

MÁSTER UNIVERSITARIO EN DIRECCIÓN FINANCIERA Y FISCAL
TRABAJO FIN DE MÁSTER



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN Y
DIRECCIÓN DE EMPRESAS. UPV

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Aplicación al tipo de interés interbancario EONIA

Directores: Dr. Juan Carlos Cortés López

Dra. Ana María Debón Aucejo

Autor: Salvador Tamarit Ramos

Curso Académico: 2012-2013

Valencia, Mayo de 2013

Índice

Resumen	7
Objetivos del Trabajo Final de Master	9
Antecedentes. Situación actual.....	11
1. El papel del tipo de interés en los mercados financieros	15
1.1. Los tipos de interés a corto a plazo.....	16
1.2. La importancia de los tipos de interés en los Mercados Financieros	17
1.2.1. Los derivados financieros	19
1.2.2. El mercado interbancario	19
1.3. La Política Monetaria de la Unión Europea y los intermediarios financieros existentes.....	20
1.4. Aspectos macroeconómicos.....	24
2. Preliminares estocásticos	27
2.1. Movimiento browniano o proceso de Wiener.....	27
2.2. Propiedades del movimiento browniano.....	28
2.3. Cálculo de $\int_0^t \sigma^2 ds$	30
2.4. Integral de $\int_0^t \sigma^2 ds$ y sus propiedades	31
3. Modelo de tipos de interés de Vasicek o de regresión a la media	37
3.1. Motivación del modelo determinístico de tipos de interés	38
3.2. Motivación del modelo estocástico de tipos de interés: El modelo de Vasicek	40
3.3. Solución del modelo estocástico de Vasicek de tipos de interés mediante el cálculo de $\int_0^t \sigma^2 ds$	41
3.4. Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek.....	43
3.4.1. Propiedades estadísticas.....	43
3.4.2. Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek	47
3.5. Simulación del modelo de Vasicek.....	49
3.5.1. Simulación por re-escalado del tiempo del movimiento browniano	50
3.6. Estudio asintótico del modelo de Vasicek	51
3.7. Estimación por Máxima Verosimilitud de los parámetros del modelo de Vasicek	52
3.8. Modelo de regresión.....	53
3.8.1. Análisis de residuos	55
3.8.2. Medidas de bondad de ajuste.....	57
3.8.3. Predicción	59
3.8.4. Simulación mediante método Monte Carlo: aplicación al caso del modelo de Vasicek.....	60
4. Aplicación y validación del modelo de Vasicek.....	63

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

4.1. Aplicación modelo de regresión	66
4.2. Aplicación del modelo de Vasicek	71
4.3. Validación del modelo de Vasicek	75
4.3.1. Medidas de bondad de ajuste	75
4.3.2. Validación por Intervalos de Confianza	76
4.3.3. Validación de los residuos	78
4.3.4. Predicción	80
Conclusiones	85
Bibliografía	87
Índice de Tablas	89
Índice de Gráficas	91
Índice de Figuras	92

Resumen

Las variaciones de los tipos de interés ofrecidos por el dinero en bancos y otras entidades financieras afectan directamente a los mercados bursátiles. Así, por ejemplo, cuando los tipos de interés suben, se producen bajadas en las cotizaciones de las acciones en la bolsa. Estos movimientos decrecientes pueden explicarse por diferentes razones. En primer lugar, los altos tipos de interés elevan las cargas financieras de las empresas y, por lo tanto, empeoran los resultados económicos, lo que provoca un descenso de los dividendos repartidos y de las cotizaciones. Asimismo, cuando suben los tipos de interés aumenta la rentabilidad de las inversiones en renta fija, como las obligaciones, la deuda pública o los bonos, por ejemplo. Esto provoca un desplazamiento de los inversores hacia los títulos de renta fija, en detrimento de la renta variable, que siempre implica un mayor riesgo. En tercer lugar, los tipos de interés elevados hacen disminuir el consumo al encarecerse la financiación de las ventas a crédito. Esto provoca una disminución de las ventas y, por tanto, un empeoramiento de los resultados de las empresas, lo que afecta a las cotizaciones de las acciones. Desde este simple razonamiento podemos justificar la importancia del estudio de modelos apropiados para modelizar la evolución de los tipos de interés.

En esta memoria estudiaremos y aplicaremos un modelo estocástico para modelizar los tipos de interés en el corto plazo. Este modelo, en su primera formulación fue propuesto por Vasicek (1977) y pertenece a una clase de modelos estocásticos, denominados de un factor. Los modelos de un único factor son representados por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t),$$

donde μ y σ representan funciones deterministas apropiadas, las cuales están relacionadas con la deriva o tendencia y la variabilidad del tipo de interés, respectivamente, y $W(t)$ denota el movimiento browniano o proceso estocástico de Wiener.

El modelo de Vasicek asume que el comportamiento de los tipos de interés tiene un comportamiento regresivo hacia un valor fijo que define el valor estable de los tipos de interés. Dicho modelo es conocido como modelo de regresión a la media. El modelo de Vasicek ha sido utilizado con éxito para modelizar tipos de interés denominados “*short-term*”, i.e., en el corto plazo. Esto es debido a que en su puesta en práctica, se requiere la calibración de los parámetros del modelo, y para que las técnicas estadísticas disponibles -tales como el método de máxima verosimilitud- puedan aplicarse, la hipótesis de que la volatilidad sea constante permite aplicar dichas técnicas satisfactoriamente. Cabe también señalar que desde el trabajo pionero de Vasicek se han propuesto otros modelos similares para modelizar los tipos de interés. Sin embargo, hay que subrayar que en muchos casos la formulación de Vasicek sigue siendo válida y, por tanto, estando en plena vigencia. Generalizaciones del modelo de Vasicek son: el modelo de CIR (Cox, Ingersoll y Ross) (1985) y el modelo de Hull-White (1990). La aplicación práctica del modelo de Vasicek se realiza sobre el tipo de interés EONIA con el objetivo de obtener una predicción probabilística de este tipo de interés. EONIA (Euro OverNight Index Average) es el tipo de interés medio diario (y por tanto a corto plazo) de la Unión Europea, fruto de las operaciones de crédito interbancarias.

Cabe señalar que el desarrollo de esta memoria ha supuesto una ampliación de los conocimientos cursados en el Máster de Dirección Financiera y Fiscal, ya que ha exigido una introducción al cálculo estocástico de Itô. Es por ello, que la primera parte de la memoria estará destinada a introducir los preliminares estocásticos que requieren para estudiar el modelo de Vasicek y, en la segunda parte se dedica a la aplicación del modelo de Vasicek para predecir el tipo de interés EONIA. Esta segunda parte del trabajo, requiere del uso de diferentes técnicas estadísticas para realizar adecuadamente la validación de las predicciones.

Objetivos del Trabajo Final de Master

El principal objetivo de esta memoria es el estudio de técnicas cuantitativas para la predicción de tipos de interés a corto plazo, incluyendo su aplicación a un caso práctico. Concretamente, los resultados teóricos que se estudian en este trabajo se aplican para la modelización y predicción del tipo de interés diario interbancario europeo EONIA. Este índice es utilizado como referencia para la toma de decisiones relativas a operaciones interbancarias y de derivados financieros.

El mencionado estudio se realizará mediante el modelo de Vasicek perteneciente a la familia de los denominados modelos de un factor. Este es un modelo de tipo estocástico que requiere del potente cálculo Itô para su resolución. Por tanto, es también objetivo de esta memoria, el estudio de las herramientas estocásticas pertenecientes a dicho cálculo que se necesitan para estudiar los modelos de un factor y en particular, el modelo de Vasicek.

Un segundo objetivo de este trabajo es la puesta en práctica del modelo de Vasicek para modelizar con datos reales el tipo interbancario EONIA y realizar predicciones probabilísticas. Ello conduce de forma natural al estudio de técnicas estadísticas apropiadas, como los modelos de regresión, el análisis de residuos, construcción de intervalos de confianza, análisis de la bondad de ajuste, realización de simulaciones y obtención de predicciones, que también serán utilizados en el desarrollo de este trabajo.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Antecedentes. Situación actual

Como hemos señalado en el Resumen de esta memoria, las variaciones de los tipos de interés ofrecidos por las entidades financieras afectan directamente a los mercados bursátiles. Cuando los tipos de interés aumentan, se producen descensos en las cotizaciones de las participaciones en los mercados bursátiles. Estos descensos se pueden producir por diferentes razones. En primer lugar, los altos tipos de interés aumentan las cargas financieras de las empresas empeorando sus balances, lo que provoca un descenso de los dividendos y de las cotizaciones. Cuando los tipos de interés aumentan, también lo hace la rentabilidad de las inversiones en renta fija, como por ejemplo, las obligaciones, la deuda pública o los bonos. Esto produce una huida de los inversores hacia los títulos de renta fija. En tercer lugar, los tipos de interés altos provocan una disminución del consumo al encarecerse la financiación en las ventas a crédito. Esto produce una disminución de las ventas y, un empeoramiento de los balances de las empresas, afectando negativamente a las cotizaciones de las acciones. Contrariamente, cuando los tipos de interés bajan, las cotizaciones de las acciones tienden a mejorar. Las causas de esta mejoría se deben, básicamente, a tres factores. El primero de ellos es que la bajada de los tipos de interés reduce los costes financieros de las empresas, con lo que éstas mejoran sus resultados económicos y, por tanto, pueden repartir más dividendos y las cotizaciones de las acciones aumentan. En segundo lugar, si los tipos de interés se reducen, las inversiones de renta fija ofrecen una menor

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

rentabilidad. Este hecho hace más apetecibles las inversiones en renta variable, en detrimento de la renta fija. Por último, los bajos tipos de interés estimulan la obtención de financiación por parte de los consumidores, lo cual eleva las ventas a crédito de las empresas y contribuye a mejorar los resultados de éstas. Por estos motivos, cualquier información relativa a variaciones en los tipos de interés provoca efectos inmediatos en la dinámica de la Bolsa. Posiblemente, los tipos de interés son la variable más influyente en que la evolución del mercado sea alcista o bajista. El comportamiento de los tipos de interés tiene repercusión no solo en la visión inversora de los particulares y entidades privadas que acuden a los mercados financieros, sino también influyen en las políticas monetarias que desarrollan las autoridades que gobiernan en cada país para obtener financiación.

Las ideas expuestas en el párrafo anterior justifican la importancia de estudiar métodos cuantitativos que traten de modelizar el comportamiento de los tipos de interés, con objeto de predecir su valor futuro. Sin embargo, esta tarea no está exenta de dificultades debido a la volatilidad que suele estar asociada al comportamiento de los tipos de interés. Las finanzas cuantitativas es un área de gran importancia en investigación económica que trata, entre otras cosas, de desarrollar modelos apropiados para los tipos de interés.

Las finanzas cuantitativas se iniciaron en Estados Unidos en los años setenta, cuando algunos inversores comenzaron a utilizar fórmulas matemáticas para la asignación de precios de acciones y bonos. Los primeros modelos continuos de tipos de interés se formularon en el marco de la teoría de las ecuaciones diferenciales determinísticas (véase Apartado 3.1). Este tipo de modelos postulan un comportamiento estable de los tipos de interés, y se denominan modelos de tipos de interés con reversión o regresión a la media. Esta hipótesis es sostenida porque las propias leyes del mercado o las autoridades reguladoras de los mismos, tienden a adoptar medidas de forma natural o artificial, respectivamente, para que los tipos de interés tengan un valor estable, ya que, de ellos dependen, como hemos señalado, la dinámica de los mercados. Sin embargo, en la práctica, y de forma más acusada durante los últimos años, se ha observado una gran volatilidad en los tipos de interés. Esto puede atribuirse a la gran cantidad de factores que determinan finalmente el valor de un determinado tipo de interés. Estos factores en muchos casos pueden considerarse de naturaleza aleatoria. Esto ha conducido a que se reformulasen los modelos clásicos deterministas por nuevos modelos matemáticos donde se considera la aleatoriedad. La introducción de esta aleatoriedad se ha realizado formalmente mediante el proceso estocástico de Wiener o también llamado movimiento browniano. La consideración de este nuevo ingrediente, hace que técnicamente el cálculo estocástico clásico sea una herramienta adecuada para resolver

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

las nuevas ecuaciones diferenciales estocásticas a través de las cuales se representan los nuevos modelos. Ello requirió históricamente el desarrollo de un cálculo estocástico especial para manejar tales modelos, siendo Itô (1951) su precursor en el ámbito matemático. Posteriormente, fue Merton (1969) quien introdujo el cálculo estocástico en su aplicación en las finanzas.

Los primeros modelos continuos de tipo estocásticos orientados a modelizar los tipos de interés se deben a Roll (1970,1971), Merton (1973, 1974) y Long (1974). Pero fue Vasicek (1977) quien en un trabajo¹ pionero propuso un modelo estocástico de reversión a la media para los tipos de interés. Este trabajo ha representado un punto de inflexión en la modelización de los tipos de interés, ya que, posteriormente se han desarrollado otros modelos más elaborados como el modelo Cox-Ingersoll-Ross² (1985) o su generalización debida a Maghsoodi³ (1996), pero todos ellos basados las ideas que formuló Vasicek en su trabajo, que han tenido una gran repercusión en el ámbito financiero

¹ Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium characterization of the term structure", Journal of Financial Economics 5:177-188.

² Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica 53:385-407.

³ Maghsoodi, Y. (1996). "Solution of the extended CIR Term Structure and Bond Option Valuation". Mathematical Finance 6: 89-109.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

1. El papel del tipo de interés en los mercados financieros

El estudio de Vasicek (1977) se basa en la importancia que tienen los tipos de interés en los mercados financieros debido a que el comportamiento de los tipos de interés tiene repercusión no solo en la visión inversora de los particulares y entidades privadas que acuden a los mercados financieros, sino también influyen en las políticas monetarias que desarrollan las autoridades que gobiernan en cada país para obtener financiación. El modelo de Vasicek se centra en una economía de mercado eficiente, por lo tanto, existe información completa por parte de todos los agentes económicos que actúan en los mercados y no existe información privilegiada que permitan obtener cualquier tipo de ventaja.

A continuación desarrollaremos los diferentes tipos de interés a corto plazo, definiremos los mercados financieros y la política monetaria llevada a cabo por el BCE junto con los diferentes intermediarios financieros existentes en el marco europeo. Por último, explicaremos el rol que desempeñan a nivel macroeconómico los tipos de interés en la economía.

1.1. Los tipos de interés a corto a plazo

Uno de los tipos de interés que realizan operaciones a corto plazo son los referentes al mercado interbancario, es decir, los tipos de interés a un día. Cabe señalar los siguientes tipos de interés a corto plazo que operan en el mercado interbancario: el Sterling OverNight Index Average (SONIA), Swiss Average Rate Overnight (SARON), Federal Funds Rate, London Interbank Offered Rate (LIBOR) y Euro OverNight Index Average (EONIA).

Los tipos de interés anteriores se utilizan en el mercado interbancario de préstamos en el que los bancos se prestan unos a otros dentro de un plazo determinado. La mayor parte de préstamos interbancarios se realizan con vencimiento máximo en una semana, siendo la mayoría de ellos a un día. Estos préstamos se realizan al tipo interbancario, por lo que los bancos prestarán y tomarán prestado en el mercado interbancario para poder gestionar su liquidez y cumplir con regulaciones como el coeficiente de caja⁴. Por lo tanto, las condiciones en dicho mercado pueden tener amplios efectos en el sistema financiero y en la economía real influyendo así sobre las decisiones de inversión de las empresas y los hogares.

Por otra parte, es conveniente centrarnos en el tipo de interés interbancario del BCE, EONIA, ya que se trata del tipo de interés diario de la Unión Europea y sobre el cual, como se verá en el Capítulo 4, se aplicará el modelo de Vasicek. El tipo EONIA (Euro OverNight Index Average) es el índice medio del tipo del euro a un día, fruto de las operaciones de crédito interbancarias.

El EONIA es calculado por la European Banks Federation (EBF) a partir de los datos suministrados por 39 instituciones de crédito junto con la ayuda del BCE. Es un tipo de referencia usado en operaciones de productos derivados, especialmente derivados de financiación interbancaria y productos como los seguros de créditos para las operaciones interbancarias. Los datos EONIA se publican diariamente entre las 18:45 y las 19:00 horas, y representan la tasa promedio ponderada de las operaciones de préstamo "sin garantía de TARGET⁵" llevadas a cabo

⁴ El coeficiente de caja es el porcentaje de un banco que debe ser mantenido en reservas líquidas y por lo tanto no pueda ser utilizado para invertir o realizar préstamos. Las autoridades de cada país establecerán el coeficiente mínimo de reserva que todas las entidades financieras han de cumplir.

⁵ TARGET (Trans-European Automated Real-time Gross settlement Express Transfer system) es lo que se conoce como LBTR operado por el Eurosistema. Hoy día es denominado, TARGET2. Las transacciones de pago se liquidan una por una en una base continua de dinero del Banco Central con una firma inmediata. Tampoco existe un límite

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

antes del cierre de sistemas “liquidación en tiempo real bruto (LBTR)”, a las 18:00. En caso de que un banco necesitará liquidez de TARGET y estuviera cerrado el mercado, se puede recurrir a la llamada de facilidad marginal de crédito con su banco central nacional no más tarde de las 19:00, mediante el pago de una tasa de interés (tasa marginal de crédito del Eurosistema) de 100 puntos básicos sobre la tasa REPO⁶ de interés. Por el contrario, en el caso de exceso de liquidez, los bancos pueden depositar sus saldos de una cuenta (depósitos overnight) en su banco central nacional (facilidad de depósito).

1.2. La importancia de los tipos de interés en los Mercados Financieros

Los mercados financieros son el espacio donde se realizan los intercambios de instrumentos financieros y se obtienen sus precios. En dichos mercados, nos podemos encontrar una gama de tipos de interés como: tipos de interés como instrumento de la política monetaria, tipos de interés en la banca, tipos de interés nominales y reales y tipos de interés del mercado.

La tasa de interés fijada por el banco central de cada país para préstamos del Estado a otros bancos o para los préstamos entre los bancos, se denomina tasa interbancaria. Esta tasa corresponde a la política macroeconómica del país para promover el crecimiento económico, la estabilidad financiera y la situación en los mercados de acciones de un país determinado. Si los precios de las acciones están subiendo, la demanda por dinero aumenta, y con ello, la tasa de interés.

Las principales funciones de los mercados financieros son: establecer la posibilidad de los mecanismos en el contacto entre los participantes en la negociación, fijar los precios de los

superior o inferior en el valor de los pagos y se asienta principalmente en operaciones de política monetaria y las operaciones del mercado monetario.

⁶ Un REPO es una operación con pacto de recompra, es decir, una entidad financiera vende un activo con un pacto de recompra por un precio determinado dentro de un tiempo determinado. Las operaciones de repo se suelen realizar con títulos de deuda fija, especialmente con títulos de deuda pública como letras, bonos y obligaciones del estado. En este tipo de operaciones el inversor está proporcionando un préstamo a la entidad financiera, solo que garantizado con un título de deuda pública, normalmente se trata de una forma de obtener liquidez a corto plazo para los bancos. También es un instrumento de política monetaria de los bancos centrales.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

productos financieros en función de su oferta y su demanda, reducir los costes de intermediación y administrar los flujos de liquidez de productos o mercado.

La clasificación de los mercados financieros se estipulará según diversos criterios para poder observar sus características. Una categorización considera que si la operación financiera se refiere a la primera compra de una emisión se encontrará en el mercado primario, mientras que si se trata de una negociación posterior entre los tenedores de los valores se tratará de un mercado secundario. Dentro de este último, encontramos dos tipos: el organizado, en el que compradores y vendedores se encuentran en un lugar común para realizar operaciones, (definido como mercado bursátil) y el mercado no organizado (OTC), que es aquel en el que los intermediarios compran y venden valores a otras contrapartes de forma bilateral.

Por lo general, se efectúa una distinción entre el vencimiento inferior a un año y el vencimiento igual o superior a un año, dando lugar a los mercados monetario y de capitales respectivamente. El mercado monetario difiere de los demás mercados financieros en que suele ser un mercado interbancario mayorista con operaciones de gran volumen que puedan influir directamente al Eurosistema a través de sus operaciones de política monetaria. Debido a que el BCE tiene el monopolio de la oferta de activos de liquidez, puede llegar a fijar las condiciones de financiación para las entidades de crédito de la zona euro. Esto puede llegar a influir en las condiciones en las que las entidades de crédito y otros participantes en el mercado de dinero cruzan sus operaciones. Además, en lo que respecta a los instrumentos de los mercados monetarios y de capitales, se distingue entre instrumentos “con garantía” y sin garantía”. Por ejemplo, en el mercado monetario, el tipo de interés de oferta en el mercado interbancario del euro (EONIA) se refiere a los préstamos sin garantía, mientras que los préstamos con garantía suelen adoptar la forma de “cesiones temporales”, en las que el prestatario hipoteca una garantía. Cuando se exige que el valor de la garantía sea superior al de los fondos obtenidos en préstamo, se lleva a cabo lo que se denomina un “recorte”.

Otra clasificación comúnmente utilizada se basa en la forma del instrumento financiero negociado en un mercado. Una distinción importante es la diferencia entre los mercados de renta variable y los de renta fija. La principal diferencia entre la renta variable y la renta fija consiste en que la primera no tiene que ser reembolsada por el emisor, mientras que la renta fija comprende instrumentos financieros que, habitualmente hay que reembolsar (por importes específicos, a un determinado tipo de interés y en una fecha concreta).

