



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Aplicación del Principio de Conservación de la Energía y del Teorema de la Carga Unidad para la obtención de movimientos

<b>Apellidos, nombre</b>	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
<b>Departamento</b>	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
<b>Centro</b>	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



## 1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se obtendrá el movimiento en un punto de una estructura isostática mediante el Principio de Conservación de la Energía, PCE, y, posteriormente, mediante el Teorema de la Carga Unidad, TCU, (caso particular del Principio de las Fuerzas Virtuales). El desarrollo del tema se realizará mediante un ejemplo práctico.

## 2 Introducción

En ocasiones se desea obtener el movimiento en un punto concreto de la estructura, sin necesidad de resolverla cinemáticamente por completo.

Cuando la estructura es isostática o se ha resuelto estáticamente es posible calcular dicho movimiento mediante el Principio de Conservación de la Energía (PCE) siempre que haya una fuerza aplicada en ese punto y en la dirección del movimiento buscado. Esa fuerza debe además ser la única que genere un trabajo exterior. Se planteará la ecuación de balance energético cuya única incógnita será el movimiento buscado.

Si no hay una fuerza aplicada en el punto y dirección del movimiento buscado hay que recurrir al Principio de las Fuerzas Virtuales, y, generalmente, al Teorema de la Carga Unidad, caso particular del anterior. En ese caso, se planteará un estado virtual con una fuerza virtual unidad aplicada en ese punto, generándose un trabajo virtual complementario externo e interno. De la ecuación de balance energético se obtendrá el movimiento buscado.

## 3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- Determinar si es aplicable el PCE para la obtención del movimiento deseado y, si no lo es, simplificar la estructura para que lo sea.
- Obtener el movimiento mediante el PCE
- Plantear el estado virtual necesario para la obtención del movimiento mediante el TCU
- Obtener el movimiento mediante el TCU

## 4 Cálculo del movimiento en un punto mediante el PCE y el TCU

### 4.1 Datos y esquema del proceso de cálculo

La estructura de la figura 1, con comportamiento elástico y lineal, está formada por 10 barras articuladas entre sí y 7 nudos (5 libres y 2 apoyos). Los apoyos, nudos D y G son, respectivamente, un apoyo deslizante y un empotramiento.

La estructura es isostática y está cargada con tres cargas puntuales aplicadas en los nudos A, B y C. Se obtendrá el movimiento vertical del nudo F ( $dy_F$ ), despreciando la energía de deformación por cortante.

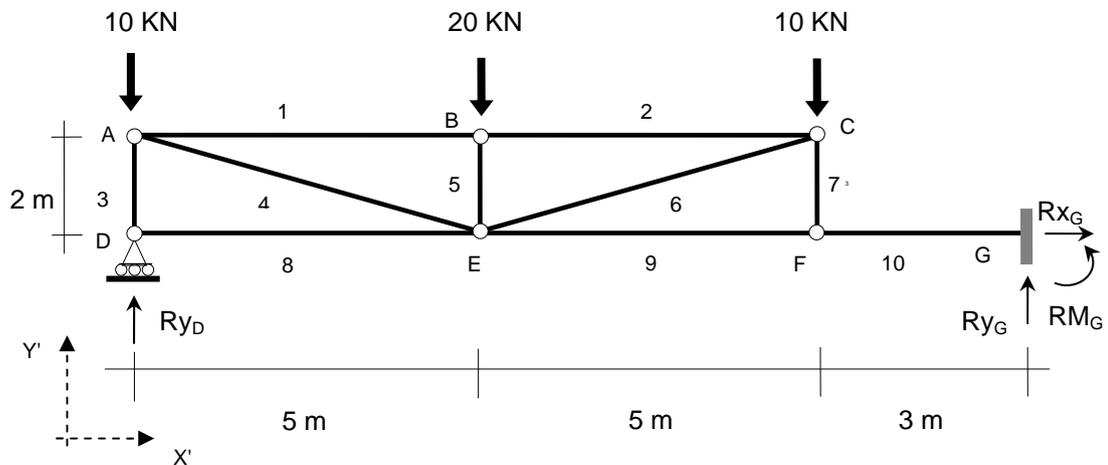


Figura 1. Esquema de la estructura

El proceso de cálculo que se seguirá es el siguiente:

- Aplicabilidad del Principio de Conservación de la Energía.
- Obtención del movimiento mediante el Principio de Conservación de la Energía (previa simplificación de la estructura si es el caso). Obtención del trabajo y de la energía de deformación y planteamiento de la ecuación de balance energético.
- Obtención del movimiento mediante el Teorema de la Carga Unidad: planteamiento del estado virtual y de la ecuación de balance. Se resolverá manteniendo la estructura completa, comprobando que es equivalente al planteamiento sobre la misma simplificación que en el caso anterior.

