UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

El modelo no lineal de crecimiento logístico: estudio y solución

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Villanueva Micó, Rafael Jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

Resumen de las ideas clave

El objetivo de este trabajo es estudiar el modelo de crecimiento logístico o de Verhulst, el cual puede considerarse la base de los modelos no lineales formulados a través de ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s). El trabajo motiva la introducción del modelo logístico para superar las limitaciones del modelo de crecimiento exponencial debido a Malthus. La exposición del modelo persigue por un lado proporcionar la interpretación del mismo desde diferentes formulaciones equivalentes del modelo para, posteriormente, justificar matemáticamente sus principales propiedades analíticas, tales como la monotonía y curvatura, y concluir así la forma de sigmoide que caracteriza a la solución. Este estudio creemos que resulta particularmente formativo porque, en lugar de realizarse a partir de la expresión explícita de la solución del modelo (la cual también se explica en el trabajo), se deduce a partir de la propia e.d.o. en que se basa el modelo logístico.

1 Introducción

El estudio de modelos continuos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s) resulta una parte fundamental de la formación matemática a nivel universitario, y en particular, en los estudios con intensificación en economía donde el carácter dinámico de las variables económicas hace muy apropiada la utilización de esta herramienta matemática. En este trabajo se estudiará un modelo no lineal sencillo, denominado modelo logístico o de Verhlulst, para introducir al lector en la modelización dinámica del crecimiento de poblaciones. Como veremos en el desarrollo del trabajo, este modelo retiene conceptualmente muchas ideas fértiles para el estudio posterior de modelos más complejos, lo que hace que sea un ejemplo muy adecuado para iniciarse al estudio de otros modelos continuos más complejos. El estudio del modelo se motivará a partir de las limitaciones un modelo más sencillo de tipo lineal, el denominado modelo exponencial o de Malthus que predice crecimiento ilimitado bajo ciertos supuestos. Posteriormente, utilizando resultados elementales sobre teoría de e.d.o.'s calcularemos la solución del modelo y exploraremos sus principales propiedades tales como la monotonía, curvatura y comportamiento a largo plazo.

2 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Reconocer el valor formativo de los modelos dinámicos basados en e.d.o.'s así como su potencialidad y limitaciones para estudiar la compleja realidad económica, particularizando esta crítica al modelo logístico de crecimiento de poblaciones y su estudio motivado a partir de las limitaciones del modelo exponencial.
- Estudiar los aspectos cualitativos y cuantitativos de modelos formulados a través de e.d.o.'s y discutir las propiedades que se infieren a partir, primero de su formulación y después de su solución.

3 El modelo continuo de crecimiento logístico o de Verhulst

3.1 Planteamiento e interpretación del modelo

La introducción del modelo de crecimiento logístico está motivada por el intento de mejorar el modelo continuo de crecimiento exponencial debido a T.R. Malthus (véase [1]). En el modelo malthusiano, cuyas variables son:

- $p(t)$: población en el instante t,
- p_0 : población inicial en el instante t_0,
- α constante de crecimiento relativo de la población,

se asume que la variación de la población está dada a través del problema de valor inicial (p.v.i.) basado en una e.d.o. de primer orden lineal homogénea a coeficientes constantes dado en la Ecuación 1.

$$\left.\begin{array}{rcl} p'(t) & = & \alpha p(t), \quad t > t_0 \geq 0 \\ p(t_0) & = & p_0 \end{array}\right\}, \quad \alpha \in \mathrm{IR} \quad y \quad p_0 > 0$$

Ecuación 1. Problema de valor inicial (p.v.i.) que define el modelo exponencial *o de Malthus.*

Es sencillo ver que la solución del modelo de Malthus está dada por la Ecuación 2.

$$p(t) = \begin{cases} p_0 e^{\alpha(t-t_0)} & \text{si} \quad \alpha \neq 0, \\ p_0 & \text{si} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Ecuación 2. Dinámica de la población del modelo de crecimiento dado en la Ec.1.

