

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA
Departamento de Ingeniería Electrónica



MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN
VOLUMÉTRICA ALGEBRAICA DE IMÁGENES
TOMOGRÁFICAS.

**Aplicación a un TAC de pequeños animales y a
un Simulador-TAC.**

TESIS DOCTORAL

Presentada por: María Teresa Cibeles Mora Mora

Dirigida por: Dr. Rafael Jacinto Villanueva Micó
Dra. María José Rodríguez Álvarez

Valencia, Julio 2008

“En uno de mis paseos de fin de semana por el campo pensé: Estaría bien si tomara lecturas desde todos los ángulos a través de una caja. Sería bonito si pudiera reconstruir en 3D lo que realmente hay en la caja a partir de las lecturas random tomadas de la caja, por supuesto, tomando las tres dimensiones del objeto como una sucesión de rodajas. Sería más fácil reconstruir una rodaja que un volumen y después empezaría a trabajar en cómo podría hacer eso matemáticamente. Por aquel entonces, la idea de usar los rayos-X en la medicina era algo muy vago en mi mente. Esto era solamente un buen ejercicio en el que pensar como si fuera un problema, así que lo pensé...”

G. N. Hounsfield 1967.

G. N. Hounsfield recibió el Premio Nobel de Medicina en 1979 junto a A. Cormack por la invención del primer TAC.

Dedicado a mi familia
Dedicado a Paco

Agradecimientos

Este trabajo ha supuesto un reto continuo que no hubiera sido posible sin la ayuda de muchas personas.

En primer lugar, agradezco a José María Benlloch Baviera que me diera la oportunidad de involucrarme en una investigación tan interesante y la confianza depositada incluso en los momentos más críticos. Además, quiero hacer constar que sus ánimos, su consejo y su ayuda durante este tiempo han sido muy valiosos.

Quiero agradecer a mis directores Rafael Jacinto Villanueva Micó y María José Rodríguez Álvarez su seguimiento continuado, sus esfuerzos y su apoyo inestimable.

El tutor de la tesis, Ángel Sebastià Cortés me ha ayudado muy amablemente durante el transcurso de esta tesis.

Me gustaría destacar la generosidad de Lucas Antonio Jódar Sánchez porque me ha recibido como un miembro más de su grupo.

Gracias a la diligencia de Filomeno Sánchez Martínez y a la eficiencia de Antonio Soriano Asensi, ha sido posible mostrar las imágenes del TAC de pequeños animales.

La aportación del Hospital Clínico Universitario de Valencia ha sido posible gracias a la ayuda de Sergio Díez Domingo.

Quiero expresar mi gratitud a los revisores de los borradores por su crítica constructiva y sus valiosos comentarios.

Me gustaría dar las gracias al Dr. Ricardo Ruiz Granell por sus consejos y sus ánimos sin los cuáles no me hubiera animado a empezar este trabajo.

Hago constar mi gratitud a José Millet Roig por haberme introducido en el ámbito de la investigación en bioingeniería y a Magdalena Rafecas López por iniciarme en la imagen médica.

Quiero resaltar que este trabajo ha sido posible gracias al programa de becas FPI del Ministerio de Educación y Ciencia.

Quiero agradecerles a mis compañeros el apoyo que me han dado. Me gustaría recordar a David, Natalia, Fabián, Diego, José Antonio, Paco, Vicente, José Luis y Rubén de ITACA y a Lola, Vera, Cristoph y Ana del IFIC. Quiero dar las gracias por su ayuda a mis compañeros del IMM: Diego, Gilberto, Abraham, Belén, Juan Carlos, Michael y sobre todo a Cristina, Elena y José Ramón con los que he compartido tardes muy largas.

Quiero destacar el trabajo incansable para esta tesis de Frenchi, Pio, Pietralcina, Mc Pac y Toshibe.

Finalmente, le agradezco a Paco su comprensión, ánimo y cariño durante todos estos años que me han permitido seguir adelante. Tengo que dar las gracias a mis hermanos Higinio, María José y Miguel Ángel que han constituido un ejemplo de trabajo y superación para mí y muy especialmente a mis padres Josefina e Higinio, que han sabido transmitirme lo que ha impulsado este trabajo: el afán por aprender.

*“Vive como si fueras a morir mañana.
Aprende como si fueras a vivir para siempre.”*

Mahatma Gandhi

Abstract

Computed Tomography has made a revolutionary impact on medical diagnosis and has also been used in industrial non-destructive testing. Algebraic reconstruction algorithms for tomography provide better quality images than conventional reconstruction methods which are based on Fourier techniques, mainly when the measurement has fewer projections or there are noisy conditions. However, in practice, algebraic reconstruction methods are not as widespread as Fourier based ones because of their high computational cost.

The study developed in this thesis deals with several approaches to the reduction of the computation cost associated with algebraic methods. This reduction is obtained by using an alternative system matrix model. We propose new matrix models aiming at this objective. These models are designed using alternative grids of pixels and pixels shapes different from the Cartesian ones. All grids of pixels which are proposed allow ones to employ all scanner symmetries for the calculation of the system matrix. Thus, the matrix volume, which is necessary for the reconstruction algorithm, is reduced.

The proposed matrix models are compared among themselves by means of the simulated and real data reconstruction. These measurements are calculated and obtained from a high-resolution small animal CT and a CT-simulator. The reconstructed images from simulated signals make it possible to measure the quality of the reconstructed images with regard to contrast, resolution and accuracy. As a result of this comparison, the system matrix model which leads to lowest computational cost without jeopardizing the quality requirements, is presented and extended to the 3D case.

Additionally, the designed grid leads to the proposal of a technique which makes it possible to avoid unnecessary operations. This technique consists in finding the border of the region of interest, which implies to confine the image area as well as the projection area, from an individualized analysis of each measurement.

The result produced by the new system matrix model shows that this schema permits to reduce the computational cost associated with algebraic methods. This reduction does not involve reconstructed images with less quality than those images obtained from the Cartesian matrix. In addition, the technique of delimiting the reconstructed area allows for decreasing the number of operations required in the reconstruction process.

Resumen

La tomografía axial computerizada ha tenido un impacto revolucionario en el diagnóstico médico y en el ámbito industrial para la realización de test no destructivo. En tomografía de rayos-X, los métodos algebraicos de reconstrucción se basan en la resolución de un sistema de ecuaciones lineal. Los métodos algebraicos son capaces de proporcionar imágenes de más calidad que los métodos de reconstrucción basados en técnicas de Fourier, especialmente cuando se dispone de un menor número de proyecciones y en condiciones ruidosas. Sin embargo, los métodos de reconstrucción algebraicos están menos extendidos en la práctica, al tratarse de técnicas que conllevan un coste computacional muy elevado.

En el estudio desarrollado en esta tesis se presentan estrategias que permiten la reducción del cálculo asociado a los métodos algebraicos a partir del replanteamiento de la matriz del sistema. Para ello, se proponen nuevos modelos de matriz del sistema que se fundamentan en el empleo de distintos esquemas de píxeles alternativos a los tradicionales. Los esquemas de píxeles propuestos permiten la aplicación de todas las simetrías presentes en un tomógrafo al cálculo de la matriz del sistema. De esta manera, hacen posible la disminución del volumen de datos que es necesario calcular y que es necesario utilizar en la reconstrucción.

Los modelos de matriz del sistema presentados se comparan mediante la reconstrucción de proyecciones sintéticas y de proyecciones reales pertenecientes a un escáner TAC de pequeños animales de alta resolución y a un simulador-TAC. Las imágenes reconstruidas a partir de señales sintéticas permiten validar de manera objetiva la calidad de la reconstrucción obtenida a partir de cada matriz en lo relativo al contraste, resolución y precisión. Como resultado de esta comparación, se determina el modelo de matriz que permite una mayor reducción del coste computacional asociado sin incurrir en detrimento de la calidad de las imágenes obtenidas.

Adicionalmente, el esquema de píxeles presentado da lugar a la propuesta de

una técnica gracias a la cuál es posible evitar operaciones innecesarias. Esta técnica consiste en la delimitación del área de interés para la reconstrucción, tanto en el ámbito de la imagen reconstruida como en el de las componentes de la medida, a partir de un análisis individualizado de la proyección de partida.

Los resultados obtenidos muestran que la matriz del sistema calculada a partir de un sistema de píxeles alternativo al cartesiano hace posible reducir el coste computacional asociado a los métodos algebraicos. Además, se comprueba que las mejoras computacionales conseguidas no suponen una pérdida de calidad en las imágenes reconstruidas. Finalmente, la técnica de delimitación del área de reconstrucción propuesta da lugar a la disminución del número de operaciones necesarias para la reconstrucción de imágenes de forma adaptada a cada medida particular.

Resum

La tomografia axial computerizada ha tingut un impacte revolucionari en el diagnòstic mèdic i en l'àmbit industrial per a la realització de test no destructiu. En tomografia de rajos-X, els mètodes algebraics de reconstrucció permeten proporcionar imatges de més qualitat que els mètodes de reconstrucció basats en tècniques de Fourier, especialment quan es disposa d'un menor nombre de projeccions i en condicions sorolloses. No obstant, els mètodes de reconstrucció algebraics estan menys estesos en la pràctica, al tractar-se de tècniques que comporten un cost computacional molt elevat.

En l'estudi desenvolupat en esta tesi es presenten estratègies que permeten la reducció del càlcul associat als mètodes algebraics a partir del replantejament de la matriu del sistema. Per a això, es proposen nous models de matriu del sistema que es fonamenten en l'ocupació de distints esquemes de píxels alternatius als tradicionals. Els esquemes de píxels proposats permeten l'aplicació de totes les simetries presents en un tomógrafo al càlcul de la matriu del sistema. D'esta manera, fan possible la disminució del volum de dades que és necessari calcular i que és necessari utilitzar en la reconstrucció.

Els models de matriu del sistema presentats es comparen per mitjà de la reconstrucció de projeccions sintètiques i de projeccions reals pertanyents a un escàner TAC de xicotets animals d'alta resolució i a un simulador-TAC. Les imatges reconstruïdes a partir de senyals sintètics permeten validar de manera objectiva la qualitat de la reconstrucció obtinguda a partir de cada matriu quant al contrast, resolució i precisió. Com resultat d'esta comparació, es determina el model de matriu que permet una major reducció del cost computacional associat sense incórrer en detriment de la qualitat de les imatges obtingudes.

Adicionalment, l'esquema de píxels presentat dona lloc a la proposta d'una tècnica gràcies a la quin és possible evitar operacions innecessàries. Esta tècnica consistix en la delimitació de l'àrea d'interés per a la reconstrucció, tant en l'àmbit

de la imatge reconstruïda com en el de les components de la mesura, a partir d'un anàlisi individualitzada de la projecció de partida.

Els resultats obtinguts mostren que la matriu del sistema calculada a partir d'un sistema de píxels alternatiu al cartesià fa possible reduir el cost computacional associat als mètodes algebraics. A més, es comprova que les millores computacionals aconseguides no suposen una pèrdua de qualitat en les imatges reconstruïdes. Finalment, la tècnica de delimitació de l'àrea de reconstrucció proposada dóna lloc a la disminució del nombre d'operacions necessàries per a la reconstrucció d'imatges de forma adaptada a cada mesura particular.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación y planteamiento	1
1.1.1. Tomografía axial computerizada	2
1.1.2. Problemas de la reconstrucción de imágenes TAC	3
1.1.3. Soluciones existentes y sus limitaciones	5
1.2. Objetivos	7
1.3. Estructura de la tesis	8
2. Conceptos Básicos de Reconstrucción de Imágenes	11
2.1. Características inherentes a un sistema TAC <i>Cone-Beam</i>	12
2.1.1. Definición de <i>Field of View</i>	12
2.1.2. Resolución espacial intrínseca del sistema	13
2.1.3. Número de proyecciones	16
2.2. Reconstrucción tomográfica algebraica	18
2.2.1. Concepto de reconstrucción de imágenes	18
2.2.2. Definición de matriz del sistema	19
2.2.3. Simetrías de la matriz del sistema	21
2.2.4. Resolución espacial de la imagen reconstruida	21
3. Materiales y Métodos	23
3.1. Señales sintéticas	23
3.1.1. Proyecciones de CTSim	24
3.1.2. Proyecciones calculadas mediante <i>forward-projection</i>	24
3.1.2.1. Proyección 2D analítica	25
3.1.2.2. Método de Siddon	26
3.1.2.3. Método de Joseph	27
3.1.2.4. Método de los Cubos	28

3.1.2.5. Resultados experimentales	28
3.2. Medidas reales	31
3.2.1. Simulador-TAC	31
3.2.2. TAC de pequeños animales	32
3.3. Método de reconstrucción iterativo	34
3.4. Discusión	35
3.5. Conclusiones	35
4. Propuesta de Pixelado Alternativo	37
4.1. Introducción	38
4.2. <i>Grid</i> cartesiano y píxel cuadrado	39
4.2.1. Características y alternativas	39
4.2.2. Simetrías de la matriz del sistema	40
4.3. <i>Grid</i> polar	41
4.3.1. Píxeles polares de área constante	43
4.3.2. Píxeles polares de relación de aspecto unitaria	43
4.3.3. Píxeles polares de radio constante	46
4.3.4. <i>Voxel</i> polar	47
4.3.5. Simetrías de la matriz del sistema basada en <i>grid</i> polar	48
4.4. Variación del <i>grid</i> polar con los parámetros de diseño	50
4.4.1. <i>Grid</i> polar de relación de aspecto unitaria	51
4.4.2. <i>Grid</i> polar de radio constante	53
4.5. Comparativa del número de elementos de la matriz del sistema calculada con <i>grid</i> polar y cartesiano	55
4.6. Píxel no polar en <i>grid</i> polar	56
4.6.1. Pixelado circular	56
4.6.1.1. <i>Voxel</i> cilíndrico	58
4.6.2. Pixelado mediante funciones Kaiser-Bessel: <i>blobs</i>	59
4.6.2.1. <i>Blobs</i> de radio constante	61
4.6.2.2. <i>Blobs</i> de radio variable	62
4.7. Visualización de imágenes calculadas en <i>grid</i> polar	62
4.7.1. Imágenes polares	62
4.7.2. Visor de píxeles polares	64
4.7.3. Visor de píxeles circulares	67
4.7.4. Visor de píxeles <i>blobs</i>	67
4.8. Discusión y conclusiones	68

5. Matriz 2D Basada en <i>Grid</i> Polar	71
5.1. Cálculo de pesos de la matriz del sistema	72
5.1.1. Aproximación mediante integrales de línea: método de Siddon	72
5.1.2. Aproximación mediante integrales de área	73
5.2. Estructura de la matriz dispersa	74
5.3. Ajuste de parámetros para el método de Siddon	75
5.3.1. Criterios de elección del número de líneas	76
5.3.2. Determinación del número de líneas en el método de Siddon	77
5.3.3. Relación entre el número de líneas por rayo y por píxel . .	78
5.4. Cálculo e implementación de la matriz del sistema 2D	80
5.4.1. Matriz basada en <i>grid</i> cartesiano	80
5.4.2. Matriz basada en <i>grid</i> polar y píxel polar	80
5.4.3. Matriz basada en <i>grid</i> polar y píxel circular	82
5.4.4. Matriz basada en <i>grid</i> polar y píxel <i>blob</i>	85
5.4.5. Comparativa de las matrices propuestas	86
5.5. Análisis de las imágenes reconstruidas	88
5.5.1. Indicadores de calidad respecto a modelos sintéticos	89
5.5.2. Reconstrucción de medidas sintéticas	90
5.5.3. Reconstrucción de medidas reales	99
5.6. Discusión	101
5.7. Conclusiones	102
6. Matriz 3D Basada en <i>Grid</i> Polar	105
6.1. Introducción	106
6.2. Matriz 3D basada en <i>grid</i> cartesiano	107
6.2.1. Cálculo de pesos	107
6.3. Cálculo e implementación de la matriz 3D polar	108
6.3.1. Cálculo de pesos	108
6.3.2. Visor de imágenes polares 3D	110
6.4. Comparación de las matrices cartesiana y polar	111
6.4.1. Descripción de las matrices	111
6.4.2. Análisis cuantitativo	112
6.5. Reconstrucciones de señales sintéticas	113
6.5.1. Resultados de la reconstrucción	113
6.5.2. Comparación cuantitativa de la reconstrucción	116
6.6. Reconstrucciones de medidas reales	122
6.6.1. Resultados de la reconstrucción	123

6.7. Discusión	124
6.8. Conclusiones	125
7. Optimización de la Reconstrucción Basada en <i>Grid</i> Polar	127
7.1. Concepto de <i>Focus of Attention</i>	128
7.2. <i>Focus of Attention</i> en <i>grid</i> cartesiano	128
7.3. <i>Focus of Attention</i> en <i>grid</i> polar	130
7.3.1. Implementación	130
7.4. Aplicación del <i>Focus of Attention</i> a un caso práctico	133
7.4.1. Estudio de la proyección	134
7.4.2. Delimitación del FOV	135
7.5. Resultados	136
7.6. Discusión	137
7.7. Conclusiones	138
8. Conclusiones	139
8.1. Conclusiones principales y aportaciones	139
8.2. Líneas futuras de investigación	142
A. Descripción de <i>Phantoms</i>	143
A.1. <i>Phantom</i> calculados con CTSim	143
A.1.1. <i>Phantom</i> de Shepp-Logan 2D	143
A.2. <i>Phantoms</i> calculados mediante <i>forward-projection</i>	145
A.2.1. <i>Phantom</i> círculos de tres densidades 2D	145
A.2.2. <i>Phantom</i> de Shepp Logan 3D	145
A.2.3. <i>Phantom</i> de tres cilindros 3D	148
A.3. Opciones de visualización de volúmenes 3D	150
Bibliografía	152

Índice de tablas

1.1. Dosis de radiación recibidas en mSv después de una exposición a distintas pruebas diagnósticas, procedentes de <i>Royal College of Radiologists 2003 Making the best use of a department of clinical radiology. Guidelines for doctors, 5th edn. Royal College of Radiologists, London.</i>	2
5.1. Mínimo número de líneas por píxel correspondientes a un número de líneas por rayo empleadas para el cálculo de la matriz polar de relación de aspecto unitario	79
5.2. Comparación cuantitativa de las matrices del sistema creadas con <i>grid cartesiano</i> y <i>polar</i>	87
5.3. Raíz del error cuadrático medio de las imágenes reconstruidas mediante las matrices con <i>grid cartesiano</i> y <i>polar</i> para la iteración 30 del <i>phantom</i> de Shepp Logan reconstruido mediante el algoritmo MLEM	94
5.4. Medida del radio en cm obtenida a partir de la anchura a mitad de altura de los máximos y mínimos de la imagen reconstruida mediante las matrices del sistema creadas con <i>grid cartesiano</i> y <i>polar</i> para la iteración 40 del <i>phantom</i> de círculos de tres densidades	96
5.5. Comparación de la reconstrucción obtenida a partir de las matrices del sistema creadas con <i>grid cartesiano</i> y <i>polar</i> para la iteración 40 del <i>phantom</i> de círculos de tres densidades	98
6.1. Comparación cuantitativa de las matrices del sistema creadas con <i>grid cartesiano</i> y <i>polar</i>	113
6.2. Tiempos de reconstrucción y de acondicionamiento de las imágenes reconstruidas para su visualización asociado a las matrices del sistema creadas con <i>grid cartesiano</i> y <i>polar</i>	123

7.1.	Tiempos de reconstrucción y de visualización para el MLEM y para el MLEM con FOA calculado para un <i>phantom</i> de Shepp Logan.	137
A.1.	Opciones de simulación empleadas para la obtención del <i>phantom</i> de Shepp-Logan mediante el software CTSim	144
A.2.	Datos correspondientes a los 9 círculos que conforman el <i>phantom</i> de Círculos de tres densidades correspondientes al radio r , centro (c_x, c_y) y densidad (ρ)	146
A.3.	Datos para el cálculo de los 12 elipsoides que componen el <i>phantom</i> de Shepp-Logan modificado correspondientes al radio (r_x, r_y, r_z) , centro (c_x, c_y, c_z) , ángulo de giro respecto al eje y (α) y densidad (ρ)	146
A.4.	Datos que describen el <i>phantom</i> de Tres Cilindros 3D correspondientes al radio r , centro (c_x, c_y) y altura máxima del cilindro (z_{max}) , altura mínima (z_{min}) y densidad (ρ)	149

Índice de figuras

2.1. (a) Recreación de una configuración <i>Cone-Beam</i> (b) Detalle de la proyección del objeto sobre el plano detector.	12
2.2. (a) Corte en planta del escáner de geometría <i>Cone-Beam</i> que muestra los límites horizontales del FOV. (b) Corte en alzado que muestra los límites verticales del FOV en una posición estática.	14
2.3. Volumen que representa los límites del FOV para un TAC <i>Cone-Beam</i> . .	15
2.4. Esquema que muestra los parámetros en la medida de dos proyecciones sobre un objeto.	16
2.5. Diagrama que muestra el concepto de la reconstrucción, considerando el objeto bajo estudio como un sistema lineal invariante del que conocemos su entrada I_o y su salida I_t	19
2.6. Esquema que muestra el cálculo de a_{ij} que corresponde con el peso que está en la fila i y la columna j de la matriz del sistema A	20
3.1. Esquema gráfico del método de Siddon (a) calculado a partir de la suma por píxeles y (b) calculado a partir de puntos de corte con el contorno de un objeto de geometría conocida.	27
3.2. (a) Esquema que muestra de forma gráfica el método de Joseph en el que los puntos interpolados se marcan con cuadraditos (b) Esquema del método de los cubos.	29
3.3. Proyección 2D de un círculo centrado en el origen para distintos métodos de <i>forward-projection</i>	29
3.4. Comparación de los resultados obtenidos para la proyección 2D del círculo de $R = 4$ calculado con los métodos de Siddon, Joseph y de los Cubos para distintos número de líneas por rayo.	30

3.5. Diferencia cuadrática promedio de la proyección 3D de un cilindro centrado para el método de Siddon y el método de Joseph en función de la densidad de líneas por mm de detector.	31
3.6. Fotografía correspondiente al montaje del escáner TAC de pequeños animales perteneciente al Grupo de Física Médica del Instituto de Física Corpuscular.	33
4.1. Esquema que muestra las simetrías de un escáner TAC 2D de 2P rotaciones en la izquierda, de un <i>grid</i> cartesiano por separado en el centro y las simetrías conjuntas en la derecha. La zona sombreada representa el área menor que resulta simétrica al resto.	41
4.2. Medidas de la anchura radial Δr y angular $\Delta \lambda$ a mitad de altura de Δr sobre un píxel polar a partir de las cuáles se define la relación de aspecto del píxel como $\frac{\Delta \lambda}{\Delta r}$	44
4.3. Ejemplo de sector circular discretizado mediante píxel polar. Se destaca el detalle de las circunferencias inscritas dentro de los píxeles polares que cumplen las reglas de diseño 1 y 2 y se emplean para fijar el tamaño de la dimensión $\Delta \theta$ del píxel polar.	45
4.4. Ejemplo de sector circular discretizado mediante píxel polar de radio constante. La cuerda mayor del píxel polar $\Delta \kappa$, mediante la cual se determina el tamaño de $\Delta \theta$ viene resaltada mediante una línea punteada.	47
4.5. Relación de aspecto entre la dimensión $\Delta \lambda$ y Δr para el ejemplo de sector circular discretizado mediante píxel polar de radio constante.	47
4.6. Diseño y dimensiones de un píxel polar 3D.	48
4.7. Esquema que muestra las simetrías de un escáner TAC 2D de 2P rotaciones en la izquierda, de un <i>grid</i> polar por separado en el centro y las simetrías conjuntas en la derecha. La zona sombreada representa el área menor que resulta simétrica al resto.	50
4.8. Variación del radio máximo con el número de detectores y el número de rotaciones.	51
4.9. Variación del número de píxeles por sector circular con el número de detectores y el número de rotaciones.	52
4.10. Número de píxeles para un sector circular.	52
4.11. Variación de la cuerda angular máxima con el número de detectores y el número de rotaciones.	53
4.12. Variación del número de píxeles por sector circular con el número de detectores y el número de rotaciones.	54

4.13. Número de píxeles para un sector circular.	54
4.14. Número de píxeles total para <i>grid</i> polar y <i>grid</i> cartesiano aplicando todas las simetrías posibles para cada <i>grid</i> (a) para un número de 1000 detectores en función del número de rotaciones y (b) para 500 rotaciones en función del número de detectores.	56
4.15. Diseño de un <i>grid</i> polar formado por píxeles circulares. Se incorpora en el dibujo con un trazo más fino el <i>grid</i> polar empleado para ubicar el píxel circular.	58
4.16. Porcentaje promedio del área del hueco que deja el píxel, en proporción al área del píxel circular.	59
4.17. <i>Blob</i> estándar de $m = 2$, $\alpha = 10,4$ y $\Delta = 1$	61
4.18. Imagen polar <i>diana</i> 4.18(a) e imagen polar <i>caracol</i> 4.18(b).	63
4.19. La imagen polar 4.18(a) y la imagen polar 4.18(b), se muestra dibujada mediante píxeles polares 4.19(a) y 4.19(b), circulares 4.19(c) y 4.19(d) y <i>blobs</i> 4.19(e) y 4.19(f) y transformada a cartesianas mediante sus visores respectivos. En el visor de píxeles circulares se ha empleado un filtro bilineal de longitud 5.	65
4.20. Perfil de la imagen polar <i>diana</i> transformada a cartesianas mediante el visor de polares, desde el centro de la imagen al extremo del FOV. . . .	66
4.21. Perfil de la imagen polar <i>diana</i> transformada a cartesianas mediante el visor de píxeles circulares con filtro bilineal de longitud 5, desde el centro de la imagen al extremo del FOV.	68
4.22. Perfil de la imagen polar <i>diana</i> transformada a cartesianas mediante el visor de <i>blobs</i> , desde el centro de la imagen al extremo del FOV.	69
5.1. Diferencia muestra a muestra máxima entre los vectores S calculados con distinto número de líneas para la matriz polar de relación de aspecto unitario.	77
5.2. Raíz del error cuadrático medio frente al tiempo de cálculo de la matriz del sistema en segundos (escala logarítmica) para distinta densidad de líneas.	79
5.3. Diagrama del cálculo de pesos para un ejemplo de <i>grid</i> polar de relación de aspecto unitario con píxeles polares.	81
5.4. Diagrama del cálculo de pesos para un ejemplo de <i>grid</i> polar con píxeles circulares.	82

5.5.	Casos posibles en función de la posición del centro del píxel, para la intersección entre el rayo y el píxel circular suponiendo que un píxel no puede ser intersectado por más de 3 rayos simultáneamente.	83
5.6.	Porcentajes de distribución de casos en el cálculo de pesos de píxeles circulares de la matriz del sistema.	84
5.7.	Imagen reconstruida del <i>phantom</i> de Shepp-Logan (iteración número 30).	91
5.8.	(a) Perfil horizontal (línea 1024) para la iteración número 30 de la reconstrucción del <i>phantom</i> de Shepp-Logan. (b) Zoom de la zona central del perfil visto en (a).	93
5.9.	(a) Raíz del error cuadrático medio (RMSE) de las imágenes reconstruidas respecto al modelo original en función de las iteraciones para el <i>phantom</i> de Shepp-Logan. (b) Relación señal a ruido (SNR) de las imágenes reconstruidas respecto al modelo original en función de las iteraciones para el <i>phantom</i> de Shepp-Logan.	94
5.10.	Numeración de las lesiones que se representan en el <i>phantom</i> de círculos de tres densidades.	96
5.11.	CRC y CV en función de las iteraciones para las imágenes reconstruidas del <i>phantom</i> de círculos de tres densidades tomando regiones de estudio situadas en las lesiones 1 y 5.	97
5.12.	Iteración número 10 de la reconstrucción de una medida real procedente del Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia.	100
5.13.	Imagen reconstruida mediante el método de <i>Filtered-Backprojection</i> con el software que se emplea asiduamente en el Hospital Clínico Universitario de Valencia.	101
6.1.	Diagrama del cálculo de pesos para píxeles polares 3D.	109
6.2.	Reconstrucción del <i>phantom</i> de Shepp-Logan con la matriz cartesiana en la iteración número 30 (a) corte transversal, (b) corte coronal y (c) corte sagital.	114
6.3.	Reconstrucción del <i>phantom</i> de Shepp-Logan con la matriz polar en la iteración número 30 (a) corte transversal, (b) corte coronal y (c) corte sagital.	115
6.4.	Reconstrucción de Shepp-Logan renderizada en un volumen semitransparente, (a) empleando la matriz cartesiana y (b) empleando la matriz polar.	117
6.5.	Reconstrucción del <i>phantom</i> de tres cilindros descentrados en la iteración número 30 con la matriz cartesiana.	118

6.6. Reconstrucción del <i>phantom</i> de tres cilindros descentrados en la iteración número 30 con la matriz polar.	119
6.7. Imagen reconstruida del <i>phantom</i> de tres cilindros descentrados para la iteración número 30 en la que se ha aplicado un corte por el centro de los tres cilindros que coincide con el corte mostrado en las figuras 6.5 y 6.6:(a) empleando la matriz cartesiana y (b) empleando la matriz polar.	120
6.8. Modelo del <i>phantom</i> formado por tres cilindros descentrados que incluye mediante un trazo negro, el contorno de las regiones de interés (ROI) empleadas para medir el contraste respecto al fondo.	120
6.9. <i>Root Mean Square Error</i> del <i>phantom</i> de tres cilindros descentrados en función de las iteraciones con la matriz polar y con la matriz cartesiana.	121
6.10. <i>Contrast Recovery Coefficient</i> del <i>phantom</i> de tres cilindros descentrados (a) en la región de alta densidad y (b) en la región de baja densidad, en función de las iteraciones con la matriz polar y con la matriz cartesiana.	121
6.11. Imagen del <i>phantom</i> de Derenzo.	123
6.12. Imagen reconstruida del <i>phantom</i> de Derenzo para la iteración número 30, obtenido a partir de una medida del escáner TAC de pequeños animales (a) empleando la matriz cartesiana y (b) empleando la matriz polar.	124
7.1. FOV pixelado empleando un píxel cartesiano con el objeto a reconstruir en el que se muestra la región del FOA sombreada: (a) subregión del FOV que sería necesario reconstruir empleando una técnica de FOA mediante rectángulos y (b) región del FOA con una delimitación basada en el empleo de una máscara.	129
7.2. FOV pixelado mediante <i>grid</i> polar (a) muestra la subregión del FOV delimitada para un objeto (b) muestra con más detalle la región que sería necesario reconstruir para el objeto mostrado en (a).	131
7.3. Ejemplo de delimitación de las proyecciones que distingue el grupo de rayos que atraviesan el objeto para dos posiciones de rotación.	132
7.4. La figura de la izquierda muestra la reducción del FOV a partir de la delimitación de los rayos en la primera rotación. La figura de la derecha, parte de la reducción obtenida en la figura de la izquierda en la primera rotación e incorpora una segunda. Las intersecciones entre los límites de los rayos y los sectores circulares se han marcado con cruces.	133

7.5.	Proyecciones en función de las rotaciones para el <i>phantom</i> de Shepp-Logan (a) marca mediante un asterisco blanco superpuesto, la posición del rayo que constituye el límite superior e inferior efectivo que se empleará en la reconstrucción (b) muestra un zoom de la figura que permite apreciar al detalle la delimitación calculada.	134
7.6.	Imagen del FOA calculado para el <i>phantom</i> de Shepp Logan.	135
7.7.	Imagen del <i>phantom</i> de Shepp Logan para la iteración 30, reconstruida empleando únicamente los rayos delimitados y los píxeles que pertenecen a la región del FOA.	136
A.1.	<i>Phantom</i> de Shepp Logan 2D y proyección del <i>phantom</i> obtenida mediante CTSim.	144
A.2.	<i>Phantom</i> de Shepp Logan 3D y cortes correspondientes al <i>phantom</i> de Shepp-Logan en los planos XY, XZ e YZ.	145
A.3.	<i>Phantom</i> de Shepp Logan 3D y cortes correspondientes al <i>phantom</i> de Shepp-Logan en los planos XY, XZ e YZ.	147
A.4.	Proyección del <i>phantom</i> de Shepp Logan 3D en cortes correspondientes (a) al plano detector para la rotación 50,(b) al plano detector horizontal 50 en función de las rotaciones y (c) al plano detector vertical 50 en función de las rotaciones.	148
A.5.	Reconstrucción de modelo de <i>phantom</i> de Tres Cilindros renderizada en un volumen semitransparente.	149
A.6.	Proyección del <i>phantom</i> de Shepp Logan 3D en cortes correspondientes (a) al plano detector para la rotación 50, (b) al plano detector horizontal 50 en función de las rotaciones y (c) al plano detector vertical 50 en función de las rotaciones.	150

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y planteamiento

Tomografía es un término que tiene su origen en la palabra griega *tomos* que significa corte y en la palabra *grafía* que significa representación gráfica. El propósito de esta técnica es la obtención de imágenes correspondientes a cortes del interior de un objeto, sin necesidad de realizar ninguna incisión sobre él. El procedimiento por el que se obtienen estas imágenes, a partir de las proyecciones tomadas por un escáner, se denomina reconstrucción de imágenes tomográficas.

La tomografía axial computerizada o tomografía de rayos-X es una técnica fundamental en el diagnóstico médico basado en imagen, que también tiene numerosas aplicaciones industriales. Desde su invención, se han realizado avances tecnológicos que han conducido a escáneres más rápidos, a la exposición a una menor dosis de radiación y a una mayor calidad de imagen. Una parte importante del éxito conseguido por esta técnica reside en el desarrollo de nuevos algoritmos de reconstrucción eficientes. Aunque el problema de la reconstrucción de imagen en su forma matemática pura fue resuelto por Johan Radon en 1917, la evolución continua en este campo de estudio ha dado lugar a la aparición de un número incesante de nuevos algoritmos.

La motivación existente para la propuesta de nuevas técnicas de reconstrucción, los problemas que entrañan estas técnicas y los avances realizados en este ámbito serán tratados a continuación.

1.1.1. Tomografía axial computerizada

En 1971, Godfrey N. Hounsfield presentó el primer escáner de imágenes de tomografía axial computerizada (TAC) en el Hospital Atkinson Morley en Wimbledon. En 1972, este escáner fue empleado para realizar la primera medida en un paciente, cuya intervención quirúrgica posterior confirmó el diagnóstico obtenido a partir de la imagen. La estimación más optimista de los directores del proyecto fijaba en 25 el número de aparatos necesarios para abastecer la demanda de este escáner en todo el mundo. Sin embargo, hoy en día, según datos del Ministerio del Interior [1] sólo en la Comunidad Valenciana hay un total de 69 escáneres TAC y en España la cifra asciende a un total de 611.

Las imágenes TAC se emplean habitualmente como prueba con valor diagnóstico y constituyen un procedimiento indicado en caso de hemorragias internas, fracturas de huesos, cánceres, localización de coágulos y búsqueda de cardiopatías.

Aunque el examen TAC es de naturaleza no invasiva, no se trata de una prueba inocua puesto que implica la exposición del sujeto a una dosis de radiación ionizante, que en exceso puede provocar efectos nocivos en la salud. Las dosis de radiación típicas recibidas en milisieverts respecto a una radiografía simple después de una prueba TAC y su prevalencia en el paciente se muestran en la tabla 1.1.

Procedimiento diagnóstico	Dosis típica (mSv)	Nº equiv. radiografías	Prevalencia de la radiación
Radiografía	0.02	1	3 días
TAC cabeza	2	100	10 meses
TAC pecho	8	400	3.6 años
TAC abdomen	10	500	4.5 años

Tabla 1.1: Dosis de radiación recibidas en mSv después de una exposición a distintas pruebas diagnósticas, procedentes de *Royal College of Radiologists 2003 Making the best use of a department of clinical radiology. Guidelines for doctors, 5th edn. Royal College of Radiologists, London.*

El número de exámenes TAC se ha duplicado respecto a la pasada década [2] constituyendo hoy en día el 47% de la dosis de radiación procedente de fuentes de rayos-X a la que se ve sometido un sujeto [3]. Sólo en EEUU se realizaron un total de 62 millones de pruebas TAC en el 2007 [4]. En los últimos años, se ha

producido una creciente preocupación por el aumento de la radiación recibida a causa de exámenes médicos [2, 3, 5], que se ha visto acentuada por un reciente estudio del *New England Journal of Medicine* [4], en el que se estima que 1 de cada 50 futuros casos de cáncer en EEUU serán causados por una exposición excesiva a exámenes TAC.

El desarrollo de los escáneres ha ido orientado a la reducción en el tiempo de exposición y a la reducción en la medida de lo posible del número de rotaciones necesario para realizar una prueba TAC [2, 6]. Sin embargo, para obtener una resolución espacial dada, el valor teórico del número de proyecciones necesarias para calcular la imagen está muy por encima del valor empleado en la práctica [7]. Consecuentemente, la reconstrucción de imágenes de TAC es un problema infradeterminado, en el que uno de los retos es el de encontrar la reconstrucción de mayor calidad posible con el menor número de datos necesario.

1.1.2. Problemas de la reconstrucción de imágenes TAC

La primera reconstrucción tomográfica de las proyecciones tomadas por el escáner de Hounsfield fue obtenida mediante métodos algebraicos. Esta primera imagen constaba de un único corte de 80×80 píxeles y el tiempo necesario para reconstruirla fue de 2.5 horas empleando un Data General Nova [8], uno de los más modernos computadores de la época.

Los métodos algebraicos consisten en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales del tipo $AX = B$, en el que las proyecciones procedentes del escáner son el término independiente B y la incógnita X es la imagen reconstruida. La matriz A es la responsable de la modelización del funcionamiento del escáner y se denomina matriz del sistema. Los elementos de esta matriz representan la contribución de cada proyección a cada uno de los píxeles de la imagen reconstruida por tanto, las dimensiones de la matriz del sistema se incrementan de forma proporcional a la resolución de la imagen y al número de proyecciones.

Actualmente, la evolución tecnológica de los escáneres ha hecho posible la mejora de la resolución obtenida, que ha llevado al incremento de las dimensiones de las imágenes a reconstruir. A consecuencia de esto, el tamaño de la matriz necesaria para modelizar el proceso de reconstrucción, convierte a los métodos algebraicos en una opción prohibitiva a pesar de los avances informáticos actuales. De hecho, el aumento en el volumen de datos que son capaces de registrar los escáneres ha sobrepasado la tasa de crecimiento informático prevista por la denominada *Ley de Moore* [9].

Por este motivo, los métodos algebraicos fueron sustituidos por métodos de reconstrucción con un menor coste computacional, que enfocan el problema desde una perspectiva distinta. Estos métodos emplean la transformada inversa de Fourier y realizan una aproximación discreta de la transformada inversa de Radon [10], a partir de la cuál se demuestra que es posible reconstruir cortes bidimensionales transversales de un objeto, usando un número infinito de proyecciones. En esta categoría, el método más extendido es el *Filtered-Backprojection* (FBP)[11], en el que las proyecciones son filtradas en el dominio de la frecuencia con un filtro rampa y posteriormente son retroproyectadas con la transformada inversa de Fourier para obtener la imagen reconstruida. A partir del FBP se han propuesto una gran variedad de algoritmos entre los que destaca el método de Feldkamp [12] y el método de Grangeat [13].

Los métodos basados en la transformada de Fourier constituyen la opción más extendida entre los tomógrafos comerciales. Sin embargo, los métodos basados en técnicas algebraicas han seguido siendo objeto de estudio, en tanto que, estos métodos han demostrado ser capaces de proporcionar imágenes de mayor calidad y ser más indicados en condiciones adversas [6]. Algunas aproximaciones al problema emplean métodos exactos [14]. A pesar de la existencia de métodos exactos los métodos aproximados han seguido siendo la opción dominante debido a dos razones. En primer lugar, los métodos exactos requieren de una completitud de datos que no siempre es posible y en segundo lugar, no proporcionan una reconstrucción óptima en lo que concierne al ruido presente en la imagen [6].

Los métodos algebraicos proporcionan imágenes reconstruidas con un mayor contraste y precisión en condiciones más ruidosas y con un menor número de proyecciones, que los métodos basados en la transformada inversa de Fourier [15, 16, 17]. En los exámenes de TAC intra-operatorio y cardíaco, la presencia de componentes metálicos obliga a desechar algunas de las proyecciones para evitar artefactos [18]. En este tipo de exámenes TAC es común encontrarse con proyecciones incompletas no equiespaciadas angularmente. En estos casos, la reconstrucción calculada mediante métodos algebraicos proporciona imágenes de más calidad [18, 19, 20].

Una de las líneas de investigación más prometedoras en la tomografía está en el empleo de nanotubos de carbón [21], por su capacidad de producir rayos-X. Estos componentes plantean la posibilidad revolucionaria de tomógrafos portátiles que consisten en una cinta flexible con detectores y emisores de rayos-X insertados [22]. La utilidad de estos escáneres es la de realizar un examen de urgencia en

cualquier lugar, fijando la cinta de detectores y emisores alrededor de la zona que se quiere estudiar. Estos equipos no proporcionan una serie de datos equiespaciados por lo que en principio, la reconstrucción algebraica es más indicada para estos dispositivos.

1.1.3. Soluciones existentes y sus limitaciones

Las ventajas que aporta la reconstrucción mediante métodos algebraicos han suscitado una investigación continuada en este campo con el propósito de hacer viable su aplicación.

El principal inconveniente de los métodos algebraicos viene dado por su alto coste computacional. Las estrategias utilizadas hasta el momento para afrontar esta problema se pueden dividir en dos vertientes diferenciadas aunque complementarias entre sí: la primera hace frente al coste computacional mediante el diseño de estrategias de implementación más complejas, la segunda mediante la proposición de nuevos algoritmos de reconstrucción algebraicos que reduzcan el coste computacional asociado.

Algunas de las mejoras en el rendimiento de los métodos algebraicos se basan en el uso de la paralelización mediante *clusters* de computadores locales [23], remotos [24, 25] o mediante el uso de varios procesadores [26]. El empleo de la paralelización puede incrementar la complejidad asociada al algoritmo de reconstrucción, debido a que una parte de los recursos computacionales se destinan a la comunicación y sincronización entre nodos. Por este motivo, encontrar una configuración en este tipo de algoritmos que de lugar a una implementación eficiente y robusta frente a fallos de alguno de sus nodos es una tarea compleja [24, 26]. También es posible el empleo de hardware específico dedicado al problema de reconstrucción *Application Specific Integrated Circuit* (ASIC) o el uso del potencial de cálculo de las tarjetas gráficas para la reconstrucción [27].

La mayoría de los métodos algebraicos son de tipo iterativo y están basados en una función de minimización que enfoca el problema de la reconstrucción como un problema de optimización. Los distintos tipos de funciones de minimización empleadas dan lugar a métodos de reconstrucción iterativos diferentes. Algunos de los métodos más conocidos son el método de Kaczmarz [28], el método *Simultaneous Algebraic Reconstruction Techniques* (SART) [29] y el método *Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques* (SIRT) [11]. Los avances en los métodos algebraicos se basan en la propuesta de variantes que permitan una aceleración de la convergencia [30] y la reducción del número de operaciones por

iteración [31]. Los métodos iterativos estadísticos tienen como valor añadido la modelización estadística del ruido. Entre los métodos iterativos estadísticos se distinguen aquellos que como el *Maximum Likelihood Expectation Maximization* (MLEM) [32, 33] asumen que el ruido tiene una distribución de Poisson y los que suponen que el ruido se modela con una función densidad de probabilidad gaussiana, entre los que destaca el *Maximum a Posteriori* (MAP) [34]. Además existen muchos métodos mixtos [35], que combinan los métodos iterativos con los métodos basados en Fourier y los métodos exactos con los métodos iterativos.

A pesar de la amplia variedad de métodos algebraicos, la reconstrucción de imágenes tomográficas basada en técnicas algebraicas sigue siendo más costosa computacionalmente que los métodos basados en Fourier. Las características de la matriz del sistema determinan las propiedades de la imagen obtenida. Es decir, una matriz del sistema calculada a partir de un modelo más complejo, generalmente supone un mayor coste computacional por iteración, pero permite una mejora de las características de la imagen reconstruida. En definitiva, el cálculo de la matriz del sistema debe asumir un compromiso entre la calidad requerida y el coste computacional asociado.

Diversos autores han hecho propuestas de matrices alternativas que permiten la simplificación del problema de la reconstrucción. Algunas de estas aproximaciones al problema se basan en la disposición de los píxeles siguiendo una geometría alternativa. El objetivo de estos esquemas alternativos de píxeles es el de posicionarlos más espaciados para reducir su número, empleando un esquema cúbico [15, 36], hexagonal [37] o polar [38] y de esta manera, reducir el número de operaciones necesarias para la reconstrucción.

La matriz del sistema consiste en la definición de la relación entre las proyecciones y la versión discreta de la imagen a reconstruir. La discretización de la imagen más habitual es la discretización cartesiana mediante píxeles cuadrados [26, 39]. El problema de este tipo de píxeles es que no se adaptan a la geometría del escáner en tanto que, una vez que el área a reconstruir es discretizada, las simetrías presentes en la matriz del sistema son un subgrupo del total de las simetrías presentes en la geometría del escáner. Por este motivo, una de las estrategias empleadas es la de sustituir el píxel cartesiano por otro tipo de píxeles que permita simplificar el cálculo asociado a la matriz del sistema o que proporcione una reconstrucción con una calidad mayor. Algunas de las propuestas destacadas emplean como píxeles funciones Kaiser-Bessel [36], píxeles naturales que se definen a partir de la intersección entre proyecciones [40, 41] o píxeles polares [38].

