



# Determinación de órbitas mediante técnicas iterativas de orden de convergencia óptimo libres de derivadas

Noelia Cambil Teba

Julio 2013

**Directores:**

**Dr. Alicia Cordero Barbero**

**Dr. Juan Ramón Torregrosa Sánchez**

Proyecto Final de Carrera presentado en la Universitat Politècnica de Valencia para la obtención del título de Ingeniero Superior de Telecomunicaciones



---

## Agradecimientos.

Tanto tiempo esperando escribir este capítulo y ahora todas las palabras se me agolpan en la mente de forma que casi no pueden salir...

Comenzaré agradeciendo a mis directores, pues no sé si se imaginan la satisfacción que sentí cuando años después de haberlos tenido como profesores, volvimos a coincidir y nos ofrecieron la oportunidad de trabajar con ellos. Jamás hubiera imaginado que aquellos profesores a los que admiraba por su facilidad de hacer comprender a los alumnos, dedicación y pasión por su trabajo acabarían diciendo "hemos pensado en vosotros para ...", de verdad gracias por tendernos la mano y abrirnos un camino, en estos tiempos que corren que alguien confíe en tí y en tus capacidades es casi un milagro.

Si antes he hablado en plural, es porque hace mucho tiempo que formo el equipo perfecto con Carlos, mi novio, compañero, amigo, levantador de ánimos, y un largo etcétera. Ya deberías saber que no hubiera llegado hasta aquí sin tí, que sin tu fé en mí, como nadie la ha tenido, y sin tu apoyo no estaría escribiendo estas líneas ahora. Y no sólo no estaría escribiendo, es que no sería ni la mitad de persona que soy ahora. Nos han pasado muchas cosas en todos estos años pero al final hemos demostrado de lo que somos capaces, gracias mi amor ¡lo conseguimos!

Ahora debo agradecer a mi familia, sobretodo porque son un ejemplo para mí. A mi padres, luchadores natos que se han dejado la piel para proporcionarnos, a mí y a mis hermanas, un futuro mejor sin importarles cuanto han tenido que trabajar o a cuantas cosas han renunciado. El amor de mi padre hacia los libros y la cultura fueron un referente para mi desde bien pequeña, sé bien que sin esa semilla no hubiese sido tan valiente y no hubiera escogido esta Ingeniería. La asombrosa capacidad de mi madre para escuchar y comprenderme, me ha hecho levantarme rápidamente tras la caída, dándome cuenta de que en la vida nada se sirve en bandeja y que hay que luchar siempre y de todas las maneras posibles, ella no sabe cuán inteligentes son sus palabras, pero sin duda lo son.

A mis hermanas, esas mujeres y madres trabajadoras en las que os habéis convertido, sólo con pensar en vosotras me sale una sonrisa. Soy tremendamente afortunada de haberos tenido cerca, me habéis entretenido, soportado, aconsejado... me habéis educado. Cada una de vosotras ha aportado algo a mi visión de la vida, pues de todas y cada una de vosotras se puede aprender una lección que aplicar al día a día, que sepáis que os quiero y os admiro. No puedo acabar este párrafo sin nombrar a mis cuñados, es una suerte que mis hermanas os conocieran y que forméis parte de mi vida y, por supuesto, a mis sobrinos que me han alegrado los días y me han devuelto, por momentos, a la placentera sensación de ser niña otra vez.

Por último, a todas aquellas personas que por un motivo u otro se han cruzado por mi vida y con las que sin duda he pasado muy buenos ratos. Esas tardes, mejor dicho noches porque mi horario de estudio me impedía salir antes de las nueve, con Pili y Malwina han sido la mejor forma de despejarme.

A todos vosotros, muchas gracias por creer en mí y por pensar que algún día lo conseguiría.



---

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción.</b>                                 | <b>8</b>  |
| 1.1. Resumen. . . . .                                   | 10        |
| 1.2. Objetivos. . . . .                                 | 10        |
| <b>2. Conceptos previos.</b>                            | <b>11</b> |
| 2.1. Métodos iterativos. . . . .                        | 11        |
| 2.1.1. Aproximación de la derivada. . . . .             | 13        |
| 2.1.2. Clasificación de los métodos iterativos. . . . . | 14        |
| 2.1.3. Orden de convergencia óptimo. . . . .            | 15        |
| <b>3. El Problema de Dos Cuerpos.</b>                   | <b>16</b> |
| 3.1. Introducción. . . . .                              | 16        |
| 3.2. Descripción del problema. . . . .                  | 16        |
| Integral de las áreas. . . . .                          | 19        |
| Teorema de las fuerzas vivas. . . . .                   | 19        |
| 3.2.1. Cálculo de la posición $\vec{r}$ . . . . .       | 20        |
| 3.2.2. Cálculo de la velocidad $\vec{v}$ . . . . .      | 21        |
| 3.3. Cálculo de efemérides. . . . .                     | 22        |
| 3.3.1. Definición de los parámetros orbitales. . . . .  | 22        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. Introducción al método de Gauss</b>  | <b>27</b> |
| 4.1. Determinación de una órbita a partir de dos vectores de posición y tiempo . . . . .                                   | 27        |
| 4.1.1. Gauss, de la matemática pura a la astronomía . . . . .  | 27        |
| 4.1.2. Determinación de órbitas, ecuaciones de Gauss . . . . .   | 29        |
| 4.1.3. El vector velocidad $\vec{v}$ a partir de una variable . . . . .  | 32        |
| 4.2. El Método. Resolución de las ecuaciones con Punto Fijo . . . . .  | 34        |
| 4.3. Obtención de los parámetros orbitales a partir del vector de posición $\vec{r}$ y de la velocidad $\vec{v}$ . . . . . | 37        |
| <b>5. Ampliación del rango de la Anomalía Verdadera <math>v</math></b>   | <b>41</b> |
| 5.1. Aplicación de Newton-Raphson a la determinación de órbitas. Método de Danchick. . . . .                               | 42        |
| 5.2. Ensayo para la ampliación del rango de las Anomalías Verdaderas, $v_2 - v_1$ . . . . .                                | 45        |
| <b>6. Métodos numéricos libres de derivadas para la determinación preliminar de órbitas.</b>                               | <b>51</b> |
| 6.1. Método de Newton con diferencias finitas. . . . .   | 52        |
| 6.2. Método de Traub con diferencias divididas de primer orden. . . . .  | 53        |
| 6.3. Nueva familia de métodos de tipo Steffensen con orden de convergencia óptimo. . . . .                                 | 55        |
| 6.3.1. Presentación de la familia de métodos. . . . .  | 55        |
| 6.3.2. Demostración del orden de convergencia. . . . .   | 56        |
| <b>7. Resultados numéricos.</b>  | <b>72</b> |
| 7.1. Implementación de los algoritmos en Mathematica. . . . .  | 72        |
| 7.2. Resolución de las ecuaciones. . . . .   | 74        |
| 7.2.1. Determinación de las órbitas de referencia. . . . .   | 74        |
| 7.2.2. Resolución de ecuaciones académicas. . . . .  | 80        |
| <b>8. Conclusiones y líneas futuras.</b>   | <b>82</b> |
| 8.1. Conclusiones. . . . .   | 82        |
| 8.2. Líneas futuras. . . . .   | 83        |
| <b>Anexos</b>  | <b>84</b> |
| <b>A. Cálculo de los parámetros orbitales</b>  | <b>85</b> |
| A.1. Órbita de referencia 1 . . . . .  | 85        |
| A.2. Órbita de referencia 3 . . . . .  | 87        |

|  |            |
|--|------------|
| A.3. Órbita de referencia 6 . . . . .  | 89         |
| <b>B. Métodos Iterativos</b>   | <b>92</b>  |
| B.1. Método de Gauss, PFijo . . . . .  | 92         |
| B.2. Método de Danchick calculando los iterados con el método de<br>Newton, Danchick . . . . . | 92         |
| B.3. Método de Danchick libre de derivadas con $z_k = x_k + f(x_k)$ , DS .                     | 93         |
| B.4. Método de Danchick libre de derivadas con $z_k = x_k - f(x_k)$ , DSR                      | 94         |
| B.5. Método de Danchick calculando los iterados con el método de<br>Traub, DT . . . . .        | 95         |
| B.6. Método de Danchick libre de derivadas con $z_k = x_k + f(x_k)$ , DTS                      | 96         |
| B.7. Método de Danchick libre de derivadas con $z_k = x_k - f(x_k)$ , DTSR                     | 97         |
| B.8. Método Óptimo, MO . . . . .   | 98         |
| <b>C. Programas auxiliares</b>   | <b>101</b> |
| C.1. Cálculo de los parámetros keplerianos a partir de posición y velo-<br>cidad . . . . .     | 101        |



---

# Índice de figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.1. | Diagrama de fuerzas de dos cuerpos sin perturbaciones externas . . .           | 17 |
| 3.2. | Órbita en el plano . . . . .   | 22 |
| 3.3. | Órbita en el espacio . . . . .   | 23 |
| 3.4. | Representación del sistema de coordenadas definido por plano orbital . . . . . | 26 |
| 4.1. | Representación gráfica del parámetro de Gauss . . . . .                        | 30 |
| 4.2. | Diagrama de Flujo para obtención de la velocidad . . . . .                     | 34 |
| 4.3. | Diagrama de Flujo del Método de Punto Fijo . . . . .                           | 36 |
| 4.4. | Relación sector-triángulo con $ v_2 - v_1  > \pi/4$ . . . . .                  | 37 |
| 5.1. | Flujograma del método de Roy Danchick . . . . .                                | 42 |
| 5.2. | Evolución de $x$ en función de $y$ . . . . .                                   | 47 |
| 5.3. | Gráfica de $y_1$ en función de $X$ . . . . .                                   | 48 |
| 5.4. | Gráfica de $y_2$ en función de $X$ . . . . .                                   | 48 |
| 5.5. | Gráfica de $y_3$ en función de $X$ . . . . .                                   | 49 |
| 5.6. | Gráfica de la evolución de $f(X)$ . . . . .                                    | 50 |
| 7.1. | Esquema de ejecución en Mathematica . . . . .                                  | 73 |
| 7.2. | Cuenca de convergencia del método MO . . . . .                                 | 78 |



---

## Índice de tablas

|  |    |
|--|----|
| 7.1. Resultados Órbita Referencia I. . . . .                         | 75 |
| 7.2. Resultados Órbita Referencia III. . . . .                       | 76 |
| 7.3. Resultados Órbita Referencia VI. . . . .                        | 77 |
| 7.4. Resultados Órbita de Referencia VI, $tol = 10^{-100}$ . . . . . | 79 |
| 7.5. Resultados Órbita de Referencia VI, $tol = 10^{-10}$ . . . . .  | 80 |
| 7.6. Resultados función $f(x)$ . . . . .                             | 81 |
| 7.7. Resultados función $g(x)$ . . . . .                             | 81 |

---

## **Introducción.**

Desde tiempos inmemoriales el ser humano ha contemplado las estrellas, gracias a esto desde la corta vida del ser humano en la Tierra el cambio de estación, la época de recolecta y de caza e incluso, el desplazamiento de los humanos por nuestro planeta han venido marcadas por el movimiento de éstas. Fruto de esta curiosidad surge la astronomía, es más, podemos afirmar que la astronomía nace al mismo tiempo que la humanidad pues tenemos constancia de estudios en este área en todas aquellas regiones del planeta donde el hombre ha habitado.

De las primeras observaciones del cielo, vienen también los primeros dioses pues cada vez que el ser humano era incapaz de explicar porqué ciertas estrellas se movían en una u otra dirección (lo que hoy conocemos como movimiento dextrógiro o levógiro) o como habían llegado hasta allí, nacía la idea de que en el firmamento vivían poderosos seres que manejaban el universo y que, por tanto, era necesaria su veneración para mantener sus favores y evitar sus castigos. Este pensamiento religioso se mantuvo durante siglos hasta que los avances científicos y tecnológicos pusieron en evidencia este razonamiento solucionando algunos de estos enigmas. Esta nueva situación, ponía en tela de juicio el poder de los estamentos religiosos de la época, por lo que muchos de los antiguos astrónomos fueron juzgados y perseguidos al proponer una nueva organización del universo. Muestra de ello fue el astrónomo Galileo Galilei que tras defender su teoría heliocentrista fue juzgado y obligado a renegar de sus teorías.

Este modelo heliocéntrico del Sistema Solar, en el que el Sol es centro del universo alrededor del cual giran el resto de astros, incluida la Tierra, surge por primera vez gracias al trabajo astronómico-científico de Aristarco de Samos (310 - 230 a. C.) trabajo que aunque imperfecto ya se acercaba mucho a lo que siglos después descubrieran otros científicos, sin embargo no fue bien acogido puesto que chocaba con las observaciones cotidianas (puesto que al observar el cielo parece que sean las estrellas las que giran a nuestro alrededor) y la creencia de que el ser humano y la Tierra se sitúan en el centro de la creación. De hecho, hasta el renacimiento esta fue la única teoría aceptada, puesto que es la que la Iglesia, con gran poder en esta época, aceptaba.

A este trabajo le sucedieron multitud de estudios, con una constante discusión entre la teoría heliocentrista y la geocentrista (la Tierra como centro del universo y sobre la que orbita el resto de astros) no sólo por parte de astrónomos griegos sino también por parte de astrónomos egipcios, hindúes, chinos y árabes. Durante el renacimiento, gracias a las rutas comerciales, llegan a Europa todos estos textos y comienzan a darse a conocer, completando así todo lo descubierto en la astronomía antigua.

Fue Nicolas Copernico (1473-1543) el que recuperó las teorías heliocentristas proponiendo que los planetas orbitaban en órbitas circulares. Tras él, Tycho Brahe (1546-1601) realizó las observaciones y mediciones más precisas hasta el momento, construyéndose su propio observatorio e instrumentos de medición. Toda esta información y mediciones las aprovechó Johannes Kepler (1571-1630) el cual, tras años de estudio enunció sus leyes del movimiento planetario que siguen siendo vigentes en la actualidad. Contemporáneo a Kepler es Galileo Galilei el cual hizo un uso científico del telescopio, pudiendo así comprobar con sus observaciones sólo eran compatibles con el modelo heliocentrista.

Lo que conocemos como astronomía moderna surge debido a la combinación de tecnología y de las nuevas teorías matemáticas y físicas. Dentro de esta época Isaac Newton (1642-1727) promulgó sus tres leyes que, definitivamente, daban una explicación teórica sobre los movimientos celestes. Setenta y cuatro años después de la muerte de Newton, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) uno de los matemáticos más célebres de nuestra historia, se suma al descubrimiento de nuevos planetas menores. Para ello, Gauss parte de los descubrimientos más importantes hasta ese momento (las leyes de Kepler y de Newton) solucionando así el llamado problema de los dos cuerpos y determinando una órbita planetaria a partir de dos observaciones.

Este es el verdadero protagonista del proyecto que tienen en sus manos, puesto que partimos de su trabajo sobre determinación preliminar de órbitas, comprobando que efectivamente sigue funcionando en la actualidad, para después estudiar cómo

mo mejorar las prestaciones de éste utilizando otros métodos que planteamos en forma de algoritmos matemáticos a programar, esto es, utilizando una de las técnicas que esta revolucionando diversas áreas de conocimiento en la actualidad, la matemática computacional.

## 1.1. Resumen.

---

A lo largo de este trabajo vamos a desgranar cómo llegó Gauss a diseñar su método de determinación de órbitas para finalmente discutir y proponer nuevos métodos numéricos que mejoran las prestaciones de los ya existentes. Para ello hemos comenzado incluyendo un capítulo de Conceptos Previos, en el que explicamos el concepto de método iterativo y mostramos aquellos otros que se consideran como clásicos en el mundo de la matemática computacional. En el segundo capítulo damos una demostración de la solución analítica del problema de los dos cuerpos y su aplicación a la mecánica celeste para, en el tercer capítulo, mostrar con detalle el método de Gauss para la determinación de órbitas a partir de dos vectores de posición y tiempos, así como su algoritmo que hemos traducido a lenguaje de programación Mathematica.

En los siguientes capítulos nos centramos en la mejora del método de Gauss, ya sea mediante métodos existentes y que estudiamos en profundidad (Capítulo cuatro) o mediante la formulación de otros nuevos que se verán en el quinto capítulo. Finalmente obtendremos y compararemos los resultados numéricos obtenidos con todos éstos, para poder dar una serie de conclusiones y líneas futuras de trabajo surgidas a raíz del estudio realizado.

## 1.2. Objetivos.

---

Los objetivos a cumplir con la realización de este proyecto son los siguientes:

- Ampliación de la distancia angular máxima entre las dos observaciones necesarias para aplicar el método de determinación de órbitas propuesto por Gauss.
- Eliminación de los problemas producidos por el uso de derivadas en los métodos iterativos empleados, sustituyendo éstas por aproximaciones.
- Generación de un nuevo método óptimo que mejore la eficiencia de los anteriores.

---

## Conceptos previos.

A lo largo de este capítulo vamos a introducir todos aquellos conceptos utilizados para la realización de este trabajo, conceptos que podemos encontrar en la mayoría de textos de Cálculo Numérico.

---

### 2.1. Métodos iterativos.

Las ecuaciones no lineales juegan un papel fundamental en el modelado de numerosos problemas que aparecen en ingeniería y ciencias aplicadas. Encontrar la solución de éstas es muy difícil, cuando no imposible, utilizando técnicas analíticas. Es en ese momento cuando se hace imprescindible estimar la solución, es decir buscar valores que aproximadamente satisfagan dicha ecuación o ecuaciones.

Todos los métodos iterativos parten de una estimación inicial  $x_0$  y a partir de ella se van calculando otras  $x_k$  que progresivamente se van acercando a la solución del problema. Al programar estos métodos iterativos podemos fijar una tolerancia que es la distancia entre dos soluciones consecutivas estimadas,  $|x_{k+1} - x_k| + |f(x_k)|$ , que nos marca lo “cerca” que queremos aproximarnos a esta solución. Este concepto es clave para entender que estas técnicas no nos van a dar la solución exacta si no que siempre habrá cierto error en la estimación de la solución, que vendrá

dada, en gran medida, por la tolerancia empleada además de por la propia naturaleza de la ecuación no lineal cuya solución queremos encontrar y por la eficiencia de la técnica numérica empleada.

La ecuación que modela el problema físico que queremos resolver, la determinación de órbitas en nuestro caso, viene dada de forma genérica por la siguiente expresión:

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

siendo  $f$  una función de variable real.

Existen numerosos métodos iterativos capaces de estimar la solución de la ecuación (2.1), los utilizados en este proyecto parten de la familia de métodos conocidos como de Punto Fijo. El primer método que empleamos ha sido el propio método de Punto Fijo, puesto que es el utilizado por Gauss en su método para la determinación preliminar de órbitas de Gauss. En él, reescribimos (2.1) como  $x = g(x)$  de manera que, partiendo de una estimación inicial  $x_0$ , obtenemos sucesivas aproximaciones de la solución mediante la expresión iterativa:

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Más adelante, utilizamos como punto de partida el método de Newton cuya expresión iterativa es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (2.3)$$

donde  $f'(x_k)$  denota la derivada de la función (2.1) que aparece evaluada en el iterado  $x_k$ .

El método de Newton es el utilizado en el esquema original que Roy Danchick presenta en [7], en el que se replantea el método original de Gauss de forma que la aproximación de la solución se calcula con Newton, distinguiendo dos casos en función de la distancia angular entre las observaciones tomadas. Para mejorar a éste en cuanto a número de iteraciones (número de aproximaciones obtenidas hasta llegar a la solución) y velocidad de convergencia decidimos sustituir el método de Newton por otro que tuviera mejores prestaciones. El elegido para solucionar esto fue el método de Traub, el cual representa una mejora respecto del anterior ya que aunque utiliza tres evaluaciones funcionales, posee orden cúbico de convergencia lo que implica mayor velocidad en la estimación de la solución. Dicho

método estima las aproximaciones de la solución de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como podemos observar, en los métodos definidos por las ecuaciones (2.3) y (2.4) aparece la derivada de la función. Esto puede traernos problemas en el caso de que la función no sea diferenciable o de que computacionalmente sea muy costoso realizar la derivada, por lo que generaremos nuevos métodos iterativos que no necesiten evaluar derivadas de la función no lineal en cada paso. Los esquemas de estas características reciben el nombre de métodos de tipo Steffensen o libres de derivadas.

### 2.1.1. Aproximación de la derivada.

---

Existen diferentes maneras de aproximar la derivada, las más habituales son los esquemas de diferencias finitas o divididas. De esta forma, podemos distinguir entre diferencias finitas progresivas, regresivas o centrales cuyas fórmulas mostramos a continuación.

#### Diferencias finitas (divididas):

- Progresivas

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} \quad (2.5)$$

- Regresivas

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k + h)}{h} \quad (2.6)$$

- Centrales

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h} \quad (2.7)$$

En nuestro caso tomamos  $h = f(x_k)$  y  $z_k = x_k + h = x_k + f(x_k)$  ó  $z_k = x_k - h = x_k - f(x_k)$  dentro de la definición de diferencias finitas progresivas.

Llegados a este punto es oportuno introducir otro método que ha sido utilizado a lo largo de todo el proceso de elaboración de este proyecto y al que haremos referencia más adelante, que tal y como se explica en [3], se obtiene tras introducir

la aproximación de la derivada por la ecuación (2.5) en el método de Newton (2.3). Este método es conocido como el método de Steffensen:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f(z_k) - f(x_k)}. \quad (2.8)$$

Como se verá en el capítulo Métodos numéricos libres de derivadas y en el de Resultados numéricos, hemos distinguido en el método de Steffensen los casos  $z_k = x_k + f(x_k)$  y  $z_k = x_k - f(x_k)$ .

Para modificar el método de Traub, descrito en (2.4) hemos reemplazado la derivada por diferencias divididas de primer orden (ecuación (2.5)) obteniendo, a su vez, dos esquemas iterativos distintos en función del signo empleado al definir  $z_k$ . Así, al igual que ocurre con el método de Newton, convertimos el método de Traub en otro de tipo Steffensen.

## 2.1.2. Clasificación de los métodos iterativos.

Para poder comparar distintos métodos, necesitamos tener una serie de parámetros que nos den información objetiva sobre las características de los mismos: velocidad, eficiencia referida al número de evaluaciones funcionales y eficiencia respecto del número de operaciones.

**Orden de convergencia** El orden de convergencia  $p$ , en cálculo numérico, es la velocidad con la cual una sucesión converge a su límite. Es muy útil en el uso de métodos iterativos ya que nos hace ver rápidamente cual será la velocidad de nuestro método.

Sea  $x^*$  un cero de la función  $f$  y  $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$  cuatro estimaciones consecutivas de  $x^*$ , de [2] extraemos una aproximación del orden de convergencia conocida como ACOC denotada como  $\rho$  (approximated computational order of convergence):

$$p \approx \rho = \frac{\ln(\|x_{k+1} - x_k\| / \|x_k - x_{k-1}\|)}{\ln(\|x_k - x_{k-1}\| / \|x_{k-1} - x_{k-2}\|)}. \quad (2.9)$$

**Índice de eficiencia** Otro elemento utilizado para comparar los métodos que planteamos en este proyecto, es el índice de eficiencia  $I$ . Éste fue definido por Ostrowski en [5], siendo:

$$I = p^{1/d} \quad (2.10)$$

donde  $p$  es el orden de convergencia teórico y  $d$  es el número de evaluaciones funcionales por iteración.

**Índice de eficiencia aproximado** Si en lugar de utilizar el orden de convergencia teórico utilizamos el definido por la ecuación (2.9), obtenemos un nuevo índice definido como:

$$\tilde{I} = \rho^{1/d}, \quad (2.11)$$

el cual hemos utilizado para la comparativa de métodos realizada en el capítulo Resultados Numéricos.

**Índice computacional** Aunque el anterior índice es el más usado, Romero et al. (ver [6]) definió el índice computacional  $I_c$  como otro parámetro a tener en cuenta.

$$I_c = \rho^{1/op}, \quad (2.12)$$

donde  $p$  es el orden de convergencia teórico y  $op$  es el número de operaciones (productos y/o cocientes) realizadas en cada iteración.

**Índice computacional aproximado** De la misma forma que en el índice anterior, para la comparación de nuestro métodos hemos utilizado un nuevo índice computacional definido por:

$$\tilde{I}_c = \rho^{1/op}, \quad (2.13)$$

donde hemos sustituido el orden de convergencia teórico por el definido en (2.9).

### 2.1.3. Orden de convergencia óptimo.

Una vez presentados los anteriores parámetros debemos introducir el concepto de orden de convergencia óptimo.

De la conjetura de Kung y Traub, [11], obtenemos su definición:

“El orden de convergencia de un método iterativo con  $d$  evaluaciones funcionales por paso, no puede ser mayor que el límite  $2^{d-1}$ . Cuando dicho límite es alcanzado por un método, este se denomina óptimo.”

Esto es, un método se convierte en óptimo cuando tenemos la igualdad en la siguiente ecuación:

$$p \leq 2^{d-1} \quad (2.14)$$



# Determinación de órbitas mediante técnicas iterativas de orden de convergencia óptimo libres de derivadas

Noelia Cambil Teba

Julio 2013

**Directores:**

**Dr. Alicia Cordero Barbero**

**Dr. Juan Ramón Torregrosa Sánchez**

Proyecto Final de Carrera presentado en la Universitat Politècnica de Valencia para la obtención del título de Ingeniero Superior de Telecomunicaciones

---

## El Problema de Dos Cuerpos.

---

### 3.1. Introducción.

Al fenómeno físico que contempla la relación de fuerzas entre dos elementos en ausencia de fuentes perturbadoras se le conoce como problema de dos cuerpos, cuya solución proporciona la posición de ambos. Es aplicable en múltiples ramas de la física. En la mecánica cuántica podemos determinar el movimiento descrito por un electrón alrededor de un núcleo atómico. En la mecánica celeste podemos determinar el movimiento de los satélites que giran alrededor de Júpiter o, en astronáutica, calcular la posición de un satélite artificial orbitando alrededor de la Tierra.

La resolución del problema de dos cuerpos es compleja pero se reduce haciendo uso de las leyes de Newton. En el proceso de resolución que mostraremos, las leyes de Kepler se deducen directamente.

---

### 3.2. Descripción del problema.

Sean  $m_1$  y  $m_2$  las masas de dos cuerpos aislados de perturbaciones externas, siendo  $\vec{r}_{m_1}$  y  $\vec{r}_{m_2}$  sus respectivas aceleraciones. En un sistema de referencia inercial (véase Figura 3.1), definimos las ecuaciones:

$$m_1 \vec{r}_{m_1} = \vec{F}_{12}, \quad (3.1)$$

$$m_2 \vec{r}_{m_2} = \vec{F}_{21}, \quad (3.2)$$

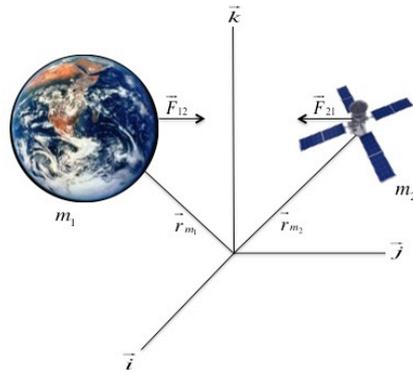


Figura 3.1: Diagrama de fuerzas de dos cuerpos sin perturbaciones externas

que describen la atracción mutua de ambos cuerpos.

