REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

El impacto del análisis funcional en algunos problemas del análisis

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. JOSÉ BONET SOLVES

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

EL DÍA 23 DE ABRIL DE 2008

MADRID
Domicilio de la Academia
Valverde, 22

Dedicado, por supuesto, a la memoria de mi padre

Índice

DISCURSO
DEL
EXCMO. SR. D. JOSÉ BONET SOLVES

El impacto del análisis funcional en algunos problemas del análisis

1. Introducción

Excelentísimo Señor Presidente,
Excelentísimos Señores Académicos,
Señoras y Señores,

En primer lugar quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento a los miembros de esta Real Academia de Ciencias por el gran honor que me han concedido al haber confiado en mí para compartir sus tareas como miembro numerario. Soy consciente de la enorme responsabilidad que he contraído. Confío que, con la ayuda de todos ustedes, pueda contribuir con mi esfuerzo y dedicación a la vida de la Real Academia de Ciencias en la medida de mis posibilidades. Les aseguro que haré cuanto esté en mi mano para tratar de responder adecuadamente a las expectativas que ustedes han tenido la amabilidad de depositar en mí.

Desde 1994 he venido colaborando con las actividades de esta institución como académico correspondiente. Mi primer trabajo científico se publicó en 1980 en la revista de esta Real Academia, y posteriormente he publicado otros y colaborado muy activamente con la revista. Son miembros de esta institución muchos científicos que admiro, respeto y de los que he aprendido mucho a lo largo de mi carrera. Debo mencionar a Don Manuel Valdivia, que fue el director de mi tesis doctoral, a quien considero mi maestro, y que tanto ha influido en mi manera de ver las matemáticas y la investigación, y a Don Manuel López Pellicer, con quien he tenido la suerte de trabajar en la Universidad Politécnica de Valencia. Era algo impensable, cuando eran mis profesores en el último curso de Ciencias Matemáticas en la Universidad de Valencia en 1977, que tendría la oportunidad de compartir un honor como éste con ellos.

Vengo a ocupar la vacante dejada por el ilustre Profesor Miguel de Guzmán Ozamiz, científico y humanista, que fue uno de los matemáticos españoles más importantes e influyentes del siglo pasado. Él ostentaba la medalla número 4.

Es a la vez muy fácil y muy difícil decir unas palabras sobre Don Miguel de Guzmán y sobre su papel en esta Real Academia. Es muy fácil porque se han escrito muchos artículos recientemente sobre su persona y sobre su trabajo. Y es muy difícil porque es imposible en unos minutos y en unas líneas hacer justicia a su labor y a su impacto en las matemáticas, su investigación y su docencia en nuestro país.

Mucho antes de tener la suerte de conocer personalmente a Don Miguel de Guzmán había leído algunos de sus libros. Concretamente, sus textos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias [78] y su texto sobre integración [79] eran utilizados por los alumnos en nuestros estudios de matemáticas. Puesto que era aficionado a la matemática recreativa leí con mucho gusto varios de los libros de Guzmán. Cuando estudié con cuidado el libro de Rudin "Real and Complex Analysis" [138], uno de esos textos fundamentales en la formación de los analistas de mi generación, descubrí una cita a un artículo de Miguel de Guzmán de 1972; ver página 435 de [138]. Debo confesar que aquello fue una grata sorpresa para mí hace ya más de 30 años: un matemático extranjero citando a un autor español. Claro, yo no conocía aún en aquel momento la relevancia del trabajo de Guzmán. Años más tarde, en 1996 impartí en la Universidad Politécnica de Valencia un curso de doctorado sobre dinámica discreta y fractales, que hemos repetido desde entonces. El estupendo libro de Guzmán, Martín, Morán y Reyes [82] sobre estructuras fractales me fue de gran ayuda.

Miguel de Guzmán nació en Cartagena en 1936. Comenzó sus estudios de Ingeniería Industrial en Bilbao, pero los abandonó para completar la licenciatura en Filosofía en Munich (Alemania) en 1961. Miguel era un humanista, con una cultura muy amplia. Sin duda el impacto en él de Alemania, en la que las secuelas de la guerra eran visibles por todas partes, le influyó poderosamente. Regresó a Madrid, donde acabó Matemáticas en 1965. Ese año el profesor Alberto Calderón visitó Madrid e invitó a Miguel a trabajar en Chicago en la prestigiosa escuela de análisis armónico e integrales singulares de Calderón y Zygmund. Guzmán presentó su tesis doctoral en la Universidad de Chicago, bajo la dirección de Calderón, en 1968 y volvió a la Universidad Complutense de Madrid en 1969. En 1982 aceptó una plaza en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid, pero regresó por razones personales a la Universidad Complutense dos años después. En 1975 y 1981 publicó dos monografías [77, 80], que fueron fuente de inspiración para especialistas, y aún son una referencia para estudiantes e investigadores en análisis armónico. Guzmán dirigió quince excelentes tesis doctorales, y su influencia en la investigación y la docencia de las Matemáticas en España en los últimos veinticinco años ha sido inmensa.

Desde el principio de los años 1980, la docencia de las Matemáticas a todos los niveles se convirtió en el centro de la mayoría de los proyectos emprendidos por el profesor Guzmán. Fue presidente de la International Commission on Mathematical Instruction ICMI, la asociación mundial de profesores de Matemáticas, desde 1991 a 1998, y publicó excelentes libros de texto de enseñanza media y artículos acerca de educación matemática. No puedo resistir la tentación de repetir aquí unas palabras de Miguel en una entrevista aparecida en Cuadernos de Pedagogía en el año 2000, y reproducida en [1], acerca del nivel de los alumnos que llegan a la Universidad, con las que estoy profundamente de acuerdo:

> *El nivel ha bajado mucho. A mi juicio, las causas del fracaso son dos: que los niveles con los que llega el alumnado son malos y que los profesores que los reciben no hacen lo que debieran. Olvídate de quejarte, hay que coger a los alumnos donde están y tirar de ellos hacia adelante; entrenarlos a partir de ahí, ¿que van a bajar mucho los niveles? Pues mira, a ti lo que la sociedad te pide es que subas el nivel de los alumnos que llegan.*

Esa es verdaderamente nuestra misión como educadores.

Miguel de Guzmán fue elegido el 23 de junio de 1982 para ocupar la medalla número 4 de la Real Academia de Ciencias. Ingresó en esta Academia a los 47 años, en la sesión solemne celebrada el 23 de marzo de 1983, leyendo el discurso de ingreso "Impactos del Análisis Armónico" [81], una auténtica obra de arte. Fue Secretario de la Sección de Exactas desde 1984 hasta 1992 y colaboró siempre en muchas actividades de la Academia. En 1993 pronunció el discurso de inauguración del curso 1993/94 "El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura". Pocas personas como él, con una formación humanista y científica, podían ofrecer una visión tan integradora. Desde que Guzmán dejó la presidencia de ICMI en 1998, intensificó su participación en las actividades de la Academia, por ejemplo, en las conferencias del Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica. Les recomiendo fervientemente la lectura del artículo [83] de Miguel de Guzmán sobre los caminos de la Matemática hacia el futuro, publicado por la Real Academia con ocasión del Año 2000 de las Matemáticas. A partir de entonces su actividad central fue el diseño y puesta en funcionamiento del Programa de la Real Academia de Ciencias "Detección y estímulo del talento matemático". Este programa se ha convertido en una de las actividades centrales de la Academia.

Desde mi entrada como miembro correspondiente en 1994 tuve la fortuna de poder relacionarme personalmente con Miguel. En 2001 tuvo la amabilidad de aceptar mi invitación para impartir una conferencia en las Jornadas "Las Matemáticas y sus Aplicaciones, un Reto a la Enseñanza Actual", dirigidas a profesorado de enseñanza media, que organicé en Valencia en enero de 2002. Su conferencia "Descubrimiento y Demostración con Derive en Geometría" fue un gran éxito, ya que era un ameno conferenciante que siempre motivaba a su audiencia. Nunca olvidaré la cena a la que las autoridades políticas nos invitaron el día de su conferencia. Miguel trató, parcialmente en vano por desgracia, de dirigir la conversación hacia temas culturales, científicos o serios, mientras los responsables de enseñanzas medias de la Conselleria, que pagaban la cena, insistían en discutir los éxitos deportivos de los equipos locales de fútbol, los locales de moda en la ciudad o los excelentes planes desarrollados por el partido gobernante.

Miguel de Guzmán fue un ejemplo y nos enseñó a todos la pasión por las matemáticas y su preocupación por la docencia. Su influencia en el gran éxito de la investigación matemática y su desarrollo en los últimos veinticinco años es indudable.

2. Presentación. Sumario

El propósito general de esta presentación es discutir el impacto del análisis funcional en algunos problemas del análisis matemático y su relevancia actual. Es mi intención aprovechar también esta oportunidad para hacer una reflexión con ustedes acerca de las motivaciones en la selección de problemas de investigación en los que he trabajado. Si les dijera que he trabajado en los temas que me gustaban y me parecían interesantes en cada momento, no dejaría de ser cierto y podríamos terminar este discurso ahora mismo. Sin embargo, vamos a analizar la cuestión más a fondo. Veremos por qué ciertos temas han merecido mucha atención, estudiaremos su relevancia en otras áreas y su posible importancia en desarrollos actuales, e incluso mencionaremos temas de investigación recientes y problemas abiertos. Esta es mi propuesta a ustedes en este discurso: que me acompañen en la búsqueda de los orígenes, de las motivaciones y de la relevancia en matemáticas y en otras ciencias de algunas investigaciones realizadas desde 1950 hasta la actualidad que están relacionadas con mi propio trabajo. Intentaremos comprender cómo algunos temas del análisis funcional aparecen de modo natural en algunas cuestiones del análisis matemático y de qué modo constituyen una herramienta poderosa para la solución de problemas concretos.

Es muy complicado dirigirse a una audiencia como la que hoy tengo frente a mí, formada por expertos en muchas ramas de la ciencia y en particular en matemáticas, pero también por familiares y amigos. Desgraciadamente es seguro que no voy a ser lo bastante hábil para interesar a todos ustedes, pero intentaré cumplir una de las recomendaciones de Gian Carlo Rota en un artículo de 1997: da a la audiencia algo para llevar a casa (give the audience something to take home). Claro que cada uno deberá llevarse algo distinto, vamos a intentarlo.

El objeto del análisis funcional es el estudio de clases de funciones y de operadores definidos entre ellas, con la finalidad de resolver problemas provenientes, no sólo del análisis matemático, sino de muchas otras áreas, como la teoría de aproximación, la teoría ergódica, el análisis numérico, la teoría del control, el análisis económico o la teoría cuántica. L. Schwartz, A. Connes, V. Jones, J. Bourgain y T. Gowers obtuvieron sus medallas Fields, al menos parcialmente, por sus trabajos en análisis funcional.

El desarrollo de muchos temas del análisis funcional a los que he dedicado mi investigación ha estado muy relacionado con los operadores lineales en derivadas parciales. Como iremos viendo a lo largo de la exposición estos temas pueden plantearse de algún modo como el estudio del rango de un operador lineal y continuo entre espacios de funciones o de distribuciones, un problema para cuyo tratamiento se han desarrollado muchas herramientas funcional analíticas y cuya solución es relevante en distintas áreas. Los problemas a tratar incluyen, entre otros, la interpolación de funciones, la solubilidad de ecuaciones en derivadas parciales, la extensión de funciones diferenciables u holomorfas, o los valores frontera de las distribuciones. De un modo un poco más preciso, el hilo conductor de nuestra exposición lo constituye el tratamiento de problemas del siguiente tipo:

Sea E un espacio de funciones o de distribuciones y sea $T : E \to E$ un operador lineal y continuo, por ejemplo un operador de convolución. Consideramos la ecuación $Tv = w$.

A. Determinar para qué w tiene la ecuación $Tv = w$ solución. O sea estudiar el rango de T. En caso de que no tenga solución para todo $w \in E$, determinar clases amplias de elementos en el rango.

B. En el caso que la ecuación $Tv = w$ se pueda resolver para todo $w \in E$, determinar cuándo se puede determinar la solución $v = Sw$ mediante un operador lineal y continuo $S : E \to E$.

C. Supongamos que w está en un subespacio F de E con propiedades adicionales. Determinar condiciones para que v también esté en F.

D. Describir el núcleo de T y sus propiedades. Estudiar si la estructura del núcleo influye en la solubilidad de la ecuación $Tv = w$.

Veremos muchos ejemplos concretos a lo largo de la exposición.

3. La Teoría de Distribuciones de L. Schwartz

La teoría de las distribuciones de Laurent Schwartz, publicada en 1951 [146], transformó a partir de entonces muchas áreas del análisis y supuso un gran avance en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Schwartz asimiló muchas ideas y descubrimientos de las décadas precedentes (de Heaviside, Sobolev, Bochner y otros) y añadió otras nuevas, en especial la transformada de Fourier de distribuciones atemperadas y el teorema de los núcleos. Como veremos, la profunda conexión entre el análisis funcional y las ecuaciones en derivadas parciales fue establecida en el trabajo fundamental de finales de los años 1950 y 1960 de Malgrange, Ehrenpreis y Hörmander. En palabras de Trèves [158],

> *las distribuciones nos han enseñado los múltiples usos de la dualidad y cómo superar los límites de los espacios de Banach, inadecuados para tratar ciertas cuestiones. Las distribuciones se introdujeron en principio para permitir manipular soluciones singulares de una ecuación, y esto lo consiguen perfectamente. Además hemos aprendido a tratar separadamente las cuestiones de regularidad por una parte y de existencia y aproximación por otra. Ciertamente la exposición y la investigación han ganado en gran medida mediante el uso de los mecanismos elementales de derivación, convolución y la transformada de Fourier de distribuciones.*

Laurent Schwartz nació en 1915 y falleció en 2002. En 1934 ingresó en l'École Normale Supérieure, donde impartían clases E. Borel, E. Cartan, A. Denjoy, M. Fréchet, G. Julia y P. Montel, entre otros menos conocidos. Se graduó brillantemente en 1937. En 1941 se unió al grupo Bourbaki, fundado en 1935 por A. Weil, H. Cartan, C. Chevalley, J. Dieudonné, J. Delsarte, J. Leray y otros. En su tesis de 1942, acerca de la aproximación de funciones continuas por sumas de exponenciales reales, en la que extendió un teorema de Müntz, ya se puso de manifiesto uno de los rasgos característicos de las matemáticas de Schwartz: la utilización de un marco abstracto y de herramientas del análisis funcional para resolver problemas de análisis clásico. Yo siempre he tratado de imitar, modestamente claro, esta actitud en la investigación.

Schwartz recibió la medalla Fields de 1950 por la teoría de distribuciones y en 1952 fue nombrado profesor de la Facultad de Ciencias de París, por iniciativa de Denjoy. En 1959 fue nombrado profesor de análisis de l'École Polytechnique, donde realizó una gran labor de modernización: los seminarios de análisis funcional y de ecuaciones diferenciales alcanzaron un gran nivel. Durante su carrera tuvo muchos alumnos. Como ejemplo mencionamos que hicieron la tesis doctoral bajo su dirección L. Boutet de Monvel, A. Grothendieck, J.-L. Lions, B. Malgrange, A. Martineau y F. Trèves. Se jubiló en 1980. Schwartz fue un gran intelectual comprometido en el sentido más estricto: era de ideas comunistas, pero se opuso ardientemente al estalinismo, militó activamente y se opuso a la guerra de Vietnam y a la guerra de Francia en Argelia. Schwartz creó comités que rescataron continuamente matemáticos de gobiernos represivos en Uruguay, Checoslovaquia y la antigua Unión Soviética. Dice F. Trèves en su artículo [159] que "la política, siempre vista desde el punto de vista de un moralista, fue siempre una preocupación permanente para Schwartz". Pero su autobiografía [151] comienza con la siguiente frase:

> *Yo soy un matemático, las matemáticas han llenado mi vida...*

y en otro lugar añade

> *...siempre he querido cambiar el mundo. He consagrado una gran parte de mi vida a la política, adoptando la "carrera de intelectual comprometido". Pero las matemáticas han seguido siendo primordiales...Muchas veces he hecho política por el sentido del deber, pero la política no me interesa: mis tres pasiones son la investigación, la enseñanza y la entomología.*

Desgraciadamente nunca conocí personalmente a Laurent Schwartz, ni coincidí con él en ningún congreso; tal vez llegué tarde al "circuito". Sin embargo, cuando Klaus Bierstedt, que es miembro correspondiente de esta Academia, y yo resolvimos en 1986 un problema sobre espacios de sucesiones de Köthe que llevaba abierto bastantes años, se lo enviamos a Schwartz para ser publicado en el Comptes Rendues de la Academia de Ciencias de París. Lo aceptó y apareció en [6], lo que aún me llena de orgullo.

En mitad del siglo pasado las matemáticas estaban preparadas para una teoría satisfactoria de funciones generalizadas. Su necesidad estaba demostrada por los sucesivos intentos de definir derivadas de funciones que no eran derivables, como las funciones escalonadas, generalmente para resolver ecuaciones diferenciales. Como ejemplo podemos mencionar el cálculo simbólico de Heaviside para resolver la ecuación diferencial ordinaria de los circuitos eléctricos, y las partes finitas de Hadamard, introducidas para obtener fórmulas explícitas de lo que hoy llamamos soluciones fundamentales de la ecuación de ondas en varias variables. En 1926 N. Wiener utilizó la regularización de funciones para aproximar funciones continuas por funciones indefinidamente diferenciables. Un impulso importante vino de la mecánica cuántica. En la recta real la "función delta de Dirac" $\delta(x)$ era conocida por Heaviside como derivada de la función que hoy llamamos de Heaviside (0 en los reales negativos y 1 en los positivos). Dirac usó aproximaciones de "su" función por funciones usuales y consideró medidas de Dirac multidimensionales. Cabe señalar en este punto, que el primer uso de la notación de la delta de Dirac δ es debida a Kirchhoff en un artículo de 1882; ver la página 99 del libro de Lützen [110]. Más adelante los problemas en la frontera de las ecuaciones elípticas requerían funciones generalizadas más generales que las medidas de Radon. Bochner, en 1932, presentó una extensión de la transformada de Fourier, sin especificar la definición de las operaciones utilizadas.

Schwartz no conocía el trabajo de Wiener o de Bochner, pero asistió a un curso de Leray en 1934-35, en el cual éste definía las soluciones débiles de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en tres variables. El matemático que más se aproximó a la definición de una distribución fue Sobolev en la segunda mitad de la década de los 1930. Sobolev, de hecho, definió las distribuciones de orden finito como funcionales lineales y continuos, pero nunca consideró el espacio $\mathcal{D}$ de las funciones indefinidamente diferenciables con soporte compacto con la topología adecuada. Es curioso comentar en este punto que cuando, en 1944, Schwartz mencionó a H. Cartan su inclinación a usar los elementos de $\mathcal{D}$ como funciones test, Cartan intentó disuadirlo diciéndole que eran demasiado "monstruosas". Las aportaciones de Sobolev fueron muy importantes y las usó para resolver el problema de Cauchy para ecuaciones lineales hiperbólicas con un número impar de variables espaciales, sin embargo, nunca mencionó la función de Dirac $\delta(x)$, la convolución o la conexión con la transformada de Fourier. Además, inventó los espacios de Sobolev H^m después de 1945. Schwartz no conocía los artículos de Sobolev.

Las herramientas matemáticas necesarias para una teoría unificada de funciones generalizadas estaban esencialmente disponibles en los años 1940, desde la publicación de la monografía "Théorie des Opérations Linéaires" de Banach en 1932. Además los miembros del grupo Bourbaki, con los que Schwartz estaba en contacto, eran expertos en la teoría de la dualidad en espacios localmente convexos. Según el propio Schwartz, la definición de distribución $T \in \mathcal{D}'$ como un funcional lineal y continuo sobre el espacio $\mathcal{D}$ de las funciones indefinidamente diferenciables con soporte compacto, dotado de la topología del límite inductivo, le fue sugerida por su trabajo anterior sobre la dualidad en los espacios de Fréchet y su conocimiento, gracias al grupo Bourbaki, de la teoría de medidas de Radon como funcionales sobre el espacio de las funciones continuas con soporte compacto. Parte de la inspiración vino de un artículo de Choquet y Deny sobre funciones armónicas y poliarmónicas. El nombre de distribución para los elementos de $\mathcal{D}'$ fue elegido porque una medida, que es un tipo de distribución, es como una distribución de las cargas eléctricas en el universo; ver la página 100 en la contribución de Nirenberg en el libro [152].

Como cuenta el propio Schwartz en el capítulo VI de su autobiografía [151], el maravilloso descubrimiento de las distribuciones se produjo en París en noviembre de 1944 en una sola noche; luego mejoró la definición en febrero de 1945. Actualmente los alumnos aprenden los elementos de la teoría de distribuciones, sin recurrir a elementos sofisticados de análisis funcional en un primer curso de ecuaciones en derivadas parciales, ya que se pueden explicar de manera sencilla y forman parte del modo de pensar de cualquier analista. La teoría de distribuciones fue un gran paso hacia las aplicaciones del análisis funcional abstracto. Éste es uno de los temas centrales de mi exposición. Muchos de los resultados acerca de distribuciones y de sus aplicaciones al análisis de Fourier o las ecuaciones en derivadas parciales no se podrían haber probado, o incluso conjeturado, sin recurrir a sofisticadas técnicas de análisis funcional. Aunque de muchos de ellos se encontraron luego pruebas puramente analíticas, es importante no olvidar el papel central jugado en su descubrimiento por el análisis funcional. De hecho, la teoría de distribuciones y sus aplicaciones y el análisis funcional abstracto se han influido mutuamente de modo muy beneficioso.

El concepto de límite inductivo de espacios de Fréchet se originó en la teoría de distribuciones. Cuando Dieudonné conoció la definición y los resultados de Schwartz acerca del espacio $\mathcal{D}$ de las funciones test, los relacionó inmediatamente con la noción de límite inductivo de espacios topológicos. En 1949 apareció el trabajo de Dieudonné y Schwartz "La dualité dans les espaces (F) et (LF)", que iniciaba la teoría de límites inductivos de espacios localmente convexos, probando en un marco abstracto los principales resultados que Schwartz había demostrado para los espacios $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$. Al final de este artículo los autores proponen una serie de problemas. Todos ellos fueron resueltos por Alexandre Grothendieck, uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, que ganó la medalla Fields en 1966 por sus aportaciones a la geometría algebraica y el álgebra homológica, pero que antes de trabajar en esos temas había hecho contribuciones esenciales al análisis funcional, en el que se inició bajo la dirección de Schwartz en Nancy. Allí se había dirigido en 1949 por recomendación de Cartan y Weil, con quienes había estado trabajando en París desde el otoño de 1948, después de completar matemáticas en Montpellier. En 1949, Dieudonné y Schwartz pasaron a Grothendieck, recién llegado a su seminario, los problemas que tenían abiertos. Para su sorpresa, unos meses después Grothendieck los había resuelto todos, y había trabajado en muchas otras cuestiones del análisis funcional. Dieudonné cuenta que en 1953, cuando tenía que presentar su tesis doctoral, que entonces era en Francia como una habilitación, Grothendieck disponía de seis monografías con el nivel de una muy buena disertación. Su tesis fue "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires". Apareció en la serie de las Memorias de la American Mathematical Society [74] en 1955, y ha sido reeditada muchas veces. De ella hablaremos más adelante en relación con el teorema de los núcleos de Schwartz.

El artículo de Grothendieck "Sur les espaces (F) et (DF)" [73], que recoge la solución de los problemas de Dieudonné y Schwartz fue publicado en 1954. En él introdujo los espacios casinormables, los espacios (DF) y los espacios de Schwartz; nomenclatura que fue mantenida incluso por Laurent Schwartz, con una nota a pie de página explicativa en la página 43 de su primer artículo acerca de distribuciones con valores vectoriales [149]. Al final de [73] Grothendieck plantea diez problemas. El décimo fue resuelto por Dieudonné mostrando que todo espacio de Fréchet Montel es separable, como se indica en una nota añadida en las pruebas de imprenta. Los demás fueron resueltos por distintos matemáticos como Amemiya, Komura, Susanne Dierolf y Valdivia [160]. Pueden verse comentarios en las páginas 324-325 de nuestra monografía [131]. En los años 1980 algunos de los problemas mencionados por Grothendieck permanecían abiertos. Valdivia resolvió positivamente el problema 9 en 1989 con un teorema precioso en [165], demostrando que un espacio de Fréchet es totalmente reflexivo si y sólo si es un subespacio cerrado de un producto numerable de espacios de Banach reflexivos. Valdivia había dado en [161] ejemplos de límites inductivos estrictos de una sucesión de espacios localmente convexos cuyo bidual no es el límite inductivo de los biduales. S. Dierolf y yo [16] resolvimos el resto de las preguntas formuladas en el problema 8, mostrando ejemplos de espacios (LF) estrictos cuyo bidual no es completo, ni es un espacio (LF). Curiosamente lo publicamos en 1988 en una revista que no aparece en los listados ISI o JCR, porque aún no había empezado la fiebre de los índices de impacto. Estoy seguro que ahora actuaría de otro modo. Ejemplos de espacios de Fréchet distinguidos cuyo bidual no es distinguido fueron presentados en un trabajo conjunto con Susanne Dierolf y Carmen Fernández en 1991, resolviendo otro problema planteado en el artículo de 1954. Grothendieck escribe que el problema que considera más interesante es el problema 7, acerca de la estabilidad de los espacios (DF) en espacios de operadores y que está relacionado con el llamado problema de las topologías de Grothendieck, planteado en su tesis doctoral. Este problema fue resuelto negativamente por Jari Taskinen en [154, 155] en 1986. Su solución dio origen a una línea de investigación en la que se hicieron muchas contribuciones interesantes hasta mediados de los años 1990, entre otros por Juan Carlos Díaz [38] y por mi antiguo alumno Alfredo Peris [132, 133], que obtuvo por la solución de varios problemas abiertos el premio Lucien Godeaux en 1996. Una excelente exposición del trabajo realizado por varios autores en conexión con distintos problemas de productos tensoriales puede verse en el artículo de Klaus Bierstedt [4]. El trabajo de Peris fue continuado por Elisabetta Mangino [114], que también realizó su tesis bajo mi dirección.

De acuerdo con Trèves [159], las mayores contribuciones de Schwartz a su teoría fueron su decisión de tomar el espacio $\mathcal{S}$ de las funciones de decrecimiento rápido y su dual $\mathcal{S}'$ de las distribuciones atemperadas como el marco adecuado para el análisis de Fourier y el teorema de los núcleos. Respecto del primer punto, me gustaría citar aquí unas frases recogidas del discurso de Miguel de Guzmán [81]:

> *La teoría de las distribuciones tiene como uno de sus temas centrales el posibilitamiento de la utilización de la transformada de Fourier en condiciones mucho más amplias que las permitidas hasta entonces. Con la teoría de funciones generalizadas se repite en cierto modo el proceso de generalización de la noción de función que hizo posible el desarrollo del análisis de Fourier...Las distribuciones han venido, por otra parte a poner de manifiesto el papel central de la convolución en el análisis armónico y en sus conexiones con las ecuaciones en derivadas parciales.*

El teorema de los núcleos fue descubierto por Schwartz en 1950. Desde los trabajos de Hilbert y Riesz, se sabía que los operadores en un espacio funcional, por ejemplo en el espacio de Hilbert L^2 de las funciones de cuadrado integrable Lebesgue, definidos mediante un núcleo $K(x,y)$, como $Tf(x) := \int K(x,y)f(y)dy$, tenían propiedades interesantes y eran más fáciles de manipular. Sin embargo, no todo operador en L^2 es de esa forma; por ejemplo la identidad no lo es (y ese fue uno de los problemas con la formalización de la mecánica cuántica). Schwartz consiguió demostrar el siguiente resultado, que tiene cierta analogía con el hecho de que todo operador de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es un elemento del producto tensorial $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$, o sea es una matriz $m \times n$:

Teorema de los núcleos. Schwartz, 1950. *Sean U y V dos abiertos en espacios euclídeos. Para todo operador lineal y continuo $T : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$ existe un núcleo distribucional $K \in \mathcal{D}'(U \times V)$ tal que para todo par de funciones $u \in \mathcal{D}(U)$ y $v \in \mathcal{D}(V)$ se cumple $\langle T(u), v\rangle = \langle K, u \otimes v\rangle$ o, en forma simbólica, $T(u) = \int K(x,y)u(x)dx$.*

Es curioso recordar aquí que esta notación simbólica no era del agrado de Schwartz y que no se utilizó durante algún tiempo en teoría de distribuciones. Los argumentos topológicos de la prueba original han sido muy simplificados con el paso del tiempo; ver [89]. Este teorema proporciona los fundamentos para estudiar clases especiales de operadores, como los operadores pseudodiferenciales o los operadores integrales de Fourier.