Los píxeles polares se han empleado en cámara Comptom [42], *Positron Emission Tomography* (PET) [43], *Single Photon Emission Computed Tomography* (SPECT) [38, 44, 45] y TAC industriales [46] y han demostrado su capacidad para adaptarse a las simetrías presentes en un escáner TAC. El empleo de estas simetrías hace posible la utilización de una parte de la matriz del sistema y la obtención de la matriz restante mediante el uso de la relación de simetría. Sin embargo, los resultados obtenidos hasta el momento, suponen una pérdida de resolución frente a los píxeles cartesianos [46] o presentan artefactos que descartan su uso [45] o requieren de una transformación a coordenadas cartesianas costosa [43], que afecta a la calidad de la imagen final [42].

La motivación de esta tesis es la de proponer una mejora desde el núcleo del problema, que reside en la propia matriz. De esta forma, las características favorables obtenidas mediante la transformación de la matriz, se pueden sumar a la optimización de los algoritmos y al uso de implementaciones computacionalmente eficientes.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es obtener una reducción del coste computacional asociado a los métodos algebraicos de reconstrucción de imagen, mediante la propuesta de un modelo de matriz del sistema, que permita una mejor adaptación a la geometría del escáner.

Para que el planteamiento del nuevo modelo de matriz del sistema sea ventajoso frente al modelo de matriz convencional, este modelo debe cumplir a la vez dos objetivos fundamentales:

- Proporcionar una calidad de la imagen reconstruida al menos igual que la obtenida mediante el modelo de la matriz cartesiana convencional.
- Reducir el coste computacional asociado, respecto a la matriz cartesiana convencional, partiendo de los mismos métodos de reconstrucción algebraicos.

El proceso de diseño del nuevo modelo de matriz del sistema implica la consecución de los siguientes objetivos secundarios:

- Diseñar un esquema de disposición de los píxeles que conforman la matriz del sistema que se adapte a las simetrías inherentes a un escáner tomográfico.

- Determinar el procedimiento más adecuado para el cálculo de los valores de la matriz del sistema.
- Desarrollar un método de visualización de las imágenes reconstruidas mediante la matriz del sistema propuesta, que haga posible su transformación a formatos de imagen estándar.

El modelo de matriz resultante debe aportar una solución de reconstrucción viable en condiciones realistas. Para lograr este requisito, se plantean los siguientes objetivos:

- Validar la matriz propuesta mediante la reconstrucción de medidas reales procedentes de escáneres TAC.
- Comparar la reconstrucción de la medida real mediante la nueva matriz propuesta con la obtenida a partir de la matriz cartesiana convencional, en términos de calidad y de eficiencia.

1.3. Estructura de la tesis

El estudio desarrollado en esta tesis se estructura por capítulos de la siguiente manera:

En el **capítulo 2**, se describen algunos de los conceptos básicos empleados en la reconstrucción de imágenes de TAC, que constituyen un punto de partida para introducir las ideas principales en las que se basa el trabajo que se presenta.

El **capítulo 3** se centra en la exposición de los componentes fundamentales que deben tomarse como punto de partida en la reconstrucción. Estos elementos de partida son las proyecciones que se emplearán para reconstruir, la especificación de los escáneres empleados y la descripción del método de reconstrucción algebraico.

En el **capítulo 4**, se estudian en profundidad las propuestas de pixelado alternativo al pixelado cartesiano habitual, que permiten mantener las simetrías naturales inherentes a un sistema TAC. En primer lugar, se describe el pixelado cartesiano convencional que sirve para comparar las imágenes obtenidas mediante el uso de píxeles alternativos al píxel cartesiano. En este capítulo, se realiza una exposición pormenorizada de las propuestas alternativas de pixelado y de sus

variantes, haciendo especial hincapié en las ventajas e inconvenientes asociados a cada uno de los esquemas propuestos entre sí y respecto al caso cartesiano que se emplea como paradigma.

El **capítulo 5** describe la implementación de seis matrices resultantes de la utilización de los modelos de píxeles planteados en el capítulo 4 para el cálculo de la matriz del sistema 2D. Las estrategias empleadas para el cálculo de pesos en cada caso, los algoritmos de implementación de las matrices del sistema y los resultados del cálculo de dichas matrices se tratarán en profundidad en la primera parte del capítulo. Finalmente se muestran las imágenes obtenidas con cada matriz y se procede a un estudio comparativo entre las mismas respecto al modelo simulado objetivo y frente a una medida real.

En el **capítulo 6**, se retoma el modelo de matriz del sistema 2D que da lugar a una imagen reconstruida de mayor calidad con menor coste computacional y se extiende esta propuesta al caso 3D. El capítulo describe el algoritmo de cálculo de pesos, la técnica de visualización de imágenes en 3D y su implementación para un escáner real. Las imágenes 3D reconstruidas se comparan con el caso equivalente cartesiano 3D, en lo relativo a la calidad de reconstrucción proporcionada y en lo que respecta al coste computacional asociado. Para concluir, se realiza una implementación del modelo de matriz propuesto para reconstruir una medida real del escáner de pequeños animales.

En el **capítulo 7**, se presenta una mejora de la reconstrucción basada en la estructura de píxeles propuesta. El procedimiento descrito permite obtener una reducción del número de píxeles a reconstruir para cada caso particular, a partir del análisis de la proyección.

En el **capítulo 8**, se enumeran las conclusiones más importantes obtenidas después del estudio realizado y la síntesis de las aportaciones conseguidas. Además, se proponen algunas de las futuras líneas de investigación que pueden dar continuidad al trabajo aquí presentado.

Capítulo 2

Conceptos Básicos de Reconstrucción de Imágenes

La teoría sobre reconstrucción de imágenes tomográficas es extensa y se encuentra recogida en numerosos libros sobre reconstrucción enfocada desde el punto de vista de la teoría de la señal [11], desde un planteamiento matemático [47] y desde una perspectiva más aplicada, orientada a físicos e ingenieros [48]. Debido a la naturaleza multidisciplinar de esta materia, en este capítulo se presenta una breve introducción de los conceptos básicos sobre tomografía a los que se hará referencia a lo largo de la tesis, que son relativos al ámbito de la reconstrucción. A lo largo del capítulo, se profundizará en las características inherentes a un sistema TAC de geometría *Cone-Beam* ya que la adecuación a esta geometría es uno de los condicionantes presente en la reconstrucción. También se introducirán conceptos relativos a la matriz del sistema que serán tratados con más detalle en los capítulos 5 y 6. Cabe resaltar que aunque las soluciones de reconstrucción propuestas se aplicarán a una geometría de TAC *Cone-Beam*, las propuestas de matriz del sistema y de métodos de reconstrucción son adaptables a otros tipos de escáneres tomográficos (PET, SPECT).

2.1. Características inherentes a un sistema TAC *Cone-Beam*

Un sistema TAC *Cone-Beam* consiste en una fuente de rayos-X y un detector plano, que contiene una matriz de cristales centelleadores. Estos cristales permiten convertir la señal recibida de la fuente de rayos-X a una longitud de onda, tal que, puede ser registrada por fotodiodos o tubos fotomultiplicadores y de esta manera cuantificada digitalmente. La fuente de rayos-X ilumina de manera perpendicular a los detectores, dando lugar a una geometría de haz cónico como se muestra en la figura 2.1(a).

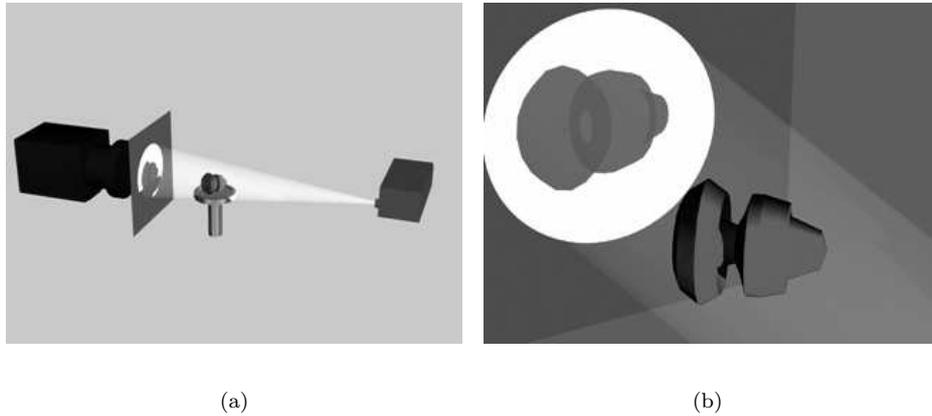


Figura 2.1: (a) Recreación de una configuración *Cone-Beam* (b) Detalle de la proyección del objeto sobre el plano detector.

Se puede apreciar en la figura 2.1 como el objeto que se somete a estudio se coloca entre la fuente y el plano detector. Una medida consistirá en registrar la proyección de la fuente sobre el plano detector atravesando el objeto desde diferentes ángulos por lo que, se puede proceder de dos maneras que darán lugar a medidas equivalentes: bien rotando el objeto medido gracias a un soporte giratorio o bien rotando la fuente de rayos-X, de forma solidaria con el plano detector mientras el objeto medido permanece inmóvil.

2.1.1. Definición de *Field of View*

Se define el *Field of View* (FOV) como el volumen que resulta de la intersección entre todos los haces proyectados entre la fuente y el detector en todas las

posiciones angulares. Este volumen delimita la región resultante de la intersección de la zona que es iluminada en cada una de las posiciones por la fuente y cuya medida es registrada por el detector. Es necesario conocer con exactitud los límites del FOV del escáner porque sólo será posible reconstruir el objeto ubicado dentro del FOV.

El eje de giro, respecto al cual se producen las rotaciones, se conoce como isocentro (O). La geometría del FOV vendrá definida por la distancia de la fuente al isocentro (D), por la distancia del detector al isocentro (d) y por las dimensiones del plano detector (a y b) (ver figura 2.2).

La proyección del haz sobre el detector da lugar a unos límites horizontales del FOV de base circular (ver figura 2.2(a)) mientras que los límites verticales, consisten en un corte rectangular truncado por un plano en los extremos como muestra la figura 2.2(b). La suma del corte horizontal y el vertical sometidos a simetría de revolución da lugar a una forma cilíndrica con terminación cónica como la que se muestra en la figura 2.3.

El radio y la altura total del FOV, tomando las dimensiones que se muestran en la figura 2.2, vienen determinados por las expresiones 2.1 y 2.2.

$$R_{FOV} = \frac{aD}{\sqrt{a^2 + 4(D+d)^2}} \quad (2.1)$$

$$H = \frac{(b(D - R_{FOV}))}{(D + d)} \quad (2.2)$$

En la práctica, se toma como volumen de FOV el interior del cilindro representado en 2.3 prescindiendo de los extremos cónicos por simplicidad ya que corresponden con una zona de área despreciable frente al área del cilindro y presenta un mayor efecto de bordes.

2.1.2. Resolución espacial intrínseca del sistema

Se define como resolución espacial del sistema a la distancia menor a partir de la cual es posible distinguir la presencia de dos objetos puntuales medidos por el

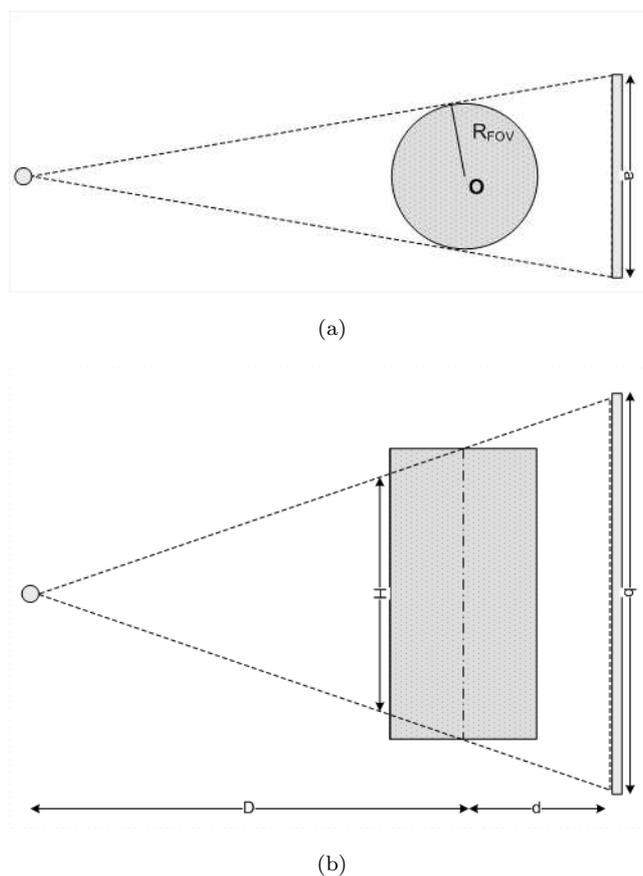


Figura 2.2: (a) Corte en planta del escáner de geometría *Cone-Beam* que muestra los límites horizontales del FOV. (b) Corte en alzado que muestra los límites verticales del FOV en una posición estática.

escáner dentro del FOV. La determinación de la resolución espacial intrínseca del escáner es una tarea compleja ya que son numerosos los factores que pueden influir en la medida [49, 50, 51].

Si el detector está formado por una matriz de cristales de un tamaño definido, su resolución intrínseca queda restringida incluso en condiciones ideales a un tamaño fijo ρ_d . La forma del haz provoca una magnificación geométrica (M) de la proyección del objeto en el plano detector, que dependerá de la posición del objeto y de la distancia de la fuente al detector. Si asumimos que el objeto es un objeto

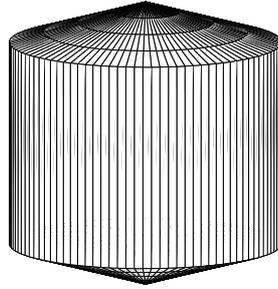


Figura 2.3: Volumen que representa los límites del FOV para un TAC *Cone-Beam*.

puntual situado en el isocentro, M viene dada por la expresión (2.3),

$$M = \frac{D + d}{d} \quad (2.3)$$

La resolución del detector será por lo tanto,

$$\theta_d = \frac{\rho_d}{M} \quad (2.4)$$

La fuente de rayos-X tiene una anchura focal finita de dimensiones ρ_f por lo que aunque tuviéramos una resolución infinita en el detector, el diámetro mínimo de un punto proyectado sería del tamaño de la dimensión focal. A su vez, la resolución de la fuente se verá afectada por el factor de magnificación resultando en una resolución igual a la expresión (2.5).

$$\theta_f = \rho_d \frac{M - 1}{M} \quad (2.5)$$

Si la fuente tiene una función de emisión de distribución gaussiana asumimos que tanto la fuente como el detector darán lugar a que la proyección de un objeto

puntual tenga un perfil gaussiano afectado por una anchura θ que resulta de la convolución de los efectos derivados de la fuente y de la anchura del detector.

$$\theta = \sqrt{\theta_f^2 + \theta_d^2} \quad (2.6)$$

En la práctica, la resolución espacial intrínseca del sistema será un valor mayor que el teórico debido a efectos en la medida tales como asimetrías mecánicas [49], falta de linealidad [50] o endurecimiento del haz [52], por lo que se asume que $\theta \simeq \theta_d$.

2.1.3. Número de proyecciones

El número de rotaciones de la medida N_ϕ hace referencia al número de proyecciones tomadas en el intervalo $0 \leq \phi < \pi$.

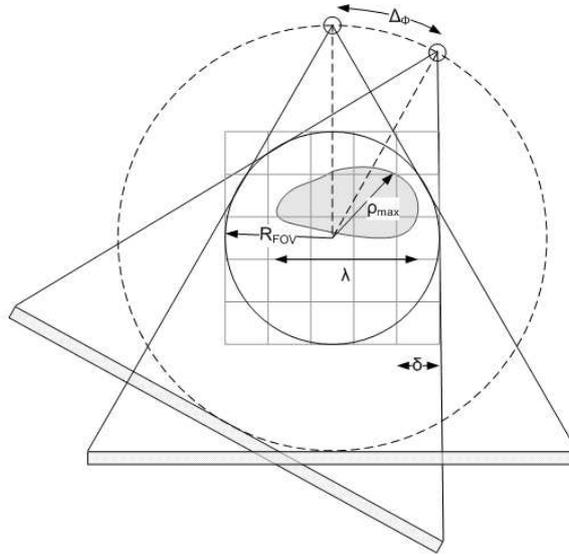


Figura 2.4: Esquema que muestra los parámetros en la medida de dos proyecciones sobre un objeto.

Dado un objeto de diámetro máximo λ_{max} (ver figura 2.4), si tomamos un intervalo de muestreo que mantiene una separación entre muestras δ , el número

de muestras por proyección es de,

$$N = \frac{\lambda_{max}}{\delta} \quad (2.7)$$

El muestreo radial en el espacio de Fourier viene dado por:

$$\Delta_r = 2\rho_{max}/N \quad (2.8)$$

El espaciado angular es $\Delta\phi = \pi/N_\phi$ que en $\rho = \rho_{max}$, da lugar a una apertura angular de

$$\Delta_{az} = \rho_{max}\Delta\phi \quad (2.9)$$

Si la imagen final tiene que mantener una resolución del sistema uniforme en todas las direcciones, la frecuencia de muestreo más alta debe ser la misma en la dirección radial y azimutal del espacio para un ángulo dado por lo que igualamos $\Delta_r = \Delta_{az}$ y obtenemos,

$$N_\phi = \frac{\pi}{2}N \quad (2.10)$$

En teoría, estas repeticiones de la medida desde diferentes posiciones angulares, son repeticiones equivalentes por lo que no haría falta tomar proyecciones en 2π radianes. En la práctica puede existir pequeños desajustes mecánicos que lleven a una asimetría y variaciones en el paso $\Delta\phi$ por lo que, en la medida, el número de proyecciones se toma en 2π radianes que supone tomar una proyección con un incremento angular de $\Delta\phi = 2/N$.

Si pensamos en un plano detector de 1024 celdas por lado, el valor teórico calculado para $N = 2048$ serían unas 3217 proyecciones en π frente a las 400 rotaciones que se suelen tomar para ese número de detectores. El empleo de un mayor número de rotaciones aumenta la cantidad de datos por lo que mejora la calidad de la imagen y el contraste de la medida, sin embargo supone un mayor tiempo de

medida y una mayor exposición del objeto de medida a la radiación. Por lo tanto, generalmente, se trabajará con una cantidad de información inferior a la necesaria y será recomendable el empleo de métodos de reconstrucción robustos frente a la falta de datos.

2.2. Reconstrucción tomográfica algebraica

Existen muchas aproximaciones al problema de reconstrucción mediante métodos algebraicos. El núcleo principal de este tipo de soluciones radica en la estrategia empleada para construir la matriz del sistema puesto que mediante esta matriz se modeliza el funcionamiento del TAC y muchas de las propiedades de la imagen reconstruida dependen de las aproximaciones realizadas en el cálculo de la matriz del sistema. A continuación se introducirán los conceptos necesarios para conocer las bases de la construcción de la matriz del sistema, que será descrita en detalle en los capítulos 5 y 6.

2.2.1. Concepto de reconstrucción de imágenes

Si se toma la función del coeficiente de atenuación lineal de un objeto a lo largo de la dirección x como $f(x)$, se puede considerar haciendo algunas simplificaciones, que la intensidad transmitida desde la fuente por un rayo I_t es atenuada a su paso a través del objeto una longitud L por procesos de absorción y *scattering*, siendo posible establecer una relación con la intensidad emitida I_o a partir de la expresión (2.11),

$$I_t = I_o e^{-\int_L f(x) dx} \quad (2.11)$$

De esta forma se obtiene que existe una relación entre la función de atenuación y la medida de intensidad que viene dada por la expresión (2.12). El grado de atenuación depende de la energía del espectro de los rayos-X, del número atómico promedio y de la densidad de la masa del tejido del objeto que se atraviesa [53].

$$\int_x f(x) dx = -\frac{1}{L} \ln\left(\frac{I_t}{I_o}\right) \quad (2.12)$$

Teniendo en cuenta la igualdad (2.12), la reconstrucción de una imagen de TAC consiste a grandes rasgos en localizar en el espacio los niveles de densidad del objeto medido, tomando como fuente de información la diferencia de intensidad medida, respecto a la emitida por la fuente desde diferentes posiciones, tal y como muestra el diagrama 2.5.

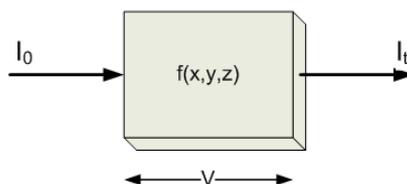


Figura 2.5: Diagrama que muestra el concepto de la reconstrucción, considerando el objeto bajo estudio como un sistema lineal invariante del que conocemos su entrada I_0 y su salida I_t .

2.2.2. Definición de matriz del sistema

Los algoritmos de reconstrucción algebraicos permiten obtener una imagen considerando el problema de la reconstrucción como un sistema de ecuaciones lineales que se puede expresar de forma matricial. De manera que la incógnita es la imagen reconstruida y el término independiente es la medida.

La imagen incógnita a reconstruir es una versión discreta del objeto de medida en la que cada nivel de intensidad de la imagen representa un nivel de densidad en el objeto. Además, se considera que el haz proyectado desde la fuente está formado por un conjunto de sub-haces o rayos discretos que van hasta cada cristal del detector como muestra la figura 2.6. El cálculo de la matriz del sistema consiste en el cálculo de la relación entre los rayos, que son proyecciones discretas registradas por un elemento puntual de la matriz de detectores y los píxeles que componen la imagen reconstruida.

En la figura 2.6 se muestra de forma gráfica el cálculo de un elemento de la matriz del sistema en 2D. La medida de un rayo correspondiente al área ocupada en un píxel, guarda una relación con el área intersectada entre el rayo y el píxel y con la densidad media por unidad de área del objeto o del aire presente en ese espacio. De esta forma, el cálculo de los pesos de la matriz se convierte en un problema geométrico en el que se desea conocer el porcentaje de área del píxel

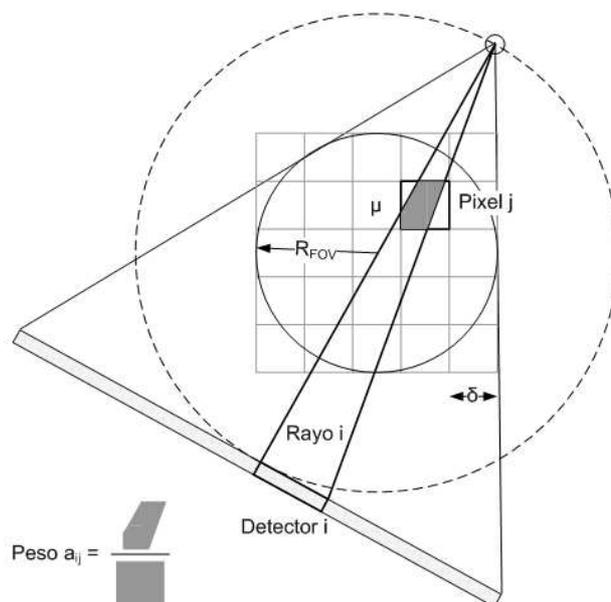


Figura 2.6: Esquema que muestra el cálculo de a_{ij} que corresponde con el peso que está en la fila i y la columna j de la matriz del sistema A .

total que es intersectada por el área en forma de triángulo que se denomina rayo. Este cálculo se realiza para cada píxel y para cada rayo en todas las rotaciones del escáner. Cada entrada de la matriz representa la intersección entre un píxel y un rayo y normalmente, el número de píxeles es muy superior al número de rayos por lo que, la matriz del sistema resultante es una matriz rectangular (no cuadrada) con muchas más incógnitas que ecuaciones. Además, la matriz del sistema se caracteriza por su alta dispersión ya que, un píxel es intersectado por unos pocos rayos y el resto de rayos tiene un área intersectada con el píxel igual a cero. A pesar de la gran dispersión de la matriz del sistema, que llega a ser inferior al 1% [7], el tamaño de la matriz es muy grande y su cálculo, lectura y almacenamiento son muy costosos computacionalmente. De la misma forma, este cálculo de la matriz del sistema es extensible a un modelo 3D en el que se trabajará con *voxels* (*volumetric pixel*), en lugar de píxeles y con prismas volumétricos en lugar de triángulos, para calcular el volumen de intersección.

2.2.3. Simetrías de la matriz del sistema

El valor de un elemento que se almacena en la matriz del sistema es la proporción de píxel que resulta de la intersección con cada rayo entre la fuente y el detector. Es posible que dicha intersección cumpla unas condiciones de periodicidad que son debidas a que las proyecciones tomadas son repeticiones rotadas respecto a un mismo punto de una misma área pixelada y a la geometría existente entre los haces del escáner.

Se considera que una matriz del sistema tiene simetrías cuando es posible inferir parte de los pesos de la matriz a partir de una fracción del total de los elementos de la matriz sin realizar aproximaciones en el cálculo, gracias a una redundancia en la información de la matriz. El empleo de simetrías en el cálculo de la matriz permite reducir su tamaño y el tiempo de cálculo por lo que simplifica su almacenamiento y lectura; sin embargo, el uso de simetrías introduce más complejidad en los algoritmos de reconstrucción ya que, hace necesario el uso de expresiones que relacionan cada peso con su simétrico para obtener toda la información de la matriz del sistema a partir del bloque de matriz que contiene la información simétrica calculada.

Las simetrías que existen en la matriz del sistema resultan de la intersección entre las simetrías del escáner empleado y las del pixelado. En el capítulo 4, se profundizará en el pixelado de la matriz del sistema y en su influencia en las simetrías.

2.2.4. Resolución espacial de la imagen reconstruida

La resolución espacial de la imagen se define como la menor distancia a la que es posible distinguir en la imagen reconstruida la presencia de dos objetos puntuales. Como la imagen a reconstruir es una imagen discreta, esta distancia viene dada por el tamaño mínimo del píxel de la imagen δ que a su vez determina la frecuencia máxima de la imagen, $f_{im} = \delta^{-1}$.

Para conocer el tamaño mínimo de un píxel tenemos que saber la frecuencia espacial máxima de la medida f_m que se relacionará con la frecuencia máxima de la imagen tal y como nos dice el teorema de muestreo de Nyquist.

$$f_{im} \geq 2f_m = \frac{2}{\theta} \quad (2.13)$$

El teorema del muestreo de Nyquist proporciona el límite para la resolución espacial de la imagen mínima o un tamaño de píxel máximo que es necesario respetar para que no se produzca el efecto de *aliasing* en las imágenes reconstruidas [54]. Es posible mejorar el aspecto visual de la imagen reduciendo su resolución espacial, pero este efecto sólo tendrá un impacto visual ya que, la resolución real de la imagen viene determinada por la resolución espacial intrínseca del sistema independientemente del número de píxeles que se emplee siempre y cuando ese número permita cumplir la restricción enunciada en 2.13.

Capítulo 3

Materiales y Métodos

En este capítulo se describirán las características de las proyecciones que van a ser empleadas para reconstruir y el método de reconstrucción seleccionado. Las señales sintéticas han sido obtenidas mediante un software de simulación gratuito [55] y a partir de técnicas de *forward-projection* [35, 37, 56]. Se estudiarán distintas técnicas de *forward-projection* para calcular proyecciones de modelos 2D y 3D y serán comparadas con un modelo teórico 2D para determinar la técnica que proporciona unas proyecciones sintéticas de mayor precisión. También se describirán las características de los escáneres de los que proceden las medidas empleadas. Tanto las señales sintéticas como las medidas reales, serán reconstruidas con los mismos modelos de escáner. El Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia y el TAC de pequeños animales del Instituto de Física Corpuscular han sido escogidos porque son dos escáneres de geometría *Cone-Beam* que presentan unas dimensiones muy distintas que hacen posible el estudio de la viabilidad de los métodos propuestos para dos casos extremos: un simulador TAC de grandes dimensiones y baja resolución y un TAC de pequeños animales de alta resolución. A continuación, se presentará el método de reconstrucción escogido para comparar las reconstrucciones que se obtienen a partir de los modelos de matriz del sistema propuestos en los capítulos 5 y 6.

3.1. Señales sintéticas

Las señales sintéticas son herramientas necesarias para hacer un análisis de la calidad de las reconstrucciones obtenidas ya que nos permiten calcular el margen

de error cometido en la reconstrucción respecto a un modelo original ideal. De este modo, es posible medir aisladamente la influencia de los métodos de reconstrucción y de la matriz del sistema empleada en la calidad de la reconstrucción obtenida. En este capítulo se presentan dos tipos de proyecciones sintéticas que han sido obtenidas empleando dos procedimientos distintos: a partir de un software gratuito de simulación y a partir de métodos de proyección, que intervienen en el proceso de cálculo de pesos de la matriz.

3.1.1. Proyecciones de CTSim

Las proyecciones 2D del *phantom* de Shepp-Logan [57], para las dimensiones del Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia, han sido obtenidas usando el software CTSim [55]. El modelo simulado que se ha tomado como referencia ha sido el de una geometría *Fan-Beam* equiangular, que se obtiene a partir del modelo 2D de la geometría *Cone-Beam* del Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia. El *phantom* de Shepp-Logan imita una sección transversal de una cabeza humana y esta formado por elipsoides de varios tamaños que representan diferentes densidades correspondientes a tejidos de distinta naturaleza (hueso, tejido conjuntivo, etc.). CTSim es un software gratuito de simulaciones que se basa en el cálculo de la proyección a partir de la incorporación de los aspectos geométricos del TAC. Este software es una herramienta que proporciona proyecciones simplificadas ya que no introduce en la simulación otros fenómenos que se dan en el registro real de señales de TAC tales como *scattering*, endurecimiento del haz u otros fenómenos derivados de desviaciones mecánicas que intervienen en el proceso de proyección.

La capacidad de los métodos de reconstrucción propuestos para proporcionar una reconstrucción adecuada en condiciones ruidosas se evaluará mediante la reconstrucción con medidas reales.

3.1.2. Proyecciones calculadas mediante *forward-projection*

Dado un volumen V , cuya versión discreta se representa con el vector X , los métodos de *forward-projection* tratan de obtener la proyección B que sería medida si se empleara un escáner con unas características determinadas para atravesar el volumen V .

Los métodos de *forward-projection*, se pueden definir como el proceso contrario al de reconstruir la imagen y aunque resulte paradójico, estos métodos forman

parte de muchos de los algoritmos de reconstrucción iterativos SART [29] y MLEM [33].

Si se expresa de forma matricial, la operación de *forward-projection* sería la aplicación lineal inversa al sistema lineal que define la reconstrucción mediante métodos algebraicos.

$$B = AX \tag{3.1}$$

Los métodos de *forward-projection* tienen una base común con el proceso de cálculo de pesos de la matriz del sistema por lo que, el estudio del método de *forward-projection* más adecuado, permite elegir al mismo tiempo el mejor método para proyectar los rayos del escáner sobre los píxeles del FOV para el cálculo de pesos de la matriz.

Existen numerosas estrategias de *forward-projection* para el cálculo de señales sintéticas. Algunos de los métodos más extendidos son el método de Siddon [58], de Joseph [59], las proyecciones *distance-driven* [39], el método de aproximación mediante cubos [26] y el método de Köhler [60]. En este trabajo se han implementado los métodos de *forward-projection* que han presentado mejores resultados [35, 37, 56] para escoger el más adecuado en este caso.

No se han incorporado efectos de ruido propio de una medida de TAC real, para centrar el análisis mediante proyecciones sintéticas, en la búsqueda del mejor método de aproximación al modelo de TAC *Cone-Beam* ideal. El propósito de estas simulaciones es el de medir la calidad de las reconstrucciones obtenidas tras emplear matrices del sistema de características distintas a las matriz cartesiana convencional para determinar si su empleo es aceptable.

3.1.2.1. Proyección 2D analítica

En el capítulo 2, se ha mostrado que la proyección en el caso 2D, de un objeto de área S , se relaciona con éste mediante su integral de área.

Los modelos de *forward-projection* empleados se basan en la aproximación de la integral de área de cada rayo b_j mediante una suma discreta de integrales de línea b_{jk} , que viene dada por la expresión (3.2).

$$b_j = \sum_{k=1..M} b_{jk} \tag{3.2}$$

Para evaluar los resultados de las proyecciones proporcionadas por estos métodos, se emplea como modelo la proyección de cada rayo correspondiente a la integral de área exacta de la intersección entre el rayo y el objeto medido, ya que es a lo que tiende el límite del sumatorio de integrales de línea cuando $M \rightarrow \infty$.

El cálculo de la matriz de pesos se realiza considerando que el FOV está ocupado por un objeto de densidad constante que ocupa todos los píxeles. Para el caso 2D basado en la geometría TAC *Cone-Beam*, este cálculo equivale a la medida de un círculo de densidad uniforme cuyo radio es igual al radio que delimita el FOV. Por este motivo, el objeto elegido como modelo ha sido un círculo de densidad igual a 1.

Todas las proyecciones han sido calculadas empleando la geometría del escáner de pequeños animales, tomando $R = 4$ cm.

3.1.2.2. Método de Siddon

Si se descompone el haz que se proyecta desde la fuente emisora hasta uno de los cristales del detector en un subconjunto de líneas equiespaciadas, se puede considerar que la proyección de ese rayo es proporcional a la suma de la proyección de cada una de las líneas que lo componen. A su vez, la proyección de una línea sobre un píxel consiste en la longitud que resulta de la intersección entre la línea con ese píxel ponderada por la densidad en ese píxel. Un ejemplo gráfico del funcionamiento de éste método se muestra en la imagen 3.1(a) que muestra como la contribución al rayo b_j que se debe a la línea j_k se puede obtener a partir de una aproximación por píxeles en la que cada píxel i supone la suma de su longitud de intersección.

En 1985, Siddon formuló un procedimiento eficiente para el cálculo de pesos mediante la suma de integrales de línea que se conoce como método de Siddon [58].

Sin embargo, si el volumen cuya proyección sintética queremos conocer, es de geometría definida, el cálculo de la proyección se puede hacer directamente obteniendo las integrales de línea entre las líneas de los haces y el objeto medido, sin que sea necesario discretizarlo. La figura 3.1(b) muestra un esquema gráfico del método de Siddon en el que la longitud b_{jk} es calculada a partir de la distancia entre los puntos de intersección con un objeto de geometría conocida. Se empleará esta estrategia para el cálculo de las proyecciones ya que el resultado proporcionado es

el mismo que el que se obtiene con el método de Siddon, pero este procedimiento permite acelerar el proceso para la simulación de la proyección de objetos sencillos de geometría conocida.

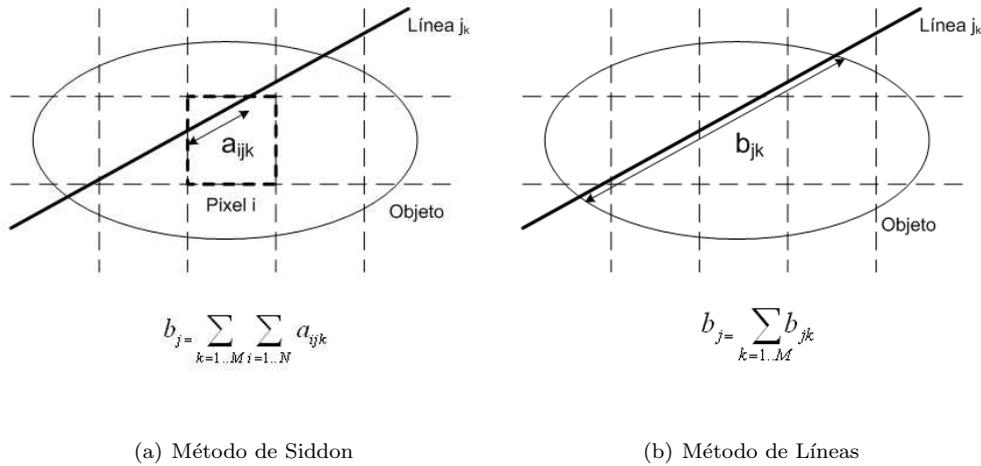


Figura 3.1: Esquema gráfico del método de Siddon (a) calculado a partir de la suma por píxeles y (b) calculado a partir de puntos de corte con el contorno de un objeto de geometría conocida.

3.1.2.3. Método de Joseph

El método de *forward-projection* propuesto por Joseph [59] asume que la integral que resulta de la intersección entre dos puntos de coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) , tiene una dirección predominante que se determina por la comparación dos a dos entre $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ y $|z_2 - z_1|$. Siguiendo la dirección predominante se calcula la integral de cada línea mediante la interpolación bilineal en los puntos de intersección de la recta con cada píxel que se muestra en la figura 3.2(a). Finalmente, se aplica un factor de corrección proporcional a la longitud transversal de la componente de la línea que se desvía de la dirección principal.

3.1.2.4. Método de los Cubos

El método simple o de los Cubos es un método de cálculo de proyecciones en el que se aplica una subdivisión de cada píxel en cajas o cubos en el caso 3D [26, 56].

$$\Delta_{cubo} = \frac{\Delta x}{h} \quad (3.3)$$

El cálculo aproximado de la proyección mediante este método consiste en sumar el volumen de cada uno de los cubos cuyo centro esté dentro del volumen del haz. Observando la expresión (3.3), se aprecia que si se utilizan cubos con un muestreado muy fino en el que $h \rightarrow \infty$, el resultado tiende al volumen exacto del haz 3D.

Si se hace una aproximación mediante la descomposición del haz en líneas, el procedimiento es análogo al descrito para el caso de las áreas, tomando en este caso el valor en cada cubo como la contribución a la línea tal como muestra la figura 3.2(b). En la figura 3.2(b), se aprecia que un píxel i se subdivide en H subcubos que permiten aproximar la componente a_{ihjk} con la que se contribuye en el cubo h del píxel i al rayo j por su intersección con la línea j_k que lo compone

Una versión más sofisticada de este método consiste en la aproximación de la integral a partir de una interpolación trilineal sobre la que se aplica la regla de integración de Simpson para calcular de forma numérica la integral de un píxel a partir de 3 subdivisiones [60]. Mediante este método se consigue una mejor precisión que la conseguida mediante el método de los cubos con unos requisitos computacionales menores [56].

3.1.2.5. Resultados experimentales

La figura 3.3 muestra la proyección 2D de un círculo calculado a partir de una integral de área para cada rayo. Además, se han superpuesto las proyecciones obtenidas para ese mismo objeto con los métodos de Siddon, de Joseph y de los Cubos para un valor de 20 líneas por rayo, en el caso del método de Siddon y el método de Joseph y de 20 cubos por píxel para el método de los cubos.

La figura 3.4 muestra el error cuadrático medio medido respecto a la proyección modelo para diferente número de líneas por rayo y de cubos por píxel. Se puede comprobar como el método de Siddon es el que da lugar a una mejor aproximación al modelo ya que a partir de unas pocas líneas es el que permite obtener una

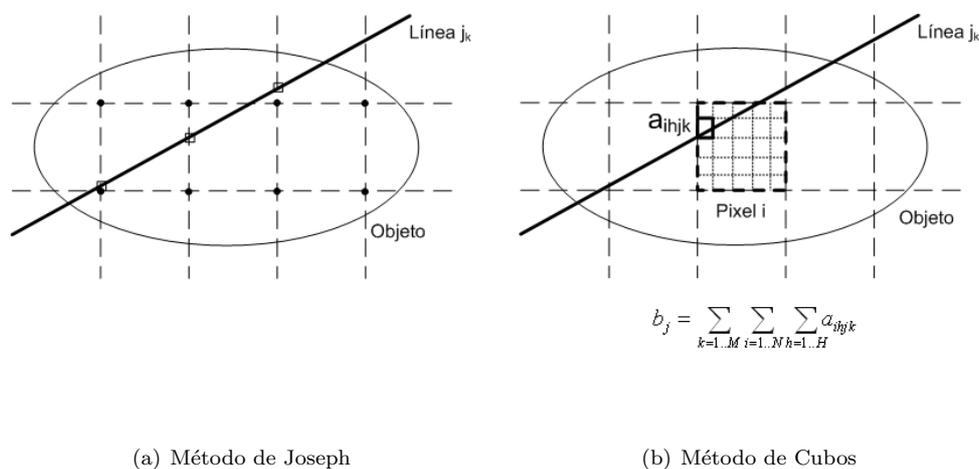


Figura 3.2: (a) Esquema que muestra de forma gráfica el método de Joseph en el que los puntos interpolados se marcan con cuadraditos (b) Esquema del método de los cubos.

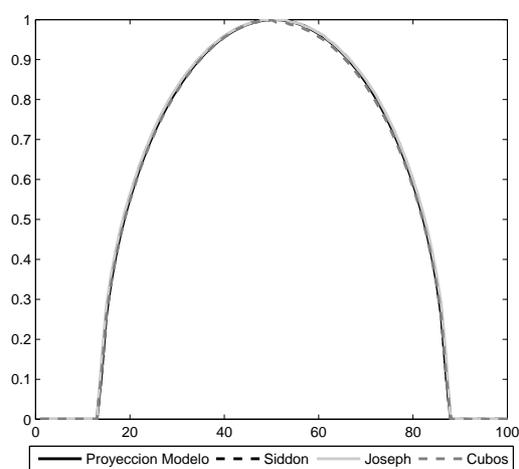
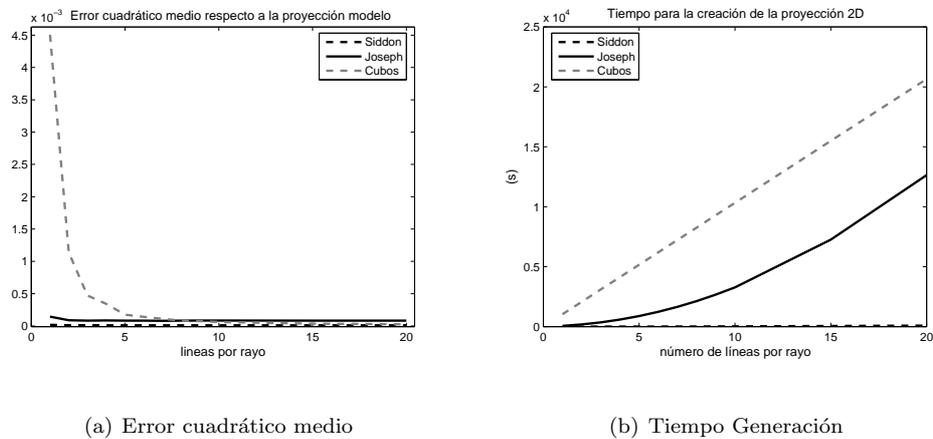


Figura 3.3: Proyección 2D de un círculo centrado en el origen para distintos métodos de *forward-projection*.

reducción mayor del error respecto al modelo. El método de Joseph da peor resultado que el método de Siddon e incluso peor resultado que el método de los Cubos para un número elevado de Cubos. El método de Joseph da lugar a un error mayor para un mismo número de líneas, que el de Siddon. Este resultado en parte

es debido a que el método de Joseph requiere de numerosos cálculos de funciones trigonométricas que restan precisión numérica al resultado final. Estos resultados coinciden con los obtenidos previamente [37, 56] y demuestran que el método de Siddon es el más adecuado para obtener proyecciones mediante *forward-projection* ya que aunque el método de los cubos aumenta mucho su precisión cuando se reduce el tamaño del cubo empleado, el coste computacional asociado lo convierte en una opción menos adecuada que la proporcionada por otros métodos.



(a) Error cuadrático medio

(b) Tiempo Generación

Figura 3.4: Comparación de los resultados obtenidos para la proyección 2D del círculo de $R = 4$ calculado con los métodos de Siddon, Joseph y de los Cubos para distintos número de líneas por rayo.

El método que resulta más eficiente desde un punto de vista de coste computacional es, como se muestra en la figura 3.4(b), el método de Siddon¹.

Si se comparan entre sí los dos métodos más precisos para la proyección 3D de un cilindro de radio $R = 4$ cm y altura igual a la altura máxima del FOV para distinto número de líneas por mm de detector (ver figura 3.5), se aprecia que la diferencia entre la proyección proporcionada por el método de Joseph y el método de Siddon es muy pequeña con cualquier número de líneas y se estabiliza a partir de una densidad de 210 líneas por mm de detector.

¹La comparación de los tiempos se ha realizado con un PC Pentium 4 con CPU 3.2GHz y 2GB de RAM de propósito general.

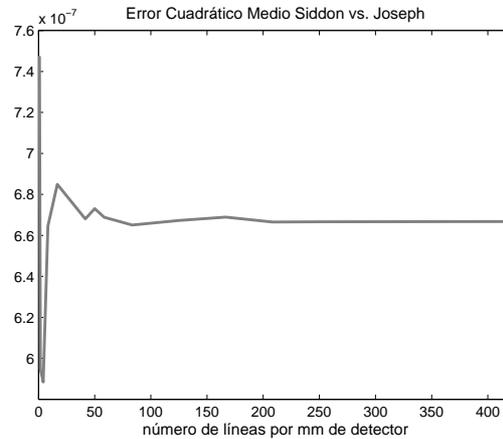


Figura 3.5: Diferencia cuadrática promedio de la proyección 3D de un cilindro centrado para el método de Siddon y el método de Joseph en función de la densidad de líneas por mm de detector.

3.2. Medidas reales

3.2.1. Simulador-TAC

El escáner TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia es un Simulador-TAC para humanos que tiene un uso experimental en el servicio de Radiofísica y Protección Radiológica del Hospital.