El objetivo es obtener las trayectorias de ambos cuerpos en cualquier instante.

Sumando (3.1) y (3.2), obtenemos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_{m_1} + m_2 \ddot{\vec{r}}_{m_2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0. \quad (3.3)$$

Como podemos observar en (3.3) hemos aplicado la tercera Ley de Newton, también conocida como ley de acción-reacción

“Para toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones reciprocas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia partes contrarias”. *Isaac Newton*.

Por tanto, se deduce que la aceleración del centro de masas es nula, es decir, el centro de masas de un sistema aislado se mueve con velocidad constante. De ello se concluye que la cantidad total de movimiento  $m_1 v_1 + m_2 v_2$ , siendo  $v_1$  y  $v_2$  la velocidad de cada cuerpo, también es constante. De esta forma, al cumplir la conservación de la cantidad de movimiento somos capaces de hallar la posición y velocidad del centro de masas en cualquier instante, conocidos sus valores en su posición inicial  $t = 0$ .

Si ahora restamos (3.1) y (3.2):

$$\ddot{\vec{r}}_{m_1} - \ddot{\vec{r}}_{m_2} = \vec{F}_{12} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right), \quad (3.4)$$

definimos el vector de posición de la masa  $m_1$  respecto a la masa  $m_2$  como

$$\vec{r} = \vec{r}_{m_1} - \vec{r}_{m_2}, \quad (3.5)$$

cuyo módulo viene dado por:

$$r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}.$$

De esta forma se define un nuevo sistema inercial centrado en  $m_1$  ya que podemos reescribir (3.4) como:

$$L \cdot \ddot{\vec{r}} = F(r), \quad (3.6)$$

siendo  $L$  una constante dependiente de las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Particularizando para nuestro caso práctico, renombraremos a  $m_1$  como el cuerpo primario o el de mayor masa (siendo en nuestro caso la Tierra), que denotaremos como  $M$ . Al cuerpo secundario o satélite,  $m_2$ , lo denotaremos de ahora en adelante como  $m$ .

Aplicando las expresiones de la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal, combinadas con (3.5) y (3.6), tenemos:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{(M + m)}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad (3.7)$$

siendo  $G$  la constante de gravitación universal dada por  $G = 6,67384 \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ . A partir de (3.7) definimos el parámetro gravitacional estándar de la Tierra como  $\mu = G(M + m) \approx GM = 398598,309 \text{ km}^3/\text{s}^2$ .

Finalmente reescribimos (3.7) consiguiendo una ecuación diferencial que se conoce como **ecuación del movimiento relativo**:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} = 0. \quad (3.8)$$

La resolución de la ecuación del movimiento relativo la dio Carl Friedrich Gauss a los 24 años en su publicación "*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*", de la cual se extraen las expresiones que resuelven finalmente el Problema de Dos Cuerpos. A continuación mostraremos algunos aspectos de dicha resolución.

---

---

## Integral de las áreas.

---

---

Si multiplicamos vectorialmente la ecuación del movimiento relativo de la sección anterior por  $\vec{r}$  tenemos:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0,$$

es decir

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}. \quad (3.9)$$

Como el producto vectorial de un vector por si mismo es nulo, es decir,  $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$ , podemos decir que el argumento de la derivada de (3.9) debe ser constante del movimiento. Por lo que tenemos:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

donde  $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  es el **momento angular**. Si tomamos coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  y sustituimos en (3.10):

$$\vec{h} = \rho^2 \cdot \dot{\theta} \vec{k} \quad (3.11)$$

Finalmente, por la definición de diferencial de área tenemos que:

$$dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{2} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot d\theta. \quad (3.12)$$

Concluimos que lo obtenido en (3.12) demuestra la **segunda ley de Kepler**:

“El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales” *Johannes Kepler*.

Podemos finalizar diciendo que, por tanto, la velocidad areolar del secundario en su órbita se mantiene constante.

---

---

## Teorema de las fuerzas vivas.

---

---

Multiplicando escalarmente la expresión del movimiento relativo dada en (3.8), con el vector velocidad  $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$ , tenemos:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{\mu}{r^3} \cdot r \cdot \dot{r}.$$

Como

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{v^2}{2} \right] = v \cdot \dot{v} \quad (3.13)$$

y, por otro lado,

$$\frac{d}{dt} \left[ -\frac{\mu}{r} \right] = \frac{\mu}{r^2} \cdot \dot{r}, \quad (3.14)$$

integrando y sumando las expresiones (3.13) y (3.14), obtenemos:

$$E_c = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} + C \quad (3.15)$$

donde  $C$  es una constante de integración. De este modo, podemos afirmar que la energía mecánica  $E_c$  es conservativa.

---

### 3.2.1. Cálculo de la posición $\vec{r}$ .

---

Sea  $\vec{h}$  el **momento angular**, multiplicándolo vectorialmente con (3.8).

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} \cdot (\vec{h} \times \vec{r}) = 0.$$

Operando, podemos reescribir la expresión anterior como

$$\mu \frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{\mu}{r^3} \cdot (\vec{h} \times \vec{r}),$$

por lo que, reformulando:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{B}, \quad (3.16)$$

donde  $\vec{B}$  es una constante de integración. Multiplicando escalarmente (3.16) por la posición  $\vec{r}$ , tenemos:

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \vec{r} \cdot \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{r} \cdot \vec{B},$$

y operando de nuevo, obtenemos:

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{h} = \mu \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{B},$$

$$h^2 = \mu \cdot r + r \cdot B \cdot \cos \nu,$$

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \left(\frac{B}{\mu}\right) \cos \nu}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, si reescribimos la ecuación (3.17)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad (3.18)$$

tenemos la ecuación de una sección cónica como solución a la ecuación del movimiento relativo donde  $p = \frac{h^2}{\mu}$  y  $e = \frac{B}{\mu}$ , que son el **semi-latus rectum** y la **excentricidad**, respectivamente. En conclusión, sabemos que las únicas trayectorias posibles para resolver el Problema de Dos Cuerpos son las que siguen la ecuación de la cónica que hemos dado en (3.18). Por tanto, podemos concluir que la **primera ley de Kepler** que cita:

“Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.”

*Johannes Kepler.*

Es un resultado directo de la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton.

### 3.2.2. Cálculo de la velocidad $\vec{v}$ .

Partiendo de la expresión (3.16) y sustituyendo la constante  $\vec{B}$  por  $\vec{e} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ , tenemos:

$$\vec{v} \times \vec{h} = \mu \left( \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right),$$

siendo  $\vec{e}$  el vector excentricidad. Multiplicando la expresión anterior por  $\vec{h}$  y despejando  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \frac{1}{p} \cdot \vec{h} \times \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{p} \cdot \vec{h} \times \vec{e}.$$

Por lo que podemos concluir que el Problema de Dos cuerpos está totalmente resuelto ya que conocemos la posición y la velocidad del satélite en cualquier instante.

### 3.3. Cálculo de efemérides.

#### 3.3.1. Definición de los parámetros orbitales.

De la resolución del Problema de Dos Cuerpos que proporcionó Gauss hemos concluido que las trayectorias de los cuerpos son secciones cónicas. A partir de este concepto, vamos a adoptar que la trayectoria descrita por la órbita es una elipse de excentricidad  $e$  y semieje mayor  $a$  ya que las órbitas parabólicas o hiperbólicas no son adecuadas para satélites artificiales, debido a que no son acotadas.

A partir de la Figura 3.2, consideramos la proyección en el plano de un satélite  $P$  que orbita alrededor de la Tierra, la cual se encuentra en el foco  $S$ . Tomamos la posición del punto Aries o vernal,  $\Upsilon$ , como la de referencia fundamental.

De esta figura podemos extraer parámetros básicos para determinar la posición del satélite dentro de la órbita.

$v \equiv$  Anomalía verdadera. Ángulo polar  $\widehat{ASP}$  que describe el desplazamiento del secundario por la elipse tomando como origen el perigeo  $A$  y centrado en el foco  $S$ .

$E \equiv$  Anomalía Excéntrica. Ángulo  $\widehat{AQC}$  entre el apogeo  $A$  y la proyección  $Q$  de la posición  $P$  sobre una semicircunferencia de radio el semieje mayor de la órbita.

$b \equiv$  Semieje menor de la órbita dado por  $CB$  o  $CB'$ .

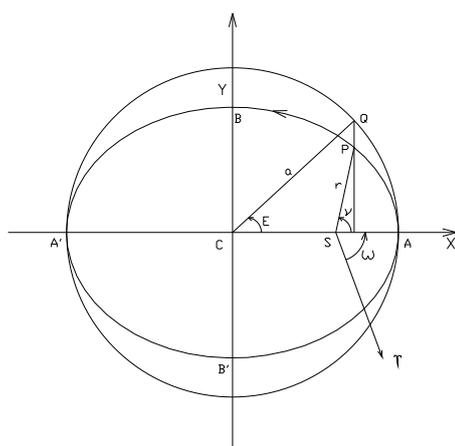


Figura 3.2: Órbita en el plano

Los **elementos orbitales** son aquellos que definió Kepler para parametrizar la órbita en cualquier instante. También son conocidos como **elementos Keplerianos**. A partir de las Figuras 3.2 y 3.3 obtenemos estos parámetros que caracterizan la órbita en el espacio.

$a$   $\equiv$  Semieje mayor de la órbita. Longitud del segmento  $CA$  o  $CA'$ .

$e$   $\equiv$  Excentricidad. Dada por la relación  $\frac{CS}{CA}$ .

$i$   $\equiv$  Inclinación. Orientación de la órbita respecto al plano del Ecuador.

$\omega$   $\equiv$  Argumento del perigeo. Describe la ubicación del perigeo en el plano orbital medida desde el punto vernal  $\Upsilon$ .

$\Omega$   $\equiv$  Longitud del nodo ascendente. Define como está orientada la órbita del satélite respecto a la órbita de la Tierra.

$M$   $\equiv$  Anomalía Media. Fracción de un periodo que ha transcurrido desde el último paso por el perigeo expresado en forma angular.

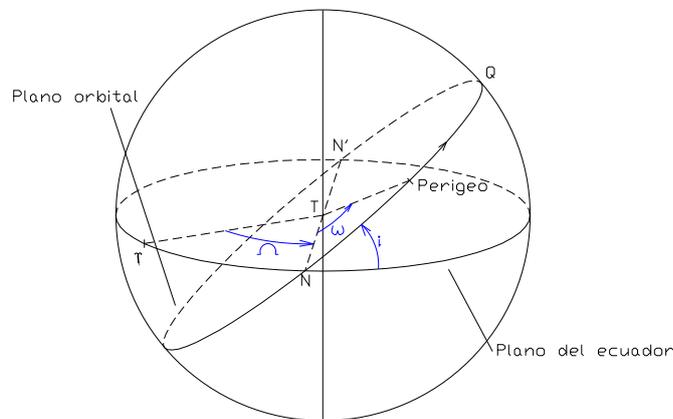


Figura 3.3: Órbita en el espacio

Por lo tanto, podemos reescribir (3.18)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)},$$

habiendo sustituido la expresión del semi-latus rectum por  $p = SQ = a(1 - e^2)$ , que extraemos de la Figura 3.2.

Debemos mencionar que para calcular la Anomalía Excéntrica,  $E$ , podemos hacer uso de la **ecuación de Kepler**, la cual relaciona la Anomalía Media y la Excéntrica de la siguiente manera:

$$M = E + \sin E, \quad (3.19)$$

o también podemos utilizar la relación entre la anomalía verdadera y la excéntrica del siguiente modo:

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (3.20)$$

Definimos el movimiento medio como la velocidad angular de un cuerpo dentro de su órbita suponiendo movimiento circular uniforme. Se expresa:

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

siendo  $T$  el periodo orbital.

De la tercera ley de Kepler, obtenemos:

$$a = \frac{\mu}{\frac{2\mu}{r} - v^2},$$

y

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi\left(v^2 - \frac{2\mu}{r}\right).$$

Por otro lado, retomando el teorema de las fuerzas vivas (3.15), disponemos de la relación que guardan la geometría de la órbita y la energía mecánica:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_c \cdot h^2}{\mu^2}}. \quad (3.21)$$

Sea  $\tau$  la época de paso por el perigeo, el ángulo de barrido o anomalía media  $M$  de un radio-vector al girar alrededor de la tierra con una determinada velocidad

angular, viene dado también por la siguiente expresión:

$$M = n(t - \tau). \quad (3.22)$$

Además, si llamamos  $\phi$  al ángulo que forman el vector velocidad y el radio-vector o vector de posición, obtenemos:

$$\sin \phi = \sqrt{\frac{a^2(1 - e^2)}{r(2a - r)}}. \quad (3.23)$$

Por lo que ya tenemos definidos todos los elementos de la órbita y podemos dar las expresiones de posición y velocidad en el plano orbital.

$$x = r \cos v = a \cdot (\cos E - e), \quad y = r \sin v = a \cdot \sin E \cdot \sqrt{1 - e^2},$$

$$\dot{x} = -\frac{n \cdot a \cdot \sin E}{1 - e \cdot \cos E}, \quad \dot{y} = -\frac{n \cdot a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E}{1 - e \cdot \cos E}.$$

Cabe destacar que para definir la órbita en el espacio, trabajaremos con un sistema de coordenadas distinto al convencional **I, J, K**. Utilizaremos el sistema de coordenadas definido por el plano de la órbita con los vectores unitarios ortogonales **P, Q, W**. Realizando las rotaciones pertinentes al sistema de coordenadas cartesiano por medio de  $i, \Omega$  y  $\omega$ , tenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ P_z &= \sin \omega \sin i \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ Q_z &= \cos \omega \sin i \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \sin \Omega \sin i \\ W_y &= -\cos \Omega \sin i \\ W_z &= \cos i \end{aligned} \right\}$$

con los siguientes rangos en cada uno de los elementos que definen el sistema:

$$0 \leq i \leq \pi,$$

$$0 \leq \Omega \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \omega \leq 2\pi.$$

En la siguiente figura veremos con claridad este cambio de coordenadas:

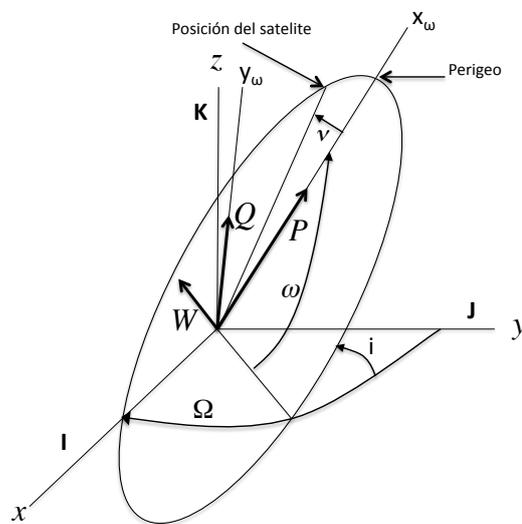


Figura 3.4: Representación del sistema de coordenadas definido por plano orbital

---

## Introducción al método de Gauss

---

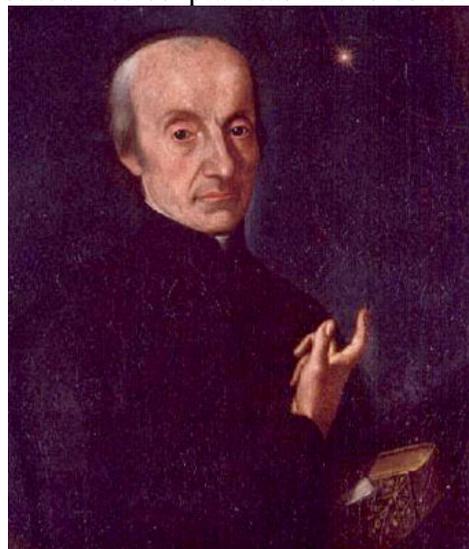
### 4.1. Determinación de una órbita a partir de dos vectores de posición y tiempo

---

#### 4.1.1. Gauss, de la matemática pura a la astronomía

---

Desde que en 1781 Sir William Herschel (1738-1822) descubrió el planeta Urano, astrónomos de todo el mundo buscaban otros planetas menores entre las órbitas de Marte y Júpiter. Entre ellos se encontraba Giuseppe Piazzi (1746-1826), un astrónomo italiano que descubrió, el 1 Enero de 1801, lo que parecía un cometa que se acercaba al Sol. Pero Piazzi pronto reconoció su error y este cometa que se acercaba al sol fue reconocido como el primero del enjambre de planetas menores que conocemos actualmente, el planeta Ceres. Al realizar esta afirmación, Piazzi fue muy criticado por algunos filósofos, en particular por Hegel, en un momento histórico en el que los filósofos se introducían en la matemática y la física.



*Retrato de Giuseppe Piazzi.*

Para los filósofos de la época el siete era un número satisfactorio (filosóficamente hablando) y, dado que hasta la fecha se habían descubierto siete de los planetas de nuestro sistema solar, afirmaban que era una pérdida de tiempo la búsqueda de nuevos planetas, puesto que si los matemáticos, físicos y astrónomos prestaran más atención a la filosofía sabrían que el número de planetas debía de ser justamente siete.

A Gauss le molestaba profundamente que los filósofos se mezclaran en temas científicos, y que discutieran las demostraciones de éstos sin pararse siquiera a resolver el problema, ni entender dicha solución. Por este motivo, y gracias a su facilidad para la Aritmética Gauss se decidió a calcular su órbita a partir de los datos de observación y de las ecuaciones de Newton, que había fallecido 70 años antes.

Los grandes matemáticos de la época, se dedicaban a completar la mecánica celeste, pero no al cálculo de órbitas puesto que la Aritmética necesaria para ello era extraordinariamente complicada. Pero conociendo la biografía de Gauss, ya sabemos que esto para él no era ningún problema ya que tenía una extraordinaria capacidad de cálculo era, más bien, como dedicarse a su juego favorito, calcular como nunca nadie lo había hecho. Por otro lado, Gauss sabía que si conseguía definir la órbita de este nuevo planeta, conseguiría el reconocimiento que sus *Disquisitiones Arithmeticae* no le habían proporcionado y así, podría devolverle el favor al duque de Brunswick el cual había pagado desde su educación hasta la edición de su primer libro.

Así que, Gauss se dedicó a la determinación de la órbita que describe Ceres alrededor del Sol, prediciendo a finales de 1801, su paso por la Tierra. Para este cálculo, usó dos de sus descubrimientos el método de los mínimos cuadrados y su teoría de errores de observación. Tal y como Gauss predijo con sus cálculos, el plane-



Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

ta Ceres se encontró en los puntos que él indicó, pudiendo ser observado fácilmente por los astrónomos y demostrando unívocamente que aquello era un planeta. Cabe recalcar que apenas tenía 24 años. De esta forma se fueron descubriendo Pallas, Vesta y Juno comprobándose así que las órbitas descritas por Gauss eran correctas. Gracias a este trabajo, Gauss consiguió el reconocimiento que esperaba convirtiéndose en el mayor matemático del momento. De su estudio del movimiento celeste, publicó su segunda obra maestra “*Motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*” (Teoría del movimiento de los cuerpos celestes que giran alrededor del Sol siguiendo secciones cónicas).

Aquí es donde verdaderamente comienza nuestro trabajo, ya que partimos del Método de Gauss para la determinación de órbitas (el mismo que le llevó al descubrimiento de Ceres) adaptado, eso sí, al cálculo computacional, para después compararlo con distintos métodos posteriores a éste, probarlo con distintas órbitas y analizar los resultados obtenidos.

### 4.1.2. Determinación de órbitas, ecuaciones de Gauss

El estudio preliminar de determinación de órbitas que aportó Gauss tras la resolución del problema de Dos Cuerpos a través de secciones cónicas parte del conocimiento de dos posiciones del cuerpo, en nuestro caso concreto de un satélite artificial dentro de la órbita que describe, las cuales denotaremos como  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , particularizadas en dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente, asumiendo que  $t_2 > t_1$ . La resolución del estudio preliminar la podemos encontrar en [8]. No vamos a centrarnos en el procedimiento pero sí en la resolución ya que es de donde obtenemos las ecuaciones necesarias para llevar a cabo nuestro estudio. Por lo tanto, vamos a dar las tres ecuaciones con las que trabajaremos para obtener la velocidad del satélite en un punto de la órbita.

- Definición del parámetro de Gauss .

$$y = \frac{\sqrt{\mu\rho} \cdot \tau}{r_2 r_1 \sin(v_2 - v_1)} = \frac{\sqrt{\mu\tau}}{2\sqrt{a}\sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}, \quad (4.1)$$

En la Figura 4.1, podemos observar gráficamente la definición del parámetro de Gauss, el cual se obtiene de la proporción entre el área del sector de la elipse encerrado entre los vectores de posición y el área del triángulo  $\widehat{ABC}$ .

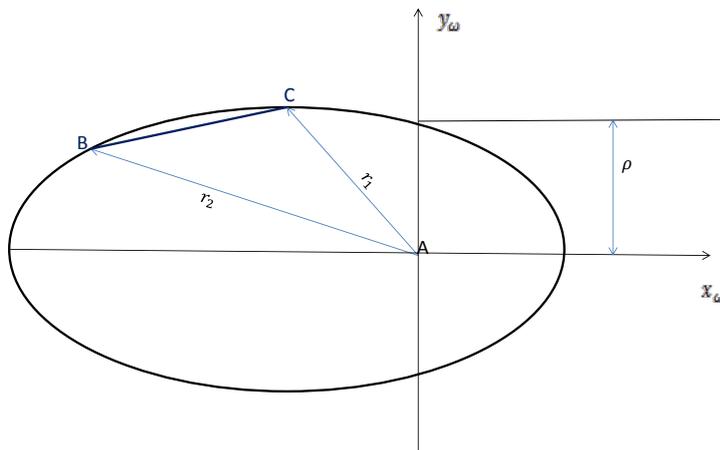


Figura 4.1: Representación gráfica del parámetro de Gauss

Este parámetro tendrá gran importancia a lo largo de todo el método, ya que si esta proporción es igual a uno, el método conseguirá converger puesto que ambas áreas serán comparables, pero a medida que los puntos se alejan esta proporción dejará de ser aproximadamente uno, lo que nos dará problemas.

- Primera Ecuación de Gauss.

$$y^2 = \frac{m}{l+x}, \quad (4.2)$$

- Segunda ecuación de Gauss.

$$y^2(y - 1) = mX, \quad (4.3)$$

donde  $y$  es el **parámetro de Gauss** o proporción sector-triángulo;  $\rho$  es el **semi-latus rectum**;  $v_2 - v_1$  es la **diferencia de anomalías verdaderas** de las dos posiciones de observación;  $\mu$  es la constante gravitacional de la Tierra y  $\tau$  es la **diferencia de instantes de observación** que definiremos con mayor detalle más adelante.

Además, Gauss identificó cuatro parámetros para trabajar de forma más sencilla con las expresiones, tanto en la primera como en la segunda ecuación, facilitando la resolución del algoritmo a partir del cual se obtiene la velocidad del satélite.

Teniendo en cuenta que  $r_1 = \sqrt{\vec{r}_1 \vec{r}_1}$  y  $r_2 = \sqrt{\vec{r}_2 \vec{r}_2}$ , los parámetros de la primera ecuación son:

(a)

$$l = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right)} - \frac{1}{2}, \quad (4.4)$$

(b)

$$m = \frac{\mu\tau^2}{\left[2\sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right)\right]^3}, \quad (4.5)$$

(c)

$$x = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) \right] \quad (4.6)$$

y en la segunda ecuación de Gauss definimos el término:

(d)

$$X = \frac{E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}. \quad (4.7)$$

Nótese que en (4.4) y (4.5) existe una singularidad cuando la diferencia de anomalías verdaderas toma el valor  $\pi$ .

Tras observar como tuvo que trabajar Gauss con las ecuaciones de Newton hasta obtener las que acabamos de mostrar, queda demostrada la gran facilidad que poseía Gauss para la Aritmética.

### 4.1.3. El vector velocidad $\vec{v}$ a partir de una variable

Dado el compendio de ecuaciones que debemos utilizar para resolver las ecuaciones de Gauss, definimos la **ecuación unificada de Gauss** como una combinación de (4.2) y (4.3) utilizando igualación, llegando a la siguiente expresión:

$$y = 1 + X(l + x). \quad (4.8)$$

La expresión de la ecuación unificada hace que trabajemos con una variable, como se hizo en la primera formulación de la resolución del algoritmo. Por ello, a partir de (4.2) definimos:

$$x = \frac{m}{y^2} - l. \quad (4.9)$$

A partir de (4.6) podemos obtener la anomalía excéntrica fijando completamente su cuadrante de la siguiente forma:

$$\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) = 1 - 2x \quad (4.10)$$

y teniendo en cuenta que la anomalía excéntrica está definida en el intervalo  $0 \leq (E_1 - E_2)/2 \leq \pi$ , tenemos:

$$\sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) = +\sqrt{4x(1-x)}. \quad (4.11)$$

Por lo tanto, una vez obtenido el parámetro de Gauss y la anomalía excéntrica, podemos obtener el semeje mayor de la elipse como consecuencia de (4.1) de tal forma que:

$$a = \frac{\tau^2 \mu}{\left\{2y\sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)\right\}^2}. \quad (4.12)$$

Utilizando la forma cerrada de las series  $f$  y  $g$ , desarrolladas en [8], que se definen como:

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{a}{r_1} [1 - \cos(E_2 - E_1)], \\ g &= \tau - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)], \end{aligned} \quad (4.13)$$

podemos dar finalmente la expresión de la velocidad ya que:

$$\vec{r}_2 = f\vec{r}_1 + g\dot{\vec{r}}_1, \quad (4.14)$$

y por lo tanto

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{r}_2 - f\vec{r}_1}{g}. \quad (4.15)$$

## 4.2. El Método. Resolución de las ecuaciones con Punto Fijo

La primera tecnología empleada para la resolución del problema fue el método de punto fijo. En el esquema de la Figura [4.2] mostramos los pasos previos y posteriores que debemos seguir antes de aplicar punto fijo para una variable, en este caso  $y$ , para posteriormente explicar cada paso con mayor detalle.

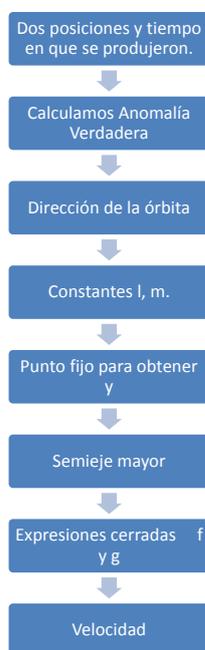


Figura 4.2: Diagrama de Flujo para obtención de la velocidad

1. A partir de los instantes de observación  $t_1$  y  $t_2$ , definimos  $\tau = k(t_2 - t_1)$ , siendo  $k = 0,07436574 \text{ (e.r)}^{3/2}/\text{min}$ , en la Tierra. Donde la unidad e.r. significa radio relativo a la Tierra.
2. Dados los vectores de posición  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , obtenemos sus módulos  $r_1 = \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1}$  y  $r_2 = \sqrt{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2}$ .
3. Calculamos  $\cos(v_2 - v_1) = \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1}{r_2 r_1}$ .