## 4.2 Aplicabilidad del Principio de Conservación de la Energía (PCE)

La estructura es isostática por lo que puede resolverse estáticamente aplicando las ecuaciones de equilibrio, es decir, el primer requisito para poder aplicar el PCE se cumple.

Con el PCE, teniendo en cuenta un comportamiento elástico y lineal de la estructura, se plantea la ecuación de balance energético siguiente:

$$W^* = W_e = W_{ext}/2 = U = U^* \quad (1)$$

Siendo:

$W^*$ : trabajo complementario de las fuerzas exteriores

$W_e$ : trabajo elástico de las fuerzas exteriores

$W_{ext}$ : trabajo total de las fuerzas exteriores

$U$ : energía de deformación

$U^*$ : energía de deformación complementaria



Si aplicamos el PCE a la estructura de la figura tendremos la siguiente ecuación de balance energético:

$$W^* = U^* \quad (2)$$

Siendo:

$$W^* = \frac{W_{\text{ext}}}{2} = \frac{(-10) dy_A + (-20) dy_B + (-10) dy_C}{2} \quad (3)$$

$$U^* = \sum_{i=1}^9 U_{ax_i}^* + U_{fl_{10}}^* \quad (\text{La barra 10 no tiene axil ya que } Rx_G = 0) \quad (4)$$

Podemos apreciar claramente como de esta forma no podemos utilizar el PCE para calcular  $dy_F$ , ya que, dado que hay tres fuerzas exteriores aplicadas sobre tres nudos que se desplazan, tenemos tres incógnitas en la ecuación, y, además, no son el movimiento buscado ya que ninguna de ellas está en el nudo F.

No puede utilizarse el PCE directamente por lo que habrá que estudiar si es posible su simplificación para poder aplicarlo.

### 4.3 Simplificación de la estructura para la aplicación del Principio de Conservación de la Energía (PCE)

A la vista de la estructura que se propone podemos apreciar como la subestructura de la izquierda formada por la celosía transmitirá únicamente una fuerza vertical a la barra de la derecha (figura 2), por tanto, si la sustituimos podremos obtener el desplazamiento vertical buscado.

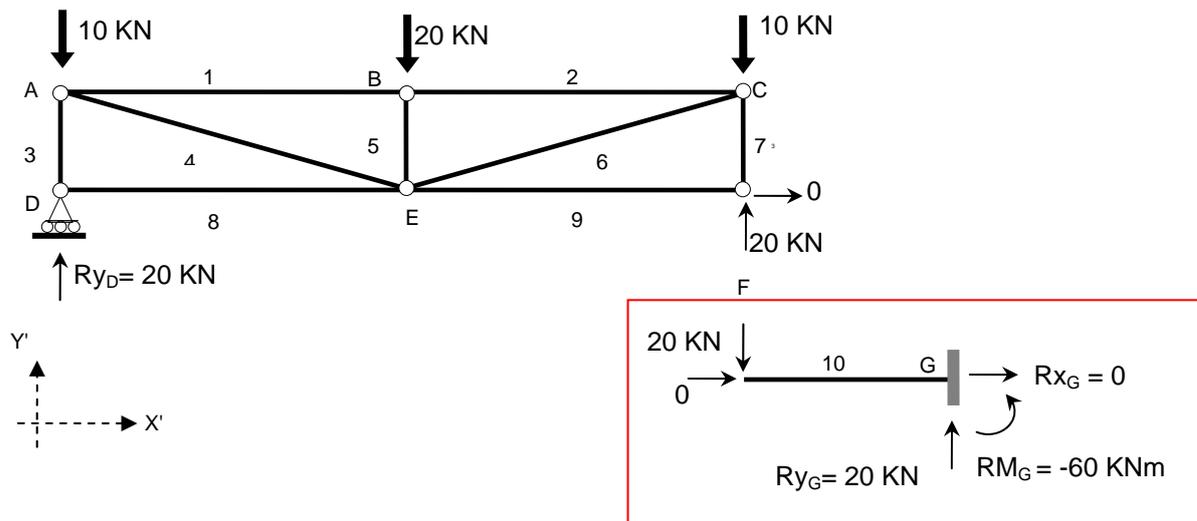


Figura 2. Esquema del equilibrio en las subestructuras

Por tanto, para poder utilizar el PCE en la obtención de  $dy_F$ , se suprime la subestructura de la celosía, sustituyéndola por sus fuerzas sobre la subestructura formada por la barra 10.