1.2.1. Los derivados financieros

Por otra parte, también podemos destacar los derivados que constituyen otra importante categoría de instrumentos financieros. Se trata de contratos financieros cuyo valor se obtiene a partir de diversas referencias, como puede ser el precio del activo subyacente, los tipos de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles o los precios de las materias primas. Los derivados básicos son los futuros, las opciones, los *swaps* y los acuerdos sobre tipos de interés futuros. Por ejemplo, el tenedor de una opción de compra (de venta) tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar (vender) un instrumento financiero, como un bono o una acción, a un precio dado en una fecha futura. Combinando estas categorías se han desarrollado otros muchos productos derivados. Los mercados de derivados pueden facilitar el funcionamiento de los mercados financieros porque se pueden utilizar para mejorar la valoración y la asignación de los riesgos financieros. No obstante, los errores de valoración y las consiguientes variaciones de los precios de los derivados financieros pueden incluir una mayor variabilidad en los precios de otros activos.

1.2.2. El mercado interbancario

El tipo de interés interbancario EONIA es negociado dentro del denominado mercado interbancario. Éste se define como un mercado en el que los bancos se prestan dinero unos a otros en un plazo determinado. Como se ha señalado anteriormente, la mayoría de este tipo de préstamos interbancarios se realizan con un vencimiento máximo de una semana, siendo la mayor parte de todos ellos a un día. Para dichas operaciones, se utiliza el tipo interbancario de acuerdo a la zona en la que se realicen. La principal razón por la que dichas entidades bancarias realizan este tipo de operaciones es debido a que los principales órganos institucionales les exigen mantener una cantidad adecuada de activos líquidos como puede ser dinero en efectivo, para poder hacer frente a las posibles salidas de capitales de las entidades bancarias. En el caso de que un banco no pueda cumplir con estos requisitos de liquidez, deberá tomar prestado dinero del mercado interbancario para cubrir el descubierto que puedan llegar a obtener. Por otra parte, podemos encontrar bancos que tengan un exceso de activos líquidos por encima de los requisitos legales de liquidez, por lo tanto, estos bancos prestarán dinero en el mercado interbancario y a cambio obtendrán un rendimiento por sus activos prestados.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

El tipo interbancario es el tipo de interés cargado a los préstamos a corto plazo entre los bancos, es decir, es el tipo de interés utilizado por los bancos para las operaciones que realizan en el mercado interbancario para poder cumplir con las regulaciones como pueda ser el coeficiente de caja. Una función de los préstamos interbancarios en el sistema financiero es que se toma como referencia para préstamos a corto plazo, es decir, sirven como referencia para asignar un precio a numerosos instrumentos financieros mientras que por otra parte sirven para la transmisión de la política monetaria.

Los tipos de interés a corto plazo, son aquellos que se encuentran en el denominado “Overnight Market”, definido como el mercado a un día. Es aquel mercado donde los prestamistas se ponen de acuerdo en facilitar a los prestatarios fondos solamente durante la noche, es decir, el prestatario deberá pagar el dinero entregado más los intereses al inicio de las actividades del día siguiente. La mayor parte de la actividad de dicho mercado se lleva a cabo en la mañana inmediata después del inicio de la jornada laboral. Una explicación de este mercado sería el ejemplo de un grupo encargado de la gestión de efectivo para un depósito de una institución financiera que comienza con la previsión de la liquidez de los clientes de la institución que necesitan en el transcurso de ese día. Si dicha previsión es que los clientes de las instituciones necesitarán más dinero en el transcurso del día del que dispone de forma efectiva la institución. Entonces, la institución pedirá prestado dinero en el mercado durante la noche de ese día, mientras que, si la institución dispone de dinero excedente ese día, entonces se prestarán dinero en el mercado de la noche del mismo día.

1.3. La Política Monetaria de la Unión Europea y los intermediarios financieros existentes

Como en nuestro caso, nos vamos a centrar en aquel tipo de interés interbancario utilizado por el Banco Central Europeo (BCE), el EONIA, llevaremos a cabo una explicación sobre la política monetaria desarrollada por la Unión Europea. Se afirma que la política monetaria influye en la economía, ya que el BCE es el único emisor de billetes y el único proveedor de reservas bancarias, es decir, tiene el monopolio de la oferta de la base monetaria. El BCE puede influir en las condiciones del mercado monetario y controlar los tipos de interés a corto plazo. En dicho plazo, una variación de los tipos de interés del mercado monetario inducida por el banco central pone en

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

marcha una serie de mecanismos y de acciones de los agentes económicos que, finalmente, repercuten en la evolución de variables económicas como el producto o los precios.

El 1 de enero de 1999, el BCE, se adjudica la responsabilidad de la política monetaria de la zona del euro. Dicha política en el marco institucional se sustenta en dos principios fundamentales, en primer lugar, el mandato del BCE se centrará claramente en el mantenimiento de la estabilidad de precios y en segundo lugar, el BCE será independiente. El principal objetivo del BCE es la estabilidad de precios pero ello no quiere decir que los tipos de interés no sean importantes dentro de la institución, ya que depende de la decisión que se tome respecto a los tipos de interés oficiales, se producirán cambios en la economía.

Para decidir y gestionar la política monetaria del euro, la Unión Europea (UE) se ha dotado de una nueva institución con personalidad jurídica propia, el BCE, que forma, junto con los bancos centrales de toda la UE, el Sistema Europeo de Bancos Centrales (SEBC). El Consejo de Gobierno del BCE ha decidido adoptar el término “Eurosistema”, es decir, donde el SEBC realiza sus principales tareas. El Eurosistema comprende el BCE y los Bancos Centrales Nacionales (BCN) de los Estados miembros que han adoptado el euro y está dirigido por el Comité Ejecutivo y el Consejo de Gobierno del BCE. Por lo que respecta al SEBC, está dirigido, al igual que el Eurosistema, por el Comité Ejecutivo y el Consejo de Gobierno del BCE, a los que se añade un tercer órgano de decisión del BCE: el Consejo General. En la práctica, el Consejo de Gobierno se reúne cada quince días, mientras que las decisiones sobre los tipos de interés sólo se toman el primer jueves de cada mes para evitar incertidumbre en los mercados.

Respecto a la estrategia llevada a cabo por la política monetaria, hay que destacar que se sustenta en dos pilares esenciales denominados por el BCE, el análisis económico y el análisis monetario. Dentro del análisis económico, el BCE puede actuar sobre la demanda agregada mediante los tipos de interés. Si sube los tipos de interés aplica una política monetaria restrictiva, los créditos se encarecen, lo que tenderá a moderar el consumo y la inversión. Esto es lo que hará el BCE ante una perturbación de demanda que ponga en peligro el cumplimiento del objetivo de inflación. Por ejemplo, en los dos primeros años de la existencia del euro se produjo un escenario como el descrito, “burbuja de las nuevas tecnologías”, que provocó fuertes incrementos de la inversión y el consumo, elevando los tipos de interés desde finales de 1999 hasta el año 2000. Cuando a finales de 2000 estalló la burbuja, el BCE disminuyó los tipos de interés, entre mayo de 2001 y junio de 2003. Todo esto nos indica también que *entre un año y medio y dos años* se necesitan para ver exactamente que un movimiento de los tipos de interés transmite todos sus efectos al comportamiento de los precios. En lo que respecta al análisis monetario citado

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

anteriormente, en los dos primeros años de existencia del euro, cuando se mantuvieron altos los tipos de interés para contrarrestar el aumento de la demanda agregada, la tasa de expansión monetaria fue más moderada y se respetó. Sin embargo, se bajan los tipos de interés sin que se haga nada por impedirlo.

Parece claro que es en el primer pilar, el análisis económico, donde han de buscarse los fundamentos de las decisiones de política monetaria del BCE sobre los tipos de interés. Primero, se analizarán las perturbaciones de oferta y demanda que pueden tener consecuencias para la inflación a corto plazo. Después, en el análisis monetario, simplemente se reflexionara sobre los efectos a largo plazo de esas decisiones, para no perder de vista, mientras se responde a las perturbaciones, ya que la relación existente entre la cantidad de dinero y los precios. Dentro del mercado monetario, el tipo de interés es determinado por la igualdad de la oferta y la demanda de dinero que se encuentra en dicha economía. Modificando la oferta monetaria, es el modo en el que el BCE puede influir en el tipo de interés. Las operaciones de mercado abierto en las que el BCE eleva la oferta monetaria comprando bonos provocan una subida de precio y una bajada del tipo de interés mientras que en el caso en el que reduce la oferta monetaria vendiendo bonos provocan un descenso del precio de los bonos y una subida del tipo de interés. El tipo de interés a corto plazo viene determinado por la condición que acabamos de analizar: el equilibrio entre la oferta de dinero y la demanda de dinero.

Las decisiones de política monetaria con el nivel de precios comienzan con una modificación de los tipos de interés oficiales que fija el BCE para sus propias operaciones de financiación a las entidades de crédito. Debido a su monopolio sobre la creación de la base monetaria, el BCE puede determinar los tipos de interés que aplicará a sus operaciones. Dado que, con ello, el banco central influye en el coste de financiación de la liquidez de las entidades de crédito, estas tienen que trasladar dichos costes a las operaciones de préstamo con su clientela. A través de este proceso, el banco central puede ejercer una influencia dominante en las condiciones del mercado monetario y controlar los tipos de interés de dicho mercado. A su vez, las variaciones de los tipos de interés del mercado monetario repercuten en otros tipos. Por ejemplo, las variaciones de los tipos del mercado monetario influyen en los tipos de interés que las entidades de crédito aplican a los préstamos y depósitos a corto plazo.

Como podemos observar en la Figura 1.1, representa el mecanismo existente por parte de la política monetaria llevada a cabo por el BCE, de la transmisión de los tipos de interés a los precios.

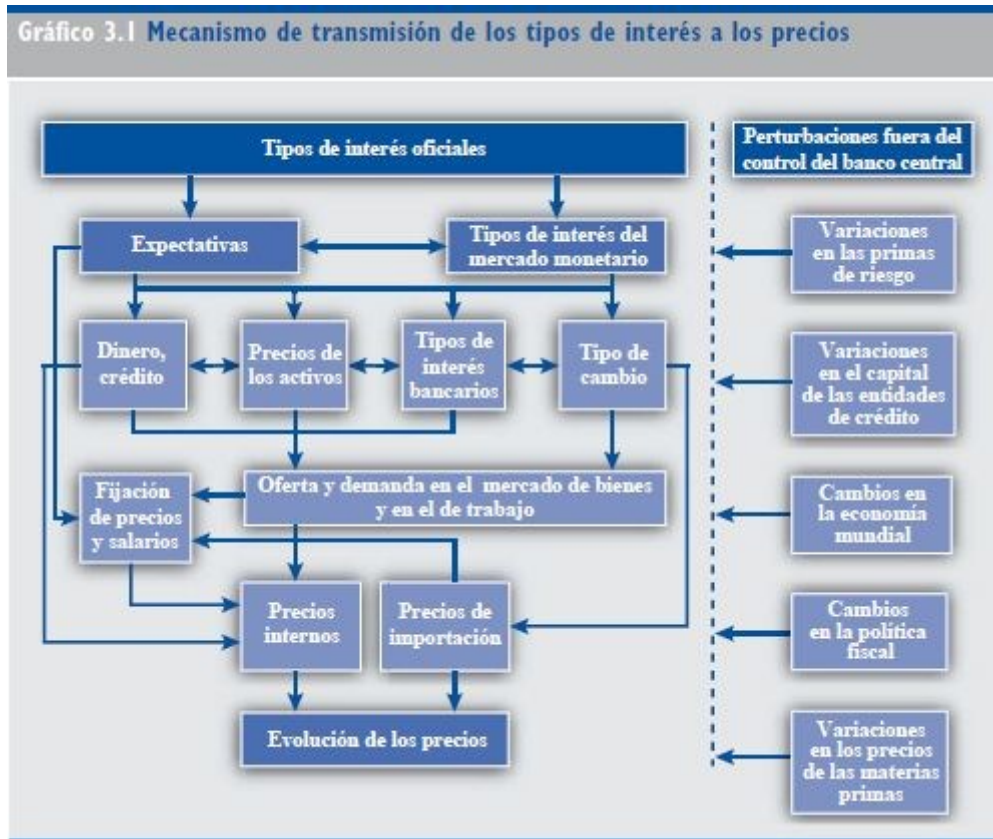


Figura 1.1. Mecanismo de transmisión de los tipos de interés a los precios.

Fuente. BCE (2011), "La Política Monetaria del BCE". Página 64.

Además, las expectativas sobre futuras modificaciones de los tipos de interés oficiales afectan a los tipos de interés de mercado a más largo plazo, ya que estos reflejan las expectativas sobre la evolución futura de los tipos de interés a corto plazo. Las modificaciones de los tipos de interés oficiales del banco central no influyen, en general, en los tipos de interés a más largo plazo, salvo si ocasionan un cambio en las expectativas del mercado relativas a las tendencias económicas a largo plazo. Las variaciones de los tipos de interés influyen en las decisiones de ahorro, gasto e inversión de los hogares y las empresas. Por ejemplo, manteniéndose constantes las demás variables, unos tipos de interés más altos tienden a hacer que a los hogares o a las empresas les resulte menos atractivo endeudarse para financiar su consumo o su inversión y, también, que los hogares prefieran ahorrar en vez de gastar sus ingresos corrientes, ya que la rentabilidad de su ahorro es mayor.

En lo que respecta a los posibles intermediarios financieros que podemos encontrar en los mercados financieros, podemos decir que se agrupan en dos grandes categorías: las Instituciones Financieras Monetarias (IFM) y Otros Intermediarios Financieros (OIF). Las primeras comprenden el Eurosistema (el BCE y los BCN de los países que han adoptado el euro), las entidades de

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

crédito y otras entidades, cuya actividad consiste en recibir depósitos de entidades distintas de las IFM y conceder créditos y/o invertir en valores. La gran mayoría de IFM de la zona del euro son entidades de crédito (es decir, bancos comerciales, cajas de ahorro, etc.), definidas con claridad con dos directivas sobre coordinación bancaria y sujetas a normas de supervisión comunes para toda la UE. Las entidades de crédito son las entidades de contrapartida en las operaciones de política monetaria del banco central. Dado que conceden créditos a los hogares y a las empresas, en base, principalmente, al crédito recibido del banco central, estas entidades resultan cruciales para la transmisión de las decisiones de política monetaria a la economía.

Los intermediarios financieros que entran dentro de la categoría de OIF, también prestan servicios financieros a los hogares y a las sociedades no financieras y negocian por cuenta propia en los mercados financieros. El sector de otros intermediarios financieros incluye las empresas de seguros y los fondos de pensiones, los auxiliares financieros, los fondos de inversión, las sociedades y agencias de valores y derivados financieros y las instituciones financieras que participan en operaciones de préstamo. El sector incluye, además, las entidades creadas por las IFM para facilitar la titulización de los préstamos que, de otra manera, se mantendrían en el balance de las IFM. La diferencia fundamental entre los OIF y las IFM es que estas últimas pueden captar depósitos del público, mientras que los primeros se financian por otros medios, como la emisión de valores.

1.4. Aspectos macroeconómicos

A nivel macroeconómico, las políticas de carácter monetario, cambiario y fiscal pueden ayudar a corregir los desequilibrios de la economía. En nuestro caso tendremos en cuenta la política monetaria. En el caso en el que nos encontremos ante una fase expansiva, los tipos de interés disminuirán mientras que en el caso de una fase contractiva ocurrirá el efecto contrario, los tipos de interés aumentarán.

Por último, podemos decir que el mercado, en el que se negocian valores tales como bonos, acciones, futuros, etc., por efecto de la oferta y la demanda, fija para cada clase de activos un tipo de interés que depende de factores como las expectativas existentes sobre la tasa de inflación. El riesgo asociado al tipo de activo y la preferencia por la liquidez, es decir, cuanto menos líquido sea un activo, mayor compensación exigirán los inversores. Sin embargo, en los mercados bursátiles,

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

cuando suben los tipos de interés a un año actuales y futuros esperados, el precio de las acciones baja.

Mientras que el tipo de interés a largo plazo es una media geométrica de los tipos de interés a corto plazo, hasta el momento del vencimiento. Una vez que el tipo de interés a corto plazo es conocido, pero no así los que prevalecerán en el futuro, por lo que los agentes tienen que utilizar las expectativas de los mismos. Aunque la diferencia entre los tipos de interés a corto y a largo plazo en el presente está determinada por las expectativas de los agentes de las condiciones económicas futuras, es decir, la estructura temporal de los tipos de interés contiene información sobre las expectativas de los agentes de la evolución futura de la economía.

En lo que respecta al modelo macroeconómico IS-LM (también denominado Hicks-Hansen), inspirado en las ideas de J.M. Keynes y sintetizado con las ideas de A. Marshall, si el tipo de interés disminuye, entonces la inversión aumenta, el aumento de la inversión es un aumento en la demanda agregada, por lo tanto esto es un aumento en renta que a su vez induce a un aumento en el consumo, inversión... y vuelve a hacer subir la renta y el ahorro. En definitiva, el equilibrio del mercado de bienes implica que una subida del tipo de interés provoca una disminución de la producción. En el caso del equilibrio de los mercados financieros implica que, dada una oferta de dinero real, un aumento del nivel de renta, que eleva la demanda de dinero, provoca una subida del tipo de interés.

2. Preliminares estocásticos

2.1. Movimiento browniano o proceso de Wiener

El movimiento browniano es un proceso estocástico de tipo Gaussiano que inicialmente fue propuesto para describir matemáticamente ciertos fenómenos físicos relativos al movimiento aleatorio de diminutas partículas inmersas en un fluido. Dicho proceso físico fue descubierto por el biólogo Robert Brown (1827) cuando estudiaba en el microscopio el movimiento de partículas de polen flotando en el agua. R. Brown observó que dichas partículas seguían un movimiento errante o irregular debido a la interacción molecular. Posteriormente, Louis Bachelier (1900) utilizó las ideas de R. Brown en el campo de las finanzas en su tesis doctoral titulada: “*La teoría de la especulación*” para modelizar ciertos activos financieros. Sin embargo, cabe subrayar que el trabajo de L. Bachelier no fue comprendido en su época y permaneció ignorado durante muchos años, hasta que se consiguió formalizar matemáticamente su fundamento. El trabajo de formalización matemática del concepto de movimiento browniano fue realizado por Norbert Wiener, a quien debe su nombre, ya que muchas veces al movimiento browniano se le denomina también proceso de Wiener.

2.2. Propiedades del movimiento browniano

El objeto de esta memoria es el estudio y aplicación de un modelo estocástico de tipos de interés, concretamente el modelo de Vasicek. Para formular y comprender con cierta profundidad este modelo, es necesario introducir uno de sus principales ingredientes: el proceso estocástico que introduce en dicho modelo la aleatoriedad. Este proceso es el movimiento browniano o proceso de Wiener. Este proceso, tiene la peculiaridad de definirse a través de las propiedades que lo caracterizan, en lugar de definirse a través de una fórmula matemática.

El movimiento browniano o proceso de Wiener, $W \equiv \{W(t), t \in \mathbb{R}^+\}$, es un proceso estocástico real tal que cumple:

W.1. Comienza en el origen con probabilidad 1: $P[W(0) = 0] = 1$.

W.2. W tiene incrementos estacionarios:

$$W(t + \Delta t) - W(t) \stackrel{d}{=} W(s + \Delta t) - W(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \in [0, +\infty[,$$

donde el símbolo $\stackrel{d}{=}$ denota que la igualdad anterior es en distribución.

W.3. Los incrementos del proceso dados por $W(t) - W(s)$ son independientes

$$W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_{n+1}) - W(t_n),$$

con $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq +\infty$.

W.4. Los incrementos tienen una distribución Gaussiana (o normal) con media 0 y varianza $(t - s) \forall 0 \leq s \leq t$, es decir, $W(t) - W(s) \sim N[0, \sqrt{t - s}]$. En el caso particular en que $s = 0$ y considerando la propiedad W.1., podemos decir que $W(t) \sim N[0, \sqrt{t}]$, esto es, $W(t)$ es una variable aleatoria normal o Gaussiana de media 0 y desviación típica, \sqrt{t} : $W(t) \sim N[0, \sqrt{t}]$.

W.5. Las trayectorias de $W(t)$ son continuas, pero no son diferenciables en ningún punto.

Algunas de las trayectorias muestrales del proceso browniano de este proceso pueden verse en el Gráfico 2.2.1. Éstas cumplen las condiciones W.1–W.5. Cabe indicar que aunque el proceso de Wiener introduce en el modelo de Vasicek la aleatoriedad, ésta no se corresponde directamente con el movimiento browniano sino con su diferencial, lo que genera un nuevo proceso estocástico que también es Gaussiano y que se denomina ruido blanco.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

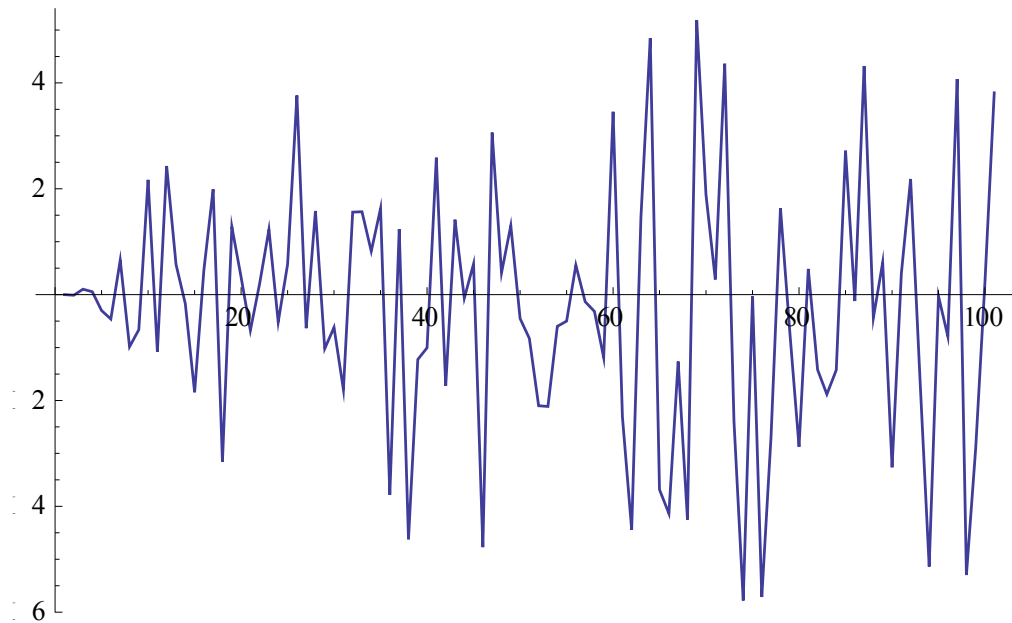


Gráfico 2.2.1. Simulación Movimiento Browniano.
Fuente: Elaboración propia. Software Mathematica.