4. Para definir correctamente el cuadrante de la diferencia de anomalías verdaderas tenemos:

- Si  $W_z \geq 0$ , es decir, si el movimiento es directo o **prógrado**:

$$\sin(\nu_2 - \nu_1) = \frac{x_1x_2 - x_2y_1}{|x_1y_2 - x_2y_1|} \sqrt{1 - \cos^2(\nu_2 - \nu_1)}.$$

- Si por el contrario el movimiento es **retrógrado**:

$$\sin(\nu_2 - \nu_1) = -\frac{x_1x_2 - x_2y_1}{|x_1y_2 - x_2y_1|} \sqrt{1 - \cos^2(\nu_2 - \nu_1)}.$$

5. Calculamos  $l$  y  $m$  a partir de (4.4) y (4.5), respectivamente.

6. Aplicamos Punto Fijo:

- a) Obtenida la iteración  $y_k$ .
- b) Calculamos  $x$  a partir de (4.9).
- c) Obtenemos la diferencia de anomalías excéntricas de (4.10) y (4.11).
- d) Adquirimos el valor de  $X$  de la ecuación (4.7).
- e) Calculamos  $y_{k+1}$  con la ecuación unificada (4.8).
- f) Si  $|y_{k+1} - y_k| > tol$ , siendo  $tol$  una cierta tolerancia, volvemos al paso b).

7. Obtenemos el semeje mayor  $a$  a partir de (4.12).

8. Evaluamos las series cerradas  $f$  y  $g$  con (4.13).

9. Finalmente, calculamos la velocidad  $\vec{v}$  haciendo uso de (4.15)

De esta forma obtenemos la velocidad de la primera observación, con lo que la órbita queda perfectamente definida. A continuación, en la Figura 4.3, presentamos el flujograma de punto fijo para describir de una forma gráfica lo que acabamos de detallar.

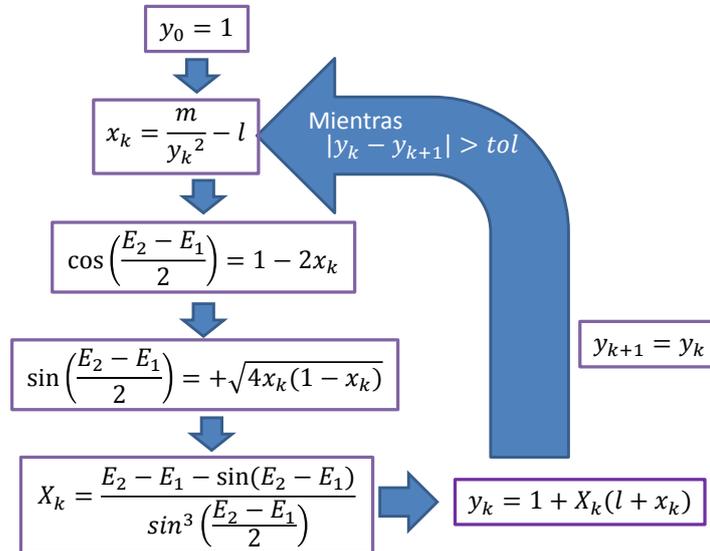


Figura 4.3: Diagrama de Flujo del Método de Punto Fijo

Dado que el método de Gauss se basa en dar una solución para la proporción sector-triángulo o parámetro de Gauss, necesitamos una primera aproximación de este parámetro. De esta forma y tras observar la Figura 4.1, vemos que si los vectores de posición están lo suficientemente próximos ( $|v_2 - v_1| \leq \pi/4$ ) se cumple que la proporción entre el área del sector de la elipse y el área del triángulo es aproximadamente uno teniendo validez el parámetro de Gauss. Por tanto estamos obligados a dar como estimación inicial  $y_0 = 1$ . Debemos notar que si los vectores de posición estuviesen muy separados ( $|v_2 - v_1| \geq \pi/4$ ), estas áreas no son comparables por lo que este método preliminar de órbitas de Gauss diverge debido a que trabajamos únicamente con la ecuación unificada y con una estimación inicial muy estricta, esta inestabilidad se explica con mayor detalle en [8]. La figura siguiente muestra gráficamente el problema explicado.

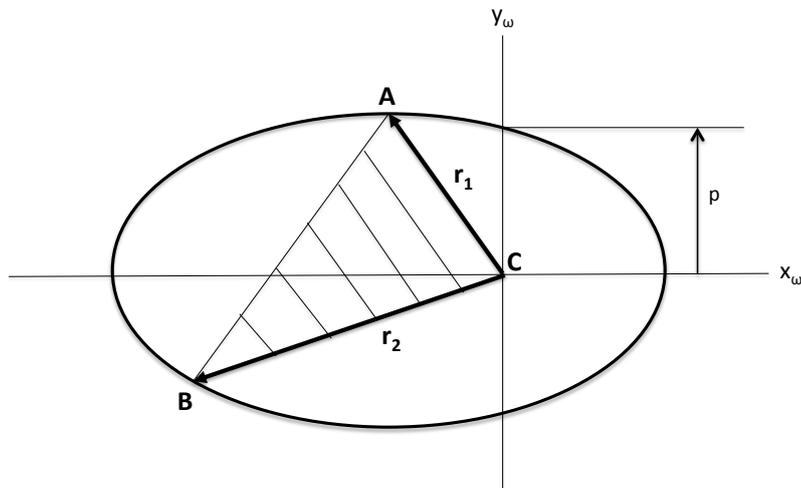


Figura 4.4: Relación sector-triángulo con  $|v_2 - v_1| > \pi/4$

### 4.3. Obtención de los parámetros orbitales a partir del vector de posición $\vec{r}$ y de la velocidad $\vec{v}$

En esta sección vamos a hacer el procedimiento inverso, es decir, definir los parámetros orbitales keplerianos de la órbita a partir de los vectores posición y velocidad obtenidos con el método de Gauss ya explicado. Es importante tener claro como podemos hacer este procedimiento inverso, ya que una vez calculada la velocidad en una órbita, debemos tener una forma de volver a obtener los parámetros orbitales, para comprobar que efectivamente la estamos definiendo correctamente, esto es, que no ha habido error en el cálculo de su velocidad. A través de los parámetros orbitales, calculados con las siguientes ecuaciones compararemos, más adelante, los distintos métodos realizados para la determinación de órbitas (Ver Anexo C).

Una órbita queda totalmente definida en el espacio con sus seis elementos orbitales keplerianos:

$a, e, \tau$  nos permiten obtener la órbita en el plano,

$i, \omega, \Omega$  nos dan la órbita en 3 dimensiones,

siendo,

$i$  la inclinación orbital respecto al ecuador terrestre,

$\omega$  el argumento del perigeo que orienta la órbita dentro de su plano,

$\Omega$  la ascensión recta del nodo ascendente.

Antes de calcular cada uno de los elementos orbitales que acabamos de citar, vamos a calcular parámetros que nos harán falta más adelante y que nos simplificarán los cálculos:

◆ Dado un vector posición  $\vec{r}(x, y, z)$  su módulo, viene dado por  $r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ .

◆ Definimos el vector velocidad  $\dot{\vec{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  asociado al vector de posición  $\vec{r}$ .

◆ Expresamos el módulo del vector velocidad como  $V = \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}$

◆ Definimos el coseno del ángulo que forman el vector de posición y el vector velocidad como:

$$\cos \phi = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r \cdot V}. \quad (4.16)$$

◆ Denotamos las componentes del momento angular  $\vec{h}$  como:

$$\left. \begin{aligned} h_x &= y \dot{z} - z \dot{y} \\ h_y &= z \dot{x} - x \dot{z} \\ h_z &= x \dot{y} - y \dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Una vez calculados los parámetros anteriores ya podemos obtener los elementos orbitales Keplerianos, definidos como:

■ **Semieje mayor de la órbita,  $a$**

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{\mu}{V^2}}. \quad (4.18)$$

■ A partir de éste, obtenemos la **excentricidad,  $e$**

$$e = \sqrt{\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{\sqrt{\mu a}}}. \quad (4.19)$$

■ **Inclinación,  $i$**

$$\cos i = \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}. \quad (4.20)$$

Obtenida tras combinar la componente  $W_z$  con la expresión del momento angular que hemos dado en el apartado anterior ya que lo podemos reescribir

como:

$$\left. \begin{aligned} h_x &= h \sin \Omega \sin i \\ h_y &= -h \cos \Omega \sin i \\ h_z &= h \cos i \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

que podemos utilizar para definir correctamente el cuadrante en el que nos encontramos.

■ **Ascensión recta del nodo ascendente  $\Omega$  y argumento del perigeo  $\omega$**

Dividiendo las componentes  $h_x$  y  $h_y$  del momento angular, definimos la ascensión recta del nodo ascendente como:

$$\tan \Omega = -\frac{y \dot{z} - z \dot{y}}{z \dot{x} - x \dot{z}}. \quad (4.22)$$

Para eliminar la indeterminación de signo que nos introduce la tangente, podemos combinar (4.22) y (4.21) para calcular la tangente en  $\Omega$  y  $\Omega + \pi$  y determinar finalmente el cuadrante. Para obtener el argumento del perigeo partimos de la componente  $z$  de la posición del satélite dada por:

$$z = r \sin(\omega + v) \sin i,$$

siendo  $v$  la anomalía verdadera del vector de posición. Por tanto, la expresión será:

$$\sin(\omega + v) = \frac{z}{r \sin i}. \quad (4.23)$$

Como caso particular de la expresión (4.23) tenemos dos singularidades en  $i = 0$  y en  $i = \pi$ , en este caso utilizaremos la siguiente expresión:

$$\sin(\omega + v) = \frac{y \cos \Omega - x \sin \Omega}{r}. \quad (4.24)$$

De forma análoga a (4.24) podemos dar la siguiente expresión para determinar el cuadrante:

$$\cos(\omega + v) = \frac{x \cos \Omega + y \sin \Omega}{r}.$$

■ **Anomalía media,  $M$**

En primer lugar calculamos el movimiento medio,

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Definimos

$$A = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

y de esta forma podemos calcular la anomalía excéntrica como:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E), \\ \tan\left(\frac{v - E}{2}\right) &= \frac{A \sin v}{1 + A \cos v}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Y retomando la ecuación de Kepler definida en secciones anteriores tenemos calculado la anomalía media.

$$M = E - e \sin E. \quad (4.26)$$

---

## Ampliación del rango de la Anomalía Verdadera $v$

Tras el estudio realizado del Método de Gauss, iterando mediante el método Punto Fijo para hallar una solución aproximada, observamos una serie de restricciones.

- El Método de Gauss falla cuando la diferencia de Anomalías Verdaderas cumple la expresión  $|v_1 - v_2| \geq \frac{\pi}{4}$ . Ello supone en la práctica que el tipo de órbitas a las que podemos aplicar esta técnica es muy reducido.
- La aproximación inicial  $y_0 = 1$  puede no estar situada en la región de convergencia, lo que en ocasiones supone la divergencia del proceso.
- El orden de convergencia es lineal, con lo que la velocidad de convergencia es lenta.

El objeto de estudio de este trabajo es mejorar o eliminar estas restricciones utilizando otros métodos numéricos que veremos a continuación.

## 5.1. Aplicación de Newton-Raphson a la determinación de órbitas. Método de Danchick.

Debido a las restricciones que presenta el método clásico para la determinación de órbitas, decidimos probar el método que presenta Roy Danchick en su artículo [7], en el cual el autor afirma que si partimos de distintas estimaciones iniciales para las ecuaciones de Gauss, dependiendo de que la diferencia de anomalías verdaderas sea mayor o menor que  $\pi/4$ , y si además aplicamos el método de Newton-Raphson en lugar de usar Punto Fijo como se hace en el método Gauss, conseguimos determinar órbitas con una separación entre sus anomalías verdaderas cercanas a  $\pi$ . Por otra parte, conseguimos reducir considerablemente el número de iteraciones necesarias para obtener la aproximación deseada, respecto de las resultantes con el método de Punto Fijo.

A continuación, en la Figura 5.1 presentamos un diagrama de flujo para mostrar como plantea Danchick su esquema de iteraciones funcionales.

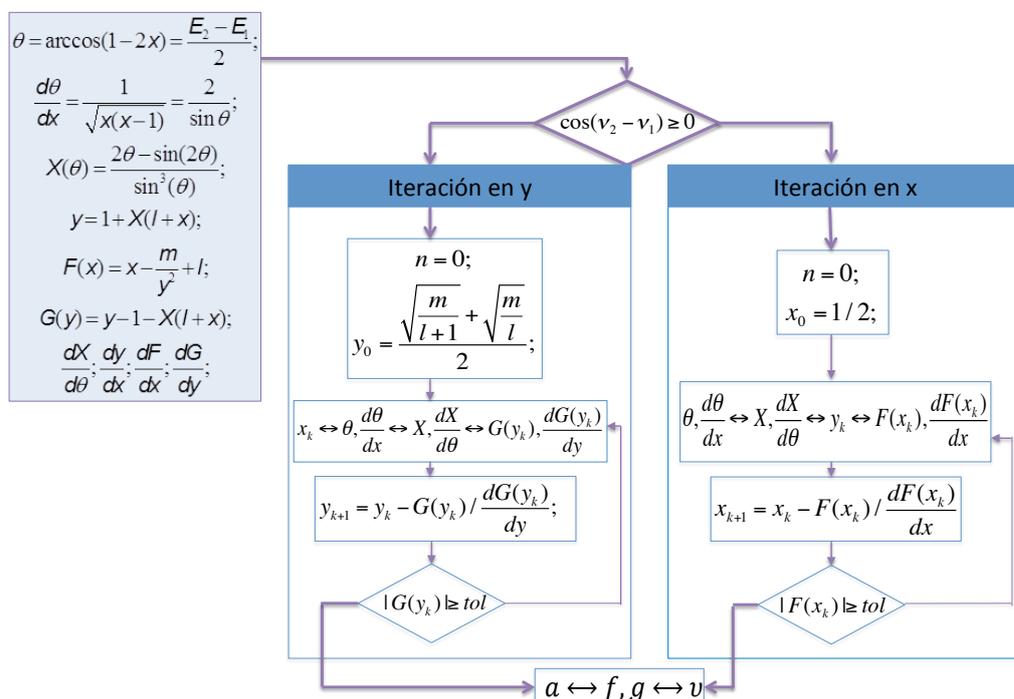


Figura 5.1: Flujograma del método de Roy Danchick

Cabe destacar la separación del método en dos, según sea el valor de la Anomalía Verdadera:

- Si  $\cos(v_2 - v_1) < 0$  entonces,

$$x_0 = 1/2$$

Notar que esta estimación inicial sirve para cualquiera de la órbitas probadas en el Capítulo 7.

El nuevo iterado se construye a partir de Newton ([10]):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (5.1)$$

donde

$$f(x) = x + m/y^2 + l \quad (5.2)$$

es la primera ecuación de Gauss.

- Si  $\cos(v_2 - v_1) > 0$  tenemos:

$$y_0 = \frac{\sqrt{\frac{m}{l+1}} + \sqrt{\frac{m}{l}}}{2}. \quad (5.3)$$

Como podemos observar la estimación inicial en  $y$  es el valor medio de la primera ecuación de Gauss para  $x = 0$  y  $x = 1$ .

Los nuevos iterados surgen también de Newton:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{g(y_k)}{g'(y_k)}, \quad (5.4)$$

siendo  $g(y_k)$  la ecuación unificada de Gauss.

$$g = y - 1 - X(l + x) \quad (5.5)$$

Analizando las cualidades de este método encontramos:

- ◆ Ampliación del rango de Anomalías Verdaderas hasta valores cercanos a  $\pi$ .
- ◆ Valores para la estimación inicial genéricos para el tipo de órbita.

- ◆ Mayor orden de convergencia respecto a Punto Fijo, ya que el método de Newton tiene orden de convergencia cuadrático.
- ◆ Reducción del número de iteraciones.

## 5.2. Ensayo para la ampliación del rango de las Anomalías Verdaderas, $v_2 - v_1$ .

---

Una vez analizado el método que Roy Danchick expone en [7], decidimos probar qué sucedía si despejábamos otra variable para tomarla como variable inicial y la usábamos en el resto de ecuaciones de Gauss puestas, previamente, en función de ésta. La variable escogida fue el parámetro llamado  $X$  (ecuación 4.7), que aparece en la segunda ecuación de Gauss ya que, en principio, podría tener sentido partir de una estimación inicial de este valor y, reescribiendo las ecuaciones, solucionar las ecuaciones de Gauss.

Los objetivos a conseguir con este ensayo de método para la determinación preliminar de órbitas, eran los siguientes:

- Ampliar el rango de Anomalías Verdaderas por encima de  $\pi$ .
- Utilizar una sola función, en los iterados para conseguir buenas condiciones de estabilidad.
- Obtener un número de operaciones óptimo y buena velocidad de convergencia.

Trabajando con estas premisas nos enfrentamos con un primer problema: la ecuación que nos relaciona la proporción entre el triangulo formado por los dos vectores de posición y el sector de la elipse encerrado entre ellos (Figura 4.1), parámetro  $y$ , con el parámetro  $X$  es cúbica y por tanto tendremos que descartar las soluciones que estén en el plano complejo. Dicha ecuación queda como mostramos a continuación:

$$y^3 - y^2 - mX = 0. \quad (5.6)$$

Empleando el comando *Solve[]* del software *Wolfram Mathematica* podemos obtener la forma general de las tres raíces de este polinomio cúbico en función de  $X$ .

$$y_1 = \frac{1}{3} + \frac{2^{1/3}}{3 \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}} \quad (5.7)$$

$$y_2 = \frac{1}{3} - \frac{1 + i\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2/3} \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}} - \frac{(1 - i\sqrt{3}) \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3}} \quad (5.8)$$

$$y_3 = \frac{1}{3} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2/3} \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}} - \frac{(1 + i\sqrt{3}) \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3}} \quad (5.9)$$

Así, tras evaluar su valor en la estimación inicial, podemos discernir cual es la solución que debemos escoger, esto es, la que nos dé solución real.

El siguiente paso será despejar  $x$  de la primera ecuación de Gauss, que quedará en función de  $y$ ,

$$x = \frac{m}{y^2} - l \quad (5.10)$$

De las ecuaciones (4.10) y (4.11) del capítulo anterior, obtenemos la expresión para la diferencia de anomalías excéntricas a la que de ahora en adelante llamaremos  $\theta$ ,

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1 - 2x}{\sqrt{4x(1-x)}} \right) \quad (5.11)$$

Ahora, podemos definir la función que utilizaremos para calcular cada nuevo iterado:

$$f(X) = X - \frac{2\theta - \sin 2\theta}{\sin^3 \theta} \quad (5.12)$$

Llegados a este punto, una vez decidido cómo íbamos a evaluar las ecuaciones de Gauss, pasamos a programarlo en *Mathematica*, apreciando en la ejecución series

problemas. El primero de ellos fue al observar que a la segunda iteración,  $X$  salía complejo. Ésto nos llevó a modificar este método para hallar la solución mediante el método de Steffensen [9], en el que no utilizamos derivadas y que, además, posee una convergencia cuadrática al igual que Newton.

Cómo al trabajar con este método, vimos que seguíamos teniendo el mismo problema, concluimos que el problema no venía por utilizar derivadas en los iterados sino por los valores que tomaban las ecuaciones. Por este motivo decidimos estudiar a fondo éstas, para estimar que valores de  $X$ ,  $x$  e  $y$  nos daban valores reales, ya que como hemos comentado anteriormente obtener valores complejos no tiene sentido para el problema que intentamos resolver.

Al analizar las ecuaciones utilizadas desde un punto de vista gráfico, observamos una serie de inconvenientes, puesto que:

- Para  $x < 0$  el ángulo  $\theta$  resulta imaginario puro lo cual no tiene ningún sentido geométrico.
- Si intentamos fijar los valores de  $X$  e  $y$  para que  $x$  sea positiva, llegamos a que  $0 \leq y \leq 1,29$ , pero para tener una solución en  $y$  única y real debemos tener  $1 \leq y \leq 1,29$  como podemos observar en la Figura 5.2.
- La función  $f(X)$  es creciente, así que cuando sustituimos en ésta el valor de  $X$  que satisface las anteriores condiciones, obtenemos unos valores tan elevados que el siguiente iterado, ya sea calculado con Newton o con Steffensen, vuelve a hacer que  $x < 0$  resultando imposible controlar el valor de los parámetros para fijarlos en la zona del plano correcta.

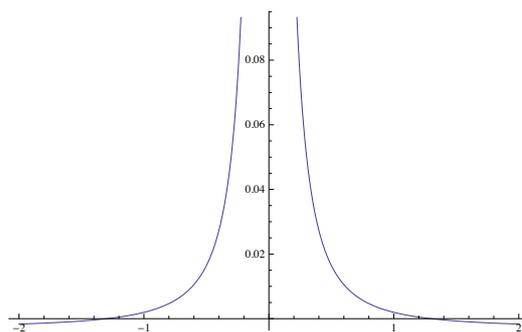


Figura 5.2: Evolución de  $x$  en función de  $y$

Una vez descubierto que los valores de  $y$  deben estar entre 1 y 1,29, representamos las tres raíces de  $y(X)$  para comprobar sus restricciones y, a partir de ellas, poder realizar un estudio detallado del intervalo de valores que  $X$  debe tomar.

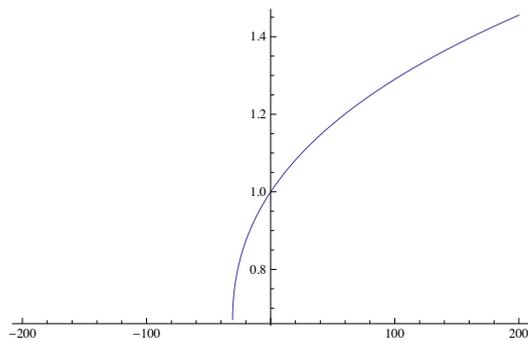


Figura 5.3: Gráfica de  $y_1$  en función de  $X$

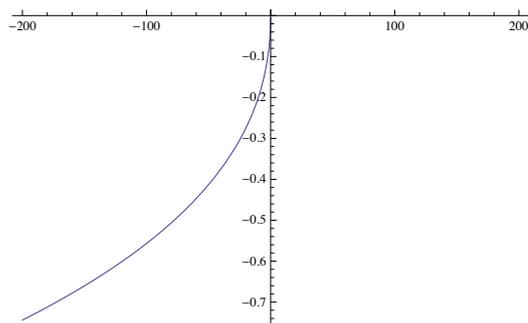


Figura 5.4: Gráfica de  $y_2$  en función de  $X$

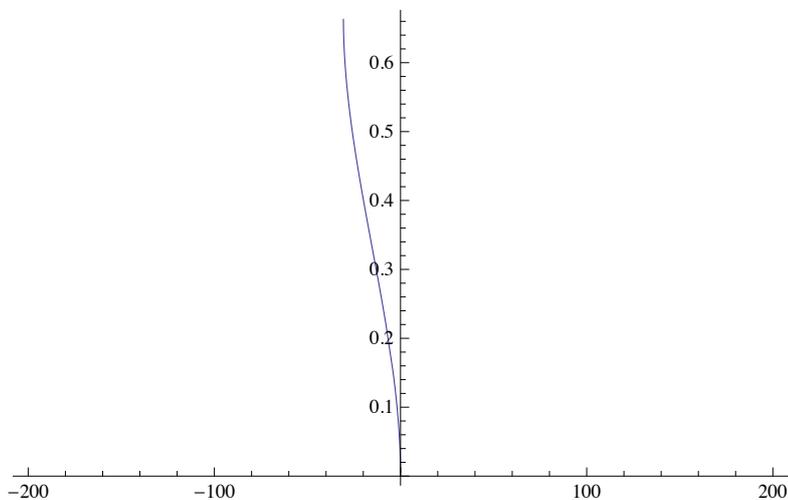


Figura 5.5: Gráfica de  $y_3$  en función de  $X$

Como podemos observar en las gráficas anteriores, para ciertos valores de  $X$  las tres raíces de  $y$  tendrán valores reales. En principio sólo nos interesan los valores reales y positivos por lo que podríamos descartar una de estas soluciones, la mostrada en la Figura 5.4. Si recordamos el sentido del factor que Gauss definió para obtener sus ecuaciones, el cual es nuestra estimación inicial  $X$ , es fácil recordar que éste debe ser positivo con lo que podemos descartar la solución mostrada en la Figura 5.5.

De esta forma escogemos como única solución la primera raíz del parámetro  $y$ , la cual mostramos en la Figura 5.3. Retomando las premisas anteriores, para que  $x > 0$  escogemos  $1 < y < 1,29$ , entonces buscamos un valor para  $X$  que satisfaga ambas. Según podemos observar en la Figura 5.3,  $X$  debe ser  $0 < X < 100$ .

Tras fijar los valores de  $X$ , vamos a evaluar la función  $f(X)$ , ya que si queremos que nuestras  $X$  estimadas en cada iteración estén entre 0 y 100 debemos comprobar cómo se comporta  $f(X)$  para asegurarnos de que no superará los límites establecidos. Para ello volvemos a utilizar la representación gráfica.

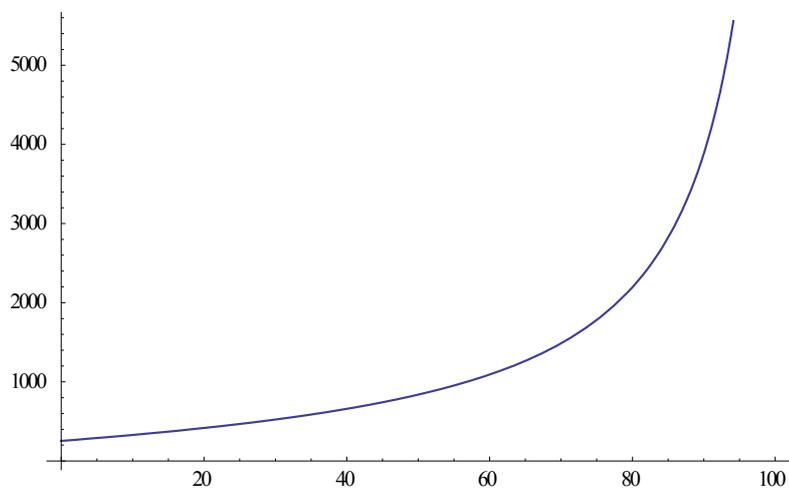


Figura 5.6: Gráfica de la evolución de  $f(X)$

Podemos observar rápidamente que la función es creciente, con lo que no podremos hallar los valores necesarios para obtener la solución del problema.

Así podemos concluir que, a la vista de este estudio, si tomamos como variable de partida  $X$  y despejamos partiendo de esta variable, no conseguimos que las variables  $x$  e  $y$  estén dentro de los límites ya comentados para obtener valores reales. Como consecuencia, no podemos evitar que el ángulo  $\theta$  sea complejo y tuvimos que aceptar que no podemos ampliar el rango de Anomalías Verdaderas por encima de  $\pi$ , utilizando otras variables iniciales.

En lo que resta de proyecto, nuestro objetivo va a ser diseñar nuevos métodos iterativos que mejoren la velocidad de convergencia de los esquemas existentes y que tengan un índice de eficiencia óptimo.

---

# Métodos numéricos libres de derivadas para la determinación preliminar de órbitas.

A lo largo de este capítulo, vamos a mostrar una serie de métodos numéricos para una sola variable surgidos a partir de la idea que Roy Danchick muestra en [7]. Todos ellos tienen el mismo nexo en común, usamos el esquema de Danchick para obtener una ampliación del rango de anomalías verdaderas y además evitamos el uso de derivadas en la estimación de los nuevos iterados partiendo de las ideas planteadas en [9].