El teorema de los núcleos de Schwartz fue el punto de partida de la teoría de los espacios nucleares presentada por Grothendieck en su tesis [74], que ya hemos mencionado antes. Los espacios nucleares constituyen la clase de espacios para los que se cumple un teorema de los núcleos. La mayor parte de los espacios de la teoría de distribuciones pertenecen a dicha clase. Grothendieck definió en su tesis distintas topologías en el producto tensorial de dos espacios localmente convexos. Las más importantes son la topología proyectiva π y la topología inyectiva ε. Schwartz, motivado por el teorema de los núcleos, había hecho un estudio sistemático de los espacios de funciones con valores vectoriales en [148] y, en 1957, introdujo el hoy llamado ε producto de Schwartz para estudiar las distribuciones con valores vectoriales en [149].

Las herramientas desarrolladas por Grothendieck son esenciales para estudiar la estructura de los espacios de funciones continuas, holomorfas o indefinidamente diferenciables (con valores vectoriales). Los productos tensoriales son la herramienta básica para deducir propiedades del espacio de funciones vectoriales a partir de las propiedades del espacio de funciones escalares y del espacio rango. También son instrumentales para estudiar propiedades de operadores definidos entre espacios de funciones o de distribuciones, como la sobreyectividad o la dependencia paramétrica. La otra idea básica manejada por Grothendieck es la aproximación de un espacio de dimensión infinita por sus subespacios de dimensión finita, idea que se encuentra detrás de su propiedad de aproximación. Todo espacio nuclear tiene la propiedad de aproximación. En sus "Récoltes et Semailles" (ver página 1044 de [91]) Grothendieck se refiere al año 1954 como el "año penoso", en el que intentó sin éxito resolver el problema de la aproximación en espacios localmente convexos, un problema resuelto negativamente por P. Enflo en 1973 con un contraejemplo, construyendo espacios de Banach separables sin la propiedad de aproximación, y por tanto sin base. Grothendieck dice que fue el único periodo de su vida en el que hacer matemáticas fue una carga para él. Aprendió, escribe también, a tener siempre varios problemas en consideración simultáneamente, para poder trabajar en otro si uno de ellos resulta inaccesible, sin duda un buen consejo.

Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio localmente convexo E se llama una base si cada $x \in E$ determina una única sucesión $(a_n)_n$ de escalares tal que la serie $\sum a_n x_n$ converge en la topología de E a x. La base se llama de Schauder si sus coeficientes funcionales $u_n(x) = a_n, n \in \mathbb{N}$, son continuos. Toda base en un espacio de Fréchet es una base de Schauder. El problema de si todo espacio de Banach separable tiene base de Schauder apareció por primera vez en 1931 en la edición polaca del libro de Banach sobre operadores lineales, que fue traducido al francés en 1932. Para Banach, Mazur y Schauder estaba claro que esta cuestión estaba relacionada con el problema de aproximación mencionado por Mazur en el "Scottish Book" en 1936. El problema de aproximación era equivalente a la propiedad de aproximación, que fue analizada cuidadosamente por Grothendieck en su tesis en 1955. Un espacio localmente convexo tiene la propiedad de aproximación si la identidad en E es el límite para la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos convexos de E de una red de operadores de rango finito. Si la red es equicontinua, se dice que E tiene la propiedad de aproximación acotada.

Recogemos ahora unos comentarios sobre la propiedad de aproximación, que pueden verse en nuestro artículo conjunto con Bierstedt [7]. Como hemos dicho ya, el problema de Banach fue resuelto negativamente por Enflo en 1973: todos los espacios l_p $(1 \leq p \leq \infty, p \neq 2)$ y c_0 contienen subespacios cerrados sin la propiedad de aproximación. Los casos $l_p, 1 \leq p < 2$, son debidos a Szankowski en 1978, quien también probó en 1981 que el espacio de Hilbert $L(l_2, l_2)$ de todos los operadores en un espacio de Banach separable no tiene la propiedad de aproximación. Es un espacio natural, pero no es un espacio separable. Los resultados de Szankowski están aún basados en los métodos de Enflo. Pisier en [135] y [136] construyó un espacio de Banach de dimensión infinita P tal que las topologías inyectiva y proyectiva coinciden en $P \otimes P$, resolviendo un problema de Grothendieck que había permanecido abierto mucho tiempo. El espacio P' no tiene la propiedad de aproximación y es un espacio construido de una forma diferente a la de Enflo.

Todos los espacios de Banach usuales, como $C(K)$ o L^p tienen la propiedad de aproximación acotada. Parece ser que aún no es conocido si el espacio no separable H^∞ de todas las funciones holomorfas acotadas en el disco unidad del plano complejo tiene la propiedad de aproximación. Por otra parte, el álgebra del disco, formada por los elementos de H^∞ que se extienden continuamente a la frontera, tiene base.

Todas las implicaciones entre las distintas propiedades de aproximación y la propiedad de tener base son o bien falsas o trivialmente ciertas: Figiel y Johnson en 1973 construyeron un espacio de Banach con dual separable y con la propiedad de aproximación, pero sin la propiedad de aproximación acotada. Szarek en 1984 mostró la existencia de un espacio de Banach reflexivo, separable con la propiedad de aproximación acotada y sin base.

Todo espacio nuclear en el sentido de Grothendieck tiene la propiedad de aproximación. Dynin y Mityagin en 1960 probaron que toda base equicontinua en un espacio nuclear es absoluta. Durante mucho tiempo fue un problema abierto si existían espacios de Fréchet nucleares sin base. El primer ejemplo de tal espacio fue construido por Mityagin y Zobin en 1974. Grothendieck había planteado en 1955 si todo espacio de Fréchet nuclear tenía la propiedad de aproximación acotada. La respuesta negativa fue presentada por Dubinski en 1981. Su ejemplo fue simplificado por Vogt en 1983.

Todo espacio nuclear es un espacio de Schwartz. Hogbe-Nlend en 1973 usó el ejemplo de Enflo para construir un espacio de Fréchet Schwartz sin la propiedad de aproximación. Resultados relacionados fueron demostrados por Bierstedt y Meise. Si un espacio de Fréchet Schwartz E tiene las aplicaciones "linking" entre sus espacios de Banach canónicos aproximables (o sea son el límite en la norma de operadores de una sucesión de operadores de rango finito), entonces E tiene la propiedad de aproximación. Nelimarkka probó en 1982 que todo espacio de Fréchet Schwartz con la propiedad de aproximación acotada tiene aplicaciones linking aproximables. El recíproco falla por los ejemplos de Dubinski y Vogt. Peris [134] dio un ejemplo de un espacio de Fréchet Schwartz con la propiedad de aproximación pero sin aplicaciones linking aproximables, contestando negativamente una pregunta formulada por Ramanujan.

La memoria de Grothendieck [74] también termina con una lista de diez problemas profundos abiertos. El problema 1 fue resuelto por Enflo, como se mencionó antes. El problema 5 fue resuelto positivamente por Komura. El problema 8, acerca del teorema de la gráfica cerrada, que puede ser utilizado en los espacios de la teoría de distribuciones, fue resuelto de modo independiente por Raikov, Slowikowski y De Wilde, con tres soluciones que resultaron ser equivalentes, como demostró unos años después Valdivia. La solución de De Wilde, con la introducción de los espacios con red de tipo $\mathcal{C}$ es la más manejable y está recogida en varios textos de análisis funcional. Una alternativa a los espacios con red de tipo $\mathcal{C}$ son los espacios casi-(LB) de Valdivia [164]. Se pueden ver más detalles en el discurso de Manuel López Pellicer [109]. Espacios de Fréchet nucleares que no cumplen la propiedad de aproximación acotada fueron dados por Dubinski, una construcción que fue simplificada más adelante por D. Vogt, resolviendo el problema 4. Durante los años 1980 hubo un gran interés en los productos tensoriales y sus aplicaciones. Pisier mostró en 1983, en [135], que existen espacios de Banach P de dimensión infinita tales que $P \otimes_\pi P = P \otimes_\varepsilon P$ se cumple topológicamente, resolviendo el problema 3. Taskinen [154, 155], entre 1986 y 1988, resolvió el problema de las topologías número 2 y el problema 10, que está relacionado. Estos avances supusieron una renovación importante en los métodos y problemas considerados en la teoría de productos tensoriales, como queda reflejado en el excelente libro de Defant y Floret [37]. Como ya hemos mencionado, esta renovación atrajo a muchos investigadores en esta dirección entre 1985 y 1995. Curiosamente, el problema 9, acerca de espacios (LF) completos, es el único problema de Grothendieck que permanece abierto, a pesar de los esfuerzos de muchos autores, como S. Dierolf, Domański, Vogt, Wengenroth, quien se dirige a ustedes y muchos otros.

El artículo de Grothendieck “Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques”, que fue publicado en 1956 [75], es uno de los artículos que más han influido el desarrollo del análisis funcional. No sólo demostró las enormes posibilidades de los productos tensoriales, sino que anticipó el estudio de la teoría local de los espacios de Banach. El artículo no contiene demostraciones, excepto la del teorema principal, y pocos matemáticos entendieron su contenido o su importancia. Sólo tras la famosa contribución de Lindenstrauss y Pełczynski [108] en 1968, el “Resumé” comenzó a recibir la atención que merecía. Los autores presentaron el teorema fundamental de la teoría métrica como una desigualdad acerca de matrices $n \times n$ en espacios de Hilbert, dieron varias aplicaciones fascinantes a la teoría de los operadores absolutamente p sumantes y reactivaron la teoría de los espacios de Banach. Una excelente referencia para las normas tensoriales y los ideales de operadores es el libro de Defant y Floret [37]. Nosotros no prosigueremos este interesante círculo de ideas en nuestra exposición. Tampoco insistiremos en la cuantización del análisis funcional y armónico, la teoría de los “operator spaces” y sus aplicaciones a la física cuántica, en la que se han realizado avances espectaculares recientemente, gracias al trabajo de Effros, Ruan, Pisier, Blecher, Paulsen, Junge, Parcet y muchos otros. Referimos a las monografías [53] y [137].

En el final de los años 1970, quienes empezabamos a trabajar en la Universidad de Valencia con el profesor Valdivia para hacer la tesis, teníamos que pasar el primer curso estudiando a fondo el primer tomo de la monografía de Köthe [95] acerca de espacios vectoriales topológicos. En aquel tiempo Valdivia logró dar una representación como espacio de sucesiones de los principales espacios de la teoría de distribuciones, en un artículo magnífico [163] publicado en la revista de la Academia en 1978, que fue continuado por varios otros acerca de temas relacionados. Estos resultados, algunos de ellos obtenidos independientemente por Vogt en [170], publicados en 1983, muestran por ejemplo que todos los espacios de distribuciones, independientemente de la dimensión y de la forma del abierto, son isomorfos. Los resultados de Valdivia fueron recogidos luego en el capítulo tercero de su libro [166]. El caso es que Valdivia había decidido que yo iba a trabajar en mi tesis acerca de la representación de espacios de funciones y distribuciones con valores vectoriales. En una de mis primeras conversaciones privadas con Don Manuel, cuando ya había completado la lectura del primer tomo del libro de Köthe, en el verano de 1978, me escribió a mano una lista, que aún conservo entre las páginas de mi copia personal del libro de Rudin de análisis funcional [139], de todo aquello que tenía que estudiar antes de empezar la tesis: teoría de distribuciones, espacios de funciones y de distribuciones con valores vectoriales [148, 149], productos tensoriales, la memoria de Grothendieck [74], variedades diferenciables y sus trabajos. Sobreviví y aquí estamos hoy. No puedo decir que leyera todo eso antes de completar mi tesis, pero sí mucho de ello y muchas cosas más, y le estoy agradecido por haberme indicado entonces una dirección de trabajo que me obligó a tener una formación variada, relacionada con el análisis, y que pudiera familiarizarme con el trabajo espectacular de Schwartz. También aprendí de Valdivia la importancia de leer los artículos originales de los grandes matemáticos.

Una de las razones del gran éxito y de las muchas aplicaciones de las distribuciones (a representación de grupos de Lie, a las corrientes de De Rham en variedades, a teoría cuántica de campos, además del análisis armónico y las ecuaciones en derivadas parciales) se encuentra en su simplicidad y en la naturaleza sencilla y automática de sus operaciones, sin olvidar la profunda convicción de Schwartz de su importancia y utilidad. A él le debemos el lúcido análisis que condujo a una teoría sistemática, coherente y muy potente, aplicable a problemas de distintas áreas. En Rusia las distribuciones fueron presentadas en una serie de seis atractivos volúmenes acerca de "Funciones Generalizadas" publicados por Gelfand, Shilov y sus coautores a partir de 1958. Estos libros no tuvieron una gran influencia en Occidente, pero enfatizaron la influencia de los espacios localmente convexos en análisis matemático.

A pesar del éxito cosechado por las distribuciones de Schwartz, Garding explica en [67] que al principio la teoría de distribuciones fue acogida con reservas y cierta hostilidad entre algunos matemáticos, e incluso la recensión de Bochner en 1953 del libro de Schwartz [146] tiene un final más bien sarcástico. El matemático sueco Beurling solía decir que la teoría "no tenía teoremas de unicidad". Se puede consultar también la contribución de Lax acerca de la recepción de las distribuciones en el Instituto Courant en el libro [152] o la autobiografía de Schwartz [151]. Cuando Hörmander defendió su tesis en 1955, su oponente (una figura importante en la defensa de las tesis doctorales en los países escandinavos) fue J.-L. Lions. Marcel Riesz, maestro de Hörmander, que tenía en el momento 69 años y no había leído la tesis, estaba preocupado de que tuviera demasiada terminología vaga de distribuciones. Sin embargo se sintió aliviado cuando Lions explicó que, en la base de todo el trabajo estaban "las desigualdades de Hörmander". Todas esas reservas desaparecieron con el tiempo. Conviene recordar aquí las palabras de Hörmander en el prefacio de su libro [89] en 1983:

> *El progreso en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales lineales durante los pasados treinta años debe mucho a la teoría de distribuciones creada por Laurent Schwartz al final de los años 1940. Sumaba una gran parte de la experiencia acumulada en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales hasta aquel momento y proporcionó un marco ideal para desarrollos posteriores.*

4. Ecuaciones en derivadas parciales

4.1. Introducción y Notación

Comenzamos esta sección con una anécdota con la que Trèves termina su artículo [159]. En 1948 Schwartz visitó Suecia para presentar su teoría de distribuciones y tuvo oportunidad de conversar con Marcel Riesz. Después de escribir la fórmula de integración por partes para explicar la idea de derivada débil, fue interrumpido por Riesz diciendo, "espero que haya encontrado algo más en su vida". Más tarde Schwartz le comentó a Riesz su esperanza de demostrar que toda ecuación en derivadas parciales lineal con coeficientes constantes tiene una solución fundamental, un concepto que sólo pudo hacerse preciso con la teoría de distribuciones. "¡Una locura!", exclamó Riesz, "eso es un proyecto para el siglo XXI". Sin embargo el teorema fue demostrado por Ehrenpreis y Malgrange en 1952. Schwartz tenía claro que esta solución positiva implicaba que la ecuación $P(D)u = f$ tenía solución $u \in \mathcal{D}'$ para cada $f \in \mathcal{D}$.

Las ecuaciones en derivadas parciales juegan un papel central en matemáticas puras y aplicadas, y su estudio ha proporcionado y sigue proporcionando resultados de enorme interés teórico y práctico. Estas ecuaciones expresan de modo directo, por ejemplo, las leyes fundamentales del movimiento de Newton, que permitieron la primera descripción cuantitativa del movimiento planetario. Posteriormente permitieron el establecimiento de leyes básicas en muchos fenómenos, como el movimiento de fluidos, los campos eléctricos, la transmisión de calor o de masa, movimientos atmosféricos y muchos otros fenómenos físicos, químicos o tecnológicos. De hecho la consideración de las ecuaciones en derivadas parciales fue motivada históricamente por problemas de la Física y de la Geometría. Aparecieron en problemas de hidrodinámica (D'Alembert, 1752), la membrana vibrante (Euler, 1766) y la teoría del potencial (Laplace, 1789). El problema de la existencia de solución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes analíticos fue investigado por S. Kowalevsky, que era discípula de Weierstrass, hacia 1874. En el siglo XIX los problemas de elasticidad y conducción del calor, y las investigaciones de pioneros como Fourier o Heaviside, llevaron a la introducción de conceptos novedosos, que tuvieron un papel central más adelante. Referimos al discurso de entrada a la Real Academia del profesor Alberto Dou [51] para más detalles acerca de la relación de las matemáticas y la física. El discurso del profesor Ildefonso Díaz [39] también tiene un punto de vista mucho más aplicado que el mío, que es de carácter fundamentalmente teórico.

Los resultados más notables de los años 1940 acerca de ecuaciones en derivadas parciales de orden arbitrario fueron las construcciones de Herglotz de las soluciones fundamentales de los operadores diferenciales fuertemente hiperbólicos, la prueba de Petrovski de la analiticidad de soluciones de una ecuación elíptica con coeficientes analíticos y su demostración de la existencia de solución del problema de Cauchy para sistemas fuertemente hiperbólicos. En su momento Schwartz mostró un gran interés en estos resultados, porque pensaba, y el tiempo le dio la razón, que las distribuciones jugarían un papel central en el futuro de la teoría general de operadores en derivadas parciales.

Las tesis de Malgrange y Hörmander, ambas de 1955, constituyeron los primeros tratados completos del tema. Malgrange usó las distribuciones de modo sistemático y estudió operadores de convolución. Por su parte Hörmander utilizó principalmente funciones de cuadrado integrable, aunque las distribuciones también aparecían en su trabajo.

Malgrange nació en París en 1928 y fue alumno de l'Ecole Normale Supérieure desde 1947 hasta 1951. Junto con Blanchard pasó un semestre de 1948 en la Facultad de Ciencias de Nancy, donde se encontraban Delsarte, Dieudonné, Godement, Gauthier y Schwartz. En el curso 1951/52, después de completar sus estudios, Jacques-Louis Lions y Malgrange pasaron un año en Nancy, donde se encontraron, entre otros con Grothendieck y con Malliavin. Schwartz escribió que, en su opinión, Nancy era uno de los centros más importantes del mundo en lo que respecta al análisis matemático en aquellos años. Malgrange completó su tesis bajo la dirección de Schwartz en 1955. Fue profesor en París, Orsay y Grenoble. En 1977 fue elegido miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de París y fue elegido numerario en 1988.

Por su parte, Hörmander nació en Mjällby, Suecia, en 1931. Estudió en la Universidad de Lund, donde se formó en análisis bajo la dirección de Marcel Riesz, que explicaba entonces teoría de funciones y análisis armónico. Se graduó en 1950 y comenzó a hacer investigación con Riesz a partir de entonces. Una vez éste se retiró, comenzó a trabajar en ecuaciones en derivadas parciales. Completó su doctorado en 1955, visitó varias universidades en los Estados Unidos y regresó para aceptar la plaza de profesor en la Universidad de Estocolmo en 1957. En 1962, en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Estocolmo, Hörmander recibió la medalla Fields por sus contribuciones a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, y en particular por sus resultados acerca de operadores en derivadas parciales hipoelípticos. Entre 1964 y 1968 estuvo en Princeton, pero volvió a la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Lund en 1968, en la que es profesor emérito desde 1996. Entre 1983 y 1985 publicó su obra monumental [89] sobre el análisis de los operadores en derivadas parciales lineales, que incluye también el estudio de los operadores pseudodiferenciales, en los que Hörmander había trabajado.

Uno de los primeros grandes éxitos de la teoría de distribuciones en relación con las ecuaciones en derivadas parciales fue la atractiva y clara definición de solución fundamental de un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes $P(D)$. Expliquemos brevemente la notación.

En lo que sigue escribiremos $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ para denotar un vector y $|x|$ para denotar su norma euclídea. El orden de un multi-índice $p = (p_1, ..., p_N) \in \mathbb{N}_0^N$ es $|p| := p_1 + ... + p_N$, y denotamos $p! := p_1!...p_N!$. Para $z = (z_1, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N$ y $p \in \mathbb{N}_0^N$, ponemos $z^p := z_1^{p_1}...z_N^{p_N}$. Un polinomio de grado m se denota por $P(z) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha z^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}$ y su parte principal por $P_m(z) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$. La notación para las derivadas parciales es la siguiente: $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$, $D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, y $D^\alpha := D_1^{\alpha_1}...D_N^{\alpha_N}$. Un operador en derivadas parciales con coeficientes constantes es $P(D) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$. La ventaja de esta notación queda clarificada por la fórmula $P(D)(e^{i\langle x,z\rangle}) = P(z)e^{i\langle x,z\rangle}$, con $\langle x, z\rangle := x_1 z_1 + ... + x_N z_N$. Si Ω es un abierto en $\mathbb{R}^N$, las funciones indefinidamente diferenciables en Ω las denotamos por $C^\infty(\Omega)$ o $\mathcal{E}(\Omega)$ y por $\mathcal{D}(\Omega)$ el subespacio de las funciones con soporte compacto. Las distribuciones en Ω se denotan por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Una solución fundamental del operador $P(D)$ es una distribución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ que cumple $P(D)E = \delta$, donde la delta de Dirac es la distribución definida mediante $\delta(g) := g(0), g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. La primera consecuencia de la existencia de solución fundamental reside en el hecho, conocido por Schwartz, de que implica la solubilidad semi-local del operador. Concretamente, para cada compacto K incluido en Ω y cada $g \in C^\infty(\Omega)$ existe $f \in C^\infty(\Omega)$ tal que $P(D)f$ coincide con g en un entorno abierto de K contenido en Ω. En particular, se obtiene que toda ecuación del tipo $P(D)f = g$ admite solución $f \in C^\infty(\Omega)$ para cada $g \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Como hemos dicho, las tesis de Malgrange [111] y de Hörmander [86], ambas presentadas en 1955, son los primeros tratamientos completos de la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales lineales. Aunque es una división un tanto artificial, la teoría clásica selecciona un tipo de ecuaciones y se dedica a estudiar su solución y propiedades, y la teoría general analiza la relación entre las propiedades de un polinomio $P(z)$ y las propiedades del operador lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes $P(D)$.

4.2. Los problemas de Schwartz acerca de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Como explica R.E. Edwards en el capítulo 5 de su libro [52], el desarrollo de la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales en los años 1950 y 1960 se realizó en torno a varios problemas planteados por Schwartz de los que vamos a hablar en los párrafos siguientes. Muchos de los resultados que vamos a mencionar a continuación pueden encontrarse en la excelente obra de Hörmander [89]. En el prefacio del tomo II escribe Hörmander en 1983 "El campo de las ecuaciones en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes no es ya muy activo, quizá debido al avanzado estado de su desarrollo." Es mi propósito ahora, no sólo explicarles la solución de los problemas de Schwartz, sino mostrarles también como la combinación de métodos de diversas áreas y, en especial, nuevas técnicas de análisis funcional han permitido interesantes aportaciones en los últimos veinte años.

(1) *Existencia de solución fundamental.*

Schwartz escribe en el artículo [150], acerca de los trabajos de Malgrange, que

> *la idea de encontrar una solución fundamental para todos los operadores diferenciales con coeficientes constantes podía parecer estrafalaria. En cualquier caso, yo había hecho la sugerencia de que tal solución podía existir, pero ignoraba si esa sugerencia era sensata.*

Aunque el concepto de solución fundamental sólo aparece en la literatura clásica de modo indirecto, el primer uso de soluciones fundamentales puede adscribirse a d'Alembert en 1747 cuando obtuvo la solución del problema de la cuerda vibrante $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = f$. En 1789 Laplace usó la solución fundamental $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$ del operador elíptico en tres variables $\Delta_3 := \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ que lleva su nombre, y estableció la conexión con el potencial gravitacional de Newton. Su trabajo fue completado por Poisson en 1813, obteniendo $\Delta_3(E * f) = f$. En 1809 Laplace consideró el operador del calor $\partial_t - \partial_x^2$ y calculó su solución fundamental. La generalización para dimensión espacial arbitraria fue obtenida por Poisson en 1818. En ese año, Fourier fue capaz de calcular la solución fundamental del operador de cuarto orden $\partial_t^2 - \partial_x^4$. El mismo año Poisson generalizó la fórmula de d'Alembert para el operador de ondas a tres dimensiones espaciales. La solución fundamental del operador de ondas en dos variables espaciales no fue encontrada hasta 1894 por Volterra. En 1849 Stokes obtuvo la matriz fundamental del sistema de operadores en derivadas parciales que describe las ondas elásticas en un medio isotrópico. Fredholm, en 1908, consiguió representar las soluciones fundamentales de operadores elípticos en tres variables mediante integrales Abelianas, y comprobó su teoría con el operador

$\partial_x^4 + \partial_y^4 + \partial_z^4$. Su discípulo Zeilon dio en 1911 la primera definición de solución fundamental en el caso de una función localmente integrable, extendió la teoría de Fredholm a operadores no elípticos y consideró en particular el operador $\partial_x^3 + \partial_y^3 + \partial_z^3$, obteniendo el soporte singular de la solución fundamental. Sin embargo, una representación explícita de ella sólo fue obtenida por P. Wagner en su artículo [179] publicado en 1999.

Entre 1926 y 1928 en una serie de tres artículos, Herglotz obtuvo la representación de la solución fundamental de operadores elípticos y estrictamente hiperbólicos homogéneos, con ciertas restricciones en el grado y la dimensión. Estas fórmulas se llaman hoy día fórmulas de Herglotz-Petrovski, pues Petrovski consideró en 1945 el caso hiperbólico. Leray en 1952 y Borovikov en 1959, con una versión distribucional, pudieron tratar los casos restantes de estas fórmulas.

El primer teorema general de existencia de soluciones fundamentales para operadores en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes fue obtenido en 1953/54 por Malgrange y Ehrenpreis. Sus pruebas estaban basadas en el teorema de Hahn-Banach. El método de Malgrange y Ehrenpreis está basado en una desigualdad debida a Malgrange acerca de la norma L^2.

Cuenta Schwartz en [150] que Leon Ehrenpreis le había puesto en una situación embarazosa. Malgrange y Ehrenpreis trabajaron durante muchos años en problemas semejantes y prepararon sus tesis al mismo tiempo. Ehrenpreis realizó su tesis bajo la dirección de C. Chevalley en la Universidad de Columbia en 1953 acerca de espacios de distribuciones en espacios localmente compactos, que apareció en 1956 en las memorias de la American Mathematical Society. Ehrenpreis publicó una importante serie de artículos acerca de soluciones de algunos problemas de división; el cuarto de los cuales es [54]. Dice Schwartz

> *Yo trabajaba en estrecha colaboración con Malgrange, pero también con Ehrenpreis, quien me enviaba sus reflexiones regularmente por correo. Me preguntaba si debía hablar con Malgrange acerca de las sugerencias que Ehrenpreis me enviaba. Uno y otro avanzaban y me resultaba imposible mantener el equilibrio. Finalmente, aunque fuera profundamente anti-científico, le pedí a Ehrenpreis que no me enviara sus proyectos y se limitara a enviarme sus artículos para publicar, una vez estuvieran terminados. Comprendió esa situación desagradable para mí y le estoy muy agradecido.*

Hörmander, en su contribución al volumen [152] cuenta que en 1955, Riesz, al leer su tesis doctoral, le comentó que debía haber demostrado que toda solución fundamental de un operador hipoelíptico es una función localmente integrable y no una distribución. Por fin, en 1999, Hörmander fue capaz de probar que tal es el caso en dimensión dos, pero hay operadores hipoelípticos para dimensión mayor o igual que catorce que no admiten una solución fundamental localmente integrable, demostrando finalmente que Riesz no tenía razón.