La elección de la diferencial del movimiento browniano para modelizar la aleatoriedad en el modelo no debe de resultar sorprendente en base al Teorema Central del Límite, ya que son muy numerosos y diferentes, los factores y variables que en el mundo real pueden llegar a determinar el valor de un activo financiero susceptible de ser modelizado.

El proceso de Wiener $W \equiv \{W(t), t \geq 0\}$ tiene las siguientes propiedades estadísticas:

- a) Función media: Por la propiedad W.4 se deduce inmediatamente que la media es nula:

$$\mu_W(t) = 0, \forall t \geq 0.$$

- b) Función Covarianza:

$$Cov[W(t), W(s)] = \text{Min}[s, t], \forall s, t \geq 0.$$

En particular, se deduce que la varianza es t tal y como indica la propiedad W.4.

- c) Es $\frac{1}{2}$ —autosemejante: esta es una propiedad geométrica que se escribe formalmente como sigue:

$$\sqrt{T}W(t) = W(Tt), \quad \forall t \geq 0, \forall T > 0.$$

La primera propiedad nos indica que, en media, el valor que toma este proceso es nulo (como podemos apreciar intuitivamente en el Gráfico 2.2.1). La función de covarianza mide el grado de

relación lineal (en sentido estadístico) entre las variables aleatorias $W(s)$ y $W(t)$ que se observan al fijar dos instantes s y t . La última propiedad es únicamente geométrica.

2.3. Cálculo de Itô

En este apartado, se enuncia una versión apropiada para nuestros intereses de la herramienta fundamental del cálculo estocástico, a saber, la fórmula de K. Itô. Este resultado constituye una versión estocástica de la regla de la cadena para procesos estocásticos $X(t)$ que son solución de una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t). \quad (2.3.1)$$

La fórmula de Itô tiene numerosas aplicaciones de interés, siendo el cálculo exacto de la solución de la ecuación diferencial estocástica (2.3.1) el principal en esta memoria. Cabe señalar que, al igual que sucede en el contexto determinista, el cálculo de la solución exacta de (2.3.1) no siempre es posible, ello depende esencialmente de la forma de los coeficientes $f(t, X(t))$ y $g(t, X(t))$. Sin embargo, en el caso que nos ocupa en este trabajo, el modelo de Vasicek, como veremos en el Capítulo 3, ello sí es factible.

Consideremos la ecuación diferencial estocástica (2.3.1.) con condición inicial X_0 una variable aleatoria de segundo orden, es decir, tal que su momento central de segundo orden sea finito: $E[(X_0)^2] < +\infty$. Sea $F = F(t, x)$ una función $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que las siguientes derivadas parciales son continuas:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial F(t, x)}{\partial t^2}, \frac{\partial F(t, x)}{\partial x^2}, \frac{\partial F(t, x)}{\partial t \partial x}, \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}$$

y tal que:

- i. Existe $k_1 > 0$ tal que:

$$E \left[|F(t_2, X(t_2)) - F(t_1, X(t_1))|^2 \right] \leq k_1 (|t_2 - t_1| + E[|X(t_2) - X(t_1)|^2])$$

$$\forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

- ii. $F(0, X(0))$ es una variable aleatoria de segundo orden.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Entonces F satisface una ecuación diferencial estocástica (e.d.e.) del tipo (2.3.1), concretamente:

$$dF(t, X(t)) = \left(\frac{\partial F(t, X)}{\partial t} + f(t, X) \frac{\partial F(t, X)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X) \frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial x^2} \right) dt + \left(g(t, X) \frac{\partial F(t, X)}{\partial x} \right) dW(t).$$

2.4. Integral de Itô y sus propiedades

En esta sección introduciremos el concepto de integral de Itô de una función determinista y las propiedades de dicha integral que posteriormente necesitaremos para calcular las principales funciones estadísticas, tales como la media, la varianza y covarianza, de la solución del modelo de Vasicek, ya que, dicha solución se expresa en términos de una integral de Itô de una función determinista (véase Apartado 3.1.4).

Es importante señalar que la integral de Itô puede definirse, y de hecho es más general y usual hacerlo así, para procesos estocásticos, sin embargo, en esta memoria dicha integral solo se requerirá para integrar funciones deterministas, las cuales obviamente puede tratarse como casos particulares de procesos estocásticos. Sin embargo, para dotar de mayor generalidad a la presentación que sigue introduciremos la integral de Itô de forma general.

La integral de Itô es el corazón del análisis estocástico, siendo la principal razón para la existencia de un análisis que difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación. La integral de Itô define lo que uno debería de entender por integración de un proceso estocástico con respecto al movimiento browniano (u otro proceso estocástico). El objetivo de este apartado es dar una interpretación de la expresión

$$\int_0^t X(s) dW(s), \quad (2.4.1)$$

donde $X(s)$ es un proceso estocástico que cumple ciertas condiciones que especificaremos más adelante. Nosotros decimos que (2.4.1) es la integral de Itô de $X(t)$ con respecto al movimiento browniano o el proceso de Wiener.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Primero vamos a recordar lo que la interpretación de dicha integral sería si $X(s)$ y $W(s)$ no fueran procesos estocásticos, sino funciones deterministas. Asumimos $f(s)$ y $g(s)$ son dos funciones suaves del tiempo s , y consideramos la integral

$$\int_0^t g(s)df(s). \quad (2.4.2)$$

Cuando $f(s)$ es una función diferenciable, nosotros escribimos $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$, o en otras palabras, $df(s) = f'(s)ds$. Sustituyendo esto en la integral (2.4.2) llegamos a

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s)ds,$$

que reconoceremos como una integral estándar⁷. ¿Pero qué sucede si $f(s)$ no es diferenciable?⁸ Podemos todavía definir la integral (2.4.2). Cuando $f(s)$ no es demasiado irregular como función del argumento s , es decir, cuando $f(s)$ es lo que se denomina como una función de *variación acotada*, podemos probar que la integral está bien definida como el siguiente límite:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)).$$

Puesto que $f(s)$ tiene variación acotada, $f(s_{i+1})$ está próximo a $f(s_i)$. A partir de esto podemos probar que el límite anterior existe siempre que $g(s)$ no varíe demasiado. Por supuesto, si la función $g(s)$ es extremadamente fluctuante en diferentes puntos en el tiempo, el límite puede todavía ser divergente.

Definiremos la integral (2.4.1) de forma análoga como el siguiente límite:

$$\int_0^t X(s, \omega)dW(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega)(W(s_{i+1}, \omega) - W(s_i, \omega)). \quad (2.4.3)$$

Nótese que tomamos el límite para cada ω fijo en el espacio muestral Ω de la variable aleatoria $W(s)$. El problema aquí es que el límite para cada ω en general no existe (empieza en $\pm\infty$) para

⁷ Recordamos que tales integrales son definidas como un límite puntual de la siguiente manera:

$$\int_0^t g(s)f'(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)f'(s_i)(s_{i+1} - s_i),$$

donde $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_n = t$. Además, como es costumbre usaremos refinamientos de particiones, es decir, asumimos que los puntos de partición $\{s_1, \dots, s_n\}$ con n valores están contenidos en los puntos de partición $\{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}\}$ que contiene $n + 1$ puntos. Cuando n crece, obtendremos un refinamiento paso a paso de la partición del intervalo $[0, t]$.

⁸ Un ejemplo de una función que no es diferenciable en el punto $s = 0$ es $f(s) = |s|$.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

muchos procesos estocásticos $X(s)$. Para cada ω , la función $s \rightarrow W(s, \omega)$ es extremadamente volátil. De hecho, como hemos indicado anteriormente (véase propiedad W.5), el proceso de Wiener es un ejemplo de un proceso estocástico con trayectorias muestrales continuas, pero no diferenciables en ningún punto. Aún peor, el movimiento browniano como función del tiempo no es una variación acotada para cada ω , como requerimos para $f(s)$. Tenemos que compensar la rugosidad de las trayectorias del movimiento browniano poniendo dos condiciones en el proceso integrador $X(s)$. Bajo estas condiciones el límite existirá a pesar de la irregularidad del movimiento browniano. La primera condición es que asumiremos que $X(s)$ es independiente de los incrementos del movimiento browniano, mientras que la segunda condición está relacionada con la variación de la integración (similar a la condición de que $g(s)$ en (2.4.2) no debe variar demasiado).

A partir de la Propiedad W.2 del movimiento browniano sabemos que la variación de un incremento browniano está dada como:

$$E \left[(W(s_{i+1}) - W(s_i))^2 \right] = s_{i+1} - s_i.$$

Si $X(s_i)$ es independiente del incremento $W(s_{i+1}) - W(s_i)$, obtenemos

$$\begin{aligned} E \left[\left(X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i)) \right)^2 \right] &= E[X^2(s_i)] E \left[(W(s_{i+1}) - W(s_i))^2 \right] \\ &= E[X^2(s_i)](s_{i+1} - s_i). \end{aligned}$$

Considerando el segundo momento de la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i)), \quad (2.4.4)$$

y asumiendo que $X(s_i)$ es independiente de $W(s_{i+1}) - W(s_i)$ para cada $i = 1, \dots, n-1$, puede verse utilizando que la independencia de los incrementos brownianos que:

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i)) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[X^2(s_i)](s_{i+1} - s_i).$$

Reconocemos la suma del miembro derecho como una aproximación de la integral $\int_0^t E[X^2(s)] ds$. Por lo tanto, si esta integral existe, deducimos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[X^2(s)] ds,$$

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

esto nos conduce a la conclusión de que la varianza de la suma en (2.4.4) converge a $\int_0^t E[X^2(s)]ds$. Asumiendo que esta integral existe, demostramos que

$$E \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[X^2(s)]ds. \quad (2.4.5)$$

Cabe subrayar que la existencia de la integral que aparece en el lado derecho de la ecuación (2.4.5) puede, en algunos casos, no existir. Esta integral existe siempre que es finita, es decir, siempre que el proceso estocástico $X(s)$ es de tal que el segundo momento puede ser integrado de 0 a t . Es simple hacer ejemplos donde no es tal el caso. Por ejemplo, para el proceso $X(s) = s^{-1}W(s)$, por la propiedad W.2 del movimiento browniano, tenemos

$$\int_0^t E[X^2(s)]ds = \int_0^t s^{-1}ds = \ln t - \ln 0 = +\infty.$$

Por otra parte, tomando $X(s) = B(s)$, se puede fácilmente reconocer que $X(s)$ satisface la condición de integralidad. Esto se cumple también para una larga clase de procesos estocásticos.

Volviendo a la relación (2.4.5), concretamente considerando el límite de la parte izquierda que $X(s_i)$ debe ser independiente de incrementos $W(s_{i+1}) - W(s_i)$ para todos los valores s_i , $i = 1, \dots, n - 1$. Esto conduce de forma natural a introducir la condición denominada de adaptabilidad del proceso integrador:

- **Definición 1.** Una variable aleatoria X es llamada \mathcal{F}_s -adaptada si X puede ser escrita como (un límite de una sucesión de) funciones de $W(\tau)$ para uno o más $\tau \leq s$, pero no como función de cualquier $W(u)$ con $u > s$. Un proceso estocástico $X(s)$ se dice que es adaptado si para cada tiempo $s \in [0, t]$, la variable aleatoria $X(s)$ es \mathcal{F}_s -adaptada.

Señalemos algunos aspectos de la Definición 1. En primer lugar, procesos que se derivan de composiciones simples del movimiento browniano tales como $X(s) = f(s, W(s))$ son adaptados, mientras que procesos como $X(s) = W(s + 1)$ no lo son. Si nosotros consideramos la integral $X(s) = \int_0^s W(\tau)d\tau$, también define un proceso estocástico adaptado, porque la integral es el límite de sumas del movimiento browniano en diferentes tiempos menores que s . Es decir, por la definición de integral, tenemos

$$X(s) = \int_0^s W(\tau)d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} W(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i) .$$

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Por lo tanto, focalizando sobre la integral de Itô, vemos que siempre que el proceso integrando $X(s)$ sea adaptado, la integral $\int_0^t X(s)dW(s)$ tiene sentido como el límite puntual en (2.4.3). Además, este límite (2.4.3) puede probarse que converge en media cuadrática y por lo tanto también para cada $\omega \in \Omega$. Concluimos nuestra exposición con la definición de la integral de Itô.

- **Definición 2 (integral de Itô).** Un proceso estocástico $X(s)$ es integrable según Itô en el intervalo $[0, t]$ si:

1. $X(s)$ es adaptado para $s \in [0, t]$, y

2. $\int_0^t E[X^2(s)] ds < \infty$.

La integral es Itô se define como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s, \omega)dW(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega)(W(s_{i+1}, \omega) - W(s_i, \omega)), \quad (2.4.6)$$

donde el límite es considerado por cada $\omega \in \Omega$.

Puede demostrarse que la integral de Itô goza de las siguientes propiedades, las cuales no están enunciadas con la máxima generalidad, sino en el contexto en que se requerirán para el desarrollo de la memoria. Por ello, dichas propiedades se enuncian solo en el caso particular en que el integrando $X(s)$ es una función determinista $h(s)$ tal que $\int_0^t (h(s))^2 ds < +\infty$:

I.1. Media: $E \left[\int_0^t h(s)dW(s) \right] = 0$.

I.2. Varianza: $Var \left[\int_0^t h(s)dW(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds$.

I.3. Covarianza: $Cov \left[\int_0^t h_1(\tau) dW(\tau), \int_0^s h_2(\tau)dW(\tau) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau)h_2(\tau)d\tau$,

siendo $t \wedge s = \min(t, s)$.

I.4. Normalidad: $\int_0^t h(s)dW(s) \sim N \left[0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right]$.

3. Modelo de tipos de interés de Vasicek o de regresión a la media

Las variaciones de los tipos de interés afectan directamente sobre la toma de decisiones de inversión y gestión de riesgos en los mercados financieros. Los modelos de un solo factor constituyen una clase de modelos para estudiar los tipos de interés que han demostrado ser de gran utilidad para estudiarlos. Los modelos de un único factor son representados por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t),$$

donde μ y σ representan la deriva o tendencia y la volatilidad del proceso de tipo de interés $r(t)$, respectivamente, y $W(t)$ denota el movimiento browniano o proceso de Wiener.

El modelo propuesto por Vasicek (1997) pertenece a la clase de modelos de un factor donde se asume que el término $\mu(t, r(t))$ es una función lineal del tipo de interés $r(t)$ con la propiedad de que dicha función induce un comportamiento asintóticamente estable hacia un valor medio μ , concretamente se toma: $\mu(t, r(t)) = \alpha(r_e - r(t))$ y, el término de volatilidad $\sigma(t, r(t))$ se

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

asume constante, es decir, $\sigma(t, r(t)) = \sigma$. La ecuación diferencial estocástica que se obtiene es conocida como ecuación de Ornstein-Uhlenbeck⁹ con coeficientes constantes. Este tipo de ecuaciones ha sido usado extensamente para la evaluación de bonos, futuros y derivados que requieren una estimación de la estructura temporal.

3.1. Motivación del modelo determinístico de tipos de interés

El objetivo de este apartado es motivar la introducción de un modelo estocástico de tipos de interés, concretamente el modelo de Vasicek, a partir de un modelo determinista, el cual se analizará a continuación.

Denotemos por:

- $r(t)$, el tipo de interés en el instante t ,
- μ , el tipo de interés medio a largo plazo,
- k , constante de proporcionalidad que medirá la velocidad del ajuste de los tipos de interés,
- r_0 , el tipo de interés actual o inicial ($t=0$),

entonces el siguiente problema de valor inicial (p.v.i.) describe, de forma determinística, la evolución del tipo de interés $r = r(t)$

$$\left. \begin{aligned} r'(t) &= k(\mu - r(t)), & k > 0, \mu \in \mathbb{R} \\ r(0) &= r_0, & r_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

Este modelo se denomina “modelo determinístico de tipos de interés con reversión (o regresión) a la media”. A continuación, se detallará el significado del modelo, lo que justificará su denominación de “reversión a la media” y se calculará su solución temporal $r = r(t)$ así como su comportamiento asintótico, es decir, a largo plazo, calculando el siguiente límite: $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$.

⁹ El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es un proceso estocástico, que describe la velocidad de una partícula bajo los efectos de la fricción provocada por un movimiento de tipo browniano. El proceso es estacionario, Gaussiano y Markoviano, y es el único proceso no trivial que satisface estas tres condiciones. Dicho proceso es la solución de una ecuación diferencial estocástica del tipo descrito.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Concretamente, se verá que $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \mu$, lo que justifica la denominación anterior de este parámetro como el interés medio a largo plazo.

En primer lugar, a partir de la interpretación geométrica de la derivada, se observa desde la ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) dada en el p.v.i. (3.1.1) que:

- Si $\mu > r(t) \xRightarrow{k>0} r'(t) > 0 \Rightarrow r(t)$ es creciente,
- Si $\mu < r(t) \xRightarrow{k>0} r'(t) < 0 \Rightarrow r(t)$ es decreciente,

indicándonos que si el tipo de interés actual, $r(t)$ es menor (mayor) que el tipo de interés medio a largo plazo, μ , entonces $r(t)$ tiende a crecer (decrecer). Esta interpretación, indica que el tipo de interés $r(t)$ aunque fluctúe, a largo plazo tiende a retornar o regresar a un valor medio μ . Más específicamente, según la e.d.o. (3.1.1) la variación instantánea del tipo de interés, $r'(t)$, es directamente proporcional a la diferencia (positiva o negativa) del tipo de interés actual $r(t)$ respecto de su valor medio a largo plazo, es decir: $k(\mu - r(t))$. A la constante positiva k , se le denomina parámetro de restitución o velocidad del ajuste del tipo de interés actual hacia su valor medio a largo plazo.

El p.v.i. (3.1.1) está basado en una e.d.o. de tipo lineal a coeficientes constantes, cuya solución es bien conocida (véase (3.1.2)).

$$\left. \begin{array}{l} x'(t) = a x(t) + b \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}, \quad \text{si } a \neq 0. \quad (3.1.2)$$

Identificando los parámetros del modelo general (3.1.2) con el (3.1.1) se deduce:

$$x(t) = r(t), \quad a = -k \neq 0, \quad t_0 = 0, \quad b = k\mu, \quad (3.1.3)$$

donde obsérvese que se ha utilizado que por hipótesis $k > 0$. Por tanto, según (3.1.2) la evolución temporal del tipo de interés está dada por:

$$r(t) = \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt}, \quad t > 0. \quad (3.1.4)$$

Observamos a partir de (3.1.4) que efectivamente el tipo de interés medio a largo plazo es μ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \mu + (r_0 - \mu) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = \mu.$$

En el Gráfico 3.1.1 se ilustra el comportamiento del modelo.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

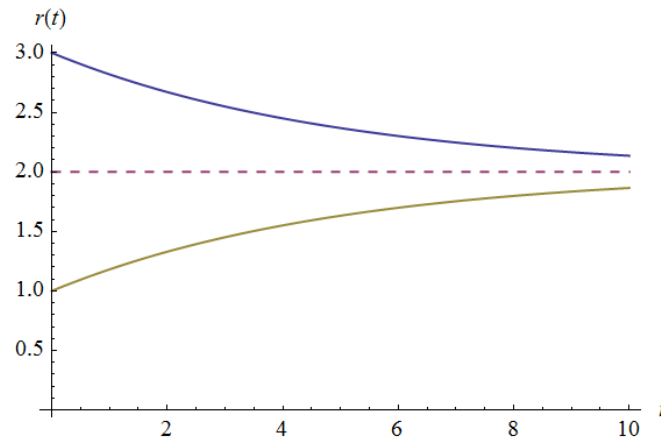


Gráfico 3.1.1. Representación gráfica de la solución del modelo determinista dado por el p.v.i. (3.1.1).
Fuente: Elaboración propia.