Un Simulador-TAC consiste en un escáner que se caracteriza por una geometría que da lugar a un diámetro de túnel muy superior al de los TACs de diagnóstico [61]. A consecuencia de esto, la resolución proporcionada por las medidas del simulador es menor. Al mismo tiempo, el Simulador-TAC se caracteriza porque el tiempo necesario para la rotación es de 1s por posición. Este hecho provoca que las imágenes obtenidas a partir de la radiación de una persona en determinadas zonas del cuerpo, tengan un efecto borroso debido a que en el lapso de tiempo necesario para someter al sujeto al ciclo completo de rotaciones, la persona registrada se mueve inevitablemente por efecto de la respiración o del movimiento involuntario de los órganos como el corazón, caja torácica, etc. Estas características, lejos de suponer una traba para el uso de las imágenes proporcionadas por el Simulador-TAC son un efecto deseable en las imágenes para la protección radiológica, ya que el propósito de éstas imágenes es el de ubicar la zona a irradiar para realizar una irradiación completamente focalizada y al mismo tiempo para elaborar máscaras

que permitan proteger a los órganos vitales que rodean a la zona irradiada. El hecho de que la imagen del tumor sea borrosa implica que el tumor tiene una movilidad en torno a la zona emborronada. De esta forma, se tiene toda la zona en la que es posible situar el tumor o el órgano a proteger incluso cuando el paciente respira o se mueve involuntariamente. Este cálculo será mucho más útil que aquel proporcionado por un escáner con mucha mayor resolución espacial ya que el paciente está sometido a radiación durante muchos minutos y es posible que exista un movimiento que provoque que el tumor no reciba parte de la radiación o que por el contrario la reciban de forma excesiva otros órganos vitales.

Concretamente, el Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia, es un modelo Metaserto con un sistema de tomografía Kermath, con 512 detectores a lo largo de 50 cm de panel detector. La medida consiste en 200 rotaciones equidistantes en π radianes que tardan aproximadamente 200 s en ser registradas. Se trata de un sistema *Cone-Beam* 3D aunque sólo se hace uso en la práctica de una de las líneas de detectores que dan lugar a un sistema 2D *Fan-Beam* por lo que el FOV es el correspondiente a un escáner 2D y viene delimitado por una circunferencia que en este caso tiene 17.6 cm de radio. El ángulo de apertura del haz desde la fuente a los extremos del detector es de 20.25° y la distancia desde la fuente a los detectores es de 1.4 m.

3.2.2. TAC de pequeños animales

El escáner del Instituto de Física Corpuscular es un escáner TAC de alta resolución dedicado a la experimentación. Los escáneres micro-TAC se emplean para la investigación con pequeños animales (ratas y ratones), el estudio de minerales, fósiles y de restos arqueológicos. Estos escáneres permiten la reconstrucción de objetos con resoluciones entre los $50 \mu\text{m}$ y los $3 \mu\text{m}$ [52, 62].

El sistema tiene integrado una fuente de rayos-X XTG5011 de *Oxford Instruments* [63], con un tamaño de foco de $35 \mu\text{m}$ que se caracteriza por su amplio rango de alimentación de 0-50 kV y 0-1 mA. Esta característica hace posible el empleo de diversas configuraciones que se ajusten a las necesidades particulares de la medida. De este modo, es posible minimizar la dosis de radiación que recibe el sujeto irradiado a partir de un ajuste adecuado de los parámetros de la medida. El detector de rayos-X es un *Flat Panel C7942* de Hamamatsu formado por una matriz de 2400×2400 cristales centelleadores de CsI de $50 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$ cada uno [64]. La matriz completa consiste en una superficie pixelada de $120 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$ que permite la medida de un ratón sin necesidad de movimiento axial en la camilla

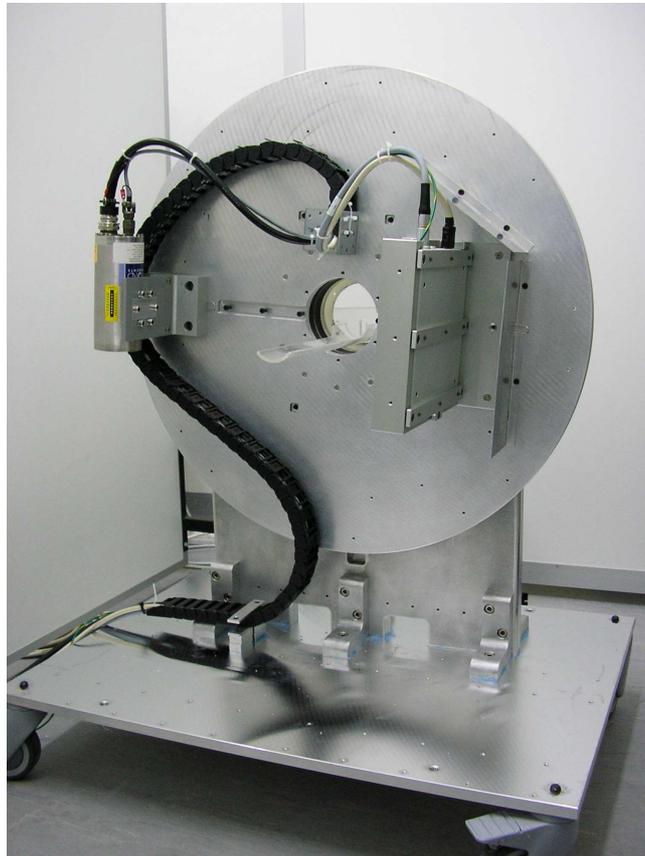


Figura 3.6: Fotografía correspondiente al montaje del escáner TAC de pequeños animales perteneciente al Grupo de Física Médica del Instituto de Física Corpuscular.

o en el conjunto del dispositivo.

Como se aprecia en la figura 3.6, el sistema está montado sobre una estructura formada por un plano circular en el que se acopla la fuente y el plano detector. El conjunto es movido por un motor con una precisión de movimiento en la dirección radial de $\pm 0.01^\circ$ que permite considerar la órbita descrita como perfectamente circular. En el centro de este plano se sitúa de manera transversal al mismo una camilla en la que se dispone el animal bajo estudio.

La distancia del foco al isocentro es de 29 cm y la distancia del isocentro al plano detector es de 13.5 cm por lo que el FOV resultante tiene un radio de 4 cm y una distancia axial de 7.5 cm con un factor de magnificación de 1.6.

Gracias a la versatilidad del escáner de pequeños animales, en la práctica el rango de medida empleado contempla distinto número de detectores y distinto número de proyecciones dando lugar a varios modos de funcionamiento. El empleo de un mayor número de detectores permite una mejor resolución a costa de una pérdida de sensibilidad para el mismo tiempo de medida; mientras que, combinar la medida obtenida por varios cristales reduce la resolución conseguida, pero mejora la sensibilidad de la medida aumentando su robustez frente al ruido.

3.3. Método de reconstrucción iterativo

El algoritmo de Maximum Likelihood Expectation Maximization (MLEM) para tomografía de transmisión es uno de los algoritmos iterativos de reconstrucción más conocidos [32]. Se trata de un algoritmo de reconstrucción estadístico basado en el hecho de que la contribución de ruido predominante en las señales de TAC tiene una distribución de Poisson [65]. Este algoritmo hace un tratamiento de las proyecciones como realizaciones de una distribución de Poisson por lo que el algoritmo persigue maximizar el logaritmo de la probabilidad de Poisson de la función objeto,

$$f_j^{k+1} = f_j^k + \frac{\alpha}{m} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^m A_{ij} p_i}{\sum_{i=1}^m A_{ij} b_i \exp\left(-\sum_{j=1}^n A_{ij} f_j^k\right)} \right) \quad (3.4)$$

donde $f = \{f_i | i = 1, \dots, m\}$ es el vector de m píxeles de la imagen, $p = \{p_j | j = 1, \dots, n\}$ son las proyecciones con n componentes, b_i es una imagen en blanco del escáner en el píxel i y $A = \{A_{ij}\}$ es la matriz del sistema de dimensiones $m \times n$ que da la proporción de rayo i que pasa a través de un píxel j . α es un factor de relajación que toma un valor entre 0 y 1. f^{k+1} es la $k + 1$ estimación de la imagen siendo f^0 la estimación que corresponde a la iteración 0 que se suele tomar como $f_j^0 = 0, \forall j$.

El MLEM ha sido escogido para reconstruir porque es fácilmente adaptable a las peculiaridades de cada una de las matrices del sistema que se va a calcular y por sus destacadas propiedades:

- La iteración f^k converge para $k \rightarrow \infty$ a una imagen que maximiza la probabilidad.

- La incorporación en el algoritmo de información a priori es muy sencilla.
- Es un algoritmo que ha demostrado ser muy robusto numéricamente [16].

Como se verá en el capítulo 5, se han implementado dos versiones del MLEM, que permiten adaptar el algoritmo a las simetrías presentes en la matriz del sistema en cada caso.

3.4. Discusión

Los métodos de *forward-projection* que han sido implementados para el cálculo de las proyecciones sintéticas han sido escogidos porque son algunos de los más extendidos. Sin embargo, todos los métodos empleados están basados en la aproximación del rayo a partir de la suma de líneas. Existen otros métodos de proyección basados en considerar el haz como el cálculo del área que no han tenido una representación dentro de este estudio [37]. Los métodos implementados también tienen en común que en todos los casos responden a una filosofía de proyección *ray-driven* en la que la implementación del algoritmo se basa en seguir las líneas que se incluyen en cada rayo. Uno de los aspectos que se ha considerado dentro del análisis es el tiempo que necesitaba cada uno de los métodos empleados. Sería necesario emplear un método de *forward-projection* basado en una filosofía de proyección *pixel-driven* [66, 67], para comparar si esta otra aproximación permite una mejora de los tiempos obtenidos.

Las proyecciones simuladas planteadas, se han hecho en condiciones ideales sin la influencia de efectos de *scattering*, volumen parcial, etc. Aunque se dispone de medidas reales que hacen posible ver el comportamiento de las reconstrucciones obtenidas en condiciones más realistas, sería necesario hacer un modelo de ruido simulado para poder evaluar el comportamiento frente al ruido de manera aislada.

3.5. Conclusiones

El método de Siddon ha demostrado ser el más adecuado para la obtención de proyecciones sintéticas mediante técnicas de *forward-projection*. Este método proporciona un resultado más preciso que los otros métodos implementados empleando el mismo espaciado entre líneas. Adicionalmente, el incremento en el número de líneas empleadas supone una penalización temporal menor en este caso.

Bajo las condiciones estudiadas, es posible obtener una proyección simulada de buena calidad a partir de unas pocas líneas por rayo. El número de líneas a partir del cuál el valor de la proyección obtenida permanece estable, ha sido fijado en 210 líneas por mm de detector para el método de Siddon.

Capítulo 4

Propuesta de Pixelado Alternativo

En este capítulo, se propondrán varios esquemas de pixelado alternativos al pixelado convencional que consiste en un píxel cuadrado dispuesto en coordenadas cartesianas. Si denominamos *grid* a la disposición de los píxeles en el FOV, los esquemas de pixelado alternativos propuestos se basarán en el empleo de un *grid* polar que permite obtener un diseño de matriz adaptado a las características particulares de un sistema TAC.

A lo largo del capítulo, se pondrán de manifiesto las ventajas derivadas del empleo de un *grid* diferente al cartesiano y se hará una recopilación de las variantes de pixelado que han demostrado aportar características favorables a la matriz del sistema, frente a un *grid* cartesiano con píxeles cuadrados. La forma de pixelado más habitual basada en un *grid* cartesiano se tomará como marco de referencia en los capítulos 5 y 6 por lo que, como punto de partida, se presentará esta forma de pixelado brevemente en contraposición a los otros esquemas que centrarán el interés del capítulo. La descripción de los *grid* alternativos y los criterios empleados para su diseño serán detallados haciendo hincapié en las características particulares de cada variante. Para ello, se incluirá un estudio de la viabilidad de los esquemas propuestos en condiciones realistas y se compararán estos esquemas con el *grid* cartesiano habitual. El uso de píxeles polares constituye una alternativa natural cuando se emplea un *grid* polar, no obstante serán propuestas otras opciones basadas en píxeles de simetría circular que también hacen uso del *grid* polar. Finalmente, se plantearán soluciones para la visualización de las imágenes creadas

mediante *grids* polares.

4.1. Introducción

La discretización mediante un píxel cuadrado dispuesto en un *grid* cartesiano, se emplea en la mayoría de soportes de imagen de manera estándar. El motivo es simple, las pantallas de visualización de imagen muestran píxeles cuadrados que sirven como ladrillos para construir imágenes. Sin embargo, numerosos autores han apuntado que el uso de píxeles cuadrados lleva asociados algunos inconvenientes en el cálculo de la matriz del sistema que se pueden salvar sustituyendo esa forma de píxel por otra [45, 68].

El propósito que se persigue haciendo uso de un píxel no cuadrado es el de simplificar el cálculo de la matriz del sistema, reduciendo el tiempo de cálculo y su tamaño. Esta reducción de tiempo de cálculo es posible gracias a la simplificación en el cálculo de los pesos de la matriz del sistema, que es posible mediante una disposición de píxeles que permita reducir su número al discretizar el FOV y que haga posible el uso de un mayor número de simetrías en el cálculo de la matriz de pesos.

Algunas de las propuestas que se han presentado, consisten en el empleo de píxeles creados a partir de una familia de funciones de enventanado Kaiser-Bessel [68], que son conocidos como *blobs*, el uso de píxeles naturales en el que la discretización se hace a partir de las formas que surgen de la intersección entre los rayos en el FOV [40] y el empleo de píxeles polares [38, 42]. También se ha abordado este problema desde otra perspectiva complementaria al uso de un píxel no cuadrado que consiste en variar la colocación de los píxeles en el FOV siguiendo un esquema que permita reducir el número de píxeles. Se ha estudiado la aplicación de *grids* alternativos al cartesiano que emplean un esquema basado en el grid cúbico [15, 36], hexagonal [37] y polar [38].

Algunas de las aportaciones realizadas en este sentido, basadas en píxeles polares apuntan la complejidad de esta tarea [38, 45]. El diseño de un *grid* supone la definición del muestreo que tendrá la imagen resultante de ese *grid* y por lo tanto, determina la resolución de la imagen. Si se tiene en cuenta que la aplicación en la que se centra este estudio es una aplicación orientada a la imagen médica, los esquemas de pixelado propuestos tendrán como objetivos prioritarios la conservación de la resolución en la imagen, la ausencia de artefactos derivados del uso de un *grid* polar [45] y la reducción en el tamaño de la matriz [46]. La

consecución de estos tres requisitos no se ha resuelto satisfactoriamente hasta el momento de realización de esta tesis y es lo que motiva este estudio.

4.2. Grid cartesiano y píxel cuadrado

Como ya se ha señalado en el capítulo 2, la resolución del aparato de medida permite dimensionar el tamaño máximo del píxel o lo que es lo mismo, la frecuencia de muestreo mínima de la imagen discreta que represente dicho píxel. El esquema que se selecciona habitualmente para la discretización de imágenes es el *grid* cartesiano con píxel cuadrado que se introducirán brevemente.

4.2.1. Características y alternativas

Una de las principales ventajas del píxel cuadrado dispuesto en un *grid* cartesiano es que es el formato de imagen estándar y nos permite una visualización directa y compatible con los formatos de imagen habituales. El píxel cuadrado se dispone según el siguiente esquema:

$$x_i = (i + 0.5) \times \Delta x + x_{max}, \quad \Delta x = \frac{2x_{max}}{N_x}, \quad i = 0, \dots, N_x - 1 \quad (4.1)$$

$$y_j = (j + 0.5) \times \Delta y + y_{max}, \quad \Delta y = \frac{2y_{max}}{N_y}, \quad j = 0, \dots, N_y - 1 \quad (4.2)$$

donde N_x y N_y es el número de píxeles en x e y respectivamente, Δx y Δy es el espaciado entre píxeles en x y en y , siendo x_{max} el valor resultante de encontrar el N_x menor que permita cumplir que $x_{max} \geq R_{FOV}$ e y_{max} el valor resultante de encontrar el N_y menor que permita cumplir que $y_{max} \geq R_{FOV}$. Normalmente $N_x = N_y$, $\Delta x = \Delta y$ y $x_{max} = y_{max}$. Esto delimita un espacio cuadrado de $N_x \times N_y$ píxeles en el que solamente los píxeles situados dentro del FOV serán reconstruidos.

Uno de los inconvenientes del *grid* cartesiano es que el área pixelada no se ajusta adecuadamente a la forma del FOV por lo que existe un área que forma parte del pixelado y que no forma parte del FOV en todas las posiciones de rotación del escáner. Si el área pixelada se toma siguiendo el diseño planteado en 4.1 y en 4.2, en el caso del FOV circular, el área pixelada externa al FOV constituye el 21.46% del área total que calculamos en la matriz del sistema en el caso 2D.

La alternativa al cálculo y almacenamiento del conjunto de píxeles que no quedan incluidos dentro del FOV consiste en calcular los elementos de la matriz empleando para ello solamente los píxeles dentro del FOV. Esto hace necesario acompañar la matriz y las imágenes reconstruidas de una plantilla en la que se almacenen la posición o la numeración de los píxeles calculados. Esta posibilidad introduce una complejidad añadida tanto en el cálculo de la matriz del sistema como en la visualización de las imágenes reconstruidas mediante esas matrices.

La extensión del píxel cartesiano al caso 3D consiste simplemente en el empleo de una tercera dimensión de forma análoga a como se ha señalado para la dimensión x e y , añadiendo a las expresiones (4.1) y (4.2) la componente z definida como se muestra en la igualdad (4.3),

$$z_k = (k + 0.5) \times \Delta z + z_{max}, \quad \Delta z = \frac{2z_{max}}{N_z}, \quad k = 0, \dots, N_z - 1 \quad (4.3)$$

donde N_z es el número de píxeles en z , Δz es el espaciado entre píxeles en z siendo z_{max} el valor resultante de encontrar el N_z menor que permita cumplir que $z_{max} \geq H_{FOV}$. Si se asume que las componentes x e y son análogas, el número de píxeles viene determinado por R_{FOV} y Δx siendo $\Delta x \leq 2 * \delta_{resol}$, donde δ_{resol} es la resolución espacial del sistema que ha sido definida en el capítulo 2. Esta resolución determina el tamaño máximo de píxel sin embargo, el tamaño de píxel que es proyectado sobre el detector, varía en función del ángulo de giro y de la posición, por lo que se produce *aliasing* cuando rotamos 45° o 135° al tomar toda la diagonal del píxel como separación entre muestras [35].

Existen dos soluciones prácticas para paliar el problema de *aliasing*, una es el empleo de un filtro *SinCot* [69, 70], que atenúa las componentes de frecuencia por encima del doble de la frecuencia de Nyquist y la otra, es el empleo de un píxel menor tal que $\sqrt{2}\Delta x \leq 2 * \delta_{resol}$ para que la diagonal de dicho píxel respete el límite inferior de la frecuencia de Nyquist, lo que supone un incremento en el número de píxeles.

4.2.2. Simetrías de la matriz del sistema

Las simetrías naturales de un sistema TAC vienen dadas por la propia geometría del escáner. Sin embargo, cuando empleamos un *grid* para discretizar el FOV del escáner, las simetrías resultantes en la matriz del sistema también dependen de las simetrías del *grid*. En el ejemplo que se muestra en la figura 4.1, el escáner

tiene $2P$ rotaciones equivalentes, pero si enfocamos sobre el *grid* cartesiano, por cada posición N_φ sólo hay 3 más situadas en $N_{\varphi+P/2}$, $N_{\varphi+P}$ y $N_{\varphi+3P/2}$, cuya intersección es posible inferir a partir de la calculada. Eso implica que la matriz más pequeña que se puede calcular corresponde a $1/4$ de la matriz total que es la matriz que se obtiene a partir de la intersección con los píxeles sombreados que se muestran en la figura 4.1. En general, en el caso del *grid* cartesiano, de las $2P$ simetrías que tiene el escáner, sólo se pueden conservar 4 en un sistema 2D. En el sistema 3D, existen 4 simetrías en cada plano transaxial que suponen calcular una cuarta parte del recorrido del escáner en 2D y las correspondientes al reflejo en el eje axial por lo que hay un total de 8 en el caso 3D [34, 71].

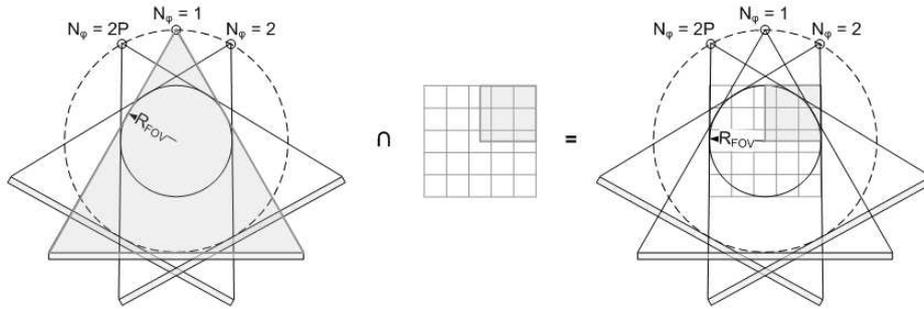


Figura 4.1: Esquema que muestra las simetrías de un escáner TAC 2D de $2P$ rotaciones en la izquierda, de un *grid* cartesiano por separado en el centro y las simetrías conjuntas en la derecha. La zona sombreada representa el área menor que resulta simétrica al resto.

Las limitaciones que introduce el uso de un *grid* cartesiano en las simetrías del sistema, se reflejan en una reducción en el número de simetrías en la matriz. Esto supone la principal desventaja del pixelado cartesiano.

4.3. Grid polar

En el apartado anterior se ha profundizado sobre los problemas derivados del empleo de un *grid* estándar cartesiano. La motivación para plantear un *grid* alternativo al cartesiano será la de mejorar las características asociadas a este *grid*.

Por este motivo, los dos requisitos principales que se han planteado como punto de partida para abordar el diseño del nuevo *grid* de píxeles son el de preservar la resolución espacial intrínseca del escáner y el de sacar partido a todas las simetrías

naturales del mismo para reducir al máximo posible el tiempo de creación de la matriz del sistema y las necesidades de memoria y coste computacional de su manipulación. Como hipótesis de partida en el diseño del *grid* polar, se ha considerado que las distintas vistas del objeto que componen la medida se toman en las mismas condiciones y son completamente equivalentes entre sí. Se asumirá que en caso de haber alguna asimetría en los detectores o deformación geométrica, ésta ha sido corregida en un proceso de calibración previo por lo que, la medida de partida para la reconstrucción corresponde a la respuesta de un sistema ideal, que sí que cumple las características de simetría.

Si se considera que una medida de TAC no es más que una sucesión de repeticiones rotadas de un mismo fenómeno se puede plantear un *grid* en el que desde los detectores y hasta la fuente se tenga siempre la misma perspectiva y de esta forma conseguir que la superposición del FOV pixelado y el trazado de los rayos sea equivalente en las distintas rotaciones. Para cumplir este objetivo, se ha partido de un FOV circular que ha sido dividido en tantos sectores circulares como posiciones de rotación tiene el escáner y que quedaran centrados respecto a cada posición de rotación del escáner. Cada uno de estos sectores circulares es idéntico, para hacer posible una equivalencia entre ellos cuando giramos el detector y la fuente. Por lo tanto, el número de sectores que se emplea en el *grid* es un dato de partida que depende del número de rotaciones de nuestro escáner. El diseño del *grid* completo se ha abordado a partir del diseño de uno de los sectores circulares. Cabe destacar que usando este modelo, el área de FOV pixelado coincide con el área total del FOV del TAC *Cone-Beam* por el diseño circular del *grid* por lo que, todos los píxeles con los que trabajemos en la matriz del sistema serán distintos de cero porque habrán sido iluminados por la fuente en alguna de las rotaciones e intervendrán en el proceso de cálculo de la matriz y reconstrucción de la imagen.

Los requisitos de partida conducen a la imposición de un límite máximo en las dimensiones del píxel seleccionado para cumplir los requisitos de resolución espacial. Además, para conseguir un diseño con tantas simetrías como el escáner, se impone el diseño de píxeles agrupado por estructuras de sectores circulares. Sin embargo, se pueden cumplir los requisitos anteriores y optar por varias estrategias para dimensionar los píxeles siguiendo distintos criterios. En función de los criterios elegidos la imagen reconstruida tendrá propiedades diferentes.

4.3.1. Píxeles polares de área constante

La imposición de un área constante en el *grid* polar ha sido un diseño de *grid* que han empleado diversos autores [43, 45].

Los píxeles cartesianos son de área constante por lo que, al sustituir el píxel cartesiano por uno polar se puede considerar el área constante como una condición válida que permita limitar los grados de libertad a la hora de diseñar el *grid*. Esta opción puede resultar ventajosa ya que como se explicará en el capítulo 5 algunas de las estrategias para el cálculo de la matriz se basan en discretizar el píxel o el rayo para aproximar la matriz de volumen a partir de una suma de integrales simplificadas. El empleo de área constante facilita los cálculos porque permite obtener estimaciones en función del tamaño del píxel que se mantienen para todos los píxeles.

Sin embargo, para conseguir el criterio de que el área sea constante, o bien una de las dos dimensiones debe exceder las dimensiones máximas impuestas por la resolución o bien, se impone un área pequeña que obliga al uso de muchos más píxeles de los que serían necesarios si no se impone la condición de área constante. Si se sigue este criterio se debe optar entre cumplir los requisitos de resolución o imponer un sobremuestreo en todo el FOV. Este sobremuestreo provoca un incremento en el tamaño de la matriz del sistema, que da lugar a una reconstrucción más lenta. Por este motivo, esta configuración queda descartada ya que, el área constante facilita el cálculo de la matriz del sistema, pero no aporta ninguna característica añadida a priori que mejore la calidad de la imagen reconstruida.

4.3.2. Píxeles polares de relación de aspecto unitaria

La ubicación de los píxeles en un esquema polar induce a que en el diseño se tienda a que una de las dos dimensiones esté sobremuestreada frente a la otra debido a que el ángulo del sector circular permite un escaso margen en la zona cercana al centro. Este sobremuestreo se puede manifestar visualmente en la imagen calculada a partir de píxeles polares en el predominio de una de direcciones del espacio frente a otra debido a que el muestreo le da preferencia a esa dirección. Se define la relación de aspecto del píxel polar como el ratio entre la distancia angular y la radial medida tal y como muestra la figura 4.2.

Haciendo una analogía con el caso cartesiano, la relación de aspecto de un píxel cartesiano es el ratio entre Δx y Δy por lo que para un píxel cuadrado ordinario dicha relación de aspecto es igual a 1 para todo el FOV. Para conservar

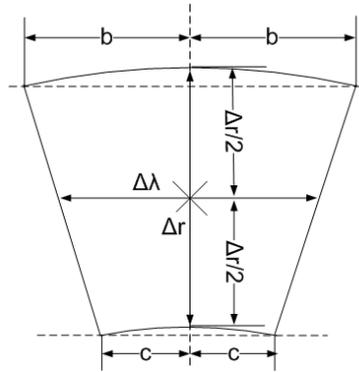


Figura 4.2: Medidas de la anchura radial Δr y angular $\Delta\lambda$ a mitad de altura de Δr sobre un píxel polar a partir de las cuáles se define la relación de aspecto del píxel como $\frac{\Delta\lambda}{\Delta r}$.

la resolución espacial intrínseca del sistema y conseguir una relación de aspecto entre las dimensiones angular y radial del píxel igual a la unidad, se elige el tamaño de los píxeles siguiendo las indicaciones siguientes:

1. En el centro del FOV se sitúa un píxel circular cuyo diámetro es de la mitad de la resolución espacial del sistema. De esta forma se trunca la terminación en pico de los sectores circulares.
2. Desde el píxel circular central, el resto de sector circular se divide en píxeles polares que se definen mediante dos dimensiones Δr y $\Delta\theta$ como indica la figura 4.3. Las dimensiones de Δr y $\Delta\theta$ han sido calculadas con las siguientes reglas de diseño:
 - a) Para que la relación de aspecto entre las dos dimensiones Δr y $\Delta\theta$ sea semejante se ha supuesto que en el interior del píxel polar es posible situar una circunferencia tangente a las paredes del píxel polar que la contiene.
 - b) El diámetro Δr de estas circunferencias es menor o igual que la mitad de la resolución intrínseca del sistema.
 - c) Todos los píxeles circunscritos en la circunferencia cuya distancia radial al centro de la circunferencia al isocentro es la misma, tendrán el mismo diámetro Δr

- d) El diámetro Δr es el mayor posible que cumple las condiciones b) y c) y que permite que el menor número entero de píxeles iguales quede confinado en el sector circular a la misma distancia del isocentro.

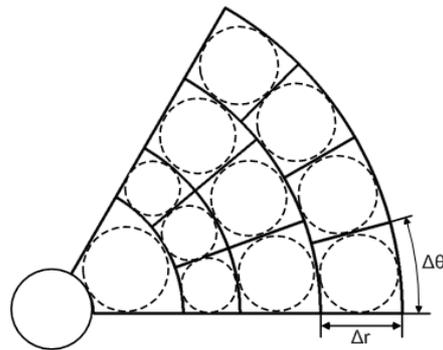


Figura 4.3: Ejemplo de sector circular discretizado mediante píxel polar. Se destaca el detalle de las circunferencias inscritas dentro de los píxeles polares que cumplen las reglas de diseño 1 y 2 y se emplean para fijar el tamaño de la dimensión $\Delta\theta$ del píxel polar.

En la figura 4.3 se muestra un ejemplo de sector circular discretizado con píxeles polares que han sido dimensionados según las reglas anteriores. Si se mide la relación de aspecto tal y como nos muestra la figura 4.2, se puede comprobar que para el diseño del *grid* planteado, dicha relación de aspecto es 1.

La imposición de un muestreo similar en las dos dimensiones del píxel es una característica deseable para que los filtros entorno a un punto se apliquen en un área igual de la imagen en las dos dimensiones del espacio y para que no existan direcciones predominantes en la imagen que puedan dar lugar a artefactos de tipo polar en forma de anillos o sectores. El inconveniente de esta forma de dimensionar el píxel es que en la zona central se incrementa el número de píxeles necesario ya que el poco margen de la dirección angular, impone un radio también pequeño. El exceso de píxeles central incrementa el número de píxeles total de la matriz y por lo tanto, incrementa el tamaño de la matriz del sistema y el tiempo necesario para la reconstrucción.

En la sección 4.4, se hará un estudio de la viabilidad de este *grid* para evaluar si este incremento en el número de píxeles resta ventajas al diseño de píxeles polares frente al cartesiano.

4.3.3. Píxeles polares de radio constante

La principal ventaja que aporta un *grid* polar es la posibilidad de reducir el tamaño de la matriz del sistema. Si se da prioridad a este criterio, el espaciado radial de los píxeles polares se fija con el tamaño más grande que permite seguir cumpliendo las condiciones de resolución, dando lugar a píxeles de radio constante. De esta forma maximizamos el área del píxel polar sin imponer un área constante y sin dejar de cumplir las condiciones de resolución.

Para diseñar el *grid* polar de radio constante, se define la cuerda de la apertura angular de un píxel como la distancia mayor que separa dos puntos que pertenecen a un mismo arco angular (ver figura 4.4). Las dimensiones de los píxeles polares son fijadas por las siguientes reglas:

1. En el centro del FOV se sitúa un píxel circular cuyo diámetro es de la mitad de la resolución intrínseca del sistema.
2. Desde el píxel central, el resto del sector circular se divide en píxeles polares de dimensión Δr constante igual a la mitad de la resolución espacial, siguiendo las mismas premisas para todos los sectores circulares:
 - a) Todos los píxeles ubicados a la misma distancia del centro tendrán las mismas dimensiones.
 - b) Para calcular la dimensión $\Delta\theta$, se calcula el menor número natural de píxeles polares tal que la cuerda mayor del píxel es menor o igual que la mitad de la resolución espacial del sistema. $\Delta\theta$ viene determinado a partir del número de píxeles que quedan situados a la misma distancia del isocentro.

Se puede observar que el diseño del píxel polar de área constante que se muestra en la figura 4.4, para el mismo caso que el del píxel polar de relación de aspecto unidad que aparece en la figura 4.3, da lugar a un menor número de píxeles principalmente en las zonas cercanas al centro del FOV. No obstante, la reducción en el número de píxeles se consigue a costa de la relación entre la dimensión radial y la angular que en estos píxeles es desigual, dando lugar a píxeles más alargados, sobre todo en el centro. La gráfica 4.5 muestra la relación de aspecto en función de la distancia radial de los píxeles, para el ejemplo mostrado en la figura 4.4. La relación de aspecto en este caso es inferior a 1 porque la dimensión radial predomina frente a la angular. Se puede apreciar en la figura 4.4 que la relación de

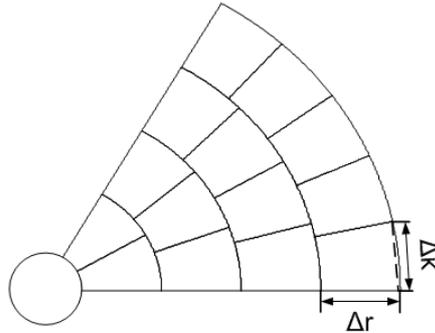


Figura 4.4: Ejemplo de sector circular discretizado mediante píxel polar de radio constante. La cuerda mayor del píxel polar $\Delta\kappa$, mediante la cual se determina el tamaño de $\Delta\theta$ viene resaltada mediante una línea punteada.

aspecto del píxel tiende a ser 1 conforme los píxeles se alejan del centro del FOV ya que ambas dimensiones tienden a igualarse.

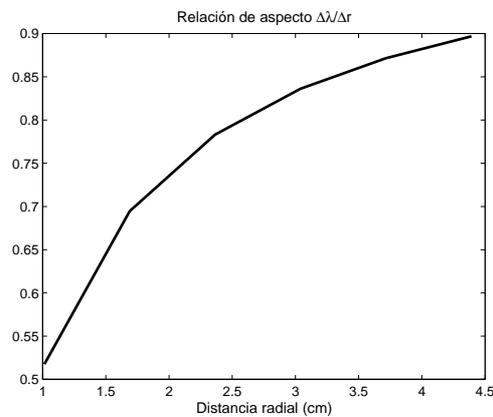


Figura 4.5: Relación de aspecto entre la dimensión $\Delta\lambda$ y Δr para el ejemplo de sector circular discretizado mediante píxel polar de radio constante.

4.3.4. Voxel polar

La extensión al caso 3D, para cualquiera de los dos modelos de píxel polar planteado, consiste en el diseño de píxel que muestra la figura 4.6 en el que se

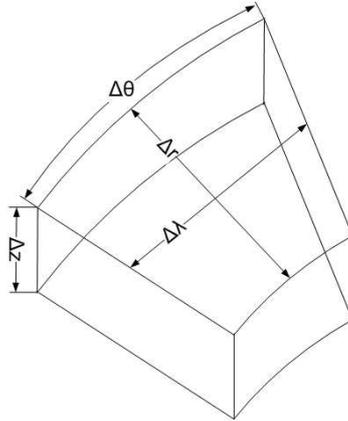


Figura 4.6: Diseño y dimensiones de un píxel polar 3D.

toma la base del píxel polar a lo largo de una altura Δz constante que es fijada para ser inferior o igual a la mitad de la resolución espacial en la dirección axial.

El *grid* polar 3D consiste en una sucesión de estructuras iguales en forma de discos, cuya base es igual a uno de los dos diseños de píxel polar 2D planteado hasta ahora y que son contantes con la altura Δz . Finalmente, se acumulan estas estructuras en forma de disco hasta completar toda la altura H del FOV.

4.3.5. Simetrías de la matriz del sistema basada en *grid* polar

El uso de un *grid* polar tiene como principal objetivo hacer posible el empleo del mayor número de simetrías existentes, por lo que las simetrías de la matriz del sistema mediante este *grid* serán las simetrías inherentes a un sistema TAC. Haciendo uso del *grid* polar se obtienen $4P$ simetrías, siendo P el número de proyecciones en 180° . Se puede aproximar toda la matriz a partir de una única rotación tal y como se muestra en la figura 4.7, lo que supone disponer de $2P$ simetrías en la matriz del sistema. Además, es posible obtener por reflexión la mitad de los píxeles que se ven afectados por los primeros rayos del detector a partir de la otra mitad duplicando así las simetrías, siempre y cuando el sector circular sea simétrico respecto del centro.

En la reconstrucción de tipo algebraico, el problema de la reconstrucción se

reduce a la resolución de un sistema lineal de ecuaciones,

$$AX = B \quad (4.4)$$

donde A es la matriz del sistema, X es la imagen incógnita que queremos reconstruir y B es el vector de proyecciones. Si se expresan las simetrías del sistema de forma matricial, el vector de proyecciones se puede descomponer en un conjunto de N proyecciones (B_i), donde cada B_i actúa sobre todos los píxeles del FOV, siendo $N = 2P$. A su vez, si A se discretiza mediante un diseño polar, se puede descomponer en N submatrices A_i , que afectan a B_i componentes distintos y cada A_i se puede obtener a partir de rotar la A_{i-1} previa. En consecuencia, A se puede expresar como una matriz de bloques en la que el primer bloque A_1 corresponde a la primera rotación de la matriz y el resto son rotaciones de éste, esto es,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_1 R \\ \vdots \\ A_1 R^{N-1} \end{bmatrix},$$

donde R y las potencias de ésta, son matrices de rotación que actúan sobre cada A_i .

Para expresar la simetría especular que existe entre la primera mitad de los rayos y la segunda mitad en cada proyección, respecto a la línea que va desde el foco al centro del FOV, se emplea la matriz de reflexión M

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

aplicando M , se obtiene que,

$$A_1 = [A_{00}, MA_{00}],$$

donde A_{00} es la matriz bloque que corresponde con la primera mitad de los rayos de la primera proyección. Por lo tanto,

$$A = \begin{bmatrix} A_{00} & MA_{00} \\ (A_{00} & MA_{00})R \\ \vdots & \vdots \\ (A_{00} & MA_{00})R^{N-1} \end{bmatrix},$$

donde A_{00} es el único bloque de la matriz que es necesario calcular.

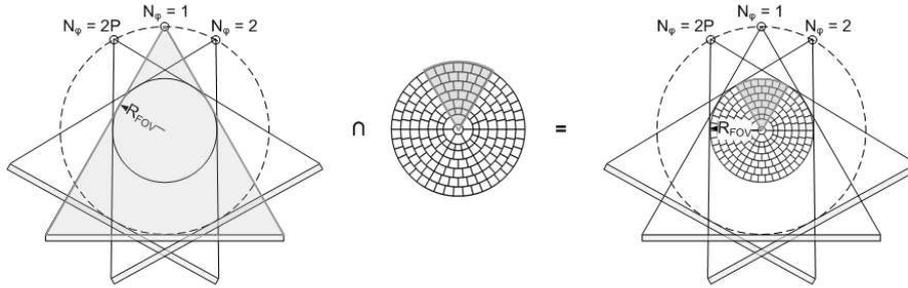


Figura 4.7: Esquema que muestra las simetrías de un escáner TAC 2D de $2P$ rotaciones en la izquierda, de un *grid* polar por separado en el centro y las simetrías conjuntas en la derecha. La zona sombreada representa el área menor que resulta simétrica al resto.

4.4. Variación del *grid* polar con los parámetros de diseño

En los diseños de *grid* polar, el número de píxeles para un FOV dado, depende tanto del número de detectores S , como del número de rotaciones P ya que, el número de rotaciones determinará el tamaño en el que quedará confinado el sector circular que servirá como plantilla para diseñar el pixelado.

Para estudiar la relación existente entre el número de píxeles y los parámetros S y P se han calculado distintos *grids* variando P desde 50 rotaciones a 2000 con

una S que a su vez ha variado desde 100 a 2400 para los diseños de *grid* polares de relación de aspecto unitaria y de radio constante. A partir de estos *grid*, se han medido el número de píxeles y la variación en las dimensiones de los píxeles para evaluar el comportamiento del *grid* en un sector circular. Este análisis se ha realizado tomando las dimensiones del TAC para pequeños animales que se ha descrito en el capítulo 3.

4.4.1. *Grid* polar de relación de aspecto unitaria

En el caso del *grid* de relación de aspecto unitaria, el radio de los píxeles queda limitado por la apertura angular que permite el sector. A su vez, el número de detectores determina el tamaño máximo del radio. Cuando el radio alcanza este valor máximo, la apertura del sector circular, ya no limita el tamaño del radio. Se aprecia en la figura 4.8 que cuando el número de detectores es pequeño, dando lugar a un radio máximo elevado, el factor limitante es el número de rotaciones que impide que el radio alcance su valor máximo.

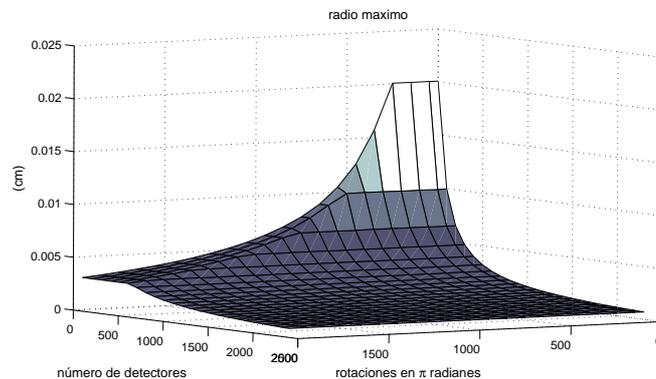


Figura 4.8: Variación del radio máximo con el número de detectores y el número de rotaciones.

El valor máximo que alcanza el radio, tiene una evolución acorde con el número de píxeles que hay por sector circular y por lo tanto, influye en el número de píxeles total. La gráfica 4.9 muestra que cuanto mayor es el radio en un sector circular, menor es el número de píxeles.

La figura 4.10 muestra varios cortes de la figura 4.9 para un número de rotaciones constante y para un número de detectores constante que permiten analizar la evolución de forma separada con cada parámetro.

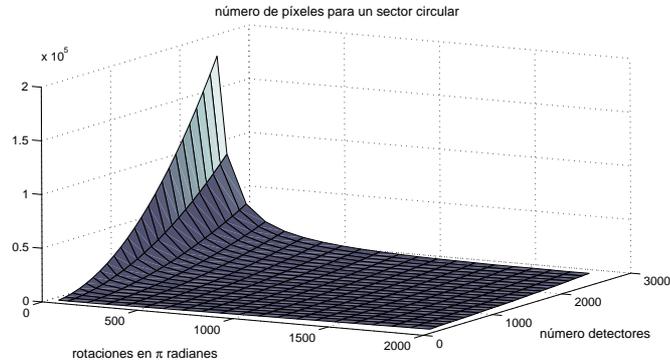


Figura 4.9: Variación del número de píxeles por sector circular con el número de detectores y el número de rotaciones.

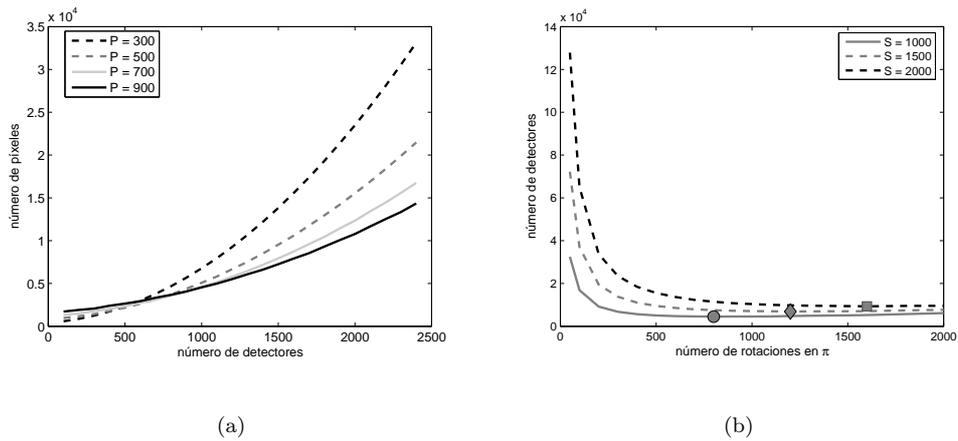


Figura 4.10: Número de píxeles para un sector circular.

El número de píxeles aumenta para un tamaño de sector si crece el número de detectores porque implica una disminución en el tamaño máximo del píxel, sin embargo, ese aumento es más rápido y es mayor cuanto menor es el número de sectores circulares. Además se puede apreciar que dado un número de rotaciones es posible reducir el número de píxeles por sector respecto a otros *grid* con un mayor número de rotaciones, si se emplea un número de detectores inferior a un valor. Se puede observar en la figura, como con $P = 300$ y $S = 400$ se obtiene un número de píxeles inferior por sector circular que para $P = 900$ y $S = 400$, a

pesar de que el tamaño máximo del píxel es el mismo ya que viene dado por S y el área a cubrir de píxeles es menor para $P = 900$. Esta tendencia demuestra que el número de rotaciones es un factor que limita mucho más el tamaño del píxel máximo, que el número de detectores. Si se fija el número de detectores y se varía P , el número de píxeles totales siempre aumentará con P , pero la figura muestra que para un sector circular, hay un número de rotaciones óptimo dado un número de detectores constante en el que es posible encontrar un equilibrio entre el tamaño máximo del píxel y el número de sectores circulares, que da lugar a un mínimo número de píxeles. A partir de este mínimo, el número de píxeles aumenta exponencialmente porque el incremento en el número de píxeles circulares lleva a un tamaño de píxeles mucho menor al tamaño máximo, por este motivo, cuanto menor es S , mayor es el tamaño máximo del píxel y el número de píxeles mínimo se da con un menor número de rotaciones.