Entre 1957 y 1958 Hörmander y Łojasiewicz resolvieron el problema de la división de distribuciones y probaron la existencia de soluciones fundamentales atemperadas. Łojasiewicz nació en Varsovia en 1926, permaneció como investigador y como profesor en Cracovia toda su vida, hasta que falleció en 2002. El problema de la división fue planteado por L. Schwartz motivado por el problema de la existencia de solución fundamental. Puede plantearse del siguiente modo. Sea T una distribución y f una función real analítica en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, ¿existe una distribución S en Ω tal que $fS = T$? Los métodos de solución de este problema por Łojasiewicz y por Hörmander (el cual lo resolvió para polinomios f) son diferentes en muchos aspectos. Por ejemplo, Hörmander muestra un resultado equivalente por dualidad, concretamente que el rango de la multiplicación por f es cerrado en el espacio de las funciones de clase C^∞. Otra diferencia es que Łojasiewicz usa una estratificación más detallada de los ceros de la función f. El punto común de ambas demostraciones es una desigualdad que conecta el crecimiento de una función analítica y la distancia al conjunto de sus ceros. En el caso de polinomios se demuestra con ayuda del teorema de eliminación algebraica real de Tarski y Seidenberg, pero en el caso analítico es más delicada y lleva el nombre de "desigualdad de Łojasiewicz". Pueden encontrarse más detalles acerca de la división de distribuciones y los ideales de funciones diferenciables en el artículo de Malgrange [112].

La teoría general y el estudio de la regularidad de soluciones fundamentales fue completado por Hörmander, ver tomo II de [89]. En 1994 H. König obtuvo una prueba del teorema de Malgrange-Ehrenpreis mediante una fórmula explícita, resultado mejorado en 1996 por Ortner y Wagner.

(2) *Problema de la aproximación. La estructura del núcleo del operador.*

El problema consiste en determinar condiciones en un abierto Ω y en el polinomio $P(z)$ para que toda solución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (resp. $u \in C^\infty(\Omega)$) de la ecuación homogénea $P(D)u = 0$ sea el límite de soluciones exponencial polinómicas o de soluciones polinómicas.

Malgrange en su tesis [111] ofreció una serie de respuestas satisfactorias. Los resultados de Malgrange proporcionan extensiones del teorema clásico de Runge, que considera el caso del operador de Cauchy-Riemann en dos variables $P(D) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \partial_1 + i\partial_2$.

El teorema de aproximación de soluciones de la ecuación homogénea por soluciones exponencial polinómicas se extiende a una ecuación de convolución $\mu * f = 0$, con μ una distribución con soporte compacto en $\mathbb{R}^N$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, como probó Malgrange en 1959. Ver detalles en el tomo II de [89]. Esto generaliza varios resultados de Delsarte y Schwartz acerca de funciones periódicas en media de una variable. Gurevich demostró que el resultado no se puede extender a sistemas de ecuaciones de convolución.

(3) *Problema de la regularidad de soluciones.*

Se trata de caracterizar aquellos polinomios $P(z)$ que cumplen que toda distribución u que sea una solución de la ecuación $P(D)u = g$, con g una función de clase C^∞, es también una función indefinidamente diferenciable.

Es obvia la importancia de un resultado de este tipo. Nos dice cuáles son los polinomios $P(z)$ tales que toda solución débil de la ecuación $P(D)u = f$ es también una solución clásica. El antecedente más importante de este resultado lo constituye el llamado lema de Weyl, que fue publicado en Duke Math. J. en 1940, y demuestra que toda solución débil de la ecuación de Laplace es un solución C^∞, después de un ajuste en un conjunto de medida nula. Este problema fue completamente resuelto por Hörmander en su tesis [86]. El teorema de Tarski-Seidenberg es un ingrediente esencial de la prueba. Este importante resultado afirma que las proyecciones de conjuntos semialgebraicos son también semialgebraicos. Un conjunto semialgebraico es un subconjunto real de algún espacio $\mathbb{R}^N$ definido mediante desigualdades de polinomios reales. La prueba original del lógico Tarski fue editada por Seidenberg en 1954. Hörmander publicó en 1983 en su libro [89] una versión de una prueba debida a Paul Cohen.

Schwartz cuenta la siguiente historia en [150]:

> *Tuve la mala suerte de llamar, en mi libro de distribuciones, elípticos a aquellos operadores con la propiedad de que $P(D)u \in C^\infty, u \in \mathcal{D}'$, implica que $u \in C^\infty$. Rompía así con la nomenclatura usual de operadores elípticos, hiperbólicos y parabólicos, considerando que esta propiedad era la propiedad fundamental de los operadores elípticos en el sentido usual. Fue una mala idea, no se cambia fácilmente una nomenclatura universalmente aceptada. En un coloquio en 1957 en Nancy, comencé a exponer un trabajo muy interesante de Mizohata. El resultado principal era: todo operador parabólico*

era elíptico, lo que produjo un enorme griterío en contra por parte de la audiencia. A partir de ese momento decidimos mantener la elipticidad para los operadores clásicos y llamar hipoelípticos a los operadores con la propiedad de diferenciabilidad mencionada arriba.

Schwartz conocía ya la demostración de que si un operador $P(D)$ admite una solución fundamental E que es una función C^∞ en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, entonces $P(D)$ es hipoelíptico. Del teorema de Malgrange-Ehrenpreis se deduce que el recíproco es cierto. Un resultado de Petrovski demostró que los operadores elípticos son precisamente aquellos tales que toda solución débil de $P(D)u = 0$ es real analítica, por ello se llaman también a veces analítico-hipoelípticos. De hecho, Hilbert había incluido en su lista de problemas planteados en el Congreso Internacional de Matemáticos en 1900 en París la pregunta de describir los operadores diferenciales P tales que las únicas soluciones de $Pu = 0$ son real analíticas. Este problema fue resuelto por Petrovski, quien dio también una prueba de la analiticidad de las soluciones de las ecuaciones (no lineales) elípticas y analíticas, extendiendo de ese modo resultados debidos a Bernstein. Estimaciones acerca del comportamiento de las derivadas de las soluciones de la ecuación del calor homogénea fueron obtenidas por Holmgren en 1904 y por Gevrey en 1926. Una exposición excelente de estos temas puede verse en el capítulo 11 del libro de Hörmander [89].

(4) *Problema de la solubilidad de las ecuaciones en derivadas parciales.*

El problema consiste en caracterizar los polinomios $P(z)$ y los abiertos Ω tales que el operador en derivadas parciales $P(D)$ es sobreyectivo en $C^\infty(\Omega)$ o en $\mathcal{D}'(\Omega)$. La caracterización para las funciones diferenciables es debida a Malgrange y Ehrenpreis independientemente y la respuesta completa en el caso de distribuciones, incluso para operadores de convolución $\mu * f = g,\ \mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, y no sólo para operadores en derivadas parciales con coeficientes constantes, fue obtenida por Hörmander [87] en 1962.

Hörmander introdujo la siguiente definición, que ya había sido utilizada por Malgrange al estudiar la sobreyectividad para distribuciones de orden finito. Decimos que un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es P-convexo si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe otro compacto $L \subset \Omega$ tal que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que el soporte de $P(-D)\varphi$ esta incluido en K, se cumple que el soporte de φ está contenido en L. Malgrange y Ehrenpreis probaron que $P(D)$ es sobreyectivo en $\mathcal{E}(\Omega)$ si y sólo si Ω es P-convexo. Una de las herramientas principales de la prueba original era un teorema profundo debido a Banach, que asegura que un subconjunto del dual E' de un espacio de Fréchet E es cerrado para la topología $\sigma(E', E)$ si y sólo si su intersección con todo subconjunto cerrado y equicontinuo es $\sigma(E', E)$ cerrado. En algunas presentaciones más modernas la demostración se hace más sencilla recurriendo a distintos criterios de sobreyectividad de operadores lineales y continuos entre espacios de Fréchet, como el que se puede encontrar en el libro de Meise y Vogt [123]. Mejoras de estos criterios fueron presentadas hacia 1996 por Antonio Galbis y por mí para tratar el rango de operadores de convolución en espacios de funciones ultradiferenciables. Antonio fue mi primer discípulo, presentó su tesis doctoral en 1988.

Todo abierto convexo es P-convexo. Esto es una consecuencia, por ejemplo, del importante teorema de los soportes de Lions, demostrado en 1952 y cuyo enunciado es el siguiente: si u_1 y u_2 son dos distribuciones con soporte compacto, entonces la envoltura convexa del soporte de la convolución $u_1 * u_2$ coincide con la suma de las envolturas convexas de los soportes de u_1 y de u_2. Por otra parte, si un operador $P(D)$ es elíptico, entonces todo abierto es P-convexo. Además, si un operador $P(D)$ cumple que todo abierto es P-convexo, entonces $P(D)$ es elíptico. Pueden verse en [89] abiertos en el plano que no son P-convexos para el operador $P(D) = -\frac{\partial}{\partial x \partial y}$.

Hay varias maneras de demostrar el teorema de sobreyectividad de Malgrange. En este punto, es importante para nosotros reflexionar sobre una demostración que utiliza el método de Mittag-Leffler: se resuelve primero la ecuación $P(D)f = g$ localmente, lo que es posible por la existencia de solución fundamental, luego se corrigen las soluciones locales obtenidas mediante la aproximación de soluciones globales de la ecuación homogénea y, finalmente, se forma una serie “pegando” estas correcciones para definir la solución de la ecuación planteada. Esta serie debe ser convergente en el espacio de funciones de clase C^∞. La estructura de esta demostración es la misma que la del teorema clásico de Mittag-Leffler acerca de la existencia de funciones meromorfas con partes principales prescritas en un conjunto discreto, ver por ejemplo [138, 13.10]. Si queremos obtener resultados de sobreyectividad de operadores $P(D)f = g$ en otros espacios de funciones o de ultradistribuciones definidas en un abierto Ω con este método, debemos asegurarnos de conseguir los siguientes “ingredientes”: en primer lugar necesitamos solubilidad local; en segundo lugar, necesitamos la densidad local de las soluciones nulas definidas globalmente, y por último, para asegurar la convergencia de la serie que hay que formar en el paso final, necesitamos una descomposición con cotas de los núcleos del operador $P(D)$ restringidos a una sucesión fundamental de compactos de Ω. Esto viene expresado, de modo preciso, con una condición necesaria y suficiente, en términos de la anulación del functor derivado del functor límite proyectivo del núcleo del operador $P(D)$, del que hablaremos más adelante.

La sobreyectividad del operador $P(D)$ en el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$ es mucho más complicada. La existencia de soluciones $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de la ecuación $P(D)u = f$ para cada $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, cuando Ω es convexo fue obtenida por Ehrenpreis en 1956 y simplificada por Malgrange en 1959. La caracterización de los operadores $P(D)$ que son sobreyectivos en $\mathcal{D}'(\Omega)$ para un abierto arbitrario Ω fue obtenida por Hörmander [87] con una prueba directa, muy ingeniosa y adaptada al problema concreto en consideración. En la caracterización de Hörmander juega un papel central el concepto de soporte singular de una distribución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, que es el complementario en Ω del mayor abierto $G \subset \Omega$ tal que la restricción de u a G es una función de clase C^∞. Ehrenpreis obtuvo una caracterización del soporte singular de una distribución con soporte compacto de un modo semejante al teorema de Paley, Wiener y Schwartz. El enunciado del teorema de Hörmander es el siguiente.

Teorema. Hörmander, 1962. *El operador $P(D)$ es sobreyectivo en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si es fuertemente P-convexo, o sea, si y sólo si es P-convexo y además cumple que para cada compacto K en Ω existe otro compacto L tal que si el soporte singular de $P(D)u$ está incluido en K, entonces el soporte singular de la distribución de soporte compacto u está incluido en L.*

Desde el punto de vista del análisis funcional, el operador $P(D)$ es suprayectivo en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si su operador traspuesto $P(-D) : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ es un homomorfismo inyectivo sobre la imagen; en otras palabras, el rango de este operador es un subespacio límite del espacio (LF) $\mathcal{D}(\Omega)$. Desde el trabajo de Grothendieck [73] era conocido que existen subspacios cerrados de un espacio (LF) que no son subespacios límite. Comenzando por Słowikowski, se intentó establecer teoremas abstractos análogos al de Hörmander. Basado en los métodos de Palamodov, de los que hablaremos a continuación, Retakh obtuvo una caracterización de los subespacios límite de los espacios (LF). Existen excelentes artículos expositivos acerca de los límites inductivos numerables localmente convexos, como los de Floret [62] y Bierstedt [3]. Un progreso importante en la teoría de los espacios (LF) y sus aplicaciones lo constituyó el artículo de Vogt [175]. Algunos de los problemas abiertos más importantes fueron resueltos por Wengenroth en 1996, donde demostró, por ejemplo, que el límite inductivo numerable regular de espacios de Fréchet Montel es completo. Sus aportaciones principales se pueden leer en el capítulo 6 del libro [181]. Hörmander escribe en [89] acerca de la demostración de su resultado:

> *Hemos evitado la terminología de los espacios (LF) para no promocionar la concepción equivocada que se tenía hace tiempo de que la familiaridad con los espacios (LF) era esencial para entender la teoría de distribuciones.*

Sin embargo, los avances recientes en espacios (LF) mencionados arriba han permitido a Frerick y Wengenroth [65], en un artículo publicado en RACSAM en 2003, dar una prueba sencilla y clara del teorema de Hörmander, que además ha podido ser extendida por estos autores para ultradistribuciones. Por otra parte, de los resultados de Frerick y Wengenroth, que mejoran un teorema debido a Langenbruch, se deduce una consecuencia completamente nueva en este contexto: si el rango del operador $P(D)$ en $C^{\infty}(\Omega)$ contiene las funciones real analíticas, entonces el operador es sobreyectivo en $C^{\infty}(\Omega)$.

Acabamos de ver la relevancia del teorema de Hörmander para el desarrollo de los espacios (LF). Ahora bien, existe otro punto de vista, que está muy relacionado con el anterior por dualidad y que ha resultado aún más relevante en las dos últimas décadas: la teoría del functor derivado del functor límite proyectivo de Palamodov, que éste desarrolló en 1968 en [128] para obtener otra demostración del resultado de sobreyectividad de Hörmander. Palamodov inició un estudio homológico de la sobreyectividad de operadores lineales y continuos y su teoría puede considerarse como una versión abstracta del método de Mittag-Leffler.

El estudio de herramientas homológicas en análisis funcional en los últimos años ha constituido una aportación esencial para dar nueva luz sobre diversos problemas analíticos. Estos problemas incluyen la sobreyectividad, la existencia de operador de solución y la dependencia paramétrica para operadores en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes y operadores de convolución, en espacios de funciones ultradiferenciables, funciones analíticas o espacios de ultradistribuciones, y también la existencia de operador de extensión lineal y continuo de funciones analíticas o ultradiferenciables.

Palamodov fue el primero en observar en 1969 que ciertos temas del análisis funcional podían ser considerados como problemas de exactitud de ciertas categorías y podían, por tanto, ser investigados con la ayuda de functores derivados. Un papel fundamental lo constituyó el functor de límite proyectivo [128]. Hablando sin precisión, la relevancia del functor derivado $Proj^1$ para la sobreyectividad de operadores lineales y continuos es la siguiente: un operador entre dos límites proyectivos de espacios (LB), por ejemplo entre espacios de distribuciones, es sobreyectivo si y sólo si el functor $Proj^1$ del límite proyectivo del núcleo del operador se anula. Esencialmente esa anulación viene a significar que el método de Mittag-Leffler funciona. El problema es encontrar condiciones evaluables en la práctica para que esto suceda. Retakh hizo aportaciones relevantes relacionadas con los resultados acerca de espacios (LF) mencionados anteriormente. Vogt realizó en los años 1980 importantes contribuciones enfatizando los aspectos funcional analíticos y el papel de los espacios de sucesiones: investigó cuándo se anula el functor $Ext^1(E, F)$ para pares de espacios de Fréchet y, por tanto, cuándo se escinde una sucesión exacta corta de espacios de Fréchet, y encontró condiciones evaluables para la anulación del functor derivado $Proj^1$, que estaban relacionadas con sus condiciones (DN) y (Ω), de las que hablaremos más adelante. Vogt descubrió también la relación entre la anulación del functor $Proj^1$ para una espectro proyectivo de espacios (LB) y las propiedades del límite proyectivo como espacio localmente convexo, por ejemplo ser tonelado o bornológico. Sus investigaciones, así como aplicaciones de estos resultados, fueron completadas por varios autores como Braun, Domański, Frerick, Langenbruch, Meise, Taylor, Wengenroth y yo mismo. Muchas de estas cuestiones y una exposición clara y prácticamente autocontenida pueden verse en el libro de Wengenroth [181].

Un gran impulso para estas investigaciones lo constituyeron, desde finales de los años 1980 y principio de los 1990, las aplicaciones a la sobreyectividad de los operadores en derivadas parciales y de convolución en espacios de funciones ultradiferenciables de tipo Roumieu y de funciones real analíticas, y especialmente la posibilidad de reformular las condiciones funcional analíticas en términos de principios de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad nula del polinomio $P(-z)$; una dirección que había sido abierta por Hörmander en su artículo fundamental [88]. Yo tuve el privilegio de ser testigo del inicio del renovado interés en este tipo de cuestiones. En diciembre de 1986, poco después de terminar mi libro conjunto con Pérez Carreras [131], de obtener la cátedra de Matemática Aplicada en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura que aún ocupo, y pocos meses después de casarme, realicé una estancia de investigación en Düsseldorf, donde comencé a trabajar con Reinhold Meise en problemas de extensión de funciones no casi analíticas, de los que hablaré más adelante. Durante aquellos meses, en el seminario de Meise y Vogt en Düsseldorf y Wuppertal, que se celebraba los lunes por la tarde, Vogt expuso sus resultados acerca del functor derivado del functor límite proyectivo, y Meise las aplicaciones a la caracterización de los operadores de convolución sobreyectivos en clases de Gevrey, que completaban el trabajo de Cattabriga y Zampieri. Fueron momentos interesantes, un auténtico viaje de descubrimiento.

4.3. Representación de las distribuciones como valores frontera de funciones holomorfas. Las condiciones (DN) y (Ω) de Vogt

En 1952, sólo unos años después de la introducción de las distribuciones por Schwartz, Köthe, como consecuencia de sus importantes resultados acerca de la dualidad en los espacios de funciones holomorfas de una variable compleja [94], observó la relación existente entre las distribuciones en la circunferencia unidad y las funciones holomorfas en su complemento en el plano complejo. Poco después Tillmann generalizó los resultados de Köthe en varias direcciones. De algún modo el trabajo de ambos, que fue continuado por Tillmann en varios artículos en los años 1960 en el caso de una variable, inauguraba el estudio de la representación de distintos espacios de distribuciones como valores en la frontera de espacios de funciones holomorfas. El problema considerado en el caso de una variable es el siguiente: sea $\mathcal{K}$ un espacio de funciones de clase C^∞, determinar un espacio $H_{\mathcal{K}}$ de funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tales que la aplicación

$$R : H_{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}', \ R(f)(\varphi) := \mathrm{lím}_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} (f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon))\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{K},$$

es un homomorfismo topológico sobreyectivo. Muchos autores, como Martineau, Vladimirov, Carmichael, Meise, Petzsche y Vogt entre otros, proporcionaron importantes resultados. Meise escribió el artículo panorámico [115] que describe las investigaciones realizadas hasta 1977 en esta dirección. Estas investigaciones han sido continuadas recientemente por Langenbruch [105] y por Fernández, Galbis y Gómez-Collado [59] en el contexto de ultradistribuciones.

El tratamiento de la representación de espacios de distribuciones de varias variables como valores frontera requería el uso de la teoría de los productos tensoriales de Grothendieck [74] y de las distribuciones con valores vectoriales de Schwartz [149]. Estos estudios, que motivaron una inspección a fondo de la teoría de productos tensoriales y sus aplicaciones a los espacios de funciones con valores vectoriales, están en el origen de muchas de las investigaciones posteriores.

La representación de los espacios de (ultra)distribuciones (con valores vectoriales) como valores frontera era uno de los temas centrales de estudio de la escuela en torno a Tillmann en Maguncia (Mainz) al final de los años 1960 y principios de los 1970. Meise y Vogt hicieron la tesis doctoral bajo la dirección de Tillmann en aquellos años, Gramsch fue codirigido por Köthe y Tillmann y fue, a su vez, el director de tesis de Albrecht, Bierstedt y Kaballo. Ya he mencionado anteriormente la importancia de los libros y de la figura de Gottfried Köthe en el grupo del profesor Valdivia en el que entré a formar parte en 1977. Pero además, desde que comencé a colaborar con algunos miembros de la escuela de Tillmann en 1983, me considero modestamente también miembro de la herencia alemana de Köthe.

Gottfried Köthe nació en Graz, Austria, en 1905 y falleció en Frankfurt en 1989. Comenzó a estudiar química y filosofía en la Universidad de Graz en 1923. Fascinado por las paradojas de la teoría de conjuntos, decidió estudiar matemáticas y completó su tesis doctoral en 1927. Escribió que *las matemáticas me atraían mucho más que la filosofía; en el razonamiento matemático encontré la precisión y certeza que había buscado en la filosofía, pero que no pude encontrar en ella.*

Después de participar en el curso de Hermann Weyl acerca de mecánica cuántica y teoría de grupos en Zürich en 1928, se trasladó a Göttingen en 1928 para estudiar con E. Noether y B.L. van der Waerden. Por recomendación de Noether, se marchó a trabajar con Otto Toeplitz a Bonn en 1929 y comenzó con él una colaboración que duró hasta el fallecimiento de Toeplitz en 1940. En 1960, con ocasión de su eleccción como miembro de la Academia de Heidelberg, escribía Köthe:

Juntos desarrollamos la teoría de los espacios perfectos, complementaria de los espacios de Banach. Después de la segunda guerra mundial ambas teorías se incorporaron en la teoría de los espacios vectoriales topológicos, que alcanzó su forma definitiva de la mano de los matemáticos franceses de la escuela de Bourbaki, después de que las herramientas topológicas se hubieran desarrollado suficientemente. Desde mis primeros artículos con Toeplitz, he permanecido más o menos fiel a esta área de matemáticas, llamada análisis funcional, que puede ser caracterizado como una penetración y desarrollo ulterior del análisis clásico con la ayuda de conceptos algebraicos y topológicos.

Después de ser catedrático en Giessen, aceptó en 1946 una cátedra en la Universidad de Maguncia (Mainz), donde fue director del Instituto de Matemáticas e influyó enormemente en su desarrollo. En 1957 aceptó una plaza en la Universidad de Heidelberg, donde fue Rector en 1960, poco después de terminar el tomo primero de la versión alemana de su libro sobre espacios vectoriales topológicos [95]. Se trasladó a la Universidad de Frankfurt en 1965, donde se jubiló el 1971. Como profesor emérito de esta universidad completó el segundo tomo de su libro [95]. Durante su vida académica obtuvo numerosos premios y reconocimientos. Más detalles acerca de su vida y su trabajo pueden verse en [180]. Yo tuve la suerte de encontrarme con el profesor Köthe algunas veces en congresos en Alemania en los años 1980; en particular en el Instituto de Oberwolfach. Era un hombre muy cordial, que siempre daba ánimos a los jóvenes.

Debido a la estructura más complicada del espacio $\mathcal{D}$, que no es un espacio de Fréchet sino un espacio (LF), la representación de las distribuciones como valores frontera de funciones holomorfas es mucho más complicada. El primer paso en esta dirección, para distribuciones de una variable, lo dio Tillmann en 1961 usando un argumento de tipo Mittag-Leffler. El caso de distribuciones de varias variables y de distribuciones con valores en un espacio de Fréchet fueron resueltos por Vogt en 1973. Vogt, mejorando un ejemplo debido a Itano en 1968, había observado en su artículo que la representación de las distribuciones vectoriales no era válida para el espacio φ de las sucesiones nulas salvo un número finito de términos, que es un espacio (DF) en el sentido de Grothendieck, y estaba interesado en saber para qué espacios (DF) E se podría obtener una representación de las distribuciones con valores en E como valores frontera de funciones holomorfas en E.

Un análisis de su propia prueba permitió a Vogt demostrar en [169] el siguiente teorema, que fue esencial posteriormente:

Teorema. Vogt, 1975. *Sea E un espacio (DF) completo con una sucesión fundamental de acotados $(B_n)_n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) Las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, E)$ se pueden representar de modo natural como valores en la frontera de funciones holomorfas.

(2) El operador de Cauchy Riemann $\partial/\partial\overline{z}$ es sobreyectivo en $C^\infty(\mathbb{R}^2, E)$.

(3) E cumple la propiedad (A): existe n tal que, para cada k, existe p y $C > 0$ tales que $B_k \subset rB_n + (C/r)B_p$ para cada $r > 1$.

Mediante dualidad, la propiedad (A) proporciona una propiedad de los espacios de Fréchet, la condición (DN), llamada así por "norma dominante", que es un invariante topológico que se hereda por subespacios. Un espacio de Fréchet F tiene la propiedad (DN) si y sólo si su dual fuerte $E = F'$ cumple la propiedad (A). En 1977 Vogt demostró que un espacio de Fréchet nuclear satisface la condición (DN) si y sólo si es un subespacio del espacio s de las sucesiones de decrecimiento rápido, que es isomorfo al espacio $C^\infty[0, 1]$. El espacio s juega un papel muy importante en la teoría de espacios nucleares por el teorema de inmersión de Komura y en los teoremas de representación de espacios de distribuciones debidos a Valdivia y Vogt. Estos resultados fueron acompañados por la caracterización de los cocientes del espacio s mediante el invariante topológico (Ω), obtenida en 1980 en un trabajo conjunto con M.J. Wagner. Ahora bien, el resultado más relevante de ese artículo es el llamado teorema de escisión de Vogt y Wagner. Una sucesión exacta corta de espacios localmente convexos

$$0 \to F \to G \to E \to 0$$

cumple que la inclusión $i : F \to G$ es inyectiva, continua y abierta en la imagen, el cociente $q : G \to E$ es sobreyectiva, continua y abierta, y $i(F)$ coincide con el núcleo de q.

Teorema. Vogt, Wagner, 1980. *Sean E, F y G espacios de Fréchet nucleares. Si E cumple la condición (DN) y F la condición* (Ω)*, entonces la sucesión*

$$0 \to F \to G \to E \to 0$$

se escinde, es decir, la aplicación cociente $q : G \to E$ admite un operador lineal y continuo R inverso a la derecha, o sea, tal que $q(R(x)) = x$ para cada $x \in E$.

Las aplicaciones de este resultado a operadores de extensión de funciones, operadores de solución de ecuaciones en derivadas parciales, espacios de funciones analíticas o a la teoría estructural de espacios de Fréchet se sucedieron de inmediato. Un artículo panorámico excelente de Vogt que recoge los resultados hasta 1977 y que aún merece ser leído con atención es [171]. El teorema de escisión de Vogt y Wagner y las condiciones (DN) y (Ω) son analizados con detalle en el libro de Meise y Vogt [123]. El teorema de Vogt y Wagner se expone en ese libro para espacios de Fréchet hilbertizables.

Las condiciones (DN) y (Ω) fueron introducidas independientemente por Zahariuta en sus trabajos acerca de la clasificación isomorfa de los espacios de funciones holomorfas. Zahariuta mostró por ejemplo en 1980 que el espacio $H(V)$ de las funciones holomorfas en una variedad analítica compleja V cumple la condición (DN) si y sólo si toda función plurisubarmónica en V que es acotada superiormente es constante. En una prepublicación de finales de los años 1970, que nunca apareció, se daba también otra caracterización de los espacios (DF) completos con la propiedad (A) en términos de un teorema de interpolación de funciones analíticas con valores en E. En 1996 Domański y yo probamos en [17] que toda función débilmente real analítica con valores en un espacio de Fréchet F es fuertemente analítica si y sólo si el espacio F cumple la condición (DN), un resultado que ha utilizado Wengenroth en 2007 para extender un teorema de Allan acerca de funciones real analíticas con valores en un álgebra topológica de Fréchet.

