



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Obtención del movimiento en un punto de una estructura hiperestática mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

En este artículo docente se explicará, mediante un ejemplo, la aplicación del Principio de las Fuerzas Virtuales para la obtención del movimiento en un punto cualquiera de una estructura hiperestática.

2 Introducción

El Principio de las Fuerzas Virtuales permite la resolución estática de las estructuras hiperestáticas a partir de la obtención de las fuerzas redundantes, mediante el planteamiento de estados virtuales de fuerzas y la resolución de las ecuaciones de balance energético resultantes.

Asimismo, una vez que la estructura está resuelta estáticamente, se puede obtener el movimiento en un punto cualquiera de la misma mediante este mismo principio (sea la estructura hiperestática o isostática), teniendo en cuenta que el estado de fuerzas virtuales debe estar en auto-equilibrio, por lo que únicamente será necesario plantear una configuración estática admisible.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- Determinar si la estructura es hiperestática y resolverla estáticamente mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales.
- Obtener el movimiento en un punto cualquiera mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales: planteamiento del estado virtual de fuerzas, selección de la redundante virtual, obtención de la configuración estática admisible, planteamiento y resolución de la ecuación de balance.

4 Obtención de reacciones y movimientos mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales

4.1 Datos y esquema del proceso de cálculo

La estructura de la figura 1, con comportamiento elástico y lineal, está formada por 2 barras y 1 cable. Los apoyos, nudos A y D están articulados y el C es articulado deslizante. Por otra parte, los apoyos A y C se han modelizado como elásticos en dirección vertical, siendo las constantes de resorte $k=10000$ kN/m.

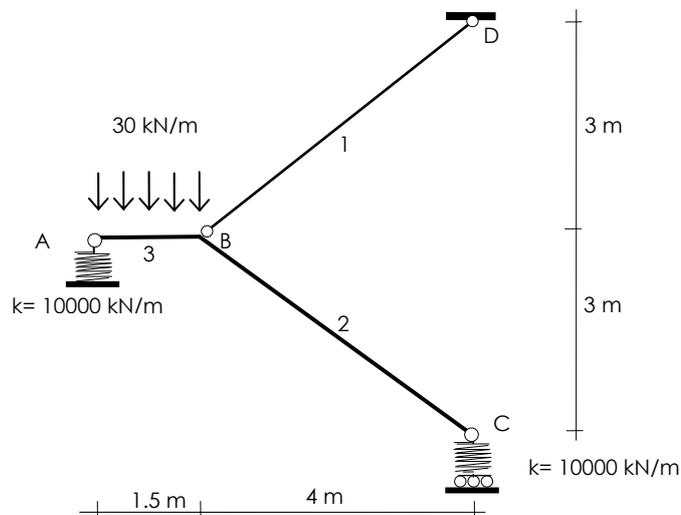
La estructura es hiperestática y tiene una carga uniforme sobre la barra 3. Se desea obtener el valor del movimiento vertical del nudo B, dy_B , despreciando la energía de deformación por cortante.

Datos de las barras

barra 1: $1 \Phi 12$ mm.

barra 2: $A = 28.5$ cm² $I = 1940$ cm⁴

barra 3: Se considera que esta barra es indeformable (sólido rígido)
 $E = 210000$ N/mm²



F

Figura 1. Esquema de la estructura

Al ser la estructura hiperestática, debe resolverse estáticamente para poder determinar el valor del movimiento mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales. Se resolverá estáticamente también mediante el principio de las Fuerzas Virtuales (aunque podría utilizarse también el Método de Flexibilidades, por ejemplo).

El proceso de cálculo que se seguirá es el siguiente:

- Resolución estática mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales: selección de la fuerza redundante, planteamiento del estado virtual de fuerzas, obtención de la redundante y de todas las incógnitas estáticas así como de las leyes de esfuerzos.
- Obtención del movimiento mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales: planteamiento del estado virtual, de la configuración estática admisible virtual y de la ecuación de balance de la que se deducirá el valor del movimiento buscado.