4.4.2. *Grid* polar de radio constante

La dimensión variable en el *grid* polar de radio constante, es la cuerda que mide la apertura angular máxima de cada píxel. La figura 4.11 muestra que su evolución con el número de detectores y el número de rotaciones es análoga a la del radio máximo para el *grid* de relación de aspecto unitaria ya que como muestra la figura el factor limitante para la cuerda máxima del píxel sigue siendo el número de rotaciones.

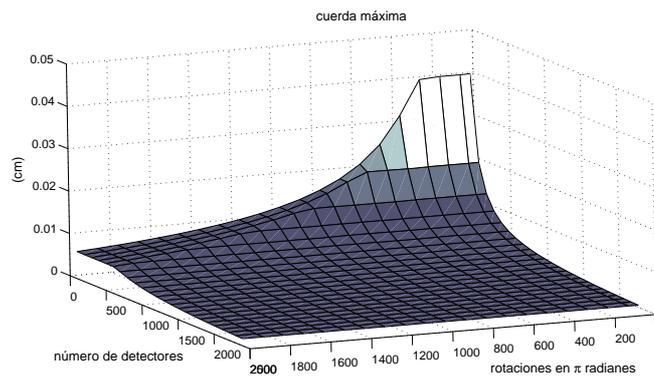


Figura 4.11: Variación de la cuerda angular máxima con el número de detectores y el número de rotaciones.

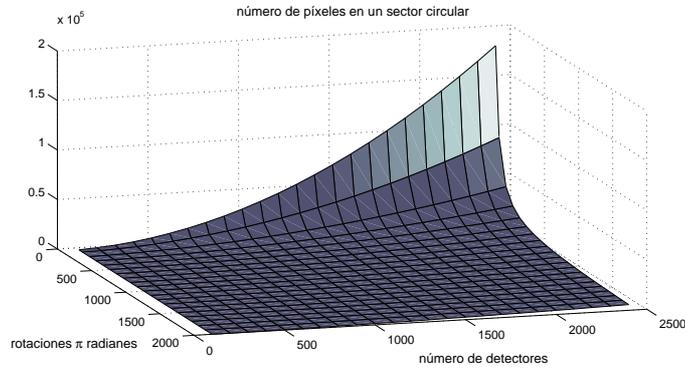
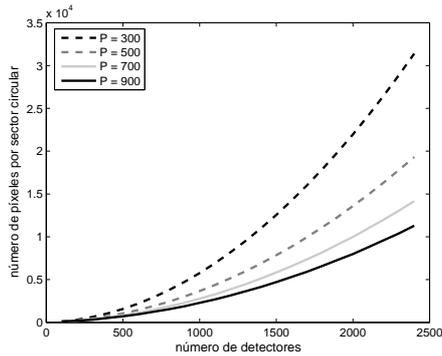
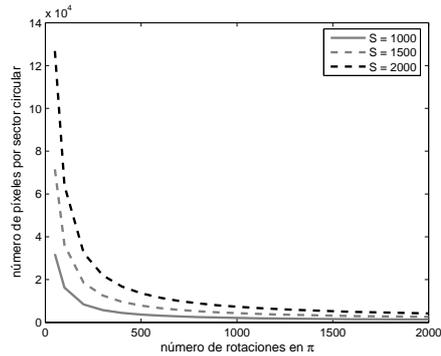


Figura 4.12: Variación del número de píxeles por sector circular con el número de detectores y el número de rotaciones.

La evolución del número de píxeles del sector circular con el número de rotaciones y de detectores es muy similar a la del *grid* de relación de aspecto unitario, salvo algunas diferencias. El incremento en el número de rotaciones reduce la apertura del sector circular por lo que los píxeles no pueden llegar a su tamaño máximo hasta que no se alejan a una determinada distancia radial, que aumenta con el número de rotaciones. A diferencia del *grid* anterior, un menor número de rotaciones necesita siempre de un mayor número de píxeles y cuanto mayor es el número de detectores mayor es el número de píxeles (ver figura 4.13(a)).



(a)



(b)

Figura 4.13: Número de píxeles para un sector circular.

En el caso del *grid* polar de radio constante, esto será siempre así y no se dará la tendencia observada en el *grid* de relación de aspecto unitario, en el que para un número de detectores existe un número de rotaciones a partir del cual aumenta el número de píxeles necesario. En la figura 4.13(b) se aprecia que el menor número de píxeles por sector circular para un número de detectores fijo siempre es el de mayor número de rotaciones porque un menor número de rotaciones implica cubrir un área menor.

4.5. Comparativa del número de elementos de la matriz del sistema calculada con *grid* polar y cartesiano

En el ejemplo de sector circular pixelado que muestran las figuras 4.3 y 4.4, se puede apreciar que el píxel tiene en todos los casos un tamaño variable que depende de la distancia radial y que provoca un incremento en el número de píxeles que se concentra principalmente en el centro del FOV. Este sobremuestreo incrementa el número de píxeles totales por lo que, es necesario evaluar la viabilidad de los *grid* propuestos en condiciones realistas. Para este fin, se ha comparado el número de elementos de matriz que se obtendrían si se emplea un *grid* polar de relación de aspecto unitaria, de radio constante y un *grid* cartesiano para las dimensiones del TAC de pequeños animales que se ha descrito en el capítulo 3.

La figura 4.14 muestra las dimensiones máximas necesarias para el cálculo de la matriz del sistema que nos sirven como un indicativo del tamaño máximo que puede llegar a tener la misma.

La gráfica 4.14 muestra el número de elementos de la matriz, aplicando todas las simetrías posibles en cada *grid* para un número de 1000 detectores en función del número de rotaciones y usando 500 rotaciones en función del número de detectores. En el caso del *grid* cartesiano se han aplicado 4 simetrías para cualquier P y S. En el caso de los *grid* polares el número de elementos se ha visto reducido un factor igual a $2P$, gracias a las simetrías. Es necesario destacar que el eje vertical de las gráficas tiene que ser logarítmico porque el número de elementos de la matriz cartesiana es varios órdenes de magnitud superior al de la matriz polar. Se puede apreciar que el número de elementos de la matriz polar con *grid* de radio constante es siempre inferior al caso de relación de aspecto unitaria. Aunque el tamaño de la matriz del sistema es un dato que permite valorar la mejora obtenida haciendo uso de las

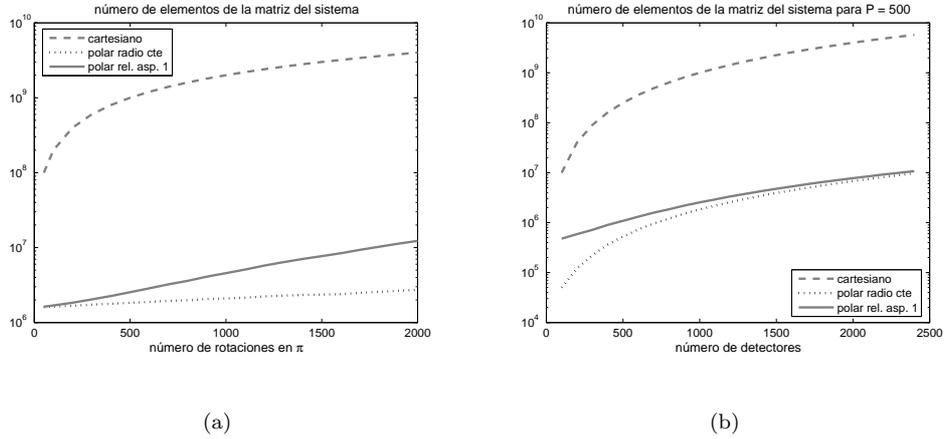


Figura 4.14: Número de píxeles total para *grid* polar y *grid* cartesiano aplicando todas las simetrías posibles para cada *grid* (a) para un número de 1000 detectores en función del número de rotaciones y (b) para 500 rotaciones en función del número de detectores.

simetrías existentes en la matriz del sistema, el número de elementos que interviene en el algoritmo de reconstrucción es el número de elementos no cero de la matriz. El porcentaje de dispersión de la matriz del sistema puede variar para un mismo *grid*, en función del píxel empleado o del procedimiento para el cálculo de pesos y no es posible anticipar su valor hasta hacer el cálculo de la matriz del sistema. Los tamaños de la matriz del sistema calculados para unas dimensiones concretas se presentan en el capítulo 5 en el que además se compararán las características de la reconstrucción obtenida mediante distintas matrices del sistema.

4.6. Píxel no polar en *grid* polar

La colocación de los píxeles siguiendo un *grid* polar, puede aportar ventajas sin que sea necesario que para ello los píxeles también tengan un formato polar. El único requisito que es deseable que cumpla el formato de píxel empleado es el de conservar las simetrías que existen gracias a la disposición del *grid*.

4.6.1. Pixelado circular

El píxel circular se plantea como una alternativa al píxel polar ya que permite conservar las condiciones de simetría respecto a la fuente y los detectores que

cumple un píxel polar. Las propiedades de los píxeles con simetría circular son ampliamente conocidas [72, 73]. La principal ventaja que tiene el uso de un píxel circular frente al polar es que su simetría simplifica mucho el cálculo de pesos de la matriz del sistema, haciendo posible un modelo de proyección basado en integrales de área como tal, frente a otros modelos que calculan el área del píxel 2D a partir de un sumatorio de integrales de línea. Los detalles en el cálculo de pesos de la matriz del sistema 2D se presentan con mayor profusión en el capítulo 5.

El diseño de píxeles circulares se plantea haciendo uso de un *grid* polar de relación de aspecto unitario ya que los píxeles circulares por definición, cumplen esta misma característica.

Los píxeles circulares están definidos únicamente por una dimensión Δr que determina su radio que se calcula de la siguiente manera:

1. En el centro del FOV se sitúa un píxel circular cuyo diámetro es de la mitad de la resolución espacial del sistema.
2. Desde el píxel circular central, el resto de sector circular se divide en píxeles circulares siguiendo las mismas indicaciones.
 - a) El diámetro Δr de estas circunferencias es menor o igual que la mitad de la resolución intrínseca del sistema.
 - b) Todos los píxeles circunscritos en la circunferencia cuya distancia al centro es la misma, tienen el mismo diámetro Δr
 - c) El diámetro Δr es el mayor posible que cumple las condiciones b) y c) y que permite que el menor número entero de píxeles iguales quede confinado en el sector circular a la misma distancia del isocentro.
3. Todos los sectores circulares, quedan subdivididos de la misma manera.

El diseño de este pixelado garantiza que el muestreo de cada pixel en todas las direcciones del espacio es equivalente. De hecho, se puede apreciar en la figura 4.15 que el resultado da lugar a un *grid* semejante al diseño mostrado para píxeles polares de relación de aspecto unitaria, tanto en dimensiones como en número de píxeles. El inconveniente que tienen los píxeles circulares es que dejan huecos que no intervienen en el cálculo del peso mientras que los píxeles polares cubren la totalidad del FOV sin dejar ninguna zona en la que no se mida la intersección entre un píxel y un rayo proyectado sobre el mismo.

En la figura 4.16 se muestra el porcentaje del área del hueco en promedio en relación al área del píxel circular. Se puede apreciar que el porcentaje de estos

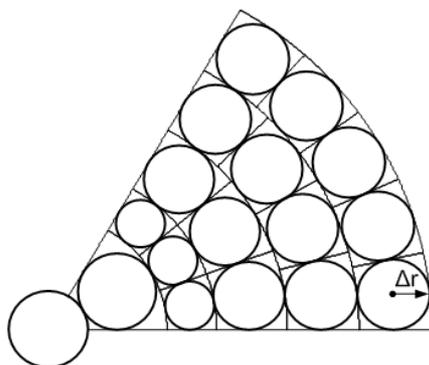


Figura 4.15: Diseño de un *grid* polar formado por píxeles circulares. Se incorpora en el dibujo con un trazo más fino el *grid* polar empleado para ubicar el píxel circular.

huecos es inferior al 0,1% del área del píxel circular en promedio. Los huecos de los píxeles circulares son de un tamaño muy inferior a la resolución espacial que se desea representar mediante el muestreo ya que, son proporcionales al tamaño de los píxeles empleados y éstos a su vez tienden a ser inferiores a esta resolución cuando se disponen en formato polar siguiendo un criterio de relación de aspecto unitaria.

El impacto que tienen estos huecos sobre la calidad de la reconstrucción es evaluado en el capítulo 5 en el que se compara con un pixelado cartesiano tradicional y con las otras variantes de pixelado basadas en *grid* polar y píxel polar.

4.6.1.1. *Voxel* cilíndrico

El modelo de píxel circular en 3D se puede plantear de diferentes maneras que suponen un tratamiento distinto del cálculo de pesos. Para representar el *voxel* circular, es preferible escoger una forma cilíndrica frente a otras formas posibles como son la esférica, por las numerosas ventajas que presenta.

1. El *voxel* cilíndrico hace posible que el área de los huecos frente a la de los píxeles se mantenga uniforme en distintos cortes transaxiales y proporcional al área del caso 2D.
2. El sistema 3D construido a partir de *voxels* cilíndricos se simplifica enormemente ya que consiste en una sucesión de discos similares a los *voxels* polares que consisten en réplicas situadas a distintas alturas.

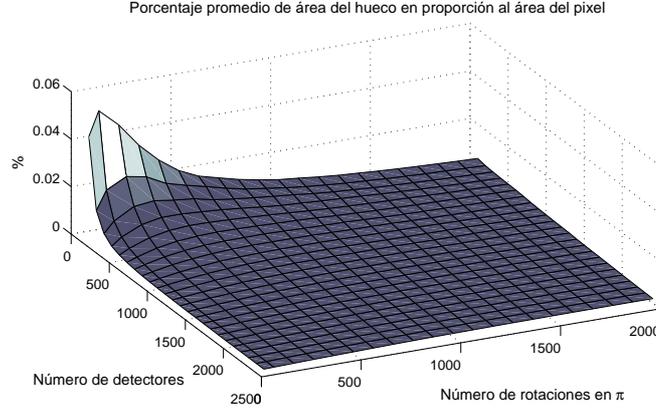


Figura 4.16: Porcentaje promedio del área del hueco que deja el píxel, en proporción al área del píxel circular.

3. La construcción de la estructura 3D es una tarea sencilla a partir del caso 2D. Los discos consisten en un conjunto de cilindros cuyas bases siguen las dimensiones y el esquema del caso 2D y cuya altura es constante e inferior a la mitad de la resolución intrínseca del sistema.

4.6.2. Pixelado mediante funciones Kaiser-Bessel: *blobs*

Los *blobs* son píxeles de simetría circular [36, 67], que tienen como base las funciones de enventanado Kaiser-Bessel que se enuncia en la ecuación (4.5).

$$b^{(m,\alpha)} = \begin{cases} \frac{1}{I_m(\alpha)} \sqrt{(1 - (r/a)^2)^m} I_m(\alpha \sqrt{(1 - (r/a)^2)}), & 0 \leq r \leq a \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.5)$$

donde a es el radio del *blob*, I_m es una función de Bessel modificada de orden m que controla la suavidad del *blob* en la frontera $r = a$ y α es un parámetro no-negativo responsable de la forma del *blob*.

En los *voxels* convencionales, la integral entre el rayo y el *voxel* depende de la inclinación del rayo y de la posición relativa del rayo y del *voxel* por lo que el número de casos posibles es elevado. En los *blobs*, la integral entre el *blob* y un rayo viene dada únicamente por la distancia entre ambos y este hecho facilita el cálculo de pesos en el caso 2D y 3D.

El empleo de esta forma de pixelado surge en el contexto de la matriz del sistema de un tomógrafo por emisión de positrones en el que el empleo de *blobs* que suavizan el ruido presente en el PET, proporciona una reconstrucción de más calidad que el píxel cartesiano [74]. A pesar de que el cálculo de pesos es muy diferente en el TAC, las ventajas que aportan los *blobs* en el cálculo de los pesos de la matriz llevan al empleo de éstos como alternativa a un pixelado cartesiano convencional [75].

El suavizado característico de los *blobs* se consigue gracias a que los *blobs* tienen colas que se atenúan lentamente y que se suman en una misma área del FOV solapándose entre sí. Este solapamiento equivale a un filtrado paso bajo de la imagen reconstruida ya que suaviza los contornos y las transiciones. De este modo, se obtienen imágenes reconstruidas ya suavizadas sin artefactos de alta frecuencia. El inconveniente es que el solapamiento incrementa el coste computacional de la matriz del sistema [67, 74] ya que el cálculo de los pesos asociado a cada píxel abarca una mayor zona del espacio por lo que cada *blob* tiene influencia en un mayor número de rayos y esto reduce la dispersión de la matriz del sistema.

Los *blobs* han sido estudiados por otros autores siguiendo un *grid* alternativo al cartesiano con el propósito de reducir el número necesario de píxeles [15, 36]. Sin embargo, hasta el momento de la realización de esta tesis, no tenemos conocimiento de que se haya estudiado anteriormente, el empleo de un esquema de píxeles basado en *blobs* siguiendo una disposición mediante *grid* polar. En este trabajo, se ha estudiado el uso de *blobs* dispuestos mediante un *grid* polar porque el uso del *grid* polar reduce enormemente el coste computacional de la matriz del sistema y esto puede aliviar el aumento en el coste computacional asociado a la utilización de *blobs*.

Uno de los problemas que puede presentar la ubicación de los *blobs* siguiendo un esquema polar es que el solapamiento de los píxeles no es homogéneo en todo el FOV por la disposición de los píxeles, mientras que en los *grid* propuestos, los píxeles se sitúan en posiciones equidistantes. Es necesario estudiar si el solapamiento variable puede producir artefactos y hasta que punto estos artefactos estropean la calidad de la imagen reconstruida mediante *blobs* en un *grid* polar.

Se han empleado *blobs* del mismo radio dispuestos siguiendo un *grid* polar de radio constante en el que el solapamiento de la zona central será mucho mayor que el solapamiento de las zonas externas del FOV y se ha empleado *blobs* de radio variable siguiendo el esquema de *grid* polar de relación de aspecto unitario, en el que el solapamiento depende de la distancia radial y varía con el tamaño del

blob. El estudio de la calidad de la reconstrucción obtenida por ambos esquemas, se presenta en el capítulo 5.

4.6.2.1. Blobs de radio constante

En este modelo de pixelado se ha empleado el *blob* considerado “estándar” que ha demostrado ser la configuración más adecuada para la reconstrucción de imágenes tomográficas [74]. Este *blob* se define por los parámetros $m = 2$ y $\alpha = 10,4$. La relación existente entre la distancia del espaciado entre píxeles Δ y el radio del *blob*, se establece a partir de los ceros de la descomposición de Fourier de la función del *blob* que vienen dados por,

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + u^2}}{2\pi a} = \frac{1}{\Delta} \quad (4.6)$$

donde el primer cero de la función de Bessel es $u = 6.988$ por lo que si se sustituye en esta expresión los parámetros del *blob* para el caso del *blob* estándar, se obtiene que $1,994/a = 1/\Delta$ o lo que es lo mismo $a = 1,994\Delta$. De esta forma, se minimiza el efecto de *aliasing* asociado al pixelado a la frecuencia de $1/\Delta$.

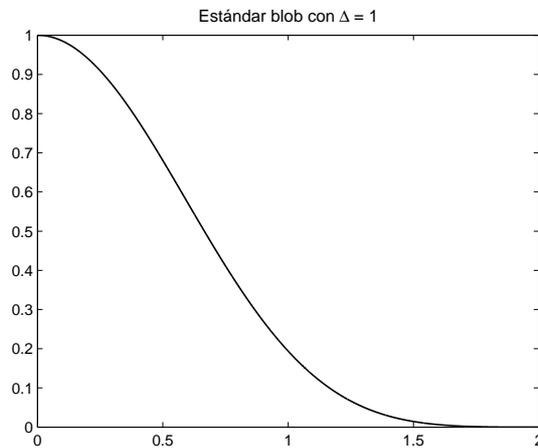


Figura 4.17: *Blob* estándar de $m = 2$, $\alpha = 10,4$ y $\Delta = 1$.

La figura 4.17 muestra la forma del *blob* empleado que se ha dispuesto situándolo mediante el *grid* polar de radio constante que hemos visto en la sección

4.3.3. El solapamiento entre *blobs* con este *grid* es aproximadamente de la mitad, pero varía ligeramente en función de la posición radial del mismo por lo que se puede prever un suavizado mayor en la zona central de las imágenes que en los extremos del FOV.

4.6.2.2. *Blobs* de radio variable

La regla descrita para el cálculo de los radios de los *blobs* [36], enunciada en la expresión (4.6), muestra que para los valores de *blob* estándar, el radio es aproximadamente el doble de la distancia de muestreo entre *blobs*. Si se aplica esta proporción al caso del *grid* polar de relación de aspecto unitario, disponiendo los centros en las mismas posiciones que los píxeles circulares, los radios empleados para el cálculo de los *blobs* coinciden con los diámetros de los píxeles circulares descritos en la sección 4.6.1. Este esquema da lugar a un solapamiento variable pero que en este caso dependerá de la distancia radial y del tamaño del *blob*.

4.7. Visualización de imágenes calculadas en *grid* polar

El empleo de un *grid* polar hace necesario el desarrollo de un método de visualización que permita trasladar la información obtenida en esquema polar a un esquema cartesiano que sea compatible con los formatos de imagen estándar. Existen diferentes aproximaciones a este problema que se basan en el empleo de transformaciones de coordenadas y cambios de base [45] que suelen ir precalculados en tablas [38, 43, 76], para agilizar el cálculo debido a la lentitud del proceso. En la aproximación que se ha empleado se pretende prescindir de datos precalculados ya que, el objetivo principal que nos lleva a la elección de un *grid* polar es la reducción del tamaño de la matriz del sistema. La optimización de la transformación de las imágenes polares a imágenes cartesianas es de gran importancia para que el tiempo de cálculo de esta transformación no suponga una traba a la hora de emplear el *grid* polar.

4.7.1. Imágenes polares

El estudio del visor en coordenadas polares se ha realizado transformando dos imágenes polares diseñadas específicamente para este propósito. El diseño del visor se ha emprendido con la geometría del simulador TAC de pequeños animales,

descrito en el capítulo 3, que da lugar a un tamaño de píxel mucho mayor en el que podemos apreciar más fácilmente las diferencias existentes entre píxeles.

Se ha utilizado en todos los ejemplos mostrados, el *grid* polar de relación de aspecto unitario ya que en este caso se dan mayores diferencias entre los píxeles más grandes y los menores dentro del *grid*.

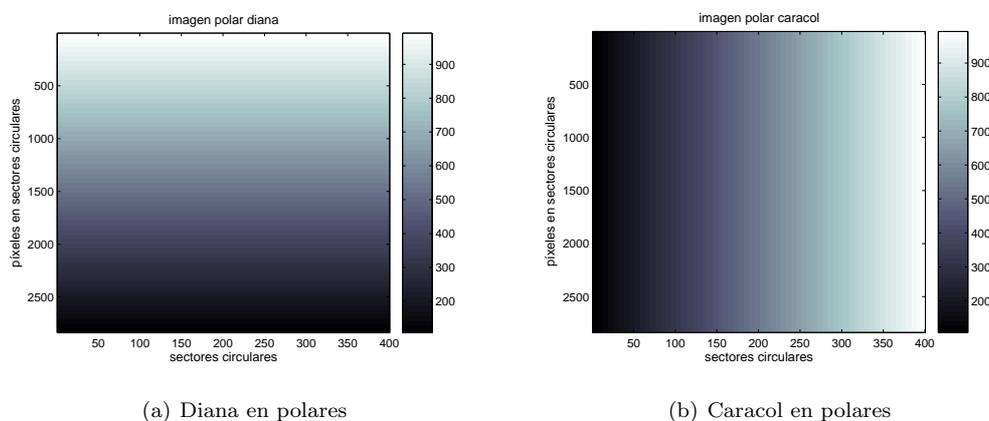


Figura 4.18: Imagen polar *diana* 4.18(a) e imagen polar *caracol* 4.18(b).

Diana. Es una imagen polar en la que todos los píxeles situados a la misma distancia radial tienen el mismo valor de intensidad. Los valores de intensidad varían disminuyendo desde un valor de 1000 en el centro a 100 en el último aro del FOV, siguiendo una variación lineal, por lo que el aspecto que tiene esta imagen es la de una sucesión de aros concéntricos de distinta intensidad. Esta figura nos permite evaluar la capacidad del visor para representar las transiciones en la dirección radial.

La figura 4.18(a) permite ver una representación de la imagen polar dibujando el valor de los píxeles polares por sectores circulares y por píxeles por sector. Podemos ver representados todos los píxeles excepto el píxel central que no está ubicado en ningún sector circular y que tiene valor 100. El aumento en la posición de las líneas horizontales (eje horizontal de la gráfica) corresponde con una distancia mayor al centro de los píxeles situados en esas líneas.

Caracol. Es una imagen polar en la que todos los píxeles situados en el mismo sector circular tienen el mismo valor de intensidad. Los valores de intensidad

varían desde 100 en el sector circular situado en 180° hasta 1000 en el sector situado en $180^\circ + P/180$ siguiendo el sentido de las agujas del reloj. En la figura 4.18(b) se han representado todos los píxeles por sector circular excepto el píxel central que tiene un valor 0.

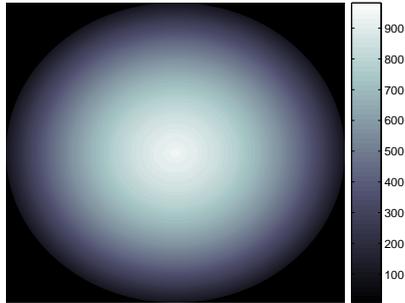
Mediante la transformación de esta imagen podemos apreciar si la mezcla de intensidad cuando se produce la transformación de píxeles polares a cartesianos es capaz de conservar la información entre sectores circulares sobre todo en la zona central en la que hay pocos píxeles polares por sector.

4.7.2. Visor de píxeles polares

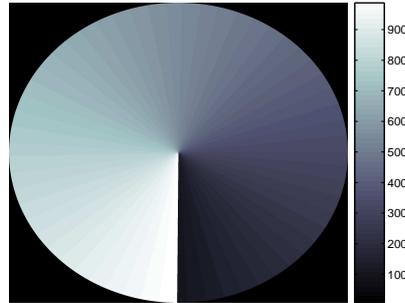
El método de visualización que se emplea para la transformación de la imagen polar a cartesiana, se basa en la superposición de un *grid* cartesiano sobre un *grid* polar. Esta superposición permite el cálculo del porcentaje de píxel polar que contribuye a un píxel cartesiano y el empleo de este porcentaje hace posible la transformación de una imagen polar a otra cartesiana.

En el capítulo 2, se ha distinguido entre la resolución real de una imagen y la resolución visual de la misma. La resolución real de la imagen es la resolución que viene dada por el tamaño de píxel más pequeño de la imagen sin embargo, el uso de una resolución visual superior a la real permite que las transiciones sean paulatinas y da un aspecto más suavizado a la imagen. Para que la transformación no introduzca artefactos visuales, el *grid* cartesiano se debe dimensionar con una resolución mucho más fina que la del *grid* polar empleado. En teoría, el *grid* cartesiano empleado, debe representar la resolución visual del píxel polar para conservar las transiciones que marca este pixelado. Esta condición, implica que la distancia de espaciado entre píxeles cartesianos corresponda a la menor distancia que se puede medir en el píxel polar. Los píxeles polares están sobredimensionados en el centro del FOV por lo que el *grid* cartesiano necesario para el cálculo del visor de polares es excesivamente grande.

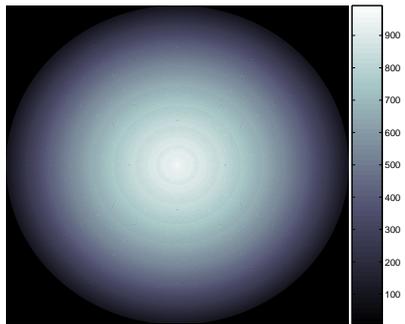
La experimentación con distintos tamaños de *grid* cartesiano nos permite concluir que 4 veces el tamaño de la resolución real de la imagen, es suficiente para elaborar el *grid* cartesiano para el cálculo de coeficientes entre el esquema polar y el esquema cartesiano. El empleo de esta transformación, proporciona un *grid* cartesiano con 16 veces más píxeles de los que hubieran sido necesarios para representar una imagen de la misma resolución que hubiera sido creada mediante un *grid* cartesiano. Una vez transformada la imagen polar en cartesianas, para



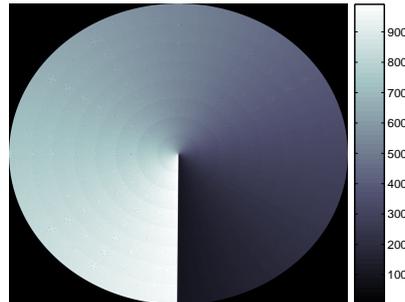
(a) Diana visor polar



(b) Caracol visor píxel polar



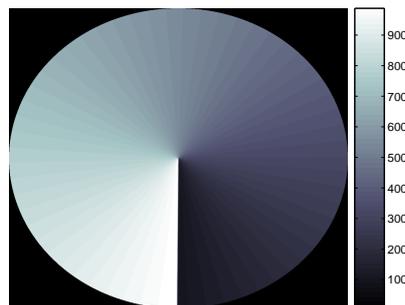
(c) Diana visor píxel circular



(d) Caracol visor píxel circular



(e) Diana visor píxel *blob*



(f) Caracol visor píxel *blob*

Figura 4.19: La imagen polar 4.18(a) y la imagen polar 4.18(b), se muestra dibujada mediante píxeles polares 4.19(a) y 4.19(b), circulares 4.19(c) y 4.19(d) y *blobs* 4.19(e) y 4.19(f) y transformada a cartesianas mediante sus visores respectivos. En el visor de píxeles circulares se ha empleado un filtro bilineal de longitud 5.

comparar con el caso cartesiano, se aplica un filtro paso bajo para evitar el efecto de *aliasing* y se reduce la imagen cartesiana obtenida diezmándola un orden de 4.

A continuación, la figura 4.19(a) muestra la imagen polar de la diana que ha sido transformada mediante el visor polar y un perfil de la imagen polar y de la imagen polar transformada a cartesianas, tomado desde el centro de la imagen hasta el extremo de la misma.

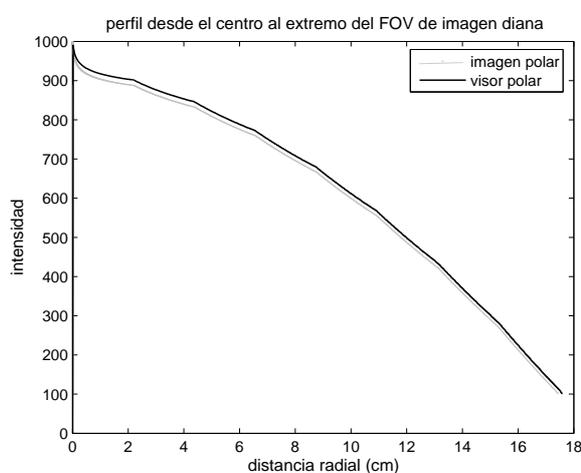


Figura 4.20: Perfil de la imagen polar *diana* transformada a cartesianas mediante el visor de polares, desde el centro de la imagen al extremo del FOV.

El perfil muestra que aunque existe una pequeña diferencia en la intensidad de la imagen polar de partida, respecto a la visualizada, la forma de la imagen y la proporción entre los distintos tonos, que es lo que centra el interés en una imagen de TAC, se mantienen. Esta diferencia de amplitud se debe al postprocesado necesario para convertir la imagen a cartesianas.

La figura 4.19(b) muestra la imagen 4.18(b) transformada a cartesianas mediante el visor polar. Se puede apreciar que la transición entre sectores circulares se mantiene perfectamente incluso en la zona central en la que intervienen un mayor número de píxeles polares en el píxel cartesiano superpuesto.

La extensión del visor polar al caso 3D se hace partiendo del cálculo de coeficientes que relacionan la proporción entre píxeles polares y cartesianos que se ha descrito para el caso 2D. Los coeficientes que relacionan los píxeles polares en el plano serán los mismos en distintos cortes transaxiales porque el *grid* polar es constante en la dirección axial por lo que se procede de la misma manera que el

caso 2D a distintas alturas. La información calculada en el primero de los cortes servirá para transformar los otros.

4.7.3. Visor de píxeles circulares

El visor de píxeles circulares ha sido diseñado empleando dos alternativas que siguen los mismos principios que hemos descrito en el visor de píxeles polares.

Visor píxeles circulares con interpolación bilineal. La transformación descrita para el visor de polares, se realiza de forma análoga empleando la estructura de píxeles circulares para la superposición. El resultado es un dibujo cartesiano en el que quedan los huecos entre los píxeles circulares. Sobre este dibujo cartesiano se hace una interpolación bilineal en los huecos, en los que se aproxima el contenido del hueco con el promedio de las píxeles circulares circundantes.

Visor píxeles circulares circunscritos en píxeles polares. Esta versión del visor calcula el píxel polar en el que quedaría confinado el píxel circular que queremos dibujar y realiza la transformación de polares a píxeles circulares asumiendo que la intensidad representada por los píxeles circulares queda repartida de forma uniforme en todo el píxel polar. El aspecto de las imágenes obtenidas a partir de este visor es el mismo que el obtenido mediante el visor de píxeles polares.

En la figura 4.21 se compara el perfil obtenido para las dos versiones del visor. En el caso del visor de píxeles circulares con interpolación bilineal (ver figura 4.19(c)), se produce un artefacto visual que viene acentuado por el hecho de que los píxeles circulares siguen un esquema periódico. Este artefacto visual, se puede apreciar de forma más notoria en el perfil de la figura 4.21 que adquiere un aspecto dentado para este caso. Se han comparado dos longitudes de interpolación, tomando 5 y 7 muestras para el visor de píxeles circulares. Aunque la longitud de interpolación 7 suaviza el efecto observado, se ha optado por el visor de píxeles circulares circunscritos en píxeles polares para la visualización de píxeles circulares que no presenta ningún artefacto y tiene un menor coste computacional.

4.7.4. Visor de píxeles *blobs*

El visor de píxeles *blobs* emplea el mismo principio que el visor de polares pero sustituye el píxel polar por un píxel *blob*. El tratamiento que se hace en la zona de

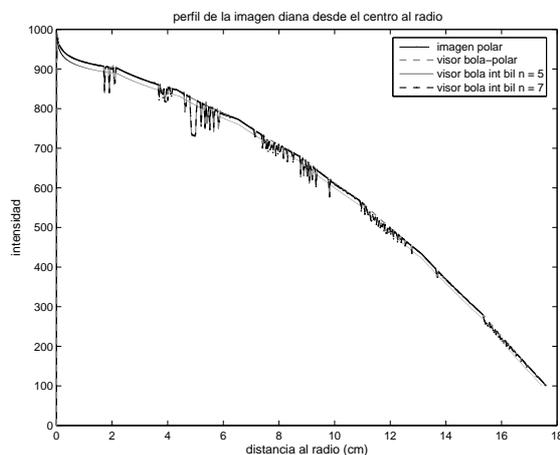


Figura 4.21: Perfil de la imagen polar *diana* transformada a cartesianas mediante el visor de píxeles circulares con filtro bilineal de longitud 5, desde el centro de la imagen al extremo del FOV.

solapamiento del *blob* consiste en la suma ponderada de los *blobs* que se solapan, por el porcentaje de solapamiento. Se puede ver en las figuras 4.19(e) y 4.19(f) que el aspecto de las transiciones de las imágenes mediante *blobs* es más suavizado que en el caso de píxeles polares o píxeles circulares.

A pesar de que el aspecto de las imágenes transformadas a cartesianas a partir de *blobs* es suavizado, la imagen permite discernir perfectamente la transición en intensidad, entre sectores circulares que se produce en la imagen 4.19(f), incluso en la zona central del mismo en la que se aglutinan muchos *blobs* solapados.

4.8. Discusión y conclusiones

Mediante el uso de un *grid* polar se ha mostrado que es posible el planteamiento de la matriz del sistema como una matriz formada por bloques en la que cada bloque se puede inferir a partir de uno único. Además, la obtención de los restantes bloques se realiza empleando matrices sencillas de rotación y reflexión que suponen únicamente cambios de filas y columnas. De esta forma, se reduce el cálculo de la matriz y su tamaño y por lo tanto, se facilita el manejo de la misma, con independencia del algoritmo de reconstrucción que se emplee.

Se ha planteado el *grid* polar siguiendo dos criterios diferentes a la hora de

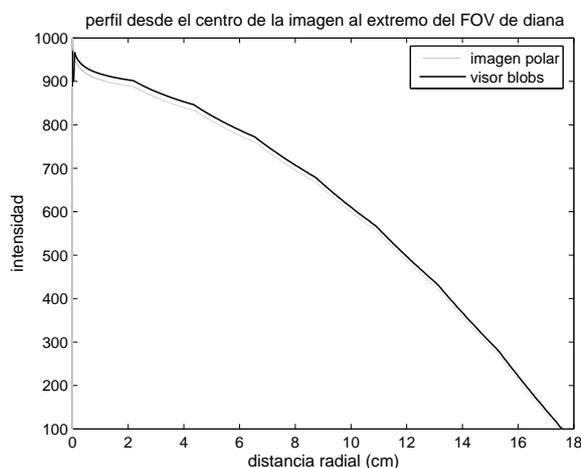


Figura 4.22: Perfil de la imagen polar *diana* transformada a cartesianas mediante el visor de *blobs*, desde el centro de la imagen al extremo del FOV.

determinar el muestreo. El criterio de relación de aspecto unitario da lugar a un *grid* en el que las transiciones de un píxel a otro no son bruscas y el muestreo en ambas direcciones del espacio es más homogéneo para un mismo píxel; sin embargo, estas propiedades se consiguen a partir de un aumento en el número de píxeles. El criterio de radio constante da lugar a píxeles con relación de aspecto menos armónica, pero que cumplen las condiciones de resolución impuestas proporcionando un *grid* con el menor número de píxeles posible. En ambos casos, emplear estos *grid* para el cálculo de la matriz del sistema da lugar a una matriz que como se ha demostrado, tiene en todos los casos muchos menos elementos que su equivalente cartesiana.

Además del empleo de un píxel polar dispuesto según un *grid* polar, es posible emplear el *grid* polar con píxeles circulares. Esta opción tiene como principal ventaja la simplificación en el cálculo de pesos gracias a la simetría añadida por la forma del píxel. Los píxeles de simetría circular empleados siguen estrategias contrarias: los píxeles circulares quedan dispuestos en un *grid* polar de relación de aspecto unitario de tal manera que sus radios son tangentes al sector circular donde se confinan y son tangentes entre sí dejando huecos entre ellos mientras que, los píxeles mediante funciones Kaiser-Bessel pueden ser dispuestos en un *grid* polar de relación de aspecto unitario o de radio constante pero en ambos casos, no dejan huecos libres debido al solapamiento existente entre ellos. Es necesario estudiar el

impacto de los huecos de tamaño variable en el caso de los píxeles circulares y del solapamiento en un porcentaje variable en el caso de los *blobs* para determinar si la presencia de huecos y de solapamiento puede implicar una pérdida de precisión o un artefacto en las imágenes reconstruidas con esta matriz del sistema.

El uso de un *grid* polar requiere de un método de transformación de las imágenes, han sido descritas tres alternativas que permiten la transformación de píxeles polares, circulares o *blobs* dispuestos en *grids* polares, a *grids* cartesianos de la misma resolución en los que no se distinguen artefactos circulares o sectoriales asociados al *grid* polar de la imagen original de partida.

La comparación de las soluciones de reconstrucción proporcionadas a partir de la utilización de cada uno de los *grids* propuestos con todas las alternativas de pixelado apuntadas, se tratará en profundidad en el capítulo 5.

Capítulo 5

Matriz 2D Basada en *Grid* Polar

La reconstrucción de imágenes se realiza a partir de la caracterización matemática del proceso de la atenuación de rayos-X, que queda registrada en el escáner TAC, después de atravesar un objeto. En los métodos de reconstrucción algebraicos, el diseño de este modelo se materializa en el cálculo de la matriz del sistema, por lo tanto la matriz del sistema tiene un impacto muy significativo en la precisión de la reconstrucción.

En este capítulo, se profundizará en el cálculo e implementación de la matriz del sistema y se evaluará la precisión proporcionada por la matriz frente al coste computacional asociado en la reconstrucción, con el objetivo de proponer el modelo más adecuado para el cálculo de la matriz del sistema. Con este propósito, se presentarán seis matrices del sistema que emplearán para el cálculo de pesos los distintos esquemas de pixelado que han sido descritos en el capítulo 4. Se estudiarán los detalles del cálculo e implementación de cada una de las matrices y sus propiedades. A continuación, se compararán las características de las soluciones de reconstrucción conseguidas en cada caso, frente a la matriz del sistema cartesiana. Para ello se utilizará la reconstrucción de proyecciones sintéticas en las que la imagen del modelo ideal permite medir el error cometido. Finalmente, se presentará la reconstrucción proporcionada por las matrices, para el caso de una proyección real procedente del Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia.

5.1. Cálculo de pesos de la matriz del sistema

El cálculo de pesos de la matriz del sistema, implica la definición de un modelo de escáner TAC. Este modelo supone una simplificación del funcionamiento del TAC que consiste en determinar el proceso de proyección sobre el objeto mediante la concreción de la actuación de cada rayo y el propio objeto mediante un esquema de pixelado. La descripción del funcionamiento de las proyecciones ha sido abordada planteando dos modelos que serán definidos sin tener en cuenta su interacción con el esquema de pixelado empleado. En el apartado 5.4 en el que se describe la implementación de la matriz 2D, se tratarán los modelos de proyección elegidos en función de los distintos pixelados propuestos.

5.1.1. Aproximación mediante integrales de línea: método de Siddon

En el capítulo 3 el método de Siddon ha sido introducido como método de *forward-projection*, pero su uso también es extensible al cálculo de pesos de la matriz del sistema. Este método asume que un rayo b_j que forma parte de los B rayos que componen una proyección, está a su vez compuesto por un conjunto de K líneas que contribuyen a él,

$$b_j = b_{j1}, b_{j2} \dots b_{jK} \quad (5.1)$$

Esta simplificación permite considerar que la integral de área necesaria para el cálculo del peso (i, j) de la matriz, correspondiente a la integral de área entre el rayo b_j y píxel i es la que muestra la expresión (5.2),

$$a_{ij} = \sum_{k=1..K} a_{ijk} \quad (5.2)$$

De esta forma, la integral de área necesaria para el cálculo de pesos pasa a ser un sumatorio de integrales de línea. Las integrales de línea suponen un cálculo más sencillo y más generalizable para distintas posiciones de rotaciones y configuraciones de píxeles.

Para simplificar este procedimiento, Siddon [58] propuso el cálculo de pesos con integrales de línea mediante un procedimiento en varias fases, que resumimos de la siguiente manera:

1. Cálculo de todas las intersecciones entre la línea k que forma parte del rayo j con todos los límites del *grid*.
2. Combinación de los puntos de corte obtenidos y ordenación de los mismos en función de su situación en la línea k para asignarlos a un píxel concreto i .
3. Identificación del píxel i intermedio entre dos parejas de puntos de intersección.
4. Cálculo de la longitud entre los puntos de corte entre los que está confinado el píxel i , para considerarlo como contribución k al peso a_{ij} por intersección con el rayo j .

5.1.2. Aproximación mediante integrales de área

El empleo de proyecciones como elementos de área, supone una aproximación más realista para el cálculo de pesos de un escáner TAC. En este caso, se considera que el rayo es el área del triángulo, que queda confinada entre los extremos del detector y la fuente de rayos-X por lo que, el cálculo de pesos implica el cálculo de la integral de área entre el rayo y el píxel.

El cálculo de los pesos a partir de integrales de área mediante métodos exactos es complejo porque hace necesario desglosar todas las posibles intersecciones entre los rayos y los píxeles para todas las rotaciones y resolver cada caso de forma analítica. Esta posibilidad no es siempre viable en tanto que en este cálculo se pueden dar un elevado número de casos que es necesario identificar y a su vez implementar. En la práctica, esta aproximación para el cálculo de pesos se implementa asumiendo una de estas dos simplificaciones:

- La integral de área se aproxima de forma numérica mediante su descomposición por triangulación, en un subconjunto de áreas que se pueden resolver de la misma forma [26].
- Se emplea una forma de píxel con simetría esférica que posibilita la reducción del número de casos [77, 78].

En este trabajo, se ha optado por la segunda simplificación que supone que el área de intersección entre el píxel y el rayo se calcula a partir de una integral resuelta de forma analítica, entre ese rayo y un píxel circular. Aunque este modelo de proyección es aplicable también al caso de los *blobs* por su simetría circular, sólo ha sido empleado en el cálculo de pesos para la matriz de píxeles circulares.

5.2. Estructura de la matriz dispersa

La matriz del sistema es una matriz no cuadrada y muy dispersa por lo tanto, es recomendable para su almacenamiento un formato que contenga únicamente los elementos distintos de cero.