Esto nos da una serie de ventajas respecto a otro tipo de métodos, ya comentadas en apartados anteriores:

- Si la función a derivar está definida a trozos, como es nuestro caso, aproximar la derivada nos permite evitar las singularidades.
- Aunque realizamos más evaluaciones funcionales, por el hecho de aproximar la derivada, el número de iteraciones y la velocidad de convergencia no se ven afectados.

A continuación daremos una visión de cómo, siguiendo el esquema proporcionado por Roy Danchick en [7], hemos realizado la estimación de la derivada dentro del método de Newton y de J. F. Traub [10] para el cálculo de los iterados.

## 6.1. Método de Newton con diferencias finitas.

---

Como ya hemos comentado, Danchick en [7] utiliza el método de Newton para calcular los iterados en  $x$  o en  $y$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (6.1)$$

Si aproximamos la derivada del denominador por la diferencia dividida

$$f'(x_k) \approx \frac{f(z_k) - f(x_k)}{f(x)}, \quad (6.2)$$

donde  $z_k = x_k + f(x_k)$ , el método de Newton se transforma en el llamado método de Steffensen (ver [9]), cuya fórmula iterativa vienen dada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(z_k) - f(x_k)} \quad (6.3)$$

Este esquema se presenta como un gran competidor del método de Newton ya que si bien ambos son de segundo orden, requieren dos evaluaciones funcionales por iteración, a diferencia del método de Newton el esquema de Steffensen es libre de derivadas y cuenta con las ventajas comentadas anteriormente. Debido a ésto, decidimos programar el método de Danchick para la determinación preliminar de órbitas siguiendo las ecuaciones (6.2) y (6.3), es decir seguimos el esquema de Danchick, separando la resolución del problema (estimación de la velocidad en la órbita) en dos casos según sea la diferencia de anomalías verdaderas entre las posiciones de observación, utilizando el método de Steffensen para aproximar cada uno de los iterados calculados. A este nuevo método lo llamamos DS.

Observemos que una variante del método de Steffensen la obtenemos fácilmente tomando  $z_k = x_k - f(x_k)$ , lo que nos da lugar al esquema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(z_k)} \quad (6.4)$$

A este método, donde introducimos la ecuación (6.4), le damos el nombre de DSR. Es curioso comprobar, como mostraremos en el siguiente capítulo, que empleando DS o DSR, cuya única diferencia consiste en la manera de calcular  $z_k$ , mejoramos el índice de eficiencia o el error absoluto obtenido para la solución, respectivamente, teniendo en ambos casos un método de orden 2.

## 6.2. Método de Traub con diferencias divididas de primer orden.

---

En los últimos años se han diseñado numerosos métodos iterativos tipo Newton, con el objetivo de mejorar el orden de convergencia y el índice de eficiencia del método de Newton. Uno de ellos es el método de Traub, que se obtiene componiendo el esquema de Newton consigo mismo, manteniendo la derivada congelada. El método resultante es de orden cúbico y su expresión resulta:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}$$

Si en el método de Danckwicz reemplazamos el esquema de Newton por el de Traub obtenemos un nuevo método, con mayor velocidad de convergencia, al que denotamos por DT.

Al igual que hemos hecho para obtener el método de Steffensen a partir del de Newton, reemplazando la derivada por una diferencia dividida, podemos hacer lo mismo con el método de Traub obteniendo el siguiente esquema iterativo

$$y_k = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(z_k) - f(x_k)}, \quad z_k = x_k + f(x_k)$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)f(y_k)}{f(z_k) - f(x_k)} \quad (6.5)$$

Como mostraremos a continuación, el esquema (6.5) conserva el orden del método de Traub, a pesar de la aproximación de la derivada. Para ello, vamos a desarrollar por Taylor, alrededor de la raíz  $x = x^*$ , los diferentes términos de la expresión (6.5).

$$f(x_k) = f'(x^*)[e_k + C_2e_k^2 + C_3e_k^3 + O[e_k^4]]$$

donde  $e_k = x_k - x^*$  y  $C_j = \frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(x^*)}{f'(x^*)}$ ,  $j = 2, 3, \dots$  Como  $z_k = x_k + f(x_k)$ ,

$$z_k - x^* = (1 + f'(x^*))e_k + f'(x^*)C_2e_k^2 + f'(x^*)C_3e_k^3 + O[e_k^4]$$

Por tanto,

$$f(z_k) = f'(x^*)(1 + f'(x^*))e_k + f'(x^*)(f'(x^*) + (1 + f'(x^*))^2)C_2e_k^2 \\ + f'(x^*)(2f'(x^*)(1 + f'(x^*))C_2^2 + f'(x^*)C_3 + (1 + f'(x^*))^3C_3)e_k^3 + O[e_k^4]$$

Sustituyendo estos desarrollos en el primer paso de la expresión (6.5), obtenemos

$$y_k - x^* = (1 + f'(x^*))C_2e_k^2 \\ + (-(2 + 2f'(x^*) + f'(x^*)^2)C_2^2 + (2 + 3f'(x^*) + f'(x^*)^2)C_3)e_k^3 + O[e_k^4]$$

y a partir de aquí

$$f(y_k) = f'(x^*)(1 + f'(x^*))C_2e_k^2 \\ + f'(x^*)(-(2 + 2f'(x^*) + f'(x^*)^2)C_2^2 + (2 + 3f'(x^*) + f'(x^*)^2)C_3)e_k^3 + O[e_k^4]$$

finalmente, sustituyendo en el segundo paso de (6.5) obtenemos la ecuación del error

$$e_{k+1} = (1 + f'(x^*))(2 + f'(x^*))C_2^2e_k^3 + O[e_k^4].$$

Podemos obtener un resultado parecido si utilizamos  $z_k = x_k - f(x_k)$ . Desgraciadamente, no siempre que reemplazamos la derivada por una diferencia dividida de primer orden, se mantiene el orden de convergencia, como pusieron de manifiesto los autores en [12] y como pudimos comprobar durante el desarrollo de la familia de métodos óptimos expuesta en la siguiente sección.

De esta forma surgen otros dos métodos nuevos, el resultante de combinar el método DT con diferencias finitas, DTS y éste mismo pero usando  $z_k = x_k - f(x_k)$  llamado DTSR.

Más adelante mostraremos las tablas con los valores numéricos obtenidos para, posteriormente, comentar los resultados.

## 6.3. Nueva familia de métodos de tipo Steffensen con orden de convergencia óptimo.

---

### 6.3.1. Presentación de la familia de métodos.

---

---

Siguiendo con el esquema planteado en los anteriores apartados, proponemos una familia de métodos en los que mejoramos el método clásico de Gauss reemplazando el esquema de Newton por otro de tipo Steffensen con funciones peso. Así, conseguimos reducir el número de operaciones y aumentar la velocidad de convergencia.

La expresión iterativa del método es la siguiente:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ w_k &= y_k - H(\mu) \frac{f(y_k)}{f[y_k, z_k]}, \quad \mu = \frac{f(y_k)}{f(z_k)} \\ x_{k+1} &= w_k - G(\eta) \frac{f(w_k)}{f[w_k, y_k]}, \quad \eta = \frac{f[w_k, y_k]}{f[w_k, z_k]} \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $z_k = x_k + f^3(x_k)$  y  $f[\cdot, \cdot]$  denota las diferencias divididas de primer orden, utilizadas en capítulos anteriores y  $H(\mu)$  y  $G(\eta)$  son nuestras funciones peso.

El hecho de escoger precisamente esta  $z_k$  para nuestro nuevo método no es trivial, ya que como demuestran los autores en [12], para mantener el orden de un método (que originalmente ya era óptimo) respecto del resultante al usar diferencias divididas, debemos usar potencias en  $f$  en la variable  $z_k = x_k + f^n(x_k)$ . Para métodos óptimos, como es el nuestro, donde el orden de convergencia viene definido por  $2^q$  si escogemos  $n \geq q$  preservamos el orden de convergencia. Como en nuestro caso queremos preservar orden 8 ( $2^3$ ), elevamos  $f(x_k)$  al cubo.

De esta forma, con las expresiones anteriores y eligiendo convenientemente las funciones peso conseguimos:

- Orden de convergencia óptimo, puesto que para cuatro evaluaciones funcionales obtenemos orden 8.
- Reducir considerablemente el número de iteraciones.
- Ampliar el rango de anomalías verdadera hasta valores cercanos a  $\pi$ .

A partir de este momento, denotaremos a este método como MO.

Observemos que la variable de la función  $H$  tiende a cero a medida que la  $k$  crece. Por otra parte la variable de la función  $G$  tiende a uno también al crecer la  $k$ . Por ello, en la demostración de la convergencia de (6.6) vamos a utilizar desarrollos de Taylor de  $H$  y  $G$  alrededor de 0 y 1, respectivamente.

### 6.3.2. Demostración del orden de convergencia.

A continuación planteamos el siguiente teorema, en el que establecemos que la familia (6.6) está formada por métodos óptimos de orden 8.

**Teorema 1.** *Sea  $x^* \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un intervalo abierto  $I$ . Si  $x_0$  está suficientemente cercano a  $x^*$  y siendo  $H$  y  $G$  funciones cualesquiera que cumplan las siguientes condiciones:  $H(0) = 0$ ,  $H'(0) = 1$ , y  $G(1) = 1$ ,  $G'(1) = 0$ ,  $G''(1) = 2$  y  $G'''(1) = -12$ , entonces el método iterativo definido en (6.6) tiene octavo orden óptimo de convergencia, cuya ecuación del error satisface:*

$$e_{k+1} = \frac{1}{2}C_2((-6 + H_2)C_2^2 + 2C_3)(f'(x^*)^3C_2^2 - 4C_2^4 + C_3^2 - C_2C_4)e_k^8 + O[e_k^9]$$

donde  $e_k = x_k - x^*$  y  $C_k = \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(x^*)}{f'(x^*)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$

**Demostración.** Usando el desarrollo en serie de Taylor alrededor de  $x = x^*$ , teniendo en cuenta que  $e_k = x_k - x^*$  y  $f(x^*) = 0$  tenemos

$$f(x_k) = f'(x^*)[e_k + C_2e_k^2 + C_3e_k^3 + C_4e_k^4 + C_5e_k^5 + C_6e_k^6 + C_7e_k^7 + C_8e_k^8] + O[e_k^9] \quad (6.7)$$

y

$$\begin{aligned} z_k - x^* &= e_k + f'(x^*)^3[e_k^3 + 3C_2e_k^4 + (3C_2^2 + 3C_3)e_k^5 + (4C_2C_3 + C_2(C_2^2 + 2C_3) + 3C_4)e_k^6 \\ &\quad + (C_3^2 + C_3(C_2^2 + 2C_3) + 4C_2C_4 + C_2(2C_2C_3 + 2C_4) + 3C_5)e_k^7 \\ &\quad + (2C_3C_4 + (C_2^2 + 2C_3)C_4 + C_3(2C_2C_3 + 2C_4) + 4C_2C_5 \\ &\quad + C_2(C_3^2 + 2C_2C_4 + 2C_5) + 3C_6)e_k^8] + O[e_k^9]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
f(z_k) = & f'(x^*)[e_k + C_2e_k^2 + (f'(x^*)^3 + C_3)e_k^3 + (5f'(x^*)^3C_2 + C_4)]e_k^4 \\
& + (9f'(x^*)^3C_2^2 + 6f'(x^*)^3C_3 + C_5)e_k^5 + (7f'(x^*)^3C_2^3 + C_2(f'(x^*)^6 + 21f'(x^*)^3C_3) \\
& + 7f'(x^*)^3C_4 + C_6)e_k^6 + (2f'(x^*)^3C_2^4 + 3f'(x^*)^6C_3 + 12f'(x^*)^3C_3^2 + 6C_2^2(f'(x^*)^6 \\
& + 4f'(x^*)^3C_3) + 24f'(x^*)^3C_2C_4 + 8f'(x^*)^3C_5 + C_7))e_k^7 \\
& + (3C_2^3(5f'(x^*)^6 + 3f'(x^*)^3C_3) + 27f'(x^*)^3C_2^2C_4 \\
& + 3(2f'(x^*)^6 + 9f'(x^*)^3C_3)C_4 + 3f'(x^*)^3C_2(8f'(x^*)^3C_3 + 9C_3^2 + 9C_5) \\
& + 9f'(x^*)^3C_6 + C_8)e_k^8] + O[e_k^9]. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Ahora construimos la diferencia dividida en  $z$  y  $x$ ,  $f[z_k, x_k] = \frac{f(z_k) - f(x_k)}{z_k - x_k}$ ,  
sustituyendo en esta expresión las ecuaciones (6.7), (6.8) y (6.9).

$$\begin{aligned}
f[z_k, x_k] = & f'(x^*) + 2f'(x^*)C_2e_k + 3f'(x^*)C_3e_k^2 + (f'(x^*)^4C_2 + 4f'(x^*)C_4) e_k^3 \\
& + (3f'(x^*)^4C_2^2 + 3f'(x^*)^4C_3 + 5f'(x^*)C_5) e_k^4 \\
& + 3f'(x^*) (f'(x^*)^3C_2^3 + 4f'(x^*)^3C_2C_3 + 2(f'(x^*)^3C_4 + C_6)) e_k^5 \\
& + (f'(x^*)^4C_2^4 + f'(x^*)^7C_3 + 15f'(x^*)^4C_2^2C_3 + 9f'(x^*)^4C_3^2 \\
& + 21f'(x^*)^4C_2C_4 + 10f'(x^*)^4C_5 + 7f'(x^*)C_7)e_k^6 \\
& + (6f'(x^*)^4C_2^3C_3 + 24f'(x^*)^4C_2^2C_4 + (4f'(x^*)^7 + 27f'(x^*)^4C_3)C_4 \\
& + 3f'(x^*)^4C_2(2f'(x^*)^3C_3 + 7C_3^2 + 11C_5) + 15f'(x^*)^4C_6 + 8f'(x^*)C_8)e_k^7 \\
& + (6f'(x^*)^7C_3^2 + 9f'(x^*)^4C_3^3 + 9f'(x^*)^4C_2^3C_4 + 18f'(x^*)^4C_4^2 + 10f'(x^*)^7C_5 \\
& + 39f'(x^*)^4C_3C_5 + 3f'(x^*)^4C_2^2(5f'(x^*)^3C_3 + 4C_3^2 + 12C_5) \\
& + 12f'(x^*)^4C_2((2f'(x^*)^3 + 5C_3)C_4 + 4C_6) + 21f'(x^*)^4C_7 + 9f'(x^*)C_9)e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

Nuestro iterado  $y_k$  definido en (6.6) lo podemos expresar,

$$\begin{aligned}
y_k - x^* &= C_2 e_k^2 + (-2C_2^2 + 2C_3) e_k^3 + (4C_2^3 + C_2 (f'(x^*)^3 - 7C_3) + 3C_4) e_k^4 \\
&+ (-8C_2^4 + 3f'(x^*)^3 C_3 + 20C_2^2 C_3 - 6C_3^2 - 10C_2 C_4 + 4C_5) e_k^5 \\
&+ (16C_2^5 + 2C_2^3 (f'(x^*)^3 - 26C_3) + 28C_2^2 C_4 + (6f'(x^*)^3 - 17C_3) C_4 \\
&+ C_2 (-2f'(x^*)^3 C_3 + 33C_3^2 - 13C_5 t) + 5C_6) e_k^6 \\
&+ (-32C_2^6 - 4C_2^4 (f'(x^*)^3 - 32C_3) - 6f'(x^*)^3 C_3^2 + 18C_3^3 - 72C_2^3 C_4 \\
&- C_2^2 (f'(x^*)^6 - 14f'(x^*)^3 C_3 + 126C_3^2 - 36C_5) + C_3 (f'(x^*)^6 - 22C_5) \\
&- 4C_2 ((f'(x^*)^3 - 23C_3) C_4 + 4C_6) + 2(-6C_4^2 + 5f'(x^*)^3 C_5 + 3C_7)) e_k^7 \\
&+ (64C_2^7 + C_2^5 (9f'(x^*)^3 - 304C_3) + 176C_2^4 C_4 \\
&+ C_4 (4f'(x^*)^6 - 24f'(x^*)^3 C_3 + 75C_3^2 - 31C_5) \\
&- C_2^3 (f'(x^*)^6 + 36f'(x^*)^3 C_3 - 408C_3^2 + 92C_5) + 15f'(x^*)^3 C_6 \\
&- 27C_3 C_6 + 4C_2^2 ((6f'(x^*)^3 - 87C_3) C_4 + 11C_6) \\
&+ C_2 (33f'(x^*)^3 C_3^2 - 135C_3^3 + 64C_4^2 - 6f'(x^*)^3 C_5 + C_3 (-3f'(x^*)^6 + 118C_5) - 19C_7) \\
&+ 7C_8) e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f(y_k) &= f'(x^*) [C_2 e_k^2 - 2((C_2^2 - C_3)) e_k^3 \\
&+ (5C_2^3 + C_2 (f'(x^*)^3 - 7C_3) + 3C_4) e_k^4 \\
&+ (-12C_2^4 + 3f'(x^*)^3 C_3 + 24C_2^2 C_3 - 6C_3^2 - 10C_2 C_4 + 4C_5) e_k^5 \\
&+ (28C_2^5 + C_2^3 (4f'(x^*)^3 - 73C_3) + 34C_2^2 C_4 + (6f'(x^*)^3 - 17C_3) C_4 \\
&+ C_2 (-2f'(x^*)^3 C_3 + 37C_3^2 - 13C_5) + 5C_6) e_k^6 \\
&- (64C_2^6 + C_2^4 (8f'(x^*)^3 - 206C_3) + 6f'(x^*)^3 C_3^2 - 18C_3^3 + 104C_2^3 C_4 \\
&+ C_2^2 (f'(x^*)^6 - 24f'(x^*)^3 C_3 + 160C_3^2 - 44C_5) - C_3 (f'(x^*)^6 - 22C_5) \\
&+ 4C_2 ((f'(x^*)^3 - 26C_3) C_4 + 4C_6) - 2(-6C_4^2 + 5f'(x^*)^3 C_5 + 3C_7)) e_k^7 \\
&+ (144C_2^7 + 3C_2^5 (7f'(x^*)^3 - 184C_3) + 297C_2^4 C_4 \\
&+ C_2^3 (-63f'(x^*)^3 C_3 + 582C_3^2 - 134C_5) + C_4 (4f'(x^*)^6 - 24f'(x^*)^3 C_3 + 75C_3^2 - 31C_5) \\
&+ 15f'(x^*)^3 C_6 - 27C_3 C_6 + C_2^2 (7(6f'(x^*)^3 - 65C_3) C_4 + 54C_6) \\
&+ C_2 (45f'(x^*)^3 C_3^2 - 147C_3^3 + 73C_4^2 - 6f'(x^*)^3 C_5 \\
&+ C_3 (-3f'(x^*)^6 + 134C_5) - 19C_7) + 7C_8) e_k^8] + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

Ahora podemos expresar la variable  $\mu = \frac{f(y_k)}{f(z_k)}$  como

$$\begin{aligned}
\mu = & C_2 e_k + (-3C_2^2 + 2C_3) e_k^2 + (8C_2^3 - 10C_2C_3 + 3C_4) e_k^3 \\
& + (-20C_2^4 + f'(x^*)^3 C_3 - 8C_3^2 + C_2^2 (-2f'(x^*)^3 + 37C_3) - 14C_2C_4 + 4C_5) e_k^4 \\
& + (48C_2^5 + 2C_2^3 (2f'(x^*)^3 - 59C_3) + 51C_2^2 C_4 + (3f'(x^*)^3 - 22C_3) C_4 \\
& + C_2 (-9f'(x^*)^3 C_3 + 55C_3^2 - 18C_5) + 5C_6) e_k^5 \\
& + (-112C_2^6 - 4C_2^4 (3f'(x^*)^3 - 86C_3) - 11f'(x^*)^3 C_3^2 + 26C_3^3 - 163C_2^3 C_4 - 15C_4^2 \\
& + 6f'(x^*)^3 C_5 - 28C_3 C_5 + C_2^2 (27f'(x^*)^3 C_3 - 252C_3^2 + 65C_5) \\
& + C_2 (-15(f'(x^*)^3 - 10C_3) C_4 - 22C_6) + 6C_7) e_k^6 \\
& + (256C_2^7 + 16C_2^5 (2f'(x^*)^3 - 59C_3) + 480C_2^4 C_4 \\
& + C_2^3 (-94f'(x^*)^3 C_3 + 952C_3^2 + 3(f'(x^*)^6 - 69C_5)) \\
& + C_4 (f'(x^*)^6 - 38f'(x^*)^3 C_3 + 105C_3^2 - 38C_5) + 10f'(x^*)^3 C_6 - 34C_3 C_6 \\
& + C_2^2 ((48f'(x^*)^3 - 693C_3) C_4 + 79C_6) - 2C_2 (-28f'(x^*)^3 C_3^2 + 114C_3^3 - 51C_4^2 \\
& + C_3 (2f'(x^*)^6 - 95C_5) + 11f'(x^*)^3 C_5 + 13C_7) + 7C_8) e_k^7 \\
& + (-576C_2^8 + 36f'(x^*)^3 C_3^3 - 72C_3^4 + C_2^6 (-82f'(x^*)^3 + 2480C_3) \\
& - 1336C_2^5 C_4 - 33f'(x^*)^3 C_4^2 + 4f'(x^*)^6 C_5 - 24C_5^2 + C_3^2 (-9f'(x^*)^6 + 132C_5) \\
& + C_2^4 (-3f'(x^*)^6 + 291f'(x^*)^3 C_3 - 3200C_3^2 + 607C_5) \\
& + C_2^3 ((-162f'(x^*)^3 + 2660C_3) C_4 - 251C_6) - 46C_4 C_6 + C_3 (141C_4^2 - 57f'(x^*)^3 C_5 - 40C_7) \\
& + 15f'(x^*)^3 C_7 + C_2^2 (-258f'(x^*)^3 C_3^2 + 1254C_3^3 - 477C_4^2 + C_3 (17f'(x^*)^6 - 876C_5) \\
& + 74f'(x^*)^3 C_5 + 93C_7) - 2C_2 (C_4 (5f'(x^*)^6 - 96f'(x^*)^3 C_3 + 468C_3^2 - 129C_5) \\
& + 5((3f'(x^*)^3 - 23C_3) C_6 + 3C_8)) + 8C_9) e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

Una vez obtenido  $\mu$ , podemos obtener el desarrollo de Taylor de  $H(\mu)$  a partir del desarrollo en serie de Taylor alrededor del cero en función de  $H_0 = H(0)$ ,  $H_1 = H'(0)$  y  $H_2 = H''(0)$ . Realizamos el desarrollo entorno a cero puesto que

$\mu \longrightarrow 0$  cuando  $k \longrightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned}
H(\mu) = & H_0 + H_1 C_2 e_k + \frac{1}{2}(-6H_1 + H_2)C_2^2 + 2H_1 C_3 e_k^2 \\
& + ((8H_1 - 3H_2 + \frac{H_3}{6})C_2^3 + 2(-5H_1 + H_2)C_2 C_3 + 3H_1 C_4) e_k^3 \\
& + (-\frac{1}{2}(40H_1 - 25H_2 + 3H_3)C_2^4 + f'(x^*)^3 H_1 C_3 + (-8H_1 + 2H_2)C_3^2 \\
& + C_2^2(-2f'(x^*)^3 H_1 + (37H_1 - 16H_2 + H_3)C_3) + (-14H_1 + 3H_2)C_2 C_4 + 4H_1 C_5) e_k^4 \\
& + ((48H_1 - 44H_2 + \frac{17H_3}{2})C_2^5 + C_2^3(2f'(x^*)^3(2H_1 - H_2) \\
& + (-118H_1 + 83H_2 - 11H_3)C_3) + \frac{1}{2}(102H_1 - 46H_2 + 3H_3)C_2^2 C_4 \\
& + (3f'(x^*)^3 H_1 + (-22H_1 + 6H_2)C_3)C_4 + C_2(f'(x^*)^3(-9H_1 + H_2)C_3 \\
& + (55H_1 - 28H_2 + 2H_3)C_3^2 + 2(-9H_1 + 2H_2)C_5) + 5H_1 C_6) e_k^5 \\
& + (-\frac{7}{2}(32H_1 - 40H_2 + 11H_3)C_2^6 + f'(x^*)^3(-11H_1 + 2H_2)C_3^2 \\
& + (26H_1 - 16H_2 + \frac{4H_3}{3})C_3^3 - \frac{1}{2}C_2^4(2f'(x^*)^3(12H_1 - 10H_2 + H_3) \\
& + (-688H_1 + 698H_2 - 147H_3)C_3) + (-163H_1 + 117H_2 - 16H_3)C_2^3 C_4 - 15H_1 C_4^2 \\
& + \frac{9H_2 C_4^2}{2} + 6f'(x^*)^3 H_1 C_5 + 4(-7H_1 + 2H_2)C_3 C_5 \\
& + \frac{1}{2}C_2^2(f'(x^*)^3(54H_1 - 32H_2 + H_3)C_3 + (-504H_1 + 406H_2 - 60H_3)C_3^2 \\
& + 2(65H_1 - 30H_2 + 2H_3)C_5) + C_2((3f'(x^*)^3(-5H_1 + H_2) \\
& + 2(75H_1 - 40H_2 + 3H_3)C_3)C_4 + (-22H_1 + 5H_2)C_6) + 6H_1 C_7) e_k^6 \\
& + (8(32H_1 - 52H_2 + 19H_3)C_2^7 + C_2^5(8f'(x^*)^3(4H_1 - 5H_2 + H_3) \\
& + (-944H_1 + 1290H_2 - 383H_3)C_3) + (480H_1 - 488H_2 + 105H_3)C_2^4 C_4 \\
& + C_4(f'(x^*)^6 H_1 + f'(x^*)^3(-38H_1 + 9H_2)C_3 + (105H_1 - 68H_2 + 6H_3)C_3^2 \\
& + (-38H_1 + 12H_2)C_5) + \frac{1}{2}C_2^3(6f'(x^*)^6 H_1 + f'(x^*)^3(-188H_1 + 180H_2 - 23H_3)C_3 \\
& + (1904H_1 - 2174H_2 + 503H_3)C_3^2 + (-414H_1 + 302H_2 - 42H_3)C_5) + 10f'(x^*)^3 H_1 C_6 \\
& - 34H_2 C_3 C_6 + 10H_2 C_3 C_6 + \frac{1}{2}C_2^2((3f'(x^*)^3(32H_1 - 20H_2 + H_3) \\
& - 2(693H_1 - 569H_2 + 87H_3)C_3)C_4 + (158H_1 - 74H_2 + 5H_3)C_6) \\
& - \frac{1}{2}C_2(-2f'(x^*)^3(56H_1 - 39H_2 + 2H_3)C_3^2 + 24(19H_1 + 3(-6H_2 + H_3))C_3^3 \\
& - 3(68H_1 - 38H_2 + 3H_3)C_4^2 + 4C_3(2f'(x^*)^6 H_1 + (-95H_1 + 52H_2 - 4H_3)C_5) \\
& + 4(f'(x^*)^3(11H_1 - 3H_2)C_5 + (13H_1 - 3H_2)C_7)) + 7H_1 C_8) e_k^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(-12(96H_1 - 196H_2 + 91H_3)C_2^8 + 4f'(x^*)^3(18H_1 - 15H_2 + H_3)C_3^3 \\
& - 8(18H_1 - 21H_2 + 4H_3)C_3^4 + C_2^6(-2f'(x^*)^3(82H_1 - 140H_2 + 43H_3) \\
& + (4960H_1 - 8728H_2 + 3417H_3)C_3) + (-2672H_1 + 3602H_2 - 1083H_3)C_2^5C_4 \\
& + C_3^2(f'(x^*)^6(-18H_1 + H_2) + 8(33H_1 - 22H_2 + 2H_3)C_5) \\
& + C_2^4(2f'(x^*)^6(-3H_1 + 5H_2) + 6f'(x^*)^3(97H_1 - 135H_2 + 31H_3)C_3 \\
& + (-6400H_1 + 9721H_2 - 3138H_3)C_3^2 + (1214H_1 - 1252H_2 + 273H_3)C_5) \\
& + C_2^3((f'(x^*)^3(-324H_1 + 314H_2 - 45H_3) + 2(2660H_1 - 3027H_2 + 716H_3)C_3)C_4 \\
& - 2(251H_1 - 185H_2 + 26H_3)C_6) + 2C_3(3(47H_1 - 32H_2 + 3H_3)C_4^2 \\
& + f'(x^*)^3(-57H_1 + 16H_2)C_5 + 4(-10H_1 + 3H_2)C_7) \\
& + C_2^2(f'(x^*)^3(-516H_1 + 572H_2 - 87H_3)C_3^2 + (2508H_1 - 3312H_2 + 850H_3)C_3^3 \\
& + 2C_3(f'(x^*)^6(17H_1 - 6H_2) - 6(146H_1 - 122H_2 + 19H_3)C_5) \\
& + 2((-477H_1 + 398H_2 - 63H_3)C_4^2 + f'(x^*)^3(74H_1 - 48H_2 + 3H_3)C_5 \\
& + (93H_1 - 44H_2 + 3H_3)C_7)) - 2C_2(C_4(f'(x^*)^6(10H_1 - H_2) \\
& + f'(x^*)^3(-192H_1 + 139H_2 - 9H_3)C_3 + 2(468H_1 - 451H_2 + 78H_3)C_3^2 \\
& - 2(129H_1 - 74H_2 + 6H_3)C_5) + 2(5f'(x^*)^3(3H_1 - H_2) \\
& + (-115H_1 + 64H_2 - 5H_3)C_3)C_6 + (30H_1 - 7H_2)C_8) + 2(3f'(x^*)^3(-11H_1 + 3H_2)C_4^2 \\
& + 4f'(x^*)^6H_1C_5 + 8(-3H_1 + H_2)C_5^2 + (-46H_1 + 15H_2)C_4C_6 \\
& + H_1(15f'(x^*)^3C_7 + 8C_9))e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