Vogt introdujo en los años posteriores a 1977 otros invariantes topológicos de tipo (DN) y de tipo (Ω), y utilizó métodos de álgebra homológica para hacer un estudio abstracto profundo de la escisión de sucesiones exactas cortas de espacios de Fréchet en sus artículos [172] y [173]. En ellos investigó los pares de espacios de Fréchet (E, F) tales que toda sucesión exacta corta

$$0 \to F \to G \to E \to 0$$

se escinde, cuando uno de los espacios es nuclear o un espacio de sucesiones adecuado. De hecho, introdujo una condición necesaria (S_2^*), que Krone y Vogt demostraron que era equivalente cuando los dos espacios eran de sucesiones, y una condición suficiente muy útil en las aplicaciones. Un paso muy importante fue dado por Frerick en 1996, demostrando que la condición (S_2^*) es suficiente si ambos espacios son nucleares; resultado que fue finalmente mejorado por Frerick y Wengenroth para los cuatro casos considerados por Vogt poco después. Sólo muy recientemente Domański y Mastyło [45] han obtenido la equivalencia de la condición (S_2^*) en el caso en que los espacios de Fréchet sean hilbertizables, usando técnicas de interpolación de operadores. Versiones del teorema de escisión para sucesiones exactas cortas de espacios de Fréchet que no admiten una norma continua, como el espacio de las funciones C^∞, fueron presentadas por Vogt en 2004 en [176]. Estos resultados tienen aplicaciones a la escisión de complejos diferenciales de espacios de funciones C^∞, que ya habían sido estudiados anteriormente por Domański y Vogt [46].

Los resultados de Vogt mencionados arriba están relacionados con las profundas investigaciones de Grothendieck en la segunda parte de su tesis [74] acerca de la estructura topológica del producto tensorial proyectivo completado $E_b'\hat{\otimes}_\pi F$ para pares de espacios de Fréchet E y F, como explica Vogt en su artículo [172]. El marco general adecuado para todas estas cuestiones es el del functor derivado $Proj^1$ del functor límite proyectivo de Palamodov y Vogt, del que hemos hablado anteriormente y que permite obtener los teoremas de escisión como consecuencia, tal como se explica en el libro de Wengenroth [181]. Todos estos avances también fueron utilizados por Bierstedt y por mí para estudiar espacios (LF) ponderados de funciones continuas en 1994 y límites inductivos ponderados de funciones continuas con valores vectoriales en 1989. Algunos problemas abiertos que planteamos fueron resueltos por Mangino y por Albanese después de 1996.

En los últimos años se han estudiado teoremas de escisión en el contexto de los espacios (PLS). Los espacios (PLS) son los límites proyectivos numerables de límites inductivos numerables de espacios de Banach con aplicaciones compactas entre ellos. Constituyen la clase más pequeña de espacios localmente convexos que contiene los duales de los espacios de Fréchet Schwartz y es estable por productos numerables y subespacios cerrados. Esta clase contiene los espacios más importantes que aparecen en las aplicaciones analíticas del análisis funcional lineal, como los espacios de distribuciones o los espacios de las funciones real analíticas o ultradiferenciables. Para más información acerca de espacios (PLS) referimos al artículo panorámico de Domański [41]. Por ejemplo, Domański y Vogt [47] demostraron en el año 2000 que si E es un espacio (PLS) que es isomorfo a un subespacio de $\mathcal{D}'$ y F es un espacio (PLS) que es isomorfo a un cociente de $\mathcal{D}'$, entonces toda sucesión exacta corta

$$0 \to F \to G \to E \to 0$$

de espacios (PLS) se escinde. En trabajos conjuntos con Domański [18] y [19] hemos emprendido un estudio sistemático de la escisión de sucesiones exactas de espacios (PLS) y sus aplicaciones, especialmente a la dependencia paramétrica de ecuaciones en derivadas parciales en espacios de distribuciones o a la sobreyectividad de operadores en derivadas parciales en espacios de distribuciones con valores vectoriales. Una aportación relevante de estos artículos recientes es la introducción de varios invariantes topológicos para espacios (PLS) que juegan el papel de las condiciones (DN) y (Ω) y que, probablemente, jugarán un papel decisivo en investigaciones futuras. La escisión de sucesiones exactas de espacios (PLS) cuando interviene el espacio de las funciones real analíticas ha sido investigado por Vogt, por ejemplo en [177]. Es curioso que el siguiente problema planteado en [18] acerca de sobreyectividad permanece abierto: Sea $P(D)$ un operador sobreyectivo en $\mathcal{D}'(\Omega)$, ¿es $P(D)$ también sobreyectivo en $\mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R})$? La respuesta es afirmativa si Ω es convexo o si $P(D)$ es hipoelíptico. El resultado es relevante en conexión con la dependencia paramétrica de operadores en derivadas parciales.

4.4. Existencia de operador de solución para un operador en derivadas parciales con coeficientes constantes

Dentro de la correspondencia mencionada anteriormente entre Schwartz y Ehrenpreis en los años 1950, Schwartz le planteó el siguiente problema: Caracterizar los operadores $P(D)$ y los abiertos Ω tales que existe un operador lineal y continuo $R : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ tal que $P(D)R(g) = g$ para cada $g \in C^\infty(\Omega)$, o sea, que el operador $P(D)$ admita un operador lineal y continuo inverso a la derecha, también llamado operador de solución. Era conocido que todo operador hiperbólico cumple esta propiedad. Grothendieck mostró que los operadores elípticos no admiten inversa a la derecha lineal y continua; su demostración fue publicada por Trèves [157]. Lo mismo ocurre para los operadores hipoelípticos, como mostró Vogt [172]. Para operadores parabólicos, esto había sido demostrado previamente por Cohoon en 1971. El problema fue resuelto en 1990 por Meise, Taylor y Vogt [119].

Contrariamente a lo que sucede con la sobreyectividad, el operador $P(D)$ admite una inversa a la derecha en $C^\infty(\Omega)$ si y sólo si lo admite en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y esta propiedad es caracterizada mediante otras condiciones equivalentes. En particular es equivalente al hecho de que el abierto Ω cumpla una forma muy fuerte de P-convexidad, que los autores llaman P-convexidad con cotas. Otras caracterizaciones han jugado un papel relevante en investigaciones posteriores. Por ejemplo $P(D)$ admite un operador de solución lineal y continuo si y sólo si para cada conjunto compacto K en Ω existe otro compacto Q, conteniendo a K en su interior G tal que para cada solución $\mu \in \mathcal{D}'(G)$ de la ecuación homogénea $P(D)(\mu) = 0$ existe una solución global $\nu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de la ecuación homogénea tal que μ y ν coinciden en el interior de K. En el caso en que Ω sea convexo, $P(D)$ tiene inverso lineal y continuo a la derecha si y sólo si para cada conjunto compacto K en Ω existe otro compacto Q, conteniendo a K en su interior G tal que para cada punto $x \in \Omega \setminus G$ la ecuación $P(D)u = \delta_x$ tiene una solución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con soporte fuera de K; o sea, $P(D)$ admite soluciones fundamentales con grandes lagunas en el soporte.

Meise, Taylor y Vogt demuestran que las siguientes condiciones son equivalentes para un operador $P(D)$: (1) existe un abierto acotado Ω con frontera C^1 tal que $P(D)$ admite operador de solución, (2) $P(D)$ es hiperbólico en cada dirección no característica, (3) P y su parte principal P_m son igualmente fuertes y P_m es proporcional a un producto de m funciones lineales con coeficientes reales (una condición mostrada equivalente a (2) por Lanza de Christoforis en 1984), (4) $P(D)$ admite operador de solución en $\mathcal{D}'(G)$ para cada abierto convexo G de $\mathbb{R}^n$. En el caso de dos variables, $P(D)$ admite operador de solución si y sólo si $P(D)$ es hiperbólico, lo que no es cierto en general.

En el caso global, un operador definido en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ admite una inversa a la derecha lineal y continua si y sólo si se cumple la siguiente condición de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad cero $V(P) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(-z) = 0\}$ del polinomio P: Existe $R > 1$ tal que para cada $\rho > R$ existe $B > 0$ tal que cada función plurisubarmónica u en $\mathbb{C}^n$ que cumple (a) $u(z) \leq |\mathrm{Im} z| + O(\log(1 + |z|^2)), z \in \mathbb{C}^n$, y (b) $u(z) \leq \rho|\mathrm{Im} z|, z \in V(P)$, necesariamente cumple también (c) $u(z) \leq R|\mathrm{Im} z| + B\log(1 + |z|^2) + B, z \in V(P)$. Meise, Taylor y Vogt dan una versión de este resultado para el caso de abiertos convexos. Como consecuencia de ello obtienen ejemplos como los siguientes: el operador de Zeilon en $\mathbb{C}^3$, $P(z) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$ y el operador ultrahiperbólico en $\mathbb{C}^4$, $P(z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2$ admiten operador de solución, pero no son hiperbólicos. Otro ejemplo interesante es el siguiente en $\mathbb{C}^3$: $P(z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3$ no es hiperbólico en ninguna dirección, pero cumple que $P(D)$ admite un operador de solución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Es importante observar que las demostraciones de la existencia de operador de solución usando los principios de Phragmén-Lindelöf no proporcionan una fórmula para dicho operador, son existenciales. En el artículo [121] se pueden ver tales fórmulas para polinomios de grado dos.

Hörmander [88] fue el primero en caracterizar propiedades de un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes $P(D)$ en términos de una condición de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad cero $V(P)$ del polinomio. Concretamente, demostró que el operador $P(D)$ es sobreyectivo en el espacio $A(\mathbb{R}^n)$ de funciones real analíticas si y sólo si en cada punto real de la variedad cero $V(P_m)$ de la parte principal P_m del polinomio P, cumple una condición de tipo Phragmén-Lindelöf local, que no vamos a detallar. Esta condición, en el caso de polinomios homogéneos P, es equivalente a la condición (SPL) siguiente: existe $A \geq 1$ tal que para cada función plurisubarmónica u en la variedad $V(P)$ que cumple (a) $u(z) \leq |z| + o(|z|), z \in V(P)$, (b) $u(z) \leq 0, z \in V(P) \cap \mathbb{R}^n$, cumple también (c) $u(z) \leq A|\mathrm{Im} z|, z \in V(P)$. La implicación (a) y (b) implica (c) para el caso de funciones subarmónicas en $\mathbb{C}$, reemplazando $V(P)$ por $\mathbb{C}$, es exactamente el principio de Phragmén-Lindelöf, una extensión muy útil del principio del máximo para funciones analíticas o armónicas, que fue demostrado en 1904 por Phragmén, un alumno de Mittag-Leffler, y tomó su forma final en un artículo conjunto con Lindelöf de 1908. El refinamiento más importante fue obtenido por Carleman en 1923. Se pueden ver detalles en [67].

Una diferencia fundamental con la caracterización de Hörmander es que, mientras ésta sólo depende de la parte principal como éste probó en [88], la situación es diferente para la existencia de inversa lineal y continua a la derecha. Es cierto que si $P(D)$ admite un operador de solución, entonces $P_m(D)$ también lo hace, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, el operador $P(D)$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ dado por el polinomio $P(x, y, z) = x^2 - y^2 + \lambda z, |\lambda| = 1$, tiene inversa a la derecha lineal y continua si y sólo si $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Por ejemplo, Meise, Taylor y Vogt demuestran en [122] que un polinomio homogéneo P cumple que $P(D)$ tiene operador de solución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si cumple la condición (SPL) de Hörmander y ninguno de sus factores irreducibles es elíptico. Por otra parte, Braun, Meise y Taylor [28] probaron que un polinomio P homogéneo de grado $m \geq 2$ cumple que el operador $(P+Q)(D)$ admite una inversa a la derecha lineal y continua para todo polinomio Q de grado menor que m si y sólo si el gradiente de P es no nulo en todo punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, P es real salvo por una constante compleja y cada factor irreducible de P tiene un cero real no trivial. Los resultados de perturbación son variados y la situación aún no está completamente clarificada.

Sería deseable obtener condiciones geométricas en la variedad que caracterizaran los diferentes principios de tipo Phragmén-Lindelöf que describen el comportamiento de los operadores en derivadas parciales. Éste es un programa muy amplio y difícil. Braun, Meise, Taylor han dedicado muchos esfuerzos a entender el significado geométrico en la variedad de los principios de Phragmén-Lindelöf en este siglo, obteniendo muchos resultados importantes, que están relacionados con la geometría de variedades analíticas. Pueden consultarse por ejemplo en [29] y en las referencias que se dan en este artículo. Sus aportaciones han permitido estudiar muchos nuevos ejemplos. Además, la caracterización de las condiciones de Hörmander en términos geométricos de la variedad ha sido completada para curvas en $\mathbb{C}^2$ y para superficies en $\mathbb{C}^3$. Las profundas investigaciones en esta dirección continúan.

Poco después de la aparición del trabajo de Meise, Taylor y Vogt, Palamodov [129] demostró que todo complejo diferencial de matrices de operadores lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes en espacios de distribuciones definidas en un abierto convexo se escinde a partir del primer operador. Éstos son las extensiones naturales de los resultados mencionados anteriormente para un solo operador. Los resultados de Palamodov se probaron usando propiedades analíticas de los complejos involucrados y mucho análisis de Fourier. Domański y Vogt [46, 48] han presentado extensiones de estos resultados con métodos de análisis funcional y teoremas de escisión de sucesiones exactas. Sus teoremas son incluso válidos para complejos de operadores de convolución definidos en espacios de ultradistribuciones de tipo Beurling. El área de investigación abierta por Meise, Taylor y Vogt fue continuada por varios autores hasta la actualidad en otras direcciones, como operadores de convolución en distintos espacios de funciones real analíticas o espacios de ultradistribuciones. Hablaremos de ello más adelante.

4.5. Operadores de convolución, el principio fundamental de Ehrenpreis y límites inductivos ponderados

Las ecuaciones de convolución y los operadores de convolución constituyen un marco que contiene las ecuaciones en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes y ciertas ecuaciones integrales. Si $\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ es una distribución de soporte compacto no nula, se define el operador $T_\mu : C^\infty \to C^\infty$ mediante $T_\mu f(x) = (\mu * f)(x) := \langle \mu_y, f(x-y)\rangle$. Si μ es una función test, entonces se recupera el producto de convolución usual, que ya fue usado por Poisson en 1820 y más tarde por Volterra. Por otra parte, si μ es una suma finita de derivadas de la delta de Dirac, o sea si μ tiene soporte 0, entonces el operador T_μ es un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes. Un resultado clásico de Schwartz asegura que un operador lineal y continuo de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo es invariante por traslación si y sólo si viene dado por un producto de convolución. El excelente libro de Schwartz [147], acerca de métodos matemáticos para la física, expone varias aplicaciones de la convolución a la física, al cálculo simbólico de Heaviside y a las ecuaciones integrales de Volterra.

La transformada de Fourier Laplace $\hat{\mu}$ de una distribución de soporte compacto μ juega en los operadores de convolución el mismo papel que el polinomio $P(z)$ en las ecuaciones $P(D)f = g$. Recordamos que $\hat{\mu}(z) := \langle \mu_x, \exp(-i\langle x, z\rangle)\rangle$, $z \in \mathbb{C}^n$. Es conocido que $\hat{\mu}$ es una función entera y el teorema de Paley-Wiener-Schwartz determina su crecimiento. Con más precisión, la transformada de

Fourier Laplace establece un isomorfismo topológico entre el espacio de las distribuciones con soporte compacto $\mathcal{E}'$ dotado con la topología fuerte y un límite inductivo numerable $VH(\mathbb{C}^n) = \mathrm{ind}_k H(v_k)$ de espacios de Banach ponderados de funciones enteras definido como sigue: $f \in H(v_k)$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq C \exp(k|\mathrm{Im} z| + k \log(1 + |z|)), z \in \mathbb{C}^n$.

El estudio de los operadores de convolución en espacios de distribuciones fue iniciado por Malgrange en su tesis [111], en la que demostró un teorema de aproximación de soluciones de la ecuación homogénea y mostró cómo utilizar la existencia de soluciones fundamentales para tratar la ecuación no homogénea. Fue Ehrenpreis [54] quien introdujo la noción de distribución invertible, definió las funciones enteras lentamente decrecientes y mostró que T_μ es sobreyectivo en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si admite una solución fundamental E tal que $\mu * E = \delta$, y si y sólo si la función entera $\hat{\mu}$ es lentamente decreciente. El artículo fundamental acerca de los operadores de convolución en espacios de distribuciones definidas en abiertos arbitrarios fue publicado por Hörmander en 1962 [87]. Contiene la prueba del teorema de sobreyectividad de Hörmander y clarifica la importancia de los soportes singulares y la μ-convexidad fuerte. Hörmander probó también que si Ω es convexo, entonces toda función real analítica en Ω se encuentra en el rango $T_\mu(C^\infty(\Omega))$ del operador de convolución. La validez de este resultado para operadores de convolución en espacios de funciones ultradiferenciables fue analizada en 2001 en un artículo conjunto con Galbis y Momm [23]. Las ecuaciones de convolución hiperbólicas e hipoelípticas fueron estudiadas por Ehrenpreis entre 1960 y 1962.

Es bien conocido que toda solución u de una ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes $P(d/dx)u = 0$ para un polinomio no trivial P, es una solución exponencial polinómica $u(x) = \sum q_\lambda(x) \exp(\lambda x)$, donde la suma está extendida a las raíces λ de la ecuación $P(\lambda) = 0$ y los polinomios $q_\lambda(x)$ tienen grado estrictamente menor que la multiplicidad de λ como raíz. Este resultado se atribuye a Euler, de quien se celebra en 2007 el 300 aniversario de su nacimiento, y se presenta en cualquier texto elemental de ecuaciones diferenciales ordinarias. Uno de los teoremas más celebrados de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes es el llamado “Principio Fundamental” de Ehrenpreis, quien lo enunció en 1960, y que le permitió dar una genuina extensión del resultado clásico mencionado antes para soluciones de una ecuación en derivadas parciales lineal con coeficientes constantes homogénea $P(D)f = 0$. En 1969 Palamodov [127] dio una primera demostración independiente de la prueba con análisis de Fourier presentada por Ehrenpreis en 1970. La versión más manejable es debida a Hansen en el principio de los años 1980. Esta versión permite obtener, mediante la transformada de Fourier Laplace, una representación del dual del espacio de las soluciones de la ecuación homogénea como un espacio ponderado de funciones analíticas en la variedad cero del operador $V(P) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(-z) = 0\}$, que resultó instrumental en las investigaciones de Meise, Taylor y Vogt acerca de la existencia de operadores de solución.

Analicemos un momento la sobreyectividad del operador de convolución T_μ en el espacio $\mathcal{E}$ de las funciones C^∞. Este operador es suprayectivo si y sólo si su traspuesto T_μ^t es un homomorfismo topológico inyectivo. Con las identificaciones proporcionadas por la transformada de Fourier Laplace, esto es equivalente a que el operador de multiplicación por $\hat{\mu}$ tiene una inversa continua definida en su rango $\hat{\mu}VH(\mathbb{C}^n)$. Para determinar, como hizo Ehrenpreis, que las funciones enteras $\hat{\mu}(z)$ que son lentamente decrecientes son precisamente las que satisfacen esta propiedad, podría ser de ayuda disponer de una descripción manejable de las seminormas del límite inductivo $VH(\mathbb{C}^n)$ que permita estimaciones directas para mostrar la continuidad. Ésta es la base del "problema de la descripción proyectiva" de límites inductivos ponderados de funciones continuas u holomorfas, al que he dedicado muchos esfuerzos a los largo de los años junto con varios coautores, como Bierstedt, Meise y Taskinen entre otros. Los límites inductivos ponderados de funciones holomorfas aparecen de modo natural en distintos contextos, como los espacios analíticamente uniformes de Ehrenpreis [55], en el trabajo de Berenstein y Dostal [2], en la representación de distribuciones como valores frontera de funciones holomorfas, en teoría espectral, etc. Bierstedt, Meise y Summers escribieron un artículo fundamental en 1982 [9], que tuvo mucha influencia, e incluso proporcionó una caracterización muy manejable de los acotados en los espacios de sucesiones de Köthe y de la dualidad entre espacios escalonados y co-escalonados. Referimos a nuestro artículo panorámico [7] con Bierstedt para más detalles en esa dirección.

Comencé a trabajar en este tema en mi estancia postdoctoral en la Universidad de Paderborn en 1983. Desde entonces he resuelto varios problemas abiertos y he realizado contribuciones que han supuesto avances interesantes. No es ahora el momento de revisarlos aquí; puede consultarse información en el artículo panorámico de Bierstedt [5]. Cuando llegué a Paderborn en Mayo de 1983 yo tenía una formación sólida en análisis funcional abstracto obtenida en mi trabajo junto a Valdivia. Aprendí y trabajé mucho en Alemania aquel verano y la experiencia fue muy importante para mí e influyó en mi forma de ver el análisis funcional. La idea de que éste tenía que estar necesariamente relacionado con los espacios de funciones, las ecuaciones en derivadas parciales o los problemas analíticos era nueva para mí y se convirtió desde entonces en un principio básico, que he tratado de transmitir a todos mis discípulos.

Completé allí la formación que había recibido de Valdivia acerca del modo de escribir artículos de matemáticas adecuadamente: la importancia de la introducción y la motivación, buenas y actuales referencias, una organización correcta y unas demostraciones claras y concisas. Mi agradable y fructífera colaboración con mis amigos Klaus Bierstedt y Reinhold Meise ha continuado desde entonces. He escrito con ellos más de treinta artículos de investigación y su influencia en mi trabajo ha sido muy importante. Valgan como ejemplo las referencias recientes [8, 24]. Guardo un gran recuerdo de los más de tres años en varias estancias prolongadas que he pasado en Alemania y estoy muy agradecido a mis amigos, colaboradores y a las instituciones que han subvencionado todas esas estancias, en particular a la Fundación Alexander von Humboldt.

4.6. Los operadores pseudodiferenciales. El análisis tiempo-frecuencia

A partir del estudio de las ecuaciones integrales singulares, Boutet de Monvel, Krée, Kohn, Nirenberg y Hörmander desarrollaron desde 1965 una teoría de operadores pseudodiferenciales que proporciona un contexto adecuado para el estudio de los operadores lineales en derivadas parciales con coeficientes variables que incluye, como casos particulares, los operadores solución de ciertos operadores hipoelípticos. El origen de la teoría se encuentra en las investigaciones de las integrales singulares que aparecen en problemas elípticos por Calderón, Zygmund, Seeley y otros en 1957-59. Un estudio sistemático de esta importante línea de trabajo puede verse en los libros de Hörmander [89]. El texto de Saint Raymond [140] hace una presentación elemental y accesible.

El análisis armónico se puede entender como la investigación de la descomposición de complicados objetos matemáticos en bloques más simples. El ejemplo más relevante de tal descomposición son las series de Fourier, en el que una función periódica se desarrolla en sus modos fundamentales o frecuencias puras. Del mismo modo, la transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ de una función $f(x)$ de n variables y su formula de inversión estudian el contenido de f en frecuencia. Detrás de muchas de estas descomposiciones se encuentran algunos operadores que juegan un papel central en el análisis armónico, como el operador de traslación $T_x f(t) := f(t-x)$, el operador de dilatación $D_a f(t) = |a|^{-n/2} f(t/a)$ y el operador de modulación $M_\xi f(t) := \exp(2\pi\langle \xi, t\rangle) f(t)$. Entonces se tiene

$$(M_\xi f)^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega - \xi), \ (D_a f)^\wedge(\omega) = D_{1/a}\hat{f}(\omega),$$

y el conjunto de los tres operadores es invariante por la transformada de Fourier. Cuando el análisis se basa en traslaciones y dilataciones, se habla de análisis de tiempo-escala. Cuando se produce la combinación de los tres operadores nos referimos al análisis de tiempo-frecuencia. Éste es cierto tipo de análisis de Fourier que trata el tiempo y la frecuencia de una manera simétrica.

El análisis tiempo-frecuencia se originó con los trabajos de Weyl y Von Neumann de los años 1930 sobre las bases matemáticas de la mecánica cuántica y con el trabajo de Gabor de 1946 acerca de la teoría de la información. Sus problemas originales eran la formulación de principios de incertidumbre, expansión de estados coherentes y cuantización a través de operadores pseudodiferenciales. Más precisamente, Weyl introdujo un cierto tipo de operadores pseudodiferenciales que se conocen hoy como operadores de Weyl, que se pueden describir como una superposición de traslaciones y modulaciones y han sido considerados en ingeniería para la descripción de sistemas no estacionarios y estudio de señales. El libro de Grochenig [70] presenta una introducción excelente al análisis tiempo-frecuencia.

La combinación del tiempo-frecuencia y del tiempo-escala participa en los resultados más profundos y difíciles en análisis de Fourier. Por ejemplo la demostración del celebrado teorema de Carleson sobre la convergencia casi por todas partes de series de Fourier por Lacey y Thiele [99] depende fuertemente de una sutil descomposición del operador maximal, el operador de Carleson, respecto de un conjunto de desplazamientos tiempo-frecuencia y dilataciones de cierta función. Del mismo modo, métodos combinados de tiempo-frecuencia y tiempo-escala aparecen en la solución de la conjetura de Calderón acerca de la acotación de la transformada bilineal de Hilbert por Lacey y Thiele [100]. En los últimos años han emergido nuevos temas y técnicas, por ejemplo en relación con el análisis de Gabor o con las ondículas (wavelets), debido en parte a la intensa interacción con el procesamiento de imágenes y señales y las aplicaciones a la ingeniería. El libro de Hogan y Lakey [85] cubre muchos de los temas aquí mencionados.

En su artículo [83] acerca de los caminos de la matemática hacia el futuro, Miguel de Guzman señalaba como problema concreto la necesidad de desarrollar nuevas formas de computación, que permitiera enfrentarse a los nuevos retos que provienen de las matemáticas de la vida, la investigación de las funciones de la mente humana, la seguridad informática o el tratamiento de imágenes. Con la llegada de las tecnologías digitales, la traducción de información analógica en representaciones digitales de modo fiable se ha convertido en uno de los grandes retos. El método de traducción, llamado muestreo, requiere que se seleccione suficiente información del objeto analógico para que se pueda reproducir en forma digital, de modo que no se pierda información clave. De alguna forma el análisis armónico es la herramienta matemática adecuada para estudiar y procesar las señales. Se trata de diseñar mecanismos que permitan el tratamiento de señales provenientes de sistemas complejos. El análisis armónico busca representaciones convenientes de objetos complicados para permitir tareas como comprimir datos de imágenes, hacer cálculos complicados rápidamente o ampliar imágenes médicas. Recientemente, Candès ha desarrollado un nuevo mecanismo de muestreo, llamado "muestreo compresivo", a cuya presentación dedicó su conferencia [33] en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid en 2006. Esta nueva teoría puede permitir los procedimientos de muestreo y compresión de datos simultáneamente de modo más rápido, permitiendo obtener señales con mucha más resolución con menos sensores. Uno de los puntos centrales del procesamiento de señales es la teoría de densidad del muestreo de Nyquist y Shannon, o sea, que el número de muestras necesarias para reconstruir una señal con un cierto error estará determinada por el menor intervalo que contiene el soporte del espectro de la señal que se estudia. La teoría del muestreo compresivo de Candès es una alternativa a este punto de vista. Su trabajo promete tener influencia en muchas tecnologías modernas, como el teléfono móvil, tecnología médica, seguridad aeronáutica, conocimiento del universo, búsqueda de petróleo, teoría de la información, compresión de imagenes o diseño gráfico por ordenador.

El estudio de los operadores pseudodiferenciales con métodos de análisis tiempo-frecuencia es un área de investigación muy activa. Podemos mencionar, por ejemplo, las contribuciones de Benyi, Feichtinger, Gröchenig, Heil y Okoudju. Una clase importante de operadores de Weyl la forman los conocidos operadores de localización. Básicamente, un operador de localización asocia a una señal dada (una función de cuadrado integrable) una versión filtrada de la misma, después de modificar o eliminar una parte del espectro de frecuencias. Cordero y Gröchenig [36] estudiaron condiciones que garantizan que un operador de localización es acotado o pertenece a cierta clase de Schatten. Fernández y Galbis [58] consideran operadores de localización con símbolo en cierta clase de modulación (subclase de las distribuciones atemperadas estudiada por Feichtinger y Gröchenig que miden la concentración en tiempo-frecuencia de la señal) y caracterizan cuándo estos operadores son compactos.