En el caso de la matriz calculada a partir de un *grid* cartesiano es posible que existan píxeles que no tengan elementos distintos de cero, mientras que en el caso de la matriz polar, todos los píxeles tendrán al menos una entrada distinta de cero en la matriz porque todos los píxeles quedan contenidos en el interior del FOV.

La filosofía empleada para el cálculo de la matriz puede seguir dos estrategias que suponen la imposición de un orden determinado en su cálculo.

- La estrategia *pixel-driven* es aquella en la que la matriz se calcula y por lo tanto se almacena píxel a píxel. Esto supone un mayor número de accesos a disco ya que, normalmente, se tiene un mayor número de píxeles que de rayos y sólo unos pocos rayos contribuyen al cálculo de pesos en un píxel.
- La estrategia *ray-driven* es aquella en la que la matriz se calcula y almacena rayo a rayo y esto supone un número de accesos a disco necesarios para su almacenamiento más eficiente. En este caso, se tiene la matriz ordenada por rayos y a su vez para un rayo, se puede imponer la ordenación de los píxeles.

El almacenamiento de la matriz se ha resuelto empleando dos ficheros, uno de índices mediante una estructura de dos datos por entrada y otro de pesos con una estructura de dos datos por elemento de la matriz. En el caso de una matriz ordenada por píxeles, *pixel-driven*, el fichero de índices tiene un número de entradas igual al número de píxeles de la matriz del sistema. La información de este fichero para cada píxel consiste en dos campos que contienen: en qué elemento absoluto del fichero de pesos empieza la información relativa a ese píxel y cuantos pesos distintos de cero existen para ese píxel. En el fichero de pesos se tiene para cada peso, el valor de éste y el rayo implicado en la intersección. De esta forma, es posible

almacenar únicamente el contenido distinto de cero para cada píxel y al mismo tiempo, se tiene un acceso a la información de cada píxel de forma independiente.

En el caso de la matriz ordenada de forma *ray-driven*, el esquema de almacenamiento es equivalente pero el fichero de índices tiene tantas entradas como rayos. A su vez, el fichero de pesos guarda la información del peso para ese rayo y el píxel con el que tiene la intersección correspondiente.

Se ha implementado una transformación que permite obtener la matriz ordenada por rayos a partir del formato de matriz ordenada por píxeles. Es decir, es posible transformar una matriz dispuesta de forma *pixel-driven* a otra *ray-driven* para encontrar la ordenación de datos más conveniente para el algoritmo de reconstrucción. En el caso de una matriz no dispersa, esta transformación equivale a la trasposición de la matriz por lo que, la matriz almacenada es equivalente en los dos formatos. La única diferencia existente entre los dos formatos es que aunque el fichero de pesos ocupa lo mismo en ambos casos, el fichero de índices ocupará más en el caso de la ordenación por píxeles porque necesita más entradas, al existir un mayor número de píxeles que de rayos.

5.3. Ajuste de parámetros para el método de Siddon

En el capítulo 3, se ha estimado que a partir de 210 líneas por mm de detector se obtiene una proyección con un error cuadrático medio menor de 10^{-4} respecto a un modelo de proyección 2D analítico. Además, esta aproximación permanece muy estable ya que el incremento de líneas a partir de esta cantidad no conlleva apenas reducción del error cuadrático medio.

Este número de líneas, para las dimensiones del TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia, supone emplear 205 líneas por rayo para 512 rayos de detector. Sin embargo, si se emplean los datos estimados a partir de las proyecciones no tenemos en cuenta la influencia del pixelado. Es decir, la incorporación de más líneas para el cálculo del peso de un píxel permite que el peso represente mejor la influencia de ese píxel en función de su tamaño y de su posición en el FOV por lo que, existirá un número suficiente de líneas para representar el peso del píxel, tal que, la incorporación de más líneas suponga un cambio despreciable en el peso del píxel calculado.

5.3.1. Criterios de elección del número de líneas

Para evaluar con cuantas líneas se puede decir que el peso del píxel ya es “estable”, definimos el vector de sensibilidad de la matriz del sistema S que viene expresada en (5.3),

$$S = \sum_{j=1..M} a_{ij} \quad (5.3)$$

donde M es el número total de rayos y a_{ij} es el peso de la matriz para el píxel i y el rayo j , por lo que S tiene tantos componentes como píxeles. S representa la influencia que tiene un píxel en la matriz, ya que supone la suma de todos los pesos que tiene ese píxel, para todas las posiciones de rotación.

A partir de esta definición de S se plantea un experimento que permita elegir el número de líneas necesario para comparar las matrices del sistema, partiendo de las siguientes premisas:

1. Se asume que el peor caso se produce en el modelo de *grid* polar de relación de aspecto unitario ya que, en este modelo se darán los píxeles de tamaño más pequeño por lo que, es necesario hacer el cálculo para averiguar el número de líneas adecuado para que el peso obtenido para los píxeles más pequeños alcance un valor estable. Por este motivo, el pixelado basado en *grid* polar de relación de aspecto unitario ha sido tomado como referencia para dimensionar el número de líneas.
2. Se considera que con 10^5 líneas por rayo, se obtiene una matriz cuyos valores de los pesos de los píxeles alcanzan un valor suficientemente estable. El vector S de esta matriz se toma como modelo, para comparar el vector S calculado a partir del resto de las matrices obtenidas con diferente número de líneas por rayo.
3. Se considera que el peso refleja el valor adecuado para el píxel cuando la mayor diferencia entre el vector S obtenido y el vector S de la matriz modelo de 10^5 se estabilice o lo que es lo mismo, que su valor varíe muy poco en relación al valor que tiene con la incorporación de más líneas.
4. Se asume que la precisión numérica de una variable de tipo *double* (en C++) es capaz de representar la variación introducida en el peso de la matriz, provocada por la incorporación de una línea. Las variables de tipo

double son variables de 8 bytes capaces de representar valores con 15 dígitos significativos.

5.3.2. Determinación del número de líneas en el método de Siddon

Se han calculado 22 matrices empleando distinto número de líneas comprendidas en un intervalo desde 500 líneas por rayo a 5×10^4 líneas por rayo. A partir de estas matrices, los vectores S han sido calculados para poder compararlos respecto al vector S de la matriz calculada con 10^5 líneas por rayo. La diferencia máxima elemento a elemento obtenida respecto al vector S modelo, se aprecia en la figura 5.1. Es necesario puntualizar que aunque es posible encontrar diferencias muy pequeñas (menores de 10^{-3}) con menos de 10^4 líneas, a partir de 3×10^4 líneas, la diferencia obtenida al aumentar el número de líneas queda estabilizada.

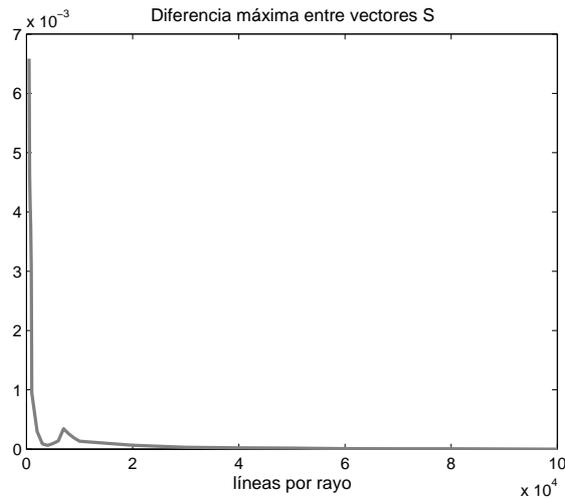


Figura 5.1: Diferencia muestra a muestra máxima entre los vectores S calculados con distinto número de líneas para la matriz polar de relación de aspecto unitario.

Las matrices también se han comparado a partir del estudio de las reconstrucciones proporcionadas por las mismas. Para ello, se ha calculado la raíz del error cuadrático medio medido de la imagen reconstruida respecto a la imagen ideal. En la reconstrucción se han empleado las distintas matrices que han sido calculadas utilizando un número de líneas diferente. Este error se empleará en el

punto 5.5.1 para evaluar la calidad de la reconstrucción obtenida y su definición se recoge en la expresión (5.5). La proyección escogida para este estudio ha sido la de un *phantom* de Shepp-Logan [57] calculado con CTSim. Las imágenes comparadas corresponden a la iteración número 30 proporcionada por el MLEM. Los detalles sobre la reconstrucción, el cálculo e implementación de la matriz del sistema mediante *grid* polar, son descritos en profundidad posteriormente en este capítulo.

La figura 5.2 permite establecer una relación entre la mejora de calidad en la reconstrucción proporcionada por la incorporación de más líneas en el cálculo de la matriz y el incremento en el tiempo de cálculo que supone la incorporación de dichas líneas.¹

Se destaca que la raíz del error cuadrático medio obtenido (0.011) disminuye ligeramente y queda estabilizado entorno a 3×10^4 líneas mientras que, el tiempo de computación necesario sigue aumentando y lo hace de forma exponencial. La precisión del error cuadrático medio ha sido calculada mediante 5 cifras decimales significativas² para observar la variación entre píxeles ya que, el error medio se normaliza respecto a la raíz del número de píxeles total y en este caso ese número es de $N = 1024$.

En conclusión, para poder asegurar que las matrices creadas tienen un cálculo de pesos adecuado, se usarán 3×10^4 líneas para el cálculo de los pesos, para todas las matrices 2D que empleen las dimensiones del TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia que se basen en un modelo de líneas. De esta forma, es posible descartar que los cambios observamos entre los distintos tipos de matrices, se deban a que el número de líneas no sea suficiente para reflejar el peso de los píxeles incluso en el caso más restrictivo, que es el del *grid* polar de relación de aspecto unitario.

5.3.3. Relación entre el número de líneas por rayo y por píxel

La relación entre el número de líneas por píxel y el número de líneas empleadas por rayo permite extrapolar los resultados obtenidos a las dimensiones de otro TAC.

¹Los cálculos de tiempos han sido medidos con un PC de propósito general Pentium 4 con CPU 3.2GHz y 2GB de RAM.

²Se han tomado 5 cifras significativas para mostrar la raíz del error cuadrático medio porque este parámetro se emplea para medir las diferencias entre una imagen teórica exacta y una imagen reconstruida, usando para ello un tipo de dato *double* que permite utilizar 15 cifras significativas.

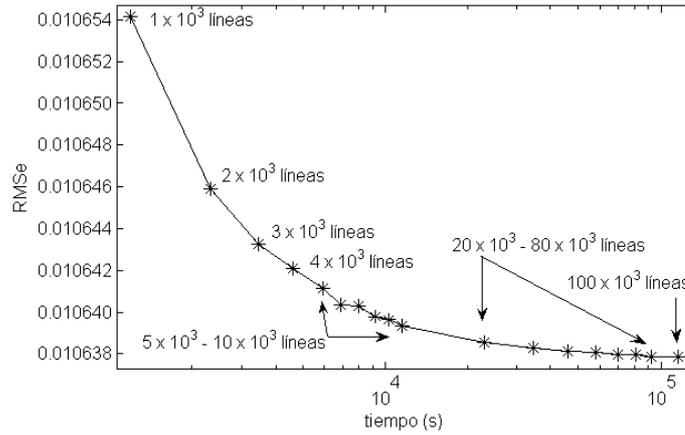


Figura 5.2: Raíz del error cuadrático medio frente al tiempo de cálculo de la matriz del sistema en segundos (escala logarítmica) para distinta densidad de líneas.

Líneas por Rayo ($\times 10^3$)	Mín Líneas por píxel
< 0.5	0
0.5	1
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	15
9	17
10	19
20	39
30	58
50	98
100	196

Tabla 5.1: Mínimo número de líneas por píxel correspondientes a un número de líneas por rayo empleadas para el cálculo de la matriz polar de relación de aspecto unitario

A partir de las matrices se ha hecho un cálculo del menor número de líneas por píxel que participan en el cálculo del peso en toda la matriz, para todas las

matrices que se muestran en la tabla 5.1. Se observa que el menor número de píxeles sigue una evolución lineal con el número de líneas por rayo. Para el caso de la matriz del sistema calculada con 3×10^4 líneas, el menor número de líneas que han intervenido en el cálculo del peso del píxel más pequeño es de 58 líneas.

5.4. Cálculo e implementación de la matriz del sistema 2D

Los modelos de proyección y esquemas de *grid* planteados hasta ahora, dan lugar a distintas soluciones para calcular la matriz del sistema que se emplea para reconstruir la medida de un escáner TAC. Los algoritmos de cálculo de cada una de las matrices son muy diferentes en función del tipo de píxel y del método de proyección. Cada aproximación de la matriz requiere de un enfoque diferente en su implementación que permita mejorar la eficiencia asociada en el cálculo de pesos.

5.4.1. Matriz basada en *grid* cartesiano

El *grid* cartesiano empleado para el cálculo de la matriz del sistema 2D ha sido descrito en el capítulo 4. Se ha hecho una implementación de esta matriz para la geometría del Simulador TAC del Hospital Clínico basada en el método de Siddon para el cálculo de pesos de la matriz del sistema con 3×10^4 líneas por rayo. Para el cálculo de la matriz, se han seguido las indicaciones planteadas en el método de Siddon [58], tal y como se ha descrito en la sección 5.1.1. La estrategia elegida para la implementación de la matriz ha sido por lo tanto, de tipo *ray-driven*.

5.4.2. Matriz basada en *grid* polar y píxel polar

Las simetrías presentes en el cálculo de la matriz haciendo uso de un *grid* polar y píxel polar, simplifican enormemente el cálculo de pesos ya que, sólo es necesario el cálculo de los pesos en una de las rotaciones del escáner y en este caso, es posible asumir la tendencia que tienen las rectas en las que se subdividen los rayos. Esta última característica permite simplificar los pasos necesarios en el cálculo de pesos mediante el método de Siddon aplicado a un *grid* de píxeles polares. La figura 5.3 muestra un esquema del cálculo de pesos para el caso de píxeles polares.

En la implementación del método de Siddon mediante un esquema *ray-driven*, para píxeles polares en *grid* polar, se han seguido los siguientes pasos:

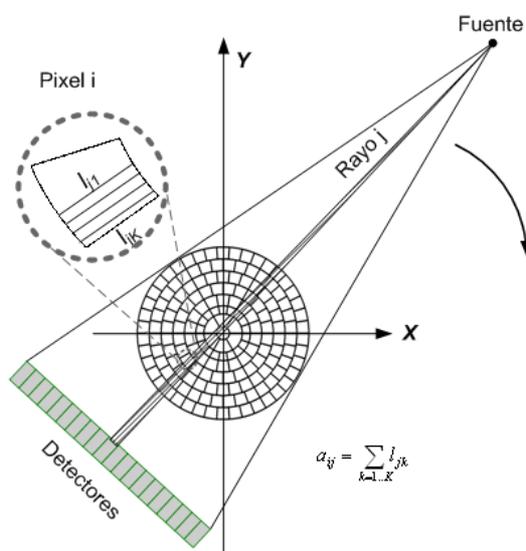


Figura 5.3: Diagrama del cálculo de pesos para un ejemplo de *grid* polar de relación de aspecto unitario con píxeles polares.

1. Cálculo de los puntos de intersección de la recta con las circunferencias que quedan constituidas por los arcos que delimitan los píxeles en el FOV.
2. A partir del corte con dos arcos concéntricos consecutivos, se determina en función de la distancia angular que separa a los dos puntos, el número de puntos de corte con los límites angulares de los píxeles. Después se procede de la siguiente manera para cada punto de corte:
 - a) Determinación del píxel a partir del punto de corte de partida.
 - b) En el caso en el que existan cortes con el límite angular del píxel, se procede a su cálculo.
 - c) Asignación del peso al píxel.

El algoritmo empleado, es el mismo para el *grid* polar de relación de aspecto unitario y para el *grid* polar de radio constante.

Gracias a la simplificación introducida por las simetrías del sistema, es posible plantear la implementación haciendo uso de una estrategia *píxel-driven* o *ray-driven*. La estrategia *píxel-driven* supone en este caso un tiempo de cálculo similar al obtenido con *ray-driven*.

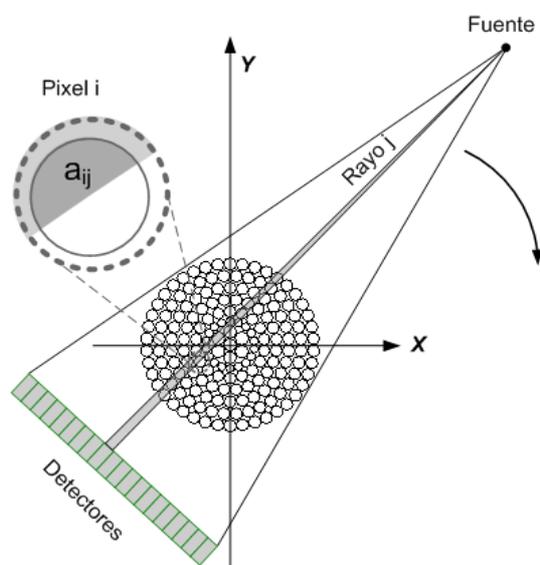


Figura 5.4: Diagrama del cálculo de pesos para un ejemplo de *grid* polar con píxeles circulares.

5.4.3. Matriz basada en *grid* polar y píxel circular

El cálculo de la matriz haciendo uso de un *grid* polar con píxeles circulares, se ha realizado tomando como modelo de proyección el área del rayo sin discretización (ver figura 5.4). Para esto, se ha realizado un estudio de los posibles cortes entre píxeles y rayos, para una posición de rotación y se ha calculado la integral resultante de la intersección para cada caso.

Las simetrías existentes en los píxeles de forma circular, permiten acotar el número de casos existentes a tan sólo 4, suponiendo que un píxel no puede ser intersectado por más de 3 rayos simultáneamente. Estos casos se muestran en la figura 5.5 y se clasifican en función de la posición del área intersectada respecto al centro del píxel circular, de la siguiente manera:

Caso A. El píxel queda completamente confinado en el rayo.

Caso B. La intersección entre el píxel y el rayo da lugar a un casquete circular en el que el centro no queda confinado.

Caso C. La intersección es el área que resulta de restar al área del píxel el área del casquete circular descrito en B.

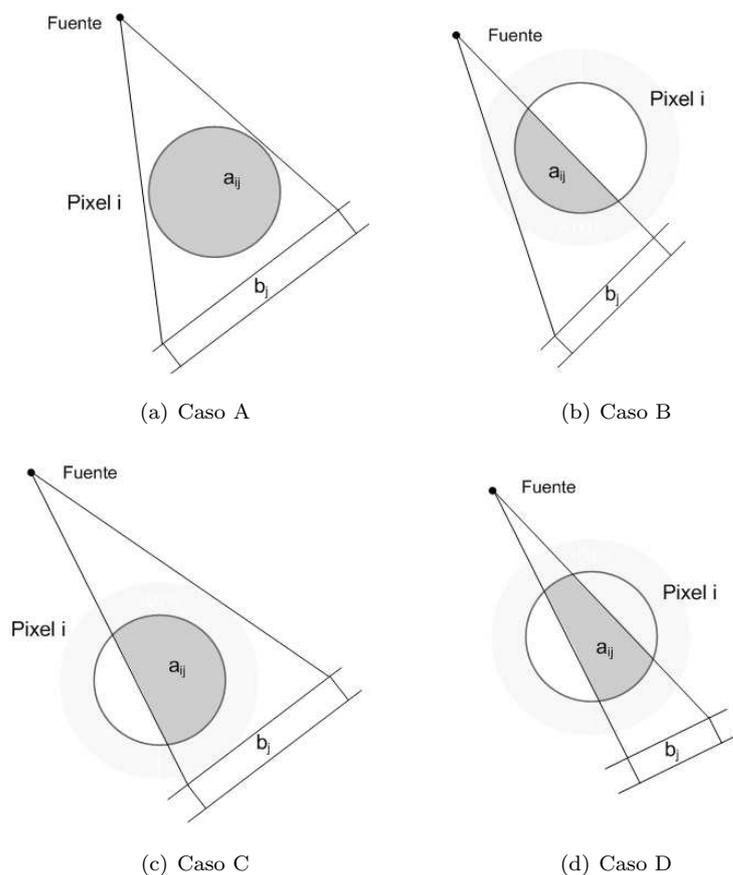


Figura 5.5: Casos posibles en función de la posición del centro del píxel, para la intersección entre el rayo y el píxel circular suponiendo que un píxel no puede ser intersectado por más de 3 rayos simultáneamente.

Caso D. El área de intersección es el resultado de restar al píxel circular el área de la intersección entre el píxel y dos rayos por cada extremo, que a su vez tienen un área de tipo B, o de tipo B y C.

El algoritmo se enfoca necesariamente con una estructura tipo *píxel-driven* utilizando las siguientes pautas para el cálculo de pesos de cada píxel:

1. Dado un píxel circular, se determina cuál es el rayo en el que queda confinado el centro del píxel.

2. Sabiendo el píxel y el rayo que contiene su centro, se calcula si la totalidad del píxel está confinado dentro del rayo. En ese caso, acaba el cálculo de pesos. En caso contrario se siguen los restantes pasos:
 - a) Se hace un barrido recorriendo los rayos contiguos inferiores al rayo que contiene el centro del píxel en sentido decreciente, hasta que el píxel acabe. En cada cambio de rayo, se asigna el peso del píxel para ese rayo.
 - b) Se hace un barrido recorriendo los rayos contiguos superiores al rayo que contiene el centro del píxel en sentido creciente, hasta que el píxel acabe. En cada cambio de rayo, se asigna el peso del píxel para ese rayo.

Se ha calculado la matriz para varias configuraciones de detectores a partir de la geometría del TAC del Clínico para ver la distribución de casos que se muestra en la gráfica 5.6 en función del número de detectores S .

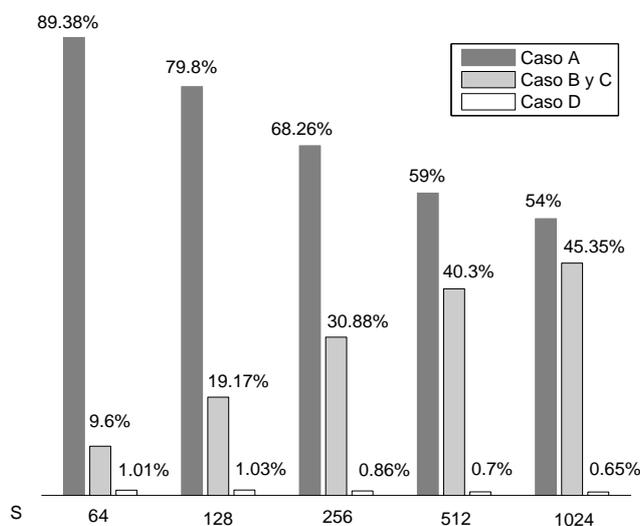


Figura 5.6: Porcentajes de distribución de casos en el cálculo de pesos de píxeles circulares de la matriz del sistema.

La distribución del número de casos que se ha observado se muestra en la figura 5.6. Se puede apreciar que el mayor porcentaje de casos es de tipo A, y el restante de tipo B y C en su mayoría, dándose un mínimo número de casos de tipo D en

los que existe una intersección entre un píxel y tres rayos. Estos datos permiten hacer un cálculo de la dispersión de la matriz del sistema ya que, en un porcentaje superior al 98 % para todas las configuraciones de detectores calculadas, el número de entradas de la matriz distintas de cero por píxel es de 1 ó 2. Esta tendencia se mantiene para un número distinto de detectores y de rotaciones, tal y como se muestra en la figura 5.6. El motivo de esta distribución del número de casos en el cálculo de pesos es que el tamaño de los píxeles circulares para el *grid* polar de relación de aspecto unitario es muy pequeño en las zonas centrales, en relación a la anchura del rayo. En definitiva, esto implica que cuanto más pequeño es el tamaño de píxel, menor es la probabilidad de que se den casos en los que más de dos rayos intervengan en el cálculo del peso de un sólo píxel. En consecuencia, el cálculo de la matriz se acelera enormemente ya que más de la mitad de los casos producidos corresponden con el caso A, que implica un cálculo inmediato del píxel con la intervención de un único rayo. Por este motivo, el coste que supone el cálculo de la matriz, es inferior al tiempo necesario para su almacenamiento. Teniendo en cuenta este hecho, una de las principales ventajas aportadas por esta forma de cálculo de la matriz del sistema es que el cálculo de la matriz en tiempo real pasa a ser más rentable en términos de coste temporal que el acceso a los datos almacenados de la matriz precalculada. Es decir, la opción más ventajosa es el cálculo de cada elemento en el algoritmo de reconstrucción cada vez, si es necesario y cuando es necesario, frente al almacenamiento de la matriz del sistema.

5.4.4. Matriz basada en *grid* polar y píxel *blob*

La matriz del sistema calculada mediante píxeles *blobs*, tanto en el caso del *grid* polar de relación de aspecto unitario como en el caso del *grid* polar de radio constante, ha sido planteada siguiendo un esquema *píxel-driven* con un cálculo de pesos basado en integrales de línea.

La simetría de los *blobs* hace posible que la integral de línea del *blob* mostrada en (5.4) dependa únicamente de la distancia de la línea al centro del *blob*,

$$b^{(m,\alpha)} = \begin{cases} \frac{a}{I_m(\alpha)} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \sqrt{(1 - (r/a)^2)^{m+\frac{1}{2}}} I_{m+\frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{(1 - (r/a)^2)}), & 0 \leq r \leq a \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (5.4)$$

donde a es el radio del *blob*, I_m es una función de Bessel modificada de orden m y α es el parámetro que define la forma del *blob*.

Los pasos que se han seguido para la implementación de la matriz del sistema han sido los siguientes:

1. Dado un píxel circular, se determina cuál es el rayo en el que queda confinado el centro del píxel. A partir del rayo central, se inicia un barrido línea a línea para calcular el peso debido a cada línea que contribuye al rayo.
2. Se hace un barrido recorriendo los rayos contiguos inferiores al rayo que contiene el centro del píxel. En cada rayo, se hace a su vez un barrido línea a línea hasta que la distancia del rayo al centro supere el radio del píxel y finalmente se asigna el peso.
3. Se realiza un barrido partiendo del rayo que contiene el centro hacia los rayos contiguos superiores al rayo. En cada rayo, se hace a su vez un barrido línea a línea hasta que la distancia del rayo al centro supere el radio del píxel y finalmente se asigna el peso.

La implementación de este algoritmo es similar a la de los píxeles circulares, pero para un modelo de cálculo de los pesos empleando rayos discretos. Aunque la simetría circular permite reducir a un único caso el cálculo de pesos de la matriz, el empleo de una aproximación a partir de la suma del número de líneas frente a un modelo basado en áreas, da lugar a una implementación computacionalmente más costosa.

5.4.5. Comparativa de las matrices propuestas

Las matrices propuestas han sido implementadas para la geometría del Simulador-TAC, tomando para todos los casos, excepto para la matriz basada en píxeles circulares que se calcula utilizando 3×10^4 líneas por rayo.

A partir de la tabla 5.2 es posible hacer una comparación cualitativa entre las matrices obtenidas, empleando para ello diferentes indicadores que nos permiten conocer las diferencias entre estas matrices, para modelar un mismo sistema TAC. Los parámetros se han obtenido a partir de la matriz calculada haciendo uso de las simetrías que se deben a las rotaciones del escáner. No se ha utilizado la simetría de reflexión en la matriz del sistema para mostrar estos parámetros.

Es necesario destacar que el uso de un *grid* de píxeles diferente conlleva un número de píxeles distinto para un mismo tamaño de imagen. No obstante, el

<i>grid</i>	Cartesiano	Polar				
		<i>Rel. Aspecto 1</i>			<i>Radio Constante</i>	
píxel	Cuadrado	Circular	<i>Blob</i>	Polar	<i>Blob</i>	Polar
Nº píxeles	1048576	1135201	1135201	1135201	931601	931601
Elementos $\neq 0$	519744442	1596106	2076594	1722068	2780541	1484802
% dispersión [†]	0.97	0.27	0.35	0.30	0.58	0.31
Tamaño (MB)	8124.21	32.35	40.44	34.90	51.44	40
Factor de simetría	4	800	400	800	400	800
Tpo generación [‡]	109h 55' 25"	4"	27h 13' 20"	9h 36' 15"	26h 40' 45"	5h 46' 40"

[†] La dispersión se calcula como el porcentaje de elementos no cero.

[‡] El tiempo de generación ha sido obtenido usando un Pentium 4 a 3.2GHz

Tabla 5.2: Comparación cuantitativa de las matrices del sistema creadas con *grid cartesiano* y *polar*

número de elementos que guarda la matriz es el número de elementos no cero por lo que, éste será el indicador efectivo del número de operaciones que requiere cualquier algoritmo que emplee la matriz del sistema.

Se aprecia en la tabla 5.2, que para un mismo número de píxeles, el empleo de un píxel *blob* implica una reducción de la dispersión de la matriz del sistema. De este modo, el empleo de una matriz basada en píxeles blobs supone un aumento del coste computacional asociado. El uso de *blobs*, también conlleva la reducción de las simetrías a la mitad, ya que el solapamiento existente entre los *blobs* impide que sea posible emplear la simetría que permite obtener la mitad del haz como reflejo de la otra mitad en cada rotación. Como consecuencia en este caso, el número de simetrías es de 400 frente a las 800 de la matriz basada en un *grid* con píxel polar y circular.

El empleo de píxeles circulares, supone una reducción en el número de elementos no cero y en consecuencia un menor tamaño de la matriz. Como se mostrará a continuación, esta reducción hace posible obtener un menor tiempo de reconstrucción que el medido para las restantes configuraciones basadas en un *grid* de relación de aspecto unitario.

Partiendo de las mismas dimensiones para el caso de los píxeles polares, el empleo de un *grid* de radio constante permite una reducción del número de píxeles total necesario superior a 200×10^3 píxeles respecto al caso de píxeles polares basada en *grid* de relación de aspecto unitario. Aunque en el caso del *grid* de

radio constante, el coeficiente de dispersión es mayor que en el *grid* de relación de aspecto unitario equivalente, este coeficiente se aplica sobre un menor número de píxeles. Por tanto, se puede afirmar que el uso de un *grid* de radio constante resulta el caso más eficiente desde un punto de vista computacional respecto al caso del *grid* de relación de aspecto unitario. De hecho, el número de píxeles total empleado tiene más de 100×10^3 píxeles menos que en el caso cartesiano. No obstante, hay que tener en cuenta que en el caso cartesiano, un porcentaje de píxeles se sitúa fuera del FOV mientras que el caso polar, los píxeles se adaptan perfectamente a un FOV circular.

En la medida de tiempos de generación de la matriz del sistema mostrada en la tabla 5.2, destaca principalmente la diferencia que existe entre la matriz del sistema creada mediante píxeles circulares y los restantes casos. Este hecho es debido a que el cálculo de pesos se realiza mediante una aproximación a partir de líneas que implica un mayor tiempo de cálculo frente a un modelo basado en integrales de área. La rapidez con la que se calcula la matriz de píxeles circulares, hace posible su cálculo en tiempo real ya que, el tiempo de cálculo es despreciable frente al tiempo de las operaciones de lectura y escritura de la propia matriz.

Destacamos que para todas las matrices calculadas mediante un *grid* polar, los tiempos necesarios para el cálculo de la matriz se ven reducidos en varios órdenes de magnitud respecto al tiempo necesario para el cálculo de una matriz cartesiana equivalente.

5.5. Análisis de las imágenes reconstruidas

La calidad de la reconstrucción proporcionada por las matrices implementadas, ha sido comparada reconstruyendo una proyección sintética de un *phantom* de Shepp-Logan y un *phantom* dedicado al estudio del contraste y la precisión espacial de las imágenes reconstruidas.

El algoritmo de reconstrucción empleado para este fin, ha sido el MLEM cuyas principales características se han introducido de forma sucinta en el capítulo 3.

El MLEM ha sido programado en C++ y adaptado a cada matriz del sistema para emplear el máximo número de simetrías posible en cada caso y de esta manera obtener una implementación eficiente para el cálculo del tiempo de reconstrucción para cada matriz.

5.5.1. Indicadores de calidad respecto a modelos sintéticos

El *phantom* del Shepp-Logan y un *phantom* compuesto de círculos de distinto tamaño y densidad han sido simulados tomando para ello la configuración geométricas del Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia.

El uso del *phantom* de Shepp-Logan como referencia para medir la calidad de las reconstrucciones obtenidas está ampliamente extendido [11, 28, 57]. Además, se ha simulado un *phantom* especialmente para el estudio del contraste y la homogeneidad de las regiones de interés. Este *phantom* consiste en la simulación de un círculo que constituye un fondo de densidad media en el que se encuentran ubicados varios círculos que simulan zonas de densidad alta y densidad baja en las que se producen lesiones que centran el estudio. Los detalles sobre los métodos de proyección y en particular sobre los *phantoms* empleados, se describen en el capítulo 3 y en el anexo A, respectivamente.

A partir de los *phantoms* se han calculado diversos indicadores de calidad que permiten comparar la aproximación de las imágenes reconstruidas. La comparación se ha hecho directamente sobre las imágenes reconstruidas transformadas a coordenadas cartesianas siguiendo el proceso para la visualización que ha sido detallado en el capítulo 4, sin emplear ningún tipo de filtro de suavizado posterior.

Los indicadores seleccionados han sido los siguientes,

Root Mean Square Error (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^r - x_i^o)^2} \quad (5.5)$$

donde N es el número de píxeles, x^o es la imagen del *phantom* original y x^r es la imagen reconstruida. El RMSE es un indicador que cuantifica la similitud existente entre la imagen reconstruida y el modelo original [46].

Signal to Noise Ratio (SNR)

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\sum_{i=1}^N \|x_i^o\|^2}{\sum_{i=1}^N \|x_i^r - x_i^o\|^2} \right) \quad (5.6)$$

donde la componente de ruido se aproxima como el cuadrado de la diferencia entre la imagen original y la imagen reconstruida. Esta es una aproximación conservadora ya que siempre existirá una diferencia entre la imagen original

y la reconstruida por lo que, excepto en un caso ideal, habrá presencia de ruido.

Contrast Recovery Coefficient (CRC)

$$CRC = \frac{(M_{les}/M_{fon})_{rec} - 1}{(M_{les}/M_{fon})_{phan} - 1} \quad (5.7)$$

donde M_{les} y M_{fon} representa el valor medio en una zona concreta de la imagen bajo estudio que corresponderá con una lesión y el valor medio del fondo en el que se encuentra dicha lesión, respectivamente. Este indicador es de gran importancia para la medida de la calidad de las imágenes de TAC ya que se emplea para estudiar el nivel de contraste de la imagen en regiones concretas de interés [78, 79]. Al igualarse la relación entre la zona de interés y el fondo entre el objeto reconstruido y el objeto modelo, el indicador de contraste tiende a 1 con las iteraciones.

Coefficiente de Variación (CV)

$$CV = \frac{1}{M_{les}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{les}} (\tilde{x}_i - M_{les})^2}{N_{les} - 1}} \quad (5.8)$$

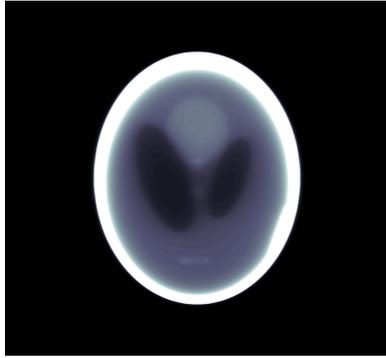
donde M_{les} es el valor medio en una zona concreta bajo estudio, \tilde{x}_i son el valor de los píxeles en la zona de estudio y N_{les} es el número de píxeles en esa zona. De esta forma, se muestra la variación existente en una zona del espacio que en condiciones ideales es homogénea [79].

5.5.2. Reconstrucción de medidas sintéticas

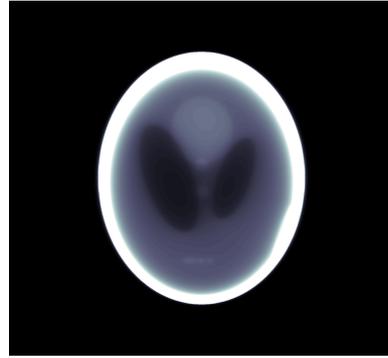
Las imágenes reconstruidas para la proyección del *phantom* del Shepp-Logan, mediante las matrices 2D implementadas, se muestran en la figura 5.7 para la iteración número 30 del MLEM.

Las imágenes reconstruidas mediante matrices de píxeles polares, tanto para el *grid* polar de radio constante como el *grid* polar de relación de aspecto unitario presentan un aspecto muy similar sin presencia de artefactos polares.

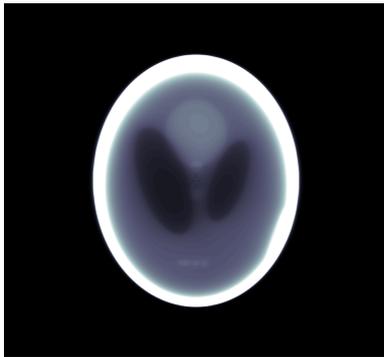
En el caso de la reconstrucción basada en el *grid* polar de radio constante, no se observa ningún artefacto asociado a la variación de la relación de aspecto de los píxeles en el FOV. En concreto, no se aprecian diferencias entre la zona central en



(a) Cartesiano



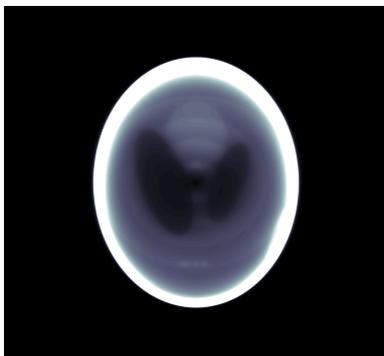
(b) Circular (rel. asp 1)



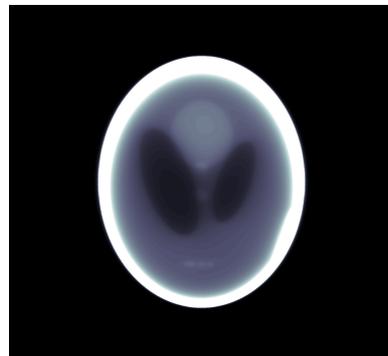
(c) *Blob* (rel. asp 1)



(d) Polar (rel. asp 1)



(e) *Blob* (radio constante)



(f) Polar (radio constante)

Figura 5.7: Imagen reconstruida del *phantom* de Shepp-Logan (iteración número 30).

la que la relación de aspecto de los píxeles centrales está más alejada de la unidad y la zona exterior de la imagen en la que la relación de aspecto de los píxeles es prácticamente 1. Tampoco se aprecia un deterioro de calidad respecto de la imagen cartesiana, derivado del empleo de un menor número de píxeles polares, para la reconstrucción del mismo tamaño de imagen.

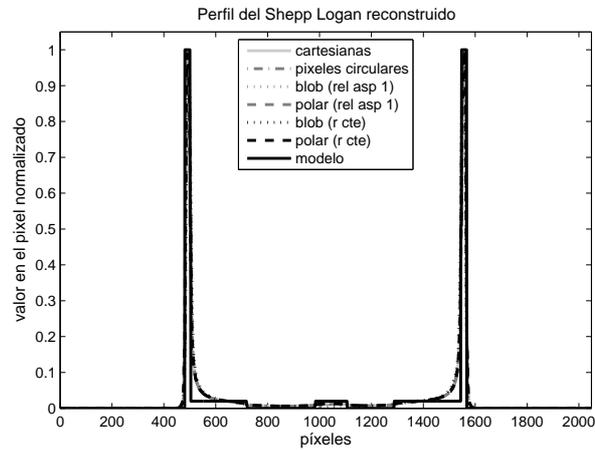
La imagen reconstruida mediante una matriz de píxeles *blobs* y *grid* polar de radio constante, muestra un artefacto circular que se puede deber a un suavizado no homogéneo de los píxeles *blobs* que deforman la imagen ya que las transiciones en ese artefacto coinciden con los cambios en el grado de solapamiento que se producen en el *grid*. El suavizado no uniforme de la imagen impide distinguir los contornos con precisión y mezcla las zonas de distinta densidad.

La imagen reconstruida mediante píxeles *blobs* y *grid* polar de relación de aspecto unitario, no presenta este artefacto porque se produce un suavizado mucho más homogéneo en el FOV. Los cambios de solapamiento entre píxeles que se encuentran a distinta distancia radial, se producen de una forma paulatina por lo que, aparentemente no dan lugar a un artefacto perceptible.

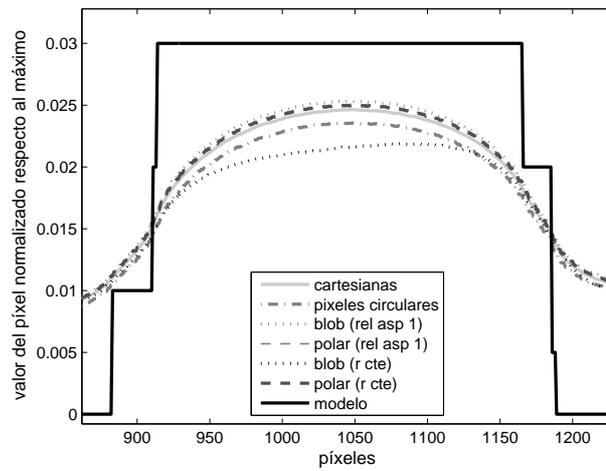
En el caso de los píxeles circulares, la presencia de huecos en el pixelado empleado no da lugar a ningún artefacto apreciable.

En la figura 5.8 se muestra la línea horizontal central 1024 de la imagen del modelo de *phantom* de Shepp-Logan superpuesta a esa misma línea procedente de las 6 imágenes reconstruidas que se han mostrado en la figura 5.7. Se puede apreciar que las transiciones respecto al modelo se producen de forma suave y que las zonas de densidad alta correspondientes a los bordes del *phantom*, alcanzan el valor esperado en la iteración 30 mientras que las zonas de densidad más baja, que se encuentran en el centro de la figura, requieren de más iteraciones.

En la imagen 5.8(b) se muestra una ampliación de la zona central del perfil del *phantom* de Shepp-Logan en la que se aprecia que el mayor parecido respecto al modelo en esta zona, se produce para la matriz de píxeles *blobs* de relación de aspecto unitario. Sin embargo, se observa que en el caso de las imágenes polares calculadas mediante píxeles circulares y mediante *blobs* de radio constante, se produce una atenuación mayor de los valores centrales. Esta atenuación, como se mostrará posteriormente resta calidad a la reconstrucción obtenida sobre todo en el caso de los píxeles *blobs*. Las dos imágenes reconstruidas mediante píxeles polares y la reconstruida mediante píxeles *blobs* en *grid* de relación de aspecto unitario, permiten una aproximación más parecida al modelo que la cartesiana, mientras que la imagen de píxeles circulares y de píxeles *blobs* de radio constante,



(a)



(b)

Figura 5.8: (a) Perfil horizontal (línea 1024) para la iteración número 30 de la reconstrucción del *phantom* de Shepp-Logan. (b) Zoom de la zona central del perfil visto en (a).

dan lugar a una aproximación con un parecido al modelo menor que la cartesiana.

Después de comparar la superposición entre los perfiles de las reconstrucciones obtenidas empleando las distintas matrices y el modelo del *phantom* de Shepp-

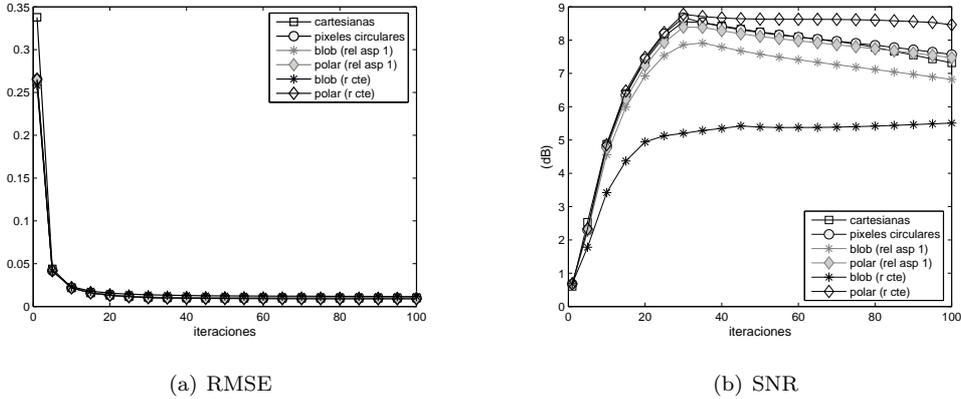


Figura 5.9: (a) Raíz del error cuadrático medio (RMSE) de las imágenes reconstruidas respecto al modelo original en función de las iteraciones para el *phantom* de Shepp-Logan. (b) Relación señal a ruido (SNR) de las imágenes reconstruidas respecto al modelo original en función de las iteraciones para el *phantom* de Shepp-Logan.

<i>grid</i>	cartesiana	polar				
		<i>Rel. Aspecto 1</i>			<i>Radio Constante</i>	
píxel	Cuadrado	Circular	<i>Blob</i>	Polar	<i>Blob</i>	Polar
RMSE	0.011	0.011	0.011	0.011	0.014	0.010

Tabla 5.3: Raíz del error cuadrático medio de las imágenes reconstruidas mediante las matrices con *grid cartesiano* y *polar* para la iteración 30 del *phantom* de Shepp Logan reconstruido mediante el algoritmo MLEM

Logan, se ha evaluado el parecido de las reconstrucciones respecto al modelo mediante el cálculo del RMSE y de la SNR en función de las iteraciones (ver figura 5.9).