3.2. Motivación del modelo estocástico de tipos de interés: El modelo de Vasicek

En el apartado anterior se ha presentado un modelo de tipos de interés con reversión a la media completamente determinista. Introduciendo la notación diferencial de la derivada: $r'(t) = \frac{dr(t)}{dt}$ en dicho modelo, éste se reescribe equivalentemente como:

$$\frac{dr(t)}{dt} = k(\mu - r(t)),$$
$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt \quad (3.2.1)$$

Observemos que en la práctica el valor por el cual tiende a largo plazo el modelo determinista depende de un gran número de factores económicos, como pueda ser las políticas monetarias, el riesgo financiero, ..., factores todos ellos que contienen incertidumbre debido a la complejidad de los subfactores que a su vez los determinan. Es por ello más razonable tratar el parámetro μ no como una cantidad determinística, si no como una cantidad aleatoria. Esto motiva la siguiente representación estocástica del parámetro μ :

$$\mu \rightarrow \mu + \lambda W'(t), \quad \lambda > 0 \quad (3.2.2)$$

siendo $W(t)$ el movimiento browniano o proceso de Wiener (introducido en el Apartado 2.1), $\lambda > 0$ su intensidad y $W'(t)$ la derivada en el sentido de las distribuciones de $W(t)$, que se denomina proceso ruido blanco.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

De esta forma, introduciendo la sustitución (3.2.2) en (3.2.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} dr(t) &= k[(\mu + \lambda W'(t)) - r(t)]dt, \\ dr(t) &= k(\mu - r(t))dt + k \lambda W'(t)dt. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Ahora, razonando formalmente, dado que: $dW(t) = W'(t)dt$, el modelo (3.2.3) se escribe como:

$$\left. \begin{aligned} dr(t) &= k(\mu - r(t))dt + k \lambda dW(t), \\ r(0) &= r_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

En la literatura financiera este modelo de tipos de interés con reversión a la media se denomina modelo de Vasicek¹⁰ o de Ornstein-Uhlenbeck.

3.3. Solución del modelo estocástico de Vasicek de tipos de interés mediante el cálculo de Itô

Una vez hemos motivado desde el escenario determinista el planteamiento estocástico del modelo de tipos de interés de Vasicek, en este apartado estudiaremos, desde el punto de vista analítico y estadístico, su solución (que es un proceso estocástico) y sus principales funciones estadísticas, las cuales jugarán un rol esencial en el ajuste de los parámetros del modelo cuando éste se aplica a casos prácticos.

Para mayor claridad en el desarrollo posterior, vamos a reescribir el modelo de Vasicek dado en (3.2.4) en la siguiente forma equivalente:

$$\left. \begin{aligned} dr(t) &= \alpha(r_e - r(t))dt + \sigma dW(t), \\ r(0) &= r_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.1)$$

donde hemos realizado la siguiente identificación de los parámetros:

$$\alpha = k, \quad r_e = \mu, \quad \sigma = k\lambda > 0.$$

A continuación, utilizando el cálculo de Itô (véase Apartado 2.3), resolveremos la ecuación diferencial estocástica (3.3.1), i.e., calcularemos $r(t)$.

¹⁰ Vasicek, O. (1977). "An equilibrium characterization of the term structure", J. Financial Economics, 5, 177-188.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Para calcular en el proceso estocástico $r(t)$ que satisface la ecuación diferencial estocástica (3.3.1), primero vamos a reformular dicha ecuación. Para ello, introducimos el cambio de variable:

$$X(t) = r(t) - r_e \Rightarrow \begin{cases} r(t) & = X(t) + r_e \\ dr(t) & = dX(t) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

y sustituyendo en (3.3.1) obtenemos:

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dW(t), \quad (3.3.3)$$

siendo ahora la condición inicial

$$X(0) = r(0) - r_e = r_0 - r_e. \quad (3.3.4)$$

Ahora aplicaremos la fórmula de Itô (veáse Apartado 2.3) para calcular la solución del p.v.i. (3.3.3)-(3.3.4). Para ello tomemos

$$F(t, X) = e^{\alpha t} X,$$

e identificamos los datos del problema de valor inicial (3.3.3)-(3.3.4) con el patrón general dado en (2.3.2):

$$f(t, X) = -\alpha X, \quad g(t, X) = \sigma.$$

Para aplicar la fórmula de Itô, primero necesitamos calcular las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial F(t, X)}{\partial t} = \alpha e^{\alpha t} X,$$

$$\frac{\partial F(t, X)}{\partial X} = e^{\alpha t},$$

$$\frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial X^2} = 0.$$

Por tanto, aplicando la fórmula de Itô se obtiene:

$$d(e^{\alpha t} X) = \left(\alpha e^{\alpha t} X - \alpha X e^{\alpha t} + \frac{1}{2} \sigma \cdot 0 \right) dt + (\sigma e^{\alpha t}) dW(t),$$

es decir, simplificando

$$d(e^{\alpha t} X) = \sigma e^{\alpha t} dW(t).$$

Por tanto integrando ambos miembros entre $[0, t]$ con $t \leq T$ obtendremos

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

$$\int_0^t d(e^{\alpha s} X) = \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW(s),$$

$$e^{\alpha t} X(t) - X(0) = \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW(s).$$

Despejando $X(t)$ se llega a:

$$X(t) = e^{-\alpha t} \left(X(0) - \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW(s) \right).$$

Como estamos interesados en calcular $r(t)$, deshacemos el cambio de variable introducido en (3.3.2) y (3.3.4)

$$r(t) - r_e = e^{-\alpha t} \left(r_0 - r_e + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW(s) \right),$$

$$r(t) = r_e + e^{-\alpha t} \left(r_0 - r_e + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW(s) \right).$$

Simplificando esta última expresión obtendremos,

$$\boxed{r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s)} \quad (3.3.5)$$

3.4. Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek

En este apartado daremos las propiedades estadísticas, que posteriormente se utilizarán, de la solución del modelo de Vasicek. Las propiedades estadísticas que determinaremos son la media, la varianza, covarianza y la distribución normal.

3.4.1. Propiedades estadísticas

La distribución de probabilidad contiene toda la información sobre propiedades probabilísticas de una variable aleatoria. Es necesario disponer de una medida que resuma las características de la distribución.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

La esperanza matemática o valor esperado de una variable aleatoria se introduce con el fin de obtener una medida de centralización de una distribución de probabilidad. La varianza de una variable aleatoria puede utilizarse como una medida de la dispersión en torno a la media de su distribución de probabilidad.

Esperanza matemática

En estadística la esperanza matemática (también llamada esperanza, valor esperado, media poblacional o media) de una variable aleatoria X , es el número $E[X]$ que formaliza la idea de valor medio de un fenómeno aleatorio. Cuando la variable aleatoria es discreta, la esperanza es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso.

Definimos la esperanza matemática de una variable aleatoria discreta que toma los valores x_1, x_2, \dots, x_n con probabilidades $p(x_1) = p(X = x_1), p(x_2) = p(X = x_2), \dots, p(x_n) = p(X = x_n)$, respectivamente, al valor numérico:

$$E[X] = x_1p(X = x_1) + \dots + x_np(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i).$$

Para una variable aleatoria absolutamente continua, la esperanza se calcula mediante la integral de todos los valores y la función de densidad de probabilidad $f(x)$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

La esperanza también se suele simbolizar con $\mu = E[X]$ mientras que las esperanzas $E[X^k]$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ se llaman momentos de orden k . El momento de orden 1 es precisamente la media.

Las propiedades de la esperanza que necesitaremos a lo largo de esta memoria son:

1. $E[X + c] = E[X] + c$.
2. $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$.
3. $E[aX] = aE[X]$.

Varianza

En teoría de probabilidad, la varianza (que se suele representar como σ^2) de una variable aleatoria es una medida de dispersión en torno a la media y se define como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media. Esta medida está dada en

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

unidades distintas de las de la variable aleatoria, por ello es conveniente introducir la desviación estándar o típica, la cual, se define como la raíz cuadrada de la varianza. La varianza siempre es no negativa. Por tanto, dada una variable aleatoria X con media $\mu = E[X]$, su varianza, $Var[X]$ está dada por la expresión: $Var[X] = E[(X - \mu)^2]$.

Desarrollando la definición anterior, se obtiene la siguiente definición equivalente, conocida como fórmula de König:

$$\begin{aligned}Var[X] &= E[(X - \mu)^2] \\&= E[(X^2 - 2X\mu + \mu^2)] \\&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\&= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\&= E[X^2] - \mu^2.\end{aligned}$$

Si la variable aleatoria X es continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, entonces

$$Var[X] = \int (x - \mu)^2 f(x) dx,$$

donde,

$$\mu = \int x f(x) dx,$$

y las integrales están definidas sobre el rango de valores de la variable aleatoria X .

Si la variable aleatoria X es discreta con pesos $x_1 \rightarrow p_1, \dots, x_n \rightarrow p_n$ y n es el número total de datos, entonces tenemos:

$$Var[X] = \frac{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2}{n},$$

donde,

$$\mu = \frac{(\sum_{i=1}^n p_i x_i)}{n}.$$

Las propiedades de la varianza son:

1. $V[X] \geq 0$.
2. $V[aX + b] = a^2 V[X]$ siendo a y b números reales cualesquiera. De esta propiedad se deduce que la varianza de una constante es cero, es decir, $V[b] = 0$.
3. $V[X + Y] = V[X] + V[Y] + 2Cov[X, Y]$, donde $Cov[X, Y]$ es la covarianza de X e Y .

Covarianza

En este apartado recordamos la definición de covarianza de dos variables aleatorias y listaremos sus principales propiedades.

Definimos la covarianza de dos variables aleatorias X e Y , con medias $E[X]$ y $E[Y]$, respectivamente, como:

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

Si desarrollamos el miembro de la derecha es sencillo ver la siguiente representación equivalente de la covarianza:

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Obsérvese que si X e Y son independientes, como $E[XY] = E[X]E[Y]$, se tiene: $Cov[X, Y] = 0$.

Se puede demostrar que un valor positivo (negativo) de $Cov[X, Y]$ indica que Y tiende a crecer (decrecer) cuando X crece.

La covarianza goza de las siguientes propiedades:

1. $Cov[X, X] = Var [X]$.
2. $Cov[X, Y] = Cov [Y, X]$.
3. $Cov[aX, Y] = Cov[X, aY] = a Cov[X, Y]$, siendo a una constante.
4. $Cov[X, Y + Z] = Cov[X, Y] + Cov[X, Z]$.

La última propiedad se puede generalizar:

$$5. Cov[a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i, b_0 + \sum_{j=1}^m b_j Y_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j Cov[X_i, Y_j],$$

siendo $\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{b_j\}_{j=1}^m$ constantes.

Distribución Normal

En este apartado recordaremos la definición y propiedades de la distribución Normal. La distribución Normal es una de las distribuciones de probabilidad de variables continuas que con más frecuencia se utiliza en la modelización estadística de fenómenos reales. Se dice que una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal de parámetros μ y σ y se denota $X \sim N[\mu; \sigma]$ cuando su función de densidad de probabilidad está dada por:

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

A continuación, detallaremos únicamente las propiedades de la distribución Normal que más nos interesan para nuestro desarrollo posterior:

1. Si $X \sim N[\mu; \sigma^2]$ y a y b son números reales, entonces $aX + b \sim N[a\mu + b; a^2\sigma^2]$.
2. Si $X \sim N[\mu_x; \sigma_x^2]$ e $Y \sim N[\mu_y; \sigma_y^2]$ son variables aleatorias normales independientes, entonces:
 - Su suma está normalmente distribuida: $X + Y \sim N[\mu_x + \mu_y; \sigma_x^2 + \sigma_y^2]$.
 - Su diferencia está normalmente distribuida: $X - Y \sim N[\mu_x - \mu_y; \sigma_x^2 + \sigma_y^2]$.

3.4.2. Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek

Una vez que hemos obtenido mediante el cálculo de Itô (fórmula de Itô) la solución del modelo de Vasicek (véase (3.3.5)):

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s),$$

en este apartado estudiaremos sus principales funciones estadísticas: media, varianza y covarianza.

Para este análisis se requerirá de la aplicación de las propiedades de la integral estocástica de Itô listadas en el Apartado 2.4.

Función Media

Tomamos el operador esperanza en la expresión (3.3.5) y obtenemos:

$$\begin{aligned} E[r(t)] &= r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma E \left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \right] \\ &= r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}. \end{aligned} \quad (3.4.2.1)$$

Función Varianza

Teniendo en cuenta la fórmula de König:

$$Var[r(t)] = E \left[(r(t))^2 \right] - (E[r(t)])^2, \quad (3.4.2.2)$$

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

como ya conocemos $E[r(t)]$ (véase (3.4.2.1)), basta calcular el momento de orden dos respecto del origen: $E[(r(t))^2]$. Para ello, a partir de (3.3.5) calculamos $(r(t))^2$:

$$\begin{aligned} (r(t))^2 &= (r_e)^2 + (r_0 - r_e)^2 e^{-2\alpha t} + \sigma^2 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \right)^2 + 2r_e(r_0 - r_e)e^{-\alpha t} \\ &\quad + 2r_e\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) + 2\sigma(r_0 - r_e)e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s). \end{aligned}$$

Ahora tomamos el operador esperanza y aplicamos las propiedades I.1. y I.2. de la integral de Itô:

$$\begin{aligned} E[(r(t))^2] &= (r_e)^2 + (r_0 - r_e)^2 e^{-2\alpha t} + \sigma^2 E \left[\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \right)^2 \right] \\ &\quad + 2r_e(r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + 2r_e\sigma E \left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \right] \\ &\quad + 2\sigma(r_0 - r_e)e^{-\alpha t} E \left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \right] \tag{3.4.2.3} \\ &= (r_e)^2 + (r_0 - r_e)^2 e^{-2\alpha t} + \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds + 2r_e(r_0 - r_e)e^{-\alpha t} \\ &= (r_e)^2 + (r_0 - r_e)^2 e^{-2\alpha t} + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) + 2r_e(r_0 - r_e)e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado que,

$$\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

Sustituyendo (3.4.2.1) y (3.4.2.3), y realizando las operaciones algebraicas correspondientes se obtiene la siguiente función varianza:

$$\text{Var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}). \tag{3.4.2.4}$$

Función Covarianza

Para calcular la covarianza de $r(t)$ y $r(s)$, reescribiremos $r(t)$ dada en (3.3.5), en la siguiente forma equivalente:

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dW(u).$$

Aplicando la Propiedad 5 de la covarianza (véase Apartado 3.4.1) para $n = m = 1$, con la siguiente identificación:

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

$$a_0 = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}, \quad a_1 = \sigma e^{-\alpha t}, \quad X_1 = \int_0^t e^{\alpha u} dW(u),$$

$$b_0 = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha s}, \quad b_1 = \sigma e^{-\alpha s}, \quad Y_1 = \int_0^s e^{-\alpha v} dW(v),$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} Cov[r(t), r(s)] &= Cov \left[r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dW(u), r_e \right] \\ &+ (r_0 - r_e)e^{-\alpha s} + \sigma e^{-\alpha s} \int_0^s e^{\alpha v} dW(v) \\ &= Cov \left[\sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dW(u), \sigma e^{-\alpha s} \int_0^s e^{\alpha v} dW(v) \right] \\ &= \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} Cov \left[\int_0^t e^{\alpha u} dW(u), \int_0^s e^{\alpha v} dW(v) \right]. \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta la definición de covarianza (véase Apartado 3.4.1) y la propiedad I.3. de la integral de Itô, se obtiene:

$$Cov[r(t), r(s)] = \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} \int_0^{t \wedge s} e^{2\alpha u} du = \frac{\sigma^2 e^{-\alpha(t+s)}}{2\alpha} (e^{2\alpha(t \wedge s)} - 1).$$

Obsérvese que en el caso en que $t = s$, $t \wedge s = t$ y de esta última fórmula obtenemos la varianza (véase (3.4.2.4)).

3.5. Simulación del modelo de Vasicek

Con objeto de evaluar la calidad del modelo de Vasicek para modelizar tipos de interés en casos prácticos, es conveniente observar que la representación de su solución $r(t)$ dada en (3.3.5) está en términos de la integral estocástica

$$\int_0^t e^{\alpha u} dW(u), \quad (3.5.1)$$

por lo que se hace necesario disponer de estrategias para simular dicha integral. Para ello vamos a proponer una forma de abordar este problema, la cual será considerada en la aplicación y validación del modelo a los casos prácticos analizados en el Capítulo 4.

3.5.1. Simulación por re-escalado del tiempo del movimiento browniano

Observemos en primer lugar que por la propiedad I.4 de la integral de Itô sabemos,

$$\int_0^t e^{\alpha u} dW(u) \sim N \left[0; \int_0^t e^{2\alpha u} du \right].$$

Por otra parte,

$$\int_0^t e^{2\alpha u} du = \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1),$$

por tanto,

$$\int_0^t e^{\alpha u} dW(u) \sim N \left[0, \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1) \right],$$

o equivalentemente, utilizando la definición del proceso de Wiener (véase Apartado 2.1),

$$\int_0^t e^{\alpha u} dW(u) \stackrel{d}{=} W \left(\int_0^t e^{2\alpha u} du \right) = W \left(\frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1) \right),$$

donde $\stackrel{d}{=}$ denota que la igualdad es en distribución.

Ahora teniendo en cuenta la propiedad de $\frac{1}{2}$ – autosemejante del proceso de Wiener (véase Apartado 2.1) obtenemos,

$$\int_0^t e^{\alpha u} dW(u) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} W(e^{2\alpha t} - 1).$$

Esto nos permite dar la siguiente representación de la solución $r(t)$ dada en (3.3.5) en términos del movimiento browniano re-escalado en el tiempo:

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t}}{\sqrt{2\alpha}} W(e^{2\alpha t} - 1). \quad (3.5.2)$$

Con objeto de facilitar aún más el proceso de simulación, obsérvese que utilizando la representación:

$$W(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t} Z, \quad Z \sim N[0,1],$$

la expresión (3.5.2) puede escribirse equivalentemente como:

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

$$r(t) \stackrel{d}{=} r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z, \quad Z \sim N[0,1] \quad (3.5.3)$$

3.6. Estudio asintótico del modelo de Vasicek

Hasta ahora hemos analizado el modelo de tipos de interés de Vasicek en tiempos finitos, obteniendo su proceso estocástico solución y sus principales propiedades estadísticas, también denominadas, leyes condicionales tales como la media, varianza y covarianza. Además, hemos proporcionado un método para simular el proceso solución. Sin embargo, en la propia base de la formulación del modelo se considera el comportamiento a largo plazo del tipo de interés, ya que el parámetro r_e denota el tipo de interés a largo plazo, al cual se supone que *retorna* el modelo. Por ello, a continuación, vamos a estudiar el modelo asintóticamente.

Partimos para ello de la siguiente representación de la solución en tiempos finitos,

$$r(t) \sim N \left[r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \right]. \quad (3.6.1)$$

Obsérvese que la normalidad procede de la representación (3.3.5), de la propiedad 1.4 de la integral de Itô y de la propiedad 1 de las variables aleatorias Gaussianas (distribución Normal). Por otra parte, la media y la varianza de $r(t)$ ya han sido calculadas en (3.4.2.1) y (3.4.2.4), respectivamente.

Tomando límites cuando $t \rightarrow \infty$ en (3.6.1) y teniendo en cuenta que $\alpha > 0$, se obtiene que

$$r_\infty \sim N \left[r_e; \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right].$$

Obsérvese que ello refuerza la denominación del modelo de Vasicek como un modelo de regresión de tipos de interés a la media, ya que, r_e denota en el planteamiento asintótico del modelo el tipo de interés a largo plazo.

3.7. Estimación por Máxima Verosimilitud de los parámetros del modelo de Vasicek

La función de verosimilitud de la muestra r_0, r_1, \dots, r_N (tomada en intervalos de tiempo de longitud Δt) está dada por la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra: $L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N)$. Utilizando el teorema de Bayes, el hecho de que la solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô del tipo

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t),$$

(de la cual, el modelo de Vasicek es un caso particular) es un proceso estocástico markoviano de primer orden y la normalidad del proceso solución del modelo de Vasicek, se obtiene que:

$$\begin{aligned} L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N) &= L(\alpha, r_e, \sigma; r_0) L(\alpha, r_e, \sigma; r_1 | r_0) L(\alpha, r_e, \sigma; r_2 | r_0, r_1) \\ &\dots L(\alpha, r_e, \sigma; r_N | r_0, r_1, \dots, r_{N-1}) \\ &= L(\alpha, r_e, \sigma; r_1 | r_0) L(\alpha, r_e, \sigma; r_2 | r_1) \dots L(\alpha, r_e, \sigma; r_N | r_{N-1}) \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos aplicado el teorema de Bayes y en la segunda que el proceso solución es Markoviano de orden 1.

$$\begin{aligned} L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_1 - (r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_2 - (r_e + (r_1 - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2} \\ &\times \dots \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_N - (r_e + (r_{N-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^N e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2} \\ &= \left(2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2}. \end{aligned}$$

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

La aplicación del método de máxima verosimilitud (M.M.V.) busca el cálculo de los parámetros α , r_e y σ que maximizan la función

$$L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N),$$

sin embargo, es equivalente (y más sencillo), hacerlo sobre la función de log-verosimilitud

$$\hat{L}(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N) = \ln(L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N))$$

dada por:

$$\begin{aligned} \ln(L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N)) &= -\frac{N}{2} \left(\ln(2\pi) + \ln \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2 \\ &= -\frac{N}{2} \left(\ln(2\pi) + \ln \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_{i+1} - (r_e + (r_i - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2. \end{aligned}$$

3.8. Modelo de regresión

Actualmente, la necesidad de reducir la incertidumbre ante la toma de decisiones obliga a anticipar la evolución de las variables económicas, por lo que la predicción adquiere especial relevancia y se exigen métodos predictivos lo más fiables posibles. Es aquí donde surgen los modelos de regresión. Para determinar este tipo de modelos hemos de estimar sus parámetros, siendo habitualmente estimados por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).