5. Extensión de funciones diferenciables

5.1. El teorema de Borel, el teorema de Whitney y operadores de extensión de funciones de clase C^∞

En 1895, E. Borel probó que para cada sucesión $(c_n)_n$ de números complejos existe una función f de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(0) = c_n$ para cada $n = 0, 1, ...$ En términos funcional analíticos, puede enunciarse diciendo que la aplicación de Borel $B(f) := (f^{(\alpha)}(0))_\alpha$ es sobreyectiva desde el espacio $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ en el espacio de todas las sucesiones de números complejos. Hubo varias mejoras de este resultado debidas a Bernstein en 1913, Ritt en 1916 y otros, en particular acerca del hecho de que la función f pueda ser elegida real analítica fuera del origen. En su demostración original Borel usó series de Fourier y la función que construyó era periódica. La demostración que puede encontrarse en cualquier libro introductorio de teoría de distribuciones, debida a Mirkil en 1956, utiliza funciones de clase C^∞ de soporte compacto y una serie de funciones. Tal prueba no permite obtener información acerca de la real analiticidad fuera del origen.

En 1934, H. Whitney [182, 183] generalizó todos estos resultados para el caso de un subconjunto cerrado arbitrario $F \subset \mathbb{R}^N$. En el caso de funciones indefinidamente diferenciables caracterizó los jets $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ en el conjunto cerrado F, φ_α continua en F para todo α, que provienen de una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, es decir, tales que $\varphi_\alpha(x) = D^\alpha f(x)$ para cada multi-índice α y cada $x \in F$. También obtuvo el resultado en el caso de funciones de clase C^m, y en ese caso demostró incluso que la extensión se puede hacer de modo lineal y continuo, si se dota al espacio de los jets de orden m en F de una topología natural de espacio de Fréchet.

En el caso de las funciones de clase C^∞, Whitney probó que la función f puede tomarse real analítica en $\mathbb{R}^N \setminus F$, y de hecho holomorfa en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^N$ que contiene a $\mathbb{R}^N \setminus F$. Whitney introdujo el espacio $\mathcal{E}(F)$ de los jets de orden infinito en F, dotándolo de una topología de espacio de Fréchet, y preguntó si la restriccón lineal continua y sobreyectiva $R : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(F)$ admite una inversa lineal y continua a la derecha, es decir, cuándo existe un operador de extensión lineal y continuo de F a $\mathbb{R}^N$ en el contexto C^∞, similar al que existe en el caso de orden finito.

Hassler Whitney nació en 1907 en Nueva York y falleció en 1989 en Suiza. Se graduó en la Universidad de Yale en 1928 y realizó el doctorado en la Universidad de Harvard bajo la dirección de Birkhoff acerca de grafos en 1932. Permaneció en Harvard, aunque realizó una visita a Princeton desde 1931 a 1933. Desde 1943 a 1945 fue miembro del Panel de Matemática Aplicada del Comité de Investigación en Defensa Nacional, trabajando en sistemas de control de fuego. Fue catedrático en Harvard hasta que aceptó una plaza en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton en 1952, donde permaneció hasta su jubilación en 1972. En 1983 ganó el Premio Wolf y en 1985 el Premio Steele. Whitney tuvo un amplio rango de intereses y realizó aportaciones muy relevantes en muchos temas, como combinatoria, funciones diferenciables, espacios analíticos, variedades diferenciables, topología algebraica, etc. Sus aportaciones fundamentales acerca de la extensión de funciones diferenciables fueron obtenidas en la década de 1930. Retornó a los problemas de extensión al final de los 1940, respondiendo una pregunta formulada por L. Schwartz acerca de ideales de funciones diferenciables. El problema, tal como lo recuerda Schwartz en [150], era demostrar que todo ideal cerrado en el espacio de las funciones C^∞ en $\mathbb{R}^N$ está engendrado por sus ideales puntuales. En 1947 en un coloquio de análisis armónico en Nancy, Schwartz expuso cómo su conjetura sobre ideales de funciones diferenciables resolvía inmediatamente un problema de síntesis armónica en el espacio S. Schwartz le propuso el problema a Whitney, que contestó que le daría le respuesta en un cuarto de hora. No fue tan rápido, pero seis meses después envió la solución, que era, según palabras de Schwartz, notable (“*remarquable*”). Las nuevas ideas introducidas por Whitney tuvieron una gran influencia en el trabajo de Malgrange acerca de ideales de funciones diferenciables en los años 1960.

Mityagin mostró en 1961 que no existe un operador de extensión lineal y continuo de $\{0\}$ a $\mathbb{R}$, pero que sí existe de $[-1, 1]$ a $\mathbb{R}$. Seeley y Mityagin, independientemente, mostraron que existe operador de extensión de un semiespacio a todo $\mathbb{R}^N$. Otros resultados positivos y negativos fueron obtenidos por Stein, Bierstone, Plesniak y otros. En 1979 Tidten dio la primera caracterización de la existencia de un operador de extensión en el caso de un conjunto compacto F en términos de la condición (DN) de Vogt. La importancia de la condición (DN) y del teorema de escisión de Vogt y Wagner en este contexto se pone de manifiesto en el trabajo de Bierstone y Schwarz [10]. Las aportaciones más recientes e interesantes en esta dirección han sido obtenidas por Frerick en su Habilitación [63] en la Universidad de Wuppertal, Alemania en 2001.

Posiblemente una de las razones originales para Whitney en su análisis de la extensión de funciones diferenciables era la posibilidad de utilizar la solución de una ecuación en derivadas parciales de funciones definidas en todo el espacio para resolver la ecuación para funciones definidas en un subconjunto cerrado. Si hay extensión es claro como hacerlo, se extiende la incógnita, se resuelve la ecuación en todo el espacio y se restringe la solución. Es claro también como proceder en el caso de la existencia de operadores de extensión lineal y continuos de funciones para encontrar operadores de solución de ecuaciones en derivadas parciales cuando las funciones incógnitas están definidas en un subconjunto.

La existencia de operador de extensión lineal y continuo de funciones indefinidamente diferenciables y la partición de Whitney juegan un papel importante en los resultados de representación de espacios de funciones C^∞ debidos a Valdivia y a Vogt de 1978-1983. Ésta fue la razón por la que me familiaricé con ellos en conexión con mi tesis doctoral. Unos años después comencé mi colaboración con Meise y Taylor acerca de la extensión del teorema de Whitney para funciones ultradiferenciables, tema del que trataremos más adelante. Este tema me ha proporcionado la oportunidad, más recientemente, de volver a encontrarme con el trabajo de Valdivia, tan activo como siempre, como veremos a continuación.

La analiticidad de la función extendida fuera del conjunto F sólo volvió a aparecer en el trabajo conjunto [142] de Schmets y Valdivia en 1997, en el que demostraron el siguiente resultado.

Teorema. Schmets, Valdivia, 1997. *Si existe un operador lineal y continuo de extensión $\mathcal{E}(K) \to C^\infty(\mathbb{R}^N)$ para K compacto, entonces existe tal operador de forma que las extensiones son holomorfas en*

$$(\mathbb{R}^N \setminus K)^* := \{x + iy \in \mathbb{C}^N;\ x \in \mathbb{R}^N, |y| < d(x, K)\}.$$

Dos años más tarde, Langenbruch [102] dio incluso una fórmula explícita para obtener este resultado. En 2002, Frerick y Vogt [64] caracterizaron aquellos cerrados F para los cuales existe un operador de extensión lineal y continuo $\mathcal{E}(F) \to C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que la extensión de cada jet es real analítica en $\mathbb{R}^N \setminus F$ como sigue: para cada $r > 0$ la frontera de la unión de las componentes de $\mathbb{R}^N \setminus F$ que tienen intersección no vacía con la bola de centro 0 y radio r es acotada. Resolvieron de este modo un problema planteado por Schmets y Valdivia.

En el caso de funciones de una variable Langenbruch, en su artículo [105] publicado en 2003 en la revista RACSAM de esta Academia, probó que todo jet de Whitney de orden infinito definido en un cerrado $F \subset \mathbb{R}$ puede ser extendido a una función C^∞ que es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus F$. Así, el dominio en el que las extensiones pueden elegirse analíticas es lo más grande posible. Debe hacerse notar que un resultado de este tipo no es posible en varias variables por el teorema de Hartog. El paso final en esta dirección fue realizado por Boonen y Frerick en 2003. Demostraron que la frontera de un conjunto cerrado F de $\mathbb{R}$ es compacta si y sólo si en caso de que exista operador de extensión lineal y continua de $\mathcal{E}(F)$, las extensiones pueden ser escogidas de forma que sean holomorfas en $\mathbb{C} \setminus F$.

5.2. Una versión precisa del teorema de Whitney. El trabajo de Fefferman

Charles Fefferman, de la Universidad de Princeton y ganador de la medalla Fields en 1978, que ha obtenido importantes resultados en análisis real y complejo reviviendo el estudio de problemas clásicos del análisis, ha dedicado en el presente siglo una serie de artículos al siguiente problema que fue planteado por Whitney en 1934 [182, 184]:

Supongamos que nos dan una función $f : E \to \mathbb{R}$, donde E es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. ¿Cómo podemos decidir si la función f se extiende a una función F de clase $C^{m-1,1}$ en todo $\mathbb{R}^n$?

Aquí $m \geq 1$ y la clase $C^{m-1,1}$ está formada por las funciones cuyas derivadas parciales de orden $(m-1)$ son de clase Lipschitz. Este problema para funciones de clase C^m fue planteado por Whitney explícitamente en 1934. La solución de Fefferman viene dada por la siguiente forma precisa del teorema de extensión de Whitney.

Teorema. Fefferman, [56], 2005. *Dados $m, n \geq 1$, existe $k = k(m,n)$ tal que se cumple lo siguiente: Dada $f : E \to \mathbb{R}$, supongamos que para cada k puntos distintos $x_1, ..., x_k \in E$, existen polinomios de grado $(m-1)$ $P_1, ..., P_k$ en $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo:*

(a) $P_i(x_i) = f(x_i), i = 1, ..., k,$
(b) $|\partial^\beta P_i(x_i)| \leq M,\ i = 1, ..., k,\ |\beta| \leq m-1$ *y*
(c) $|\partial^\beta (P_i - P_j)(x_i)| \leq M|x_i - x_j|^{m-|\beta|},\ i, j = 1, .., k,\ |\beta| \leq m-1,$

con M independiente de los puntos $x_1, ..., x_k$. Entonces f se extiende a una función $C^{m-1,m}$ en todo $\mathbb{R}^n$.

El recíproco de este teorema es cierto, y el orden de magnitud de la constante M puede calcularse a partir de los valores de f en los puntos $x_1, ..., x_k$, como hace Fefferman en su artículo. El resultado correspondiente para funciones de clase C^m, o sea, la pregunta original de Whitney, es contestada por Fefferman en 2006 [57]. La caracterización se obtiene en términos de una nueva noción, llamada refinamiento de Glaeser de una función, que asocia a puntos de E un subespacio afín del espacio de todos los polinomios en $\mathbb{R}^n$ de grado a lo sumo m. Un paso importante consiste en demostrar que una sucesión decreciente de subespacios se estabiliza, para lo cual Feffereman usa ingeniosos lemas debidos a Glaeser en 1958 y a Bierstone, Milman y Pawłucki en 2003. La caracterización afirma que la función f se extiende a una función de clase

C^m si y sólo si cierto subespacio estable asociado a cada punto $x \in E$ es no vacío. Fefferman también ha considerado en otros trabajos publicados en la Revista Iberoamericana de Matemáticas las extensiones mediante operadores lineales y continuos.

Para probar el teorema enunciado anteriormente, Fefferman considera funciones F con norma $C^{m-1,1}$ acotada en $\mathbb{R}^n$, que coinciden con f en conjuntos finitos $E_1 \subset E$ arbitrariamente grandes. De este modo llega a lo que llama "el problema de la extensión finita": *Dada una función $f : E \to \mathbb{R}$ definida en un subconjunto finito E de $\mathbb{R}^n$, obtener cotas superiores e inferiores computables del ínfimo de las normas C^m de todas las funciones F suaves en $\mathbb{R}^n$ que coinciden con f en E.* Como observa Fefferman, este problema, para E finito, es equivalente a su version $C^{m-1,1}$. El problema de la extensión finita está relacionado con la posibilidad de que un científico experimental trate de determinar si una función desconocida $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^m haciendo un número finito de mediciones, es decir, determinando F en un conjunto finito grande E. Por supuesto, no podrá decidir si F es de clase C^m tomando una cantidad finita de valores, sin embargo podrá preguntarse si los datos fuerzan que la norma C^m de la función F sea grande, o si crece demasiado conforme mayor sea el número de datos calculados. Puesto que las medidas reales están sometidas a un error experimental, Fefferman obtiene una solución del problema con cota de error, un resultado que no enunciaremos aquí. Un argumento de compacidad, usando el teorema de Ascoli, le permite concluir el resultado principal. Trabajo previo muy interesante en esta dirección había sido presentado por Brundnyi y Shvartsman. Todas estas aportaciones recientes de Fefferman y otros autores acerca de distintos aspectos del clásico teorema de extensión de Whitney constituyen una impresionante contribución al análisis matemático, aportando muchas nuevas técnicas e ideas que serán sin duda explotadas y reelaboradas en un futuro próximo.

6. Funciones ultradiferenciables

Una función $f(x)$ es real analítica en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si $|f^{(n)}(x)| \leq ch^n n!$, $n = 0, 1, 2, .., x \in [a, b]$, donde las constantes c y h dependen de la función f, pero no del punto x o del orden de derivación n. Borel, hacia el final del siglo XIX, introdujo la idea de casi analiticidad en su intento de generalizar el principio de prolongación analítica. Deseaba determinar las funciones C^∞ en un intervalo con la propiedad de que estuvieran determinadas por los valores de sus derivadas en un punto del intervalo. En un artículo fundamental en Acta Mathematica de 1901 mostró ejemplos de clases de funciones no real analíticas que se anulan idénticamente en todo un intervalo tan pronto como sus derivadas se anulan en un punto. El problema natural de caracterizar las funciones casi analíticas fue tomando cuerpo, y Hadamard en 1912 tuvo la intuición de formular la cuestión de modo preciso. Dada una sucesión $M := (M_n)_n$ creciente de números estrictamente positivos, se define la clase $\mathcal{E}_M[a,b]$ como el conjunto de todas las funciones f de clase C^∞ en el intervalo $[a,b]$ tales que existen $c > 0$ y $h > 0$ cumpliendo $|f^{(n)}(x)| \leq ch^n M_n,\ n = 0,1,2,..,\ x \in [a,b]$. La clase $\mathcal{E}_M[a,b]$ se llama casi analítica si $f^{(n)}(x_0) = 0,\ n = 0,1,2,...$ para $f \in \mathcal{E}_M[a,b]$ implica que la función f es idénticamente nula en $[a,b]$. Hadamard preguntó por una caracterización de las sucesiones $(M_n)_n$ tales que la clase $\mathcal{E}_M[a,b]$ es casi analítica. Holmgren ya había demostrado en 1908 que la clase correspondiente a $M_n := n^{n(1+\varepsilon)},\ \varepsilon > 0$, no era casi analítica. El problema de Hadamard desató gran interés. Denjoy en 1921 determinó una condición suficiente. Carleman presentó una solución completa en 1923 en una serie de artículos magistrales mostrando que una variación mínima de la condición de Denjoy era necesaria y suficiente. De hecho, Carleman resolvió el problema reduciéndolo al siguiente propuesto por Watson en 1916, que había resuelto anteriormente: Sea $\varphi(z)$ una función analítica acotada en el disco $|z-1| < 1$ satisfaciendo las desigualdades $|\varphi(z)| \leq c_0 c_1^n m_n |z|^n,\ n = 0,1,...,\ |z-1| < 1$, donde $(m_n)_n$ es una sucesión de números positivos. La cuestion es determinar qué restricciones se deben imponer a la sucesión $(m_n)_n$ para que la función φ sea necesariamente nula. Una demostración del teorema de Denjoy-Carleman puede verse por ejemplo en el texto de Rudin [138].

Las clases de funciones $\mathcal{E}_M[a,b]$ definidas anteriormente para una sucesión $M = (M_n)_n$ se suelen llamar clases de Carleman. Se asumen las condiciones $M_0 = 1$, $\text{ínf}_n (M_n/n!)^{1/n} > 0$, que aseguran que las funciones real analíticas están incluidas en la clase de Carleman $\mathcal{E}_M$, y también que la sucesión sea logarítmicamente convexa, o sea, que $(M_{n+1}/M_n)_n$ sea creciente. Cartan y Gorny probaron en 1940 que esta última condición no es restrictiva. Numerosas cuestiones acerca de las clases de Carleman fueron expuestas por Mandelbrojt en [113]. Gevrey en 1913, en una memoria acerca de la regularidad de soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales, en la cual generalizaba el trabajo previo de Holmgren y Hadamard acerca de la ecuación del calor en dos dimensiones, introdujo las clases de funciones no casi analíticas más importantes, las llamadas hoy día clases de Gevrey, que corresponden a la sucesión $M_n = (n!)^s, s > 1$. Ricardo San Juan, que fue el director de tesis del Valdivia, y Baltasar Rodríguez Salinas, que fueron ambos miembros de esta Real Academia, realizaron importantes aportaciones acerca de las clases (no) casi analíticas. Muchos detalles interesantes pueden verse en el trabajo panorámico de Thilliez [156]. En los años 1960 Roumieu, un estudiante de Schwartz, extendió la teoría de las distribuciones usando las clases no casi analíticas, en las que existen funciones no triviales con soporte compacto, introduciendo así las ultradistribuciones.

En la literatura más actual dos modos de definir las funciones ultradiferenciables son los más usados. Komatsu [93] hace una exposición sistemática próxima a las clases de Carleman tal como se han expuesto arriba, midiendo el comportamiento de las derivadas de la función en términos de una sucesión $(M_n)_n$. Por otra parte Beurling, ver Björck [12], observó que es posible también usar un peso ω para medir la suavidad de funciones de clase C^∞ con soporte compacto mediante el comportamiento de su transformada de Fourier. Este método fue modificado por Braun, Meise y Taylor en [27], mostrando que esas clases se podían definir también mediante el comportamiento de las derivadas, si se usa la conjugada de Young de la función convexa $t \mapsto \omega(e^t)$. De este modo, suprimiendo la condición de subaditividad en el peso impuesta por Björck, se introdujeron unas clases mucho más flexibles por la facilidad de construir pesos. El artículo de Braun, Meise y Taylor, aunque publicado en 1990, ya estaba disponible en versiones preliminares cuando realicé una estancia de varios meses en Düsseldorf desde diciembre de 1986 hasta abril de 1987, en la que inicié mi colaboración con Reinhold Meise acerca de los teoremas de Borel y de Whitney para funciones ultradiferenciables. Comencé a manejar herramientas que luego han jugado un papel importante en mis investigaciones posteriores, como el teorema de Phragmén-Lindelöf o los métodos L^2 de Hörmander para la ecuación $\overline{\partial}$. En 2006, en un artículo conjunto con Meise y Melikhov, realizamos una comparación precisa de las dos definiciones posibles de funciones ultradiferenciables en un artículo que dedicamos al 65 aniversario de nuestro amigo Jean Schmets, que es miembro correspondiente de esta Real Academia.

Para un subconjunto abierto G de $\mathbb{R}^n$, los espacios de funciones ultradiferenciables de tipo Beurling se denotan mediante $\mathcal{E}_{(M_p)}(G)$ y $\mathcal{E}_{(\omega)}(G)$. Son espacios de Fréchet, o sea, metrizables y completos como el espacio de las $C^\infty(G)$ de las funciones de clase C^∞. Por otra parte, los espacios de funciones ultradiferenciables de tipo Roumieu se denotan por $\mathcal{E}_{\{M_p\}}(G)$ y $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(G)$. Tienen una estructura mucho más complicada, que es semejante a la del espacio de funciones real analíticas a los que dedicamos el capítulo siguiente, son límites proyectivos numerables de límites inductivos numerables de espacios de Banach, espacios (PLS). Escribiremos $\mathcal{E}_*$ cuando queramos referirnos a cualquiera de estas clases. Los espacios de funciones ultradiferenciables constituyen clases de funciones intermedias entre las funciones real analíticas y las funciones de clase C^∞. La importancia de las clases no casi analíticas para la teoría de distribuciones y las ecuaciones en derivadas parciales reside en lo siguiente: estas clases tienen funciones de soporte compacto no triviales y el conjunto de ellas es más pequeño que el espacio de las funciones test de Schwartz, de este modo, su dual topológico cuando se le dota de su topología natural de límite inductivo, es más grande que el espacio de las distribuciones. Éste es el espacio de las ultradistribuciones, que permite obtener más soluciones "débiles" de ecuaciones en derivadas parciales.

6.1. El teorema de extensión de Whitney para funciones no casi analíticas

Varios autores, como Carleson, Ehrenpreis o Komatsu habían investigado condiciones para extender el teorema de Borel al contexto de las funciones ultradiferenciables. Cuando yo comencé a trabajar con Meise en temas relacionados en 1986, Meise y Talyor [116, 117] ya habían iniciado un estudio sistemático. Por otra parte, Bruna [32] había presentado una extensión del teorema de Whitney para ciertas clases de funciones no casi analíticas definidas como en el artículo de Komatsu [93], imponiendo algunas condiciones adicionales en la sucesión $(M_n)_n$. En mi primer trabajo en esa dirección con Meise y Taylor obtuvimos una caracterización de los pesos ω para los cuales se cumple el teorema de Borel en las clases de funciones no casi analíticas de Roumieu, que era una continuación de las investigaciones en el caso Beurling de mis coautores [117]. Petzsche [130] obtuvo una caracterización completa en 1988 para las clases $\mathcal{E}_{(M_p)}$ y $\mathcal{E}_{\{M_p\}}$. Algunas imprecisiones en el artículo de Petzsche fueron corregidas años más tarde por Schmets y Valdivia [145].

Una versión satisfactoria del teorema de extensión de Whitney para las clases $\mathcal{E}_{(\omega)}$ y $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$, que cubría el resultado de Bruna, fue obtenido en 1991 en el trabajo conjunto con Braun, Meise y Taylor [15]. El paso fundamental de la demostración es la construcción de ciertas funciones meseta con un comportamiento óptimo respecto del peso ω. Este teorema de extensión ha sido utilizado por muchos autores en distintas áreas. Por ejemplo, Kaballo lo usó para investigar operadores integrales con núcleos ultradiferenciables. Chaumat y Chollet [35] presentaron en 1994 el teorema de extensión de Whitney para clases no casi analíticas en el sentido de Komatsu.

La existencia de un operador de extensión lineal y continuo para funciones no casi analíticas fue considerado en primer lugar por Meise y Taylor en la mitad de los años 1980 en sus artículos [116] y [118]. El caso de las clases de Beurling $\mathcal{E}_{(M_p)}$ fue investigado por Petzsche y por Langenbruch en 1988. Meise y Taylor caracterizaron los pesos ω tales que existe un operador lineal y continuo de extensión desde el punto a todo $\mathbb{R}^n$ en el contexto de clases de Beurling; un fenómeno que no sucede para las funciones de clase C^∞ como observó Mityagin. Su trabajo fue completado por Franken, que realizó su tesis doctoral bajo la dirección de Meise en 1994. El caso de las funciones de tipo Roumieu es mucho más dificil y aún existen problemas abiertos. Langenbruch

[101] mostró que no hay un operador de extensión para funciones ultradiferenciables de tipo Gevrey desde un intervalo. Su demostración usa la categoría de los espacios de Fréchet "tame" y una variante apropiada de la propiedad (DN) de Vogt.

En toda esa vasta literatura, la componente real analítica del teorema de Borel y Ritt o del teorema de extensión de Whitney no fue considerada hasta que Valdivia demostró en 1996 el siguiente resultado en [167, 168]:

Teorema. Valdivia, 1996. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Se cumple:*
1. Si el jet $\varphi \in \mathcal{E}_*(K)$ proviene de una función $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^N)$, entonces también proviene de un elemento del mismo espacio que es real analítico en $\mathbb{R}^N \setminus K$.
2. Si existe un operador de extensión lineal y continuo $\mathcal{E}_*(K) \to \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^N)$, entonces existe tal operador de extensión E de forma que $E(\varphi)$ es real analítica en $\mathbb{R}^N \setminus K$ para cada $\varphi \in \mathcal{E}_*(K)$.

La parte 1 de este teorema fue extendida a subconjuntos cerrados en una fructífera colaboración de Schmets y Valdivia [141, 143, 144]. En 2001, usando la caracterización de Frerick y Vogt [64] mencionada anteriormente, obtuvieron resultados acerca de la existencia de operadores de extensión lineal y continua para clases no casi analíticas.

Una vez obtuvimos, conjuntamente con Meise y Taylor las caracterizaciones de aquellos pesos ω para los cuales se cumple el teorema de Borel para las clases de Beurling y Roumieu en el contexto de las clases no casi analíticas definidas mediante la transformada de Laplace, era natural preguntarse por una descripción del rango de la aplicación de Borel $B(f) := (f^{(\alpha)})_\alpha$, en los casos en los que no es sobreyectiva. En uno de mis artículos favoritos [25], que fue dedicado al 70 cumpleaños de Valdivia, Meise, Taylor y yo caracterizamos con precisión cuando el espacio de sucesiones asociado en el origen a un peso σ está incluido en la imagen de la aplicación de Borel actuando en un espacio de funciones ultradiferenciables definido por otro peso $\omega \leq \sigma$. En la demostración intervienen varios ingredientes: la transformada de Fourier Laplace, el principio de Phragmén-Lindelöf, la solución del operador $\overline{\partial}$ con estimaciones L^2 de Hörmander y unos lemas de carácter funcional analítico, que son interesantes por sí mismos y han sido utilizados después en problemas de interpolación, extensión de funciones u operadores de convolución. Estos lemas requirieron un análisis profundo de los subespacios densos de espacios duales de Fréchet Schwartz completamente novedoso que, en particular, nos permitó resolver negativamente un problema de Bierstedt y Meise que permanecía abierto desde

1977. Las investigaciones acerca del rango de la aplicación de Borel fueron continuadas en el contexto de las clases de Komatsu por Langenbruch y más tarde por Schmets y Valdivia [145].

6.2. Ecuaciones en derivadas parciales en espacios de funciones ultradiferenciables y de ultradistribuciones

Ya en los artículos de Björck [12] y de Komatsu [93] se extendían, al contexto de operadores lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes en espacios de ultradistribuciones y de funciones no casi analíticas, muchos de los resultados que hemos mencionado en el Capítulo 4. En los años 1970 varios autores investigaron extensiones de los teoremas de sobreyectividad de Malgrange, Ehrenpreis y Hörmander al contexto de operadores de convolución en ultradistribuciones de tipo Beurling, que son las más próximas a las distribuciones desde un punto de vista estructural. Debe mencionarse, entre otros a Berenstein y Dostal [2], Chou, Cioranescu y Grudzinski.

Motivados por un artículo conjunto con Galbis acerca de rango de operadores de convolución T_μ en espacios de funciones no casianalíticas $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^n)$ publicado en 1996, Galbis, Meise y yo presentamos en [22] un estudio completo de la sobreyectividad de operadores de convolución en espacios de funciones ultradiferenciables $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ de tipo Beurling y en espacios de ultradistribuciones $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ de tipo Roumieu, explicando la relación con la existencia de solución fundamental del operador T_μ y clarificando las distintas condiciones de decrecimiento lento para $\hat{\mu}$. Para ello fueron esenciales los resultados debidos a Momm [125], y extendidos luego por Galbis, Momm y por mí en [23], acerca de operadores de multiplicación en álgebras no radiales de Hörmander. Estas álgebras aparecen como la transformada de Fourier Laplace de los duales fuertes de los espacios considerados por teoremas de tipo Paley Wiener. Como mostré en [14], todo operador de convolución que no sea un múltiplo escalar de la identidad cumple la siguiente condición, aunque no sea sobreyectivo: existe un elemento cuya órbita por el operador es densa en el dominio y, además, el conjunto de puntos periódicos del operador es también denso en el dominio; en otras palabras, el operador es caótico en el sentido de Devaney. Mi antiguo alumno Alfredo Peris, junto con sus discípulos Félix Martínez y Alberto Conejero, prosiguen con éxito las investigaciones en dinámica de operadores en dimensión infinita desde 1998. Es un tema de investigación muy activo, como puede comprobarse en los artículos expositivos de Grosse-Erdmann [71] y [72].