El valor del RMSE de las reconstrucciones respecto al modelo es muy similar para todos los casos por lo que en la tabla 5.3 se muestran los valores del RMSE para la iteración número 30. Como se aprecia en la figura 5.9(a), el valor del RMSE está estabilizado para esta iteración por lo que se deduce que el algoritmo de reconstrucción ya ha alcanzado la convergencia.

En la figura 5.9 y en la tabla 5.3 se muestra que las imágenes reconstruidas empleando la matriz *blobs* de radio constante son las que tienen un mayor error

con el modelo y una menor relación señal a ruido en la reconstrucción. Por otro lado, la matriz basada en *grid* polar de radio constante permite obtener un RMSE ligeramente menor que el obtenido con las restantes matrices. En todos los casos excepto cuando las imágenes son reconstruidas mediante píxeles polares y *blobs* con *grid* polar de radio constante, la relación señal a ruido empeora de forma progresiva con las iteraciones, una vez alcanzada la convergencia a partir de la iteración número 30. Además, la SNR mayor se da en el caso de la matriz de píxeles polares mediante *grid* de radio constante. La imagen reconstruida mediante la matriz de píxeles circulares presenta una buena relación señal a ruido en promedio a pesar de la presencia de artefactos en la zona central del *grid*. La imagen reconstruida mediante una matriz del sistema basada en píxeles polares mediante *grid* de relación de aspecto unitario da lugar a un RMSE y a una SNR muy semejantes a los obtenidos empleando una matriz cartesiana.

La información más importante que aportan las imágenes de TAC es la información relativa al contraste y a la definición de los contornos de la imagen reconstruida. Para estudiar estas características se ha comparado el *phantom* que se presenta en la figura 5.10 por regiones de interés, para las distintas matrices.

En primer lugar, han sido medidos los valores de los radios de las distintas lesiones y el fondo en el que se producen. Este valor se ha calculado tomando la anchura a mitad de altura de la curva del perfil en el que se alcanza una mayor amplitud para el caso de las lesiones que vienen numeradas en la figura 5.10, que quedan comprendidas en el intervalo de la 5 a la 8. De forma análoga, se ha calculado el valor de altura igual a la mitad del mínimo en las lesiones que van de la 1 a la 4 en las que la densidad es inferior al fondo.

El error en la medida del radio es de ± 1 píxel cartesiano lo que equivale a un error de ± 0.017 cm de la medida presentada en la tabla 5.4 debido a que está pixelada y la resolución mínima para la configuración de 512 detectores del escáner TAC, da lugar a que la menor diferencia significativa en la imagen sea igual a 0.034 cm.

El error cometido respecto a la medida real es muy similar para todos los casos y comparable al cálculo del diámetro obtenido a partir de la imagen con píxeles cartesianos, salvo para el caso correspondiente a imágenes de *blobs* con *grid* de radio constante. El mayor error respecto al valor exacto mostrado en la tabla 5.4 en el cálculo del radio es de 0.103 cm se produce para el radio de la lesión 1. Se observa que los radios correspondientes a lesiones de menor densidad tienen un mayor error ya que como hemos visto en la figura 5.8 es necesario un mayor número

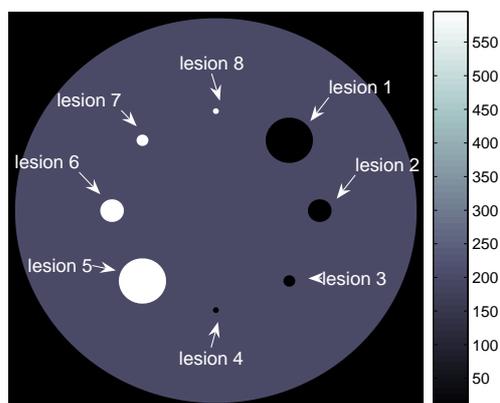


Figura 5.10: Numeración de las lesiones que se representan en el *phantom* de círculos de tres densidades.

Modelo	cartesiana	polar				
		Rel. Aspecto 1			Radio Constante	
	Cuadrado	Circular	Blob	Polar	Blob	Polar
$r_{les1} = 2$	2.103	2.103	2.103	2.103	2.094	2.103
$r_{les2} = 1$	0.987	0.978	0.987	0.978	0.961	0.987
$r_{les3} = 0,5$	0.463	0.472	0.463	0.472	0.463	0.463
$r_{les4} = 0,25$	0.215	0.215	0.215	0.215	0.197	0.215
$r_{les5} = 2$	1.931	1.923	1.923	1.923	1.888	1.931
$r_{les6} = 1$	0.909	0.909	0.909	0.927	0.875	0.918
$r_{les7} = 0,5$	0.438	0.455	0.438	0.455	0.429	0.446
$r_{les8} = 0,25$	0.223	0.215	0.215	0.215	0.223	0.215
$r_{fondo} = 17$	16.970	16.970	16.952	16.967	16.901	16.970

Tabla 5.4: Medida del radio en cm obtenida a partir de la anchura a mitad de altura de los máximos y mínimos de la imagen reconstruida mediante las matrices del sistema creadas con *grid cartesiano* y *polar* para la iteración 40 del *phantom* de círculos de tres densidades

de iteraciones para que las zonas de baja densidad alcancen la convergencia.

La figura 5.11 muestra el CRC y el CV para la lesión 1 y para la lesión 5 en función de las iteraciones para las reconstrucciones correspondientes a las 6

matrices comparadas.

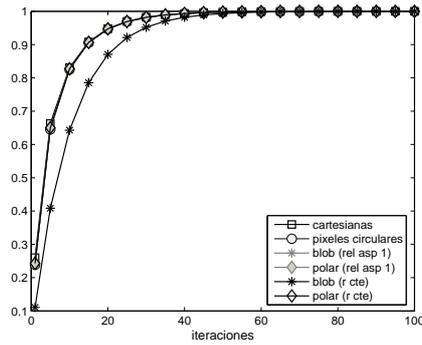
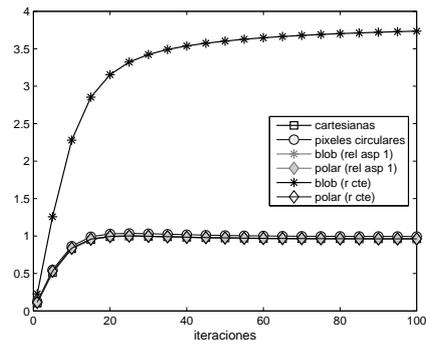
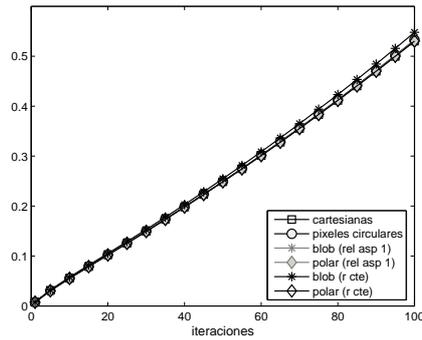
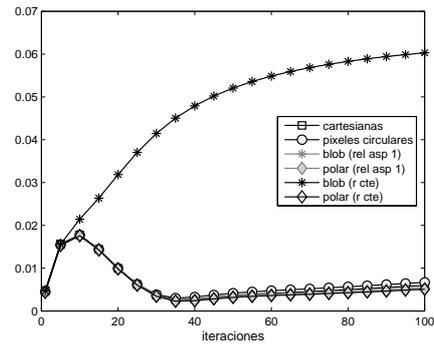
(a) CRC les_1 (b) CRC les_5 (c) CV les_1 (d) CV les_5

Figura 5.11: CRC y CV en función de las iteraciones para las imágenes reconstruidas del *phantom* de círculos de tres densidades tomando regiones de estudio situadas en las lesiones 1 y 5.

Las regiones de interés han sido calculadas tomando para ello una zona situada en el interior de la lesión 1 y 5 que permanezca alejada de los bordes tal y como describen varios autores [74, 78]. Las zonas de bordes entre áreas de distinta densidad, presentan una oscilación mayor entre iteraciones debida al *efecto Gibbs* asociado a que las altas frecuencias presentes en los bordes no han convergido todavía [80, 81]. La zona de fondo se ha tomado cogiendo una zona del centro del FOV del mismo tamaño que la zona de las lesiones 1 y 5.

<i>grid</i>	cartesiana	polar				
		<i>Rel. Aspecto 1</i>			<i>Radio Constante</i>	
píxel	Cuadrado	Circular	<i>Blob</i>	Polar	<i>Blob</i>	Polar
Tiempo por iteración	2' 58"	2' 30"	2' 36"	2' 30"	2' 48"	2' 20"
Tiempo visualización	0"	2"	4"	3"	3"	3"
CRC <i>les</i> ₁	0.9935	0.9935	0.9935	0.9935	0.9820	0.9935
CRC <i>les</i> ₅	0.9830	1.0178	0.9849	0.9848	3.5380	0.9848

‡ Tiempo obtenido usando un PC de 64bits con 3.2GHz y 12GB de RAM

Tabla 5.5: Comparación de la reconstrucción obtenida a partir de las matrices del sistema creadas con *grid cartesiano* y *polar* para la iteración 40 del *phantom* de círculos de tres densidades

En la lesión 1 la densidad es cero y para la lesión 5, el contraste guarda una relación 3:1 respecto del fondo por lo que, en este *phantom* para la lesión de alta densidad y de baja densidad la relación $(M_{les}/M_{fon})_{rec} - 1$ es igual a 2 y -1 respectivamente.

En la figura destaca que todas las reconstrucciones excepto la correspondiente a los *blobs* dispuestos en un *grid* de radio constante, tienen un CRC muy similar que rápidamente tiende a 1. En la tabla 5.5 se pueden apreciar los valores de CRC correspondientes a la iteración número 40 para todas las reconstrucciones calculadas. Se observa en estos valores, que para la iteración 40 el contraste se equipara con la imagen modelo en todos los casos salvo en las imágenes obtenidas a partir de la matriz de píxeles *blobs* con un *grid* de radio constante.

El coeficiente de variación que mide el grado de homogeneidad de la región de interés respecto del modelo, muestra que para la lesión 1 que corresponde con una zona de baja densidad, existe una mayor variación debido a que la convergencia es mucho más lenta. Por el contrario, para el caso de la lesión 5 que corresponde a una zona de alta densidad la variación se estabiliza a partir de la iteración 40 en todos los casos salvo para los *blobs* con un *grid* de radio constante.

Se aprecia en las figuras 5.11, que la imagen reconstruida a partir de la matriz de píxeles *blobs* con *grid* de radio constante tienen un CRC y CV alterados por el artefacto circular presente en la imagen que la invalida como reconstrucción.

En la tabla 5.5 es posible comparar los tiempos por iteración necesarios para el cálculo de la reconstrucción del *phantom* del cilindro de tres densidades con el MLEM. Para la reconstrucción se han empleado distintas implementaciones del

algoritmo adaptadas a todas las simetrías presentes en cada matriz. El resultado es que la matriz cartesiana requiere de un mayor tiempo por iteración mientras que las matrices calculadas mediante *grids* polares, tienen tiempos por iteración menores que llegan a ser un 21.3% menos por iteración en el caso de la matriz con píxeles polares en *grid* de radio constante. Las matrices obtenidas mediante píxeles *blobs* dan lugar a un mayor tiempo por iteración porque llevan asociada una matriz mucho menos dispersa que la matriz resultante en el caso de los píxeles circulares o polares a causa del solapamiento entre píxeles.

Si se asume que con 40 iteraciones se obtiene una reconstrucción adecuada, es posible conseguir una reducción de 25 minutos y 33 segundos en el tiempo de iteración si se emplea la configuración de píxeles polares con *grid* de radio constante frente a la matriz cartesiana. El tiempo necesario para la visualización es de unos pocos segundos por lo que el coste añadido de ese proceso es despreciable frente a la mejora de tiempos conseguida para el número de iteraciones total.

En el caso de la imagen polar calculada con un *grid* de radio constante, se puede considerar el formato polar como una forma de compresión de imágenes, ya que esta imagen ocupa un 11% menos representada mediante píxeles polares y sólo son necesarios 3 segundos para obtener la transformación a coordenadas cartesianas.

5.5.3. Reconstrucción de medidas reales

Se ha comparado la imagen reconstruida mediante todas las configuraciones de matriz presentadas, utilizando una medida real que corresponde a la sección transversal del corte de una cabeza humana por encima de la región mandibular.

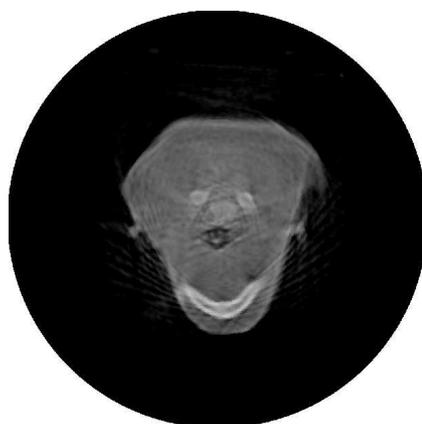
Esta medida ha sido reconstruida empleando el algoritmo iterativo MLEM para las distintas matrices y las reconstrucciones obtenidas puede ser contrastadas con la reconstrucción empleada en el servicio de Radiología del Hospital Clínico Universitario de Valencia. Esta imagen se muestra en la figura 5.13 y corresponde con una reconstrucción calculada mediante (FBP).

Las imágenes reconstruidas con las distintas matrices se muestran en la figura 5.12 y corresponden a la iteración número 10 del algoritmo MLEM.

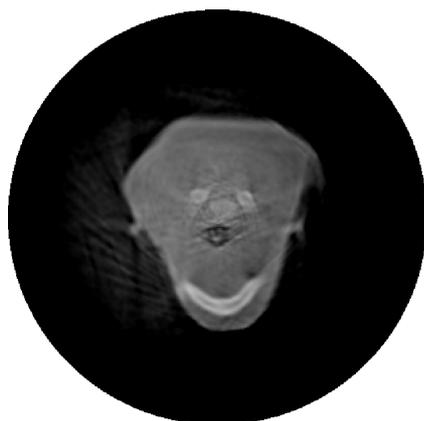
Las imágenes calculadas en *grid* polar muestra un resultado similar a la matriz cartesiana con excepción del caso de la imagen mediante píxeles *blobs* en *grid* polar de radio constante. Se puede observar que los contornos de las imágenes en coordenadas polares están más definidos y que hay menos presencia de ruido de fondo en las imágenes reconstruidas mediante métodos algebraicos que en



(a) Cartesiano



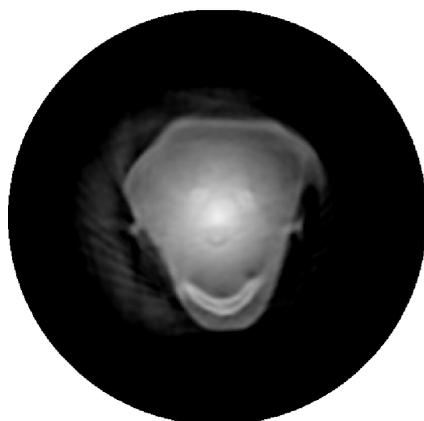
(b) Circular (rel. asp 1)



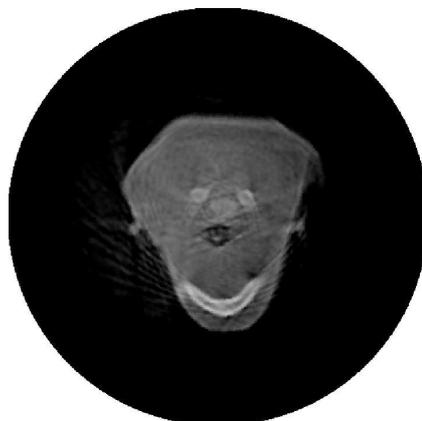
(c) Blob (rel. asp 1)



(d) Polar (rel. asp 1)



(e) Blob (radio constante)



(f) Polar (radio constante)

Figura 5.12: Iteración número 10 de la reconstrucción de una medida real procedente del Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia.



Figura 5.13: Imagen reconstruida mediante el método de *Filtered-Backprojection* con el software que se emplea asiduamente en el Hospital Clínico Universitario de Valencia.

la imagen 5.13 reconstruida mediante FBP. Además, las imágenes reconstruidas mediante el MLEM muestran un mayor contraste que la imagen reconstruida mediante FBP.

5.6. Discusión

La reducción en el número de elementos respecto al caso cartesiano, obtenida mediante el uso de *grids* polares y el menor tiempo necesario para la lectura de datos, da lugar a una disminución de los tiempos por iteración respecto al caso cartesiano de un 21.34%. No obstante, a pesar de obtener un menor tiempo por iteración la diferencia de tiempo conseguida no es proporcional a la reducción de tamaño que se muestra en la tabla 5.2. Existen dos razones para esto. En primer lugar, el coste computacional de cada iteración depende del número de elementos no cero total que intervienen en el cálculo por lo que se obtiene considerando los elementos de todas las rotaciones, ya que todos ellos intervendrán en el cálculo de la reconstrucción. A pesar de que el volumen de datos que es necesario leer es un 99.5% menor en el caso mejor de la matriz polar frente a la matriz cartesiana, la disminución del número de elementos no cero total es de un 71.43% menos empleando píxeles polares frente a cartesianos. En segundo lugar, el coste computacional depende de la implementación del algoritmo y en el caso de las

matrices polares el algoritmo de reconstrucción requiere de la introducción de operaciones adicionales para calcular los elementos simétricos. Una alternativa a este procedimiento sería el cálculo de tablas a priori para obtener la relación entre cada elemento de la matriz con el trozo de matriz calculada pero esta alternativa ha sido descartada porque las tablas necesarias tienen un tamaño comparable al tamaño de la matriz empleada.

Una vez que se ha comprobado que la calidad proporcionada por el esquema de píxeles polar es satisfactoria, es necesario estudiar el caso 3D para poder analizar si en ese caso, el empleo de una matriz calculada con un *grid* polar respecto a una con un *grid* cartesiano, hace posible una reducción de tiempo sustancial.

La imagen reconstruida mediante la matriz de *blobs* dispuestos en un *grid* de radio constante en la que se observan artefactos de forma localizada para la iteración número 30 de los *phantoms* estudiados, da lugar a un SNR un 53.79% menor frente al caso cartesiano, un CRC frente al modelo de 3.538 frente a 0.983 para el caso cartesiano y un CV que llega a ser 11.33 veces superior el caso cartesiano. Sin embargo, el RMSE apenas refleja la presencia de artefactos en la imagen. Este resultado es debido a que el RMSE proporciona una medida del error de la imagen en promedio en la que los errores que se presentan de forma localizada quedan mitigados. Por este motivo, se concluye que el RMSE no resulta un indicador adecuado para la medida del error cometido.

Los requerimientos computacionales asociados en el caso de la matriz cartesiana, restringen la variedad de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones que es posible emplear en la práctica. Las ventajas conseguidas mediante el uso de la matriz basada en un *grid* polar, hace posible plantear algoritmos de reconstrucción alternativos [82], que permitan obtener un mayor rendimiento de la reducción de tamaño que el obtenido mediante el uso del método iterativo MLEM.

5.7. Conclusiones

La matriz de píxeles *blobs* de radio constante queda descartada porque la calidad obtenida es insuficiente ya que, en este caso se producen artefactos polares.

Las matrices basadas en una configuración de píxeles circulares y *blobs* dispuestos en un *grid* de relación de aspecto unitario proporcionan una reconstrucción de mayor calidad que hace posible conseguir un CRC más próximo a la imagen modelo y un menor CV que las imágenes creadas a partir de la

matriz cartesiana. Además, en el caso de la matriz polar de píxeles circulares, la aproximación mediante un modelo de proyección basado en integrales de área permite obtener una reducción drástica en el tiempo de cálculo de la matriz que hace posible su cálculo en tiempo real. Sin embargo, en este caso se produce una mayor atenuación de los valores obtenidos en la zona central del FOV en la que se aglutina un número más elevado de píxeles, dando lugar a un porcentaje más alto de huecos en el caso de los píxeles circulares. La disposición de los píxeles en un *grid* de relación de aspecto unitario supone un incremento en el número de píxeles necesarios, que no conlleva una mejora de la calidad de la imagen reconstruida.

Las matriz calculada a partir de píxeles circulares dispuestos en un *grid* polar permite obtener una disminución del tamaño de la matriz del sistema y una reducción en el tiempo por iteración respecto al caso cartesiano convencional.

La reconstrucción mediante matrices basadas en píxeles polares proporciona una calidad mayor que la obtenida mediante el esquema cartesiano que se manifiesta en un CRC más parecido a la imagen original, un menor RMSE, un mayor SNR y un menor CV que las obtenidas mediante un *grid* cartesiano convencional y un tiempo por iteración un 21.3% menor. Adicionalmente, la matriz polar siguiendo un *grid* de radio constante permite una reducción en el número de píxeles, en el número de elementos no cero y en consecuencia en el tiempo por iteración. Por este motivo, se puede concluir que la matriz polar que emplea píxeles polares dispuestos en un *grid* de radio constante, da lugar a imágenes con una calidad adecuada, sin presencia de artefactos polares, y con el menor número de píxeles y menor coste computacional de todas las matrices calculadas. Por todo ello, en el capítulo 6 se presentará la configuración de la matriz del sistema basada en píxeles polares dispuestos en un *grid* polar de radio constante para el cálculo de la matriz 3D.

Capítulo 6

Matriz 3D Basada en *Grid* Polar

En el capítulo 5 se han analizado 5 matrices basadas en esquemas de píxeles dispuestos según un *grid* polar. Para ello, se han utilizado 3 tipos de píxeles diferentes y dos variantes de *grid* polar. Las matrices resultantes han sido comparadas con una configuración cartesiana convencional equivalente. De este modo, el análisis realizado ha permitido contrastar respecto al caso cartesiano, la reducción del coste computacional en la generación de la matriz, la reducción del tiempo de reconstrucción de las imágenes, así como la calidad de la imagen reconstruida. La conclusión que se deriva del análisis es que la matriz basada en píxeles polares dispuestos en un *grid* polar de radio constante, supone la mayor reducción en el tamaño de la matriz sin producir pérdidas de información, manteniendo la calidad en la imagen reconstruida. De hecho, los resultados de calidad medida mediante indicadores objetivos han mostrado que las imágenes obtenidas haciendo uso de esta matriz polar, superan la calidad proporcionada por la matriz cartesiana convencional al reconstruir modelos sintéticos. En este capítulo se partirá de la matriz polar 2D que ha demostrado un mejor resultado, para extender su implementación al caso 3D. En concreto, se profundizará en el cálculo de pesos de la matriz 3D y en la transformación del visor de imágenes 3D en coordenadas polares. Al igual que en el caso 2D, los resultados obtenidos con la matriz polar en 3D serán contrastados cuantitativamente con los obtenidos al usar una matriz 3D cartesiana equivalente. Para realizar esta comparación se empleará como imagen un modelo sintético ideal del *phantom* de Shepp-Logan y

un *phantom* simulado formado por cilindros de tres densidades. Aunque el modelo de matriz polar propuesto es genérico, y por lo tanto adaptable a cualquier escáner TAC, las matrices 3D empleadas en las pruebas se crearán usando las dimensiones del escáner TAC para pequeños animales que ha sido descrito en el capítulo 3. Finalmente, se concluirá con la reconstrucción de medidas reales de alta resolución procedentes del escáner TAC para pequeños animales, empleando la matriz polar.

6.1. Introducción

Los métodos de reconstrucción algebraicos han tenido muy poca implantación debido al coste computacional excesivo que suponen [28]. A consecuencia de esto, el uso de métodos algebraicos se ha considerado una posibilidad inabordable en el caso 3D [24]. Por este motivo, se han planteado varias líneas de investigación que tienen como objetivo reducir el coste computacional asociado a los métodos algebraicos mediante una optimización de los mismos [30, 66, 83] o mediante una implementación más compleja [23, 26, 27].

Recientemente, se han aportado algunas soluciones que tienen como propósito el empleo de los métodos de reconstrucción algebraicos principalmente, a través del uso de estrategias de implementación que permiten hacer frente a dicho coste computacional. La estrategia más extendida ha sido la paralelización del algoritmo de reconstrucción mediante el empleo de clusters constituidos por computadores locales [23, 26] o remotos [24, 25]. La paralelización del proceso de reconstrucción, ha permitido obtener una solución al problema de la reconstrucción [24] mediante métodos algebraicos dentro de tiempos asumibles. No obstante, este tipo de aproximación conlleva inconvenientes. Es necesario un estudio de la arquitectura en paralelo empleada que permita obtener una reducción de los tiempos de reconstrucción que sea significativa [26]. El uso de varios ordenadores permite abordar el coste computacional asociado a la reconstrucción algebraica en un tiempo razonable, pero no consigue una optimización temporal suficiente que compense la complejidad asociada a la paralelización de los cálculos [24, 26].

El tamaño de la matriz del sistema da lugar a que el problema de la reconstrucción algebraica 3D sea difícilmente abordable. La solución planteada en este capítulo, con independencia del método de reconstrucción algebraico que se utilice permite una reducción en el tamaño de la matriz del sistema 3D que es necesario emplear en el algoritmo de reconstrucción algebraico. De este modo, como se muestra a continuación, es posible simplificar el problema de una forma

sencilla, permitiendo la reducción de los tiempos de reconstrucción.

6.2. Matriz 3D basada en *grid* cartesiano

La matriz cartesiana 3D se ha calculado de forma análoga a la matriz cartesiana 2D, mediante el método de Siddon. Para ello se ha empleado un píxel cúbico en el que la dimensión z del píxel coincide con el tamaño x e y . Esta opción es la más extendida [56] y hace posible prescindir de una transformación de la imagen previa a su visualización.

6.2.1. Cálculo de pesos

El cálculo de los pesos de la matriz del sistema 3D queda resumido en los pasos que se detallan a continuación:

1. Cálculo de todas las intersecciones entre la línea k que forma parte del rayo j con los planos z constante, y constante y x constante que delimitan los píxeles del *grid*.
2. Ordenación de los puntos de corte obtenidos en función de su ubicación en la línea k .
3. Combinación de los puntos de corte obtenidos para asignarlos a un píxel concreto i e identificación del píxel i intermedio entre dos parejas de puntos de intersección.
4. Cálculo de la longitud entre los puntos de corte entre los que está confinado el píxel i para considerarlo como contribución k al peso a_{ij} por intersección con el rayo j .

En el caso de la matriz cartesiana, es necesario repetir estos cálculos en $P/2$ rotaciones de las $2P$ rotaciones que se producen en 2π , para la mitad de los píxeles que se encuentran en el eje positivo de las z y para la primera mitad de los detectores.

6.3. Cálculo e implementación de la matriz 3D polar

El cálculo de pesos de la matriz del sistema 3D se realiza mediante una estrategia *ray-driven*, empleando el método de Siddon que supone un cálculo de los pesos a partir de integrales de línea. Este método fue descrito originalmente para una matriz cartesiana 2D [58]. En el capítulo 5 se ha mostrado la extensión del cálculo al *grid* polar y en este punto se describe una ampliación al caso polar 3D.

Tal y como se ha descrito en el capítulo 4, los píxeles polares en 3D mantienen el mismo *grid* que los píxeles 2D equivalentes con la extensión del píxel polar en z , un tamaño menor o igual, a la mitad del valor de la resolución espacial del escáner calculada en z . Para discretizar el volumen del FOV completo, se apilan estructuras idénticas en forma de discos de píxeles en z hasta alcanzar la altura máxima del FOV.

Para calcular la matriz del sistema 3D se ha empleado el FOV que fue descrito en el capítulo 2 para un TAC *Cone-Beam* prescindiendo de las terminaciones cónicas de los extremos del FOV que se muestran en la figura 2.3, que han sido truncadas por motivos de simplificación.

6.3.1. Cálculo de pesos

La matriz polar 3D se calcula empleando las simetrías del *grid* polar por lo que, sólo se realiza en una rotación del escáner, para los píxeles que se sitúan en la mitad positiva del eje z y para la primera mitad de los detectores.

El cálculo de pesos se ha planteado a partir del cálculo de pesos 2D en las dos fases siguientes:

1. A partir de las coordenadas de la línea x e y , se realiza el cálculo de los cortes por arcos y por límites angulares de los píxeles polares, tal y como se ha descrito en el caso 2D, sin calcular las longitudes de intersección, ya que estas deben ser corregidas teniendo en cuenta los cortes con z .
2. Empleando la coordenada z se realiza el cálculo de los cortes entre rodajas a distinta altura.

El empleo de estas dos fases, se plasma en el algoritmo de la siguiente manera:

1. Cálculo de los puntos de intersección de la recta k con las circunferencias, que quedan constituidas por los arcos que delimitan los píxeles en el FOV.

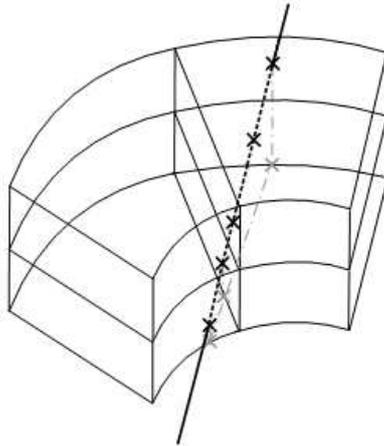


Figura 6.1: Diagrama del cálculo de pesos para píxeles polares 3D.

2. Cálculo de los puntos de intersección de la recta k con los planos en z , que delimitan la transición entre píxeles que se encuentran a distinta altura en z .
3. Determinación del primer y último punto de corte de la recta con el FOV y del píxel en el que se produce. En este punto se procede de la siguiente manera, partiendo de un punto de corte de entrada y un punto de corte de salida:
 - a) A partir del corte con dos arcos concéntricos consecutivos, se determina en función de la distancia angular que separa a los dos puntos, el número de puntos de corte con los límites angulares de los píxeles.
 - b) En el caso en el que existan cortes con el límite angular del píxel, se procede al cálculo de los puntos de corte con el límite angular del píxel
 - c) En el caso en el que existan cortes con el límite vertical del píxel, se realiza el cálculo de los puntos de corte con el límite vertical
 - d) Ordenación de los puntos de corte y cálculo de la longitud entre ellos.
 - e) Asignación de las longitudes calculadas a los peso de los píxeles en los que se producen.

La figura 6.1 muestra una representación gráfica del cálculo de pesos para una línea en la que se muestra que el peso debido a una recta, se calcula por tramos

a partir del punto de entrada y del punto de salida del píxel. En esta figura, los puntos de corte se encuentran representados con una \mathbf{X} en negro y los tramos que intersectan los píxeles y que forman parte del cálculo del peso se muestran con un trazo punteado. La proyección de la recta sobre el plano XY y los puntos de corte con arcos y paredes angulares en 2D, se muestran en color gris. En el ejemplo mostrado, tanto el punto de entrada de la recta como el de salida coinciden con el caso 2D ya que, se calculan a partir de la intersección de la recta con la pared angular que delimita el píxel.

El empleo de un pixelado polar simplifica enormemente la identificación de los puntos de intersección puesto que si el cálculo de la matriz del sistema, se realiza únicamente para una posición de rotación del escáner es posible asumir la tendencia de la recta y ordenar los puntos de corte mediante la comparación de las componentes $|x_1 - x_2|$ y $|y_1 - y_2|$ del vector director de la recta.

6.3.2. Visor de imágenes polares 3D

La transformación de la imagen formada por píxeles polares, en una imagen visible en formatos estándar ha sido resuelta en el capítulo 4 para el caso 2D. Este proceso consiste en la obtención del porcentaje de píxel polar que contribuye a un píxel cartesiano al superponer ambos *grids*. El *grid* cartesiano superpuesto debe ser cuatro veces menor que la resolución que se desea representar con la imagen polar, tal y como ha sido mostrado en el capítulo 4.

El *grid* polar empleado en el caso 3D es una extensión del caso 2D, por lo que las posiciones de los píxeles respecto al centro y sus tamaños son semejantes al caso 2D en todas las alturas del *grid* 3D. La transformación de imágenes polares 3D comienza con una transformación a imagen 2D que permite calcular el porcentaje de solapamiento entre el *grid* cartesiano y el *grid* polar 2D. La extensión de esta transformación en la dirección axial se realiza aplicando el porcentaje de solapamiento calculado a todos los píxeles cuyas coordenadas radiales y angulares coincidan con la del píxel calculado en el caso 2D. Para que esta transformación sea válida, el tamaño de los píxeles polares en z debe ser un múltiplo entero del tamaño de los píxeles cartesianos, y al mismo tiempo el tamaño de los píxeles cartesianos debe ser menor que un cuarto de la resolución máxima de la imagen.

De esta manera, el cálculo de los coeficientes de conversión entre píxeles polares y cartesianos únicamente se realiza una vez para todos los píxeles, dando lugar a una transformación muy rápida.

6.4. Comparación de las matrices cartesiana y polar

Las implementaciones descritas para el caso 3D de la matriz polar y cartesiana, han sido calculadas y empleadas para la reconstrucción de proyecciones simuladas 3D, tal y como se hizo en el caso 2D. De esta forma, es posible comprobar si en el caso 3D la matriz polar o cartesiana se comporta de distinta manera o si por el contrario es posible extender las conclusiones obtenidas en el capítulo 5.

6.4.1. Descripción de las matrices

En el capítulo 4, se mostró la evolución del número de píxeles, en función del número de detectores del escáner, para un *grid* polar de radio constante y un *grid* cartesiano en el caso 2D. Posteriormente, la implementación de la matriz 2D en ambos casos ha demostrado, que incluso si se almacena únicamente el número de elementos distinto de cero en la matriz del sistema, la matriz cartesiana da lugar a un tamaño que supera 200 veces el tamaño de la matriz polar mediante el empleo de todas las simetrías necesarias en ambos casos. La matriz cartesiana 3D da lugar a un tamaño de matriz que requiere de una simplificación de las dimensiones del TAC para hacer viable tanto el cálculo de la matriz como la reconstrucción con la misma haciendo uso de un computador comercial convencional. Por este motivo, el modelo que se ha empleado para la comparación de la matriz cartesiana con la matriz polar en el caso 3D, ha sido un modelo simplificado de las dimensiones del TAC de pequeños animales descrito en el capítulo 3, con 100 detectores y 100 rotaciones en 2π .

En el capítulo 5, se ha buscado un número de líneas que diera lugar a un valor de peso que permitiera comparar matrices distintas basadas en integrales de área y en integrales de línea. Este valor ha sido fijado en 3×10^4 líneas por rayo, para el caso más restrictivo, en el que se dan los píxeles más pequeños. Sin embargo, los resultados de la simulación de las distintas matrices, con distinto número de líneas, han mostrado que a partir de 10^3 líneas, el error proporcionado por la reconstrucción con las matrices calculadas, es inferior a 0.011 respecto a un modelo real. En este caso, el objetivo que se persigue no es el de seleccionar la matriz que permita una mejor calidad con un menor tiempo por iteración, sino el de estudiar la extensión de los resultados obtenidos en el caso 2D al caso 3D, partiendo de un modelo de matriz que ha aportado ventajas frente al caso cartesiano. Por este motivo, se han empleado 4×10^4 líneas por rayo 3D para la matriz que toma las

dimensiones del TAC de alta resolución de pequeños animales, tanto en el caso cartesiano como en el polar. No obstante, es necesario resaltar que el aumento en el número de líneas en el cálculo del peso de la matriz, daría lugar a un cálculo de pesos más preciso para la matriz cartesiana y la matriz polar.

6.4.2. Análisis cuantitativo

La tabla 6.1 muestra las principales características que se pueden desprender del análisis de la matriz cartesiana y de la matriz polar calculada.

Se puede observar que el número de píxeles de la matriz polar es inferior al número de píxeles de la matriz cartesiana para las mismas dimensiones de escáner TAC y la misma resolución de imagen. Además el número de elementos no cero es muy inferior en el caso de la matriz polar y sigue siendo muy inferior incluso si multiplicamos el número de elementos no cero de la matriz calculada por el número de simetrías totales empleadas. De este hecho se desprende, que el número de operaciones necesarias para el cálculo de la imagen reconstruida es menor empleando la matriz polar que empleando la matriz cartesiana. La proporción del número de elementos no cero frente al número de elementos total, también es superior en el caso de la matriz cartesiana, por lo que se puede afirmar que la matriz polar permite una mayor compresión de la información calculada para modelizar el mismo escáner que la matriz cartesiana.

Las ventajas observadas en la matriz polar 2D frente a la matriz calculada con un *grid* cartesiano tradicional en el capítulo 5, no sólo siguen observándose en la matriz 3D sino que las diferencias entre ellas se ven magnificadas al extenderse al caso 3D. Es posible afirmar que el uso de la matriz polar 3D hace posible una implementación que necesita de menos recursos que la matriz cartesiana ya que ésta llega a ocupar 16 GB que supone un tamaño 253 veces superior al de la matriz polar. La diferencia de tamaño entre la matriz polar y la matriz cartesiana, hace posible reducir el número de operaciones de acceso a memoria realizadas en el algoritmo de reconstrucción utilizado por lo que, el uso de la matriz polar contribuye a reducir el tiempo por iteración.

Finalmente, es importante destacar que el empleo de las 400 simetrías de la matriz polar frente a las 4 de la matriz cartesiana, hace posible una reducción del tamaño de la matriz y una simplificación en el cálculo de la misma, que queda reflejada en el tiempo de cálculo de la matriz cartesiana que es superior a 9 veces el tiempo de cálculo de la matriz polar.

Parámetros	Matriz cartesiana	Matriz Polar
Nº píxeles	13920000	12911148
Elementos $\neq 0$	$1.0813 \cdot 10^9$	4261173
% dispersión [†]	0.06	0.003
Tamaño (MB)	16911.24	66.74
Factor de simetría	8	400
Tpo generación [‡]	4 días 22h 1' 26"	13h 12' 26"

[†] La dispersión se calcula como el porcentaje de elementos no cero.

[‡] Se ha empleado un PC de 64bits con procesador a 3.2GHz y 12GB de RAM

Tabla 6.1: Comparación cuantitativa de las matrices del sistema creadas con *grid cartesiano* y *polar*

6.5. Reconstrucciones de señales sintéticas

Las señales sintéticas utilizadas para la reconstrucción han sido un *phantom* de Shepp Logan 3D y un *phantom* formado por tres cilindros de distinta densidad descentrados. El *phantom* formado por tres cilindros de distinta densidad descentrados, ha sido empleado para realizar un estudio del contraste en función de las iteraciones empleando el cálculo del CRC. Este indicador de calidad descrito en el capítulo 5, permite evaluar la similitud del contraste de las imágenes reconstruidas en zonas concretas bajo estudio, respecto al modelo sintético. Además, se ha medido el error cometido respecto al modelo tridimensional con el cálculo de la raíz del error cuadrático medio en función de las iteraciones que fue descrito en el capítulo 5 mediante la expresión 5.5.

Los detalles sobre los *phantoms* empleados han sido explicados en mayor profundidad en el apéndice A, en el que se enumeran detalles geométricos y de implementación de los mismos.

6.5.1. Resultados de la reconstrucción

La reconstrucción del *phantom* de Shepp Logan para las dimensiones simplificadas del TAC de pequeños animales, se muestra en la figura 6.2 empleando la matriz cartesiana y en la figura 6.3 empleando la matriz polar. La imagen mostrada en ambos casos corresponde a la iteración 30 en la que ya se ha alcanzado la convergencia del algoritmo y corresponde a cortes perpendiculares de la imagen tridimensional.

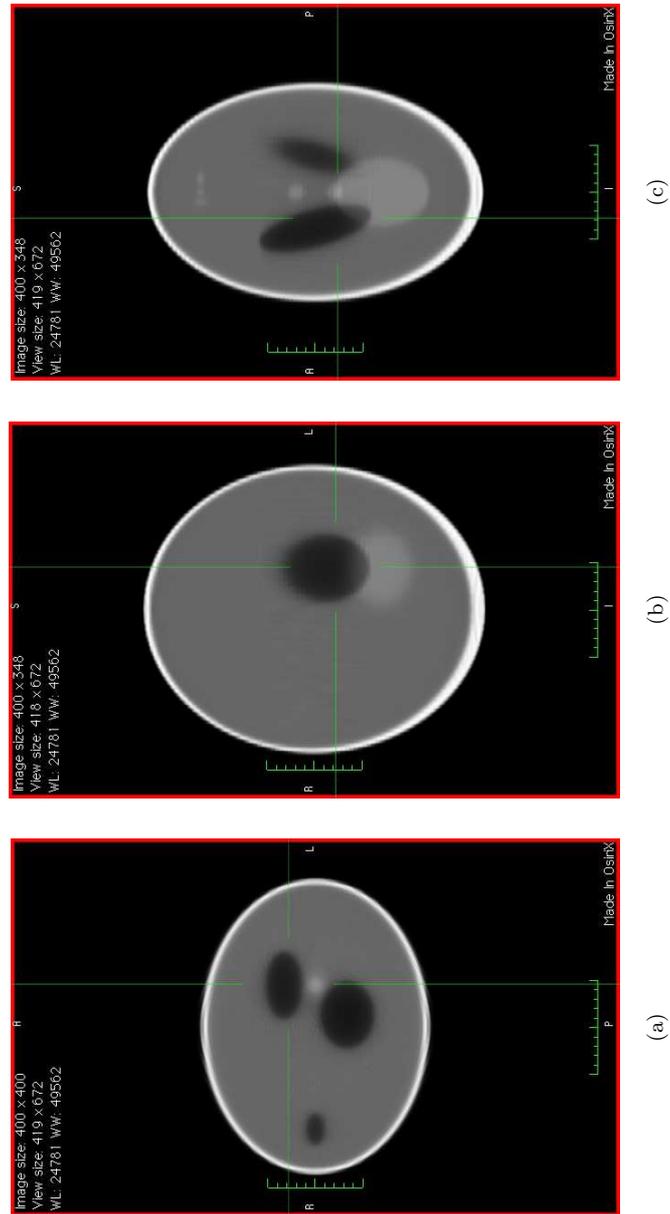


Figura 6.2: Reconstrucción del *phantom* de Shepp-Logan con la matriz cartesiana en la iteración número 30 (a) corte transversal, (b) corte coronal y (c) corte sagital.

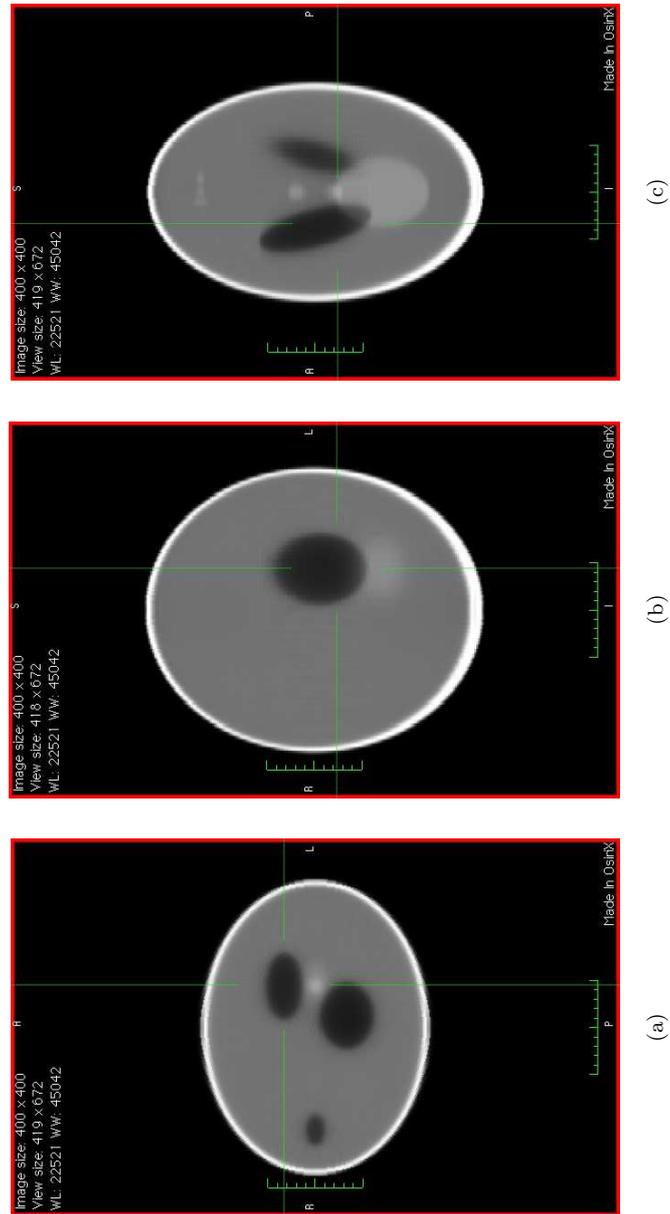


Figura 6.3: Reconstrucción del *phantom* de Shepp-Logan con la matriz polar en la iteración número 30 (a) corte transversal, (b) corte coronal y (c) corte sagital.

La imagen correspondientes a la iteración número 30 de la reconstrucción del *phantom* de Shepp Logan ha sido renderizada para mostrar la imagen como un contorno volumétrico empleando para ello el software para la visualización de imágenes médicas Osirix [84]. En las imágenes que se muestran para la matriz cartesiana en la figura 6.4(a) y para la matriz polar en la figura 6.4(b), se ha aplicado una textura semitransparente para mostrar el interior de dicho volumen sin necesidad de aplicar cortes al mismo. La renderización de la imagen requiere de la aplicación de una textura sobre los contornos en forma de trazos que se superponen a la superficie para transmitir la sensación de volumen.