Por lo tanto, un modelo de regresión consiste en determinar un vector b de estimadores de los parámetros que cumpla:

$$Y = Xb + e = \hat{Y} + e, \quad (3.8.1)$$

Donde X es la matriz formada por las variables explicativas, \hat{Y} es la estimación de Y o variable que pretendemos predecir y e es el valor aproximado del error que se obtiene al concluir que \hat{Y} es

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Y. Respecto al método de los MCO podemos decir que consiste en la obtención de una recta de forma que se minimice la suma de los cuadrados de las distancias (e_i) entre cada una de las observaciones de la variable y dicha recta. A las distancias e_i se les denominan residuos. La expresión vectorial de los residuos se obtiene de despejar la ecuación (3.8.1), dando como resultado:

$$e = Y - Xb. \quad (3.8.2)$$

Se debe minimizar entonces la suma de cuadrados de los residuos (SCR) porque son el error que se realiza en el ajuste, es decir, la distancia de cada observación a la recta ajustada. Al elevarlos al cuadrado elimina el signo, y al sumarlos se acumulan los errores, como se expresa a continuación:

$$SCR = \sum_{j=1}^n e_j^2 = \sum_{j=1}^n (Y_j - \hat{Y}_j)^2. \quad (3.8.3)$$

Por otra parte, un estimador de la varianza del residuo, σ^2 , es la SCR corregido por los grados de libertad. Se puede demostrar que el estimador de la varianza de la perturbación sigue la expresión,

$$\sigma^2 = \frac{SCR}{n-k-1}, \quad (3.8.4)$$

también denominada cuadrado medio residual. Dado que la SCR ha sido minimizada, es obvio que la varianza del error también es mínima.

La estimación por MCO, Gujarati (2010), se basa en unos supuestos relativamente estrictos, que en ocasiones se relajan ligeramente. Dichos supuestos básicos de partida en relación a los residuos:

- $E[e_i] = 0, \forall i$.
- $E[e_i e_j] = E[e_i^2] = \sigma_e^2, i = j$ (*homocedasticidad*).
- $E[e_i e_j] = 0, \forall i \neq j$ (*no auto – correlación*).
- $e_i \sim N[0, \sigma_e^2]$.

En general, cuando los errores cumplen estos supuestos básicos se denominan ruido blanco y se caracterizan por tener la varianza constante para cada una de las observaciones y una covarianza cero entre las mismas.

3.8.1. Análisis de residuos

Una vez introducido el concepto de residuo, es importante realizar una pequeña introducción de las diversas herramientas existentes para el análisis de estos, para verificar los supuestos. Para ello, se describen diversas pruebas para determinar la idoneidad del modelo propuesto de los residuos del ajuste. Para la comprobación de dichas hipótesis, la literatura Thode (2002) propone una serie de gráficos de los residuos del ajuste, en los que se valoraran los problemas del modelo.

El primer análisis, se trata de evaluar si se cumple la hipótesis de normalidad para lo que se realiza el gráfico Q-Q plot, el cual compara dos distribuciones a partir de sus cuartiles, en este caso los cuartiles empíricos de los residuos con los de una normal. El cumplimiento de la hipótesis de normalidad es indispensable para poder realizar los contrastes de significación y obtener los intervalos de confianza que permitan realizar predicciones. Además, si esta hipótesis no se cumple, los estimadores dejan de ser máximo verosímiles. Como apoyo al Q-Q plot, se puede presentar el histograma de los residuos, para observar si tienen la forma de la campana de Gauss.

El gráfico Q-Q plot ofrece una mayor cantidad de información sobre la distribución de los residuos que cualquier otro gráfico o prueba numérica y se hace imprescindible cuando existe falta de normalidad de los residuos, puesto que permite tomar decisiones sobre la forma de transformar el modelo para conseguir la normalidad. En la Figura 3.8.1.1 se puede ver un ejemplo de este tipo de gráfico, en él puede observarse que si los residuos son aproximadamente normales los puntos se acercan a la diagonal.

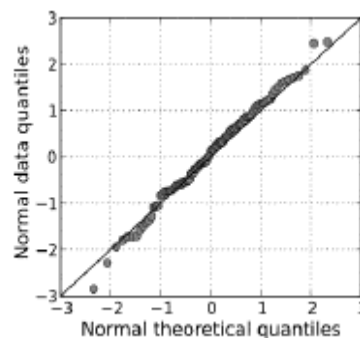


Figura 3.8.1.1. Ejemplo de Q-Q plot.

Fuente. (Thode, 2002).

Otra forma de contrastar que los residuos probabilísticamente siguen una distribución normal es mediante el test de Kolmogorov-Smirnov. Se emplea para contrastar si la distribución de

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

probabilidad proviene de una distribución Normal y el contraste de hipótesis es el siguiente, tomando los valores de media y desviación típica:

$$\begin{cases} H_0: \text{La distribución de probabilidad es una } N[\mu, \sigma]. \\ H_1: \text{La distribución de probabilidad no es una } N[\mu, \sigma]. \end{cases}$$

El estadístico del contraste de Kolmogorov-Smirnov (D_n) es la máxima distancia vertical entre la función de distribución formada por los datos corregidos ($F_n(x)$) y la función de distribución teórica con la que se quieren contrastar los datos ($F(x)$), como se expresa a continuación:

$$D_n = \max_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|.$$

El número de datos se denota por n . Cuando $n > 30$, el valor crítico del estadístico para un nivel de significación del 5% es el siguiente (D_{crit}):

$$D_{crit} = \frac{D_n}{\sqrt{n}}$$

Siempre que se obtenga un valor para D_n menor que D_{crit} , no se podrá rechazar la hipótesis nula.

El siguiente análisis de residuos es el relacionado con la homocedasticidad, es decir, la varianza de los errores es constante. Por lo tanto, la homocedasticidad es una propiedad fundamental del modelo de regresión lineal general y está dentro de sus supuestos básicos. Según Gujarati (2010)¹¹, en la Figura 3.8.1.2 se observan gráficos correspondientes a los residuos al cuadrado frente a la estimación de la variable dependiente estimada mediante la recta de regresión, con la idea de averiguar si el valor medio estimado de Y está relacionado sistemáticamente con el residuo al cuadrado. En la Figura 3.8.1.2 a) se observa que no hay un patrón sistemático entre las dos variables, lo cual sugiere que tal vez no exista heterocedasticidad en los datos. Sin embargo, las Figura 3.8.1.2 b) a 3.8.1.2 e) muestran patrones definidos. Por ejemplo, la Figura 3.8.1.2 c) sugiere una relación lineal, mientras que las Figura 3.8.1.2 d) y 3.8.1.2 e) indican una relación cuadrática entre el residuo y la estimación. Con dicho conocimiento, es posible transformar los datos de manera que una vez transformados no presenten heterocedasticidad.

¹¹ GUJARATI, D. N., PORTER, D. C. (2010). "Econometría". Mc Graw Hill. 5ª Edición. Capítulo 11.- Heterocedasticidad: ¿que pasa si la varianza del error no es constante?. Página 377-378.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

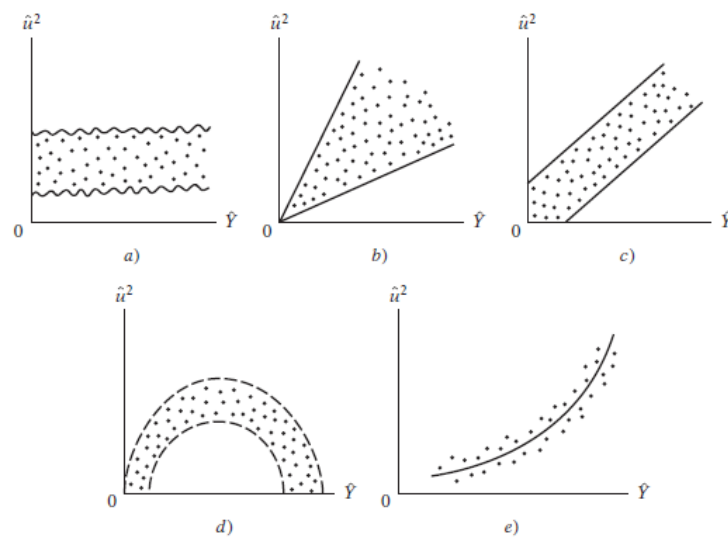


Figura 3.8.1.2. Estudio teórico de la homocedasticidad.

Fuente. (Gujarati, 2010).

Por último, el análisis que deberemos de tener en cuenta es el independencia, de los residuos, es decir, la existencia de no autocorrelación entre ellos (covarianza o coeficiente de correlación igual o próximo a 0), esto quiere decir, que se debe cumplir que estas no deben de parecerse.

3.8.2. Medidas de bondad de ajuste

Para analizar el buen ajuste del modelo se pueden utilizar diversas herramientas:

- Gráfico comparativo de las observaciones y las predicciones.
- Error cuadrático medio (Mean Squared Error (MSE)).
- Coeficiente de determinación (R^2).

La medida MSE de bondad de ajuste mide la distancia por término medio entre los valores observados y los estimados. Cuanto menor sea el resultado de la raíz de MSE, entonces podremos decir que el error en el modelo presentado será menor.

$$MSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K (S_i - \hat{S}_i)^2}{K}}$$

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Pasamos a describir el cálculo del coeficiente de determinación. La suma de cuadrados de Y puede dividirse en dos partes, una suma de cuadrados explicada debida al efecto de las variables explicativas en la variable a explicar, y otra, la suma de los cuadrados de los residuos, ya vista. Esta descomposición se justifica con la siguiente expresión:

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i), \quad (3.8.2.1)$$

elevando al cuadrado y sumando para todas las observaciones disponibles, se tiene la expresión:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2. \quad (3.8.2.2)$$

Las expresiones que se obtienen al desarrollar la suma de cuadrados anterior reciben las siguientes denominaciones:

- Suma de cuadrados total (SCT): Suma del cuadrado de las diferencias entre cada valor observado de la variable y la media de los mismos. Indicaría si los valores están muy alejados del valor medio.
- Suma de cuadrados del residuo (SCR): Suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los estimados. Como se ha señalado, es una medida en el error que se comete al tomar el uno por el otro, puesto que al elevar al cuadrado se pierde el signo de la diferencia. Al sumarlos se acumulan.
- Suma de cuadrados explicada (SCE): Suma de los cuadrados de las diferencias entre las estimaciones y el valor medio de las observaciones. Indicaría si las estimaciones están muy alejadas de la media de los valores observados.

La relación entre los tres, por lo tanto es $SCT = SCE + SCR$. Si un modelo explicara completamente a la variable, su SCR debería ser cero, y las SCT y SCE iguales. Si, por el contrario, no existiera relación entre las variables explicada y explicativa, la SCE debería valer cero, y la SCR igual a la SCT. Como la SCE toma valores entre 0 y SCT, el cociente SCE/SCT toma valores entre 0 y 1, con lo que podría ser un buen indicador de la bondad del ajuste realizado.

El cociente SCE/SCT se denomina coeficiente de determinación (R^2) y se emplea para saber si un modelo es adecuado, es decir, si explica suficientemente la variable objeto de estudio. Por su definición, el coeficiente de determinación siempre toma valores entre cero y uno, es decir, $0 \leq R^2 \leq 1$, por lo que se trata de una escala que mide lo adecuado del ajuste, o dicho de otra forma, mide el porcentaje de la variable Y explicado por el modelo propuesto.

La raíz cuadrada de dicho coeficiente recibe el nombre de coeficiente de correlación múltiple, y es el coeficiente de relación lineal simple entre la variable y su estimación, entre Y e \hat{Y} .

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Otra forma de obtener el valor correspondiente al coeficiente de determinación es el cociente entre la varianza estimada de la muestra y la varianza global de la observación. Una vez obtenido este cociente, utilizaremos la siguiente ecuación para el resultado a obtener:

$$R^2 = 1 - \frac{S_{\hat{Y}}^2}{S_Y^2}. \quad (3.8.2.3)$$

3.8.3. Predicción

Uno de los objetivos que se persiguen al realizar los modelos económicos es el de poder hacer predicciones de los valores de la variable, por lo que el modelo ajustado debe permitir predecir el valor medio de dicha variable, o encontrar un intervalo que contenga con una probabilidad determinada al valor real.

Si se pretende obtener una estimación puntual esta será posible mediante el valor esperado de la variable estudiada Y asociado a unos determinados valores de las variables explicativas en el modelo ajustado. Para ello se calcula la estimación de Y que corresponde a su valor medio condicionado $E\left(\frac{Y}{x_1}, \dots, x_k\right)$, como se expresa:

$$\hat{Y} = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z \quad (3.8.3.1)$$

La predicción puntual por intervalos de confianza debe complementarse con la varianza de la estimación, para conocer así el error en la predicción. La manera de presentar ambos valores es el intervalo de confianza. El intervalo de confianza a nivel α para la estimación de Y es el que se muestra continuación:

$$\hat{Y} + \mu \pm (2s) \quad (3.8.3.2)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mu &= \hat{r}_e + (r_0 - \hat{r}_e)e^{-\hat{\alpha}t_N} \\ s &= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\alpha}}(1 - e^{-2\hat{\alpha}t_N})}. \end{aligned} \quad (3.8.3.3)$$

3.8.4. Simulación mediante método Monte Carlo: aplicación al caso del modelo de Vasicek

En el Método Monte Carlo (MC) o Simulación Monte Carlo se agrupan procedimientos que analizan distribuciones de variables aleatorias usando una simulación de números aleatorios. Dicho método, da una solución a una gran variedad de problemas matemáticos haciendo experimentos con muestreos estadísticos en un ordenador. Por lo tanto, generalmente se utiliza en cualquier tipo de esquema capaz de poder emplear números aleatorios, utilizando variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas.

Este método se llamó así por el principado de Mónaco por ser “la capital del juego de azar”, al considerar una ruleta como un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de MC datan aproximadamente de 1944 con el desarrollo de los ordenadores. Están ligados al trabajo desarrollado por Stan Ulam y John Von Neumann a finales de los años 40 en el laboratorio de Los Alamos, cuando investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones. Sin embargo, hay varias aportaciones (aisladas y no desarrolladas) en muchas ocasiones anteriores a 1944. El uso real de los métodos de MC como una herramienta de investigación, proviene del trabajo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial.

Por lo tanto, este método MC será aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinístico. Se puede realizar en condiciones diferentes y determinar la mejor solución en el marco de los resultados obtenidos. Son muchos los autores que han apostado por utilizar hojas de cálculo para realizar simulación MC. La potencia de las hojas de cálculo reside en su universalidad, en su fácil uso, en su capacidad para recalcular valores y, sobre todo, en las posibilidades que ofrece con respecto al análisis de escenarios como por ejemplo Gedam y Beaudet (2000).

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Para poder realizar el método MC, primero deberemos crear el modelo matemático del sistema, proceso o actividad que se quiere analizar, identificando aquellas variables cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema. Una vez identificados dichos inputs o variables aleatorias, se lleva a cabo un experimento consistente en: Primero, generar muestras aleatorias con ayuda del ordenador (obtención de valores concretos); Segundo, analizar el comportamiento del sistema ante los valores generados.

Tras repetir N veces este experimento, dispondremos de N observaciones sobre el comportamiento del sistema, lo cual nos será de utilidad para entender el funcionamiento del mismo: por lo tanto, a mayor número de N observaciones, más precisión tendrá el análisis. Para un trato más extenso sobre el tema consultar el texto Gilks, Richardson y Spiegelhalter (1996).

Una vez se han estimado los parámetros μ , σ y r_e , y sustituidos en la expresión:

$$r(t) \stackrel{d}{=} r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z, \quad Z \sim N[0,1].$$

Así pues, generando diferentes valores de Z, tendremos estimaciones puntuales diferentes de $r(t)$ para la valoración del tipo de interés interbancario EONIA para un momento fijo t.

Las hojas de cálculo como Excel son capaces de generar números aleatorios procedentes de una distribución normal inversa con media 0 y desviación típica 1. Este tipo de números aleatorios son los elementos básicos a partir de los cuales se desarrolla cualquier simulación por ordenador. En Excel, es posible obtener un número aleatorio usando la función ALEATORIO. Dicha función es volátil ya que cuando pulsamos la tecla F9, automáticamente nos generara en todas las celdas donde aparezca dicha función, un nuevo número aleatorio.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

4. Aplicación y validación del modelo de Vasicek

Para la aplicación y validación del modelo de Vasicek hemos elegido el tipo de interés interbancario EONIA. En el Gráfico 4.1 se muestra el histórico del tipo interés EONIA desde 1999 – 2012. Esta elección ha estado condicionada al tipo de modelo que se estudia en este trabajo: el modelo de Vasicek y sus supuestos básicos. La formulación de dicho modelo exige en sus hipótesis que el tipo de interés sea de corto plazo o también denominado “*short-term*” La puesta en práctica del modelo ha supuesto en primer lugar la búsqueda en bases de datos de tipos de interés a corto plazo. Esto se ha realizado a partir de las fuentes del *Banco de España*¹². Una vez obtenidos los datos, hemos aplicado el modelo y, posteriormente hemos realizado un estudio de la bondad de ajuste para diferentes periodos. A partir de este análisis, se ha elegido el período donde se observa que el modelo no cambia excesivamente de tendencia central y esta puede ser descrita de forma lineal, ya que así lo exige su formulación del modelo según su reversión a la media.

¹² www.bde.es

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Como hemos señalado antes, la elección apropiada del período donde se aplica el modelo es un paso crucial en este estudio. Observemos en el Gráfico 4.1 cómo desde que el valor empezó a operar, ha seguido diversos comportamientos debidos a los distintos escenarios económicos acontecidos tanto en la economía europea como mundial. Una vez aplicado el modelo en varios periodos, se ha llegado a la conclusión de que debe elegirse la etapa actual donde el modelo puede aplicarse de forma adecuada por ello se ha decidido el correspondiente al año 2012. Centramos inicialmente nuestro estudio en el período 02/01/2012 – 31/12/2012.

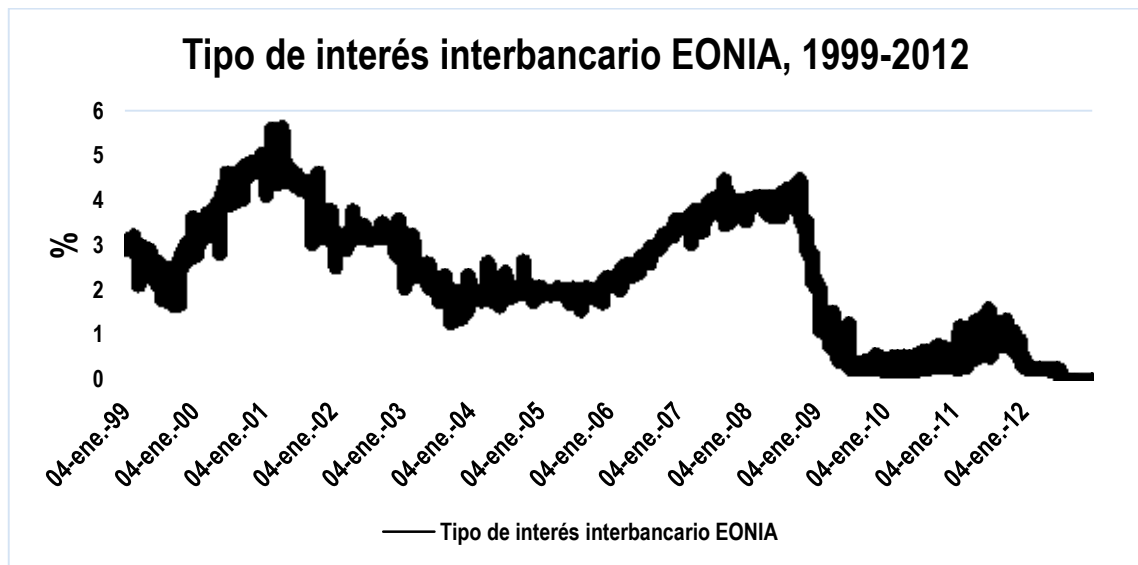


Gráfico 4.1. Tipo de interés interbancario EONIA, 1999-2012.

Fuente. Banco de España. Elaboración Propia.

En el Gráfico 4.2 se muestran los valores del tipo de interés interbancario EONIA en el año 2012. Dichos valores fluctúan de forma decreciente desde el 0,39% del 02/01/2012 hasta el 0,131% del 31/12/2012.

Antes de proceder a aplicar el modelo para el año 2012, utilizando la metodología estadística estándar eliminaremos los datos anómalos u “outliers” realizando para ello un análisis previo de los residuos. Los valores “outliers” o valores alejados son datos fuera del intervalo de valores normales y con su depuración conseguimos obtener un modelo que refleje mejor a la mayoría de datos. Por ello, se ha procedido a excluir del análisis un total tres datos en el primer semestre y de un solo dato en el segundo semestre, concretamente corresponden en el primer semestre a los días 06/01/2012, 30/03/2012 y 29/06/2012 mientras en el segundo semestre corresponde al 31/12/2012. Este comportamiento anómalo puede explicarse ya que corresponde a fechas de

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

principios y finales de mes, donde habitualmente el BCE suele tomar las decisiones correspondientes a la política monetaria y que por tanto afectan a los tipos de interés.



Gráfico 4.2. Tipo de interés interbancario EONIA, 2012.

Fuente. Banco de España. Elaboración propia.

Centrándonos en el año 2012, distinguimos dos etapas distintas respecto del comportamiento de EONIA. El primer periodo corresponde al 02/01/2012 – 10/07/2012 y el segundo periodo corresponde al 11/07/2012 – 31/12/2012 (Gráfico 4.2). La inesperada decisión tomada por parte del BCE en el primer jueves del pasado mes de Julio de 2012 de bajar los tipos de interés oficiales en 25 puntos básicos provocó este descenso a mitad del año 2012, ya que, dicho descenso pasó del 1% hasta el 0,75%, siendo el 11/07/2012 el día en el que el BCE hace efectiva la decisión tomada unos días atrás¹³.