En el caso en que el parámetro α es positivo, el modelo predice una explosión de la población a largo plazo (véase Ecuación 3)

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ p_0 & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Ecuación 3. Comportamiento asintótico o a largo plazo de $p(t)$ *en el modelo de Malthus.*

Este resultado está obviamente en contradicción con el hecho de que en la práctica real ningún sistema poblacional puede crecer indefinidamente, ya que, los aforos de los ecosistemas y sus recursos son siempre limitados. Esta deficiencia del modelo exponencial motivó históricamente que se formulasen otros modelos que la superasen. Fue el matemático belga Pierre François Verhulst quien pocos años después de Malthus introdujo en el modelo malthusiano un término de freno no lineal $-\gamma\big(p(t)\big)^2$ siendo $\gamma > 0$, y probó que el nuevo modelo explicaba satisfactoriamente la evolución de numerosas poblaciones, cumpliendo además que no explotaba a largo plazo. El modelo resultante puede verse en la Ecuación 4. Obsérvese que en la formulación de dicho modelo se asume $\alpha > 0$, ya que el modelo logístico se plantea en el caso en que el modelo exponencial no resulta satisfactorio.

$$\left.\begin{array}{rcl} p'(t) & = & \alpha p(t)-\gamma\big(p(t)\big)^2, \quad t>t_0\geq 0 \\ p(t_0) & = & p_0 \end{array}\right\}, \quad \alpha,\gamma>0 \quad \text{y} \quad p_0>0$$

Ecuación 4. Problema de valor inicial (p.v.i.) que define el modelo logístico o de Verhulst.

Aunque todavía no hemos calculado la solución del modelo logístico, sí es posible saber su comportamiento a largo plazo, es decir, el valor de $\lim_{t\to\infty} p(t)=L$, asumiendo la existencia de dicho límite y, teniendo en cuenta que nos interesa justificar un comportamiento no explosivo (es decir, que $L\neq\infty$) y al mismo tiempo, que no estamos interesados en soluciones en las que la población se extingue, que corresponde al caso $L=0$ (situación que, recordemos, también pronostica el modelo malthusiano, pero que no conduce a ninguna contradicción). En efecto, si tomamos límites cuando $t\to\infty$ en la e.d.o. dada en la Ec.4 se deduce que el valor de L es $L=\alpha/\gamma$ (véase Ecuación 5).

$$0=L'=\Bigg(\underbrace{\lim_{t\to\infty}p(t)}_{L}\Bigg)'=\lim_{t\to\infty}p'(t)=\lim_{t\to\infty}\Big(\alpha p(t)-\gamma\big(p(t)\big)^2\Big)=\alpha\underbrace{\lim_{t\to\infty}p(t)}_{L}-\gamma\Bigg(\underbrace{\lim_{t\to\infty}p(t)}_{L}\Bigg)^2=\alpha L-\gamma L^2$$

$$0=\alpha L-\gamma L^2=L(\alpha-\gamma L)\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl} L & = & 0 \text{ (hay extinción)} \\ L & = & \dfrac{\alpha}{\gamma}>0 \end{array}\right.$$

Ecuación 5. Cálculo del comportamiento a largo plazo en el modelo logístico a partir de la e.d.o. dada en la Ec.4, i.e., sin conocer explícitamente su solución.

Esta deducción del comportamiento del modelo a largo plazo, nos permite, suponiendo la existencia del límite de su solución a la largo plazo, reescribir la e.d.o. dada en la Ec. 4 de una forma equivalente que permite reinterpretar de forma muy intuitiva el modelo logístico (véase Ecuación 6).

$$\left.\begin{array}{rcl} p'(t) & = & \gamma(L-p(t))p(t), \quad t>t_0\geq 0 \\ p(t_0) & = & p_0 \end{array}\right\}, \quad \gamma>0, L=\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{y} \quad p_0>0$$

Ecuación 6. Reformulación del modelo logístico en términos de su comportamiento a largo plazo.