Teniendo  $H(\mu)$ , podemos calcular el error para el siguiente iterado,  $w_k$ , mostrado en (6.6)

$$\begin{aligned}
w_k - x^* = & -(-1 + H_0)C_2e_k^2 + \left((-2 + 3H_0 - H_1)C_2^2 - 2(-1 + H_0)C_3\right)e_k^3 \\
& + \left((4 - 7H_0 + 6H_1 - \frac{H_2}{2})C_2^3 + C_2(-f'(x^*))^3(-1 + H_0)\right. \\
& + (-7 + 10H_0 - 4H_1)C_3 - 3(-1 + H_0)C_4\left.)e_k^4\right. \\
& + \left((-8 + 14H_0 - 24H_1 + \frac{9H_2}{2} - \frac{H_3}{6})C_2^4 - 3f'(x^*)^3(-1 + H_0)C_3\right. \\
& + (-6 + 8H_0 - 4H_1)C_3^2 + C_2^2(f'(x^*))^3(2H_0 - H_1) + (20 - 32H_0 + 32H_1 - 3H_2)C_3 \\
& + 2(-5 + 7H_0 - 3H_1)C_2C_4 - 4(-1 + H_0)C_5\left.)e_k^5\right. \\
& + \left((16 - 25H_0 + 79H_1 - 25H_2 + 2H_3)C_2^5 - \frac{1}{6}C_2^3(3f'(x^*))^3(-4 + 8H_0 - 14H_1 + H_2)\right. \\
& + (312 - 486H_0 + 954H_1 - 198H_2 + 8H_3)C_3 - \frac{1}{2}(-56 + 88H_0 - 92H_1 + 9H_2)C_2^2C_4 \\
& + (-6f'(x^*))^3(-1 + H_0) + (-17 + 22H_0 - 12H_1)C_3\left.)C_4\right. \\
& + C_2(2f'(x^*))^3(-1 + 5H_0 - 3H_1)C_3 + (33 - 47H_0 + 56H_1 - 6H_2)C_3^2 \\
& + (-13 + 18H_0 - 8H_1)C_5 - 5(-1 + H_0)C_6\left.)e_k^6\right. \\
& + \left((-32 + 41H_0 - 231H_1 + \frac{219H_2}{2} - \frac{85H_3}{6})C_2^6\right. \\
& + f'(x^*)^3(-6 + 13H_0 - 8H_1)C_3^2 + (18 - 22H_0 + 32H_1 - 4H_2)C_3^3 \\
& + \frac{1}{6}C_2^4(f'(x^*))^3(-24 + 36H_0 - 168H_1 + 36H_2 - H_3) \\
& - 16(-48 + 66H_0 - 234H_1 + 81H_2 - 7H_3)C_3 \\
& + 2(-36 + 56H_0 - 112H_1 + 24H_2 - H_3)C_2^3C_4 - 12C_4^2 + 15H_0C_4^2 - 9H_1C_4^2 \\
& + 10f'(x^*)^3C_5 - 10f'(x^*)^3H_0C_5 + C_3(-f'(x^*))^6(-1 + H_0) \\
& + 2(-11 + 14H_0 - 8H_1)C_5 + \frac{1}{2}C_2^2(f'(x^*))^3(28 - 48H_0 + 98H_1 - 9H_2)C_3 \\
& + 4(-63 + 85H_0 - 194H_1 + 45H_2 - 2H_3)C_3^2 + 2(f'(x^*))^6(-1 + 2H_0) \\
& + (36 - 56H_0 + 60H_1 - 6H_2)C_5\left.) + C_2((f'(x^*))^3(-4 + 17H_0 - 12H_1)\right. \\
& - 2(-46 + 64H_0 - 80H_1 + 9H_2)C_3)C_4 + 2(-8 + 11H_0 - 5H_1)C_6 + 6C_7 - 6H_0C_7\left.)e_k^7\right. \\
& + \frac{1}{6}((384 - 384H_0 + 3744H_1 - 2484H_2 + 461H_3)C_2^7 \\
& + C_2^5(f'(x^*))^3(54 - 42H_0 + 552H_1 - 219H_2 + 17H_3) \\
& + (-1824 + 2076H_0 - 12708H_1 + 6525H_2 - 905H_3)C_3) \\
& + (1056 - 1494H_0 + 5232H_1 - 1851H_2 + 164H_3)C_2^4C_4 \\
& + C_2^3(6f'(x^*))^3(-36 + 44H_0 - 232H_1 + 57H_2 - 2H_3)C_3 \\
& + (2448 - 2892H_0 + 11616H_1 - 4431H_2 + 416H_3)C_3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(3f'(x^*)^6(-1 + 4H_1) + (-276 + 426H_0 - 867H_1 + 189H_2 - 8H_3)C_5)) \\
& - 3C_2^2(2(f'(x^*)^3(-24 + 41H_0 - 85H_1 + 9H_2) \\
& + (348 - 470H_0 + 1087H_1 - 261H_2 + 12H_3)C_3)C_4 \\
& + (-88 + 136H_0 - 148H_1 + 15H_2)C_6) \\
& + C_2(-6f'(x^*)^3(-33 + 46H_0 - 110H_1 + 12H_2)C_3^2 \\
& + (-810 + 912H_0 - 2472H_1 + 648H_2 - 32H_3)C_3^3 \\
& + 6C_3(f'(x^*)^6(-3 + 10H_0 - 2H_1) - 2(-59 + 81H_0 - 104H_1 + 12H_2)C_5) \\
& - 3((-128 + 174H_0 - 228H_1 + 27H_2)C_4^2 + 2f'(x^*)^3(6 - 25H_0 + 20H_1)C_5 \\
& + 2(19 - 26H_0 + 12H_1)C_7)) - 6(C_4(4f'(x^*)^6(-1 + H_0) \\
& + 3f'(x^*)^3(8 - 15H_0 + 10H_1)C_3 + (-75 + 89H_0 - 136H_1 + 18H_2)C_3^2 \\
& + (31 - 38H_0 + 24H_1)C_5 + (15f'(x^*)^3(-1 + H_0) \\
& + (27 - 34H_0 + 20H_1)C_3)C_6 + 7(-1 + H_0)C_8))e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

Llegados a este punto, para conseguir que nuestro método de orden 8 sea óptimo deberíamos tener orden 4 en el segundo paso, tal y como Kung y Traub conjeturan en [11] en el que muestran que siendo  $d$  el número de evaluaciones funcionales de cualquier método multi-punto, el orden de convergencia debe ser  $2^{d-1}$  para poder considerar a éste como óptimo. Por ese motivo, decidimos ajustar  $H_0$  y  $H_1$  para asegurar que esta parte cumple con lo establecido anteriormente, como tenemos hasta el momento 3 evaluaciones funcionales el orden debe ser  $2^{3-1} = 4$ . Efectivamente, si  $H_0 = H(0) = 1$  y  $H_1 = H'(0) = 1$  tenemos:

$$w_k - x^* = \left( -\frac{1}{2}(-6 + H_2)C_2^3 - C_2C_3 \right) e_k^4 + O[e_k^5].$$

Para obtener el desarrollo de  $\eta$  necesitamos calcular previamente el de  $f(w_k)$ ,  $f[w_k, y_k]$  y  $f[w_k, z_k]$ .

$$\begin{aligned}
f(w_k) = & -\frac{1}{2}(f'(x^*)(( -6 + H_2)C_2^3 + 2C_2C_3))e_k^4 \\
& + f'(x^*)(( -18 + \frac{9H_2}{2} - \frac{H_3}{6})C_2^4 - 2C_3^2 + C_2^2(f'(x^*)^3 + (20 - 3H_2)C_3) - 2C_2C_4)e_k^5 \\
& + f'(x^*)((70 - 25H_2 + 2H_3)C_2^5 - \frac{1}{6}C_2^3(3f'(x^*)^3(-10 + H_2) \\
& + (780 - 198H_2 + 8H_3)C_3) - \frac{3}{2}(-20 + 3H_2)C_2^2C_4 - 7C_3C_4 \\
& + C_2(2f'(x^*)^3C_3 - 6(-7 + H_2)C_3^2 - 3C_5))e_k^6 \\
& + \frac{1}{6}f'(x^*)(( -1332 + 657H_2 - 85H_3)C_2^6 + C_2^4(f'(x^*)^3(-156 + 36H_2 - H_3) \\
& - 16(-216 + 81H_2 - 7H_3)C_3) + 12(-92 + 24H_2 - H_3)C_2^3C_4 \\
& - 6(f'(x^*)^3C_3^2 + 4(-7 + H_2)C_3^3 + 6C_4^2 + 10C_3C_5) \\
& + 3C_2^2(3f'(x^*)^3(26 - 3H_2)C_3 + 4(45H_2 - 2(86 + H_3))C_3^2 \\
& + 2(f'(x^*)^6 + (40 - 6H_2)C_5)) + 6C_2((f'(x^*)^3 - 2(-62 + 9H_2)C_3)C_4 - 4C_6))e_k^7 \\
& + \frac{1}{12}f'(x^*)((7596 - 5004H_2 + 3H_2^2 + 922H_3)C_2^7 \\
& - 2C_2^5(f'(x^*)^3(-564 + 219H_2 - 17H_3) + (12492 - 6531H_2 + 905H_3)C_3) \\
& + 2(4794 - 1851H_2 + 164H_3)C_2^4C_4 + C_2^3(12f'(x^*)^3(57H_2 - 2(112 + H_3))C_3 \\
& + (22356 - 8862H_2 + 832H_3)C_3^2 + 4(9f'(x^*)^6 + (-717 + 189H_2 - 8H_3)C_5)) \\
& - 6C_2^2(2(f'(x^*)^3(-68 + 9f'(x^*))) + (965 - 261H_2 + 12H_3)C_3)C_4 \\
& + 5(-20 + 3H_2)C_6) - 12(2(-61 + 9H_2)C_3^2C_4 + 17C_4C_5 + C_3(9f'(x^*)^3C_4 + 13C_6)) \\
& + 2C_2(6f'(x^*)^3(97 - 12H_2)C_3^2 + (-2370 + 648H_2 - 32H_3)C_3^3 \\
& + (546 - 81H_2)C_4^2 + 6C_3(5f'(x^*)^6 - 4(-41 + 6H_2)C_5) \\
& - 6(f'(x^*)^3C_5 + 5C_7))e_k^8 + O[e_k^9],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f[w_k, y_k] = & f'(x^*) + f'(x^*)C_2^2 e_k^2 + 2f'(x^*)C_2(-C_2^2 + C_3)e_k^3 \\
& + \frac{1}{2}f'(x^*)C_2(-(-14 + H_2)C_2^3 + 2C_2(f'(x^*)^3 - 7C_3) + 6C_4)e_k^4 \\
& + \frac{1}{6}f'(x^*)C_2((-156 + 27H_2 - H_3)C_2^4 + 6C_2^2(f'(x^*)^3 - 3(-12 + H_2)C_3) \\
& - 72C_2C_4 + 6(3f'(x^*)^3C_3 - 4C_3^2 + 4C_5))e_k^5 \\
& - \frac{1}{6}(f'(x^*)(6(25H_2 - 2(43 + H_3))C_2^6 - 24C_3^3 + C_2^4(3f'(x^*)^3(-14 + H_2) \\
& + (1002 - 195H_2 + 8H_3)C_3) + 3(-118 + 9H_2)C_2^3C_4 - 12C_2^2(f'(x^*)^3C_3 \\
& + (26 - 3H_2)C_3^2 - 8C_5) - 6C_2(6(f'(x^*)^3 - 3C_3)C_4 + 5C_6)))e_k^6 \\
& + \frac{1}{6}f'(x^*)(( -1524 + 657H_2 - 85H_3)C_2^7 \\
& + C_2^5(f'(x^*)^3(-180 + 36H_2 - H_3) + (3888 - 1263H_2 + 111H_3)C_3) \\
& + 12(-131 + 24H_2 - H_3)C_2^4C_4 + 72C_3^2C_4 - 3C_2^3(f'(x^*)^3(-100 + 9H_2)C_3 \\
& + (716 - 172H_2 + 8H_3)C_3^2 + 4(-38 + 3H_2)C_5) - 6C_2^2((3f'(x^*)^3 \\
& + 2(-94 + 9H_2)C_3)C_4 + 20C_6) + 6C_2(3f'(x^*)^3C_3^2 \\
& + (2 - 4H_2)C_3^3 + C_3(f'(x^*)^6 - 24C_5) + 2(-9C_4^2 + 5f'(x^*)^3C_5 + 3C_7)))e_k^7 \\
& + \frac{1}{12}f'(x^*)((8256 - 4968H_2 + 922H_3)C_2^8 + C_2^6(2f'(x^*)^3(618 - 219H_2 + 17H_3) \\
& + 3(-8692 + 4194H_2 + H_2^2 - 594H_3)C_3) - 4(-3006 + 927H_2 - 82H_3)C_2^5C_4 \\
& + 4C_2^4(6f'(x^*)^6 + 6f'(x^*)^3(-121 + 28H_2 - H_3)C_3 + (5283 - 2058H_2 + 203H_3)C_3^2 \\
& + (-990 + 189H_2 - 8H_3)C_5) + 12C_3(12f'(x^*)^3C_3^2 - 28C_3^3 + 9C_4^2 + 16C_3C_5) \\
& - 6C_2^3(2(f'(x^*)^3(-95 + 9H_2) + (1196 - 255H_2 + 12H_3)C_3)C_4 \\
& + (-188 + 15H_2)C_6) + 2C_2^2(6f'(x^*)^3(103 - 12H_2)C_3^2 \\
& + 2(-651 + 288H_2 - 16H_3)C_3^3 + 18C_3(f'(x^*)^6 + (79 - 8H_2)C_5) \\
& - 3((-328 + 27H_2)C_4^2 + 14f'(x^*)^3C_5 + 48C_7)) + 12C_2(C_4(-15f'(x^*)^3C_3 \\
& + (79 - 18H_2)C_3^2 + 4(f'(x^*)^6 - 12C_5)) + 15(f'(x^*)^3 - 2C_3)C_6 + 7C_8))e_k^8 + O[e_k^9],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f[w_k, z_k] = & f'(x^*) + f'(x^*)C_2e_k + f'(x^*)C_3e_k^2 + f'(x^*)(f'(x^*)^3C_2 + C_4)e_k^3 \\
& + \frac{1}{2}f'(x^*)(-(-6 + H_2)C_2^4 + C_2^2(6f'(x^*)^3 - 2C_3) + 2(2f'(x^*)^3C_3 + C_5))e_k^4 \\
& + \frac{1}{6}f'(x^*)((-108 + 27H_2 - H_3)C_2^5 + 18C_2(3f'(x^*)^3 - C_3)C_3 \\
& + 3C_2^3(8f'(x^*)^3 + (46 - 7H_2)C_3) - 12C_2^2C_4 + 6(3f'(x^*)^3C_4 + C_6)e_k^5 \\
& + \frac{1}{2}f'(x^*)((-50H_2 + 4(35 + H_3))C_2^6 - C_2^4(f'(x^*)^3(-12 + H_2) \\
& + (296 - 75H_2 + 3H_3)C_3) + 2(33 - 5H_2)C_2^3C_4 + 4C_2(6f'(x^*)^3 - 5C_3)C_4 \\
& + 2C_2^2(15f'(x^*)^3C_3 + (62 - 9H_2)C_3^2 - 3C_5) + 2(f'(x^*)^6C_3 \\
& + 6f'(x^*)^3C_3^2 - 2C_3^3 + 4f'(x^*)^3C_5 + C_7))e_k^6 \\
& + \frac{1}{6}f'(x^*)((-1332 + 657H_2 - 85H_3)C_2^7 + C_2^5(f'(x^*)^3(-156 + 36H_2 - H_3) \\
& + (3876 - 1446H_2 + 124H_3)C_3) + (-1212 + 315H_2 - 13H_3)C_2^4C_4 \\
& + 6C_2(15f'(x^*)^3C_3^2 - 10(-7 + H_2)C_3^3 - 8C_4^2 + 2C_3(3f'(x^*)^6 - 7C_5) \\
& + 15f'(x^*)^3C_5) + C_2^3(6f'(x^*)^6 + 3f'(x^*)^3(104 - 11H_2)C_3 \\
& + (738H_2 - 4(711 + 8H_3))C_3^2 + (258 - 39H_2)C_5) \\
& + 3C_2^2((34f'(x^*)^3 + (348 - 51H_2)C_3)C_4 - 8C_6) + 6(3(f'(x^*)^6 \\
& + 5f'(x^*)^3C_3 - 3C_3^2)C_4 + 5f'(x^*)^3C_6 + C_8))e_k^7 \\
& + \frac{1}{12}f'(x^*)(7488 - 4968H_2 + 922H_3)C_2^8 + C_2^6(2f'(x^*)^3(564 - 219H_2 + 17H_3) \\
& + 3(-9156 + 4776H_2 + H_2^2 - 660H_3)C_3) + 2(5214 - 2001H_2 + 176H_3)C_2^5C_4 \\
& + 2C_2^4(18f'(x^*)^6 + 2f'(x^*)^3(198H_2 - 7(111 + H_3))C_3 \\
& + (14592 - 5721H_2 + 528H_3)C_3^2 + (-1542 + 405H_2 - 17H_3)C_5) \\
& - 2C_2^3((3f'(x^*)^3(-170 + 21H_2) + (7674 - 2052H_2 + 92H_3)C_3)C_4 \\
& + 6(-53 + 8H_2)C_6) + 24C_2(C_4(9f'(x^*)^6 + 13f'(x^*)^3C_3 \\
& - 3(-48 + 7H_2)C_3^2 - 11C_5) + 9(f'(x^*)^3 - C_3)C_6) + 2C_2^2(9f'(x^*)^3(108 - 13H_2)C_3^2 \\
& + 4(-1107 + 297H_2 - 14H_3)C_3^3 + 6C_3(22f'(x^*)^6 + (224 - 33H_2)C_5) \\
& + 6((121 - 18H_2)C_4^2 + 18f'(x^*)^3C_5 - 5C_7)) + 12(3f'(x^*)^3C_3^3 \\
& - 4(-7 + H_2)C_3^4 + 9f'(x^*)^3C_4^2 + 6C_3^2(f'(x^*)^6 - 2C_5) \\
& + 6f'(x^*)^6C_5 + C_3(-13C_4^2 + 18f'(x^*)^3C_5) + 6f'(x^*)^3C_7 + C_9))e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

Ahora ya podemos calcular  $\eta = \frac{f[w_k, y_k]}{f[w_k, z_k]}$

$$\begin{aligned}
\eta = & 1 - C_2 e_k + (2C_2^2 - C_3) e_k^2 + (-4C_2^3 - C_2(f'(x^*)^3 - 4C_3) - C_4) e_k^3 \\
& + (8C_2^4 - 2f'(x^*)^3 C_3 - 12C_2^2 C_3 + C_3^2 + 5C_2 C_4 - C_5) e_k^4 \\
& + \left(-\frac{1}{2}(26 + H_2)C_2^5 - \frac{1}{2}C_2^3(4f'(x^*)^3 - (56 + H_2)C_3) - 17C_2^2 C_4\right. \\
& \left. + (-3f'(x^*)^3 + 2C_3)C_4 - 6C_2(C_3^2 - C_5) - C_6\right) e_k^5 \\
& + \left((5 + 6H_2 - \frac{H_3}{6})C_2^6 - 2f'(x^*)^3 C_3^2 + 5C_3^3 + \frac{1}{6}C_2^4(30f'(x^*)^3\right. \\
& \left. + (-162 - 57H_2 + H_3)C_3) + \frac{1}{2}(90 + H_2)C_2^3 C_4 + C_4^2 + C_2^2(f'(x^*)^6\right. \\
& \left. - 9f'(x^*)^3 C_3 + (4 + 3H_2)C_3^2 - 21C_5) - C_3(f'(x^*)^6 - 2C_5)\right. \\
& \left. - 4f'(x^*)^3 C_5 + C_2((2f'(x^*)^3 - 19C_3)C_4 + 7C_6) - C_7\right) e_k^6 \\
& + \left((81 - 42H_2 + \frac{5H_3}{2})C_2^7 - \frac{1}{2}C_2^5(2f'(x^*)^3(4 + H_2)\right. \\
& \left. + (372 - 183H_2 + 8H_3)C_3) - \frac{1}{6}(438 + 63H_2 - H_3)C_2^4 C_4\right. \\
& \left. + C_4(-3f'(x^*)^6 - 5f'(x^*)^3 C_3 + 18C_3^2 + 2C_5) + \frac{1}{6}C_2^3(6f'(x^*)^6\right. \\
& \left. + 6f'(x^*)^3(17 + H_2)C_3 + (1074 - 318H_2 + 8H_3)C_3^2\right. \\
& \left. + 3(110 + H_2)C_5) - 5f'(x^*)^3 C_6 + 2C_3 C_6 - \frac{1}{2}C_2^2((36f'(x^*)^3\right. \\
& \left. - (98 + 15H_2)C_3)C_4 + 50C_6) + C_2(-4f'(x^*)^3 C_3^2 + 6(-12 + H_2)C_3^3 - 16C_4^2\right. \\
& \left. + C_3(f'(x^*)^6 - 22C_5) + 5f'(x^*)^3 C_5 + 8C_7) - C_8\right) e_k^7 \\
& + \left((-475 + \frac{447H_2}{2} - \frac{64H_3}{3})C_2^8 + 15f'(x^*)^3 C_3^3\right. \\
& \left. + (-63 + 4H_2)C_3^4 + \frac{1}{3}C_2^6(f'(x^*)^3(-114 + 39H_2 - H_3)\right. \\
& \left. + (4551 - 1866H_2 + 141H_3)C_3) + \frac{3}{2}(70H_2 - 3(20 + H_3))C_2^5 C_4\right. \\
& \left. - 3f'(x^*)^3 C_4^2 - 6f'(x^*)^6 C_5 + 25C_3^2 C_5 + C_5^2 + \frac{1}{6}C_2^4(30f'(x^*)^6\right. \\
& \left. + 2f'(x^*)^3(192 - 66H_2 + H_3)C_3 + 2(-5064 + 1569H_2 - 86H_3)C_3^2\right. \\
& \left. + (-504 - 72H_2 + H_3)C_5) + 2C_4 C_6 + \frac{1}{6}C_2^3((9f'(x^*)^3(26 + H_2)\right. \\
& \left. + (1344 - 777H_2 + 20H_3)C_3)C_4 + 3(132 + H_2)C_6) - 6f'(x^*)^3 C_7\right. \\
& \left. + C_3(19C_4^2 - 6f'(x^*)^3 C_5 + 2C_7) - \frac{1}{2}C_2^2(3f'(x^*)^3(28 - 5H_2)C_3^2\right. \\
& \left. + 4(-369 + 65H_2 - 2H_3)C_3^3 - 3(44 + 3H_2)C_4^2 + 52f'(x^*)^3 C_5\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2C_3(2f'(x^*)^6 - (50 + 9H_2)C_5) + 58C_7) - C_2(C_4(2f'(x^*)^6 + 26f'(x^*)^3C_3 \\
& - 8(-28 + 3H_2)C_3^2 + 39C_5) + (-9f'(x^*)^3 + 25C_3)C_6 - 9C_8) - C_9)e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

De la misma forma que hicimos anteriormente, vamos a obtener el desarrollo de Taylor de  $G(\eta)$  alrededor del 1, ya que en este caso  $\eta \rightarrow 1$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Denotamos  $G_0 = G(1)$ ,  $G_1 = G'(1)$ ,  $G_2 = G''(1)$  y  $G_3 = G'''(1)$ .