Una vez realizado este análisis de todo el año 2012, decidimos aplicar el modelo de Vasicek en el segundo semestre del año 2012, es decir, a partir del salto que se produce puesto que el modelo Vasicek no capta bien un salto debido a las expectativas inesperadas en las magnitudes macroeconómicas. Cabe señalar sin embargo, que dicho modelo también se aplicó al primer semestre del año 2012, proporcionando buenos resultados. Una segunda razón para la elección del segundo semestre de 2012, es el atractivo de la consideración de la aplicación del modelo sobre datos lo más actuales posibles para poder realizar predicciones.

¹³ Nota de prensa: “El BCE deja de pagar hoy a la banca por depositar el dinero”. Diario Expansión. 11-07-2012.

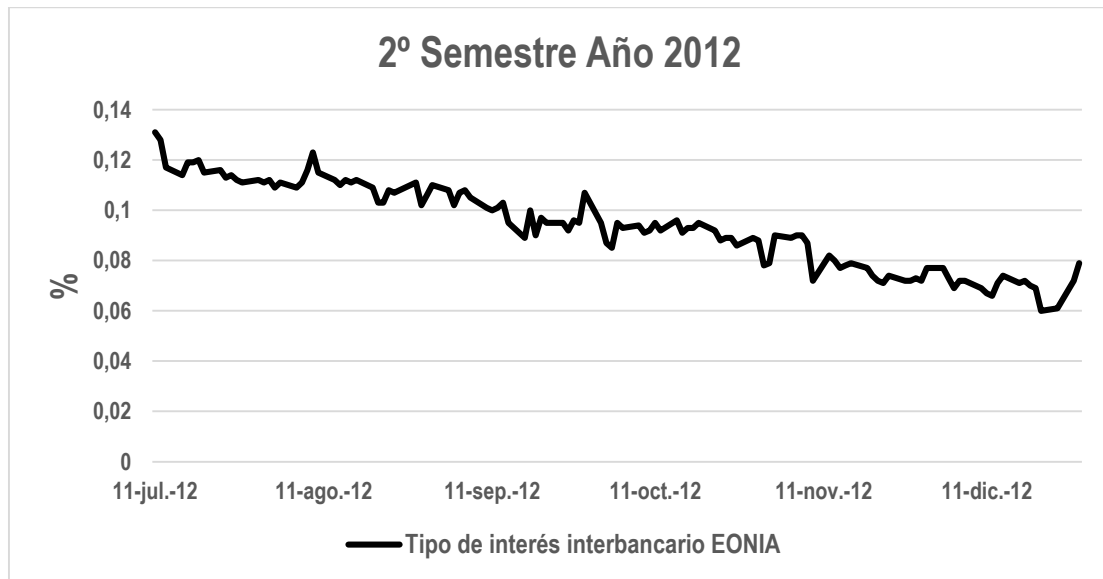


Gráfico 4.3. Tipo de interés interbancario EONIA, 2º semestre 2012. Período: 11/07/2012 – 31/12/2012.

Fuente. Banco de España. Elaboración propia.

Así pues el periodo de nuestro estudio corresponde a las fechas de 11/07/2012 – 31/12/2012. Observando el Gráfico 4.3, el tipo interbancario EONIA sigue una tendencia bajista con cierta volatilidad. El único “*outlier*” que ha sido eliminado de este gráfico corresponde al día 31/12/2012. Como explicación de este dato anómalo creemos que fue debido a que el BCE realizó diversos comunicados haciendo saber la buena marcha de la crisis económica actual en todo el marco europeo, por lo que eso fue una buena noticia que hizo incrementar notablemente los tipos de interés ese día.

4.1. Aplicación modelo de regresión

En primer lugar, realizaremos un análisis descriptivo¹⁴ del periodo, obteniendo los estadísticos básicos utilizados (media, varianza de la muestra, etc.), siendo $N + 1$ el número total de datos 121. Estos estadísticos nos proporcionan una descripción del comportamiento de EONIA a lo largo del periodo para una primera exploración.

¹⁴ Utilizaremos la macro Análisis de Datos/ Estadística Descriptiva (Excel).

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Estadísticos Descriptivos	
Media	0,0938
Error típico	0,0015
Mediana	0,0940
Moda	0,0720
Desviación estándar	0,0167
Varianza de la muestra	0,0003
Curtosis	-1,0159
Coefficiente de asimetría	-0,0526
Rango	0,071
Mínimo	0,06
Máximo	0,131
Suma	11,347
Cuenta	121

Tabla 4.1.1. Estadísticos descriptivos de las observaciones EONIA, 2º Semestre 2012.

Fuente. Elaboración propia (Excel).

La media de las observaciones es de 0,0938 mientras que la desviación estándar es de 0,0167. El rango en el que se mueven las observaciones es de un 0,071, es decir, la diferencia entre el dato mínimo, 0,06, y el dato máximo, 0,131. Las medidas de distribución, curtosis y coeficiente de asimetría, nos permitirán determinar el grado de concentración que presentan los valores en la región central de la distribución (curtosis) e identificar si los datos se distribuyen de forma uniforme alrededor del punto central (asimetría). En nuestro caso, la curtosis es menor de 0, por lo que diremos que la distribución es platicúrtica o mas achatada que la normal. La asimetría es menor de 0, por lo que es asimétricamente negativa y por tanto la cola a la izquierda de la media es más alargada que la norma. Pero al tener ambos coeficientes valores en el intervalo de -2 a 2 podemos aceptar que la forma del histograma de los datos no se aleja excesivamente de la campana de Gauss y por tanto es aproximadamente normal.

En segundo lugar, hemos realizado un ajuste de regresión lineal¹⁵, $y = a + bt$, donde “y” es la variable dependiente, “t” es el tiempo (variable independiente). Por lo que en la recta de regresión “y” son los datos de EONIA y “t” es el tiempo con origen en 0. Con esta regresión se pretende captar la tendencia lineal de los tipos de interés previamente a aplicar el modelo Vasicek.

¹⁵ Utilizaremos la macro Análisis de datos/ Regresión (Excel).

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

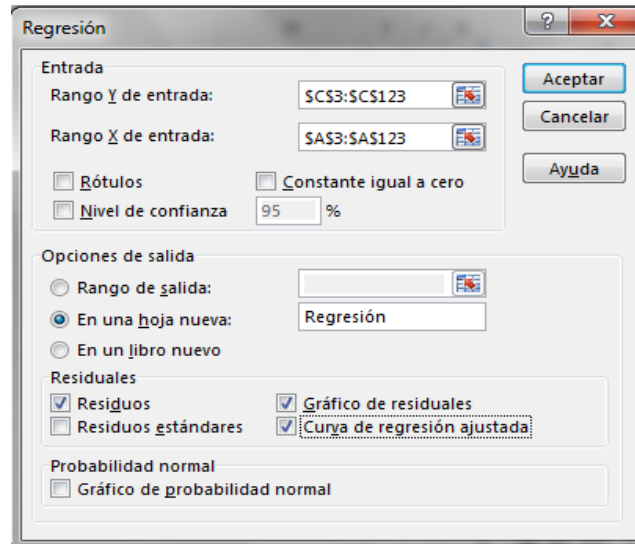


Figura 4.1.2. Parámetros escogidos para realizar la regresión.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

Una vez estimados los parámetros, se procede al análisis de los resultados obtenidos. Los resultados de la regresión (Tabla 4.1.3). De esta tabla se deduce que los coeficientes de la recta de de regresión son: $a = 0,12125525$ y $b = 0,000457973$, y en ella se muestra un pronóstico y unos residuos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Resumen								
2									
3	<i>Estadísticos de la regresión</i>								
4	Coefficiente de correlación múltiple	0,963803791							
5	Coefficiente de determinación R^2	0,928917748							
6	R^2 ajustado	0,928320418							
7	Error típico	0,004462016							
8	Observaciones	121							
9									
10	ANÁLISIS DE VARIANZA								
11		<i>Grados de libertad</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Promedio de los cuadrados</i>	<i>F</i>	<i>Valor crítico de F</i>			
12	Regresión	1	0,030961734	0,030961734	1555,116908	3,62061E-70			
13	Residuos	119	0,002369241	1,99096E-05					
14	Total	120	0,033330975						
15									
16		<i>Coefficientes</i>	<i>Error típico</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Inferior 95%</i>	<i>Superior 95%</i>	<i>Inferior 95,0%</i>	<i>Superior 95,0%</i>
17	Intercepción	0,12125525	0,000806273	150,3898457	1,364E-137	0,119658749	0,122851751	0,119658749	0,122851751
18	Variable X 1	-0,000457973	1,16134E-05	-39,43497062	3,62061E-70	-0,000480969	-0,000434978	-0,000480969	-0,000434978
19									
20									
21									
22	Análisis de los residuales					Resultados de datos de probabilidad			
23									
24	<i>Observación</i>	<i>Pronóstico para Y</i>	<i>Residuos</i>			<i>Percentil</i>	<i>Y</i>		
25	1	0,12125525	0,00974475			0,41322314	0,06		
26	2	0,120797277	0,007202723			1,239669421	0,061		
27	3	0,120339904	-0,003339904			2,066115702	0,066		
28	4	0,11988133	-0,00588133			2,892561983	0,067		
29	5	0,119423357	-0,006423357			3,719008264	0,069		

Tabla 4.1.3. Análisis de la regresión.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

En tercer y último lugar, se ha llevado a cabo una valoración de la regresión lineal y un análisis de sus residuos. En el Gráfico 4.1.4 se muestran los pronósticos para el tipo de interés interbancario EONIA en forma de recta y las observaciones del interés frente a el tiempo. En él puede apreciarse que la recta capta de forma muy adecuada la tendencia descendente del índice.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

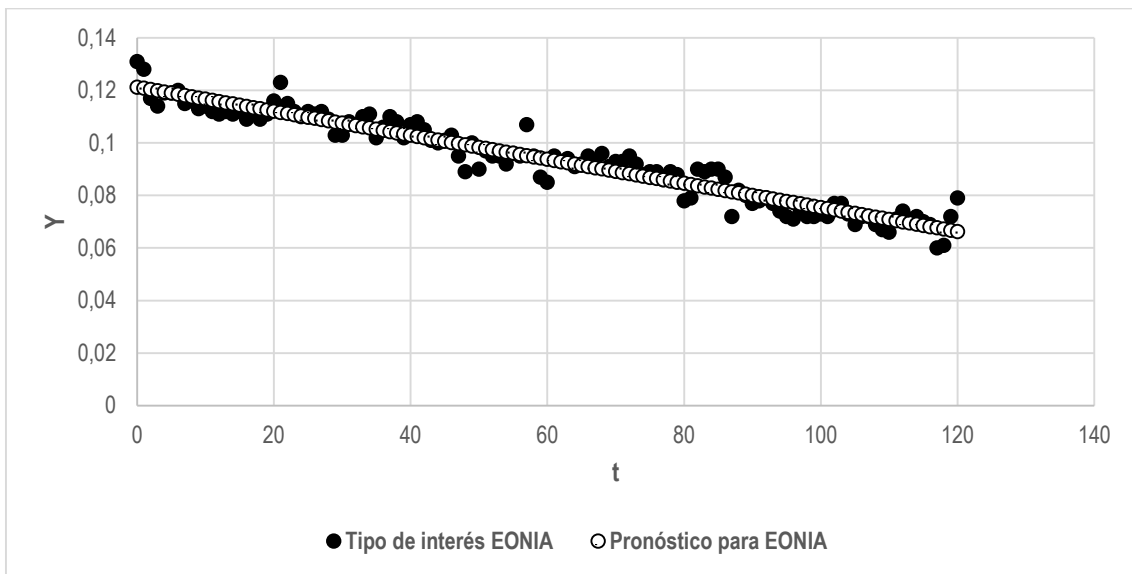


Gráfico 4.1.4. Curva de Regresión Ajustada.

Fuente.- Elaboración propia (Excel).

El Gráfico 4.1.5 se han representado los residuos frente al periodo para observar el grado de independencia de los mismos. Concluimos que existe dependencia debido a que los residuos tienen una disposición regular alrededor de eje horizontal $e = 0$, a lo largo del tiempo. Este comportamiento es el que moderaremos con el modelo Vasicek.

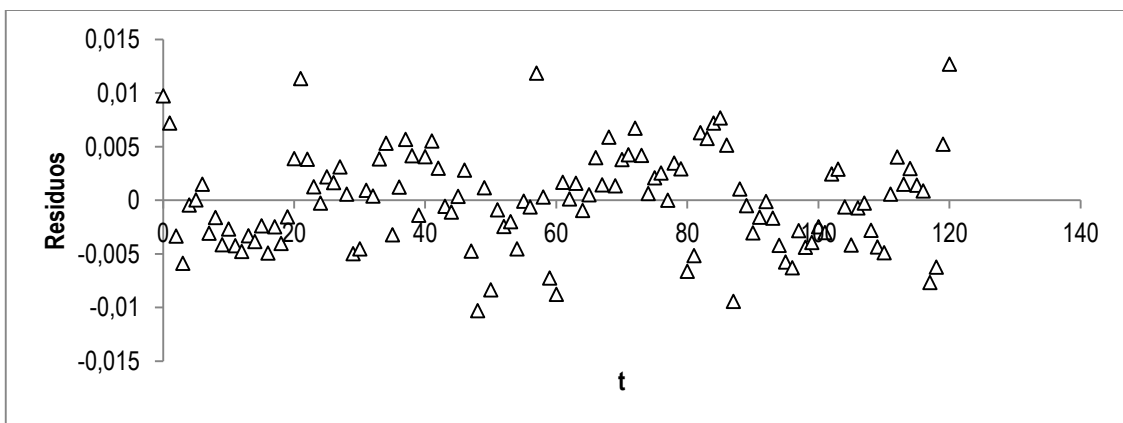


Gráfico 4.1.5. Análisis de Residuos, Independencia.

Fuente. Elaboración propia. (Excel)

En el Gráfico 4.1.6, (denominado gráfico Q-Q plot), nos permite aceptar que los residuos se distribuyen de forma normal ya que se encuentran sobre la diagonal, y eso supone que los cuartiles son similares a los de la dicha distribución.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

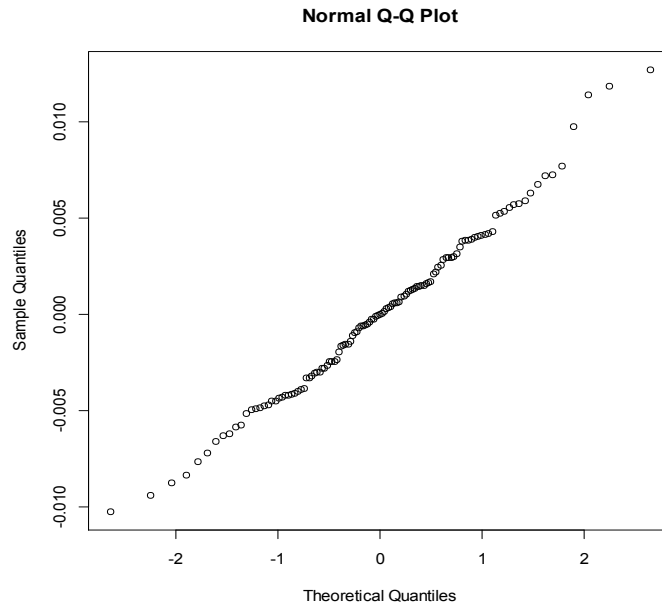


Gráfico 4.1.6. Análisis de normalidad de los residuos. Gráfico Q-Q Plot.

Fuente. Elaboración propia. R Development Core Team (2008).

En el Gráfico 4.1.7 se representa el histograma los datos sin tendencia del tipo interbancario EONIA. Se observa como dicho histograma se aproxima a una distribución normal o gaussiana, tal y como se observa en la línea discontinua.

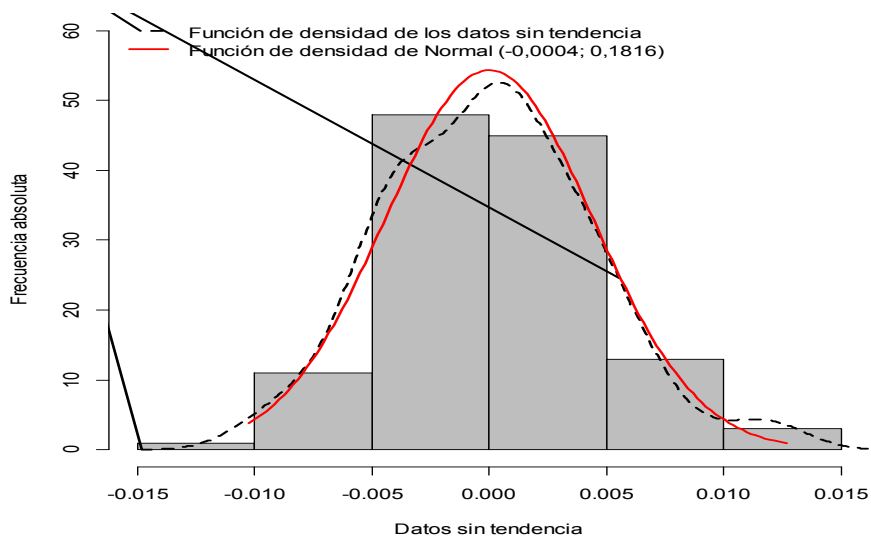


Gráfico 4.1.7. Histograma de las observaciones sin tendencia.

Fuente. Elaboración propia. R Development Core Team (2008).

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Por último, dentro del análisis de los residuos, en el Gráfico 4.1.8 representamos los residuos frente a la predicción obtenida a partir de la recta de regresión. Este análisis nos permite concluir la existencia de homocedasticidad, ya que, la mayor parte de los residuos se encuentran en un intervalo de valores comprendidos entre 0,01 y -0,01 los residuos.

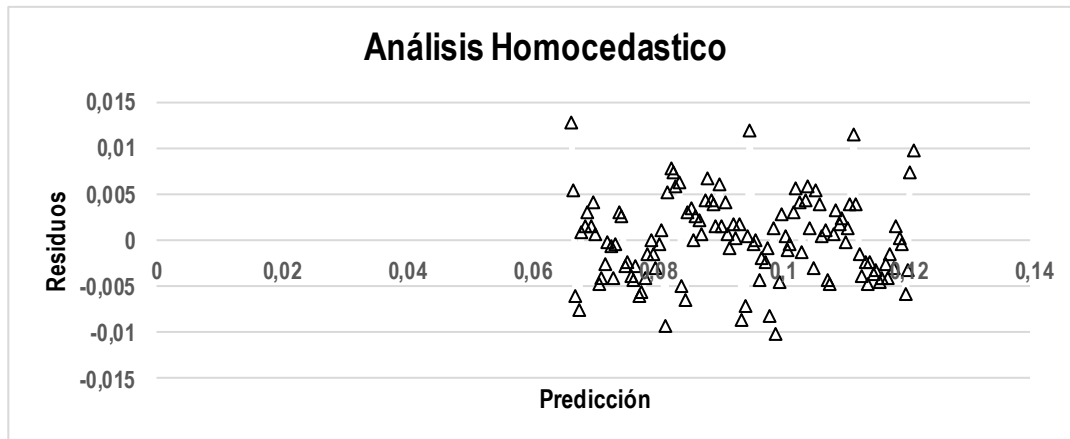


Gráfico 4.1.8. Análisis de residuos, Homocedasticidad.
Fuente. Elaboración propia (Excel).

Por lo tanto, a partir del estudio de la regresión, concluimos que podemos aceptar que describe bien la tendencia y que los residuos resultantes son aproximadamente normales. Y a estos residuos o lo que denominaremos datos sin tendencia es los que vamos a aplicar el modelo.

4.2. Aplicación del modelo de Vasicek

El modelo de Vasicek (véase (3.3.5)), necesita la estimación de tres parámetros: α , r_e , σ . Para poder obtener una estimación de estos parámetros, utilizaremos el método de máxima log-verosimilitud. Este análisis se ha realizado con la macro Solver (Figuras 4.2.1 y 4.2.2).

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

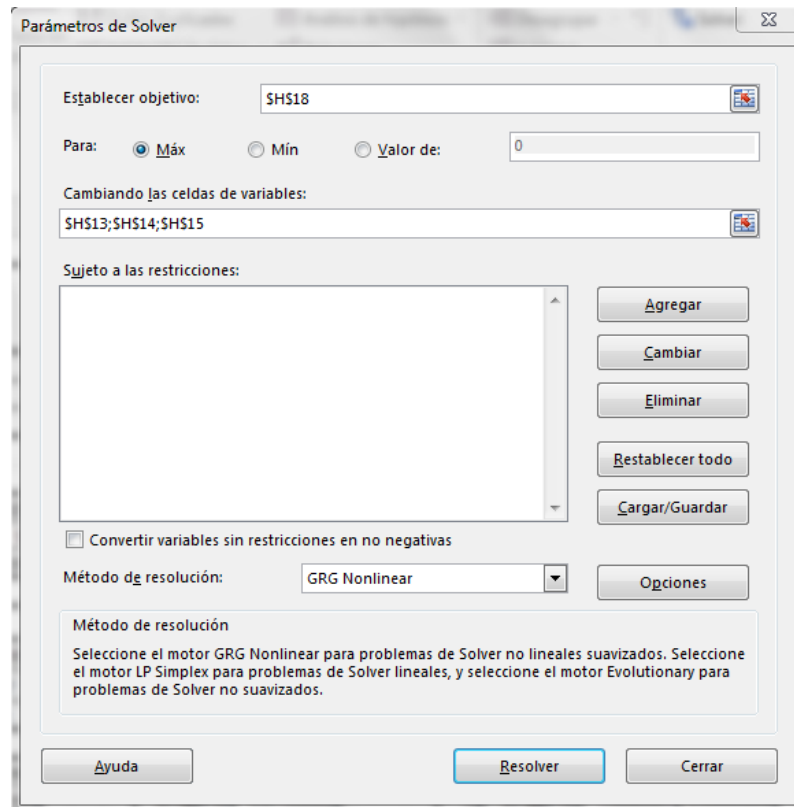


Figura 4.2.1. Valores iniciales de los parámetros del modelo de Vasicek escogidos en Solver.