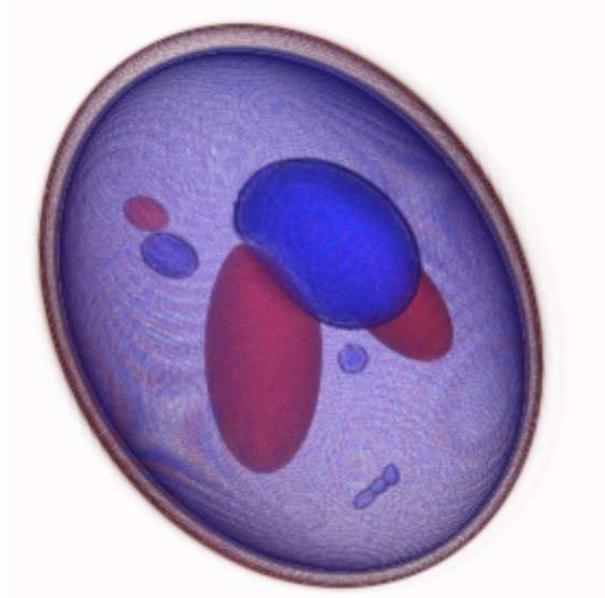
Tanto la figura 6.3 de los cortes de la imagen 3D como los volúmenes renderizados de la figura 6.4, muestran una gran similitud entre la imagen reconstruida con la matriz polar y convertida a coordenadas cartesianas y la imagen reconstruida con la matriz cartesiana.

La imagen 6.5 y la imagen 6.6 muestran cortes de la imagen volumétrica reconstruida a partir de la simulación del *phantom* formado por tres cilindros descentrados de distinta densidad, para la iteración 30 obtenida con la matriz cartesiana y con la matriz polar, respectivamente. La imagen reconstruida del *phantom* formado por tres cilindros descentrados de distinta densidad se muestra en la figura 6.7 para la iteración 30 calculada mediante la matriz cartesiana en la figura 6.7(a) y la matriz polar en la figura 6.7(b). En esta imagen se ha aplicado el mismo corte que ha sido mostrado en las imágenes 6.5 y 6.6.

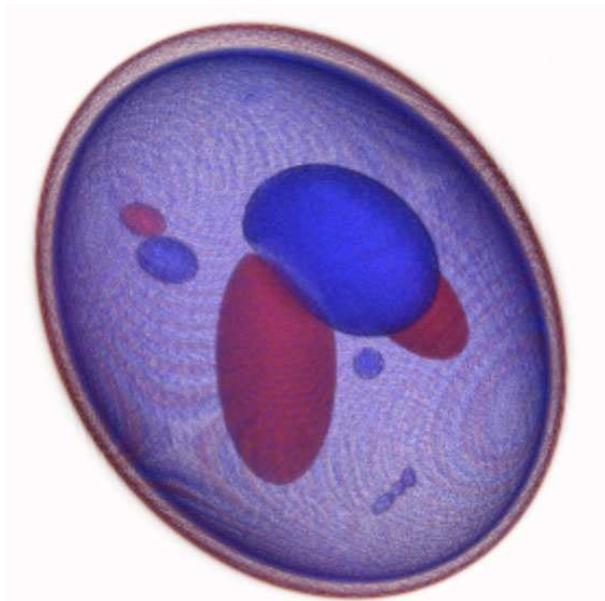
6.5.2. Comparación cuantitativa de la reconstrucción

El error cometido respecto al modelo ha sido calculado para comparar la reconstrucción del *phantom* formado por tres cilindros descentrados obtenida con ambas matrices de forma objetiva. Para este fin, se ha empleado la raíz del error cuadrático medio que se muestra en la figura 6.9 y el CRC que se muestra en la figura 6.10.

En el capítulo 5 se ha definido el indicador CRC que permite comparar el contraste de la imagen reconstruida en zonas de interés que se encuentran confinadas en una densidad media uniforme. Para calcular este parámetro se han tomado como regiones de interés para el cálculo local del contraste, las zonas que quedan confinadas dentro del trazo negro que queda marcado en la figura 6.8 frente a la textura de fondo en la que se encuentran. Se ha tomado la zona que corresponde al interior de la zona de baja densidad con un contraste 2:10 respecto al fondo y de alta densidad con un contraste 28:10. Ambas regiones se



(a) Reconstrucción con matriz cartesiana



(b) Reconstrucción con matriz polar

Figura 6.4: Reconstrucción de Shepp-Logan renderizada en un volumen semitransparente, (a) empleando la matriz cartesiana y (b) empleando la matriz polar.

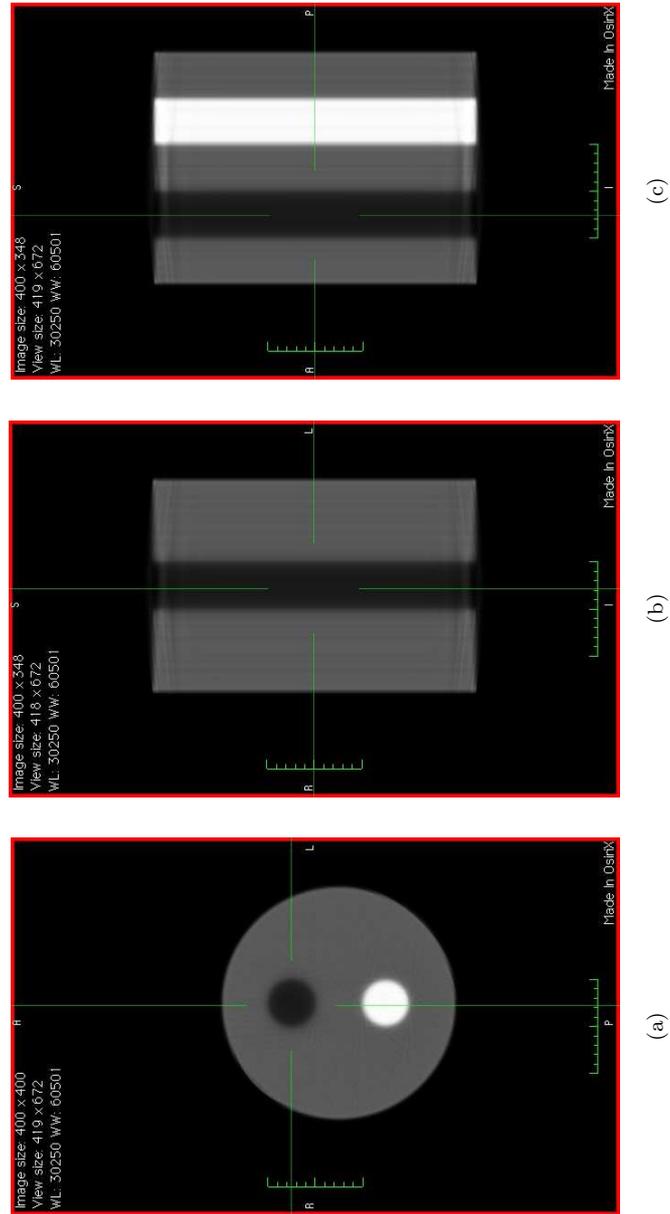


Figura 6.5: Reconstrucción del *phantom* de tres cilindros descentrados en la iteración número 30 con la matriz cartesiana.

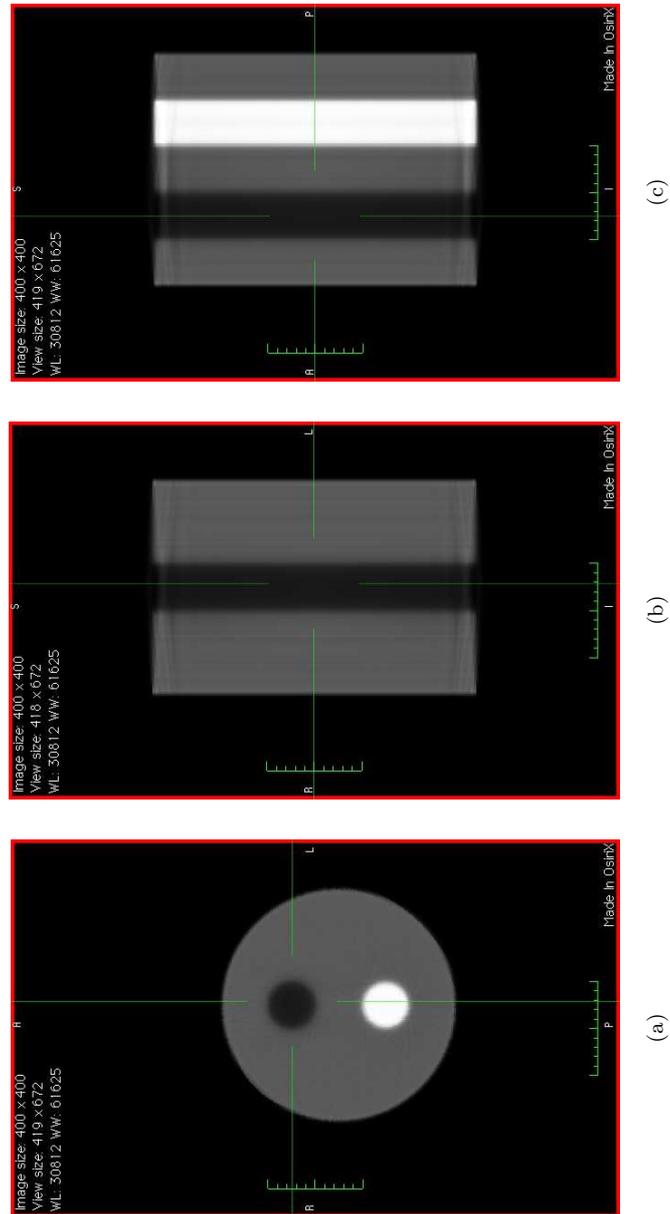


Figura 6.6: Reconstrucción del *phantom* de tres cilindros descentrados en la iteración número 30 con la matriz polar.

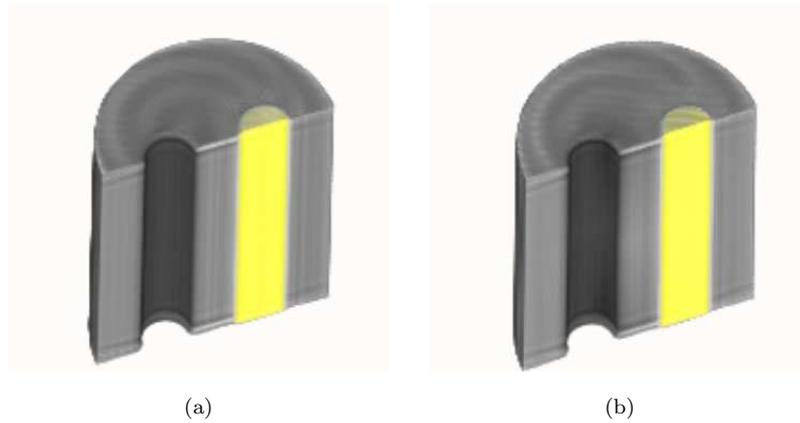


Figura 6.7: Imagen reconstruida del *phantom* de tres cilindros descentrados para la iteración número 30 en la que se ha aplicado un corte por el centro de los tres cilindros que coincide con el corte mostrado en las figuras 6.5 y 6.6:(a) empleando la matriz cartesiana y (b) empleando la matriz polar.

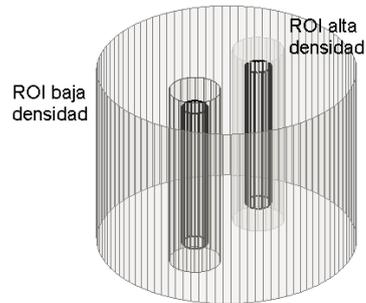


Figura 6.8: Modelo del *phantom* formado por tres cilindros descentrados que incluye mediante un trazo negro, el contorno de las regiones de interés (ROI) empleadas para medir el contraste respecto al fondo.

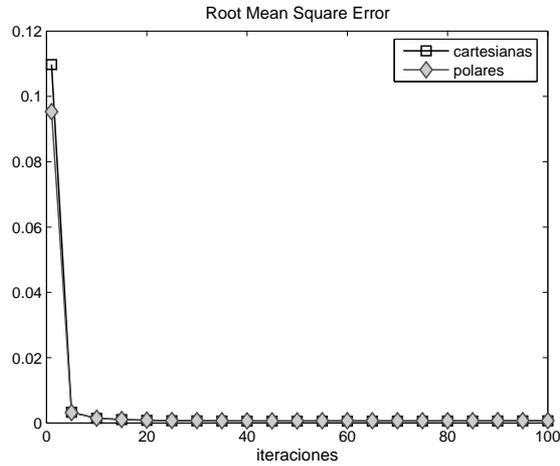


Figura 6.9: *Root Mean Square Error* del *phantom* de tres cilindros descentrados en función de las iteraciones con la matriz polar y con la matriz cartesiana.

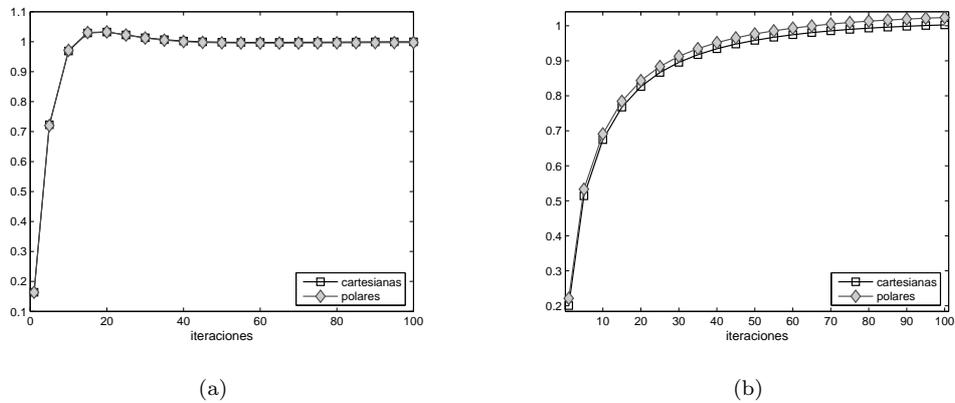


Figura 6.10: *Contrast Recovery Coefficient* del *phantom* de tres cilindros descentrados (a) en la región de alta densidad y (b) en la región de baja densidad, en función de las iteraciones con la matriz polar y con la matriz cartesiana.

han delimitado prescindiendo del área cercana a los bordes en los que se produce una mayor oscilación entre iteraciones del valor obtenido en los píxeles. Del mismo modo, la región de densidad media que constituye el fondo ha sido tomada evitando los bordes de las restantes regiones y del cilindro de radio mayor.

La gráfica 6.10 muestra que el contraste de las imágenes reconstruidas mediante el *grid* polar sigue una evolución paralela a la de las imágenes reconstruidas mediante el *grid* cartesiano. El RMSE mostrado en la figura 6.9 también es muy similar en ambos casos y se observa una convergencia en este valor a partir de la iteración 30. La convergencia en la zona de alta densidad se alcanza en ambas matrices más rápidamente que en las zonas de baja densidad al igual que ocurría en el caso 2D . Tanto el comportamiento del contraste como el error respecto al modelo es muy similar para ambas reconstrucciones, pero el coste computacional asociado a la reconstrucción es mucho menor en el caso de la matriz polar.

Debido al tamaño tan desigual de las matrices del sistema utilizadas, es posible alojar la matriz polar completa en la memoria RAM de un computador comercial estándar al comienzo del algoritmo (en este caso el computador empleado tiene 12Gb de RAM) mientras que, la matriz cartesiana requiere de operaciones de lectura y escritura sucesivas a lo largo de una iteración. Por este motivo, se ha realizado una segunda implementación del algoritmo de reconstrucción que emplea la matriz polar en la que se realiza la lectura de la matriz a trozos por rayos para penalizar los tiempos de reconstrucción por iteración asociados al caso de la matriz polar con el mismo número de operaciones de lectura por iteración que en el caso de la matriz cartesiana. De esta forma, los tiempos por iteración obtenidos han sido de 6' 35" frente a los 6' 16" que se obtienen si se realiza una única operación de lectura al inicio del algoritmo de reconstrucción.

La tabla 6.2 muestra que el tiempo necesario por iteración es 4 veces inferior en el caso de la matriz polar respecto a la matriz cartesiana para la reconstrucción de la misma proyección empleando una implementación equivalente en el mismo equipo. El tiempo necesario para el acondicionamiento de las imágenes polares para hacer posible su visualización es de sólo 11" por lo que la reducción del tiempo conseguida con el uso de la matriz polar sigue siendo mayor incluso considerando el tiempo añadido para hacer posible la visualización.

6.6. Reconstrucciones de medidas reales

La medida que se ha empleado para reconstruir corresponde al *phantom* de Derenzo que se muestra en la figura 6.11.

El *phantom* de Derenzo es un *phantom* muy empleado en PET para realizar medidas de resolución y para encontrar errores en el centro de rotación. Los diámetros de los agujeros son de 1.2, 1.6, 2.4, 3.2, 4.0 y 4.8 mm, el diámetro

Parámetros	Matriz cartesiana	Matriz Polar
Tiempo iteración [‡]	23' 6"	6' 16"
Tiempo acondicionamiento visualización [‡]	0"	11"

[‡] Medido con un computador de 64 bits con procesador a 3.2GHz y 12GB de RAM

Tabla 6.2: Tiempos de reconstrucción y de acondicionamiento de las imágenes reconstruidas para su visualización asociado a las matrices del sistema creadas con *grid cartesiano* y *polar*.

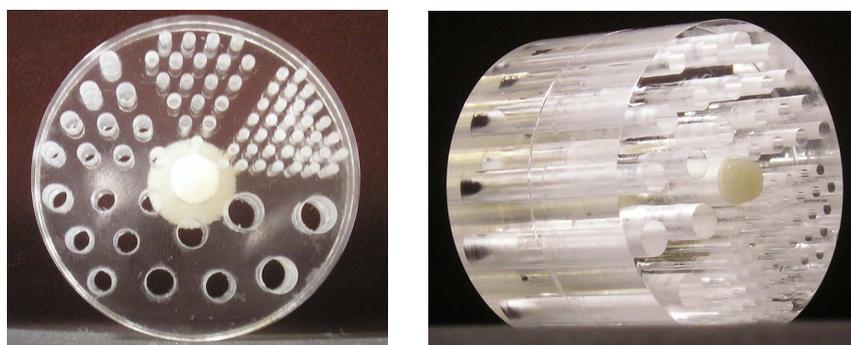


Figura 6.11: Imagen del *phantom* de Derenzo.

del cilindro externo es de 5 cm y el del interno en el que quedan confinados los orificios es de 4.5 cm. Los orificios están separados entre sí una distancia igual al doble de su diámetro y la altura de la estructura con orificios mide 3.4 cm.

El *phantom* está pensado para que sea posible introducir sustancias de distinta densidad en los orificios. La medida del Derenzo que se ha empleado para reconstruir ha sido realizada en ausencia de sustancias de contraste por lo que, en la imagen se distingue la densidad del aire en los orificios, de la densidad del metacrilato que forma la estructura y del plástico del eje que mantiene anclada la estructura. En la figura 6.11 se puede apreciar la ubicación del eje de plástico que se sitúa en el centro del *phantom*.

6.6.1. Resultados de la reconstrucción

En la figura 6.12 se muestran las imágenes de los *phantoms* de Derenzo reconstruidos mediante la matriz cartesiana y polar que ha sido descrita en este capítulo. Cabe destacar que la imagen reconstruida permite mostrar todos los

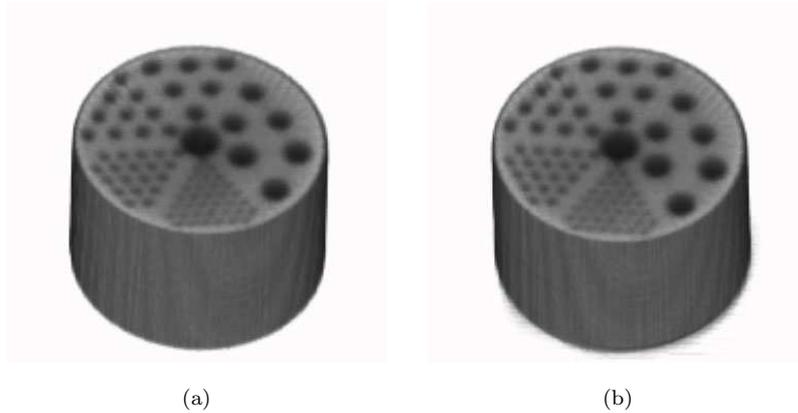


Figura 6.12: Imagen reconstruida del *phantom* de Derenzo para la iteración número 30, obtenido a partir de una medida del escáner TAC de pequeños animales (a) empleando la matriz cartesiana y (b) empleando la matriz polar.

detalles del *phantom* de Derenzo en los dos casos a pesar de la reducción de tamaño realizada en la medida a sólo 100 detectores por lado y 100 rotaciones. La similitud de ambas imágenes frente al modelo es comparable tanto en lo relativo a contraste como en fidelidad respecto al modelo.

6.7. Discusión

Para realizar la comparación entre la matriz polar y la cartesiana en el caso 3D ha sido necesaria la simplificación de la geometría del escáner TAC a causa de los requisitos de tiempo y memoria asociados para el cálculo y almacenamiento de la matriz cartesiana 3D. En el caso bajo estudio, se ha reducido el número de rotaciones y el número de detectores hasta hacer posible que la reconstrucción empleando la matriz cartesiana fuera viable en un único computador. Aún así la matriz cartesiana empleada ocupa 16.9 GB de memoria por lo que, en el caso cartesiano ha sido necesario leer la matriz del sistema en la memoria RAM a trozos (el computador empleado para reconstruir dispone de 12 GB de memoria RAM), lo que supone añadir operaciones de lectura de la matriz en cada iteración. Los tiempos obtenidos para la matriz polar forzando la realización del mismo número de operaciones de lectura por iteración sólo supone una penalización de 19" por iteración por lo que incluso en este caso, el resultado temporal obtenido sigue siendo mucho mejor que en el caso cartesiano. A partir de esta comparación,

se ha considerado que en un caso 3D de mayor tamaño, las conclusiones obtenidas hubieran sido análogas.

6.8. Conclusiones

El empleo de coordenadas polares en el cálculo de la matriz del sistema 3D permite la utilización de las 400 simetrías presentes en el escáner TAC calculado frente a las 8 que permite la matriz cartesiana. La aplicación de estas simetrías y la configuración de los píxeles polares, hacen posible la reducción drástica en el tamaño de la matriz del sistema de 16911.24 MB en la matriz cartesiana a 66.74 MB en la matriz polar. La reducción del tamaño de la matriz que es necesario emplear en el algoritmo de reconstrucción permite obtener una reducción paralela en el tiempo de cálculo de la matriz y en sus requisitos de almacenamiento que lleva a una disminución del tiempo de reconstrucción de un 72.8% respecto al tiempo de reconstrucción necesario usando la matriz cartesiana.

La implementación de la matriz del sistema en el caso de la matriz basada en *grid* polar se realiza a partir de una única posición de referencia por lo que, es posible asumir las tendencias de las rectas y simplificar enormemente la implementación del algoritmo de cálculo de pesos. El resultado es que es posible obtener en el caso calculado la matriz polar en 13h mientras que para el mismo caso, la matriz cartesiana requiere de 4 días y 22h.

El empleo de coordenadas polares permite una disminución en el número de píxeles frente al caso cartesiano que da lugar a una reducción en el tamaño de los ficheros de las imágenes. Esta reducción facilita el almacenamiento de las imágenes polares ya que la transformación necesaria para hacer posible la visualización de estas imágenes se puede realizar posteriormente y sólo requiere de unos segundos.

Los parámetros de calidad obtenidos para la matriz cartesiana y la matriz polar en el caso 3D, siguen mostrando una calidad de imagen reconstruida satisfactoria. El contraste muestra un error inferior a un 1% en las zonas de alta densidad e inferior al 6% en las zonas de baja densidad respecto al modelo para la iteración 40. El RMSE obtenido en la reconstrucción respecto al modelo es menor de 6×10^{-4} , para la iteración número 40.

Las imágenes reconstruidas a partir de medidas reales con la matriz polar ha mostrado una reconstrucción robusta frente al ruido en condiciones reales y con muchas similitudes respecto a la reconstrucción obtenida con una matriz cartesiana.

En definitiva, es posible concluir que el empleo de matrices polares para la reconstrucción de imágenes de TAC mediante métodos algebraicos permite una simplificación en la matriz del sistema que hace posible una reducción significativa en el tiempo por iteración sin pérdida de calidad en la imagen reconstruida.

Capítulo 7

Optimización de la Reconstrucción Basada en *Grid* Polar

El uso de píxeles polares para el cálculo de la matriz del sistema hace posible, gracias a la utilización de todas las simetrías presentes en la matriz del sistema, la reducción del tiempo necesario para la reconstrucción mediante métodos algebraicos. Además de esta aportación, en los capítulos 5 y 6 se ha mostrado que el empleo de un esquema de píxeles polares permite la reducción del tamaño de las imágenes reconstruidas, la reducción del tiempo de generación de la matriz del sistema y la mejora del contraste en las imágenes reconstruidas.

Una de las particularidades del sistema de píxeles polares es que los píxeles conforman una estructura de aros en torno al centro. Hasta ahora esta característica ha supuesto únicamente una desventaja debido al sobremuestreo de los píxeles en la zona central asociado a esta disposición. Sin embargo, en este capítulo se presentará una técnica de focalización del FOV que permite sacar partido de la configuración de los píxeles polares basada en la configuración del *grid* en torno al centro. La técnica aquí presentada, hace posible la reducción del área a reconstruir sin necesidad de tener ningún conocimiento a priori del objeto de procedencia.

7.1. Concepto de *Focus of Attention*

El FOV que se emplea para reconstruir tiene unas dimensiones que vienen determinadas por la geometría de partida del escáner TAC, pero su modificación es una técnica que hace posible reconstruir un espacio mayor, o bien obtener una reconstrucción con más resolución en una región menor del FOV [85]. Estas dos opciones suponen alterar la relación entre la distancia de la fuente al isocentro y del isocentro al plano detector para conseguir una modificación de la magnificación del escáner.

Además de estas aplicaciones, es posible reducir el FOV sólo en el algoritmo de reconstrucción para reconstruir únicamente la zona del FOV en la que está el sujeto u objeto de medida puesto que, en la mayoría de los casos, el objeto está rodeado de un área sobrante en el FOV. Este procedimiento no permite aumentar la resolución obtenida pero consigue una reconstrucción más rápida por iteración, en tanto que, se emplea únicamente el intervalo de rayos relevante y los píxeles reconstruidos se circunscriben únicamente a aquellos en los que está el objeto. La reconstrucción algebraica de imágenes consiste en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones. La eliminación de rayos hace posible que el algoritmo se centre en las ecuaciones relevantes y la eliminación de píxeles permite reducir el número de incógnitas a reconstruir.

La reconstrucción conseguida, mediante la delimitación de los píxeles a reconstruir a una zona de interés, será equivalente a la obtenida a partir de la reconstrucción del FOV completo, siempre y cuando el subespacio donde se ubique el objeto esté bien delimitado. Ésta técnica se conoce como *Focus of Attention* (FOA) [86] y permite una reducción del número de operaciones en un porcentaje proporcional al área del FOV que no está ocupada por el objeto medido.

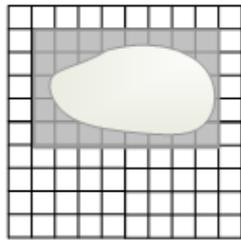
7.2. *Focus of Attention* en *grid* cartesiano

La técnica de FOA ha sido empleada para reducir el espacio a reconstruir de forma dinámica, en función del objeto medido, delimitando este objeto con zonas cuadrangulares en el caso 2D y con zonas cúbicas en el caso 3D para un *Cone-Beam SPECT* [87]. Sin embargo, el uso de una forma cúbica dentro de un FOV cilíndrico, no proporciona una reducción en el número de píxeles significativa (ver figura 7.1(a)), pero permite que la implementación en un *grid* cartesiano sea sencilla.

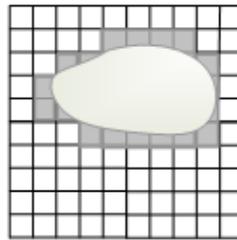
Otros autores [86], han realizado un análisis más complejo de la medida que se

basa en tres fases:

- Se discriminan mediante un umbral los rayos en los que se ha producido una lectura de la medida del objeto de aquellos en los que se ha medido ruido de fondo del escáner.
- Mediante una simulación *voxel a voxel*, que consiste en proyectar una recta que pase por el centro del *voxel* desde el panel detector a la fuente de rayos X, se determina si el *voxel* queda incluido dentro de los rayos que contienen información de la medida para todas las posiciones de rotación.
- Los *voxels* que contienen un mayor número de líneas, que formen parte de rayos que han contribuido a la medida son considerados *voxels* activos que se emplearán para la reconstrucción.



(a)



(b)

Figura 7.1: FOV pixelado empleando un píxel cartesiano con el objeto a reconstruir en el que se muestra la región del FOA sombreada: (a) subregión del FOV que sería necesario reconstruir empleando una técnica de FOA mediante rectángulos y (b) región del FOA con una delimitación basada en el empleo de una máscara.

Este método permite el cálculo de una máscara de *voxels* que puede emplearse para reconstruir únicamente los *voxels* de interés como se muestra en la figura 7.1(b). Empleando esta máscara es posible ajustar el número de *voxels* mucho mejor que mediante la definición de subvolúmenes cúbicos dentro del FOV; sin embargo, este método resta simplicidad al cálculo del FOA y en algunas medidas, la mejora obtenida puede no compensar el cálculo necesario para obtener la máscara.

La máscara necesaria para reconstruir únicamente los *voxels* que corresponden a *voxels* con información, tiene tantos elementos como la imagen. Los escáneres de pequeños animales se caracterizan por tener un gran número de píxeles, por lo que la máscara necesita de muchos más recursos de memoria que la delimitación y además, requiere de una comparación dentro del algoritmo para cada *voxel*.

El método de FOA tiene la ventaja de que en el peor de los casos la calidad de la imagen y el tiempo empleado en la reconstrucción se mantienen. Para conservar estas características, es necesario que el método tenga la eficacia necesaria para ceñir la zona a reconstruir lo máximo posible, pero al mismo tiempo, que el método consista en un proceso sencillo para no hacer cálculos previos que superen la reducción de tiempo obtenida ni que lleven a un incremento del número de operaciones del algoritmo de reconstrucción para evitar el cálculo de unos pocos *voxels*.

7.3. *Focus of Attention en grid polar*

En el capítulo 4 se ha descrito que el *grid* polar está dividido en tantos sectores circulares como posiciones de rotación tiene el escáner y que los píxeles están contenidos en aros concéntricos centrados en el isocentro. Es posible hacer uso de esta estructura para circunscribir el FOV reconstruido a la zona en la que está presente el objeto mediante contornos circulares dentro de cada sector circular que forma el *grid* polar. El empleo de estos contornos proporciona una delimitación de un FOV cilíndrico mucho más eficiente que la obtenida mediante el uso de contornos cúbicos.

Se ha mostrado que un mayor número de rotaciones incrementa el número de píxeles polares para una resolución dada porque es necesario confinarlos en un área más reducida para imponer la ordenación por sectores circulares. A pesar de esto, en la figura 7.2 se puede apreciar que un mayor número de sectores circulares permite un mejor ajuste en torno al objeto haciendo posible una mayor reducción en el número de píxeles. Consecuentemente, el incremento en el número de sectores si se aplica la técnica del FOA, puede contribuir a la reducción en el coste computacional.

7.3.1. Implementación

Para el caso de un FOV pixelado mediante un *grid* de píxeles polares, la delimitación del FOA sólo necesitaría de dos fases:

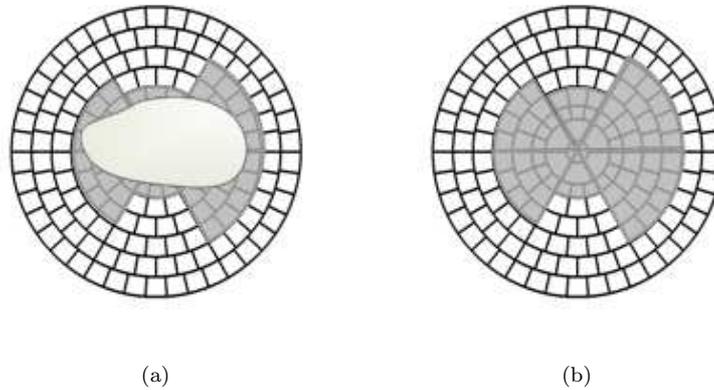


Figura 7.2: FOV pixelado mediante *grid* polar (a) muestra la subregión del FOV delimitada para un objeto (b) muestra con más detalle la región que sería necesario reconstruir para el objeto mostrado en (a).

- Mediante un umbral se distinguen los rayos en los que se ha producido una lectura del objeto de aquellos que únicamente han medido aire y ruido de fondo del escáner. Este paso se puede ver de forma gráfica para un ejemplo en la figura 7.3.
- Para cada proyección, se calcula los puntos de intersección entre las rectas más alejadas del centro que constituyen el límite de los rayos entre los que queda confinado el objeto y los sectores circulares. Estos puntos de corte permiten delimitar el aro externo a partir del cuál no hay objeto. Cada proyección parte de la reducción obtenida en la proyección anterior y permite refinar el cálculo de los aros delimitando aún más la zona como se aprecia en la figura 7.4.

El cálculo del FOA mediante *grid* polar es un cálculo puramente geométrico que no requiere de simulaciones y que es posible almacenar en un formato comprimido.

Los píxeles polares se numeran por sectores circulares con un valor creciente desde el centro del FOV hacia el exterior. De manera que, si tenemos un *grid* de N_{Total} píxeles con $2P$ sectores y N_{Sector} píxeles por sector, es posible obtener una numeración alternativa de los píxeles conociendo el lugar que ocupan dentro del sector y el sector en el que están.

La estructura empleada para almacenar los límites entre los que queda confinado el objeto medido, consiste en un vector que tiene tantos elementos

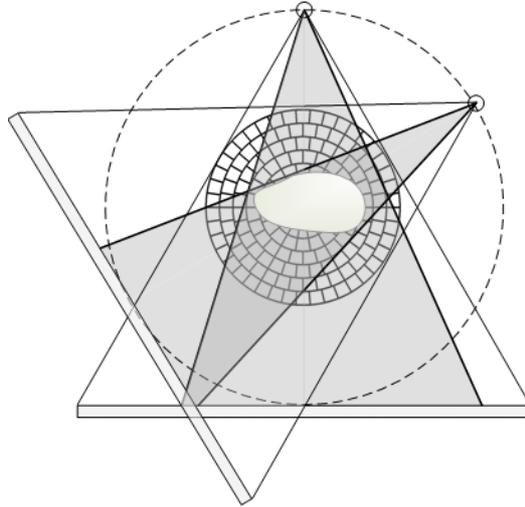


Figura 7.3: Ejemplo de delimitación de las proyecciones que distingue el grupo de rayos que atraviesan el objeto para dos posiciones de rotación.

como sectores circulares o posiciones de rotación tiene el escáner, en el que sólo se almacena el valor del píxel hasta el que es necesario reconstruir, empleando la numeración dentro del sector circular. La utilización de esta estructura dentro del algoritmo de reconstrucción es muy sencilla ya que, sólo es necesario sustituir el bucle que recorre los píxeles numerados de forma absoluta, por dos bucles que recorren los sectores y para cada sector, los píxeles dentro del sector.

Esta reducción en el número de píxeles es también aplicable en la inicialización de la imagen al principio del algoritmo, en la actualización del valor de la imagen con cada iteración y en el visor que transforma imágenes polares en imágenes cartesianas equivalentes.

Además, el FOA también afecta a la parte de proyección del algoritmo de reconstrucción en la que se recorren todos los rayos por rotaciones. El primer paso del FOA delimita los rayos que corresponden a proyecciones del objeto por lo que, es posible emplear en el algoritmo sólo los rayos que quedan incluidos en el intervalo donde se encuentra la información, lo que equivale a reducir el número de ecuaciones.

En 3D, la implementación de la técnica del FOA se basa en el mismo cálculo geométrico. En este caso, se divide el FOV por rodajas y el procedimiento es análogo al descrito en el caso 2D. Se realiza el mismo cálculo para cada nivel de

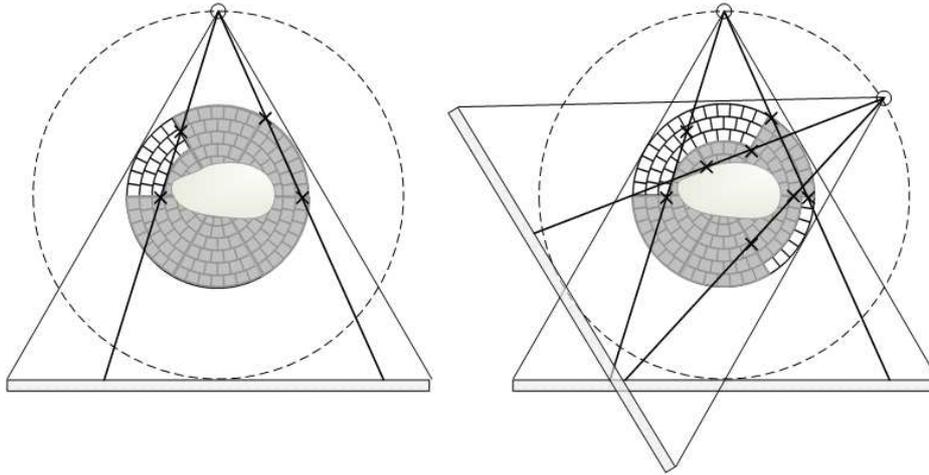


Figura 7.4: La figura de la izquierda muestra la reducción del FOV a partir de la delimitación de los rayos en la primera rotación. La figura de la derecha, parte de la reducción obtenida en la figura de la izquierda en la primera rotación e incorpora una segunda. Las intersecciones entre los límites de los rayos y los sectores circulares se han marcado con cruces.

detectores que se encuentra a distinta altura, pero en este caso, los rayos limítrofes pueden intersectar a varias rodajas del FOV por lo que un rayo 3D puede contribuir a delimitar la región de varias rodajas de píxeles. La única consideración adicional que es necesario realizar es que, en la intersección entre los sectores circulares y los rayos hay que tener en cuenta los 4 vértices que intervienen en los rayos limítrofes en el caso 3D.

A continuación, se empleará el FOA en un caso práctico que permite describir mediante un ejemplo el funcionamiento del algoritmo.

7.4. Aplicación del *Focus of Attention* a un caso práctico

La optimización del algoritmo de reconstrucción mediante FOA, surtirá mayor o menor efecto en función del tipo de medida que se reconstruya. Por este motivo, se mostrará las ventajas de aplicar el FOA en un ejemplo concreto que servirá para ilustrar su funcionamiento y medir la eficacia obtenida. La proyección escogida ha sido el *phantom* de Shepp-Logan que ha sido reconstruida en el capítulo 5 para las

dimensiones del escáner del Hospital Clínico Universitario de Valencia.

7.4.1. Estudio de la proyección

La medida empleada debe ser analizada para situar un umbral con el que sea posible separar el ruido de fondo de la información. Para ello, es necesario realizar un análisis previo del histograma de las proyecciones para localizar los valores a partir de los cuales se concentra la información de la medida. Es necesario dejar un margen de tolerancia en el valor del umbral para poder asegurar que no se elimina información de la medida [86]. Para valorar en qué nivel se sitúan los niveles de ruido de fondo sobre los que se obtendrá la medida, es recomendable comparar la proyección de la medida con una proyección tomada bajo las mismas condiciones, pero en ausencia de objeto. De esta forma, el cálculo será más aproximado con la realidad.

En este caso, las proyecciones que podemos llamar “útiles” o con información, son fácilmente discriminables de aquellas que no contienen información porque la simulación no tiene presencia de ruido. Por este motivo, el umbral a fijar tiene el valor 0.

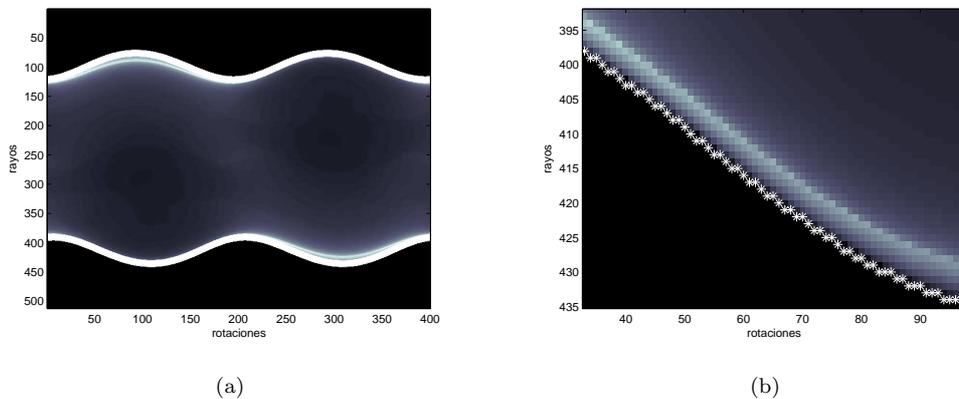


Figura 7.5: Proyecciones en función de las rotaciones para el *phantom* de Shepp-Logan (a) marca mediante un asterisco blanco superpuesto, la posición del rayo que constituye el límite superior e inferior efectivo que se empleará en la reconstrucción (b) muestra un zoom de la figura que permite apreciar al detalle la delimitación calculada.

La figura 7.5(a) muestra la proyección del *phantom* de Shepp-Logan para 512 detectores, en función de las rotaciones. En esta imagen, se ha superpuesto una

marca mediante un asterisco blanco, en los rayos limítrofes entre los que se sitúa el intervalo de rayos en los que hay información del objeto. Los rayos limítrofes han sido obtenidos empleando el umbral 0. En la figura 7.5(b) se puede apreciar que la información del *phantom* está perfectamente contenida entre las dos líneas blancas. El número total de rayos que participa en la reconstrucción es de 126332 con la aplicación de esta técnica frente a los 204800 totales.

7.4.2. Delimitación del FOV

Una vez acotadas las proyecciones, se realiza un cálculo de los puntos de corte entre las rectas que delimitan los sectores circulares del *grid* y los límites de las proyecciones. A partir del cálculo de los puntos de corte se localiza el sector circular y el aro dentro del sector circular en el que se produce una intersección. En un mismo sector circular, la existencia de dos puntos de corte implica que hay una zona del sector circular que permanece fuera del área que es relevante para la reconstrucción. En cada rotación se restringe aún más el área a reconstruir actuando siempre sobre el mismo FOA. De forma que, con cada rotación es posible conocer que píxeles no forman parte del área en la que están presentes los píxeles con información.

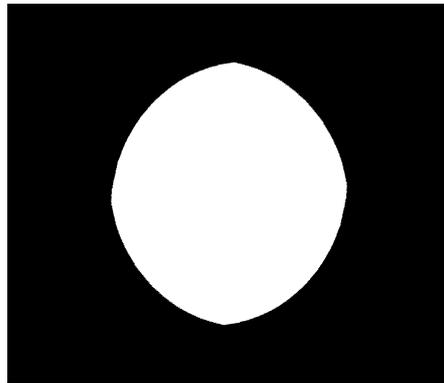


Figura 7.6: Imagen del FOA calculado para el *phantom* de Shepp Logan.

La figura 7.6 muestra la región del FOA activa para la reconstrucción del *phantom* de Shepp Logan que emplea los límites que aparecen en 7.5(a) y que

resulta del cálculo descrito. En la figura se puede apreciar que un *grid* con 400 rotaciones como el del ejemplo realizado posibilita un ajuste muy aproximado a la región de interés.

La imagen polar completa, está formada por 931601 píxeles mientras que la región activa contiene 373235 píxeles, lo que supone una disminución en el número de incógnitas del algoritmo de un 59.85 %.

7.5. Resultados

Los resultados obtenidos en la reconstrucción haciendo uso de la técnica del FOA proporcionan una reconstrucción idéntica a la obtenida con el MLEM empleado hasta ahora, ya que dicha técnica sólo afecta a píxeles que carecen de contenido (ver figura 7.7).

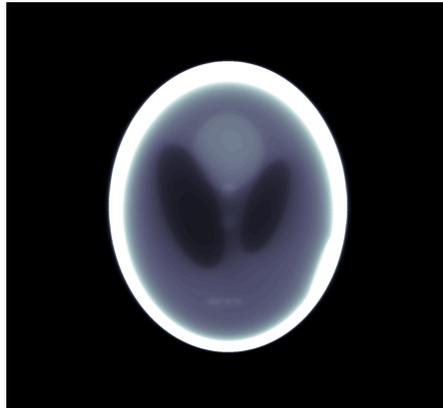


Figura 7.7: Imagen del *phantom* de Shepp Logan para la iteración 30, reconstruida empleando únicamente los rayos delimitados y los píxeles que pertenecen a la región del FOA.