Frerick y Wengenroth [66] obtuvieron la caracterización de los operadores de convolución que son sobreyectivos en el espacio $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ de las ultradistribuciones de tipo Beurling, que extiende el teorema de Hörmander. En ella intervienen los soportes singulares para estas clases de funciones no casi analíticas.

Se incluye también un interesante resultado que asegura la sobreyectividad de T_μ en el espacio $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ tan pronto como la imagen de $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ por T_μ contiene las funciones de soporte compacto en la clase y las funciones real analíticas. La hipoelipticidad de operadores de convolución en clases no casi analíticas fue obtenida en un trabajo conjunto con Fernández y Meise [21], extendiendo los resultados en el caso de distribuciones debidos a Ehrenpreis y Hörmander. Gómez-Collado y Jordá han continuado estas investigaciones recientemente en [69]. La caracterización de los operadores elípticos fue obtenida por Fernández, Galbis y Gómez-Collado [60].

El estudio de la sobreyectividad de los operadores en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes, y de los operadores de convolución en clases de funciones no casi analíticas de tipo Roumieu y de tipo Gevrey, es aún más interesante y difícil, debido a la complicada estructura topológica de los espacios involucrados. El estudio del problema de la sobreyectividad de operadores en derivadas parciales $P(D)$ en clases de Gevrey fue inciado en 1981 por Cattabriga [34], dando soluciones positivas para operadores de tipo híbrido hiperbólico-hipoelíptico. Cattabriga observó en 1982 que existen operadores en tres variables que no son sobreyectivos en clases de Gevrey, por ejemplo el operador del calor en dos variables. Por su parte, Zampieri, en 1986, probó una condición necesaria para la sobreyectividad de $P(D)$ en una clase de Gevrey en el espíritu de la obtenida por Hörmander. El avance más importante, fue dado por Braun, Meise y Vogt [30] en 1990. Utilizando la versión de Vogt acerca de límites proyectivos de espacios (LB) de la teoría del functor $Proj^1$ de Palamodov y sus resultados acerca de espacios de sucesiones [174], obtuvieron una caracterización de la sobreyectividad del operador de convolución T_μ en el espacio $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ de las funciones de tipo Roumieu en una variable, en términos de una condición de decrecimiento lento de $\hat{\mu}$ y del comportamiento de los ceros de $\hat{\mu}$. Esta caracterización completa era en cierto modo sorprendente, y convirtió a partir de ese momento los métodos homológicos, de los que ya hemos hablado varias veces, en la herramienta adecuada para resolver problemas de sobreyectividad de operadores. Los problemas analíticos sirvieron a su vez como un incentivo para refinar las técnicas funcional analíticas, como sucedió reiteradamente durante los años 1990 y como hemos venido explicando anteriormente.

Las investigaciones de Braun, Meise y Vogt fueron continuadas en 1994 en [31]. En este artículo, también usando los métodos del functor límite proyectivo, obtuvieron una caracterización de la sobreyectividad de un operador $P(D)$ en $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^n)$ en términos de una condición de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad cero $V(P)$ del polinomio P, que les permitió obtener consecuencias como las siguientes: (1) Si un polinomio homogéneo P cumple que $P(D)$ es sobreyectivo en $A(\mathbb{R}^n)$, entonces es sobreyectivo en $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^n)$. (2) Si $P(D)$ es elíptico, entonces es sobreyectivo en $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^n)$ para todo peso ω. (3) Si $P(D)$ es hipoelíptico, existe $0 < a < 1$ tal que $P(D)$ es sobreyectivo en $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^n)$ siempre que $\omega(t) = O(t^a)$ cuando t tiende a infinito. (4) $P(D) = \partial_1^2 - \partial_2^2 + \partial_3$ es sobreyectivo en $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^3)$ si $t^{1/2} = o(\omega(t))$ y no lo es si $\omega(t) = O(t^{1/2})$. Braun demostró en 1993 que el operador $P(D) = \partial_1^4 - \partial_2^2 + i\partial_3$ es sobreyectivo en la clase de Gevrey de exponente d si y sólo si $d \in]1, 2[\cup [6, \infty[$.

La comparación del principio de Phragmén-Lindelöf que se obtiene en este caso con los precedentes ha sido realizada por Braun, Meise, Taylor y Vogt a lo largo de varios artículos; ver [29], [122] y las referencias en estos artículos. Los resultados acerca de sobreyectividad fueron presentados en [31] para funciones definidas en abiertos convexos. A partir de 1996, Langenbruch dedicó una serie de artículos, que comenzó con [103], a estudiar la sobreyectividad de operadores $P(D)$ en espacios de tipo Roumieu $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ de funciones definidas en un abierto arbitrario. La caracterización está dada en términos de la existencia de soluciones de la ecuación no homogénea con regularidad prefijada y de la existencia de ciertas soluciones elementales con lagunas en su soporte singular. Los métodos homológicos también juegan un papel importante en estos trabajos.

En su artículo [120] Meise, Taylor y Vogt continuaron su trabajo acerca de operadores en distribuciones, y presentaron varias caracterizaciones de los operadores lineales $P(D)$ en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes que admiten una inversa a la derecha lineal y continua en las clases casi analíticas y en los espacios de ultradistribuciones de tipo Beurling y Roumieu. Una herramienta esencial fue un resultado de Braun [26] acerca de la estructura local de las ultradistribuciones, que extendía un teorema debido a Komatsu. Una de las caracterizaciones se formula en términos de la existencia de soluciones fundamentales con lagunas en el soporte. La otra, en el caso de abiertos convexos, es una condición de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad cero del polinomio. Como en otros casos, Braun, Meise y Taylor han investigado, y siguen investigando este tipo de condiciones y su relación con otras existentes, obteniendo resultados y ejemplos sorprendentes; ver [29]. En un artículo conjunto con Fernández y Meise estudiamos los operadores de convolución que admiten operador de solución en espacios de tipo Beurling y Roumieu en 1997. Actualmente, Meise y yo estamos investigando los operadores de convolución en clases casi analíticas que admiten una inversa a la derecha. En este caso los métodos usuales no funcionan, porque no existen soluciones fundamentales ni funciones no triviales con soporte compacto.

Varios autores extendieron la teoría de los operadores pseudodiferenciales al contexto de algunas clases especiales de funciones infinitamente diferenciables que satisfacen buenas propiedades de regularidad. Mencionamos, por ejemplo, las contribuciones de Boutet de Monvel, Krée, Cattabriga, Gramchev, Rodino y Zanghirati al estudio de los operadores pseudodiferenciales en clases de Gevrey. Una teoría de operadores pseudodiferenciales en clases no casianalíticas de tipo Roumieu fue desarrollada por Matsumoto en 1987. Su enfoque de las clases no casianalíticas es el de la teoría de Komatsu y los resultados no son tan satisfactorios como los previamente conocidos en clases de Gevrey. Fernández, Galbis y Jornet han introducido y estudiado los operadores pseudodiferenciales (de orden infinito) en el contexto de las clases no casi analíticas de tipo Beurling en [61]. Esta teoría permite obtener condiciones suficientes para garantizar la regularidad de las soluciones de un operador lineal en derivadas parciales cuyos coeficientes pertenecen a determinada clase ultradiferenciable. En particular, se extienden trabajos previos de Hörmander, Malgrange, Iftimie, Shafii-Mousavi y Zielezny. Motivados por estos resultados, Galbis, Fernández y Jornet han emprendido el estudio del frente de ondas en el contexto de las clases no casi analíticas de Beurling y de Roumieu, obteniendo aplicaciones acerca de hipoelipticidad de operadores con coeficientes variables.

7. Funciones real analíticas

Las funciones real analíticas son un objeto clásico de estudio en análisis matemático. Todas las funciones usuales del cálculo diferencial son analíticas, y de hecho Newton consideraba sólo funciones que se pudieran desarrollar en serie de potencias. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es real analítica en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, y escribimos $f \in A(\Omega)$, si para cada punto $x_0 \in \Omega$ existe un entorno abierto $U(x_0)$ de x_0 contenido en Ω tal que $f(x) = \sum_\alpha a_\alpha (x - x_0)^\alpha$ para todo $x \in U(x_0)$. La siguiente caracterización es bien conocida: una función de clase C^∞ en Ω es real analítica si y sólo si existe un abierto $G \subset \mathbb{C}^d$, con $G \cap \mathbb{R}^d = \Omega$ y existe $g \in H(G)$ cuya restricción a Ω coincide con f. Esta condición es también equivalente a la siguiente: para todo subconjunto compacto K de Ω existe $r > 0$ tal que

$$\sup_{x \in K} \sup_\alpha \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\alpha! r^{|\alpha|}} < \infty.$$

El espacio $A(\Omega)$ es un álgebra cerrada por diferenciación.

Las funciones real analíticas aparecen en muchas cuestiones de análisis clásico. Mencionamos, por ejemplo, los teoremas de convergencia de series de Taylor de Pringsheim, Boas y Berenstein, o los teoremas de aplicaciones a series de Abel o Tauber; las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes real analíticos, que dan lugar a las funciones especiales de Legendre, Hermite o Bessel; el teorema de la función inversa y de la función implícita real analítica o el teorema de Cauchy Kowalewsky de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes real analíticos. Todos estos resultados pueden verse en textos de análisis matemático. El excelente libro de Krantz y Parks [96] es una referencia excelente para funciones real analíticas.

Las investigaciones de Whitney, Grauert, Nash y otros acerca de inmersiones de variedades real analíticas y conjuntos semianalíticos y subanalíticos pueden ser encontradas también en el capítulo 5 del libro de Krantz y Parks [96]. Kriegl y Michor [97] consideraron el problema de introducir una estructura de variedad diferenciable en el grupo de los difeomorfismos de una variedad real analítica. Para ello necesitaron estudiar curvas real analíticas con valores en un espacio localmente convexo. Domański y yo realizamos un estudio sistemático de curvas real analíticas con valores en espacios de Fréchet o (DF) en [17]. El libro de Kriegl y Michor [98] presenta un estudio de las variedades real analíticas de dimensión infinita.

7.1. La estructura del espacio de funciones real analíticas

La topología del espacio $A(\Omega)$, Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^d$, es complicada. Hay dos maneras naturales de definirla. En primer lugar, $A(\Omega)$ puede escribirse como el límite proyectivo numerable de los espacios $H(I_N)$ para una sucesión fundamental de compactos $(I_N)_N$ en Ω. Aquí, $H(I_N)$ es el espacio (DFN) (dual de un espacio de Fréchet nuclear) de los gérmenes de funciones holomorfas en I_N. La otra forma consiste en escribir $A(\Omega)$ como el límite inductivo no numerable de los espacios de Fréchet $H(U)$, cuando U recorre todos los entornos abiertos complejos de Ω. Todas las aplicaciones que conectan los espacios involucrados son restricciones y son inyectivas por tratarse de funciones real analíticas. Martineau demostró en 1966 que eran equivalentes. El caso de una variable había sido obtenido ya por Grothendieck en 1953. El espacio $A(\Omega)$ es completo, nuclear, separable, bornológico, admite una red de tipo $\mathcal{C}$ en el sentido de De Wilde y tiene una topología más fina que la convergencia puntual. De hecho se trata de la única topología en $A(\Omega)$ con esta propiedad y que cumple las hipótesis del teorema de la gráfica cerrada de De Wilde en el rango y en el dominio. Es fácil comprobar que una sucesión $(f_k)_k$ en $A(\Omega)$ converge si y sólo si cada punto $x \in \Omega$ tiene un entorno compacto $K \subset \mathbb{C}^d$ en el cual las extensiones de f_k convergen uniformemente. El espacio $A(\Omega)$ es un espacio (PLS), y algunas de sus propiedades se pueden deducir de los teoremas de Vogt acerca de límites proyectivos de espacios (LB), de los que hemos hablado anteriormente. Se pueden ver detalles en el artículo panorámico de Domański y Vogt [50]. Por otra parte, el dual fuerte $A(\Omega)'_b$ del espacio de las funciones real analíticas es un espacio (LF) reflexivo, completo y nuclear. Sus elementos se llaman funcionales analíticos. Además, las evaluaciones en los puntos de Ω constituyen un subconjunto total de $A(\Omega)'_b$. En el caso en que Ω sea convexo, existen representaciones concretas de $A(\Omega)'_b$ como un límite inductivo ponderado de funciones enteras en $\mathbb{C}^d$ mediante la transformada de Fourier Laplace. Pueden verse detalles al respecto en el libro de Hörmander [89].

En su importante artículo [49] Domański y Vogt demostraron que el espacio $A(\Omega)$ no tiene base de Schauder. De este modo dieron el primer ejemplo de un espacio separable, completo, que existía ya en análisis, y que no tiene base de Schauder. Las propiedades de los límites proyectivos de espacios (DFS), los espacios (PLS), juegan un papel central en la demostración del resultado de Domański y Vogt. Por ejemplo demuestran que un espacio ultrabornológico con base que sea límite proyectivo de una sucesión de espacios (DFN) o bien es un espacio (DFN) o contiene un subespacio complementado que es un espacio de Fréchet de dimensión infinita. Usando la teoría de Cartan-Oka e invariantes topológicos de Vogt de tipo (Ω) fuerte o (DN) débil, Domański y Vogt demuestran que todo subespacio complementado metrizable de $A(\Omega)$ tiene que ser de dimensión finita, de donde se sigue que $A(\Omega)$ no puede tener base. Debemos mencionar que sigue siendo un problema abierto si este espacio tiene la propiedad de aproximación acotada. También lo es si el espacio de las funciones casi analíticas de tipo Roumieu tiene base. El artículo panorámico [50] expone los resultados mencionados aquí y explica consecuencias para operadores en derivadas parciales de orden infinito en $A(\mathbb{R})$.

En 2003, Domański y Langenbruch comenzaron en [43] el estudio de operadores de composición en espacios de funciones real analíticas y obtuvieron consecuencias acerca de la estructura de estos espacios y su clasificación isomorfa. Los espacios $A(\Omega_1)$ y $A(\Omega_2)$ son isomorfos como álgebras topológicas si y sólo si existe un difeomorfismo real analítico entre los abiertos Ω_1 y Ω_2. Por ejemplo, todo abierto estrellado en $\mathbb{R}^d$ es difeomorfo analíticamente a todo el espacio $\mathbb{R}^d$. En este sentido, comparemos las condiciones siguientes sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^d$: (1) Ω es homeomorfo a $\mathbb{R}^d$, (2) Ω es real analíticamente difeomorfo a $\mathbb{R}^d$, (3) Ω tiene el tipo de homotopía de un punto, y (4) todo compacto K en Ω está incluido en otro compacto L en Ω tal que $\Omega \setminus L$ es simplemente conexo. Entonces, para $d = 2$ las condiciones (1), (2) y (3) son equivalentes por el teorema de Riemann; para $d = 3$ las condiciones (1) y (2) son equivalentes como mostraron Moise y Murkres en 1952-1960; para $d = 4$ la condición (1) es equivalente a que se cumplan simultáneamente las condiciones (2) y (3) y no es equivalente a la condición (2), esto fue probado por Freedman en 1984, basado en trabajos de Donaldson; finalmente Stallings en 1962 demostró que, para $d \geq 5$, las condiciones (1) y (2) son equivalentes, y a su vez equivalentes a que se cumplan a la vez (3) y (4).

La clasificación isomorfa de los espacios de funciones real analíticas es más complicada. Por ejemplo, si Ω_1 es un anillo en el plano y Ω_2 son dos anillos, los espacios $A(\Omega_1)$ y $A(\Omega_2)$ son topológicamente isomorfos, aunque los abiertos no son homeomorfos. Domański y Langenbruch probaron en 2003 que el espacio $A(\Omega_1)$ es isomorfo a un subespacio topológico de $A(\Omega_2)$ si y sólo si los dos abiertos tienen la misma dimensión y si Ω_1 tiene infinitas componentes conexas, entonces Ω_2 también. En particular, si dos espacios de funciones real analíticas son isomorfos, entonces las dimensiones de los abiertos coinciden. Otra consecuencia es que la suma directa de $A(\mathbb{R})$ consigo mismo es isomorfo a un subespacio de $A(\mathbb{R})$, pero no es conocido si son isomorfos. Domański, Langenbruch, Frerick y Vogt han investigado los subespacios y cocientes de $A(\Omega)$, cuando Ω es un abierto conexo. Por ejemplo, un espacio de Fréchet F es isomorfo a un subespacio de $A(\Omega)$ si y sólo si es isomorfo a un subespacio del espacio de Fréchet $H(\mathbb{D}^d)$ de las funciones holomorfas en el polidisco. Un espacio (LB) G es isomorfo a un subespacio de $A(\Omega)$ si y sólo si es isomorfo a un subespacio del espacio (DFN) $H(\overline{\mathbb{D}}^d)$ de los gérmenes de funciones holomorfas en el polidisco cerrado. La clasificación isomorfa de los espacios de funciones holomorfas había sido estudiada por Mityagin y Henkin [124] y por Zahariuta [185].

Como uno de los pasos en su demostración de que el espacio $A(\Omega)$ no tiene base, Domański y Vogt probaron que todo espacio de Fréchet que sea isomorfo a un cociente de $A(\Omega)$ satisface el invariante topológico $(\overline{\overline{\Omega}})$, una condición introducida por Vogt en 1983, que se hereda por cocientes y que no la satisface ningún espacio de series de potencias. Este restrictivo invariante ha jugado desde entonces un papel relevante en todas las investigaciones acerca de espacios de funciones real analíticas; comparar por ejemplo con [177]. Es fácil construir cocientes triviales del espacio $A(\Omega)$ mediante interpolación: se fija una sucesión discreta $(z_n)_n$ en Ω, y se define $T : A(\Omega) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, T(f) := (f(z_n))_n$. Por un resultado debido a Cartan en 1957, existe una base de entornos complejos abiertos $G \subset \mathbb{C}^d$ que son dominios de holomorfía. Esto implica que la aplicación $T : H(G) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es sobreyectiva, así el producto numerable de copias del cuerpo de los números complejos es un cociente de $A(\Omega)$. Domański y Vogt construyeron en 2003 un cociente de $A(\Omega)$ con norma continua, y en un trabajo conjunto con Frerick [42] caracterizaron los espacios de Fréchet que son isomorfos a un cociente de $A(\Omega)$.

Hay dos nociones de función real analítica con valores en un espacio localmente convexo E. La función $f : \Omega \to E$ se llama real analítica, y escribimos $f \in A(\Omega, E)$, si para cada $e' \in E', e' \circ f$ es real analítica. La función f se llama topológicamente real analítica, y escribimos $f \in A_t(\Omega, E)$, si para cada $x \in \Omega, f$ se desarrolla como una serie de Taylor convergente a f alrededor de x en la topología de E. Ambos conceptos coinciden si E es un espacio de Banach, como probaron Alexiewicz y Orlicz en 1951, o si el dual fuerte de E es un espacio de Baire, como demostraron Kriegl y Michor en 1990 [97]. Domański y yo [17] demostramos en 1998 que $A_t(\Omega, E) = A(\Omega, E)$ para un espacio de Fréchet E si y sólo si el espacio E cumple la condición (DN). En 2003, en el artículo conjunto con Vogt [20], estudiamos la interpolación de funciones real analíticas con valores vectoriales y mostramos por ejemplo que la interpolación con valores en un espacio (DF) completo E está relacionado con la condición ($\underline{\text{DN}}$) en el dual fuerte E'. El problema considerado puede interpretarse como una cuestión acerca de la sobreyectividad de ciertos operadores $T \otimes \mathrm{id}_E : A(\Omega, E) \to E^{\mathbb{N}}$ y está relacionado con el problema de la escisión de sucesiones exactas cortas. Nuestro artículo fue el inicio de la teoría de escisión para el espacio $A(\Omega)$. Soluciones positivas permiten concluir resultados acerca de la solubilidad de ecuaciones dependientes de un parámetro. Esta dirección fue continuada por Vogt en [177], en cuyas investigaciones la teoría del functor $Proj^1$ juega un papel central. Las investigaciones de Vogt han sido continuadas por Domański y por mí en [18] y [19].

Motivado por un resultado demostrado en [20], que daba una fórmula explícita para un operador de extensión de funciones real analíticas del disco unidad a todo el plano, Vogt caracteriza en su artículo [178] las subvariedades compactas coherentes X de $\mathbb{R}^d$ tales que existe un operador de extensión lineal y continuo que extiende las funciones real analíticas en X a funciones real analíticas en todo $\mathbb{R}^d$. El teorema principal demuestra que esto se cumple si y sólo si en cada punto de X la complexificación local cumple la condición local de Phragmén-Lindelöf de Hörmander. Ya hablamos de esta condición en la sección 4.4. En el caso de una variedad algebraica $V = \{z \in \mathbb{C}^d \mid P(z) = 0\}$ caracteriza los polinomios homogéneos no elípticos para los cuales $P(D)$ es sobreyectivo en $A(\mathbb{R}^d)$, también caracteriza los polinomios homogéneos para los cuales $P(D)$ admite operador de solución en $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Los métodos de Vogt han sido utilizados también por él para estudiar los polinomios $P(z)$ tales que el ideal principal $PA(\mathbb{R}^d)$ es complementado en $A(\mathbb{R}^d)$. El caso de las funciones de clase C^∞ había sido investigado por Bierstone y Schwarz en 1983 [10].

En su artículo [44] Domański y Langenbruch continúan sus investigaciones en [43] estudiando el siguiente problema: Sean M y N variedades real analíticas y sea $\varphi\colon M \to N$ una función real analítica. Se trata de estudiar cuándo el operador de composición $C_\varphi\colon A(N) \to A(M), f \mapsto f \circ \varphi$, entre los espacios de funciones real analíticas tiene rango cerrado y cuándo es abierta sobre su rango. Existe una amplia literatura en el caso de operadores de composición $C_\varphi\colon C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ definidos entre espacios de funciones C^∞. En ese caso, como los espacios son metrizables y completos, el rango de C_φ es cerrado si y sólo si el operador es abierto sobre su imagen. Un ejemplo dado en [43] mostraba que éste no es el caso en el contexto real analítico. En ese ejemplo, la imagen del operador no es ultrabornológico. El problema para funciones C^∞ fue resuelto en 1998 por Bierstone y Milman [11], probando que si φ es semi-propia, $C_\varphi(C^\infty(N))$ es cerrado en $C^\infty(M)$ si y sólo si $\varphi(M)$ es semi-coherente. La función analítica se llama semi-propia si para cada compacto K en N, existe un compacto L en M tal que $\varphi(L) = \varphi(M) \cap K$. En el caso real analítico, si el operador C_φ tiene rango cerrado, entonces $\varphi(M)$ es el cero de una función real analítica definida globalmente en N, y cada función real analítica en $\varphi(M)$ se extiende a una función real analítica en N. Para probar este hecho, se demuestra que los polinomios son densos en $A(K)$ en un sentido fuerte para cada compacto K en $\mathbb{R}^d$. También se demuestra que si $\varphi(M)$ es coherente y φ es semi-propia, entonces C_φ tiene rango cerrado y es abierta sobre su rango. En la demostración las técnicas recientes para límites proyectivos de espacios (LB) son relevantes. En un artículo posterior en 2006, los autores caracterizan completamente los operadores de composición que son simultáneamente abiertos en su imagen y tienen rango cerrado.

7.2. Operadores en derivadas parciales en espacios de funciones real analíticas

Debido a la complicada estructura topológica del espacio de las funciones real analíticas, los operadores lineales $P(D)$ en derivadas parciales con coeficientes constantes no se comportan del mismo modo en $C^\infty(\Omega)$ que en $A(\Omega)$. En 1973 Piccinini confirmó una conjetura de Cattabriga y De Giorgi, mostrando que el operador del calor de dos variables no era sobreyectivo en $A(\mathbb{R}^3)$. Por otra parte, Cattabriga y De Giorgi habían demostrado que todo operador $P(D)$ es sobreyectivo en $A(\Omega)$ para un abierto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Hörmander, en 1973, en su artículo fundamental [88] caracterizó los operadores $P(D)$ que son sobreyectivos en $A(\Omega)$, para Ω un abierto convexo en $\mathbb{R}^d$ en términos de una condición de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad nula del polinomio $P(z)$; ver la sección 4.4. Varios autores, como Miwa, Andreotti, Nacinovich, Zampieri y Braun siguieron el punto de vista de Hörmander entre 1980 y 1995. Sin embargo, esta aproximación está restringida a los abiertos convexos, puesto que necesita el uso de la transformada de Fourier Laplace y el teorema fundamental de Ehrenpreis.

Con una aproximación diferente, que usaba hiperfunciones y buenas soluciones elementales del operador $P(D)$, Kawai en 1972 y Kaneko en 1985 mostraron que los operadores localmente hiperbólicos son sobreyectivos en $A(\Omega)$ para ciertos abiertos no necesariamente convexos. Una idea semejante fue usada por Anderson en 1972 para demostrar que los operadores localmente hiperbólicos son sobreyectivos en $A(\mathbb{R}^d)$. En 2004, Langenbruch combina en [106] y [107] los métodos de Kawai y los métodos topológicos de la anulación del functor $Proj^1$ desarrollados por Palamodov, Vogt, Wengenroth y otros, que él mismo mejora, para obtener una caracterización de la sobreyectividad de $P(D)$ en $A(\Omega)$ para un abierto arbitrario Ω. Dicha caracterización se formula en términos de una solubilidad semiglobal y de la existencia de soluciones elementales trasladadas que son hiperfunciones y son real analíticas en regiones relativamente compactas de Ω prefijadas. La condición de solubilidad semiglobal se cumple siempre para abiertos convexos.

Si el operador $P(D)$ es sobreyectivo en $A(\Omega)$ para un abierto Ω, entonces es sobreyectivo en $A(\mathbb{R}^d)$, como demostró Hörmander en el caso convexo y Langenbruch en el caso general. Por otra parte, un operador $P(D)$ es sobreyectivo en $A(\mathbb{R}^3)$ si y sólo si es localmente hiperbólico. Hörmander demostró en 1973 que si Ω es convexo y P_m es la parte principal de P, entonces $P(D)$ es sobreyectivo en $A(\Omega)$ si sólo si $P_m(D)$ lo es. No se sabe si el resultado es cierto para abiertos arbitrarios. En 1983 Zampieri demostró que si $P(D)$ es sobreyectivo en $A(\Omega)$, entonces es sobreyectivo en $C^\infty(\Omega)$. Este resultado ha sido ampliamente mejorado por Frerick y Wengenroth en 2003 en su artículo [65].

La caracterización de los operadores de convolución que admiten una inversa a la derecha lineal y continua en $A(\mathbb{R})$ fue obtenida por Langenbruch en 1994 [104]. Sus resultados implican en particular que el espacio de las funciones real analíticas periódicas es complementado en el espacio de las funciones real analíticas en $\mathbb{R}$, un resultado que fue muy útil para Domański y para mí en [17]. En la actualidad, conjuntamente con Meise, estamos investigando los operadores de convolución en espacios de funciones casi analíticas.

8. Despedida y cierre

Ha llegado uno de los momentos más temidos por mí, el de los agradecimientos. Temido por un doble motivo: hay un riesgo real de ponerse sentimental y resultar demasiado emotivo, y existe el peligro aún mayor de olvidar a alguien, lo que resultaría imperdonable. Pero la tarea es insoslayable, así que vayamos a ella. Muchas personas me han ayudado a lo largo de mi carrera, y es imposible mencionarlas a todas aquí. Estoy profundamente agradecido a mis padres, por haber dejado que me dedicara a las matemáticas, haberme dado total libertad en mi educación y no haberme presionado nunca para que me dedicara a una profesión más práctica o mejor remunerada. Lo estoy a toda mi familia en general, incluyendo abuelos y padrinos, ya fallecidos, y por supuesto a mis dos hermanas Pilar y Victoria. A todos ellos por haber generado un ambiente donde el trabajo y el esfuerzo eran valores supremos e incuestionables. También quiero dar las gracias, con todo mi cariño, a mi mujer Encarna y a mis hijos Marta y Pepe, especialmente por haber insistido a menudo que no debía trabajar tanto y que, aunque a mí a veces me resulte difícil de asumir, hay otras cosas mucho más importantes que las matemáticas. Tal vez deba pedirles perdón por haberles quitado tanto tiempo a ellos para dedicárselo a mi trabajo.