Fuente. Elaboración propia. Software Solver (Excel).

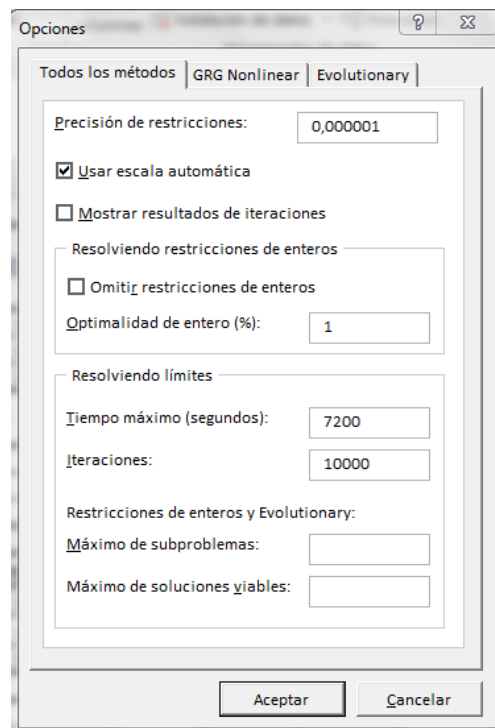


Figura 4.2.2. Opciones en Solver del método de búsqueda de los parámetros del modelo de Vasicek.

Fuente. Elaboración propia. Software Solver (Excel).

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Teniendo en cuenta el proceso de análisis descrito en las Figuras 4.2.1. y 4.2.2., los resultados obtenidos sobre los residuos se detallan en la Tabla 4.2.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1												MAX-VEROSIMILITUD	
2	t	FECHA	EONIA	Residuos EONIA			ESTADÍSTICOS					FECHA	V^2
3	0	11-jul-12	0,131	0,00974475			Media Muestral	0,0938				11-jul-12	0,63507738
4	1	12-jul-12	0,128	0,007202723			Varianza Muestral	0,0003				12-jul-12	2,573066509
5	2	13-jul-12	0,117	-0,003339304			Desviación Típica	0,0167				13-jul-12	1,266816686
6	3	16-jul-12	0,114	-0,00588133								16-jul-12	0,279273459
7	4	17-jul-12	0,119	-0,000423357								17-jul-12	0,003997064
8	5	18-jul-12	0,119	3,46159E-05			Δt	0,003968254				18-jul-12	0,147417104
9	6	19-jul-12	0,12	0,001492589			N	121				19-jul-12	0,850914924
10	7	20-jul-12	0,115	-0,003049438			π	3,141592654				20-jul-12	0,004787573
11	8	23-jul-12	0,116	-0,001591465								23-jul-12	0,754672
12	9	24-jul-12	0,113	-0,004133491			Valores estimados					24-jul-12	0,05219985
13	10	25-jul-12	0,114	-0,002675518			α	218,4615185				25-jul-12	0,599946917
14	11	26-jul-12	0,112	-0,004217545			r _e	-0,0000637				26-jul-12	0,559049984
15	12	27-jul-12	0,111	-0,004759572			σ	0,0908928				27-jul-12	0,102696663
16	13	30-jul-12	0,112	-0,003301599								30-jul-12	0,375911192
17	14	31-jul-12	0,111	-0,003843626			Σ v^2	120,9968				31-jul-12	0,034552385
18	15	01-ago-12	0,112	-0,002385652			Valor función ln L	498,0589				01-ago-12	0,971030952

Tabla 4.2.3. Resultados de los parámetros mediante el método de Máxima Verosimilitud en el modelo de Vasicek.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

Los datos sin tendencia se han obtenido de la regresión (Tabla 4.1.3, Celda C25 y siguientes) del tipo interbancario EONIA en la columna D. La estimación de los parámetros se ha realizado a partir de la aplicación de la solución del modelo de Vasicek (véase (3.3.5)) mediante el método de máxima log-verosimilitud (Capítulo 3.7). La columna M corresponde a una parte de la evaluación de la función de log-verosimilitud (véase (4.2.1)).

$$\begin{aligned}
 \ln(L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N)) &= -\frac{N}{2} \left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})\right) \right) \\
 &- \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_{i+1} - (r_e + (r_i - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2}_{v^2}. \quad (4.2.1)
 \end{aligned}$$

Los resultados en la Columna M (calculamos N datos), los utilizamos en la Celda H18, obteniendo el valor máximo del periodo con los respectivos parámetros anteriores (Figuras 4.2.1 y 4.2.2) obtenidos en las Celdas H13-H15, que corresponden a los valores de α, r_e, σ . Para el resultado de la Celda H18 debemos tener en cuenta, que el incremento de t en el periodo a utilizar

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

será de $1/252$ (correspondiente al paso unitario de un año medio con 252 días de aperturas de mercados financieros) y en la Celda H17 encontraremos la suma de toda la Columna M.

Una vez obtenido el resultado de los parámetros a estimar (α, r_e, σ) , necesitamos para hacer las predicciones de los datos sin tendencia a partir del modelo de Vasicek (véase (3.5.3)) simular la variable aleatoria $Z \sim N[0; 1]$. Estas simulaciones aparecen en la columna S de la Tabla 4.2.4. y en la columna T se indican las predicciones de los datos sin tendencia.

	Q	R	S	T	U
1	SIMULACIÓN POR RE-ESCALADO				
	t	FECHA	Z	Predicción Residual Vasicek	Predicción EONIA
2					
3	0	11-jul-12	-0,03745754	0,00974475	0,131
4	1	12-jul-12	0,118731841	0,004526767	0,125324044
5	2	13-jul-12	0,24183997	0,002703635	0,123042939
6	3	16-jul-12	-0,72888213	-0,00249644	0,117384895
7	4	17-jul-12	0,930132813	0,004284831	0,123708189
8	5	18-jul-12	0,322183974	0,001465725	0,120431109
9	6	19-jul-12	1,017775636	0,004415936	0,122923347
10	7	20-jul-12	-0,05058045	-0,00026093	0,117788503
11	8	23-jul-12	0,094905482	0,000358528	0,117949993
12	9	24-jul-12	-0,3153071	-0,00143076	0,11570273
13	10	25-jul-12	-0,30674819	-0,00139587	0,115279649
14	11	26-jul-12	0,70549245	0,003004757	0,119222302
15	12	27-jul-12	-0,17466654	-0,00082292	0,114936655
16	13	30-jul-12	0,63009146	0,002676302	0,1179779
17	14	31-jul-12	0,176767727	0,000705007	0,115548632
18	15	01-ago-12	1,02865401	0,004409298	0,118794951

Tabla 4.2.4. Cálculo realizado para la simulación por re-escalado del Modelo Vasicek.

Fuente. Elaboración propia. (Excel).

Finalmente, añadiendo estas predicciones de los datos sin tendencia obtenidos por Vasicek a los pronósticos de la tendencia obtenidos en el modelo de regresión, obtenemos las predicciones de EONIA (véase Columna U de la Tabla 4.2.4). En el Gráfico 4.2.5. se ha representado la evolución del tipo interbancario EONIA estimado a partir del modelo de Vasicek y el resultado de la muestra de datos EONIA publicados por BdE en dicho período.

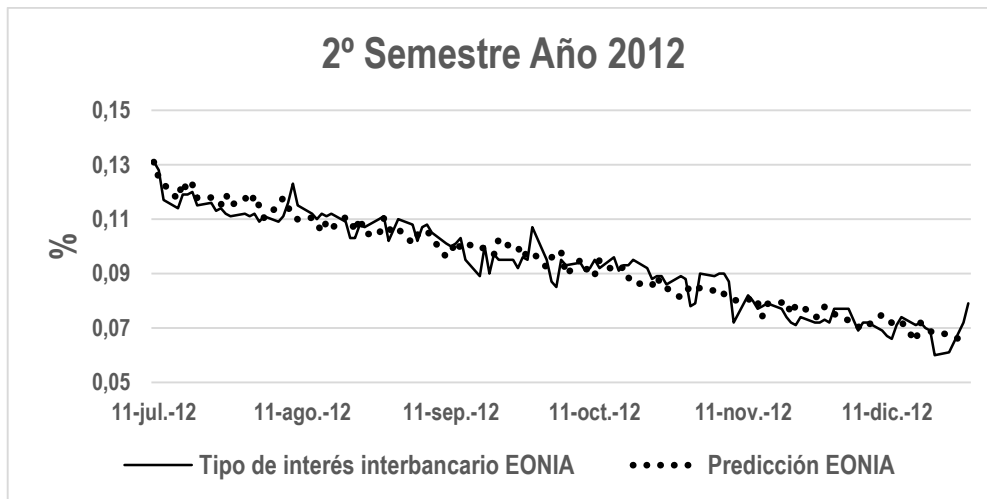


Gráfico 4.2.5. Predicción Tipo de interés interbancario EONIA mediante Modelo de Vasicek.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

4.3. Validación del modelo de Vasicek

Una vez realizada la aplicación del modelo de Vasicek en el periodo seleccionado para el tipo de interés EONIA, es necesario llevar a cabo una validación del modelo de Vasicek. Esto nos permitirá aceptar la solución del modelo para el caso del tipo de interés EONIA utilizando criterios estadísticos. Estos criterios serán: medidas de bondad de ajuste, estudio de intervalos de confianza y análisis de los residuos. Con ello, obtendremos predicciones validadas para el EONIA, lo que quiere decir que son fiables y no dependen en exceso de los métodos y datos utilizados.

4.3.1. Medidas de bondad de ajuste

En el Capítulo 3.8.2 se expusieron las medidas de bondad de ajuste que vamos a considerar en este apartado para validar el modelo de Vasicek aplicado al caso del tipo EONIA.

En primer lugar, se realiza un estudio comparativo de las observaciones de la muestra y las predicciones obtenidas al aplicar el modelo de Vasicek. Si observamos el Gráfico 4.2.5, podemos decir que el tipo de interés interbancario EONIA de la muestra sigue una tendencia bajista y a su vez la volatilidad es mucho mayor que la obtenida a partir de la predicción del modelo de Vasicek.

En segundo lugar, se obtiene el Error Cuadrático Medio (MSE) introducido en el Capítulo 3.8.2. La Tabla 4.3.1.1 muestra los resultados obtenidos para las medidas de bondad de ajuste, particularmente, para el MSE. Para mayor claridad en la exposición detallamos los pasos a seguir

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

para calcular la medida MSE. Primero, se obtiene la media de la predicción del período (Tabla 4.2.4, Columna U) en la Celda Z7. Segundo, se obtiene la media de las observaciones del período (Tabla 4.2.3, Columna C) en la Celda Z8. Tercero, se obtiene el cociente en valores absolutos entre la media estimada y la real (Celda Z9). Cuarto, en la Columna AB obtenemos el residuo entre las observaciones y las predicciones. Quinto, elevaremos al cuadrado los residuos obtenidos anteriormente en la Columna anterior (Columna AC). Por último, para obtener el MSE (Celda Z10), sumaremos los datos de la columna AC y lo dividiremos entre el número de datos del período, es decir, 121. Por lo tanto, si a la Celda Z10 le aplicamos la raíz cuadrada, obtenemos el RMSE, es decir, el error mínimo del período analizado con un resultado de 0,0048.

En tercer lugar, el Coeficiente de Determinación (R^2) (véase Ecuación (3.8.2.3)) se emplea para saber si un modelo es adecuado, es decir, si la variable dependiente “EONIA” está suficientemente explicado por el modelo de Vasicek aplicado. En la Celda Z12 se utiliza la varianza de la observación (Tabla 4.2.3, Celda H4) y la varianza de la muestra global (Tabla 4.3.1.1, Celda Z16) mientras que en la Celda Z13 se obtiene la Varianza de la predicción (Tabla 4.2.4, Columna U) para realizar el mismo procedimiento anterior. Obtenemos el R^2 de los datos y la predicción. Los resultados obtenidos son de un 99,986% en ambos casos, por lo que el modelo se explica correctamente a partir de los datos obtenidos al estar próximo a la unidad.

4.3.2. Validación por intervalos de confianza

En este apartado construiremos intervalos de confianza (IC) del 95% para validar la aplicación realizada del modelo de Vasicek a los datos EONIA.

En la Tabla 4.3.2.1 obtenemos el cálculo de los intervalos de confianza a partir de los datos sin tendencia obtenidos en la Regresión (Tabla 4.1.3), teniendo en cuenta el cálculo de μ (Columna AH) y s (Columna AI), tal y como se explica en el Capítulo 3.8.3. Además, hemos de considerar el valor de la predicción del tipo EONIA en la Regresión (Tabla 4.2.4), se suma el valor de μ más 1,96 veces el valor obtenido en s , donde μ es la media del modelo de Vasicek (véase Ecuación (3.8.3.3)) más la predicción de la regresión y, s es la desviación típica del modelo de Vasicek (véase Ecuación (3.8.3.3)). De esta manera obtendremos el IC superior mientras que en el caso contrario, IC inferior, es la misma operación anterior, pero sustituyendo la suma por una resta. En la Gráfica 4.3.2.2 podemos observar los resultados obtenidos con un nivel de significatividad de un 5%.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

	Y	Z	AA	AB	AC
1					
2				Residuo	Residuo Datos al cuadrado
3				0	0
4				0,002675956	7,16074E-06
5				-0,00604294	3,65171E-05
6				-0,0033849	1,14575E-05
7	Media Estimada del período	0,094218634		-0,00470819	2,2167E-05
8	Media Real del período	0,09377686		-0,00143111	2,04807E-06
9	Error Absoluto Medias período	0,000441774		-0,00292335	8,54596E-06
10	MSE	2,29877E-05		-0,0027885	7,77575E-06
11	RMSE	0,004794552		-0,00194999	3,80247E-06
12	Coefficiente de Determinación DATOS	99,986%		-0,00270273	7,30475E-06
13	Coefficiente de Determinación ESTIMACIÓN	99,986%		-0,00127965	1,6375E-06
14				-0,0072223	5,21616E-05
15				-0,00393666	1,54973E-05
16	Varianza Muestral Global	2,0015		-0,0059779	3,57353E-05

Tabla 4.3.1.1. Estudio medidas Bondad de Ajuste.

Fuente. Elaboración propia. (Excel).

	AG	AH	AI	AJ	AK
1	ESTUDIO INTERVALOS DE CONFIANZA				
2	FECHA	μ	S	Intervalo superior	Intervalo inferior
3	11-jul-12	0,00974475	0	0,131	0,131
4	12-jul-12	0,00405828	0,003945757	0,132589242	0,117121873
5	13-jul-12	0,001668554	0,004280025	0,130396707	0,113619009
6	16-jul-12	0,000664277	0,004336383	0,129044918	0,112046297
7	17-jul-12	0,000242232	0,00434626	0,12818426	0,111146919
8	18-jul-12	6,48682E-05	0,004348003	0,127552337	0,110508167
9	19-jul-12	-9,66843E-06	0,00434831	0,12702043	0,109975055
10	20-jul-12	-4,09923E-05	0,004348364	0,12653124	0,109485651
11	23-jul-12	-5,41561E-05	0,004348374	0,126060122	0,109014495
12	24-jul-12	-5,96881E-05	0,004348376	0,12559662	0,108550987
13	25-jul-12	-6,2013E-05	0,004348376	0,125136322	0,108090688

Tabla 4.3.2.1. Cálculos para la obtención de intervalos de confianza con 95% de probabilidad.

Fuente. Elaboración propia. (Excel).

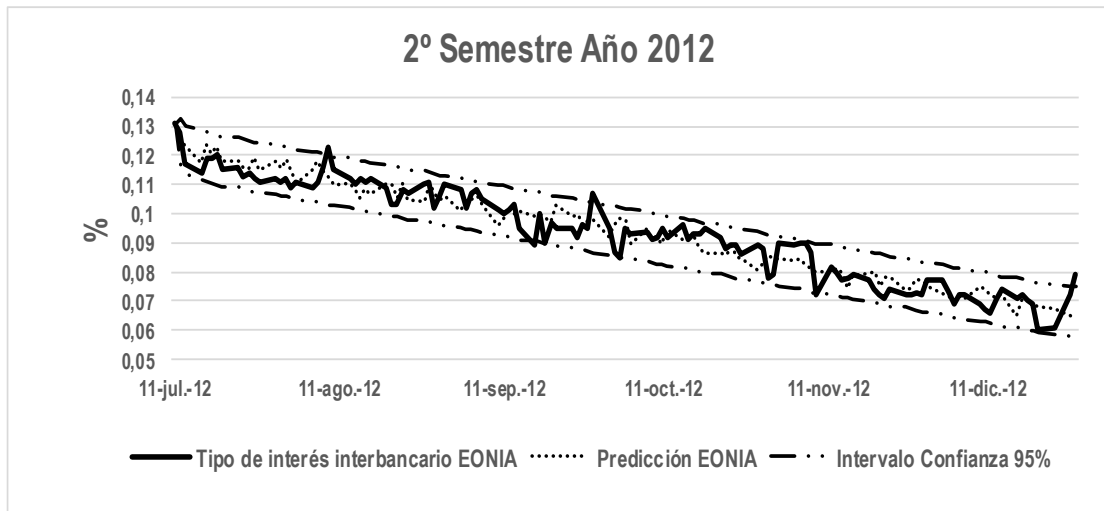


Gráfico 4.3.2.2. Análisis de los Intervalos de Confianza con un nivel de significatividad de un 5%.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

4.3.3. Validación de los residuos

Según la metodología explicada en el Capítulo 4.1, los residuos se han obtenido como la diferencia entre los datos de la predicción final (tendencia + modelo Vasicek) y los datos de la muestra. A continuación, necesitamos validar estos residuos justificando su independencia y normalidad.

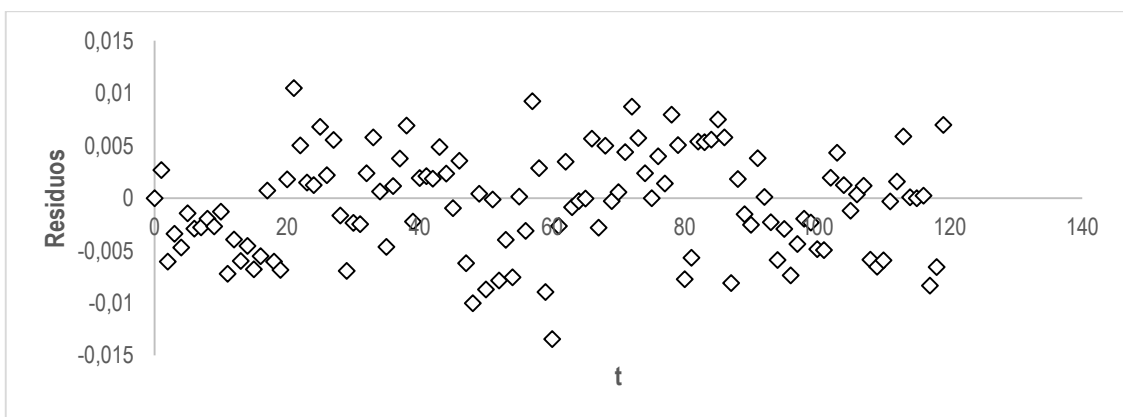


Gráfico 4.3.3.1. Análisis de Residuos, Independencia.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

En el Gráfico 4.3.3.1 representamos los residuos para estudiar el grado de independencia. Concluimos que existe independencia debido a que los residuos se encuentran dispersos en el tiempo aproximadamente distribuidos alrededor del eje horizontal $e = 0$.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

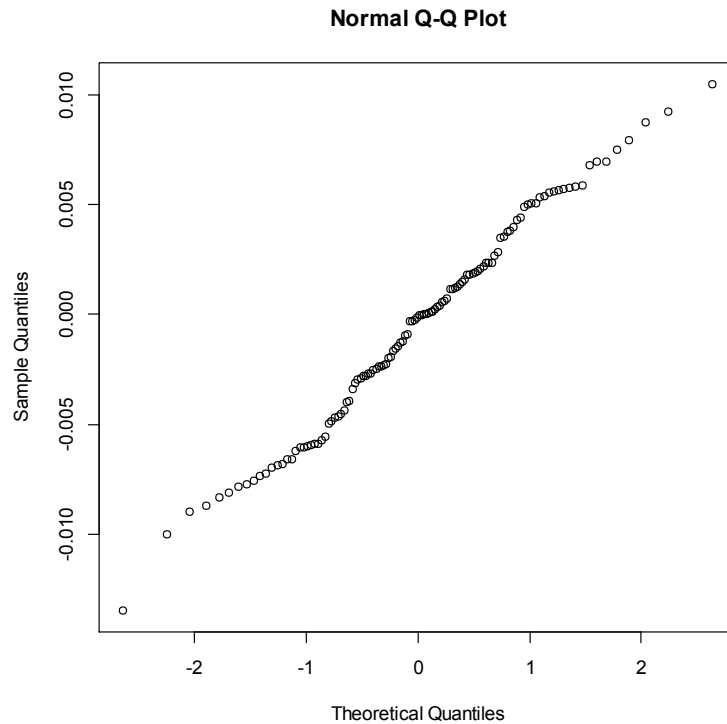


Gráfico 4.3.3.2. Análisis de normalidad de los residuos. Gráfico Q-Q Plot.
Fuente. Elaboración propia. R Development Core Team (2008).