#### 4.4 Obtención del movimiento $dy_F$ mediante el Principio de Conservación de la Energía

Tenemos la subestructura representada en la figura 3.

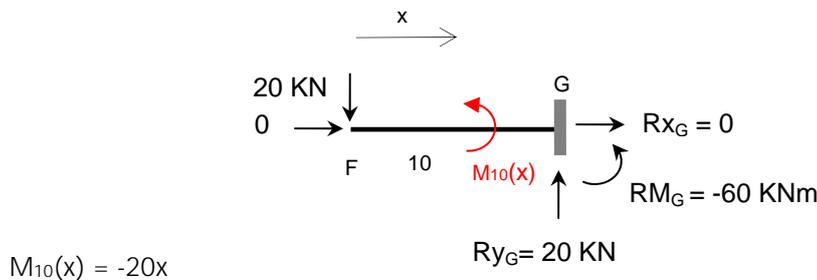


Figura 3. Subestructura para el cálculo de  $dy_F$  con PCE

Si aplicamos el PCE a esta subestructura tendremos la siguiente ecuación de balance energético:

$$W^* = U^* \quad (5)$$

Siendo:

$$W^* = \frac{W_{\text{ext}}}{2} = \frac{(-20) dy_F}{2} \quad (6)$$

$$U^* = U_{fl_0}^* = \int_0^{L_{10}} \frac{(M_{10}(x))^2}{2EI} dx = \int_0^3 \frac{(-20x)^2}{2EI} dx = \frac{3600}{2EI} \quad (7)$$

Sustituyendo trabajo y energía se obtiene el valor del desplazamiento:

$$\frac{(-20) dy_F}{2} = \frac{3600}{2EI} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{dy_F = -\frac{180}{EI} \text{ m}} \quad (\downarrow) \quad (8)$$

#### 4.5 Obtención del movimiento $dy_F$ mediante el Teorema de la Carga Unidad

Calculemos ahora el desplazamiento vertical  $dy_F$ , sin simplificar la estructura, mediante el Teorema de la Carga Unidad, TCU.

Plantearémos el equilibrio en la estructura real determinando, además de las reacciones en los apoyos, los esfuerzos en las barras.

Posteriormente, plantearemos un estado virtual de fuerzas que consistirá en aplicar una fuerza virtual unidad vertical en el nudo F. Se equilibrará el estado virtual obteniendo los esfuerzos virtuales en las barras.

Finalmente, a partir de la ecuación de balance energético (equivalente a una ecuación de compatibilidad) se obtendrá el movimiento buscado.



**Estructura real:**

Equilibrio global de la estructura:

$$\sum F_x=0 \quad \boxed{R_{xG} = 0} \quad (9)$$

$$\sum F_y=0 \quad R_{yD} + R_{yG} = 40 \quad (10)$$

$$\sum M_D=0 \quad R_{yG} \cdot 13 + R_{MG} = 20 \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 200 \quad (11)$$

Aislamos la barra 10 y tomamos momentos en el extremo inicial:

$$\sum M_i=0 \quad R_{yG} \cdot 3 + R_{MG} = 0 \quad R_{MG} = -3 R_{yG} \quad (12)$$

Sustituyendo en (11):  $R_{yG} \cdot 13 - 3 R_{yG} = 200 \Rightarrow \boxed{R_{yG} = 20 \text{ KN}}$

Volviendo a las ecuaciones (10) y (12):  $\Rightarrow \boxed{R_{yD} = 20 \text{ KN}}$

$\Rightarrow \boxed{R_{MG} = -60 \text{ KNm}}$

Una vez calculadas las reacciones iremos efectuando los equilibrios parciales, barras y nudos, para calcular los esfuerzos de extremo y los axiles en las barras de la celosía, equilibrio que se representa en la figura 4.