En la tabla 7.1 se enumeran los tiempos obtenidos en las diferentes fases de la reconstrucción en las que interviene el FOA en contraposición a los tiempos obtenidos prescindiendo de esta técnica. El tiempo previo necesario para el cálculo del FOA es inferior a 1" para este caso. El tiempo obtenido por iteración es de 36" frente a los 2' 20" que eran necesarios sin hacer uso del FOA y el tiempo de

Área reconstruida	FOV completo	FOA
Tiempo inicialización	0"	0" (< 1s)
Tiempo por iteración	2' 20"	36"
Tiempo acond. visualización	3"	3"
Tiempo total (30 iteraciones)	70' 6"	18' 3"

Medido con PC de 64bits con procesador a 3.2GHz y 12Gb de RAM

Tabla 7.1: Tiempos de reconstrucción y de visualización para el MLEM y para el MLEM con FOA calculado para un *phantom* de Shepp Logan.

acondicionamiento para la visualización sigue siendo de 3". El empleo del FOA permite una reducción del tiempo total necesario para reconstruir una imagen del *phantom* de Shepp Logan con 30 iteraciones de un 74.25% y proporciona una imagen resultante idéntica a la conseguida sin aplicar esta técnica.

7.6. Discusión

La técnica del FOA permite obtener una reducción del coste computacional en la mayoría de casos, pero al ser una técnica *data-driven* esta mejora estará condicionada a las características de la medida. Además, los tiempos presentados hacen referencia a un caso simulado en ausencia de ruido mientras que, en presencia de ruido, la reducción conseguida puede ser menor como consecuencia de haber obtenido una delimitación de las proyecciones menos ajustada.

Es necesario destacar que la técnica FOA propuesta ha sido calculada tomando como región de interés un área que se supone compacta. Es posible que la medida que se desee reconstruir esté formada por distintas zonas entre las que exista un grupo numeroso de píxeles que no formen parte del objeto. En el diseño propuesto, se ha asumido que los TAC a los que va destinado el algoritmo de delimitación del FOA, son TAC en los que se realizarán medidas a personas y pequeños animales, principalmente. En este tipo de medida será mucho menos habitual encontrar huecos entre zonas a medir y en tal caso, se ha valorado que la disminución de píxeles obtenida es insignificante en esas zonas por lo que, contemplar esa posibilidad no compensa la complejidad añadida al algoritmo de cálculo del FOA y al algoritmo de reconstrucción.

7.7. Conclusiones

El empleo de píxeles polares para la delimitación del FOA permite que la implementación de este método sea muy sencilla frente a la implementación mediante máscaras y mucho más ajustada que la implementación mediante regiones rectangulares. Esta simplificación necesita una inicialización previa al algoritmo de reconstrucción, que supone un coste temporal reducido (entre 0 y 1 segundo para el *phantom* de Shepp Logan simulado) y conlleva un coste computacional añadido por píxel de sólo dos operaciones adicionales (una suma y una multiplicación que son necesarias para obtener la numeración de los píxeles a partir de la numeración por sectores).

El diseño del *grid* polar mediante sectores circulares, hace posible un diseño de píxel en el que están presentes todas las simetrías del escáner tomográfico. Sin embargo, el número de píxeles necesarios para una misma resolución espacial, haciendo uso de esta estructura para su colocación es mayor de lo necesario y crece con el número de rotaciones. En la técnica del FOA basada en un *grid* de píxeles polares, un mayor número de sectores circulares contribuye a una definición de la región activa más precisa por lo que, la multiplicación del número de sectores pasa a ser una característica ventajosa si se emplea esta técnica.

La técnica del FOA permite una disminución en el número de incógnitas que intervienen en el algoritmo, de hasta un 59.85% en el caso estudiado, que dan lugar a la reducción del tiempo necesario para reconstruir y visualizar las imágenes reconstruidas. Además, esta técnica es aplicable a otro tipo de algoritmo de reconstrucción y no afecta a las características de la reconstrucción obtenida proporciona una imagen idéntica a la obtenida sin su aplicación, en el caso calculado.

Capítulo 8

Conclusiones

Los métodos algebraicos suponen la definición de un modelo de funcionamiento del escáner tomográfico que requiere de la descripción de su geometría, la discretización de la imagen reconstruida, la definición del proceso de proyección y la modelización del ruido. La modelización de cada uno de estos aspectos se materializa en la matriz del sistema.

El trabajo presentado en esta tesis contribuye a la mejora del rendimiento de los métodos de reconstrucción de imagen tomográfica basados en técnicas algebraicas mediante el planteamiento de un nuevo modelo de matriz del sistema.

8.1. Conclusiones principales y aportaciones

El nuevo modelo propuesto hace posible la mejora de la matriz del sistema en los aspectos siguientes:

- La definición de la matriz del sistema utilizando píxeles dispuestos de forma polar permite el empleo de todas las simetrías naturales presentes en un tomógrafo. A partir del cálculo de la matriz del sistema en una única posición de rotación del escáner es posible inferir la matriz correspondiente al resto de posiciones.
- Mediante el uso de la matriz propuesta es posible reducir el número de elementos no cero de la matriz respecto al modelo cartesiano y esta reducción se produce en un mayor grado en el caso 3D.

- La disminución de tamaño conseguida respecto a la matriz cartesiana convencional permite reducir las necesidades de almacenamiento de la matriz del sistema.
- Sólo es necesario el cálculo de la matriz del sistema en una única posición de rotación. Esto permite acotar aún más el número de casos posible en el cálculo de los pesos de la matriz del sistema, mientras que en el caso de la matriz cartesiana, no es posible limitar el número de casos porque es necesario calcular al menos todas las posiciones del escáner que se dan en un cuadrante.
- Las simetrías existentes en la matriz del sistema con píxeles polares permite que la obtención de los restantes bloques de matriz simétricos consista en dos operaciones sencillas. En la práctica, la rotación consiste en un desplazamiento circular de la numeración de los píxeles y la reflexión se obtiene mediante un cambio de numeración en los píxeles.
- Se consigue una reducción de tiempo substancial en el cálculo de la matriz del sistema. Esta reducción es muy ventajosa especialmente, si se trabaja con prototipos de investigación como el TAC del IFIC de pequeños animales en los que la geometría del escáner se somete a continuos cambios.

Las mejoras en la matriz del sistema se reflejan en la reconstrucción proporcionada por la misma:

- Disminuye el tiempo necesario por iteración gracias a la reducción del coste computacional como consecuencia de la obtención de un menor número de elementos no cero en la matriz.
- La diferencia del contraste de las imágenes reconstruidas respecto a los modelos simulados con píxeles polares es ligeramente menor que en el caso de las imágenes cartesianas.
- El error medido en las imágenes reconstruidas con píxeles polares es igual que en el caso de las imágenes cartesianas respecto a modelos simulados objetivos.

El empleo del diseño de píxeles polares aporta un valor añadido a las imágenes reconstruidas:

- Las imágenes en píxeles polares ocupan menos espacio que las equivalentes reconstruidas en píxeles cartesianos por lo que, el empleo del formato polar hace posible un almacenamiento de imágenes más eficiente ya que, el proceso de conversión a coordenadas cartesianas no introduce artefactos y requiere de sólo unos segundos.
- La delimitación del FOV a reconstruir a partir del análisis del intervalo de proyecciones donde está contenida la información de la medida, se puede aplicar de forma sencilla en el caso de imágenes polares gracias a su disposición en aros concéntricos. El FOV a reconstruir queda delimitado por los aros más externos en cada sector circular, de manera que un número mayor de rotaciones favorece la reducción porque permite circunscribir aún más el FOV al volumen en el que se sitúa el objeto.

Además, se han obtenido otras conclusiones en el desarrollo de la investigación de manera tangencial a la realización de la misma que resumimos en las siguientes:

- El *grid* de píxeles polares dispuesto de manera que conserve una relación de aspecto unitaria es igualmente adecuado para la reconstrucción, pero implica un incremento en el número de píxeles necesario y no aporta una mayor calidad en la imagen reconstruida.
- El empleo de un modelo de proyección basado en el cálculo de integrales de área permite reducir el tiempo de cálculo de la matriz del sistema frente al modelo basado en integrales de área a partir de un sumatorio de integrales de línea.
- El uso de píxeles *blobs* dispuestos en un *grid* polar, en los casos estudiados no proporciona una reconstrucción con calidad comparable a la de los píxeles polares y cartesianos porque introduce artefactos como consecuencia del solapamiento no uniforme de los píxeles.

En definitiva, es posible concluir que el modelo de la matriz del sistema propuesto se adapta a la geometría del escáner tomográfico de manera más adecuada que la matriz basada en píxeles cartesianos ya que hace uso de todas las simetrías presentes en el escáner. El empleo de las simetrías da lugar a una disminución del tiempo por iteración gracias a la reducción del coste computacional asociado a la reconstrucción. Al mismo tiempo, proporciona una calidad de reconstrucción equivalente a la obtenida con matrices basadas en *grid* cartesiano.

8.2. Líneas futuras de investigación

El propósito que se ha perseguido en este trabajo no es el de mejorar los métodos de reconstrucción algebraicos mediante la innovación en los algoritmos empleados por sí solos, sino el de conseguir una mejora a partir de un replanteamiento de la matriz del sistema. Los avances conseguidos con la matriz del sistema propuesta y la mejora posterior que permite la reducción del FOV, son aplicables a cualquier otro método algebraico iterativo o directo.

Algunas de las líneas de investigación que podrían derivarse de este trabajo y complementarlo son las siguientes:

- El uso de métodos de reconstrucción alternativos mediante matrices de píxeles polares tales como el *Ordered Subset Algorithm* [83].
- La simulación de un modelo de ruido para obtener simulaciones ruidosas haría posible el estudio de la influencia del ruido en la reconstrucción de manera aislada [79].
- La experimentación con otros métodos de proyección basados en el cálculo de los pesos a partir de alternativas más complejas que el cálculo de pesos como una suma de integrales de línea. Un ejemplo de estos métodos son los que se basan en el cálculo de la integral de área a partir de la división del volumen a calcular empleando triangularización [26].
- La reducción del tamaño de la matriz del sistema a partir del uso de píxeles polares frente a la matriz mediante píxeles cartesianos permite alternativas de reconstrucción que hasta ahora no eran viables. En este caso, la reducción del tamaño de la matriz hace posible el planteamiento de métodos directos de reconstrucción que realicen la transformación o inversión de la matriz del sistema para encontrar una solución al sistema de ecuaciones sin necesidad de iterar. Esta aproximación al problema es ardua ya que el sistema a resolver es un sistema de ecuaciones infra-determinado con un número de incógnitas muy superior al número de ecuaciones que da lugar a infinitas soluciones. Además es necesario obtener una expresión que relacione la transformación realizada en la matriz con la transformación equivalente para obtener la solución del sistema total formado por la matriz calculada y las matrices simétricas que son calculadas empleando las simetrías.

Apéndice A

Descripción de *Phantoms*

A continuación se describirán de forma detallada los *phantoms* sintéticos que han sido empleados a lo largo de la tesis para la reconstrucción de imágenes. En este apéndice se realizará una clasificación entre los *phantoms* simulados empleando herramientas software gratuitas y aquellos simulados a partir del cálculo de integrales de línea mediante técnicas de *forward-projection*.

A.1. *Phantom* calculados con CTSim

A.1.1. *Phantom* de Shepp-Logan 2D

El *phantom* de Shepp Logan para la reconstrucción mediante matrices 2D ha sido realizado tomando las dimensiones del Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia. Para realizar esta proyección 2D se ha empleado el programa de simulaciones CTSim [55], tomando las opciones de simulación que se enumeran en la tabla A.1

La proyección resultante de esta simulación se muestra en la figura A.1(b).

El modelo empleado para la comparación de las imágenes reconstruidas obtenidas, también ha sido proporcionado por el programa CTSim y tiene el aspecto que se muestra en la figura A.1(a). Consiste en una imagen de dimensiones 512×512 píxeles para un FOV de 17,579 cm.

Parámetros de proyecciones	
Geometría	Equilinear
Nivel de trazado	Projections
Detectores	512
Rotaciones	400
Muestras por Detector	100
Ratio de vista	1
Ratio de escaneo	1
Ratio de distancia focal	425
Ratio de longitud Isocentro-Detector	120
Ángulo de rotación (Fracción de círculo)	1/400
<i>Offset</i> en unidades de rotación	0

Tabla A.1: Opciones de simulación empleadas para la obtención del *phantom* de Shepp-Logan mediante el software CTSim

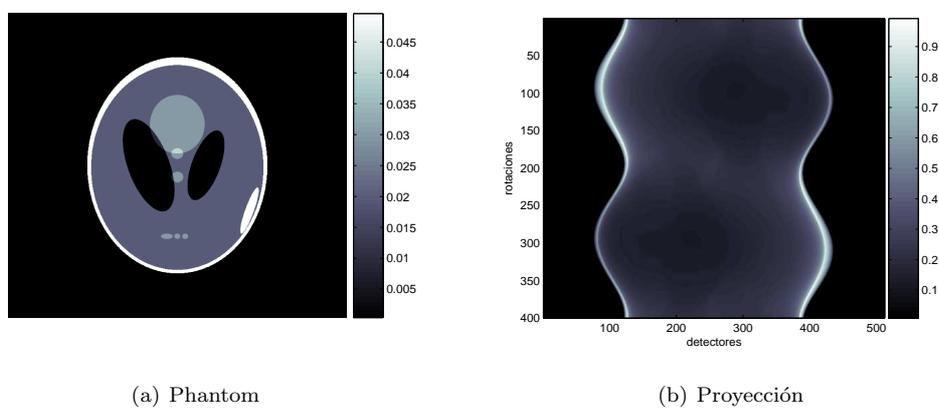


Figura A.1: *Phantom* de Shepp Logan 2D y proyección del *phantom* obtenida mediante CTSim.

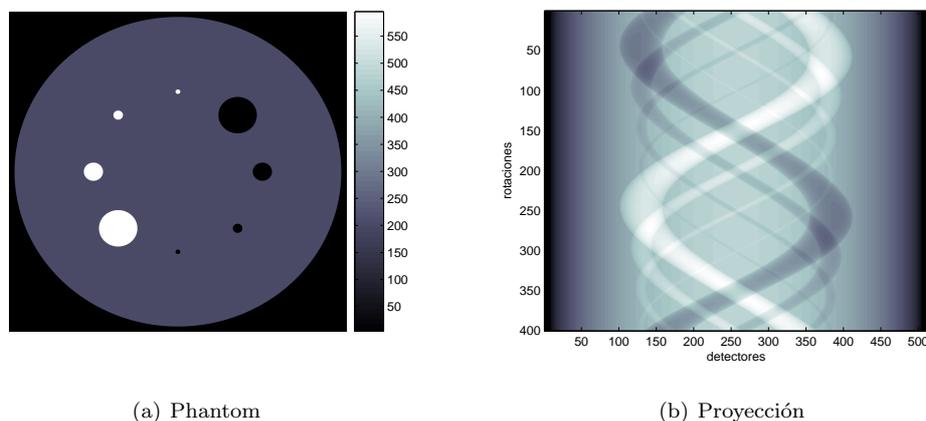


Figura A.2: *Phantom* de Shepp Logan 3D y cortes correspondientes al *phantom* de Shepp-Logan en los planos XY, XZ e YZ.

A.2. *Phantoms* calculados mediante *forward-projection*

A.2.1. *Phantom* círculos de tres densidades 2D

El *phantom* de Círculos de tres densidades, se ha simulado tomando las dimensiones del Simulador-TAC del Hospital Clínico Universitario de Valencia por lo que también se ha proyectado sobre un FOV de 17,579 cm. Se ha calculado esta proyección 2D mediante técnicas de *forward-projection* empleando para ello el cálculo de la intersección de los haces con los círculos mediante integrales de línea. El *phantom* consta de 9 círculos, de los cuáles el de radio mayor simula una zona de densidad media en la que se sitúa el órgano o lesión de estudio, 4 círculos de los 9 simulan regiones de distintos radios de alta densidad y otros 4 simulan regiones de baja densidad (ver figura A.2). Las dimensiones del *phantom* normalizadas respecto al radio del FOV y las densidades de los círculos aparecen en la tabla A.2.

A.2.2. *Phantom* de Shepp Logan 3D

El *phantom* de Shepp-Logan 3D está formado por 12 elipsoides de diferentes densidades que permiten conformar una silueta similar a una cabeza humana en

r	c_x	c_y	ρ
0.967	0.500	0.000	200
0.114	0.350	0.000	0
0.057	0.000	0.350	0
0.028	0.220	0.500	0
0.014	-0.350	0.350	0
0.114	-0.500	0.000	600
0.057	-0.350	-0.350	600
0.028	0.000	-0.500	600
0.014	0.350	-0.350	600

Tabla A.2: Datos correspondientes a los 9 círculos que conforman el *phantom* de Círculos de tres densidades correspondientes al radio r , centro (c_x, c_y) y densidad (ρ)

r_x	r_y	r_z	c_x	c_y	c_z	α	ρ
0.690	0.900	0.920	0.000	0.000	0.000	0	1.000
0.662	0.880	0.874	0.000	0.000	-0.018	0	-0.800
0.410	0.210	0.160	-0.220	-0.250	0.000	72	-0.020
0.310	0.220	0.110	0.220	-0.250	0.000	-72	-0.020
0.210	0.350	0.250	0.000	-0.250	0.350	0	0.010
0.046	0.046	0.046	0.000	-0.250	0.100	0	0.010
0.046	0.020	0.023	-0.080	-0.250	0.605	0	0.010
0.046	0.020	0.023	0.060	-0.250	0.605	90	0.010
0.056	0.100	0.040	0.060	0.625	0.105	90	0.020
0.056	0.100	0.056	0.000	0.625	0.100	0	-0.020
0.046	0.046	0.046	0.000	-0.250	-0.100	0	0.010
0.023	0.023	0.023	0.000	-0.250	-0.605	0	0.010

Tabla A.3: Datos para el cálculo de los 12 elipsoides que componen el *phantom* de Shepp-Logan modificado correspondientes al radio (r_x, r_y, r_z) , centro (c_x, c_y, c_z) , ángulo de giro respecto al eje y (α) y densidad (ρ)

la que están presentes diferentes tipos de tejidos (ver figura A.3).

Las dimensiones normalizadas para el cálculo de los elipsoides se presentan en la tabla A.3 y corresponden con las del *phantom* de Shepp Logan modificado [56, 88].

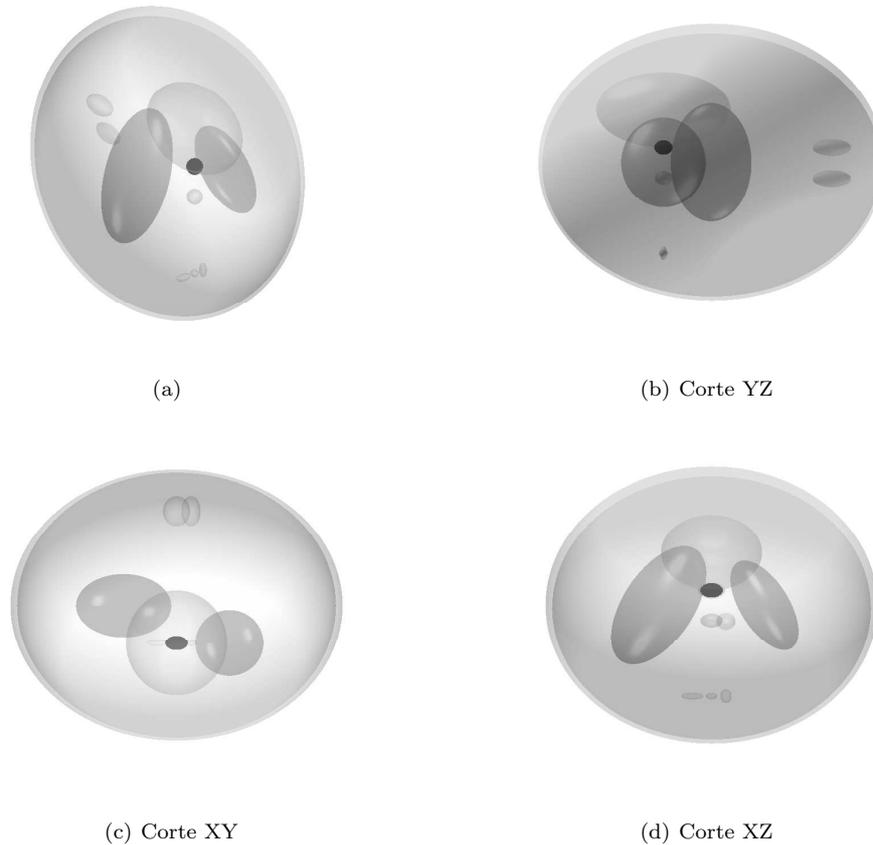


Figura A.3: *Phantom* de Shepp Logan 3D y cortes correspondientes al *phantom* de Shepp-Logan en los planos XY, XZ e YZ.

La proyección se calcula obteniendo los puntos de corte de las líneas que componen el haz y los elipsoides. A partir de estos puntos de corte, se calcula la longitud de intersección entre cada línea y cada elipsoide, y se aplica un factor de corrección que corresponde a la densidad del elipsoide atravesado. Por lo tanto, el cálculo de la proyección, no se ha hecho a partir de una aproximación al modelo mediante un voxelizado del *phantom* sino que se ha empleado para ello, un modelo continuo a partir de las ecuaciones que definen al elipsoide. La proyección empleada para las dimensiones del TAC de pequeños animales con 100×100 detectores y $P = 50$ rotaciones, se muestra en la figura A.4.

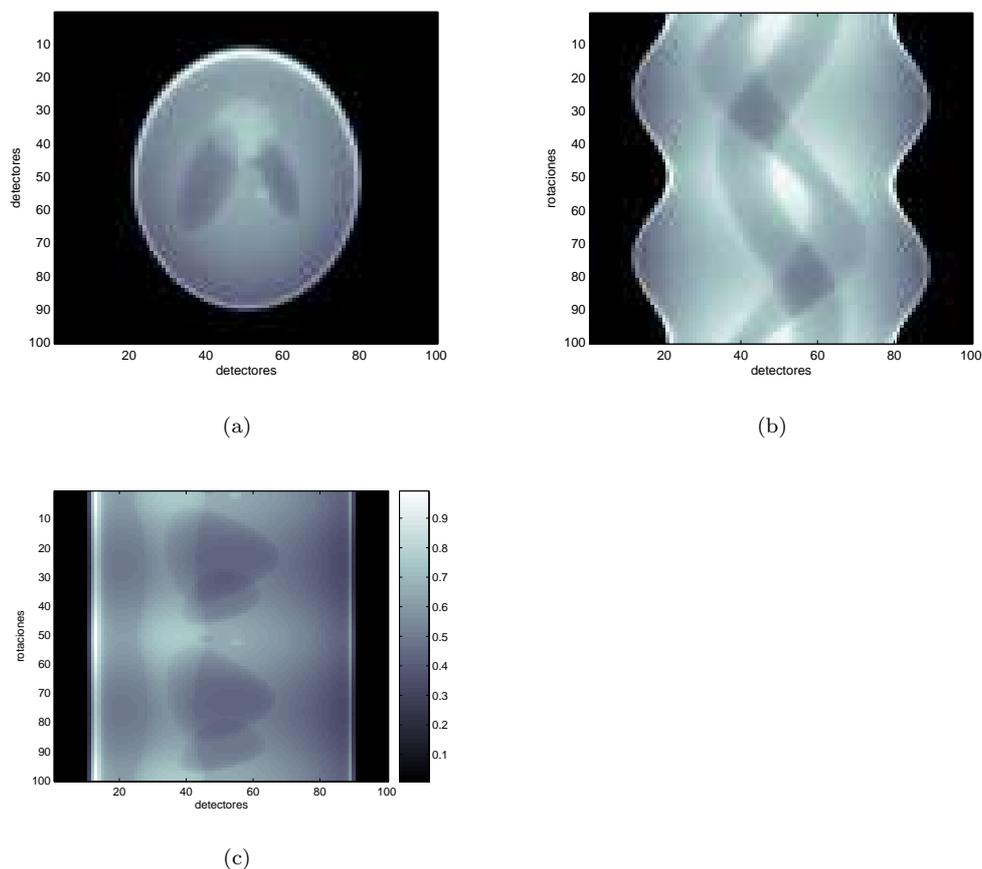


Figura A.4: Proyección del *phantom* de Shepp Logan 3D en cortes correspondientes (a) al plano detector para la rotación 50, (b) al plano detector horizontal 50 en función de las rotaciones y (c) al plano detector vertical 50 en función de las rotaciones.

A.2.3. *Phantom* de tres cilindros 3D

El *phantom* de tres cilindros está constituido, como se observa en la figura A.5, por dos cilindros de alta densidad y baja densidad presentes en un cilindro de densidad intermedia.

Las dimensiones que permiten la implementación de dicho *phantom* normalizadas respecto al radio del FOV, que para el caso del TAC de pequeños animales corresponde con $R_{FOV} = 4,054$, se presentan en la tabla A.4.

Cabe destacar que los tres cilindros están ligeramente desplazados respecto al

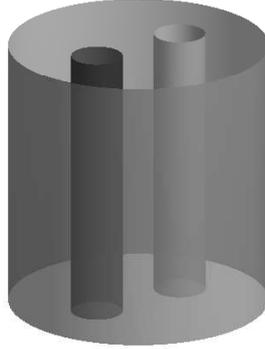


Figura A.5: Reconstrucción de modelo de *phantom* de Tres Cilindros renderizada en un volumen semitransparente.

r	c_x	c_y	z_{max}	z_{min}	ρ
0.617	0.123	0.123	0.740	-0.740	100
0.123	0.370	0.123	0.740	-0.740	180
0.123	-0.123	0.123	0.740	-0.740	-80

Tabla A.4: Datos que describen el *phantom* de Tres Cilindros 3D correspondientes al radio r , centro (c_x, c_y) y altura máxima del cilindro (z_{max}), altura mínima (z_{min}) y densidad (ρ)

isocentro.

La figura A.6, muestra la proyección obtenida para las dimensiones del caso del escáner TAC de pequeños animales en una versión reducida de 100×100 detectores y $P = 50$ rotaciones, en tres perspectivas correspondientes todas ellas a cortes centrales.

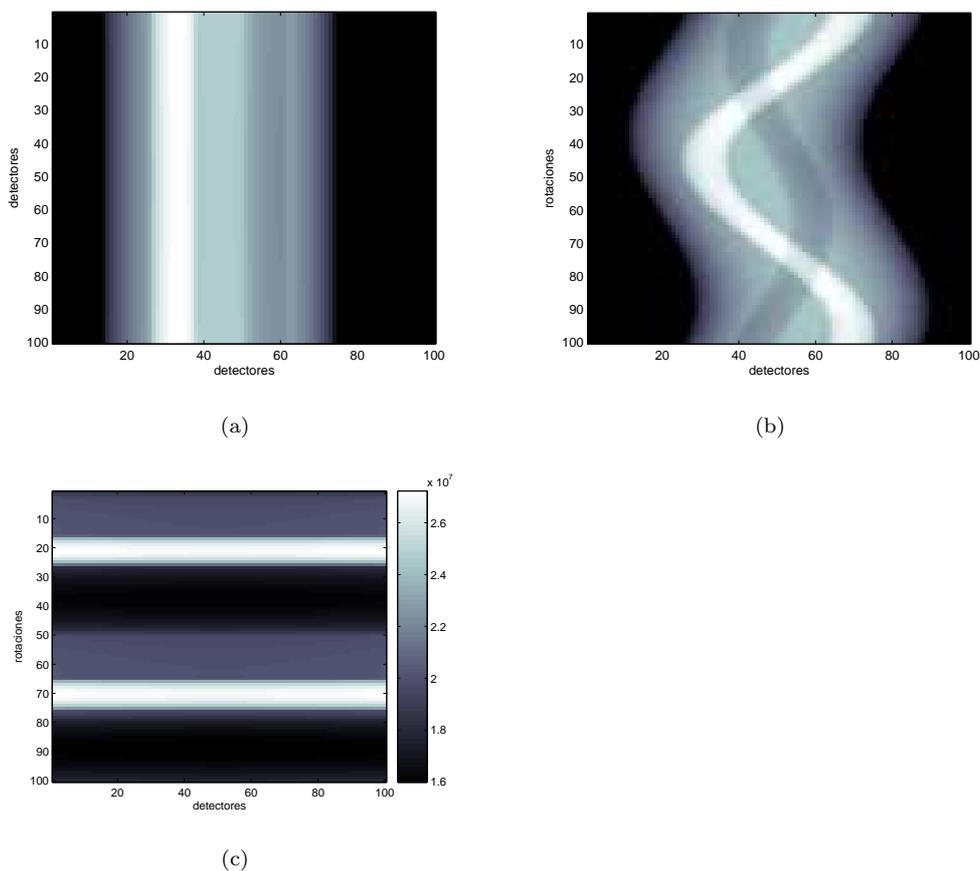


Figura A.6: Proyección del *phantom* de Shepp Logan 3D en cortes correspondientes (a) al plano detector para la rotación 50, (b) al plano detector horizontal 50 en función de las rotaciones y (c) al plano detector vertical 50 en función de las rotaciones.

A.3. Opciones de visualización de volúmenes 3D

Los cortes de imágenes reconstruidas 3D y la visualización de imágenes renderizadas se ha realizado mediante el software de procesamiento de imágenes gratuito OSIRIX versión 3.0.2 para Macintosh [84].

Posteriormente a la renderización del volumen se ha aplicado una textura transparente a los contornos obtenidos para hacer posible la visualización del volumen a través de las superficies exteriores sin necesidad de cortes. El empleo

de estas transparencias en el software de visualización da lugar a una textura en la imagen a trazos que tiene como propósito contribuir a que la imagen no parezca plana sino un volumen.

Bibliografía

- [1] Ministerio interior: <http://www.msc.es>, Último acceso Abr. 2008.
- [2] P. W. Wiest, J. A. Locken, P. H. Heintz, and F. A. Mettler. CT scanning: A major source of radiation exposure. *Seminars in Ultrasound, CT and MRI*, 23(5):402–410, Oct. 2002.
- [3] D. Hart and B. F. Wall. UK population dose from medical X-ray examinations. *Eur. J. Rad.*, 50:285–291, Jun. 2004.
- [4] D. J. Brenner, E. J. Hall, and D. Phil. Computed tomography: An increasing source of radiation exposure. *N. Engl. J. of Med.*, 357:2277–84, Nov. 2007.
- [5] E. Stephen, P. F. Butler, K. E. Applegate, S. B. Birnbaum, L. F. Brateman, J. M. Hevezi, F. A. Mettler, R. L. Morin, M. J. Pentecost, G. G. Smith, K. J. Strauss, and R. K. Zeman. American college of radiology white paper on radiation dose in medicine. *J. Am. Coll Radiol.*, 4:272–284, 2007.
- [6] G. Wang, H. Yu, and B. De Man. An outlook on X-ray CT research and development. *Medical Physics*, 35(3):1051–1064, Mar. 2008.
- [7] S. Webb. *The Physics of Medical Imaging*. Bristol: Institute of Physics, 1998.
- [8] J. A. Lodge. Thorn EMI central research laboratory. An anecdotal history. *Phys. Technol.*, (18):258–268, 1987.
- [9] D. Brase, P. E. Kinahan, R. Clackdoyle, M. Defrise, C. Comtat, and D. W. Townsend. Fast fully 3D image reconstruction in PET using planograms. *IEEE. Trans. Med. Imaging*, 23(4):413–425, Apr. 2004.
- [10] R. S. Deans. *The Radon Transform and Some of Its Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1983.

- [11] A. C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.
- [12] L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress. Practical cone beam algorithm. *J. Opt. Soc. Am.*, pages 612–619, 1984.
- [13] P. Grangeat. Mathematical framework of cone-beam 3D reconstruction via the first derivative of the radon transform. *Mathematical Models in Tomography, Springer Lecture Notes in Mathematics*, (1497):66–97, 1991.
- [14] A. Katsevich. Theoretically exact filtered backprojection-type inversion algorithm for spiral CT. *SIAM J. Appl. Math.*, 62(6):2012 – 2026, 2002.
- [15] B. M Crawford and G. T Herman. Low-dose, large-angled cone-beam helical CT data reconstruction using algebraic reconstruction techniques. *Image and Vision Comp.*, 25:78–94, 2007.
- [16] J. Nuyts, B. De Man, P. Dupont, M. Defrise, P. Suetens, and L. Mortelmans. Iterative reconstruction for helical CT : A simulation study. *Phys. Med. Biol.*, 43:729–737, 1998.
- [17] R. G. Wells, M. A. King, P. H. Simkin, P. F. Judy, A. B. Brill, H. C. Gifford, R. Licho, P. H. Pretorius, P. B. Schneider, and D. W. Seldin. Comparing filtered backprojection and ordered-subsets expectation maximization for small-lesion detection and localization in ^{67}Ga SPECT. *J. Nucl. Med.*, 41:1391–1399, 2000.
- [18] G. Wang, M. W. Vannier, and P. C. Cheng. Iterative X-ray cone beam tomography for metal artifact reduction and local region reconstruction. *Microscopy and Microanalysis*, 5(1):58–65, Jul 1999.
- [19] A. H. Andersen. Algebraic reconstruction in CT from limited views. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 8(1), 1989.
- [20] G. Wang, D. Snyder, J. O’Sullivan, and M. Vannier. Iterative deblurring for CT metal artifact reduction. *IEEE. Trans. Med. Imaging*, 15(5):657–663, Oct. 1996.
- [21] N. Sinha and J. T. W. Yeow. Carbon nanotubes for biomedical applications. *IEEE Trans. Nano.*, 4(2):180–196, 2005.

- [22] A. Ramotar. *General Geometry Computed Tomography Reconstruction*. PhD thesis, University of Waterloo, 2006.
- [23] X. Li, J. Ni, and G. Wang. Parallel iterative cone-beam CT image reconstruction on a PC cluster. *J. X-Ray Sci. and Tech.*, 13:1–10, 2005.
- [24] J. Ni, X. Li, T. He, and G. Wang. Review of parallel computing techniques for computed tomography image reconstruction. *Current Med. Imaging Reviews*, 2(4):405–414, 2006.
- [25] J. Ni, T. He, X. Li, S. Wang, and G. Wang. Internet-based distributed computing system for EM medical image reconstruction. *Lecture Note in Computer Science*, 3251:495–501, 2004.
- [26] T. M. Benson and J. Gregor. Framework for iterative cone-beam micro-CT reconstruction. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 52(5):1335–1340, Oct. 2005.
- [27] K. Mueller and R. Yagel. Rapid 3D cone beam reconstruction with the simultaneous algebraic reconstruction technique using 2D texture mapping hardware. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 19:1227–1237, 2000.
- [28] K. Mueller. *Fast and Accurate Three-Dimensional Reconstruction From Cone-Beam Projection Data Using Algebraic Methods*. PhD thesis, School of the Ohio State University, Department of Computer and Information Science, 1998.
- [29] A. Andersen and A. Kak. Simultaneous algebraic reconstruction techniques (SART): A superior implementation of the ART algorithm. *Ultrason. Imag.*, 6:81–94, 1984.
- [30] H. M. Hudson and R. S. Larkin. Accelerated image reconstruction using ordered subset of projection data. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 13(4):601 – 609, Dec. 1994.
- [31] B. De Man, S. Basu, J. B. Thibault, J. Hsieh, J. A. Fessler, C. Bouman, and K. Sauer. A study of four minimization approaches for iterative reconstruction in X-ray CT. California, USA, May 2005.
- [32] K. Lange and R. Carson. EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *J. Comput. Assist. Tomogr.*, (8):306–316, 1984.

- [33] L. A. Shepp and Y. Vardi. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 1(2):113–122, 1982.
- [34] C. M. Chen, C. Y. Lee, and Z. H. Cho. Maximum a posteriori estimation for SPECT using regularization techniques on massively parallel computers. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 10:513–522, 1991.
- [35] J. Sunnegårdh. *Iterative Enhancement of Non-Exact Reconstruction in Cone-Beam CT*. PhD thesis, Linköpings University, Department of Electrical Engineering, 2004.
- [36] S. Matej and R. M. Lewitt. Efficient 3D grids for image reconstruction using spherically-symmetric volume elements. *IEEE Trans. Nucl. Sci*, 42(4):1361–1370, Aug. 1995.
- [37] F. Xu and K. Mueller. A comparative study of popular interpolation and integration methods for use in computed tomography. USA., 2006. IEEE ISBI.
- [38] V. Israel-Jost, P. Choquet, S. Salmon, C. Blondet, E. Sonnendrücker, and A. Constantinesco. Pinhole SPECT imaging: Compact projection/backprojection operator for efficient algebraic reconstruction. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 25(2):158–167, Feb. 2006.
- [39] B. De Man and S. Basu. Distance-driven projection and backprojection in three dimension. *Physics in Medicine and Biology*, 49:2463–2475, 2004.
- [40] Y. L. Hsieh, G. T. Gullberg, G. L. Zeng, and R. H. Huesman. Image reconstruction using a generalized natural pixel basis. *IEEE Trans. Nucl. Sci*, 43(4):2306 – 2319, Aug. 1996.
- [41] Y. L. Hsieh, G. T. Gullberg, G. L. Zeng, and R. H. Huesman. Projection space image reconstruction using strip functions to calculate pixels more “natural” for modeling the geometric response of the SPECT collimator. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 17(1):24 – 44, Feb. 1998.
- [42] A. C. Sauve, A. O. Hero, W. L. Rogers, S. J. Wilderman, and N. H. Clinthorne. 3D image reconstruction for a compton SPECT camera model. *IEEE Trans. Nucl. Sci*, 46(6):2075–2084, Dec. 1999.
- [43] C. Mora and M. Rafecas. Polar pixels for high resolution small animal PET. USA, San Diego, Nov. 2006. IEEE NSS-MIC Conf. Rec.

- [44] T. Hebert, R. Leahy, and M. Singh. Fast MLE for SPECT using an intermediate polar representation and a stopping criterion. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 22(5):615–619, Feb. 1988.
- [45] R. Bevilacqua, E. Bozzo, and O. Menchi. Comparison of four natural pixel bases for SPECT imaging. *J. Comp. and Appl Math.*, 198(2):361–377, Jan. 2007.
- [46] L. Jian, L. Litaoa, C. Penga, S. Gia, and W. Zhifang. Rotating polar-coordinate ART applied in industrial CT image reconstruction. *NDT and E International*, 40(4):333–336, Dec. 2007.
- [47] S. Natterer. *The Mathematics of Computed Tomography*. New York: Wiley, 1986.
- [48] G. T. Herman. *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computed Tomography*. New York: Academic Press, 1980.
- [49] Y. X. Wang, X. Wang, X. X. Guo, Y. J. Pang, Z. X. Wang, and S. Chai. Effects on spatial resolution of CT image caused by nonstationary axis. Guangzhou, China, Aug. 2005. Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics.
- [50] Y. X. Wang, X. Wang, X. X. Guo, Y. J. Pang, Z. X. Wang, and S. Chai. Effects on spatial resolution of CT image caused by inaccurate angle localization. Guangzhou, China, Aug. 2005. Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics.
- [51] X. Pan, L. Yu, and C. M. Kao. Spatial-resolution enhancement in computed tomography. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 24(2):246–253, Feb. 2005.
- [52] E. Castele. *Model-based approach for Beam Hardening Correction and Resolution Measurements in Microtomography*. PhD thesis, Universiteit Antwerpen, Departement Natuurkunde, 2004.
- [53] I. A. Cunningham and P. F. Judy. *The Biomedical Engineering Handbook*. Editado por Joseph D. Bronzino (Boca Raton: CRC Press LLC), 2000.
- [54] A. Albiol, V. Naranjo, and J. Prades. *Tratamiento Digital de la Señal. Teoría y Aplicaciones*. Servicio de Publicaciones Universidad Politécnica de Valencia, 1999.

- [55] The open source computed tomography simulator: <http://ctsim.org/>, Último acceso Feb. 2008.
- [56] H. Turbell. *Cone Beam Reconstruction using Filtered Backprojection*. PhD thesis, Linköpings University, Department of Electrical Engineering, 2001.
- [57] L. A. Shepp and B. F. Logan. The fourier reconstruction of a head section. *IEEE Trans. Nucl. Sci*, 21(3):21–43, Jun. 1974.
- [58] R. Siddon. Fast calculation of the exact radiological path length for a three dimensional CT array. *Med. Phys*, 12:252–255, 1985.
- [59] P. Joseph. An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 1:192–6, 1982.
- [60] T. Köhler, T. Turbell, and M. Grass. Efficient forward projection through discrete data sets using tri-linear interpolation. Lyon, France, Oct. 2000.
- [61] K. Maureemootoo, S. Webb, M. O. Leach, and R. E. Bentley. The performance characteristics of a simulator-based CT scanner. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 7(2):91–98, Jun. 1998.
- [62] Centro de tomografía de rayos X de la Universidad de Ghent: <http://www.ugct.ugent.be/>, Último acceso Feb. 2008.
- [63] Oxford instruments X – Ray technology group: <http://www.oxfordxtg.com/>, Último acceso Abr. 2008.
- [64] Hamamatsu photonics, flat panel sensor: <http://jp.hamamatsu.com/>, Último acceso Abr. 2008.
- [65] H. Guan and R. Gordon. Computed tomography using algebraic reconstruction techniques (ARTs) with different projection access schemes: A comparison study under practical situations. *Phys. Med. Biol*, 41:1727–1743, Mar. 1996.
- [66] K. Mueller, R. Yagel, and J. Wheller. Fast implementation of algebraic methods for three-dimensional reconstruction from cone-beam data. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 18(6):538–548, Jun. 1999.
- [67] R. M. Lewitt. Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms. *Phys. Med. Biol*, 37(3):705–716, Dec. 1992.

- [68] R. M. Lewitt. Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms. *Phys. Med. Biol.*, 37(3):705–716, 1992.
- [69] M. Magnusson. Linogram and other direct fourier methods for tomographic reconstruction. Technical report, Linköpings, Suecia, Linköping Studies in Science and Technology, Dissertation 320, 1993.
- [70] C. R Crawford. CT filtration aliasing artifacts. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 10(1):99–102, Mar. 1991.
- [71] J. Gregor and D. A. Huff. A computational study of the focus-of-attention EM – ML algorithm for PET reconstruction. *Parallel Computing*, (24):1481–1497, 1998.
- [72] N. Dyn. *Interpolation and approximation by radial and related functions. Approximation Theory.*, volume vol. VI. Editado por C. K.Chui, and L. L Schumaker and J. D Ward (New York: Academic).
- [73] M. J. D. Powell. *The theory of radial basis function approximation in 1990. Advances in Numerical Analysis II: Wavelets, Subdivision, Algorithms and Radial Functions.* Editado por W. A. Light (Oxford: Oxford University Press), 1992.
- [74] S. Matej and R. M. Lewitt. Practical considerations for 3D reconstruction using spherically symmetric volume elements. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 15(1):68–79, Feb. 1996.
- [75] A. Ziegler, T. Köhler, T. Nielsen, and R. Proksa. Efficient projection and backprojection scheme for spherically symmetric basis functions in divergent beam geometry. *Medical physics*, 33(12):4653–, 2006.
- [76] V. J. Traver and F. Pla. Similarity motion estimation and active tracking through spatial-domain projections on log-polar images. *Comput. Vision and Image Unders.*, 97:209–241, Sep. 2004.
- [77] C. Mora, M. J. Rodríguez-Álvarez, and J. V. Romero. New pixellation scheme for CT algebraic reconstruction to exploit matrix symmetries. *Comp. and Math. with Appl.*, 53(3):715–726, Jan. 2008.
- [78] B. Zhang and G. L. Zeng. An immediate after-backprojection filtering method with blob-shaped window functions for voxel-based iterative reconstruction. *Phys. Med. Biol.*, 51:5825–5842, 2006.

- [79] J. S. Liow and S. C. Strother. Practical tradeoffs between noise, quantification and number of iterations for maximum-likelihood based reconstructions. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 10(4):563–571, Dec. 1991.
- [80] D. L. Snyder and M. I. Miller. The use of sieves to stabilize images produced with EM algorithm for emission tomography. *IEEE Trans. Nucl. Sci*, 32:3864–72, 1985.
- [81] W. Zbijewski and F. J. Beekman. Comparison of methods for surprising edge and aliasing artefacts in iterative X-ray CT reconstruction. *Phys. Med. Biol.*, 51:1877–1889, 2006.
- [82] J. Qi and R. M. Leahy. Iterative reconstruction techniques in emission computed tomography. *Phys. Med. Biol.*, 51:541–578, 2006.
- [83] J. S. Kole. Statistical image reconstruction for transmission tomography using relaxed ordered subset algorithms. *Phys. Med. Biol.*, 50:1533 – 1545, 2005.
- [84] Osirix imaging software: <http://www.osirixmac.com>, Último acceso Abr. 2008.
- [85] C. Penßel, W. A. Kalender, and M. Kachelrieß. ROI– driven CT trajectories. USA, San Diego, Nov. 2006. IEEE NSS-MIC Conf. Rec.
- [86] T. M. Benson and J. Gregor. Three-dimensional focus of attention for iterative cone-beam micro–CT reconstruction. *Phys. Med. Biol.*, 51:4533–4546, Aug. 2006.
- [87] J. Li, R. J. Jaszczak, K. L. Greer, and R. E. Coleman. Implementation of an accelerated iterative algorithm for cone-beam SPECT. *Phys. Med. Biol*, 39:643–53, 1994.
- [88] Y. Ye and J. Zhu. Geometric studies on variable radius spiral cone-beam scanning. *Med. Phys.*, 31(6):1473–1480, 2004.