$$\begin{aligned}
G(\eta) = & G_0 - G_1C_2e_k + \left(\frac{1}{2}(4G_1 + G_2)C_2^2 - G_1C_3\right)e_k^2 + \left(-\frac{1}{6}(24G_1 \right. \\
& + 12G_2 + G_3)C_2^3 + C_2(-f'(x^*)^3G_1 + (4G_1 + G_2)C_3) - G_1C_4)e_k^3 \\
& + \left((8G_1 + 6G_2 + G_3)C_2^4 - 2f'(x^*)^3G_1C_3 + \left(G_1 + \frac{G_2}{2}\right)C_3^2\right. \\
& + \frac{1}{2}C_2^2(2f'(x^*)^3G_2 - (24G_1 + 12G_2 + G_3)C_3) + (5G_1 + G_2)C_2C_4 - G_1C_5)e_k^4 \\
& + \frac{1}{2}(-8(4G_2 + G_3) + G_1(26 + H_2))C_2^5 + C_2^3(-f'(x^*)^3(4G_1 + 4G_2 + G_3) \\
& + (8(6G_2 + G_3) + G_1(56 + H_2))C_3) - (34G_1 + 14G_2 + G_3)C_2^2C_4 \\
& + (-6f'(x^*)^3G_1 + 2(2G_1 + G_2)C_3)C_4 + C_2(6f'(x^*)^3G_2C_3 \\
& - (12G_1 + 10G_2 + G_3)C_3^2 + 2(6G_1 + G_2)C_5) - 2G_1C_6)e_k^5 \\
& + \frac{1}{6}((80G_3 + 3G_2(74 + H_2) + G_1(30 + 36H_2 - H_3))C_2^6 \\
& - 12f'(x^*)^3(G_1 - G_2)C_3^2 + (30G_1 - 6G_2 - G_3)C_3^3 + C_2^4(6f'(x^*)^3(5G_1 \\
& + 6G_2 + 2G_3) - (3(40G_3 + G_2(152 + H_2)) + G_1(162 + 57H_2 - H_3))C_3) \\
& + 3(62G_2 + 9G_3 + G_1(90 + H_2))C_2^3C_4 + C_3(-6f'(x^*)^6G_1 + 6(2G_1 + G_2)C_5) \\
& + 3C_2^2(f'(x^*)^6(2G_1 + G_2) - 2f'(x^*)^3(9G_1 + 8G_2 + 2G_3)C_3 \\
& + (56G_2 + 11G_3 + G_1(8 + 6H_2))C_3^2 - (42G_1 + 16G_2 + G_3)C_5) \\
& + 6C_2((2f'(x^*)^3(G_1 + 2G_2) - (19G_1 + 11G_2 + G_3)C_3)C_4 + (7G_1 + G_2)C_6) \\
& + 3((2G_1 + G_2)C_4^2 - 2G_1(4f'(x^*)^3C_5 + C_7)))e_k^6 \\
& + \frac{1}{12}(-3G_3(154 + H_2) + 6G_1(-162 + 84H_2 - 5H_3) + G_2(756 + 84H_2 - 2H_3))C_2^7 \\
& - C_2^5(12f'(x^*)^3(17G_2 + 7G_3 + G_1(4 + H_2)) - (3G_3(312 + H_2) \\
& + 6G_1(-372 + 183H_2 - 8H_3) + 2G_2(1056 + 66H_2 - H_3))C_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2(3(49G_3 + G_2(214 + H_2)) + G_1(438 + 63H_2 - H_3))C_2^4C_4 \\
& + 2C_2^3(6f'(x^*)^3(31G_2 + 10G_3 + G_1(17 + H_2))C_3 \\
& - (3(192G_2 + 70G_3 + 7G_2H_2) + 2G_1(-537 + 159H_2 - 4H_3))C_3^2 \\
& + 3(f'(x^*)^6(2G_1 - 2G_2 - G_3) + (74G_2 + 10G_3 + G_1(110 + H_2))C_5)) \\
& - 6C_2^2((f'(x^*)^3(36G_1 + 26G_2 + 5G_3) - (24(6G_2 + G_3) \\
& + G_1(98 + 15H_2))C_3)C_4 + (50G_1 + 18G_2 + G_3)C_6) \\
& + 6C_2(-f'(x^*)^3(8G_1 + 14G_2 + 5G_3)C_3^2 \\
& + 2(5G_2 + 3G_3 + 6G_1(-12 + H_2))C_3^3 - (32G_1 + 12G_2 + G_3)C_4^2 \\
& + 2C_3(f'(x^*)^6(G_1 + 3G_2) - (22G_1 + 12G_2 + G_3)C_5) \\
& + 2(5f'(x^*)^3(G_1 + G_2)C_5 + (8G_1 + G_2)C_7)) - 6(C_4(6f'(x^*)^6G_1 + 10f'(x^*)^3(G_1 - G_2)C_3 + (-36C_3 \\
& - (2G_1 + G_2)C_3)C_6 + G_1C_8)))e_k^7 \\
& + \frac{1}{12}((G_1(-5700 + 2682H_2 - 256H_3) + 2G_2(78 + 336H_2 - 17H_3) \\
& + G_3(1110 + 48H_2 - H_3))C_2^8 + C_2^6(2f'(x^*)^3(3(45G_3 + G_2(70 + 3H_2)) \\
& + G_1(78H_2 - 2(114 + H_3)))) + (-6G_2(266 + 241H_2 - 9H_3) + G_3(-2910 - 75H_2 + H_3) \\
& + G_1(18204 - 7464H_2 + 564H_3))C_3) + (3G_3(410 + H_2) + 2G_2(1704 + 72H_2 - H_3) \\
& + 18G_1(70H_2 - 3(20 + H_3)))C_2^5C_4 + 2C_2^4(3f'(x^*)^6(10G_1 + 6G_2 + 3G_3) \\
& - f'(x^*)^3(255G_3 + G_2(552 + 9H_2) + 2G_1(-192 + 66H_2 - H_3))C_3 + (12G_3(78 + H_2) \\
& + 2G_1(-5064 + 1569H_2 - 86H_3) + 9G_2(48 + 47H_2 - H_3))C_3^2 \\
& - (3(57G_3 + G_2(258 + H_2)) + G_1(504 + 72H_2 - H_3))C_5) \\
& + 2C_2^3((3f'(x^*)^3(106G_2 + 28G_3 + 3G_1(26 + H_2)) \\
& - (1776G_2 + 507G_3 + 51G_2H_2 + G_1(-1344 + 777H_2 - 20H_3))C_3)C_4 \\
& + 3(86G_2 + 11G_3 + G_1(132 + H_2))C_6) - 6C_2^2(-f'(x^*)^3(78G_2 + 32G_3 \\
& + 3G_1(-28 + 5H_2))C_3^2 + (-84G_2 + 47G_3 + 18G_2H_2 + 4G_1(-369 + 65H_2 - 2H_3))C_3^3 \\
& - (132G_1 + 95G_2 + 13G_3 + 9G_1H_2)C_4^2 + 52f'(x^*)^3G_1C_5 + 38f'(x^*)^3G_2C_5 \\
& + 6f'(x^*)^3G_3C_5 + 2C_3(f'(x^*)^6(2G_1 + 4G_2 + 3G_3) - (50G_1 + 83G_2 + 13G_3 + 9G_1H_2)C_5) \\
& + 58G_1C_7 + 20G_2C_7 + G_3C_7) - 6C_2(C_4(2f'(x^*)^3(26G_1 + 21G_2 + 6G_3)C_3 \\
& - (40G_2 + 19G_3 + 16G_1(-28 + 3H_2))C_3^2 + 2(2f'(x^*)^6(G_1 - 3G_2) \\
& + (39G_1 + 13G_2 + G_3)C_5)) - 2((3f'(x^*)^3(3G_1 + 2G_2) - (25G_1 + 13G_2 + G_3)C_3)C_6 \\
& + (9G_1 + G_2)C_8)) - 6(2f'(x^*)^3(-15G_1 + G_3)C_3^3 + (9G_2 - G_3 + G_1(126 - 8H_2))C_3^4 \\
& + 6f'(x^*)^3(G_1 - G_2)C_4^2 + 12f'(x^*)^6G_1C_5 - 2G_1C_5^2 - G_2C_5^2 \\
& + C_3^2(-6f'(x^*)^6G_2 + (-50G_1 + 6G_2 + G_3)C_5) - 2(2G_1 + G_2)C_4C_6 + 12f'(x^*)^3G_1C_7 \\
& + C_3((-38G_1 + 6G_2 + G_3)C_4^2 + 2(6f'(x^*)^3(G_1 - G_2)C_5 \\
& - (2G_1 + G_2)C_7)) + 2G_1C_9))e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo todos estos desarrollos en el último paso de la fórmula iterativa (6.6), obtenemos:

$$\begin{aligned}
e_{k+1} = & \frac{1}{2}(-1 + G_0)C_2((-6 + H_2)C_2^2 + 2C_3)e_k^4 \\
& + \left(-\frac{1}{6}(108 + 3G_1(-6 + H_2) - 27H_2 + G_0(-108 + 27H_2 - H_3) + H_3)C_2^4 \right. \\
& + 2(-1 + G_0)C_3^2 + C_2^2(-f'(x^*)^3(-1 + G_0) - (-20 + G_1 + G_0(20 - 3H_2) \\
& + 3H_2)C_3) + 2(-1 + G_0)C_2C_4)e_k^5 + \left(\frac{1}{12}(6G_0(-134 + 49H_2 - 4H_3) + 3(280 + G_2(-6 + H_2) \right. \\
& - 100H_2 + 8H_3) + G_1(66H_2 - 2(144 + H_3)))C_2^5 \\
& + \frac{1}{6}C_2^3(3f'(x^*)^3(10 + 2G_1 + G_0(-10 + H_2) - H_2) \\
& + (-780 + 150G_1 + 3G_2 + 198H_2 - 21G_1H_2 - 8H_3 \\
& + G_0(774 - 198H_2 + 8H_3))C_3) - \frac{1}{2}(-60 + 4G_1 + G_0(60 - 9H_2) + 9H_2)C_2^2C_4 \\
& + 7(-1 + G_0)C_3C_4 + C_2(-2f'(x^*)^3(-1 + G_0)C_3 - 3(G_1 \\
& + 2(-7 + H_2) - 2G_0(-7 + H_2))C_3^2 + 3(-1 + G_0)C_5))e_k^6 \\
& + \left(-\frac{1}{12}(2664 - 180G_2 - 6G_3 - 1314H_2 + 39G_2H_2 + G_3H_2 \right. \\
& + 2G_1(-690 + 213H_2 - 14H_3) + 24G_0(-99 + 52H_2 - 7H_3) + 170H_3 - G_2H_3)C_2^6 \\
& + f'(x^*)^3(-1 + G_0)C_3^2 - 2(G_1 + 2(-7 + H_2) - 2G_0(-7 + H_2))C_3^3 \\
& - \frac{1}{6}C_2^4(f'(x^*)^3(156 + 3G_2 + 6G_1(-6 + H_2) - 36H_2 + G_0(-162 + 36H_2 - H_3) + H_3) \\
& + (-3456 + 90G_2 + G_3 + 1296H_2 - 12G_2H_2 - 8G_0(-411 + 159H_2 - 14H_3) \\
& - 112H_3 + G_1(1218 - 273H_2 + 9H_3))C_3) + (-184 + G_2 + G_1(37 - 5H_2) + 48H_2 \\
& - 2H_3 + 2G_0(91 - 24H_2 + H_3))C_2^3C_4 + 6(-1 + G_0)C_4^2 + 10(-1 + G_0)C_3C_5 \\
& - \frac{1}{2}C_2^2f'(x^*)^3(-78 - 4G_1 + G_0(78 - 9H_2) + 9H_2)C_3 + 2(344 - 70G_1 - 2G_2 \\
& - 90H_2 + 9G_1H_2 + 4H_3 + G_0(90H_2 - 4(85 + H_3)))C_3^2 + 2f'(x^*)^6(-1 + G_0) \\
& + (-40 + 40G_0 + 3G_1 + 6H_2 - 6G_0H_2)C_5) + C_2((-f'(x^*)^3(-1 + G_0) \\
& + 2(62 - 62G_0 - 5G_1 - 9H_2 + 9G_0H_2)C_3)C_4 + 4(-1 + G_0)C_6))e_k^7 \\
& + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}(22464 - 3150G_2 - 216G_3 - 14904H_2 + 873G_2H_2 + 45G_3H_2 \right. \\
& + 18G_0(-1018 + 757H_2 - 149H_3) + 12G_1(-1284 + 525H_2 - 56H_3) \\
& + 2766H_3 - 48G_2H_3 - G_3H_3)C_2^7 + C_2^5(f'(x^*)^3(1128 - 42G_2 + 2G_3 - 438H_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 9G_2H_2 + 2G_0(-528 + 213H_2 - 17H_3) + 2G_1(-306 + 69H_2 - 2H_3) + 34H_3) \\
& + (-24912 + 1758G_2 + 70G_3 + 13050H_2 - 360G_2H_2 - 9G_3H_2 \\
& - 6G_1(-2138 + 677H_2 - 48H_3) - 1810H_3 + 10G_2H_3 \\
& + G_0(22188 - 12438H_2 + 1790H_3))C_3) + (9588 - 264G_2 - 4G_3 \\
& - 3702H_2 + 33G_2H_2 + G_0(-9072 + 3630H_2 - 328H_3) \\
& + G_1(-3396 + 768H_2 - 26H_3) + 328H_3)C_2^4C_4 \\
& + 12(122 - 9G_1 - 18H_2 + 2G_0(-61 + 9H_2))C_3^2C_4 + 204(-1 + G_0)C_4C_5 \\
& - C_2^3(12f'(x^*)^6(-3 + 3G_0 - 2G_1) + 12f'(x^*)^3(224 + G_2 - 57H_2 \\
& + G_1(-62 + 9H_2) + G_0(-227 + 57H_2 - 2H_3) + 2H_3)C_3 \\
& + (-22344 + 630G_2 + 10G_3 + 8862H_2 - 75G_2H_2 - 832H_3 \\
& + G_1(7872 - 1770H_2 + 64H_3) + G_0(21240 - 8718H_2 + 832H_3))C_3^2 \\
& + 2(1434 - 9G_2 - 378H_2 + 3G_1(-98 + 13H_2) + 2G_0(-708 + 189H_2 - 8H_3) + 16H_3)C_5) \\
& + 12(-1 + G_0)C_3(9f'(x^*)^3C_4 + 13C_6) + 6C_2^2((2f'(x^*)^3(-1 + G_0)(-68 + 9H_2) \\
& + (-1930 + 402G_1 + 13G_2 + 522H_2 - 51G_1H_2 \\
& - 6G_0(-317 + 87H_2 - 4H_3) - 24H_3)C_3)C_4 + (100 - 8G_1 - 15H_2 + 5G_0(-20 + 3H_2))C_6) \\
& - 2C_2(6f'(x^*)^3(-97 + 3G_1 + G_0(97 - 12H_2) + 12H_2)C_3^2 \\
& + (2370 - 474G_1 - 15G_2 - 648H_2 + 60G_1H_2 + G_0(-2346 + 648H_2 - 32H_3) + 32H_3)C_3^3 \\
& + (-546 + 546G_0 + 48G_1 + 81H_2 - 81G_0H_2)C_4^2 + 6C_3(5f'(x^*)^6(-1 + G_0) \\
& + 2(-82 + 7G_1 + G_0(82 - 12H_2) + 12H_2)C_5) - 6(-1 + G_0)(f'(x^*)^3C_5 + 5C_7)))e_k^8 + O[e_k^9].
\end{aligned}$$

A la vista de los resultados, si fijamos  $G_0 = G(1) = 1$ ,  $G_1 = G'(1) = 0$ ,  $G_2 = G''(1) = 2$  y  $G_3 = G'''(1) = -12$  la expresión del error toma la siguiente forma:

$$e_{k+1} = \frac{1}{2}C_2((-6 + H_2)C_2^2 + 2C_3)(f'(x^*)^3C_2^2 - 4C_2^4 + C_3^2 - C_2C_4)e_k^8 + O[e_k^9],$$

lo que demuestra el orden de convergencia 8 del método.  $\square$

Nos gustaría remarcar que, en términos de coste computacional, el método desarrollado tiene cuatro evaluaciones funcionales por iterado. De esta forma, tenemos una nueva familia de métodos óptimos de orden ocho independientes del valor de  $H_2 = H''(0)$ .

---

## Resultados numéricos.

### 7.1. Implementación de los algoritmos en Mathematica.

---

El software utilizado en la implementación de estos métodos y posteriores pruebas numéricas, ha sido *Wolfram Mathematica* debido, principalmente, a su estabilidad en cuanto al cálculo del tiempo computacional y su capacidad para el cálculo simbólico.

Debemos destacar que en este software matemático, a diferencia de otros como Matlab, no podemos usar funciones que a partir de unos valores de entrada, introducidos por el usuario en la ventana principal, calculen los resultados si no que cada uno de los archivos empleados debe tener todos los datos necesarios para solucionar las ecuaciones programadas. Sin embargo la ventaja que posee, además de las ya nombradas, es que si, por ejemplo, ejecutamos secuencialmente dos archivos que se complementan en el orden correcto, los valores obtenidos por el primer archivo .nb ejecutado siguen en memoria con la precisión que previamente has indicado, con lo que para ejecutar el siguiente que le complementa no hace falta volver a introducir los datos.

Teniendo en cuenta esta idea, para obtener los resultados incluidos en las tablas que a continuación mostramos, hemos seguido el diagrama mostrado en la Figura 7.1.

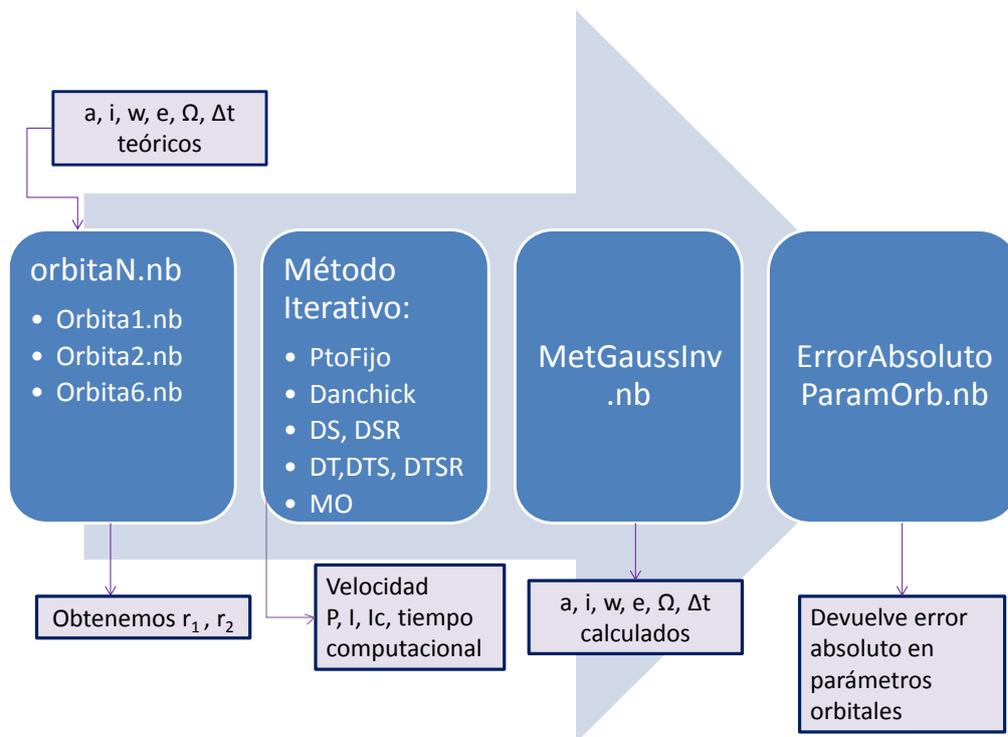


Figura 7.1: Esquema de ejecución en Mathematica

De esta forma, a partir de dos posiciones del satélite en la órbita, podemos obtener la velocidad en dicha órbita usando los diferentes métodos numéricos que hemos presentado en capítulos anteriores. Una vez obtenida la velocidad, empleamos la función `MetGaussInv.nb` para obtener los parámetros orbitales correspondientes y mediante `ErrorAbsolutoParamOrb.nb` calculamos el error absoluto entre los valores teóricos y los obtenidos con nuestros métodos.

Las posiciones las hemos calculado mediante `orbitaN.nb`, donde  $N$  indica el número de órbita de referencia extraída de [8] de la cual estamos calculando su velocidad, a partir de los parámetros orbitales teóricos y de la diferencia de tiempos en que se tomaron las observaciones. Así, dado que Mathematica guarda los datos y resultados de los programas ya ejecutados, disponemos de toda la información que nuestros métodos necesitan con una precisión de mil dígitos, la cual se mantendrá durante todo el proceso.

## 7.2. Resolución de las ecuaciones.

---

Los resultados contenidos en las tablas que a continuación mostraremos, han sido obtenidos mediante los métodos numéricos estudiados a lo largo de este proyecto y cuya programación en *Wolfram Mathematica* se puede encontrar en el Anexo I. Dichos resultados los hemos separado en dos bloques, los correspondientes a las órbitas de referencia que Pedro Ramón Escobal plantea en [8] puesto que este trabajo está centrado en la determinación de órbitas, y los resultados correspondientes a casos académicos para comprobar la estabilidad de los métodos libres de derivadas.

### 7.2.1. Determinación de las órbitas de referencia.

---

Los datos de las órbitas que a continuación enumeramos se pueden encontrar en [8] a lo largo de las páginas 232 y 233. Como datos comunes a ellas, tenemos los siguientes parámetros:

- $k \equiv 0,0743654 (e.r.)^{\frac{3}{2}}/min$
- $\mu = 1$  (e.m.) (e.m.  $\Rightarrow$  Masa relativa a la Tierra )
- $a_e = 1$  (e.r.)

donde  $a_e$  es la distancia entre el centro de masas y el foco donde se sitúa, en este caso, la Tierra; **e.r.** es una unidad de distancia relativa al radio ecuatorial de la Tierra,  $1 \text{ e.r.} \cong 6373.0024 \text{ km}$ ; **e.m.** es una unidad relativa al centro de masas terrestre. También debemos mencionar que D.J. equivale a días julianos y  $T$  es la época de paso por el perigeo.

Dentro de las tablas veremos los siguientes datos que nos ayudaran a hacer la comparativa entre métodos:

- $iter$ , número de iteraciones empleadas para alcanzar la solución, con la tolerancia indicada.
- $\rho$ , orden de convergencia definido según la fórmula () incluida en Conceptos Previos.
- $\tilde{I}$ , índice de eficiencia aproximado también comentado en Conceptos Previos (ecuación ()).

- $\tilde{I}_c$ , índice operacional aproximado, cuya fórmula se expone en Conceptos Previos()
- $error_{parametro}$ , se refiere al error absoluto obtenido mediante la siguiente expresión:  $|parametro_{teorico} - parametro_{obtenido}|$

Debemos mencionar también, que hemos usado una precisión de 1000 dígitos, con una tolerancia de  $10^{-100}$ .

▪ **Órbita de referencia I**  
**Vectores de posición e instante de observación**

|                       |                       |                              |
|-----------------------|-----------------------|------------------------------|
| $x_1 = 2.460809$ e.r. | $x_2 = 1.988041$ e.r. | $t = 1$ Enero 1964           |
| $y_1 = 2.040523$ e.r. | $y_2 = 2.503334$ e.r. | $\Delta t = 0.01044412$ D.J. |
| $z_1 = 0.143819$ e.r. | $z_2 = 0.314554$ e.r. |                              |

**Parámetros orbitales**

|   |                     |
|---|---------------------|
| $a = 4.0$ e.r.                                | $i = 15^\circ$      |
| $e = 0.2$ e.r.                                | $\Omega = 30^\circ$ |
| $T = 1$ Enero 1964 $0^{hr}, 0^{min}, 0^{seg}$ | $\omega = 10^\circ$ |

$$|v_2 - v_1| = 12,2319^\circ, \text{ estimación inicial } y_0 = 1$$

|                | Pfijo       | Danchick    | DS          | DSR         | DT          | DTS         | DTSR        | MO          |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>iter</i>    | 53          | 5           | 5           | 5           | 4           | 4           | 3           | 3           |
| $\tilde{\rho}$ | 0.9999      | 2.0000      | 2.0000      | 1.9999      | 3.0000      | 3.0000      | 2.9999      | 8.0010      |
| $\tilde{I}$    | 0.9987      | 1.3945      | 1.3812      | 1.4673      | 1.6969      | 1.4531      | 1.5424      | 1.7313      |
| $\tilde{I}_c$  | 0.9974      | 1.9459      | 1.3812      | 1.4673      | 2.2420      | 1.4531      | 1.5424      | 1.1575      |
| $error_a$      | 3.6805e-104 | 5.7675e-125 | 1.7318e-115 | 1.0414e-183 | 1.5440e-145 | 4.8431e-200 | 4.3307e-130 | 4.8431e-200 |
| $error_e$      | 5.7528e-104 | 6.6345e-125 | 1.9922e-115 | 1.1980e-183 | 1.7761e-145 | 8.8035e-201 | 4.9817e-130 | 8.8035e-201 |
| $error_i$      | 2.2349e-102 | 2.4417e-123 | 7.3317e-114 | 4.4089e-182 | 6.5365e-144 | 3.9324e-200 | 1.8334e-128 | 3.9324e-200 |
| $error_\omega$ | 7.9614e-102 | 8.6981e-123 | 2.6118e-113 | 1.5706e-181 | 2.3285e-143 | 1.4009e-199 | 6.5313e-128 | 1.4009e-199 |
| $error_\Omega$ | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           |
| <i>Tiempo</i>  | 0.0038418   | 0.0594093   | 0.1227397   | 0.1313144   | 0.0522505   | 0.1112143   | 0.0821334   | 0.0029408   |

Tabla 7.1: Resultados Órbita Referencia I.

A la vista de la Tabla 7.1 observamos que por ser  $|v_2 - v_1| = 12,2319^\circ$ , mucho menor que  $45^\circ$ , PFijo alcanza la solución con un tiempo computacional comparable

al de MO, debido a que no realiza ni derivadas ni aproximaciones de ellas, pero tiene un elevado número de iteraciones y su error es mayor que para el resto de métodos. Fijándonos en aquellos métodos que estiman mejor la solución tenemos que aunque DTS y MO nos proporcionan unos errores muy bajos en cada uno de los parámetros orbitales, MO los obtiene en una centésima parte del tiempo computacional de DTS y además con una iteración menos.

■ **Órbita de referencia III**  
**Vectores de posición e instante de observación**

|                       |                        |                              |
|-----------------------|------------------------|------------------------------|
| $x_1 = 0.41136$ e.r.  | $x_2 = 0.97757$ e.r.   | $t = 23$ Diciembre 1963      |
| $y_1 = -1.66250$ e.r. | $y_2 = -1.64428$ e.r.  | $\Delta t = 0.01316924$ D.J. |
| $z_1 = 0.82272$ e.r.  | $z_2 = -0.042363$ e.r. |                              |

**Parámetros orbitales**

|  |                      |
|--|----------------------|
| $a = 2.0$ e.r.                                     | $i = 60^\circ$       |
| $e = 0.05$ e.r.                                    | $\Omega = 120^\circ$ |
| $T = 23$ Diciembre 1963 $0^{hr}, 0^{min}, 0^{seg}$ | $\omega = 150^\circ$ |

$$|v_2 - v_1| = 31,4649^\circ, \text{ estimación inicial } y_0 = 1$$

|                          | Pfijo       | Danchick    | DS          | DSR         | DT          | DTS         | DTSR        | MO          |
|--------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>iter</i>              | 100         | 6           | 6           | 6           | 5           | 4           | 4           | 3           |
| $\tilde{\rho}$           | 0.99999     | 2.0000      | 2.0000      | 1.9999      | 3.0000      | 3.0000      | 2.9999      | 8.0126      |
| $\tilde{I}$              | 0.9990      | 1.3876      | 1.3667      | 1.4419      | 1.4886      | 1.4215      | 1.4945      | 1.7179      |
| $\tilde{I}_c$            | 0.9980      | 1.9289      | 1.3667      | 1.4419      | 1.8174      | 1.4215      | 1.4945      | 1.1552      |
| <i>error<sub>a</sub></i> | 7.6194e-103 | 3.6639e-137 | 8.4958e-116 | 2.4566e-200 | 7.1500e-202 | 7.1508e-202 | 7.1508e-202 | 7.1508e-202 |
| <i>error<sub>e</sub></i> | 6.6292e-102 | 2.2202e-136 | 5.1481e-115 | 1.4425e-199 | 2.7300e-202 | 2.7300e-202 | 2.7325e-202 | 2.7325e-202 |
| <i>error<sub>i</sub></i> | 1.0392e-101 | 3.3928e-136 | 7.8671e-115 | 2.1984e-199 | 1.0162e-201 | 1.0162e-201 | 1.0163e-201 | 1.0163e-201 |
| <i>error<sub>ω</sub></i> | 9.6868e-100 | 3.1625e-134 | 7.3332e-113 | 2.0492e-197 | 9.4730e-200 | 9.4730e-200 | 9.4732e-200 | 9.4732e-200 |
| <i>error<sub>Ω</sub></i> | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           |
| <i>Tiempo</i>            | 0.0050993   | 0.0698852   | 0.1527216   | 0.1644351   | 0.0675880   | 0.1066893   | 0.1141550   | 0.0030695   |

Tabla 7.2: Resultados Órbita Referencia III.