4.2 Resolución estática mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales (PFV)

La estructura es hiperestática de grado 1 ($GIE = 1$), por tanto habrá que plantear un único estado de fuerzas virtuales para determinar el valor de la fuerza redundante seleccionada, R_C . Podrían haberse seleccionado como fuerza redundante las demás reacciones externas e incluso el momento interno en el extremo final de la barra 3 (o inicial de la barra 2).

PLANTEAMIENTO DEL EQUILIBRIO EN LA ESTRUCTURA REAL

Se formulan las ecuaciones de equilibrio en la estructura real expresando todas las incógnitas estáticas así como las leyes de esfuerzos en función de la fuerza redundante elegida (figura 2)

$$\sum F_x = 0 \quad R_{xA} + 0.8 R_D = 0 \quad (1)$$



$$\Sigma F_y=0 \quad R_{yA} + R_{yC} + 0.6 R_D = 45 \quad (2)$$

$$\Sigma M_2=0 \quad 0.6 R_D \cdot 5.5 + R_{yC} \cdot 5.5 = 0.8 R_D \cdot 3 + 30 \cdot 1.5 \cdot 0.75 \quad (3)$$

La barra 1 sólo trabaja a axil, por lo que proyectamos RD según los ejes globales:

$$R_{xD} = 0.8 R_D \quad R_{yD} = 0.6 R_D \quad (4)$$

Expresamos las reacciones en función de la redundante elegida:

$$R_D = 37.5 - 6.11 R_{yC} \quad (5)$$

$$R_{xA} = -30 + 4.88 R_{yC} \quad (6)$$

$$R_{yA} = 22.5 + 2.66 R_{yC} \quad (7)$$

Se obtienen también las leyes de esfuerzos de las barras en función de la redundante. Al considerar que la barra 3 es indeformable (sólido rígido) su energía de deformación por axil y flector será nula, por lo que no será necesario obtener sus leyes.

$$\text{Barra 1: } N_1 = R_D = 37.5 - 6.11 R_{yC} \quad (8)$$

$$\text{Barra 2: } N_2 = -0.6 R_{yC} \quad (9)$$

$$M_2(x) = 0.8 R_{yC} x \quad (10)$$

(Al haber seleccionado R_{yC} como redundante se simplifican mucho las leyes de esfuerzos en esta barra)

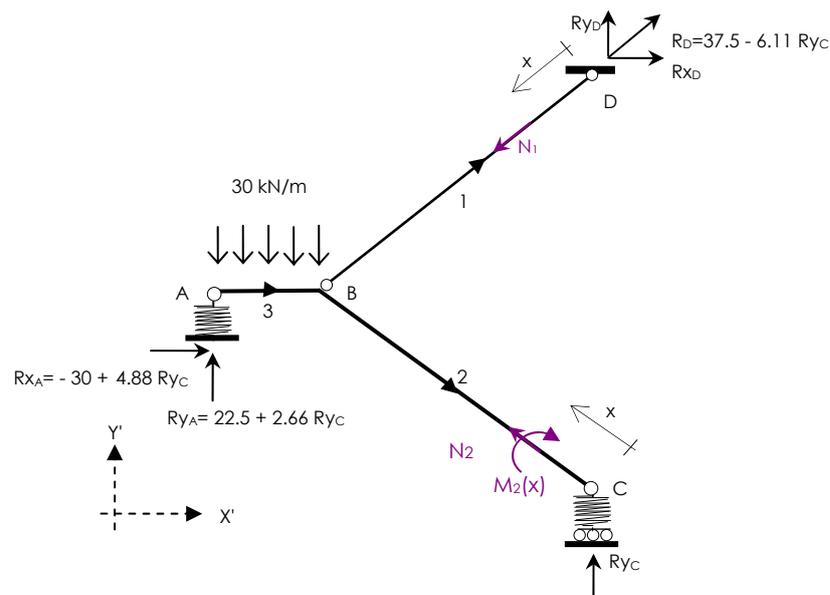


Figura 2. Esquema del equilibrio en la estructura real

PLANTEAMIENTO DEL ESTADO VIRTUAL

En el estado virtual (figura 3) se aplica una única fuerza virtual de valor unidad en el apoyo C, en la dirección de la redundante R_{yC} .

