la descomposición factorial del polinomio

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 30x^2 - 40x + 24$$

SOLUCIÓN:

Calculamos sus raíces enteras, pues por el corolario 1 el polinomio no tiene raíces fraccionarias. Calculamos la lista de los divisores del término independiente, estos divisores son : 1, 2,3,4,6,8,12,24, -1 ,-2,-3,-4,-6,-8,-12,-24. Calculamos a continuación el valor de P(1) y P(-1). Se tiene que P(1)=5 y P(-1)=105, por lo que en nuestra lista podemos eliminar a 1 y a -1 como posibles raíces.

Descartamos de nuestra lista aquellos términos que disminuidos en una unidad no dividen a P(1), y que aumentados en una unidad no dividen a Q(- 1), descartando los valores 3, 4, 8, 12, 24, -2, -3, -6, -8, -12, -24. Quedan en nuestra lista los términos: 2, 6, -4.

Aplicando Ruffini podemos comprobar que 2 y 6 son raíces enteras simples , por lo que nuestro polinomio quedará factorizado como

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 30x^2 - 40x + 24 = (x-2)(x-6)\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

donde el polinomio $x^2 - 2x + 2$ tiene raíces complejas como se puede comprobar.

♦

NOTA 2 : Respecto al cálculo de las raíces reales de un polinomio, salvo contados casos, es bastante difícil conseguir el valor exacto de estas raíces. Deben emplearse entonces métodos aproximados. Lo mismo puede decirse respecto a las raíces complejas, salvo en el caso de que la factorización nos proporcione términos cuadráticos (polinomios de segundo grado) como factores, tal como sucedía en el ejemplo 12. Es interesante recordar que para las raíces complejas de un polinomio se verifica el siguiente resultado :

Teorema 5 : Si un polinomio de coeficientes reales *P(x)* tiene una raíz compleja $a+ib$, entonces el número complejo conjugado $a-ib$ es también raíz del polinomio *P(x)*.

Bibliografía

Abellanas/Galindo. “Métodos De Cálculo” Mc. Graw- Hill. 1989.

Apostol, T.M. “Análisis Matemático”. Reverté. 1976.

Apostol, T.M. “Calculus”. Volúmenes 1 Y 2. Reverté. 1986.

Ayres, F. “Cálculo Diferencial E Integral”. Mc. Graw- Hill. 1991.

Casany/Castelló/Plaza. “Cálculo Integral”. Nau Llibres. 1991.

Coquillat, F. “Cálculo Integral. Metodología Y Problemas”. Tébar Flores. 1980.

Defez, E. , Soler V., “Métodos De Cálculo Integral” Servicio De Publicaciones De La Universidad Politécnica De Valencia. 1998- Spupv 98-1506.

Demidovich, B.D. “5.000 Problemas De Análisis Matemático”. Paraninfo. 1976.

Larson-Hostetler. “Cálculo Y Geometría Analítica”. Mc. Graw- Hill. 1985.

Piskunov, N. “Cálculo Diferencial E Integral”. Montaner Y Simón. 1970.

Puig Adam, P. “Cálculo Integral”. Biblioteca Matemática. 1970.

Spiegel, M.R. “Cálculo Superior”. Mc. Graw- Hill. 1963.

Tébar Flores/Tébar Less. “909 Problemas De Cálculo Integral”. Tebar Flores.