En la Tabla 7.2 podemos comprobar como a medida que aumenta la diferencia de anomalías verdaderas el método de Gauss, es decir PFijo, va perdiendo prestacio-

nes. En éste, el número de iteraciones se duplica y aunque el tiempo computacional es menor que en aquellos libres de derivadas nos sigue proporcionando un error muy alto en comparación con el resto. En esta ocasión, sólo los métodos que toman como referencia el método de Traub, DT, DTS y DTSR obtienen un error tan bueno como MO, aunque siguen necesitando mayor tiempo computacional.

■ **Órbita de referencia VI**

**Vectores de posición e instante de observación**

|                       |                       |                              |
|-----------------------|-----------------------|------------------------------|
| $x_1 = -2.57823$ e.r. | $x_2 = 3.49838$ e.r.  | $t = 30$ enero 1964          |
| $y_1 = 2.13649$ e.r.  | $y_2 = -2.94610$ e.r. | $\Delta t = 0.21227310$ D.J. |
| $z_1 = 0.59004$ e.r.  | $z_2 = 0.23276$ e.r.  |                              |

**Parámetros orbitales**

|  |                      |
|--|----------------------|
| $a = 4.0$ e.r.                                 | $i = 88^\circ$       |
| $e = 0.15$ e.r.                                | $\Omega = 140^\circ$ |
| $T = 30$ Enero 1964 $0^{hr}, 0^{min}, 0^{seg}$ | $\omega = 10^\circ$  |

$|v_2 - v_1| = 59,0148^\circ$ , estimación inicial  $x_0 = 0,4$

|  | Pfijo | Danchick | DS | DSR | DT | DTS | DTSR | MO          |
|--|-------|----------|----|-----|----|-----|------|-------------|
| <i>iter</i>                                | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 4           |
| $\tilde{\rho}$                             | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 8.0235      |
| $\tilde{I}$                                | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 1.5210      |
| $\tilde{I}_c$                              | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 1.1133      |
| <i>error<sub>a</sub></i>                   | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 1.7358e-202 |
| <i>error<sub>e</sub></i>                   | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 3.6984e-202 |
| <i>error<sub>i</sub></i>                   | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 1.2487e-202 |
| <i>error<sub><math>\omega</math></sub></i> | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 8.0140e-200 |
| <i>error<sub><math>\Omega</math></sub></i> | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 2.4857e-251 |
| <i>Tiempo</i>                              | -     | -        | -  | -   | -  | -   | -    | 0.00114858  |

Tabla 7.3: Resultados Órbita Referencia VI.

En la Tabla 7.3 vemos que, aún teniendo una estimación inicial muy próxima a la solución, ninguno de los métodos es capaz de converger excepto MO el cual consigue, con un número reducido de iteraciones y de tiempo computacional, una

muy buena aproximación de la solución.

Visto el problema de convergencia que poseen todos los métodos numéricos excepto nuestro Método Óptimo, decidimos representar la cuenca de convergencia de MO para encontrar otra estimación inicial que fuese común a todos ellos con el objetivo de poder compararlos.

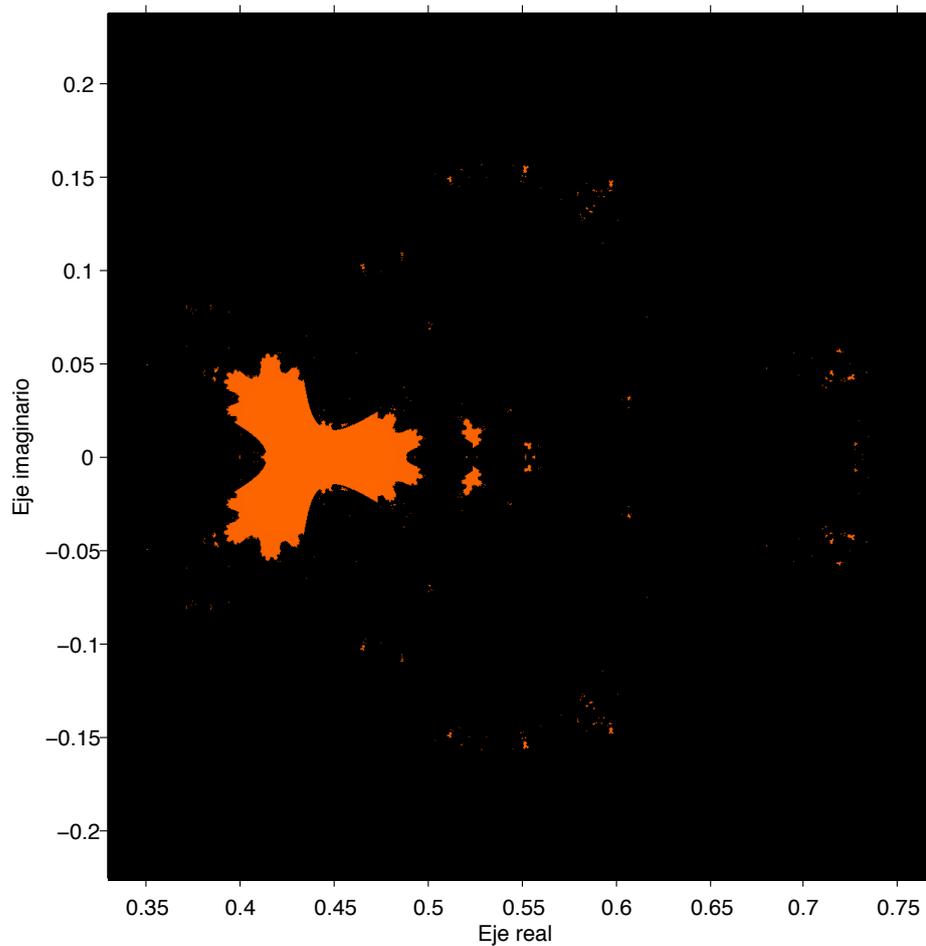


Figura 7.2: Cuenca de convergencia del método MO

Como se puede observar en la Figura 7.2, disponemos de más estimaciones iniciales que permiten que el método converja, de esta forma si tomamos como estimación inicial  $x_0 = 0,46$  podemos comparar las prestaciones de los citados métodos. Aunque todos convergen para esta estimación inicial, cuando ejecutamos con la tolerancia utilizada durante la realización de todas las pruebas numéricas que hemos mostrado, es decir  $tol = 10^{-100}$ , la convergencia de todos los métodos, ex-

cepto de nuestro Método Óptimo, es sumamente lenta lo que nos impide obtener los resultados como podemos observar en la siguiente tabla.

$$|v_2 - v_1| = 59,0148^\circ, \text{ estimación inicial } x_0 = 0,46$$

|                          | Pfijo | Danchick | DS | DSR | DT | DTS | DTSR | MO          |
|--------------------------|-------|----------|----|-----|----|-----|------|-------------|
| <i>iter</i>              | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 4           |
| $\tilde{\rho}$           | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 8.0010      |
| $\tilde{I}$              | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 1.5528      |
| $\tilde{I}_c$            | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 1.1221      |
| <i>error<sub>a</sub></i> | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 1.7358e-202 |
| <i>error<sub>e</sub></i> | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 3.6984e-202 |
| <i>error<sub>i</sub></i> | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 1.2487e-202 |
| <i>error<sub>ω</sub></i> | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 8.0140e-200 |
| <i>error<sub>Ω</sub></i> | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 2.4857e-251 |
| <i>Tiempo</i>            | –     | –        | –  | –   | –  | –   | –    | 0.00121789  |

Tabla 7.4: Resultados Órbita de Referencia VI,  $tol = 10^{-100}$ .

A la vista de la Tabla 7.4, vemos lo comentado en el párrafo superior, MO es capaz de soportar una tolerancia muy exigente, mientras que el resto de métodos estudiados no llegan a converger por lo que volvemos a poner de manifiesto las mejoras introducidas por éste, un reducido número de iteraciones y tiempo computacional para la obtención de la solución con un error ínfimo. Para conseguir que el resto de métodos converja, decidimos bajar la tolerancia a  $tol = 10^{-10}$ , de forma que aunque con un criterio mucho más relajado de lo habitual podamos obtener resultados numéricos para compararlos con los de nuestro método y comprobar que efectivamente estamos determinando los parámetros orbitales de la Órbita de Referencia VI.

Una vez hemos conseguido obtener resultados numéricos para todos los métodos, obtenemos los resultados incluidos en la Tabla 7.5, en ella podemos comprobar que el método de Gauss diverge para  $|v_2 - v_1| > 45^\circ$  debido a que el parámetro de Gauss que tomamos como estimación inicial  $y$  ya no es válido puesto que no es comparable el área de la elipse encerrada entre los dos vectores de posición con el triángulo formado por esos dos vectores y el foco, en nuestro caso la Tierra.

En cuanto al resto de métodos, podemos observar que aquellos que utilizan derivadas, Danchick y DT, reducen el tiempo de ejecución sin embargo dado que poseen un orden de convergencia bajo poseen menor velocidad de convergencia lo que hace que MO, con mayor orden de convergencia, converja a la solución en menos tiempo.

$|v_2 - v_1| = 59,0148^\circ$ , estimación inicial  $x_0 = 0,46$

|                          | Pfijo | Danchick    | DS          | DSR         | DT          | DTS         | DTSR        | MO          |
|--------------------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>iter</i>              | –     | 3           | 7           | 5           | 2           | 2           | 4           | 3           |
| $\tilde{\rho}$           | –     | 1.9964      | 2.0068      | 2.0182      | 2.0974      | 2.0974      | 2.9721      | 8.0010      |
| $\tilde{I}$              | –     | 1.2536      | 1.1929      | 1.2801      | 0.9136      | 1.2251      | 1.4884      | 1.5528      |
| $\tilde{I}_c$            | –     | 1.5969      | 1.1929      | 1.1977      | 1.4482      | 0.9136      | 1.2251      | 1.1088      |
| <i>error<sub>a</sub></i> | –     | 5.5124e-10  | 1.7154e-12  | 1.1879e-09  | 3.2784e-10  | 3.2784e-10  | 1.3312e-14  | 1.7359e-202 |
| <i>error<sub>e</sub></i> | –     | 1.7082e-10  | 5.3064e-13  | 3.6812e-10  | 1.0160e-10  | 1.0160e-10  | 2.2672e-15  | 3.6985e-202 |
| <i>error<sub>i</sub></i> | –     | 1.6482e-11  | 5.1001e-14  | 3.5518e-11  | 9.8032e-12  | 9.8032e-12  | 1.7243e-16  | 1.2488e-202 |
| <i>error<sub>ω</sub></i> | –     | 1.0577e-08  | 3.2730e-11  | 2.2793e-08  | 6.2911e-09  | 6.2911e-09  | 1.1065e-13  | 8.0140e-200 |
| <i>error<sub>Ω</sub></i> | –     | 2.4800e-251 |
| <i>Tiempo</i>            | –     | 0.002872    | 0.018754    | 0.010852    | 0.001832    | 0.014793    | 0.007634    | 0.000931    |

Tabla 7.5: Resultados Órbita de Referencia VI,  $tol = 10^{-10}$ .

Fijándonos en el error absoluto de cada uno de los parámetros keplerianos, volvemos a obtener los resultados más precisos en MO.

## 7.2.2. Resolución de ecuaciones académicas.

Las funciones que a continuación mostramos, están publicadas en [12]. Para probar la robustez de los métodos que hemos presentado a lo largo de este trabajo vamos a utilizar dos funciones, una de tipo suave y otra con múltiples raíces.

$$(1) f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1, \quad x^* \approx \pm 1,4044916$$

$$(2) g(x) = (\sin^2 x - 2x + 1)^3, \quad x^* \approx 0,714835$$

Debemos notar que para hallar la solución de estas dos funciones hemos utilizado los mismos métodos numéricos que para la determinación de órbitas, con la diferencia de que no hacemos la separación del ya citado artículo de Roy Danchick. Por ese motivo hemos denotado a los métodos según el esquema iterativo utilizado, es decir Newton, DS será Steff (puesto que utiliza el método de Steffensen), DSR es SR, DT es Traub, DTS será TraubSteff puesto que aproximamos la derivada mediante Steffensen y DTSR es TSR.

**Función suave (1), estimación inicial  $x_0 = 0,19$**

|                           | Pfijo       | Newton    | Steff       | SR | Traub       | TS          | TSR         | MO          |
|---------------------------|-------------|-----------|-------------|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>iter</i>               | 216         | 16        | 11          | –  | 21          | 8           | 216         | 8           |
| $\tilde{\rho}$            | 1.0000      | 2.0000    | 2.0000      | –  | 2.9999      | 2.9999      | 2.9999      | 8.0967      |
| $\tilde{I}$               | 0.9980      | 1.4145    | 1.4044      | –  | 1.0804      | 1.1981      | 1.0208      | 1.6813      |
| $\tilde{I}_c$             | 0.9960      | 1.3969    | 1.3091      | –  | 1.1504      | 1.31562     | 1.0360      | 1.1575      |
| <i>error<sub>x*</sub></i> | 1.1663e-201 | 0         | 7.4916e-244 | –  | 3.8645e-351 | 3.8645e-351 | 3.8645e-351 | 1.6971e-108 |
| <i>Tiempo</i>             | 0.035370400 | 0.010040  | 0.012357    | –  | 0.017299    | 0.010503    | 0.283426    | 0.029656    |
| $x^*$                     | 1.4044916   | 1.4044916 | 1.4044916   | –  | -1.4044916  | -1.4044916  | 1.4044916   | 1.4044916   |

Tabla 7.6: Resultados función  $f(x)$ .

A la vista de la Tabla 7.6, debemos señalar que los métodos Traub y TS aún partiendo de la misma estimación inicial convergen a la otra posible solución de  $f(x)$ , es decir a  $x^* \approx -1,4044916$  por lo que no podemos compararlos con el resto de métodos. Entre los que sí convergen a la misma solución, tenemos que aunque MO necesita mayor tiempo computacional converge con el menor número de iteraciones.

**Función con raíces múltiples (2), estimación inicial  $x_0 = 1$**

|                           | Pfijo | Newton   | Steff | SR | Traub      | TS | TSR | MO         |
|---------------------------|-------|----------|-------|----|------------|----|-----|------------|
| <i>iter</i>               | –     | 376      | –     | –  | 270        | –  | –   | 124        |
| $\tilde{\rho}$            | –     | 1.9999   | –     | –  | 2.8759     | –  | –   | 8.0256     |
| $\tilde{I}$               | –     | 1.2536   | –     | –  | 1.4884     | –  | –   | 1.6813     |
| $\tilde{I}_c$             | –     | 1.5969   | –     | –  | 1.2251     | –  | –   | 1.1575     |
| <i>error<sub>x*</sub></i> | –     | 0        | –     | –  | 4.8521e-68 | –  | –   | 4.3127e-23 |
| <i>Tiempo</i>             | –     | 0.236472 | –     | –  | 0.196622   | –  | –   | 0,245894   |
| $x^*$                     | –     | 0.714835 | –     | –  | 0.714835   | –  | –   | 0.714835   |

Tabla 7.7: Resultados función  $g(x)$ .

Aunque no es habitual comparar métodos que hacen uso de derivadas (Newton y Traub) con libres de derivadas (MO) en esta ocasión, tras obtener los resultados de la Tabla 7.7, debemos hacer una excepción puesto que MO rompe con la regla de que los métodos con derivadas suelen ser más estables al hallar la solución que aquellos libres de derivadas, pues consigue con un menor número de iteraciones estimar la solución aunque con un error más elevado que Newton y Traub.

---

## Conclusiones y líneas futuras.

---

### 8.1. Conclusiones.

---

A la vista de los resultados mostrados en la memoria, podemos concluir lo siguiente:

- El uso de PFijo, aumenta el número de iteraciones necesarias en comparación con el resto de métodos, además conforme aumenta la diferencia entre anomalías verdaderas este número también aumenta llegando a no converger para valores mayores de  $45^\circ$ . Por tanto, en comparación con el resto es el que peor prestaciones ofrece.
- La mayor velocidad en cuanto a número de iteraciones y tiempo computacional es la obtenida mediante MO, esto es debido a que es el método de mayor orden de convergencia por lo que teóricamente debe conseguir mayor velocidad y, efectivamente, lo consigue. Además debemos destacar su robustez, ya que como hemos podido observar en las tablas 7.3 y 7.4, es el método al que mayor tolerancia le podemos exigir debido a que es un método óptimo que utiliza tres pasos lo cual ayuda a estabilizar su respuesta.
- En los métodos libres de derivadas hemos comprobado que al aproximar la derivada no estamos perdiendo precisión en la solución y que, dependiendo de la ecuación a resolver nos puede convenir utilizar aquellos en los que  $z_k = x_k + f(x_k)$  (DS y DTS) o  $z_k = x_k - f(x_k)$  (DSR y DTSR).
- En general, podemos decir que aquellos métodos que usan el esquema de Traub, DT, DTS y DTSR son más precisos a la hora de estimar la solución

debido a la robustez que proporciona el hecho de utilizar más de un paso dentro del esquema iterativo.

- Aquellos que calculan la solución siguiendo el esquema iterativo de Newton, Danchick, DS y DSR, no ofrecen lo mejores resultados. Esto es debido a que poseen menor orden de convergencia, dos en contraposición a los tipo Traub que son de orden tres y a MO de orden ocho, y a que son menos estables dado que calculan la solución en un sólo paso.
- En cuanto a la ampliación del rango de anomalías verdaderas, MO mantiene las ventajas del método de Danchick en cuanto a la separación de las observaciones.

---

## 8.2. Líneas futuras.

Al comenzar este trabajo estudiamos el problema de los Dos Cuerpos en una fase primitiva, esto es, no hemos contemplado la interacción que se puede producir entre el satélite, cuya órbita queremos describir, y otros elementos que se encuentren en el espacio, como podrían ser la influencia de la radiación del Sol, el factor de rozamiento con la atmósfera de la Tierra o la proximidad de otros satélites o elementos celestes. Sólo hemos tenido en cuenta la interacción gravitacional entre los dos cuerpos bajo estudio. Esta situación la podríamos solucionar aplicando la teoría de la perturbación, solucionando el problema de los dos cuerpos y considerando que el tercero perturba la posición de los otros dos.

También podría ser interesante extender los métodos obtenidos libres de derivadas a sistemas de ecuaciones no lineales, en los que en lugar de aproximar la derivada de nuestra única ecuación pudiésemos aproximar las matrices jacobianas facilitando así el diseño de métodos iterativos para sistemas de ecuaciones.

Además sería útil continuar estudiando en qué ocasiones nos conviene usar en la aproximación de Steffensen generalizando al caso de  $z_k = x_k + \gamma f(x_k)$ , siendo  $\gamma$  un parámetro real cualquiera ya que como hemos visto en las tablas del capítulo anterior el cambio de signo  $\gamma = -1$  proporciona resultados con más o menos error y con distinto número de iteraciones.

Por último, vistos los buenos resultados que ofrece el método de alto orden de convergencia sería conveniente continuar en el diseño de este tipo de métodos manteniendo su optimalidad.

# **ANEXOS**

---

# Cálculo de los parámetros orbitales

---

## A.1. Órbita de referencia 1

---

```

Clear["Global`*"]
M=1000;
i=SetAccuracy[15,M];
w=SetAccuracy[10,M];
Omega=SetAccuracy[30,M];

a=SetAccuracy[4,M];
ex=SetAccuracy[0.2,M];
i=SetAccuracy[i*2*Pi/360,M];
w=SetAccuracy[w*2*Pi/360,M];
tol=SetAccuracy[1,M];
Omega=SetAccuracy[Omega*2*Pi/360,M];
incrt=SetAccuracy[0.01044412*24*60,M];
k=SetAccuracy[0.07436574,M]; %unidades sqrt (e.r.)^3/min
mhu=SetAccuracy[1,M]; %unidades e.m.
n=SetAccuracy[(Sqrt[mhu]*k)/(a^(3/2)),M];
M1=SetAccuracy[0,M];
M2=SetAccuracy[n*incrt,M];
at=SetAccuracy[a*6378.15,M];
h2=SetAccuracy[mhu*at*(1-ex^2),M];
p=SetAccuracy[h2/mhu,M];

% calcxy con M1---> posicion inicial

Eant=SetAccuracy[M1,M];

```

```

E1=SetAccuracy[1,M];
While[tol>=10^-200,
E1=SetAccuracy[M1+ex*Sin[Eant],M];
tol=SetAccuracy[Abs[Eant-E1],M];
Eant=SetAccuracy[E1,M];]
rmod1=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E1]),M];
vmod1=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod1)-(1/at))],M];
xr1=SetAccuracy[at*(Cos[E1]-ex),M];
yr1=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E1],M];
n1=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv1=SetAccuracy[-(n1*at*Sin[E1]/(1-ex*Cos[E1])),M];
yv1=SetAccuracy[((n1*at*Sqrt[1-ex^2]*Cos[E1])/(1-ex*Cos[E1])),M];
% calcxy con M2--> posicion2

Eant1=SetAccuracy[M2,M];
E2=SetAccuracy[1,M];
tol2=SetAccuracy[1,M];
While[tol2>=10^-200,
E2=SetAccuracy[M2+ex*Sin[Eant1],M];
tol2=Abs[Eant1-E2];
Eant1=SetAccuracy[E2,M];]
rmod2=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E2]),M];
vmod2=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod2)-(1/at))],M];
xr2=SetAccuracy[at*(Cos[E2]-ex),M];
yr2=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E2],M];
n2=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv2=SetAccuracy[-(n2*at*Sin[E2]/(1-ex*Cos[E2])),M];
yv2=SetAccuracy[((n2*at*Sqrt[1-ex^2]*Cos[E2])/(1-ex*Cos[E2])),M];

% efemerides
P={0,0,0};
Q={0,0,0};
P[[1]]=SetAccuracy[Cos[w]*Cos[Omega]-Sin[w]*Sin[Omega]*Cos[i],M];
P[[2]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[Omega]+Sin[w]*Cos[Omega]*Cos[i],M];
P[[3]]=SetAccuracy[Sin[w]*Sin[i],M];*)

Q[[1]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Cos[Omega]-Cos[w]*Sin[Omega]*Cos[i],M];
Q[[2]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Sin[Omega]+Cos[w]*Cos[Omega]*Cos[i],M];
Q[[3]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[i],M];*)

r11=SetAccuracy[xr1*P+yr1*Q,M];
r21=SetAccuracy[xr2*P+yr2*Q,M];
RT=SetAccuracy[6378.15,M];
r1=SetAccuracy[r11/RT,M];
r2=SetAccuracy[r21/RT,M];
%clculo de los parmetros de Gauss
tao = SetAccuracy[k*incrt, M];

```

```

modr1 = SetAccuracy[Sqrt[Dot[r1, r1]], M];
modr2 = SetAccuracy[Sqrt[Dot[r2, r2]], M];
cosver = SetAccuracy[Dot[r2, r1]/(modr1*modr2), M];
Wz = SetAccuracy[
  Norm[Cross[r1, r2]]/(modr1*modr2*
    Norm[Cross[r2, r1]]/(modr1*modr2)), M];
If[Wz >= 0,
  sinver = SetAccuracy[((r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])/(Abs[
    r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])])*(Sqrt[1 - cosver^2]), M];,
  sinver =
  SetAccuracy[-((r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])/(Abs[
    r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])])*(Sqrt[1 - cosver^2]),
  M];
]
AnomVer = SetAccuracy[ArcTan[cosver, sinver], M];
l = SetAccuracy[((modr1 + modr2)/(4*Sqrt[modr1*modr2])*
  Cos[AnomVer/2])) - (1/2), M];
m = SetAccuracy[(mhu*tao^2)/(2*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2])^3, M];

```

## A.2. Órbita de referencia 3

---

```

Clear["Global`*"]
M=1000;
incrt=SetAccuracy[0.01316924*24*60,M];
a=SetAccuracy[2,M];
ex=SetAccuracy[0.05,M];
i=SetAccuracy[60,M];
Omega=SetAccuracy[120,M];
w=SetAccuracy[150,M];

i=SetAccuracy[i*2*Pi/360,M];
w=SetAccuracy[w*2*Pi/360,M];
tol=SetAccuracy[1,M];
Omega=SetAccuracy[Omega*2*Pi/360,M];
incrt=SetAccuracy[0.01316924*24*60,M];
k=SetAccuracy[0.07436574,M] ; %unidades sqrt (e.r.)^3/min
mhu=SetAccuracy[1,M]; %unidades e.m.
n=SetAccuracy[(Sqrt[mhu]*k)/(a^(3/2)),M];
M1=SetAccuracy[0,M];
M2=SetAccuracy[n*incrt,M];
at=SetAccuracy[a*6378.15,M];
h2=SetAccuracy[mhu*at*(1-ex^2),M];

```

```

p=SetAccuracy[h2/mhu,M];
%%calcx con M1--> posicion inicial
Eant=SetAccuracy[M1,M];
E1=SetAccuracy[1,M];
While[tol>=10^-200,
E1=SetAccuracy[M1+ex*Sin[Eant],M];
tol=SetAccuracy[Abs[Eant-E1],M];
Eant=SetAccuracy[E1,M];]
rmod1=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E1]),M];
vmod1=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod1)-(1/at))],M];
xr1=SetAccuracy[at*(Cos[E1]-ex),M];
yr1=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E1],M];
n1=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv1=SetAccuracy[-(n1*at*Sin[E1]/(1-ex*Cos[E1])),M];
yv1=SetAccuracy[((n1*at*Sqrt[1-ex^2]*Cos[E1])/(1-ex*Cos[E1])),M];
%%calcx con M2--> posicion2

Eant1=SetAccuracy[M2,M];
E2=SetAccuracy[1,M];*)
tol2=SetAccuracy[1,M];
While[tol2>=10^-200,
E2=SetAccuracy[M2+ex*Sin[Eant1],M];
tol2=SetAccuracy[Abs[Eant1-E2],M];
Eant1=SetAccuracy[E2,M];]
rmod2=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E2]),M];
vmod2=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod2)-(1/at))],M];
xr2=SetAccuracy[at*(Cos[E2]-ex),M];
yr2=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E2],M];
n2=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv2=SetAccuracy[-(n2*at*Sin[E2]/(1-ex*Cos[E2])),M];
yv2=SetAccuracy[((n2*at*Sqrt[1-ex^2]*Cos[E2])/(1-ex*Cos[E2])),M];

%%femerides
P={0,0,0};
Q={0,0,0};
P[[1]]=SetAccuracy[Cos[w]*Cos[Omega]-Sin[w]*Sin[Omega]*Cos[i],M];
P[[2]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[Omega]+Sin[w]*Cos[Omega]*Cos[i],M];
P[[3]]=SetAccuracy[Sin[w]*Sin[i],M];

Q[[1]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Cos[Omega]-Cos[w]*Sin[Omega]*Cos[i],M];
Q[[2]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Sin[Omega]+Cos[w]*Cos[Omega]*Cos[i],M];
Q[[3]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[i],M];

r13=SetAccuracy[xr1*P+yr1*Q,M];
r23=SetAccuracy[xr2*P+yr2*Q,M];
RT=SetAccuracy[6378.15,M];
r1=SetAccuracy[r13/RT,M];