Obsérvese que el modelo así escrito es del tipo Malthus, pero cuyo coeficiente de crecimiento relativo (denotada por α en el modelo de Malthus) es ahora $\alpha(t)=\gamma(L-p(t))$ variable. Este coeficiente es negativo (positivo) siempre que la población en cada instante t (no) supere al límite máximo L que se puede alcanzar a largo plazo. Teniendo en cuenta el signo del segundo miembro de la e.d.o. dada en la Ec. 6, se tienen las conclusiones mostradas en la Ecuación 7, relativas a la monotonía, i.e., crecimiento/decrecimiento de la solución.

$$\text{Si } p(t) < L \underset{p(t)>0}{\overset{\gamma>0}{\Rightarrow}} \gamma(L - p(t))p(t) > 0 \overset{\text{e.d.o.}}{\Rightarrow} p'(t) > 0 \Rightarrow p(t) \text{ crece}$$
$$\text{Si } p(t) > L \underset{p(t)>0}{\overset{\gamma>0}{\Rightarrow}} \gamma(L - p(t))p(t) < 0 \overset{\text{e.d.o.}}{\Rightarrow} p'(t) < 0 \Rightarrow p(t) \text{ decrece}$$

Ecuación 7. Conclusiones acerca de la monotonía de la solución del modelo logístico a partir de la reformulación del modelo dada en la Ec.6.

Estas conclusiones nos indican que la población disminuye (aumenta) siempre que (no) ha superado (llegado) a su límite máximo de crecimiento. Esto refuerza, desde otro punto de vista, las diferencias significativas entre el modelo exponencial y el modelo logístico en términos de los coeficientes α y $\alpha(t) = \gamma(L - p(t))$, respectivamente (véase Tabla 1).

Modelo de Malthus	**Modelo de Verhulst**
signo de α	signo $\alpha(t) = \gamma(L - p(t))$
Si $\alpha > 0 \Rightarrow$ Explosión a $+\infty$	Si $L > p(t) \Rightarrow \alpha(t) > 0 \Rightarrow p(t)$ crece y $\lim_{t\to\infty} p(t) = L$
Si $\alpha < 0 \Rightarrow$ Extinción a 0	Si $L < p(t) \Rightarrow \alpha(t) < 0 \Rightarrow p(t)$ decrece y $\lim_{t\to\infty} p(t) = L$

Tabla 1 Comparación de los comportamientos entre los modelos de Malthus y Verhulst respecto de los coeficientes α y $\alpha(t) = \gamma(L - p(t))$, respectivamente.

Posteriormente deduciremos rigurosamente las propiedades más relevantes del comportamiento de la solución del modelo logístico, lo que nos permitirá representar gráficamente dicha solución. Con objeto de sacar mayor jugo a la interpretación del modelo, adelantamos en la Gráfica 1 dicha representación. Suponiendo que $p(t) < L$, obsérvese en dicha gráfica que el segundo miembro de la e.d.o. dada en la Ec. 5 indica que la variación instantánea de la población en el instante t, dada por $p'(t)$, es directamente proporcional (siendo la constante de proporcionalidad $\gamma > 0$) a la población $p(t)$ que hay en dicho instante por el aforo disponible: $L - p(t)$. Si por ejemplo, el modelo de crecimiento estuviera contextualizado en la evolución de individuos infectados en cada instante t por una determinada epidemia de una población total de L individuos, entonces $p'(t)$, indicaría la variación instantánea de los individuos que se contagian. Esta variación es proporcional a los encuentros entre los individuos contagiados en dicho instante (dados por $p(t)$) y los individuos sanos (dado por $L - p(t)$). El número de posibles encuentros es precisamente el producto de ambas magnitudes: $p(t)(L - p(t))$. Como cada vez que se produce un encuentro no es seguro que se produzca contagio de la enfermedad, el parámetro $\gamma > 0$, involucra en cierta manera no explícita la probabilidad de éxito en el contagio.