La configuración estática admisible se obtiene anulando la redundante virtual coincidente con la redundante real, es decir $\delta R_{yC} (= 0)$ y equilibrando.

Equilibrio y leyes de esfuerzo en el estado virtual

$$\sum F_x=0 \quad \delta R_{xA} = - 0.8 \delta R_D$$

$$\sum F_y=0 \quad \delta R_{yA} + 0.6 \delta R_D + 1 = 0$$

$$\sum M=0 \quad 0.6 \delta R_D \cdot 5.5 + 1 \cdot 5.5 = 0.8 \delta R_D \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta R_D = - 6.11 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta R_{xA} = 4.88 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta R_{yA} = 2.66 \text{ kN}}$$

Leyes de esfuerzos:

$$\text{Barra 1:} \quad \delta N_1 = - 6.11 \quad (11)$$

$$\text{Barra 2:} \quad \delta N_2 = - 0.6 \quad (12)$$

$$\delta M_2(x) = 0.8 x \quad (13)$$

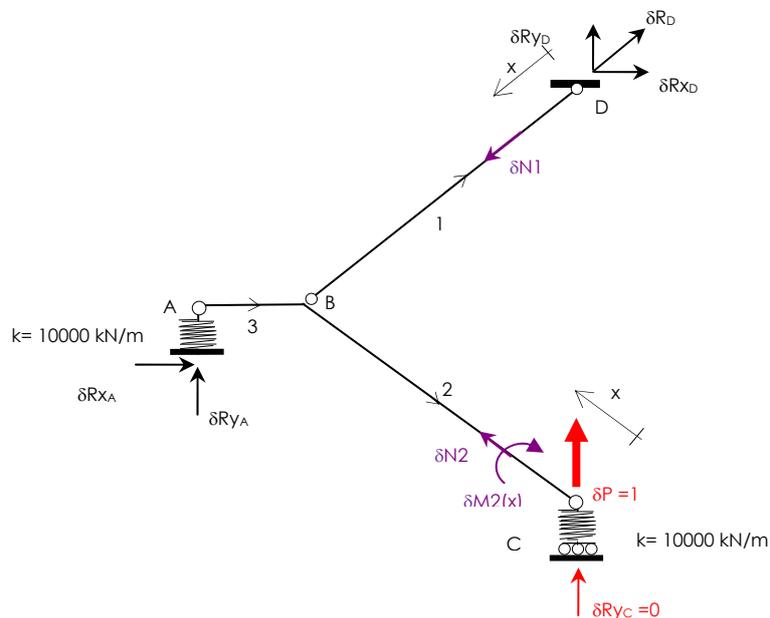


Figura 3. Esquema del equilibrio en la estructura virtual

Obtenidas las leyes del estado real y del estado virtual se plantea la ecuación de balance energético del Principio de las Fuerzas Virtuales

$$\delta W^* = \delta U^* \quad (14)$$



- Trabajo virtual complementario:

$$\begin{aligned}\delta W^* &= 1 \cdot dy_C + \delta R_{y_A} \cdot dy_A = 1 \cdot \left(\frac{-R_{y_C}}{10000} \right) + 2.66 \left(\frac{-R_{y_A}}{10000} \right) = \\ &= 1 \cdot \left(\frac{-R_{y_C}}{10000} \right) + 2.66 \left(\frac{-(22.5 + 2.66 R_{y_C})}{10000} \right) = -0.000807 \cdot R_{y_C} - 0.00598\end{aligned}\quad (15)$$

Al estar permitido el desplazamiento vertical en los muelles de los apoyos A y C, la reacción vertical R_{y_A} y la fuerza 1 aplicadas en los muelles trabajarán en el estado virtual. En la expresión del trabajo se ha sustituido el movimiento real por su expresión en función de la reacción real correspondiente.