La carrera de un científico no es sólo fruto de su esfuerzo y su dedicación apasionada, sino que se apoya en todos aquellos que le han ayudado y enseñado. La mayor parte de mis maestros, españoles y extranjeros, han sido mencionados muchas veces en este discurso. Estoy profundamente agradecido a todos ellos, y especialmente al profesor Manuel Valdivia y a mi amigo Klaus Bierstedt, por haber sido pacientes y por haber confiado en mí. Gracias a mis muchos co-autores, ha sido un placer trabajar con todos ellos; gracias a las autoridades de la Universidad Politécnica de Valencia, que me han apoyado siempre; a los compañeros de la unidad docente de la ETS Arquitectura, sin cuya ayuda mucho de lo conseguido hubiera sido imposible, y también, claro, a todas las instituciones que nos han financiado generosamente. Finalmente, es un placer mencionar a mis dos amigos matemáticos Manuel Maestre y Domingo García, que aunque no han aparecido en las páginas precedentes, han jugado un papel fundamental en mi vida profesional y personal.

Escribía Don Santiago Ramón y Cajal en su libro "Los Tónicos de la Voluntad", que leí hacia 1980 y me fue de gran ayuda, que

> *la más pura gloria del maestro consiste, no en formar discípulos que le sigan, sino en formar sabios que lo superen,*

y que

> *dejar prole espiritual, además de dar alto valor a la vida del sabio, constituye utilidad social y labor civilizadora.*

No puedo estar más de acuerdo. Por eso, he reservado un agradecimiento especial para todos mis discípulos, para todos aquellos que se han formado conmigo y se han convertido en científicos independientes. Sus nombres han ido apareciendo también en este texto. Para mí el grupo de investigación es fundamental. Como defiende Hersh en su libro [84], las matemáticas son una actividad social que forma parte de la cultura humana. El grupo de investigación es el ámbito adecuado para disfrutar la aventura de la ciencia y compartir el sentido del deber profesional y un sentimiento de amistad, de camaradería y de trabajo bien hecho. Decían mis padres que cuando era niño, una semana vi varias veces la pelicula "Hatari", dirigida por Howard Hawks en 1962. Trata de las peripecias en Tanganika de un grupo de cazadores, comandado por John Wayne, que tienen que capturar animales para zoológicos. Es una película llena de humor y aventura, de la que, si no temiera por sus oídos, aún sería capaz de tararear la famosa tonada de Henri Mancini. Hay un largo camino, y ha pasado mucho tiempo, desde el niño que jugaba en el Bar Pilar, que fundó mi abuela hace más de ochenta años en Valencia, y este salón de la Real Academia donde estamos reunidos hoy, pero yo les aseguro que en el fondo de mi corazón sigo siendo el mismo que disfrutaba allí estudiando y haciendo ejercicios de matemáticas. Les confieso que lo que yo he querido ser, lo que yo he tratado de conseguir en matemáticas y formando mi propio equipo, es hacerles partícipes de mi gran pasión, de la aventura de la investigación y que disfrutemos en un ambiente de amistad y colaboración. Yo lo he pasado muy bien con todos ellos, he aprendido mucho y espero que nuestro viaje científico continúe muchos años. Para mí ha valido la pena, ha sido interesante y gratificante.

Les prometí al principio de esta exposición que trataría de explicarles, y explicarme a mí mismo, cuál es la razón por la que he investigado ciertos temas y no otros en los treinta años que tengo la suerte de haber trabajado en matemáticas. Hemos visto la evolución de algunos temas del análisis matemático y su relación con el análisis funcional desde 1940 hasta nuestros días, hemos repasado temas actuales, hemos incluso planteado problemas abiertos. He intentado mostrarles que es un área activa y atractiva. Sin embargo, me temo que no ha quedado clara la razón por la que yo he trabajado en unos temas y no en otros, por qué unos han cautivado mi interés, y el de muchos matemáticos mejores que yo. Hay muchas razones para hacer matemáticas, tal vez sea por curiosidad, por vanidad, porque no sabemos hacer otra cosa, porque lo necesitamos... Yo siempre he actuado conforme a mis convicciones personales, y he procurado hacer y enseñar aspectos de matemáticas que merezcan el esfuerzo que requiere la investigación, he intentado comprender y estudiar más y mejor. Les he dicho siempre a mis discípulos, y lo repito hoy delante de ustedes, que intenten, como he tratado de hacer yo, trabajar en problemas profundos, que estudien y aprendan con humildad, que hagan teoremas con dificultad técnica, pero no farragosa, que busquen siempre el interés en temas afines y, si es posible, capten la atención de la comunidad matemática y científica, que intenten conectar sus investigaciones con temas clásicos y variados, que expongan con claridad y rigor y, finalmente, que cambien de tema, que sean versátiles y adaptables y, por supuesto, que sean generosos con sus propios discípulos. Como dice Tao en [153],

> *el concepto de calidad matemática es multi-dimensional y no tiene un orden total canónico obvio. Creo que esto es debido a que las matemáticas son complejas y multi-dimensionales y evolucionan de forma inesperada y adaptativa.*

Hemos hablado de muchos problemas y de muchas aplicaciones interesantes, pero es un misterio por qué siente uno esa pasión por las matemáticas. Paul McCartney decía en una entrevista, que él continuaba trabajando para sentir la libertad de hacer lo que le gustaba y para vivir sus propios sueños. Yo he tenido la fortuna de que los míos profesionales se hayan realizado. Y aún quiero seguir. Recuerdo un chiste que cuenta Woody Allen en su película Annie Hall: Woody va al psiquiatra y le comenta preocupado "Doctor, mi hermano cree que es una gallina", a lo que el médico replica: "Enciérrelo en una institución". "Ya doctor", le dice Woody, "pero es que necesito los huevos". Por supuesto, sé que es una locura, pero yo necesito las matemáticas. Por eso, en definitiva, me dedico a ellas.

Muchas gracias por su atención.

Bibliografía

[1] M.G. Alonso-Vega, B. Rubio, Miguel de Guzmán Ozámiz, Matemático y Humanista, La Gaceta de la RSME Suplemento al Volumen 7.3, 2004.

[2] C.A. Berenstein, M.A. Dostal, Analytically Uniform Spaces and their Applications to Convolution Equations, Springer, Berlin 1972.

[3] K.D. Bierstedt, An introduction to locally convex inductive limits, p. 35-133 in “Functional Analysis and its Applications”, World Sci. Publ., Singapore, 1988.

[4] K.D. Bierstedt, The ε-(tensor) product of a (DFS)-space with arbitrary Banach spaces, pp. 35–51 in Functional Analysis (Eds. S. Dierolf, S. Dineen nd P. Domański), Gruyter, Berlin, 1996.

[5] K.D. Bierstedt, A survey of some results and open problems in weighted inductive limits and projective description for spaces of holomorphic functions, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 70 (2001), 167-182.

[6] K.D. Bierstedt, J. Bonet, La condition de densité et les espaces echelonnés distingués, C. R. Acad. Sc. Paris 303 (1986), 459-462.

[7] K.D. Bierstedt, J. Bonet, Some aspects of the modern theory of Fréchet spaces, Rev. Real Acad. Cien. Serie A Mat. RACSAM 97 (2003), 159-188.

[8] K.D. Bierstedt, J. Bonet, Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions: $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ and completeness of $\mathcal{V}_0(G)$, J. Math. Anal. Appl. 323 (2006), 747-767.

[9] K.D. Bierstedt, R. Meise, W.H. Summers, A projective description of weighted inductive limits, Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 107-160.

[10] E. Bierstone, G.W. Schwarz, Continuous linear division and extension of C^∞-functions, Duke Math. J. 50 (1983), 233-271.

[11] E. Bierstone, P.D. Milman, Geometric and differential properties of subanalytic sets, Ann. of Math. 147 (1998), 731-789.

[12] G. Björck, Linear partial differential operators and generalized distributions. Ark. Mat. 6 (1965), 351–407.

[13] F. Bombal, Laurent Schwartz, el matemático que quería cambiar el mundo, La Gaceta de la RSME 6 (2003), 177-201.

[14] J. Bonet, Hypercyclic and chaotic convolution operators, J. London Math. Soc. 62 (2000), 253-262.

[15] J. Bonet, R. Braun, R. Meise, B.A. Taylor, Whitney's extension theorem for non quasianalytic functions, Studia Math. 99 (1991), 156-184.

[16] J. Bonet, S. Dierolf, A note on biduals of strict (LF)-spaces, Results Math. 13 (1988), 23-32.

[17] J. Bonet, P. Domański, Real analytic curves in Fréchet spaces and their duals, Mh. Math. 126 (1998), 13–36.

[18] J. Bonet, P. Domański, Parameter dependence of solutions of differential equations on spaces of distributions and the splitting of short exact sequences, J. Funct. Anal. 230 (2006), 329–381.

[19] J. Bonet, P. Domański, The splitting of exact sequences of PLS-spaces and smooth dependence of solutions of linear partial differential equations, Advances Math. (2007) doi: 10.1016/j.aim.2007.07.010.

[20] J. Bonet, P. Domański, D. Vogt, Interpolation of vector-valued real analytic funtions, J. London Math. Soc 66 (2002), 407-420.

[21] J. Bonet, C. Fernández, R. Meise, Characterization of the ω-hypoelliptic convolution operators on ultradistributions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 25 (2000), 261-284.

[22] J. Bonet, A. Galbis, R. Meise, On the range of convolution operators on spaces of non-quasianalytic differentiable functions, Studia Math. 126 (1997), 171-198.

[23] J. Bonet, A. Galbis, S. Momm, Nonradial Hörmander algebras of several variables and convolution operators, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 2275-2291.

[24] J. Bonet, R. Meise, Quasianalytic functionals and projective descriptions, Math. Scand. 94 (2004) 249-266.

[25] J. Bonet, R. Meise, B.A. Taylor, On the range of the Borel map for classes of non quasianalytic functions, Progress in Funct. Anal., North-Holland Math. Studies 179 (1992), 97-111.

[26] R.W. Braun, An extension of Komatsu's second structure theorem for ultradistributions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 40 (1993), 411-417.

[27] R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis, Results Math. 17 (1990), 206–237.

[28] R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor, Characterization of the homogeneous polynomials P for which $(P+Q)(D)$ admits a continuous linear right inverse for all lower order perturbations Q, Pacific J. Math. 192 (2000), 201-218.

[29] R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor, Characterization of the linear partial differential equations that admit solution operators on Gevrey classes, J. reine angew. Math. 588 (2005), 169-220.

[30] R.W. Braun, R. Meise, D. Vogt, Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions, Proc. London Math. Soc. 61 (1990), 344–370.

[31] R.W. Braun, R. Meise, D. Vogt, Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients which are surjective on non-quasianalytic classes of Roumieu type on $\mathbb{R}^N$, Math. Nachr. 168 (1994), 19-54.

[32] J. Bruna, An extension theorem of Whitney type for non-quasianalytic classes of functions, J. London Math. Soc. 22 (1980), 495-505.

[33] E. Candès, Compressive sampling, International Congress of Mathematicians. Vol. III, 1433–1452, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[34] L. Cattabriga, Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients, Astérisque 89/90 (1981), 129-151.

[35] J. Chaumat, A.M. Collet, Surjectivité de l'application restriction à un compact dans des classes de fonctions ultradifférentiables, Math. Ann. 298 (1994), 7-40.

[36] E. Cordero, K. Gröchenig, Time-Frequency analysis of localization operators, J. Funct. Anal. 205 (2003), 107–131.

[37] A. Defant, K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[38] J.C. Díaz, G. Metafune, The problem of topologies of Grothendieck for quojections, Results Math. 21 (1992), 299-312.

[39] J.I. Díaz Díaz, El Mundo de la Ciencia y las Matemáticas del Mundo, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1997.

[40] J. Dieudonné, Review of the book "The Prehistory of the Theory of Distributions" by J. Lützen, Amer. Math. Monthly 91 (1984), 374-379.

[41] P. Domański, Classical PLS-spaces: spaces of distributions, real analytic functions and their relatives, in: Orlicz Centenary Volume, Banach Center Publications, 64, Proceedings of the Conferences: Władysław Orlicz Centenary Conference and Function Spaces VII held in Poznań, July 21–25, 2003, Z. Ciesielski, A. Pełczyński and L. Skrzypczak (Eds.), Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa 2004, pp. 51–70.

[42] P. Domański, L. Frerick, D. Vogt, Fréchet quotients of spaces of real analytic functions, Studia Math. 159 (2003), 229-245.

[43] P. Domański, M. Langenbruch, Composition operators on spaces of real analytic functions, Math. Nachr. 254/255 (2003), 68–86.

[44] P. Domański, M. Langenbruch, Coherent analytic sets and composition of real analytic functions, J. reine angew. Math. 582 (2005), 41–59.

[45] P. Domański, M. Mastyło, Characterization of splitting for Fréchet-Hilbert spaces via interpolation, Math. Ann. 339 (2007), 317-340.

[46] P. Domański, D. Vogt, A splitting theorem for the space of smooth functions, J. Funct. Anal. 153 (1998), 203-248.

[47] P. Domański, D. Vogt, A splitting theory for the space of distributions, Studia Math. 140 (2000), 57–77.

[48] P. Domański, D. Vogt, Distributional complexes split for positive dimensions, J. reine angew. Math. 522 (2000), 63–79.

[49] P. Domański, D. Vogt, The space of real analytic functions has no basis, Studia Math. 142 (2000), 187–200.

[50] P. Domański, D. Vogt, Linear topological properties of the space of analytic functions on the real line, p. 113-132 in "Recent Progress in Functional Analysis", K.D. Bierstedt, J. Bonet, M. Maestre, J. Schmets (eds.), Proc. Inter. Functional Analysis Meeting on the Ocassion of the 70th Birthday of Prof. M. Valdivia, Valencia 2000, Elsevier, North-Holland Math. Studies 189 Amsterdam 2001.

[51] A. Dou, Relaciones entre las Ecuaciones en Derivadas Parciales y la Física, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1963.

[52] R.E. Edwards, Functional Analysis, Theory and Applications, Holt, Reinhart and Winston, New York, 1965.

[53] E.G. Effros, Z.-J. Ruan, Operator Spaces, London Math. Soc. New Series 23, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[54] L. Ehrenpreis, Solution of some problems of division IV. Invertible and elliptic operators, Amer. J. Math. 82 (1960), 522-588.

[55] L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley, New York, 1970.

[56] C.L. Fefferman, A sharp form of Whitney's extension theorem, Ann. of Math. 161 (2005), 509-577.

[57] C.L. Fefferman, Whitney's extension theorem for C^m, Ann. of Math. 164 (2006), 313-359.

[58] C. Fernández, A. Galbis, Compactness of time-frequency localization operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$, J. Funct. Anal. 233 (2006), 335–350.

[59] C. Fernández, A. Galbis, M.C. Gómez-Collado, (Ultra)distributions of L_p-growth as boundary values of holomorphic functions, Rev. R. Acad. Ci. Serie A Mat. RACSAM 97 (2003), 243-255.

[60] C. Fernández, A. Galbis, M.C. Gómez-Collado, Elliptic convolution operators on non-quasianalytic classes. Arch. Math. 76 (2001), 133–140.

[61] C. Fernández, A. Galbis, D. Jornet, Pseudodifferential operators on non-quasianalytic classes of Beurling type, Studia Math. 167 (2005), 99–131.

[62] K. Floret, Some aspects of the theory of locally convex inductive limits, p. 205-237 in "Functional Analysis: Surveys and Recent Results II", North-Holland, Amsterdam, 1980.

[63] L. Frerick, Extension operators for spaces of infinitely differentiable Whitney functions, J. reine angew. Math. 602 (2007), 123-154.

[64] L. Frerick, D. Vogt, Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets by means of continuous linear operators, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002) 1775-1777.

[65] L. Frerick, J. Wengenroth, Surjective convolution operators on spaces of distributions, Rev. Real Acad. Cien. Serie A Mat. RACSAM 97 (2003), 263-272.

[66] L. Frerick, J. Wengenroth, Convolution equations for ultradifferentiable functions and ultradistributions, J. Math. Anal. Appl. 297 (2004), 506–517.

[67] L. Garding, Some Points of Analysis and Their History, University Lecture Series 11, Amer. Math. Soc. Providence, 1997.

[68] Generalitat Valenciana, Universidad Politécnica de Valencia, Les Matemàtiques i les seues Aplicacions. Un repte a l'Ensenyament Actual, Editorial UPV, 2001.

[69] M.C. Gómez-Collado, E. Jordá, Regularity of solutions of convolution equations, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 873-884.

[70] K. Grochenig, Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhäuser, Boston, 2001.

[71] K.G. Grosse-Erdmann, Universal families and hypercyclic operators, Bull. Amer. Math. soc. 36 (1999), 345-381.

[72] K.G. Grosse-Erdmann, Recent developments in hypercyclicity, Rev. Real Acad. Cien. Serie A Mat. RACSAM 97 (2003), 273-286.

[73] A. Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil. Math. 3 (1954) 57-123.

[74] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955.

[75] A. Grothendieck, Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956) 1-79.

[76] A. Grothendieck, Topological Vector Spaces; New York, 1973.

[77] M. de Guzmán, Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^N$, Lecture Notes in Math. 481, Springer, 1975.

[78] M. de Guzmán, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Teoría de Estabilidad y Control, Alhambra, Madrid, 1975.

[79] M. de Guzmán, B. Rubio, Integración: Teoría y Técnicas, Alhambra, Madrid, 1979.

[80] M. de Guzmán, Real Variable Methods in Fourier Analysis, North Holland Math. Studies 104, 1981.

[81] M. de Guzmán, Impactos del Análisis Armónico, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1983.

[82] M. de Guzmán, M.A. Martín, M. Morán, M. Reyes, Estructuras Fractales y sus Aplicaciones, Labor Matemáticas, 1993.

[83] M. de Guzmán, Caminos de la Matemática hacia el futuro, Horizontes Culturales, Las Fronteras de la Ciencia, 2000: Año Mundial de Las Matemáticas, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Espasa, Madrid, 2002.

[84] R. Hersh, What is Mathematics Really?, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[85] J.A. Hogan, J.D. Lakey, Time-frequency and Time-scale Methods, Birkhäuser, Boston, 2005.

[86] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, Acta Math. 94 (1955), 161-248.

[87] L. Hörmander, On the range of convolution operators, Annals Math. 76 (1962), 148-170.

[88] L. Hörmander, On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients, Invent. Math. 21 (1973), 151-182.

[89] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I-IV, Springer, Berlin, 1983-1985.

[90] J. Horváth, Topological Vector Spaces and Distributions; Addison-Wesley, Massachussets (1969).

[91] A. Jackson, As if summoned from the void: The life of Alexandre Grothendieck, Notices Amer. Math. Soc. 51, 4 (2004), 1038-1056.

[92] H. Jarchow, Locally Convex Spaces; Math. Leitfäden, B.G. Teubner, Stuttgart (1981).

[93] H. Komatsu, Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math.* 20 (1973), 25–105.

[94] G. Köthe, Dualität in der Funktionentheorie, J. reine angew. Math. 191 (1953), 30-49.

[95] G. Köthe, Topological Vector Spaces I and II, Springer, Berlin 1969 and 1979.

[96] S.G. Krantz, H.R. Parks, A Primer of Real Analytic Functions, Birkhäuser, Basel, 1992.

[97] A. Kriegl, P.W. Michor, The convenient setting for real analytic mappings, Acta Math. 165 (1990), 105–159.

[98] A. Kriegl, P.W. Michor, The Convenient Setting of Global Analysis, Mathematical Surveys and Monographs, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[99] M.T. Lacey, Carleson's theorem: proof, complements, variations, Publ. Mat. 48 (2004) 251-307.

[100] M.T. Lacey, C. Thiele, On Calderon's conjecture, Ann. of Math. 149 (1999), 475-496.

[101] M. Langenbruch, Extension of ultradifferentiable functions of Roumieu type, Archiv Math. 51 (1988), 353-362.

[102] M. Langenbruch, Analytic extension of smooth functions, Results Math. 43 (1999), 281-296.

[103] M. Langenbruch, Surjective linear partial differential operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type, Results Math. 29 (1996), 254-275.

[104] M. Langenbruch, Continuous linear right inverses for convolution operators in spaces of real analytic functions, Studia Math. 110 (1994), 65–82.

[105] M. Langenbruch, A general approximation theorem of Whitney's type, Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat. RACSAM 97 (2003), 287-303.

[106] M. Langenbruch, Characterization of surjective partial differential operators on spaces of real analytic functions, Studia Math. 162 (2004), 53–96.

[107] M. Langenbruch, Inheritance of surjectivity for partial differential operators on spaces of real analytic fucntions, J. Math. Anal. Appl. 297 (2004), 696-719.

[108] J. Lindenstrauss, A. Pełczynski, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and applications, Studia Math. 29 (1968), 275-326.

[109] M. López Pellicer, En torno al casi centenario Análisis Funcional, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1998.

[110] J. Lützen, The Prehistory of the Theory of Distributions, Springer, Berlin, 1981.

[111] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier 6 (1955/56), 283-306.

[112] B. Malgrange, Idéaux de fonctions différentiables et division des distributions, p. 1-21 in "Distributions", Ed. École Polytechnique, Paliseau, 2003.

[113] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, régularisation des suites, applications, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[114] E. Mangino, (LF)-spaces and tensor products, Math. Nachr. 185 (1997), 149-162.

[115] R. Meise, Representation of distributions and ultradistributions by holomorphic functions, p. 189-208 in "Functional Analysis: Surveys and Recent Results", North Holland Math. Studies 27, 1977.

[116] R. Meise, B.A. Taylor, Opérateurs linéaires continues d'extension pour les fonctions ultradifferentiables sur des intervals compacts, C.R. Acad. Sc. Paris 302 (1986), 219-222.

[117] R. Meise, B.A. Taylor, Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type, Ark. Math. 26 (1988), 265-287.

[118] R. Meise, B.A. Taylor, Linear extension operators for ultradifferentiable functions of Beurling type on compact sets, Amer. J. Math. 111 (1989), 309-337.

[119] R. Meise, B.A. Taylor, D. Vogt, Characterization of continuous linear right operators which admit a continuous linear right inverse, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40 (1990), 619-655.

[120] R. Meise, B.A. Taylor, D. Vogt, Continuous linear right inverses for partial differential operators on non-quasianalytic classes and on ultradistributions. Math. Nachr. 180 (1996), 213–242.

[121] R. Meise, B.A. Taylor, D. Vogt, Continuous linear right inverses for partial differential operators of order 2 and fundamental solutions in half spaces, Manuscrip. Math. 90 (1996), 449-464.

[122] R. Meise, B.A. Taylor, D. Vogt, Phramén-Lindelöf principles on algebraic varieties, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), 1-39.

[123] R. Meise, D. Vogt, Introduction to Functional Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[124] V.S. Mityagin, G.M. Henkin, Linear problems of complex analysis, Russian Math. Surveys 26 (1971), 99-164.

[125] S. Momm, Closed ideals in nonradial Hörmander algebras, Archiv Math. 58 (1992), 47-55.

[126] N. Ortner, P. Wagner, A survey of explicit representation formulae for fundamental solutions of linear partial differential operators, Acta Appl. Math. 47 (1997) 101-124.

[127] V.P. Palamodov, Linear Differential Operators with Constant Coefficients, Springer, Berlin, 1970.

[128] V.P. Palamodov, The projective limit functor in the category of topological linear spaces, Math. USSR-Sb 4 (1968), 529-558.

[129] V.P. Palamodov, A criterion for splitness of differential complexes with constant coefficients, p. 265-291 in "Geometrical and Algebraic Aspects of Several Variables", Sem. Conf., 8, EditEl, Rende, 1991.

[130] H.J. Petzsche, On E. Borel theorem, Math. Ann. 282 (1988), 299-313.

[131] P. Pérez Carreras, J. Bonet, Barrelled Locally Convex Spaces; Vol. 131, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[132] A. Peris, Topological tensor products of a Fréchet Schwartz space and a Banach space, Studia Math. 106 (1993), 189-196.

[133] A. Peris, Quasinormable spaces and the problem of topologies of Grothendieck, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 19 (1994), 167-203

[134] A. Peris, Fréchet Schwartz spaces and approximation properties, Math. Ann. 300 (1994), 739-744.

[135] G. Pisier, Counterexamples to a conjecture of Grothendieck, Acta Math. 151 (1983), 180-208.

[136] G. Pisier, Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces, CBMS Regional Conference Series in Math. no. 60, 1986.

[137] G. Pisier, Introduction to Operator Space Theory, London Math. Soc. Lecture Notes Series, 294, Cambridge Unversity Press, Cambridge, 2003.

[138] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1974.

[139] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw Hill, New York, 1973.

[140] X. Saint Raymond, Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators, CRC Press, Boca Raton, 1991.

[141] J. Schmets, M. Valdivia, Analytic extension of non quasi-analytic Whitney jets of Roumieu type, Results Math. 31 (1997), 374–385.

[142] J. Schmets, M. Valdivia, On the existence of continuous linear analytic extension maps for Whitney jets, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 45 (1997) 359-367.

[143] J. Schmets, M. Valdivia, Analytic extension of non quasi-analytic Whitney jets of Beurling type, Math. Nachr., 195 (1998), 187–197.

[144] J. Schmets, M. Valdivia, Analytic extension of ultradifferentaible Whitney jets, Collect. Math., 50 (1999), 73–94.

[145] J. Schmets, M. Valdivia, Extension maps in ultradifferentiable and ultraholomorphic function spaces, Studia Math. 143 (2000), 221–250.

[146] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1978.

[147] L. Schwartz, Métodos Matemáticos para las Ciencias Físicas, Selecciones Científicas, Madrid 1969.

[148] L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, J. Anal. Math. 4 (1954/55), 88-148.

[149] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles I.-II., Ann. Inst. Fourier 7 (1957), 1-141; 8 (1959), 1-209.

[150] L. Schwartz, Les travaux de Bernard Malgrange (première partie), Annal. Inst. Fourier 43 (1993), 1199-1209.

[151] L. Schwartz, Un mathématicien aux prises avec le siècle, Odile Jacob, Paris, 1997.

[152] Société Mathématique de France, Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au numéro 98 de la Gazette des mathématiciens, Paris, 2003.

[153] T. Tao, What is good mathematics? Bull. Amer. Math. Soc. 44 (2007), 623-634.

[154] J. Taskinen, Conterexamples to “Problème des topologies” of Grothendieck, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Diss. 63, 1986.

[155] J. Taskinen, The projective tensor roduct of Fréchet Montel spaces, Studia Math. 91 (1988), 17-30.

[156] V. Thilliez, Quelques propriétés de quasi-analyticité, Gazette Math. 70 (1996), 49-68.

[157] F. Trèves, Locally Convex Spaces and Partial Differential Equations, Springer, Berlin, 1967

[158] F. Trèves, Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients, Gordon and Breach, New York 1966.

[159] F. Trèves, Laurent Schwartz (1915-2002), biographical sketch, Notices Amer. Math. Soc. 50 (2003), 1072-1078.

[160] M. Valdivia, A class of quasibarrelled (DF)-spaces which are not bornolgical, Math. Z. 136 (1974), 249-251.

[161] M. Valdivia, Solution to a problem of Grothendieck, J. reine angew. Math. 305 (1975), 116-121.

[162] M. Valdivia, Recientes Aspectos del Análisis Funcional, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1977.

[163] M. Valdivia, Representaciones de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$, Rev. Real Acad. Ci. Exact. Fis. Nat. Madrid 72 (1978), 385-414.

[164] M. Valdivia, Quasi-LB-spaces, J. London Math. Soc. 35 (1987), 149-168.

[165] M. Valdivia, A characterization of totally reflexive spaces, Math. Z. 200 (1989), 327-346.

[166] M. Valdivia, Topics in Locally Convex Spaces, North Holland Math. Studies 67, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[167] M. Valdivia, On certain analytic function ranged linear pertors in spaces of ultradifferentible functions, Math. Japonica 44 (1996), 415-436.