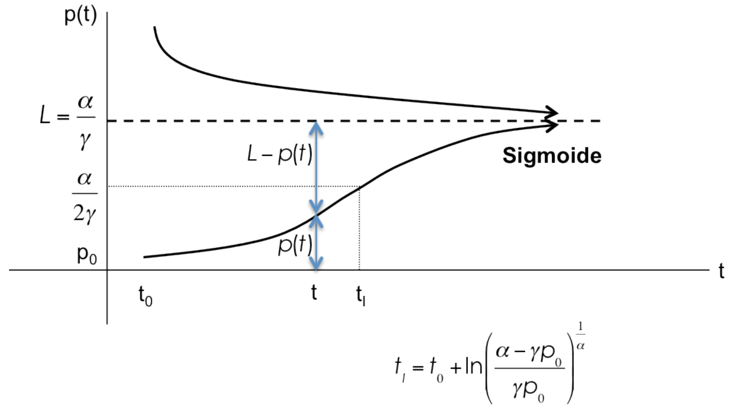

Figura 1. Representación gráfica de la solución del modelo logístico de Verhulst.

3.2 Solución del modelo y estudio asintótico

En este apartado calcularemos la solución del modelo logístico. Para ello aplicaremos paso a paso el método de separación de variables (los cálculos involucrados se detallan en las Ecuaciones 8 y 9):

- Paso 1 (P1): Considerar las variables p y t introduciendo la notación $p = p(t)$ y $p'(t) = dp/dt$.
- Paso 2 (P2): Separar en cada miembro de la e.d.o. las variables p y t.
- Paso 3 (P3): Calcular las integrales de cada miembro de paso P2 utilizando técnicas apropiadas para el cálculo de primitivas.
- Paso 4 (P4):

$$p'(t) = \gamma(L - p(t))p(t) \underset{\substack{p=p(t) \\ p'(t)=\frac{dp}{dt}}}{\overset{P1}{\Rightarrow}} \frac{dp}{dt} = \gamma(L-p)p \overset{P2}{\Rightarrow} \frac{dp}{(L-p)p} = \gamma dt$$

Ecuación 8. Pasos 1 y 2 del método de separación de variables para resolver la e.d.o. del modelo logístico.

$$P3: \int_{p_0}^{p} \frac{dr}{(L-r)r} = \gamma \int_{t_0}^{t} dr \overset{P3}{\Rightarrow} \frac{1}{L}\ln\left(\left|\frac{p(L-p_0)}{p_0(L-p)}\right|\right) = \gamma(t-t_0) \overset{P4}{\Rightarrow} p = \frac{Lp_0}{p_0 + (L-p_0)e^{-L\gamma(t-t_0)}}$$

Ecuación 9. Pasos 3 y 4 del método de separación de variables para resolver la e.d.o. del modelo logístico.

Obsérvese en la Ec.9 que si $p_0 = L$, el numerador de la fracción que hay dentro del logaritmo neperiano que aparece en el proceso de integración realizado en el Paso 3 (P3) se anula y dicho logaritmo no existe. En ese caso, por comprobación directa sobre la e.d.o. logística, claramente se tiene: $p(t) = p_0$ Por lo tanto, la solución del modelo logístico es la función dada en la Ecuación 10.

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{Lp_0}{p_0+(L-p_0)e^{-L\gamma(t-t_0)}} & \text{si} \quad p_0\neq L\\ p_0 & \text{si} \quad p_0=L\end{cases}$$

Ecuación 10. Solución del modelo logístico.

El comportamiento asintótico de la solución se obtiene directamente tomando límites cuando $t\to\infty$ en la expresión dada en la Ec. 10. Obsérvese que este límite es el mismo que el que dedujimos anteriormente sin conocer la expresión explícita de la solución (véase Ecuación 10).

$$\lim_{t\to\infty}p(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{Lp_0}{p_0+(L-p_0)e^{-L\gamma(t-t_0)}}=L=\frac{\alpha}{\gamma}$$

Ecuación 11. Comportamiento asintótico de la solución del modelo logístico.