- Energía virtual complementaria

$$\begin{aligned}\delta U^* &= \delta U_{a1}^* + \delta U_{a2}^* + \delta U_{f2}^* = \frac{N_1}{EA_1} \delta N_1 L_1 + \frac{N_2}{EA_2} \delta N_2 L_2 + \int_0^{L_2} \frac{M_2(x)}{EI_2} \delta M_2(x) dx = \\ &= \frac{(37.5 - 6.11 R_{y_C}) \cdot (-6.11) \cdot 5}{23738.4} + \frac{(-0.6 R_{y_C}) \cdot (-0.6) \cdot 5}{598500} + \int_0^5 \frac{(0.8 R_{y_C} x)}{4074} (0.8x) dx = \\ &= 0.014412 R_{y_C} - 4.826 \cdot 10^{-2}\end{aligned}\quad (16)$$

Siendo:

δU_{a1}^* , la energía virtual de deformación por axil de la barra 1

δU_{a2}^* , la energía virtual de deformación por axil de la barra 2

δU_{f2}^* , la energía virtual de deformación por flexión de la barra 2

La barra 1 no deforma por flexión y la 3 ni por axil ni por flexión.

Sustituyendo en la ecuación de balance (14) se obtiene el valor de la redundante buscada:

$$-0.000807 \cdot R_{y_C} - 0.00598 = 0.014412 R_{y_C} - 4.826 \cdot 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{y_C} \approx 2.7 \text{ kN}}$$

A partir de la fuerza redundante se obtienen todas las incógnitas estáticas, así como las leyes de esfuerzos, sustituyendo en las ecuaciones (4), (5), (6) y (7), (8), (9) y (10).

$$(4) \quad R_{x_D} = 0.8R_D \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{x_D} = 16.8 \text{ kN}}$$

$$R_{y_D} = 0.6R_D \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{y_D} = 12.6 \text{ kN}}$$

$$(5) \quad R_D = 37.5 - 6.11 R_{y_C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_D = 21 \text{ kN}}$$

$$(6) \quad R_{x_A} = -30 + 4.88 R_{y_C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{x_A} = -16.8 \text{ kN}}$$

$$(7) \quad R_{y_A} = 22.5 + 2.66 R_{y_C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{y_A} = 29.7 \text{ kN}}$$

Leyes de esfuerzos:

$$(8) \quad \text{Barra 1:} \quad N_1 = 21 \quad (17)$$

$$(9) \quad \text{Barra 2:} \quad N_2 = -0.6 R_{y_C} = -0.6 (2.7) = -1.62 \quad (18)$$



$$(10) \quad M_2(x) = 0.8 R_{yC} x = 0.8 (2.7) x = 2.16 x \quad (19)$$

$$\text{Barra 3:} \quad N_3 = - R_{xA} = 16.8 \quad (20)$$

$$M_3(x) = R_{yA} x - 15x^2 = 29.7x - 15x^2 \quad (21)$$

El equilibrio final se representa en la figura 4.