En Gráfico 4.3.3.2, corresponde al análisis de normalidad de los residuos y se trata de nuevo un gráfico Q-Q plot. Podemos decir que se puede aceptar la normalidad ya que la gráfica muestra valores que se aproximan a la diagonal.

En el Gráfico 4.3.3.3 representamos mediante un histograma los residuos del tipo interbancario EONIA. Se observa como los datos siguen una distribución normal o gaussiana, tal y como se observa en la línea discontinua.

Por último, dentro del análisis de los residuos, en el Gráfico 4.3.3.4 representamos los residuos frente a la predicción obtenida para observar la existencia de homocedasticidad, ya que, la mayor parte de los resultados se encuentran en un intervalo de valores comprendidos entre 0'01 y -0'01. Por lo tanto, a partir del estudio previo, concluimos que podemos aceptar la normalidad e independencia de los residuos.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

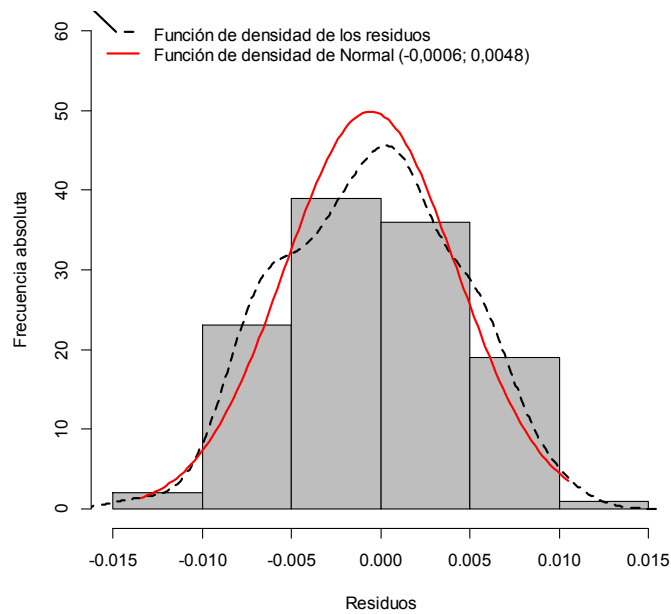


Gráfico 4.3.3.3. Histograma de las observaciones sin tendencia.
Fuente. Elaboración propia. R Development Core Team (2008).

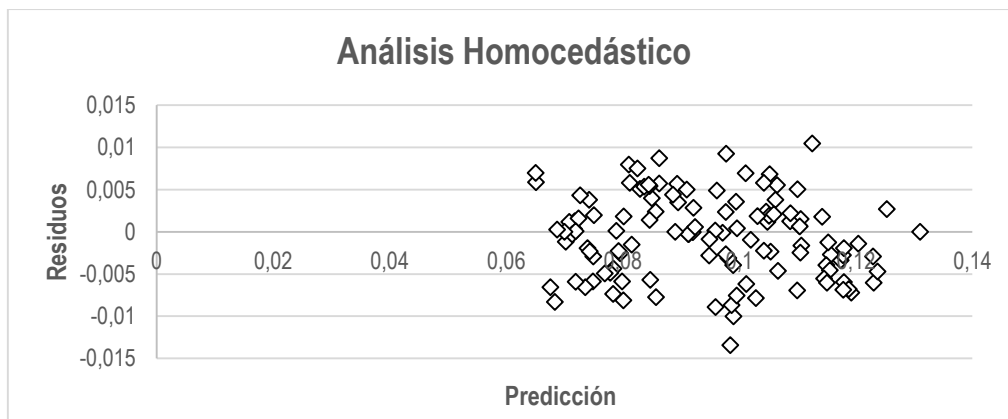


Gráfico 4.3.3.4. Análisis de residuos, Homocedasticidad.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

4.3.4. Predicción

En este apartado, se realiza una predicción para la primera semana del año 2013 (01/01/2013 – 08/01/2013), correspondientes a los días en los que los mercados financieros estén operativos y se obtienen IC en los que fluctuará el tipo con una probabilidad de un 95%.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Para la predicción (Tabla 4.3.4.1), hemos aplicado la Ecuación (3.5.2) con los parámetros obtenidos en la aplicación del método de máxima verosimilitud (Tabla 4.2.3) y para el valor simulado Z (Columna D). Al resultado obtenido mediante este proceso se le sumará los resultados obtenidos en la regresión ($Y = a + bt$), es decir, el coeficiente “a” será 0,12125525 mientras que “b” será -0,000457973 multiplicado por el instante t. También comentar que en este caso, r_0 , corresponderá al dato inicial del residuo de la regresión menos el dato estimado del residuo mediante la simulación por re-escalado en el tiempo del modelo de Vasicek. Los resultados obtenidos son los mostrados en la Tabla 4.3.4.1.

	A	B	C	D	E
1	FECHA	EONIA	t	Z	Predicción EONIA
2	02/01/2013	0,062	121	0,9598599	0,06995063
3	03/01/2013	0,066	122	0,4065621	0,06708671
4	04/01/2013	0,068	123	0,4152852	0,06666667
5	07/01/2013	0,066	124	0,1633783	0,06511331
6	08/01/2013	0,067	125	0,7170841	0,06706306

Tabla 4.3.4.1. Predicción del tipo de interés EONIA, Año 2013.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

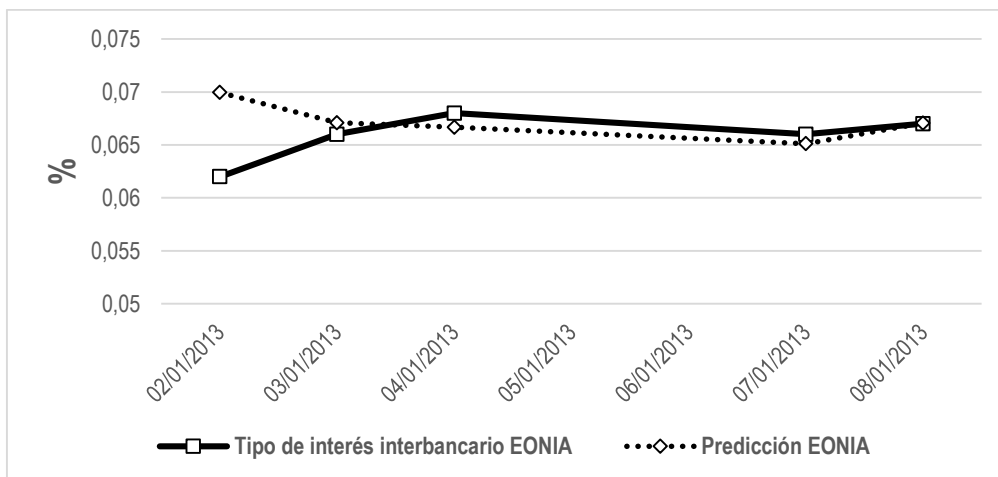


Gráfico 4.3.4.2. Predicción tipo de interés EONIA año 2013 (5 días).
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

En el Gráfico 4.3.4.2, observamos como la predicción de la semana se encuentra por debajo del dato real del EONIA con excepción de los dos primeros días. Podemos llegar a decir que los

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

datos correspondientes a los días 3, 4 y 7 son muy próximos al dato real e incluso observar como el dato del día 8 es el mismo que el dato real.

Una vez obtenida la predicción puntual, completamos el proceso predictiva construyendo IC del 95%. Esto lo haremos utilizando el método Monte Carlo (MC) (véase (Capítulo 3.8.4)).

Para realizar dicho estudio (Tabla 4.3.4.3), hemos realizado 1000 simulaciones. Estas simulaciones corresponden a Z (Columna R) y a la predicción de cada día (Columnas S-W) (véase Tabla 4.3.4.3).

	R	S	T	U	V	W
1	SIMULACIÓN MONTE CARLO					
2	Z	PREDICCIÓN				
3		02/01/2013	03/01/2013	04/01/2013	07/01/2013	08/01/2013
4	-0,82854472	0,06217397	0,061716	0,06125803	0,06080005	0,06034208
5	-0,30624719	0,06444512	0,06398715	0,06352917	0,0630712	0,06261323
6	-0,48055634	0,06368716	0,06322918	0,06277121	0,06231324	0,06185527
7	0,17290755	0,06652866	0,06607069	0,06561272	0,06515475	0,06469677
8	0,58169274	0,06830622	0,06784824	0,06739027	0,0669323	0,06647432
9	-0,43247995	0,06389621	0,06343824	0,06298027	0,06252229	0,06206432
10	0,80917702	0,0692954	0,06883743	0,06837946	0,06792148	0,06746351

Tabla 4.3.4.3. Simulación método Monte Carlo para realizar predicciones del EONIA y construir IC del 95%.

Fuente. Elaboración propia. (Excel).

El siguiente paso a realizar, Tabla 4.3.4.4, es obtener la media (Columna M) y la desviación típica (Columna N) de cada día para así poder obtener los IC correspondientes para la predicción (Columna O y P). Los IC del 95% en cada instante temporal se han obtenido a partir de los percentiles 2,5 y 97,5 de las simulaciones del EONIA generadas por el método de Monte Carlo. En el Gráfico 4.3.4.5 se muestran los resultados obtenidos. Cabe señalar que los días 5 y 6 de enero de 2013 corresponden a sábado y domingo donde el valor no opera debido al cierre de los mercados financieros durante el fin de semana.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

	L	M	N	O	P
1	MONTE CARLO				
2	FECHA	Media	Desviación Típica	Intervalo Superior	Intervalo Inferior
3	02/01/2013	0,065838977	0,002463134	0,0704265	0,06115323
4	03/01/2013	0,065381004	0,002463134	0,06996852	0,06069526
5	04/01/2013	0,064923031	0,002463134	0,06951055	0,06023729
6	07/01/2013	0,064465058	0,002463134	0,06905258	0,05977931
7	08/01/2013	0,064007085	0,002463134	0,0685946	0,05932134

Tabla 4.3.4.4. Obtención de los Intervalos Confianza con una probabilidad de 95%, método Monte Carlo.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

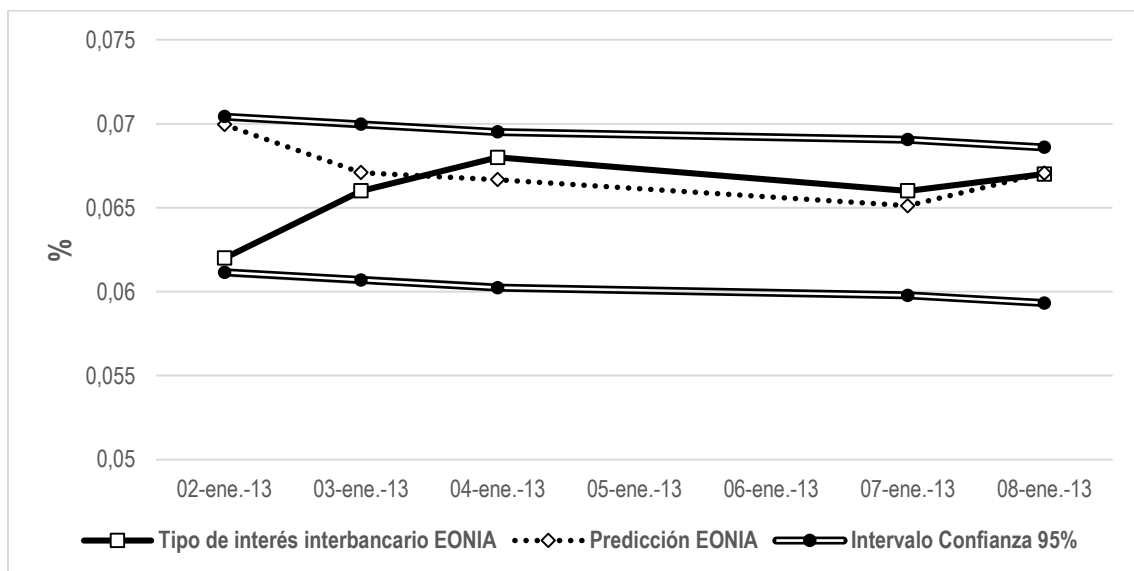


Gráfico 4.3.4.5. Predicción por Intervalos de Confianza del 95%.
Fuente. Elaboración propia. (Excel).

Conclusiones

En este trabajo se ha aplicado el modelo estocástico de Vasicek para modelizar el tipo de interés interbancario a corto plazo EONIA durante el segundo semestre 2012 y poder realizar predicciones probabilísticas. Los resultados obtenidos muestran que el modelo de Vasicek resulta satisfactorio para realizar dicho proceso de modelización.

El desarrollo de esta tesina ha supuesto una oportunidad para extender los conocimientos adquiridos durante el máster en Dirección Financiera y Fiscal, particularmente en lo que respecta a las asignaturas relacionadas con los mercados financieros y la modelización de activos mediante técnicas matemáticas y estadísticas, como las asignaturas Mercados Financieros y Modelización y Valoración de Opciones Financieras.

En el Capítulo 1 se ha revisado la importancia que juegan los tipos de interés en los mercados financieros, particularizando dicho estudio al tipo de interés EONIA (Euro OverNight Index Average) que es el tipo de interés medio diario (y por tanto a corto plazo) de la Unión Europea, fruto de las operaciones de crédito interbancarias. Al tratarse dicho tipo de interés de corto plazo ("short-term") y con un cierto comportamiento estable o de regresión a un valor medio de referencia, al menos por períodos, la literatura especializada recomienda para su modelización el uso de procesos estocásticos solución de ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô que tengan un comportamiento asintótico estable. Esto ha conducido a estudiar con cierta profundidad el modelo de Vasicek que constituye el patrón básico para modelizar este tipo de problemas. Este estudio se ha plasmado en el Capítulo 3. Este análisis ha motivado el estudio del denominado

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

Cálculo de Itô, y en particular, de su integral estocástica en términos de la cual se expresa la solución del modelo de Vasicek. La memoria recoge este estudio en el Capítulo 2. A nivel personal, el estudio del Cálculo de Itô me ha servido para introducirme en este potente cálculo diferencial e integral de procesos estocásticos en el cual se basan los modelos más importantes y avanzados que se están desarrollando en la actualidad para modelizar numerosos problemas complejos dentro del ámbito de las Finanzas. Como prueba de la vigencia e interés científico del modelo de Vasicek cabe destacar que recientemente el BCE ha publicado un Work Paper¹⁶ en enero de 2013 donde se aplica dicho modelo.

A la hora de poner en práctica en el Capítulo 4 el estudio teórico realizado en los Capítulos 2 y 3, cabe señalar que la elección del período adecuado (al tiempo que actual) donde el modelo de Vasicek funcionara satisfactoriamente supuso un reto, ya que, ello implicó una búsqueda empírica del mismo donde las técnicas estadísticas y las medidas de bondad de ajuste indicaran rigurosamente la validez del estudio. Finalmente, como hemos indicado anteriormente, se escogió el periodo correspondiente al segundo semestre del año 2012.

La aplicación del modelo para EONIA se ha realizado aplicando tanto los resultados del estudio teórico del modelo de Vasicek junto con un ajuste previo de regresión que ha permitido mejorar los resultados respecto de una aplicación en *crudo* del modelo de Vasicek, la cual cabe señalar también se hizo en una primer análisis. Esto ha permitido proporcionar estimaciones puntuales y por intervalos de confianza, así como mediante simulaciones usando técnicas de Monte Carlo. En ambos casos, los resultados proporcionados por el modelo han sido validados y han permitido obtener predicciones satisfactorias del EONIA.

Para desarrollar un estudio futuro con intervalos temporales potencialmente más largos donde puedan aparecer saltos, como el que sucedió con EONIA a mitad de año 2012, creemos que la aplicación de modelos basados en ecuaciones diferenciales estocásticas donde el proceso estocástico subyacente sea de tipo Poisson en lugar de tipo Browniano, podrían suponer una alternativa al enfoque adoptado en este memoria.

¹⁶ BROUSSEAU, V., DURRÉ, A. (2013): “Interest Rate Volatility a Consol Rated Based Measure”. Work Paper ECB.

Bibliografía

Libros:

ALLEN, E. (2007): "*Modelling with Itô Stochastic Differential Equations*", Springer, Series Mathematical Modelling: Theory and Applications.

BACHELIER, L. (1900): "*Théorie de la spéculation*". Annales du Science de L'Ecole Normale Supérieure, 17, 21-86.

BAXTER, M., REMIE, A. (2012): "*Financial Calculus*", Cambridge Univ. Press.

BENTH, F.E. (2002): "Option Theory with Stochastic Analysis". Springer, Series Universitext.

CHIRIVELLA, V. (2003): "*Apuntes de Econometría*". Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad. Universidad Politécnica de Valencia.

GEDAM, S.G., BEAUDET, S.T. (2000): "*Monte Carlo Simulation using Excel Spreadsheet for Predicting Reliability of a Complex System. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*".

GILKS, W.K., RICHARDSON, S., SPIEGELHALTER, D.J. (eds) (1996): "*Markov Chain Monte Carlo in Practice*". Chapman and Hall.

GUJARATI, D. N., PORTER, D. C. (2010): "*Econometría*". Mc Graw Hill. 5ª Edición.

HULL, J.C. (2002): "*Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*". Pearson Education. 4º Edición.

El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés

IACUS, S.M. (2008): "*Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*". Ed. Springer, Series in Statistics.

LAMBERTON, D., LAPEYRE, B. (1996): "*Introduction to Stochastic Calculus to Finance*". Chapman & Hall/CRC.

ØKSENDAHL, B. (1998): "*Stochastic Differential Equations*". Springer, Berlin.

Documentos en línea:

ALBERT, A. (2004): "*Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas*". Universitat Autònoma de Barcelona.

BCE (2011): "*La Política Monetaria del BCE*". Banco Central Europeo. <http://www.ecb.europa.eu> .

BENITO, F., LEÓN, A., NAVE, J.M. (2005): "*Modelling EONIA Rate*". Universidad de Alicante.

BROUSSEAU, V., DURRÉ, A. (2013): "*Interest Rate Volatility a Consol Rated Based Measure*". Work Paper ECB N° 1505.

FILIPOVIC, D. (2005): "*Interest Rate Models*". University of Munich.

MOSCHITZ, J. (2004): "*The Determinants of the Overnight Interest Rate in the Euro Area*". Work Paper ECB N° 393.

Índice de Tablas

Tabla 4.1.1. Estadísticos descriptivos de las observaciones EONIA, 2º Semestre 2012.....	67
Tabla 4.1.3. Análisis de la regresión.....	68
Tabla 4.2.3. Resultados de los parámetros mediante el método de Máxima Verosimilitud en el modelo de Vasicek.....	73
Tabla 4.2.4. Cálculo realizado para la simulación por re-escalado del Modelo Vasicek.....	74
Tabla 4.3.1.1. Estudio medidas Bondad de Ajuste.....	77
Tabla 4.3.2.1. Cálculos para la obtención de intervalos de confianza con 95% de probabilidad.....	77
Tabla 4.3.4.1. Predicción del tipo de interés EONIA, Año 2013.....	81
Tabla 4.3.4.3. Simulación método Monte Carlo para realizar predicciones del EONIA y construir IC del 95%.....	82

Índice de Gráficas

Gráfico 2.2.1. Simulación Movimiento Browniano.....	29
Gráfico 3.1.1. Representación gráfica de la solución del modelo determinista dado por el p.v.i. (3.1.1).	40
Gráfico 4.1. Tipo de interés interbancario EONIA, 1999-2012.....	64
Gráfico 4.2. Tipo de interés interbancario EONIA, 2012.....	65
Gráfico 4.3. Tipo de interés interbancario EONIA, 2º semestre 2012. Periodo 11/07/2012 – 31/12/2012.....	66
Gráfico 4.1.4. Curva de Regresión Ajustada.....	69
Gráfico 4.1.5. Análisis de Residuos, Independencia.....	69
Gráfico 4.1.6. Análisis de normalidad de los residuos. Gráfico Q-Q Plot.....	70
Gráfico 4.1.7. Histograma de las observaciones sin tendencia.....	70
Gráfico 4.1.8. Análisis de residuos, Homocedasticidad.....	71
Gráfico 4.2.5. Predicción Tipo de interés interbancario EONIA mediante Modelo de Vasicek...75	
Gráfico 4.3.2.2. Análisis de los Intervalos de Confianza con un nivel de significatividad de un 5%.....	78
Gráfico 4.3.3.1. Análisis de Residuos, Independencia.....	78
Gráfico 4.3.3.2. Análisis de normalidad de los residuos. Gráfico Q-Q Plot.....	79
Gráfico 4.3.3.3. Histograma de las observaciones sin tendencia.....	80
Gráfico 4.3.3.4. Análisis de residuos, Homocedasticidad.....	80
Gráfico 4.3.4.2. Predicción tipo de interés EONIA año 2013 (5 días).....	81
Gráfico 4.3.4.5. Predicción por Intervalos de Confianza del 95%.....	83

Índice de Figuras

Figura 1.1. Mecanismo de transmisión de los tipos de interés a los precios.....	23
Figura 3.8.1.1. Ejemplo de Q-Q plot.....	55
Figura 3.8.1.2. Estudio teórico de la homocedasticidad.....	57
Figura 4.1.2. Parámetros escogidos para obtener la regresión.....	68
Figura 4.2.1. Valores iniciales de los parámetros del modelo de Vasicek escogidos en Solver..	72
Figura 4.2.2. Opciones en Solver del método de búsqueda de los parámetros del modelo de Vasicek.....	72