3.3 Propiedades de la solución del modelo logístico: representación gráfica

En este apartado vamos a justificar la forma de "s" alargada (sigmoide) que tiene la solución del modelo logístico estudiando su monotonía, curvatura, extremos y puntos de inflexión. Por tanto, la representación gráfica mostrada en la Gráfica 1 quedará justificada. Desde luego este es un estudio que se puede realizar de forma clásica a partir de la expresión explícita de $p(t)$ dada en la Ec. 10. Mostraremos a continuación un enfoque alternativo, que es más breve y elegante, para llegar a las mismas conclusiones. Únicamente abordaremos el caso no trivial, es decir, cuando $p(t)\neq p_0$, ya que, en caso contrario la solución es siempre constante.

En primer lugar obsérvese que, como cabe esperar por representar el número de individuos de una población, la expresión de $p(t)$ dada en la Ec. 10 es siempre positiva. En efecto, si reescribimos dicha expresión en la forma dada en la Ecuación 12, como $L=\alpha/\gamma>0, \gamma>0, p_0>0$ se tiene que: $e^{-L\gamma(t-t_0)}<1\ \forall t>t_0$ y $p(t)>0,\ \forall t\geq t_0$, ya que, dicha función está definida a través de un cociente de magnitudes positivas.

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{Lp_0}{p_0\left(1-e^{-L\gamma(t-t_0)}\right)+L} & \text{si} \quad p_0\neq L\\ p_0 & \text{si} \quad p_0=L\end{cases}$$

Ecuación 12. Forma equivalente de la solución del modelo logístico para estudiar su positividad.

Para realizar el estudio, es conveniente (pero no imprescindible) reescribir la e.d.o. del modelo logístico dada en la Ec. 6 en la forma equivalente dada en la Ecuación 13.

$$p'(t)=r\,p(t)\left(1-\frac{1}{L}p(t)\right), \quad r=L\gamma>0$$

Ecuación 13. Segunda reformulación de la e.d.o. del modelo logístico para estudiar la gráfica de su solución.

- **Monotonía y extremos de la solución**

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la solución $p(t)$ del modelo logístico debemos estudiar el signo de la primera derivada de $p(t)$ la cual está dada en la Ecuación 13. Observamos en dicha expresión que $r > 0$ y $p(t) > 0$, por tanto el signo de la primera derivada dependerá del signo del término $1-\frac{1}{L}p(t)$. En la Ecuación 14 se muestra un análisis del signo de esta expresión que justifica la monotonía de la solución del modelo logístico.

$$p'(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{L}p(t) > 0, \quad \forall t > t_0 \quad \Leftrightarrow \quad p(t) < L, \quad \forall t > t_0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0 < L$$
$$p'(t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{L}p(t) < 0, \quad \forall t > t_0 \quad \Leftrightarrow \quad p(t) > L, \quad \forall t > t_0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0 > L$$

$$\begin{array}{l} p(t) \text{ crece si } p_0 < L \\ p(t) \text{ decrece si } p_0 > L \end{array}$$

Ecuación 14. Monotonía de la solución del modelo logístico.

Obsérvese de la Ec. 12 que $p(t) \neq 0$ y $p(t) \neq L \quad \forall t \geq t_0$, lo que justifica a partir de la expresión dada en la Ec. 13 que la primera derivada nunca se anula y por tanto que la función carece de extremos. Estas conclusiones relativas a la monotonía y extremos de la solución de $p(t)$ concuerdan con la representación gráfica mostrada en la Gráfica 1.

- **Curvatura y puntos de inflexión de la solución**

Para estudiar la concavidad y convexidad de la solución $p(t)$ del modelo logístico debemos estudiar el signo de la segunda derivada de $p(t)$ la cual está dada en la Ecuación 15 y se obtiene derivando la propia e.d.o. dada en la Ec. 13 (en lugar de hacerlo a partir de la expresión explícita de la solución dada en la Ec. 10 (o Ec. 12). Obsérvese que para llegar a la expresión dada en la Ec. 15 se ha derivado la Ec. 13 y dicha expresión de la primera derivada se ha vuelto a sustituir en la ecuación obtenida. En la Ec. 15 igualamos a cero la segunda derivada de $p(t)$ y observamos que el único valor con sentido es cuando $p(t) = L/2$, ya que, los otros dos casos: $p(t) = 0$ y $p(t) = L$, corresponden respectivamente a los casos en que no hay individuos o se ha alcanzado el tope del aforo del ecosistema. En la Ecuación 16 mostramos el valor del tiempo donde la segunda derivada toma el valor nulo, o equivalentemente, el instante t_I donde la función $p(t)$ tiene un punto de inflexión.