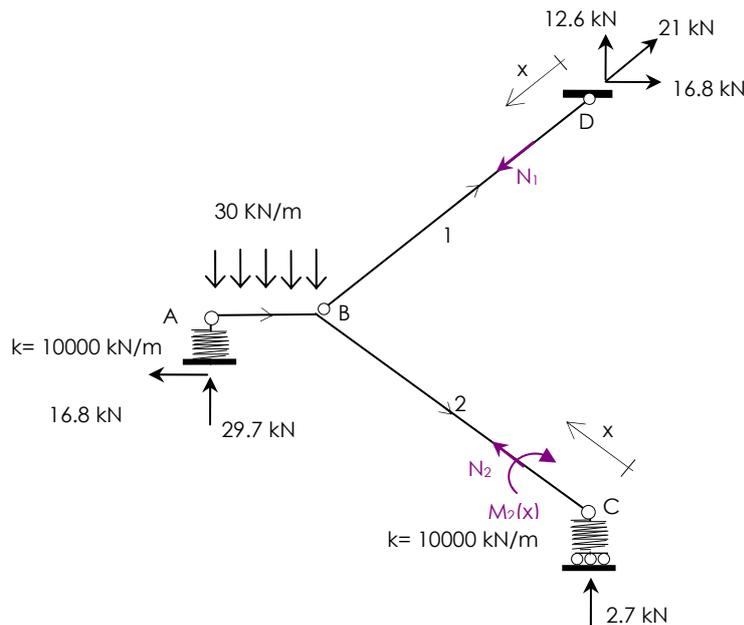


Figura 4. Esquema de la estructura real completa

Al obtener el valor de las reacciones verticales en los muelles se puede calcular directamente el movimiento en los mismos:

$$dy_A = \left(\frac{-R_{yA}}{k} \right) = \frac{-29.7}{10000} = -2.97 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \left(\downarrow \right)$$

$$dy_C = \left(\frac{-R_{yC}}{k} \right) = \frac{-2.7}{10000} = -0.27 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \left(\downarrow \right)$$

4.3 Obtención del movimiento mediante el Principio de las Fuerzas Virtuales (PFV)

La estructura real ya está definida estáticamente. Utilizaremos el PFV para calcular el desplazamiento vertical del nudo B, aplicando una fuerza virtual unidad vertical en dicho nudo.

El estado virtual hiperestático se transforma en isostático anulando la redundante virtual. Tomaremos como redundante virtual δR_{yC} ya que, de este modo, las leyes virtuales en la barra 2 serán nulas, simplificándose así la resolución del problema.



Este estado virtual (figura 5) no guarda relación con el estado virtual de la primera parte del problema.

Planteamos el equilibrio y una vez obtenidas las reacciones determinamos las leyes de esfuerzos.

Equilibrio en el estado virtual

$$\sum F_x=0 \quad \delta R_{X_A} = - 0.8 \delta R_D$$

$$\sum F_y=0 \quad \delta R_{Y_A} + 0.6 \delta R_D + 1 = 0$$

$$\sum M=0 \quad 0.6 \delta R_D \cdot 5.5 + 1 \cdot 1.5 = 0.8 \delta R_D \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta R_D = - 1.66 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta R_{X_A} = 1.328 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta R_{Y_A} = -0.004 \text{ kN}}$$