```

```

r2=SetAccuracy[r23/RT,M];
%clculo de los parmetros de Gauss
tao = SetAccuracy[k*incrt, M];
modr1 = SetAccuracy[Sqrt[Dot[r1, r1]], M];
modr2 = SetAccuracy[Sqrt[Dot[r2, r2]], M];
cosver = SetAccuracy[Dot[r2, r1]/(modr1*modr2), M];
Wz = SetAccuracy[
  Norm[Cross[r1, r2]]/(modr1*modr2*
    Norm[Cross[r2, r1]]/(modr1*modr2)), M];
If[Wz >= 0,
  sinver = SetAccuracy[((r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])/(Abs[
    r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])]*(Sqrt[1 - cosver^2]), M];,
  sinver =
  SetAccuracy[-((r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])/(Abs[
    r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])]*(Sqrt[1 - cosver^2]),
  M];
]
AnomVer = SetAccuracy[ArcTan[cosver, sinver], M];
l = SetAccuracy[((modr1 + modr2)/(4*Sqrt[modr1*modr2])*
  Cos[AnomVer/2])) - (1/2), M];
m = SetAccuracy[(mhu*tao^2)/(2*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2])^3, M];

```

### A.3. Órbita de referencia 6

---

```

Clear["Global`*"]

M=250;
i=SetAccuracy[88,M];
w=SetAccuracy[10,M];
Omega=SetAccuracy[140,M];

a=SetAccuracy[4,M];
ex=SetAccuracy[0.15,M];
i=SetAccuracy[i*2*Pi/360,M];
w=SetAccuracy[w*2*Pi/360,M];
tol=SetAccuracy[1,M];
Omega=SetAccuracy[Omega*2*Pi/360,M];
incrt=SetAccuracy[0.21227310*24*60,M];
k=SetAccuracy[0.07436574,M] ; %unidades sqrt (e.r.)^3/min
mhu=SetAccuracy[1,M]; %unidades e.m.
n=SetAccuracy[(Sqrt[mhu]*k)/(a^(3/2)),M];
M1=SetAccuracy[0,M];

```

```

M2=SetAccuracy[n*incrt,M];
at=SetAccuracy[a*6378.15,M];
h2=SetAccuracy[mhu*at*(1-ex^2),M];
p=SetAccuracy[h2/mhu,M];
%calcxy con M1---> posicion inicial

Eant=SetAccuracy[M1,M];
E1=SetAccuracy[1,M];
While[tol>=10^-200,
E1=SetAccuracy[M1+ex*Sin[Eant],M];
tol=SetAccuracy[Abs[Eant-E1],M];
Eant=SetAccuracy[E1,M];]
rmod1=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E1]),M];
vmod1=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod1)-(1/at))],M];
xr1=SetAccuracy[at*(Cos[E1]-ex),M];
yr1=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E1],M];
n1=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv1=SetAccuracy[-(n1*at*Sin[E1]/(1-ex*Cos[E1])),M];
yv1=SetAccuracy[((n1*at*Sqrt[1-ex^2]*Cos[E1])/(1-ex*Cos[E1])),M];
%calcxy con M2--> posicion2

Eant1=SetAccuracy[M2,M];
E2=SetAccuracy[1,M];
tol2=SetAccuracy[1,M];
While[tol2>=10^-200,
E2=SetAccuracy[M2+ex*Sin[Eant1],M];
tol2=Abs[Eant1-E2];
Eant1=SetAccuracy[E2,M];]
rmod2=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E2]),M];
vmod2=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod2)-(1/at))],M];
xr2=SetAccuracy[at*(Cos[E2]-ex),M];
yr2=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E2],M];
n2=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv2=SetAccuracy[-(n2*at*Sin[E2]/(1-ex*Cos[E2])),M];
yv2=SetAccuracy[((n2*at*Sqrt[1-ex^2]*Cos[E2])/(1-ex*Cos[E2])),M];

%femerides
P={0,0,0};
Q={0,0,0};
P[[1]]=SetAccuracy[Cos[w]*Cos[Omega]-Sin[w]*Sin[Omega]*Cos[i],M];
P[[2]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[Omega]+Sin[w]*Cos[Omega]*Cos[i],M];
P[[3]]=SetAccuracy[Sin[w]*Sin[i],M];

Q[[1]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Cos[Omega]-Cos[w]*Sin[Omega]*Cos[i],M];
Q[[2]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Sin[Omega]+Cos[w]*Cos[Omega]*Cos[i],M];
Q[[3]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[i],M];

```

```

r11=SetAccuracy[xr1*P+yr1*Q,M];
r21=SetAccuracy[xr2*P+yr2*Q,M];
RT=SetAccuracy[6378.15,M];
r1=SetAccuracy[r11/RT,M];
r2=SetAccuracy[r21/RT,M];
%clculo de los parmetros de Gauss
tao = SetAccuracy[k*incrt, M];
modr1 = SetAccuracy[Sqrt[Dot[r1, r1]], M];
modr2 = SetAccuracy[Sqrt[Dot[r2, r2]], M];
cosver = SetAccuracy[Dot[r2, r1]/(modr1*modr2), M];
Wz = SetAccuracy[
  Norm[Cross[r1, r2]]/(modr1*modr2*
    Norm[Cross[r2, r1]]/(modr1*modr2)), M];
If[Wz >= 0,
  sinver = SetAccuracy[((r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])/(Abs[
    r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])]*(Sqrt[1 - cosver^2]), M];,
  sinver =
    SetAccuracy[-((r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])/(Abs[
      r1[[1]]*r2[[2]] - r2[[1]]*r1[[2]])]*(Sqrt[1 - cosver^2]),
    M];
]
AnomVer = SetAccuracy[ArcTan[cosver, sinver], M];
l = SetAccuracy[((modr1 + modr2)/(4*Sqrt[modr1*modr2]*
  Cos[AnomVer/2])) - (1/2), M];
m = SetAccuracy[(mhu*tao^2)/(2*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2])^3, M];

```

---

## Métodos Iterativos

---

### B.1. Método de Gauss, PFijo

---

```

y=1;
While[tol>=10^-100,
  x=SetAccuracy[(m/y^2)-1,M];
  cosE=SetAccuracy[1-2*x,M];
  sinE=SetAccuracy[Sqrt[4*x*(1-x)],M];
  difE2=SetAccuracy[ArcTan[cosE,sinE],M];
  X=SetAccuracy[(difE2^2-Sin[difE2^2])/Sin[difE2]^3,M];
  y=SetAccuracy[1+X*(1+x),M];
  tol=SetAccuracy[Abs[yant-y],M];
  yant=y;
  iter=iter+1;
]

```

```

a=SetAccuracy[((tao*Sqrt[mhu])/(2*y*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2]*sinE))^2,M];
f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[difE2^2]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(difE2^2-Sin[difE2^2]),M];
velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M];

```

### B.2. Método de Danchick calculando los iterados con el método de Newton, Danchick

---

```

theta[x_]=ArcTan[1-2*x,2*Sqrt[x*(1-x)]];
X[x_]=(2*theta[x]-Sin[2*theta[x]])/Sin[theta[x]]^3;
yx[x_]=1+X[x]*(1+x);
F[x_]=x-m/yx[x]^2+1;
dF[x_]=D[F[x],x];
iterF=0;
If[cosver<0,
  x0=1/2;
  While[(Abs[xvec[[iterF-1]]-x0]+Abs[F[x0]])>=10^-100,
    x0=x0-F[x0]/dF[x0];
    iterF=iterF+1;];
  xsol=x0;
  ysol=yx[x0];
  thetasol=theta[x0];
];
iterG=0;
xg[y_]=m/y^2-1;
thetag[y_]=ArcTan[1-2*xg[y],2*Sqrt[xg[y]*(1-xg[y)]]];
Xg[y_]=(2*thetag[y]-Sin[2*thetag[y]])/Sin[thetag[y]]^3;
G[y_]=y-1-Xg[y]*(1+xg[y]);
dG[y_]=D[G[y],y];
If[cosver>=0,
  y0=(Sqrt[m/(1+1)]+Sqrt[m/1])/2;
  While[(Abs[yvec[[iterG-1]]-y0]+Abs[G[y0]])>=10^-100,
    y0=y0-G[y0]/dG[y0];
    iterG=iterG+1;];
  ysol=y0;
  xsol=xg[ysol];
  thetasol=thetag[ysol];
];
a=SetAccuracy[((tao*Sqrt[mhu])/(2*ysol*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2]*Sin[thetasol]));
f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[thetasol*2]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(thetasol*2-Sin[thetasol*2]),M];
velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M]

```

### B.3. Método de Danchick libre de derivadas con

$$z_k = x_k + f(x_k), \text{ DS}$$

```

theta[x_]=ArcTan[1-2*x,2*Sqrt[x*(1-x)]];
X[x_]=(2*theta[x]-Sin[2*theta[x]])/Sin[theta[x]]^3;
yx[x_]=1+X[x]*(1+x);
F[x_]=x-m/yx[x]^2+1;

```

```

dF[x_]=(F[x+F[x]]-F[x])/F[x];
iterF=0;
If[cosver<0,
  x0=1/2;
  While[(Abs[xvec[[iterF-1]]-x0]+Abs[F[x0]])>=10^-100,
    x0=x0-F[x0]/dF[x0];
    iterF=iterF+1;];
  xsol=x0;
  ysol=yx[x0];
  thetasol=theta[x0];
];
iterG=0;
xg[y_]=m/y^2-1;
thetag[y_]=ArcTan[1-2*xg[y],2*Sqrt[xg[y]*(1-xg[y])]];
Xg[y_]=(2*thetag[y]-Sin[2*thetag[y]])/Sin[thetag[y]]^3;
G[y_]=y-1-Xg[y]*(1+xg[y]);
dG[y_]=(G[y+G[y]]-G[y])/G[y];
If[cosver>=0,
  y0=(Sqrt[m/(1+1)]+Sqrt[m/1])/2;
  While[(Abs[yvec[[iterG-1]]-y0]+Abs[G[y0]])>=10^-100,
    y0=y0-G[y0]/dG[y0];
    iterG=iterG+1;];
  ysol=y0;
  xsol=xg[ysol];
  thetasol=thetag[ysol];
];
a=SetAccuracy[(tao*Sqrt[mhu])/(2*ysol*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2]*Sin[thetasol]);
f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[thetasol*2]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(thetasol*2-Sin[thetasol*2]),M];
velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M]

```

## B.4. Método de Danckwicks libre de derivadas con

$$z_k = x_k - f(x_k), \text{DSR}$$

```

theta[x_]=ArcTan[1-2*x,2*Sqrt[x*(1-x)]];
X[x_]=(2*theta[x]-Sin[2*theta[x]])/Sin[theta[x]]^3;
yx[x_]=1+X[x]*(1+x);
F[x_]=x-m/yx[x]^2+1;
dF[x_]=(F[x-F[x]]-F[x])/F[x];
iterF=0;
If[cosver<0,
  x0=1/2;

```

```

While[ (Abs[xvec[[iterF-1]]-x0]+Abs[F[x0]]) >= 10^-100,
  x0=x0-F[x0]/dF[x0];
  iterF=iterF+1;];
xsol=x0;
ysol=yx[x0];
thetasol=theta[x0];
];
iterG=0;
xg[y_]=m/y^2-1;
thetag[y_]=ArcTan[1-2*xg[y], 2*Sqrt[xg[y]*(1-xg[y])]];
Xg[y_]=(2*thetag[y]-Sin[2*thetag[y]])/Sin[thetag[y]]^3;
G[y_]=y-1-Xg[y]*(1+xg[y]);
dG[y_]=(G[y-G[y]]-G[y])/G[y];
If[cosver>=0,
  y0=(Sqrt[m/(1+1)]+Sqrt[m/1])/2;
  While[ (Abs[yvec[[iterG-1]]-y0]+Abs[G[y0]]) >= 10^-100,
    y0=y0-G[y0]/dG[y0];
    iterG=iterG+1;];
  ysol=y0;
  xsol=xg[ysol];
  thetasol=thetag[ysol];
];
a=SetAccuracy[(tao*Sqrt[mhu])/(2*ysol*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2]*Sin[thetasol])];
f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[thetasol*2]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(thetasol*2-Sin[thetasol*2]),M];
velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M]

```

## B.5. Método de Danchick calculando los iterados con el método de Traub, DT

---

```

theta[x_]=ArcTan[1-2*x, 2*Sqrt[x*(1-x)]];
X[x_]=(2*theta[x]-Sin[2*theta[x]])/Sin[theta[x]]^3;
yx[x_]=1+X[x]*(1+x);
F[x_]=x-m/yx[x]^2+1;
dF[x_]=D[F[x],x];
iterF=0;
If[cosver<0,
  x0=1/2;
  While[ (Abs[xvec[[iterF-1]]-x0]+Abs[F[x0]]) >= 10^-100,
    Fx0=F[x0];
    dFx0=dF[x0];
    yk=x0-(Fx0/dFx0);

```

```

        x0=x0-(F[yk]+Fx0)/dFx0;
        iterF=iterF+1;];
        xsol=x0;
        ysol=yx[x0];
        thetasol=theta[x0];
];
iterG=0;
xg[y_]=m/y^2-1;
thetag[y_]=ArcTan[1-2*xg[y],2*Sqrt[xg[y]*(1-xg[y])]];
Xg[y_]=(2*thetag[y]-Sin[2*thetag[y]])/Sin[thetag[y]]^3;
G[y_]=y-1-Xg[y]*(1+xg[y]);
dG[y_]=D[G[y],y];
If[cosver>=0,
    y0=(Sqrt[m/(1+1)]+Sqrt[m/1])/2;
    While[(Abs[yvec[[iterG-1]]-y0]+Abs[G[y0]])>=10^-100,
        Gy0=G[y0];
        dGy0=dG[y0];
        xk=y0-(Gy0/dGy0);
        y0=y0-(Gy0+G[xk])/dGy0;
        iterG=iterG+1;];
    ysol=y0;
    xsol=xg[ysol];
    thetasol=thetag[ysol];
];
a=SetAccuracy[(tao*Sqrt[mhu])/(2*ysol*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2]*Sin[thetasol]);
f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[thetasol*2]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(thetasol*2-Sin[thetasol*2]),M];
velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M]

```

## B.6. Método de Danckwicks libre de derivadas con

$$z_k = x_k + f(x_k), \text{ DTS}$$

```

theta[x_]=ArcTan[1-2*x,2*Sqrt[x*(1-x)]];
X[x_]=(2*theta[x]-Sin[2*theta[x]])/Sin[theta[x]]^3;
yx[x_]=1+X[x]*(1+x);
F[x_]=x-m/yx[x]^2+1;
dF[x_]=(F[x+F[x]]-F[x])/F[x];
iterF=0;
If[cosver<0,
    x0=1/2;
    While[(Abs[xvec[[iterF-1]]-x0]+Abs[F[x0]])>=10^-100,
        Fx0=F[x0];

```

```

        dFx0=dF[x0];
        yk=x0-(Fx0/dFx0);
        x0=x0-(F[yk]+Fx0)/dFx0;
        iterF=iterF+1;];
        xsol=x0;
        ysol=yx[x0];
        thetasol=theta[x0];
];
iterG=0;
xg[y_]=m/y^2-1;
thetag[y_]=ArcTan[1-2*xg[y],2*Sqrt[xg[y]*(1-xg[y])]];
Xg[y_]=(2*thetag[y]-Sin[2*thetag[y]])/Sin[thetag[y]]^3;
G[y_]=y-1-Xg[y]*(1+xg[y]);
dG[y_]=(G[y+G[y]]-G[y])/G[y];
If[cosver>=0,
    y0=(Sqrt[m/(1+1)]+Sqrt[m/1])/2;
    While[(Abs[yvec[[iterG-1]]-y0]+Abs[G[y0]])>=10^-100,
        Gy0=G[y0];
        dGy0=dG[y0];
        xk=y0-(Gy0/dGy0);
        y0=y0-(Gy0+G[xk])/dGy0;
        iterG=iterG+1;];
    ysol=y0;
    xsol=xg[ysol];
    thetasol=thetag[ysol];
];
a=SetAccuracy[(tao*Sqrt[mhu])/(2*ysol*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2]*Sin[thetasol]);
f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[thetasol*2]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(thetasol*2-Sin[thetasol*2]),M];
velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M]

```

## B.7. Método de Danckwiler libre de derivadas con

$$z_k = x_k - f(x_k), \text{DTSR}$$

```

theta[x_]=ArcTan[1-2*x,2*Sqrt[x*(1-x)]];
X[x_]=(2*theta[x]-Sin[2*theta[x]])/Sin[theta[x]]^3;
yx[x_]=1+X[x]*(1+x);
F[x_]=x-m/yx[x]^2+1;
dF[x_]=(F[x-F[x]]-F[x])/F[x];
iterF=0;
If[cosver<0,
    x0=1/2;

```

```

While[ (Abs[xvec[[iterF-1]]-x0]+Abs[F[x0]])>=10^-100,
  Fx0=F[x0];
  dFx0=dF[x0];
  yk=x0-(Fx0/dFx0);
  x0=x0-(F[yk]+Fx0)/dFx0;
  iterF=iterF+1;];
xsol=x0;
ysol=yx[x0];
thetasol=theta[x0];
];
iterG=0;
xg[y_]=m/y^2-1;
thetag[y_]=ArcTan[1-2*xg[y],2*Sqrt[xg[y]*(1-xg[y])]];
Xg[y_]=(2*thetag[y]-Sin[2*thetag[y]])/Sin[thetag[y]]^3;
G[y_]=y-1-Xg[y]*(1+xg[y]);
dG[y_]=(G[y-G[y]]-G[y])/G[y];
If[cosver>=0,
  y0=(Sqrt[m/(1+1)]+Sqrt[m/1])/2;
  While[ (Abs[yvec[[iterG-1]]-y0]+Abs[G[y0]])>=10^-100,
    Gy0=G[y0];
    dGy0=dG[y0];
    xk=y0-(Gy0/dGy0);
    y0=y0-(Gy0+G[xk])/dGy0;
    iterG=iterG+1;];
  ysol=y0;
  xsol=xg[ysol];
  thetasol=thetag[ysol];
];
a=SetAccuracy[ ((tao*Sqrt[mhu])/(2*ysol*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2]*Sin[thetasol]))];
f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[thetasol*2]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(thetasol*2-Sin[thetasol*2]),M];
velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M]

```

## B.8. Método Óptimo, MO

---

```

theta[x_]=ArcTan[1-2*x,2*Sqrt[x*(1-x)]];
X[x_]=(2*theta[x]-Sin[2*theta[x]])/Sin[theta[x]]^3;
yx[x_]=1+X[x]*(1+x);
F[x_]=x-m/yx[x]^2+1;
dF[x_]=(F[x+F[x]^3]-F[x])/((x+F[x]^3)-x);
iterF=0;
If[cosver<0,

```

```

x0=0.4;
While[ (Abs[xvec[[iterF-1]]-x0]+Abs[F[x0]]) >=10^-100,
  y=SetAccuracy[x0-F[x0]/dF[x0],M];
  Fy=SetAccuracy[F[y],M];
  z=SetAccuracy[x0+F[x0]^3,M];
  Fz=SetAccuracy[F[z],M];
  mh=SetAccuracy[Fy/Fz,M];
  H=SetAccuracy[1+mh,M];
  Fyz=SetAccuracy[(Fy-Fz)/(y-z),M];
  ww=SetAccuracy[y-H*Fy/Fyz,M];
  Fw=SetAccuracy[F[ww],M];
  Fwy=SetAccuracy[(Fw-Fy)/(ww-y),M];
  Fwz=SetAccuracy[(Fw-Fz)/(ww-z),M];
  nu=SetAccuracy[Fwy/Fwz,M];
  Kf=-1/4+(-3/2+nu)^2-2*(-1+nu)^3+nu;
  x0=SetAccuracy[ww-Kf*Fw/Fwy,M];
  x0=SetAccuracy[Re[x0],M];
  iterF=iterF+1;];
ysol=yx[x0];
thetasol=theta[x0];
]
iterG=0;
xg[y_]=m/y^2-1;
thetag[y_]=ArcTan[1-2*xg[y],2*Sqrt[xg[y]*(1-xg[y])]];
Xg[y_]=(2*thetag[y]-Sin[2*thetag[y]])/Sin[thetag[y]]^3;
G[y_]=y-1-Xg[y]*(1+xg[y]);
dG[y_]=(G[y+G[y]^3]-G[y])/((y+G[y]^3)-y);
If[cosver>=0,
  y0=(Sqrt[m/(1+1)]+Sqrt[m/1])/2;
  While[ (Abs[yvec[[iterG-1]]-y0]+Abs[G[y0]]) >=10^-100,
    yy=SetAccuracy[y0-G[y0]/dG[y0],M];
    z=SetAccuracy[y0+G[y0]^3,M];
    Gy=SetAccuracy[G[yy],M];
    Gz=SetAccuracy[G[z],M];
    mh=SetAccuracy[Gy/Gz,M];
    H=1+mh;
    Gyz=SetAccuracy[(Gz-Gy)/(z-yy),M];
    ww=SetAccuracy[yy-H*Gy/Gyz,M];
    Gw=G[ww];
    Gwy=SetAccuracy[(Gw-Gy)/(ww-yy),M];
    Gwz=SetAccuracy[(Gw-Gz)/(ww-z),M];
    nu=SetAccuracy[Gwy/Gwz,M];
    Kf=-1/4+(-3/2+nu)^2-2*(-1+nu)^3+nu;
    y0=SetAccuracy[ww-Kf*Gw/Gwy,M];
    y0=SetAccuracy[Re[y0],M];
    iterG=iterG+1;];
ysol=y0;

```

```

        xsol=xg[ysol];
        thetasol=thetag[ysol];
];
a=SetAccuracy[ ((tao*Sqrt[mhu]) / (2*ysol*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2]*Sin[thetasol]) )
f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[thetasol*2]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(thetasol*2-Sin[thetasol*2]),M];
velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M]

```

---

## Programas auxiliares

---

### C.1. Cálculo de los parámetros keplerianos a partir de posición y velocidad

---

```

tanresta=SetAccuracy[1,M];
Omegar=SetAccuracy[0,M];
rcuad=Dot[r1,r1];
modr=Sqrt[rcuad];
rporr=Dot[r1,velocidad];
Vcuad=Dot[velocidad,velocidad];
modV=Sqrt[Vcuad];
cosphi=(rporr)/(modr*modV);
ar=1/((2/modr)-(Vcuad/mhu));
er=Sqrt[(1-modr/ar)^2+(rporr/Sqrt[(mhu*ar)^2])];
h=Cross[r1,velocidad];
cosi=(r1[[1]]*velocidad[[2]]-r1[[2]]*velocidad[[1]])/(Sqrt[mhu*ar*(1-er^2)]);
ir=ArcCos[cosi];
Omegar=ArcTan[-(r1[[2]]*velocidad[[3]]-r1[[3]]*velocidad[[2]])/(r1[[3]]*velocidad[[1]]);
modh=Sqrt[Dot[h,h]];
hx1=modh*Sin[Omegar]*Sin[ir];
hx2=modh*Sin[Omegar+Pi]*Sin[ir];
If[(Abs[(hx1-h[[1]])])<=10^-6,
    Omegar=Omegar;,
    Omegar=Omegar+Pi;];
p=ar*(1-er^2);
cE=(1-modr/ar)/er; sE=(rporr/Sqrt[mhu*ar])/er; Er=ArcTan[cE,sE]; E2r=E1+Er;
cnu=(ar*Cos[Er]+ar*er)/modr;
snu=ar*Sqrt[1-er^2]*Sin[Er]/modr;

```

```

anomVer=ArcTan[cnu,snu];
anomVer2=AnomVer+anomVer;
If[ir==0 || ir==Pi,
    sinsuma=(r1[[2]]*Cos[Omegar]-r1[[1]]*Sin[Omegar])/modr;,
    sinsuma=r1[[3]]/(modr)/Sin[ir];];
cossuma=(r1[[1]]*Cos[Omegar]+r1[[2]]*Sin[Omegar])/modr;
suma=ArcTan[cossuma,sinsuma];
wr=suma-anomVer;
Mr=Er-er*Sin[Er];
Mr=Mr*360/2/Pi;
ir=ir*360/2/Pi;
wr=wr*360/2/Pi;
Omegar=Omegar*360/2/Pi;
nr=k*Sqrt[mhu/a^3];
t1=0;t2=incrt;
T=(er*(Sin[E2r]+Sin[Er])-E2r-Er)/2/nr+(t2+t1)/2;
T=T/60/24;

```



---

## Bibliografía

- [1] A. Cordero, J. R. Torregrosa, A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011) 7653-7659.
- [2] A. Cordero, J.R. Torregrosa. Variants of Newton's Method using fifth-order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation* 190 (2007) 686-698.
- [3] J.M. Ortega, W. G. Rheinboldt, *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [4] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, A variant's of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Appl. Math. Lett.* 13 (8) (2000) 87-93.
- [5] A. M. Ostrowski, *Solutions of Equations and Systems of Equations*. Academic, New York, 1966.
- [6] N. Romero, J. A. Ezquerro, M. A. Hernández, Aproximación de soluciones de algunas soluciones integrales de Hammerstein mediante métodos iterativos tipo Newton. XXI Congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones, Universidad de Castilla la Mancha, 2009.

- [7] Roy Danchick, Gauss meets Newton again: How to make Gauss orbit determination from two position vectors more efficient and robust with Newton-Raphson iterations, *Applied Mathematics and Computation* 195 (2008) 364-375.
- [8] Pedro Ramon Escobal, *Methods of Orbit Determination*, Krieger Publishing Company, 1975.
- [9] J.F. Steffensen, Remarks on Iteration, *Skand Aktuarietidsrk* 16 (1933) 64-72.
- [10] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, New York, Chelsea Publishing Company, 1982.
- [11] H. T. Kung, J. F. Traub, Optimal order of one-point and multi-point iteration, *Applied Mathematics and Computation* 21 (1974) 643-651.
- [12] A. Cordero, J. R. Torregrosa, A technique to design derivative-free methods for nonlinear equations, *Proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2013, 24-27 June, 2013*. ISBN: 978-84-616-2723-3
- [13] V. Ramírez, P. González, M. Pasadas, D. Barrera. *Introducción a Matemática y primeras aplicaciones*. Granada, Proyecto Sur, 1997.
- [14] F.I. Chicharro. *Dimensión fractal de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales. Aplicación a la determinación de órbitas de satélites artificiales*. Valencia, Proyecto final de carrera por la UPV, Septiembre 2011.
- [15] R.D. Korgi. *El universo Latex*. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos, 2003.
- [16] A. Cordero, M. J. Martínez. *Mecánica orbital: movimiento de satélites*. Libro CD. Ref.2004.676 Ed. UPV.
- [17] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, New York, 1937.