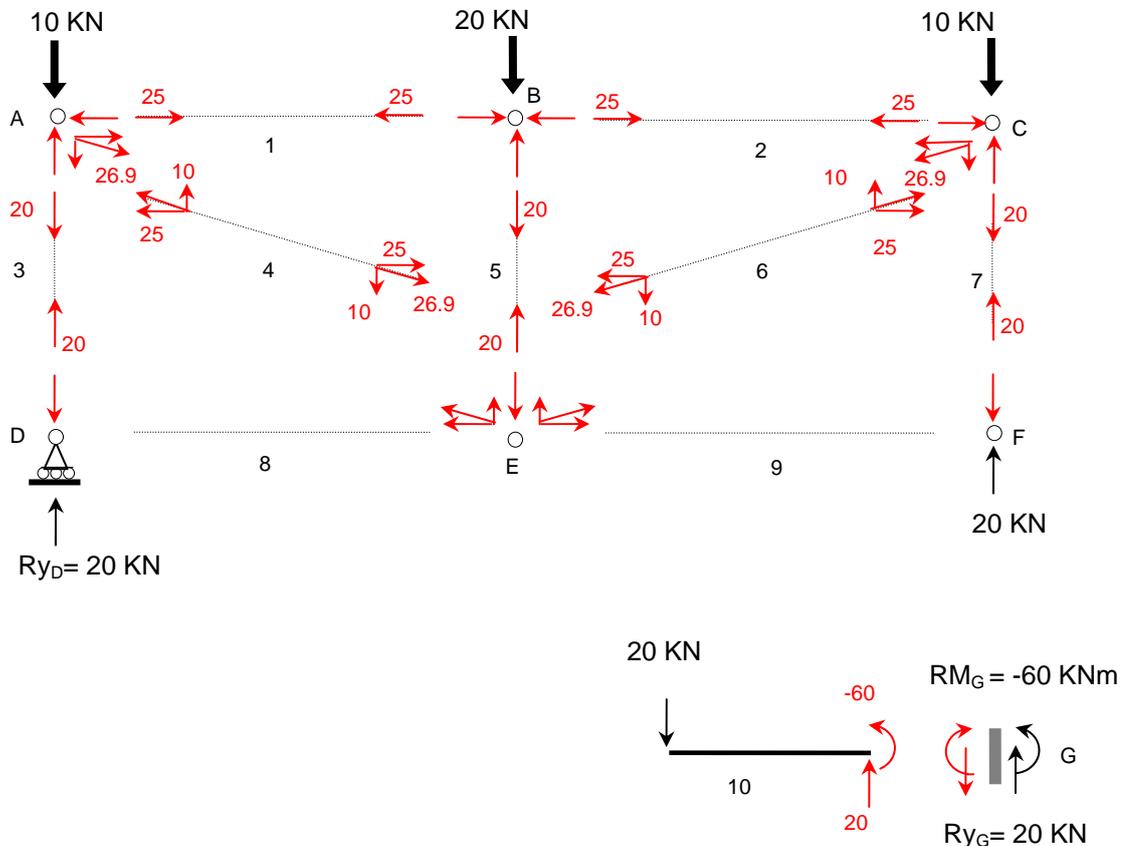


Figura 4. Equilibrio en la estructura real completa



Leyes:

$$N_1 = N_2 = -25$$

$$N_4 = N_6 = 26.9$$

$$N_3 = N_5 = N_7 = -20$$

$$N_8 = N_9 = N_{10} = 0$$

$$M_{10}(x) = -20x$$

**Estado virtual:**

Se aplica una fuerza virtual unidad vertical en el nudo F (figura 5).