$$p''(t) = r^2 p(t)\left(1-\frac{2}{L}p(t)\right)\left(1-\frac{1}{L}p(t)\right) = 0 \Rightarrow p(t) = \begin{cases} 0 \\ L \\ \frac{L}{2} \end{cases}$$

Ecuación 15. Estudio de la curvatura de la solución del modelo logístico.

En la Ecuación 16 mostramos el valor del tiempo, que denotaremos por t_I, donde la segunda derivada toma el valor nulo.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

$$p''(t)=0 \Rightarrow p(t)=\frac{L}{2} \Rightarrow \frac{Lp_0}{p_0\left(1-e^{-L\gamma(t-t_0)}\right)+L}=\frac{L}{2} \Rightarrow t_I=t_0+\ln\left(\frac{\alpha-\gamma p_0}{\gamma p_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ecuación 16. Curvatura de la solución del modelo logístico.

Vamos ahora a estudiar el signo de la tercera derivada $p'''(t)$ en t_I para justificar que se trata de un punto de inflexión convexo-cóncavo. En la Ecuación 17 se detallan los cálculos donde se ha tenido en cuenta que $p(t_I)=\frac{L}{2}$ y $p'(t_I)=\frac{rL}{4}$, lo cual se deduce directamente de las Ecs. 16 y 13, respectivamente.

$$p'''(t)=r^2p'(t)\left(1-\frac{2}{L}p(t)\right)\left(1-\frac{1}{L}p(t)\right)+r^2p(t)\left(-\frac{2}{L}p'(t)\right)\left(1-\frac{1}{L}p(t)\right)+r^2p(t)\left(1-\frac{2}{L}\right)\left(-\frac{1}{L}p'(t)\right)$$

$$p'''(t_I)\overset{p(t_I)=\frac{L}{2}}{=}r^2p'(t_I)\underbrace{\left(1-\frac{2}{L}p(t_I)\right)}_{=0}\left(1-\frac{1}{L}p(t_I)\right)+r^2p(t_I)\left(-\frac{2}{L}p'(t_I)\right)\left(1-\frac{1}{L}p(t_I)\right)+r^2p(t_I)\underbrace{\left(1-\frac{2}{L}p(t_I)\right)}_{=0}\left(-\frac{1}{L}p'(t_I)\right)$$

$$p'''(t_I)\underset{p'(t_I)=\frac{rL}{4}}{\overset{p(t_I)=\frac{L}{2}}{=}}r^2\frac{L}{2}\left(-\frac{2}{L}\cdot\frac{rL}{4}\right)\left(1-\frac{1}{L}\cdot\frac{L}{2}\right)=-\frac{r^3L}{8}<0$$

Ecuación 17. Estudio de la clasificación del punto de inflexión de la solución del modelo logístico.

El análisis anterior justifica la representación dada en la Gráfica 1.

4 Cierre

La búsqueda de puentes formativos que conecten diferentes áreas de conocimiento en la formación universitaria entendemos que es un compromiso docente que debemos asumir en el marco de la docencia universitaria actual. En este trabajo, se ha tratado de materializar esta idea conectando las áreas de Matemáticas y Economía, a través del estudio de un modelo logístico de crecimiento de poblaciones basado en una ecuación diferencial ordinaria.

5 Bibliografía

[1] Martínez Calvo, M.C. y Pérez de Vargas, A.: "Métodos Matemáticos en Biología", Ed. Centro de Estudios Ramón Areces, S.A., Madrid 1993.