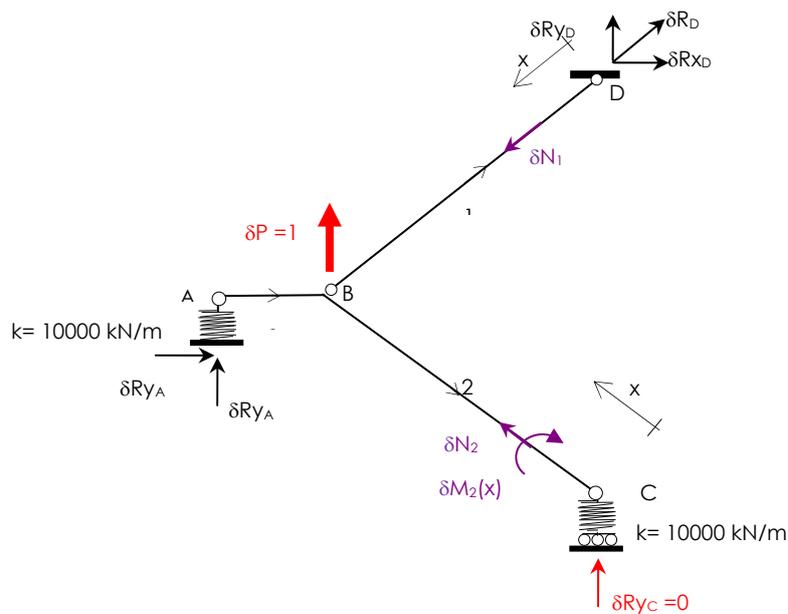


Figura 5. Esquema del estado virtual para la obtención del movimiento

Leyes de esfuerzos en el estado virtual 1

$$\text{Barra 1: } \delta N_1 = - 1.66 \quad (22)$$

$$\text{Barra 2: } \delta N_2 = 0 \quad (23)$$

$$\delta M_2(x) = 0 \quad (24)$$

Se plantea la ecuación de balance energético para calcular el movimiento, ya que éste será la única incógnita;

$$\delta W^* = \delta U^* \quad (25)$$



- Trabajo virtual complementario¹:

$$\delta W^* = 1 \cdot dy_B + \delta R_{yA} \cdot (dy_A) = dy_B + (-0.004) (-2.97 \cdot 10^{-3}) = dy_B + 1.2 \cdot 10^{-5} \quad (26)$$

- Energía virtual complementaria

$$\delta U^* = \delta U_{a1}^* = \frac{N_1}{EA_1} \delta N_1 L_1 = \frac{21 \cdot (-1.66) \cdot 5}{23738.4} = -7.342 \cdot 10^{-3} \quad (27)$$

Sustituyendo en la ecuación (25) se obtiene el desplazamiento vertical del nudo B:

$$dy_B = -7.354 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \left(\downarrow \right)$$

El signo negativo indica que su sentido es hacia abajo

5 Cierre

A lo largo de este tema se ha obtenido el movimiento en un punto de una estructura hiperestática mediante el Principio de las Fuerzas virtuales, tras haberla resuelto estáticamente con ese mismo principio.

Como ejercicio de aplicación se propone obtener el giro y el desplazamiento horizontal del nudo B de la estructura de la figura 6, mediante el PFV.

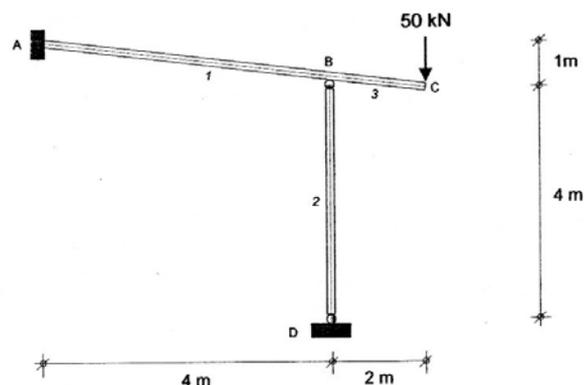


Figura 6. Estructura propuesta

Datos de las barras: barras 1 y 3: IPE 300: $A = 53.8 \text{ cm}^2$ $I = 8360 \text{ cm}^4$
 barra 2: $\Phi 100.5$: $A = 14.92 \text{ cm}^2$ $I = 168 \text{ cm}^4$
 $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

(Resultado: $dy_B = -3.03 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\theta_B = -6.27 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$)

¹ Se ha utilizado el criterio de signos geométrico: la reacción virtual es negativa y el desplazamiento real, calculado a partir de la reacción real, es negativo.



6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Apuntes de clase.

[2] Basset, L.; Clasificación estática de las estructuras, 2012. Colección: Artículos docentes ETSA: <http://hdl.handle.net/10251/16447>

6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Esquema de la estructura.

Figura 2. Esquema del equilibrio en la estructura real.

Figura 3. Esquema del equilibrio en la estructura virtual.

Figura 4. Equilibrio en la estructura real completa.

Figura 5. Esquema del estado virtual para la obtención del movimiento.

Figura 6. Estructura propuesta