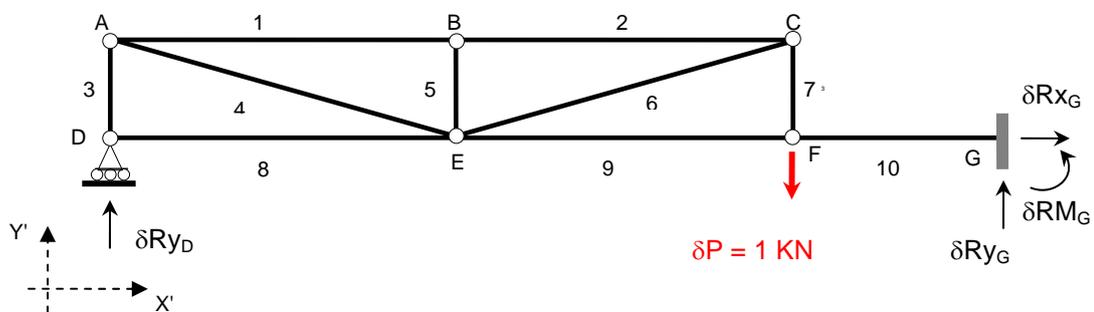


Figura 5. Esquema del estado virtual

Equilibrio global de la estructura:

$$\sum F_x = 0 \quad \boxed{\delta R_{x_G} = 0} \quad (13)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \delta R_{y_D} + \delta R_{y_G} = 1 \quad (14)$$

$$\sum M_D = 0 \quad \delta R_{y_G} \cdot 13 + \delta R_{M_G} = 1 \cdot 10 \quad (15)$$

Aislamos la barra 10 y tomamos momentos en el extremo inicial:

$$\sum M_i = 0 \quad \delta R_{y_G} \cdot 3 + \delta R_{M_G} = 0 \quad \delta R_{M_G} = -3 \delta R_{y_G} \quad (16)$$

Sustituyendo en (15):  $\delta R_{y_G} \cdot 13 - 3 \delta R_{y_G} = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta R_{y_G} = 1 \text{ kN}}$

Volviendo a las ecuaciones (14) y (16):  $\Rightarrow \quad \boxed{\delta R_{y_D} = 0 \text{ kN}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\delta R_{M_G} = -3 \text{ kN}}$

Leyes:

$$\delta N_1 = \delta N_2 = \delta N_3 = \delta N_4 = \delta N_5 = \delta N_6 = \delta N_7 = \delta N_8 = \delta N_9 = \delta N_{10} = 0$$

$$\delta M_{10}(x) = -x$$



Sólo trabaja en el estado virtual la barra 10 a flexión. Tendremos, por tanto la misma ecuación de balance energético que si hubiésemos simplificado la estructura desde el principio.

### Ecuación de balance energético

La ecuación de balance energético es la siguiente:

$$\delta W^* = \delta U^* \quad (17)$$

Siendo:

$\delta W^*$ : trabajo virtual complementario

$$\delta W^* = -1 \, dy_F \quad (18)$$

$\delta U^*$ : energía de deformación virtual complementaria

$$\delta U^* = \delta U_{fl_{10}}^* = \int_0^{L_{10}} \frac{M_{10}(x) \delta M_{10}(x)}{EI} dx = \int_0^3 \frac{(-20x)(-x)}{EI} dx = \frac{180}{EI} \quad (19)$$

Sustituyendo trabajo y energía se obtiene el valor del desplazamiento:

$$-1 \, dy_F = \frac{180}{EI} \quad \Rightarrow \quad dy_F = -\frac{180}{EI} \, m \quad (\downarrow) \quad (20)$$

Tanto con el PCE como con el TCU se ha utilizado el criterio de signos geométrico para fuerzas y movimientos: las fuerzas llevan el signo correspondiente según el sistema de ejes globales adoptado y los movimientos, por ser incógnitas, se consideran positivos. El signo del resultado nos dirá el sentido del movimiento según los ejes globales.

## 5 Cierre

A lo largo de este tema se ha obtenido el desplazamiento vertical del nudo F mediante el Principio de Conservación de la Energía (una vez simplificada la estructura) y mediante el Teorema de la Carga Unidad.

Como ejercicio de aplicación se propone calcular el valor del giro en ese mismo nudo (correspondiente al extremo inicial de la barra 10), mediante ambos métodos, si fuese posible.

(Resultado: PCE: no es posible calcularlo por este método ya que, aunque la estructura pueda simplificarse no hay ningún momento real aplicado en F.

$$\text{TCU: } \theta_{r_{10}} = \frac{90}{EI} \text{ rad)}$$



## 6 Bibliografía

### 6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Apuntes de clase.

### 6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Esquema de la estructura.

Figura 2. Esquema del equilibrio en las subestructuras

Figura 3. Subestructura para el cálculo de  $dy_F$  con PCE

Figura 4. Equilibrio en la estructura real completa

Figura 5. Esquema del estado virtual