[168] M. Valdivia, On certain linear operators in spaces of ultradifferentiable functions, Results Math. 30 (1996), 321-345.

[169] D. Vogt, Vektorwertige Distributionen als Randverteilungen holomorpher Funktionen, Manuscrip. Math. 17 (1975), 267-290.

[170] D. Vogt, Sequence space representations of spaces of test functions and distributions, p. 405-443 in "Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory", Lecture Notes in Pure Appl. Math. 83, Marcel Dekker, 1983.

[171] D. Vogt, Subspaces and quotients of s, p. 167-187 in "Functional Analysis: Surveys and Recent Results", North Holland Math. Studies 27, 1977.

[172] D. Vogt, Some results on continuous linear maps between Fréchet spaces, p. 349-381 in "Functional Analysis: Surveys and Recent Results III", North Holland Math. Studies 90, Amserdam, 1984.

[173] D. Vogt, On the functors $Ext^1(E, F)$ for Fréchet spaces, Studia Math. 85 (1987), 163-197.

[174] D. Vogt, Topics on projective spectra of (LB)-spaces, p. 11-27 in "Advances in the Theory of Fréchet Spaces", Kluwer, Dordrecht, 1989.

[175] D. Vogt, Regularity properties of (LF)-spaces, p. 57-84 in "Progress in Functional Analysis", North-Holland Math. Studies 170, Amsterdam, 1992.

[176] D. Vogt, Splitting of exact sequences of Fréchet spaces in the absence of continuous norms, J. Math. Anal. Appl. 297 (2004), 812-832.

[177] D. Vogt, Fréchet valued real analytic functions, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 73 (2004), 155–170.

[178] D. Vogt, Extension operators for real analytic functions on compact subvarieties of $\mathbb{R}^d$, J. reine angew. Math. 606 (2007), 217-233.

[179] P. Wagner, Fundamental solutions of real homogeneous cubic operators of principal type in three dimensions. Acta Math. 182 (1999), 283–300.

[180] J. Weidmann, Gottfried Köthe, 1905-1989, Note di Mat. 10, Suppl 1 (1990), 1-7.

[181] J. Wengenroth, Derived Functors in Functional Analysis, Lecture Notes Math. 1810, Springer, Berlin, 2003.

[182] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 63-89.

[183] H. Whitney, Differentiable functions defined in closed sets I, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 369-387.

[184] H. Whitney, Functions differentiable on the boundaries of regions, Annals Math. 35 (1934), 482-485.

[185] V.P. Zahariuta, Spaces of analytic functions and complex potential theory, p. 74-164 in "Linear Topological Spaces and Complex Analysis 1", A. Aytuna (Ed.), METU-TÜBITAK, Ankara, 1994.

CONTESTACIÓN
DEL
EXCMO. SR. D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Excelentísimo Señor Presidente,
Excelentísimos Señores Académicos,
Señoras y Señores,

Ha sido un honor para mí que la Real Academia me haya designado para contestar el discurso de ingreso de mi querido amigo, que fue también mi discípulo, D. José Bonet Solves.

Desde que tuve los primeros contactos con él, cuando era estudiante de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia, pude darme cuenta de su profunda inteligencia, laboriosidad y vocación entusiasta por las matemáticas. A lo largo del tiempo, esto, unido a otras cualidades humanas, ha tenido como resultado que nuestra relación no sólo haya sido científica sino que nos ha conducido a tener una amistad entrañable. Trabajé mucho en la Universidad de Valencia y tuve la suerte de contar con un número amplio de buenos discípulos. Uno de los más destacados fue el profesor Bonet Solves.

Nació Bonet Solves en Valencia en 1955. Cursó la licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Valencia y la terminó, con brillantes calificaciones, en 1977. En el año 1980, se doctoró en Ciencias Matemáticas en dicha Universidad bajo mi dirección. Durante este tiempo, y posteriormente, recibió numerosos reconocimientos y premios. Fue becario por oposición del Colegio Mayor San Juan de Ribera desde 1971 a 1977. Obtuvo el Premio Extraordinario de Matemáticas concedido por la Universidad de Valencia en 1978. Fue premio de Licenciatura en Matemáticas de la Fundación Cañada Blanch de Burriana (Castellón) en 1979. Primer Premio Nacional de Terminación de Estudios de Matemáticas, concedido en 1978 por el Ministerio de Educación y Ciencia. Premio Extraordinario de Doctorado en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia en 1980. Ha sido también becario de la Fundación Alexander von Humboldt en los años 1994, 1995, 1998 y 2002 en las universidades de Düsseldorf y Paderborn en Alemania. Ha realizado otras estancias prolongadas de investigación en las universidades de Lieja (Bélgica), Michigan Ann Arbor (Estados Unidos), Reading (Inglaterra), Poznań (Polonia) y Helsinki (Finlandia).

Desde que acabó la licenciatura de Matemáticas se dedicó a la docencia en la Universidad, actividad que es tan importante como pueda ser la investigación. Citaré a este respecto que, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia, fue profesor Ayudante desde 1977 hasta 1982, y Profesor Colaborador desde 1982 hasta 1983. Fue Profesor Adjunto en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Valencia desde 1983 hasta 1987. Actualmente, es Catedrático de Universidad en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Valencia, puesto que ocupa desde 1987. Me consta que Bonet Solves es un buen profesor, que es apreciado por sus alumnos. Desde 2004 dirige el Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, mostrando una gran capacidad de gestión y liderazgo.

Es Miembro Correspondiente de la Real Sociedad de Ciencias de Lieja (Bélgica) desde enero de 1992. También es Académico Correspondiente de esta Real Academia de Ciencias desde 1994.

La participación del profesor Bonet en revistas científicas ha sido muy activa. Como recensor del Mathematical Reviews desde 1984 ha publicado más de 160 recensiones, y como recensor del Zentralblatt für Mathematik, más de 100. Es miembro del comité editorial de la revista polaca Functiones et Approximatio, Commentarii Mathematici. Como referee ha participado en más de 25 revistas. Cito algunas de ellas: Acta Mathematica Hungarica, Advances in Mathematics, Archiv der Mathematik, Collectanea Mathematica, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Functional Analysis, Journal of the London Mathematical Society, Mathematische Nachrichten, Pacific Journal of Mathematics, Revista Matemática Complutense y Studia Mathematica.

Sería muy largo de exponer, aunque fuera someramente, la investigación matemática del profesor Bonet, recogida en más de 150 artículos publicados en revistas internacionales de matemáticas de gran impacto y difusión. Estos se dedican fundamentalmente al Análisis funcional y a la Teoría de operadores. En sus artículos ha introducidos ideas y técnicas nuevas y profundas, resolviendo algunos problemas que habían permanecido abiertos varios años. Los temas de sus investigaciones cubren un amplio abanico dentro del Análisis funcional y sus aplicaciones. Bonet ha cambiado varias veces de tema de investigación, mostrando una gran flexibilidad y un conocimiento amplio de muchos aspectos de las matemáticas, como también queda claro en el discurso que nos ha entregado. Ha trabajado además con cuarenta coautores. He tenido la oportunidad de hablar con muchos de ellos y comprobar la gran estima que le tienen, tanto matemática como personal. Su trabajo ha sido reconocido con numerosas invitaciones como conferenciante principal en congresos internacionales de Análisis funcional y ha sido difundido en muchas conferencias invitadas en universidades europeas y americanas. La investigación de Bonet Solves ha tenido gran impacto. La base de datos MathScinet, del Mathematical Review, recoge las citas desde 1997; en ese periodo sus artículos han recibido más de 560 citas por más de 190 autores. La base de datos Essential Science

Indicators, de la Web of Knowledge, publica un ranking de investigadores en matemáticas, correspondiente al uno por cien de los científicos más citados; en ese listado aparece José Bonet cuyas publicaciones tienen más de 400 citas en la ISI Web of Science.

Entre los numerosos resultados relevantes que ha obtenido, cito algunos de ellos. En 1988, en un artículo conjunto con Klaus Bierstedt, Académico Correspondiente Extranjero de esta Real Academia, obtuvo la caracterización de los espacios escalonados de Köthe que son distinguidos, resolviendo un problema que había permanecido abierto durante muchos años. Para resolver este problema tuvieron que hacer un estudio profundo de la condición de densidad de Heinrich para espacios de Fréchet. En el año 1988, junto con Susanne Dierolf, resolvió un difícil problema de Grothendieck sobre biduales de espacios (LF). También, en el año 1991, junto con Susanne Dierolf y Carmen Fernández, esta última profesora de la Universidad de Valencia, consiguió resolver otro problema de Grothendieck sobre biduales de espacios de Fréchet distinguidos. Ambos problemas de Grothendieck habían permanecido abiertos desde el año 1954. Con Braun, Meise y Taylor, Bonet obtuvo en 1991 el teorema de extensión de Whitney para clases no casi analíticas de funciones ultradiferenciables. En el año 1997, con Antonio Galbis y Meise, y en el año 2000 con Carmen Fernández y Meise, Bonet estudia la convolución de operadores en espacios de funciones ultradiferenciables, tema en el que continúa trabajando. En 1998, con Alfredo Peris, resuelve un difícil problema de Rolewicz planteado en 1969. Son también importantes las colaboraciones con Domański, acerca de dependencia paramétrica de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, con Taskinen, acerca de espacios de funciones holomorfas y con Defant, acerca del teorema de Levi-Steinitz sobre reordenación de series.

El profesor Bonet ha dirigido 9 tesis doctorales, formando un grupo de investigadores de gran valía, que dirige desde 1988. Este grupo ha recibido ayuda de proyectos competitivos del Ministerio de Educación y de la Generalidad Valenciana de forma continuada, incluyendo acciones integradas hispano-alemanas e hispano-italianas.

Tras esta resumida exposición de los méritos del profesor Bonet, centro mi atención en el magistral discurso que nos ha dado y en el que ha expuesto, de una forma clara y atractiva, conceptos profundos del Análisis matemático, los cuales están íntimamente relacionados con el trabajo de investigación que él ha desarrollado.

El profesor Bonet nos ha dicho que, al dirigirse a una audiencia como ésta, en la cual, además de científicos hay familiares y amigos, no está seguro de interesar a todos, pero que lo intentaría, procurando cumplir con una recomendación de Gian Carlo Rota que, en un artículo de 1997, dice: Hay que dar a la audiencia algo para llevar a casa. Yo, igual que el profesor Bonet, voy a intentar atender dicha recomendación.

En la teoría de distribuciones de Schwartz, se toma un abierto Ω del espacio euclídeo n-dimensional y se considera el espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos de las funciones complejas definidas en Ω, indefinidamente diferenciables y de soporte compacto. A este espacio se le llama $\mathcal{D}(\Omega)$ y se le da una estructura lineal topológica. Los elementos del dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ son las distribuciones de Schwartz. Esto, obviamente, es muy abstracto. Ya nos dice Bonet que cuando Schwartz mencionó a Henri Cartan que iba a utilizar los elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ como funciones test, Cartan intentó disuadirle afirmando que esto era demasiado "monstruoso". Pasados los años y a la vista del enorme éxito matemático de las distribuciones, se percibe claramente el gran error de Cartan. No obstante, hemos de aceptar que, salvo ciertas distribuciones, como pueden ser las funciones localmente integrables o algunas medidas de Radon, como la delta de Dirac, en general, la existencia de distribuciones se apoya en el teorema de extensión de Hahn-Banach que, a su vez, utiliza el axioma de elección de Zermelo, del cual me ocuparé después. Digo esto para poner de manifiesto que una cosa es el mundo real y otra, la matemática, aunque estén relacionados y tengan numerosos puntos de contacto y, además, de que el éxito de las matemáticas en sus aplicaciones a otras ciencias sea sorprendente.

El filósofo alemán Hegel, después de escribir muchas páginas, hacía dos afirmaciones. La primera dice que todo lo real es racional, y la segunda, que todo lo racional es real. Respecto a la primera, podemos estar más o menos de acuerdo, pero la segunda no es tan fácil que pueda ser admitida por muchos matemáticos.

Para las ultradistribuciones, ya sean del tipo Roumieu o del tipo Beurling, las funciones test que sirven de base pertenecen a clases no casi analíticas, cuyas funciones están definidas utilizando cotas de los módulos de las derivadas sucesivas, como hace Komatsu, o también, utilizando una función peso, tal como hace Björck en su famoso artículo de 1965, de manera que la transformada de Fourier que se utiliza tenga un comportamiento suficientemente suave. Este último método, modificado por Braun, Meise y Taylor en 1990, ha dado lugar a que se hayan publicado numerosos artículos en los últimos años, con resultados relevantes. Aquí, el profesor Bonet ha participado activamente. Podemos decir, intuitivamente hablando, que las ultradistribuciones son más numerosas que las distribuciones, de aquí que el problema existencial basado en el axioma de elección de Zermelo sea también muy significativo.

Mi primer contacto con las clases casi analíticas y las clases no casi analíticas, tuvo lugar cuando mi maestro y amigo D. Ricardo San Juan Llosá me dirigía la tesis doctoral. D. Ricardo me decía que fue D. Julio Rey Pastor quien le entregó el libro de Carleman sobre clases casi analíticas, publicado en la colección Borel en el año 1926, animándole a que lo estudiara. Así lo hizo San Juan, y resolvió un problema que aparece al final de dicho libro. No es el caso de exponer aquí los detalles, sólo diré que el problema estaba considerado como muy difícil y que D. Ricardo se hizo famoso. Como consecuencia, Borel invitó a San Juan al Congreso Mundial de Matemáticas, celebrado en Oslo en el año 1936. San Juan asistió a este Congreso para exponer sus resultados. San Juan tenía entonces 27 años.

Cuando yo trabajaba con San Juan, estudié muchos de sus artículos, llegando de esta forma, y de las muchas conversaciones con él, al conocimiento de las clases casi analíticas y de las clases no casi analíticas. Algunos colegas de San Juan creían que éste hacía unas matemáticas muy antiguas. Si vivieran ahora, se darían cuenta de lo equivocados que estaban.

Carleman caracterizó las clases casi analíticas utilizando funciones de variable compleja, resolviendo también el llamado problema de Watson. Esto dio lugar a que Borel, dado que la caracterización de Carleman es un teorema de funciones de variable real, planteara el problema de obtener el resultado de Carleman sin usar funciones de variable compleja. Fue el matemático danés Bang, quien, en su tesis doctoral, publicada en 1946, resolvió el problema de Borel. Bang estuvo en Madrid, invitado por San Juan, y expuso sus investigaciones sobre este tema. Ahora, el teorema de Carleman demostrado en el campo real puede ser estudiado en el primer tomo de la obra monumental de Hörmander sobre operadores lineales en derivadas parciales.

Volviendo al axioma de elección, he de decir que, en general, de él solamente se obtienen teoremas de existencia. El axioma de elección fue mencionado primero por los italianos Peano, Bettazi y Levi, pero ya había sido aplicado por Cantor y Dedekind en el contexto de la teoría de conjuntos.

Fue Cantor quien creó, a finales del siglo XIX, al Aritmética transfinita. En esta época, se trabajaba mucho en series trigonométricas y, en particular, en series de Fourier. Cantor obtuvo algunos resultados sobre convergencia puntual en series trigonométricas, y, en el transcurso de sus investigaciones, consideró subconjuntos derivados sucesivos, en el sentido topológico, de conjuntos de números reales. Así llegó, según nos cuenta Zermelo, al concepto de ordinal transfinito.

Un conjunto ordenado se dice bien ordenado cuando todo subconjunto no vacío de él tiene un primer elemento. Se dice que dos conjuntos bien ordenados tienen el mismo número ordinal si existe una semejanza entre ellos, es decir, una aplicación biyectiva que conserve el orden. La Aritmética ordinaria considera números cardinales finitos. En este caso, a cada número cardinal le corresponde un solo número ordinal. Por esta razón nunca se hizo una Aritmética de números ordinales ya que, de haberse hecho, se hubiera obtenido una copia de la Aritmética ordinaria. Sin embargo, para ordinales infinitos el caso es muy diferente, así, el conjunto de los números naturales admite una infinidad de ordenaciones para las cuales resulta bien ordenado de manera que los números ordinales correspondientes son distintos. Por eso, la Aritmética transfinita de Cantor fue algo nuevo en su tiempo que produjo un gran impacto. A finales del siglo XIX no se sabía si cualquier conjunto se podría ordenar bien, ni siquiera se sabía si el conjunto de los números reales tendría esta propiedad. Esto condujo a la definición de los números aleph. Un aleph es el número cardinal de un conjunto que se pueda ordenar bien.

Puesto que no se sabía si el continuo, es decir, el número cardinal del conjunto de los números reales, sería un aleph, se pensó que quizá los números ordinales no fueran demasiado numerosos. Entonces se admitió que formaban un conjunto y, razonando a partir de aquí, se aplicó un teorema de Zermelo y se llegó a una contradicción. Este resultado se conoce como la paradoja de Burali-Forte.

Fue en el año 1904 cuando Zermelo, utilizando el axioma de elección, demostró que todo conjunto puede ser bien ordenado, o lo que es lo mismo, que todo número cardinal es un aleph, y apareció publicado en dicho año en al revista alemana Mathematische Annalen. Comienza Zermelo su razonamiento diciendo: Sea M un conjunto, elegimos ahora de cada subconjunto no vacío B de M un elemento, que llamamos $\varphi(B)$. Esta operación tan simple que hace Zermelo eligiendo un elemento de cada subconjunto no vacío de M y construyendo así una función φ es el principio de elección que a tantas discusiones ha conducido.

En el año 1908, cuando Zermelo construye su sistema axiomático de la Teoría de conjuntos, da otra forma al axioma de elección que es la siguiente: Si se tiene una familia de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, existe un conjunto que tiene exactamente un elemento de cada conjunto de la familia. En el mismo año, Bertrand Russell demostró la equivalencia de ambas formulaciones de Zermelo.

Es obvio, que si tenemos, por ejemplo, varias aulas con alumnos en una universidad, de cada aula podemos elegir un alumno y formar así un conjunto. Por tanto, para el caso de una familia finita de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales tenga un número finito de elementos, podemos aplicar el principio de elección, pues el mundo real nos avala. Pero, en los demás casos, no ocurre lo mismo, pues si tenemos, por ejemplo, una familia infinita de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, y queremos elegir un elemento de cada uno de ellos, el tiempo que hemos de utilizar no nos permitirá terminar la operación. El mundo real no nos avala, nos abandona a nuestra suerte, pero somos lo suficientemente animosos para darle al principio de elección carácter de axioma y seguir con nuestros razonamientos. No obstante, tenemos avales de naturaleza intelectual, siendo el principal de ellos un resultado de Gödel que comentaré después.

Gödel nació en Brün, en Moravia, en 1906. A lo largo de toda su vida fue siempre un hombre muy religioso. En el año 1924, ingresó en la Universidad de Viena con la intención de estudiar Física pero, al recibir clases del matemático Philip Furtwángler, especialista en Teoría de números, quedó tan impresionado que cambió la Física por la Matemática.

Un maestro de Gödel, Hans Hahn, cuyo nombre va unido al de Stephan Banach en el llamado teorema de Hahn-Banach, dio a conocer a Gödel el famoso Círculo de Viena, cuyos componentes eran científicos relevantes, entre los que se encontraba el mismo Hahn. En el año 1926, cuando Gödel se incorporó a este grupo, se reunían en un seminario de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Viena y se dedicaban allí a construir una filosofía de la Ciencia que se conoce ahora con el nombre de “Positivismo lógico” y que sostiene que una afirmación para que tenga sentido debe de ser verificable por la experiencia física. Como consecuencia de esto, el primer concepto que hicieron desaparecer fue el concepto de Dios. Gödel, aunque se sentía atraído por este grupo, como era un hombre profundamente religioso, se apartó de ellos.

Gödel probó que si un teorema se demuestra sin utilizar el axioma de elección, no se puede demostrar lo contrario utilizando dicho axioma, es decir, que si la axiomática de la Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel se amplia con el axioma de elección no se añade contradicción alguna. Esto dio luz verde para la utilización del axioma de elección.

Siguiendo algunas ideas sobre el pensamiento matemático y el mundo real, he de citar a Platón. Del libro V al VII del diálogo La República, Platón se ocupa de cuestiones de filosofía pura y, en particular, de la teoría de las ideas o formas. En lo que se refiere a la matemática, esta teoría viene a decir que, por ejemplo, el círculo significa un círculo ideal, creado por Dios y único. Entonces, los entes matemáticos existen realmente en alguna parte, diríamos nosotros, para entendernos, que están en el cielo platónico. Este platonismo, a veces más moderado, lo han compartido algunos matemáticos relevantes. El mismo Gödel confesó que era platónico y que su platonismo le había ayudado mucho a conseguir su teorema sobre la incompletitud de la Aritmética y de otros resultados de Lógica matemática.

Yo pienso que muchos matemáticos somos platónicos, a veces sin darnos cuenta, en el sentido de que los conceptos que manejamos los sentimos tan concretos y tangibles como los objetos que nos rodean.

Como he dicho antes, Hegel afirmaba que todo lo real es racional. Puede que sea así, aunque yo abrigo la creencia de que Dios ha hecho un mundo que, desde el punto de vista del conocimiento, quizá esté por encima de nuestras capacidades intelectuales. Respeto mucho a Hegel, pero yo estoy al lado de Hamlet, en la famosa tragedia de Shakespeare, cuando dirigiéndose a Horacio, dice lo siguiente: "Hay más cosas en el cielo y en la tierra, Horacio, de las que pueda soñar tu filosofía".

Antes de terminar, debo decir, que a lo largo de mi vida he tenido dos sentimientos que destaco. El primero, un agradecimiento inmenso a mis maestros, y el segundo, una esperanza ilusionada hacia mis discípulos. Han pasado los años y esta esperanza se ha visto más que colmada, como prueba el caso del profesor Bonet.

Y ahora debo de felicitar al profesor Bonet por la alta calidad de la matemática que ha cultivado, y animarle a que continúe en esa dirección.

Querido amigo Bonet, en nombre de la Academia le doy la bienvenida a esta Casa. Desde ahora tenemos la suerte de contar con usted que con sus conocimientos, laboriosidad y juventud realizará, sin duda, una colaboración fecunda en las tareas de la Academia.

Gracias por la atención que me han prestado.

Lista de publicaciones de José Bonet Solves

[1] Angela A. Albanese and José Bonet, *Intersections of Fréchet spaces and (LB)-spaces*, Rocky Mountain J. Math. **36** (2006), no. 4, 1093–1105. MR2274885 (2007k:46004)

[2] ———, *Ultradifferentiable fundamental kernels of linear partial differential operators on non-quasianalytic classes of Roumieu type*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 1, 39–54. MR2317111 (2008c:35024)

[3] Françoise Bastin and José Bonet, *Locally bounded noncontinuous linear forms on strong duals of nondistinguished Köthe echelon spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), no. 3, 769–774. MR1002152 (90h:46012)

[4] K. D. Bierstedt and J. Bonet, *Biduality in (LF)-spaces*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **95** (2001), no. 2, 171–180. MR1902422 (2003d:46002)

[5] K. D. Bierstedt, J. Bonet, and J. Schmets, (DF)*-spaces of type* $CB(X,E)$ *and* $C\overline{V}(X,E)$, Note Mat. **10** (1990), no. suppl. 1, 127–148 (1992), Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe. MR1193519 (93k:46024)

[6] Klaus D. Bierstedt and José Bonet, *Dual density conditions in* (DF)*-spaces. I*, Results Math. **14** (1988), no. 3-4, 242–274. MR964043 (90b:46003a)

[7] ———, *Dual density conditions in* (DF)*-spaces. II*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **57** (1988), no. 6, 567–589. MR986374 (90g:46002)

[8] ———, *Stefan Heinrich's density condition for Fréchet spaces and the characterization of the distinguished Köthe echelon spaces*, Math. Nachr. **135** (1988), 149–180. MR944226 (90a:46001)

[9] ———, *Density conditions in Fréchet and (DF)-spaces*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **2** (1989), no. suppl., 59–75, Congress on Functional Analysis (Madrid, 1988). MR1057209 (91m:46006)

[10] ———, *Erratum: "Dual density conditions in* (DF)*-spaces. I"*, Results Math. **15** (1989), no. 1-2, 196. MR979453 (90b:46003b)

[11] ———, *Projective descriptions of weighted inductive limits: the vector-valued cases*, Advances in the theory of Fréchet spaces (Istanbul, 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 287, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, pp. 195–221. MR1083565 (92c:46044)

[12] ———, *Some recent results on* $\mathcal{V}C(X)$, Advances in the theory of Fréchet spaces (Istanbul, 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 287, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, pp. 181–194. MR1083564 (92b:46026)

[13] ———, *Completeness of the (LB)-spaces* $\mathcal{V}C(X)$, Arch. Math. (Basel) **56** (1991), no. 3, 281–285. MR1091882 (92d:46062)

[14] ———, *Biduality in Fréchet and (LB)-spaces*, Progress in functional analysis (Peñíscola, 1990), North-Holland Math. Stud., vol. 170, North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 113–133. MR1150741 (93i:46010)

[15] ———, *A question of D. Vogt on* (LF)*-spaces*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 170–172. MR1230946 (94m:46007)

[16] ———, *Weighted (LF)-spaces of continuous functions*, Math. Nachr. **165** (1994), 25–48. MR1261361 (95a:46033)

[17] ———, *Projective description of weighted (LF)-spaces of holomorphic functions on the disc*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **46** (2003), no. 2, 435–450. MR1998573 (2004f:46035)

[18] ———, *Some aspects of the modern theory of Fréchet spaces*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **97** (2003), no. 2, 159–188. MR2068172 (2005e:46001)

[19] ———, *Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions:* $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ *and completeness of* $\mathcal{V}_0H(G)$, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), no. 2, 747–767. MR2260142 (2007g:46043)

[20] Klaus D. Bierstedt, José Bonet, and Antonio Galbis, *Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains*, Michigan Math. J. **40** (1993), no. 2, 271–297. MR1226832 (94i:46034)

[21] Klaus D. Bierstedt, José Bonet, and Alfredo Peris, *Vector-valued holomorphic germs on Fréchet-Schwartz spaces*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **94** (1994), no. 1, 31–46. MR1297917 (95m:46066)

[22] Klaus D. Bierstedt, José Bonet, and Jari Taskinen, *Associated weights and spaces of holomorphic functions*, Studia Math. **127** (1998), no. 2, 137–168. MR1488148 (99a:46037)

[23] Klaus Dieter Bierstedt and José Bonet, *The density condition and distinguished echelon spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **303** (1986), no. 10, 459–462. MR865860 (88a:46006)

[24] J. Bonet, R. W. Braun, R. Meise, and B. A. Taylor, *Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions*, Extracta Math. **5** (1990), no. 3, 162–164. MR1125693

[25] ———, *Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions*, Studia Math. **99** (1991), no. 2, 155–184. MR1120747 (93e:46030)

[26] J. Bonet, A. Defant, A. Peris, and M. S. Ramanujan, *Coincidence of topologies on tensor products of Köthe echelon spaces*, Studia Math. **111** (1994), no. 3, 263–281. MR1301770 (95i:46105)

[27] J. Bonet and S. Dierolf, *Fréchet spaces of Moscatelli type*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **2** (1989), no. suppl., 77–92, Congress on Functional Analysis (Madrid, 1988). MR1057210 (91f:46006)

[28] ———, *The pullback for bornological and ultrabornological spaces*, Note Mat. **25** (2005/06), no. 1, 63–67. MR2220453 (2007b:46002)

[29] J. Bonet, S. Dierolf, and C. Fernández, *On different types of nondistinguished Fréchet spaces*, Note Mat. **10** (1990), no. suppl. 1, 149–165 (1992), Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe. MR1193520 (94f:46004)

[30] ———, *The bidual of a distinguished Fréchet space need not be distinguished*, Arch. Math. (Basel) **57** (1991), no. 5, 475–478. MR1129523 (92h:46002)

[31] ———, *On two classes of LF-spaces*, Portugal. Math. **49** (1992), no. 1, 109–130. MR1165925 (93f:46002)

[32] J. Bonet, S. Dierolf, and J. Wengenroth, *Strong duals of projective limits of (LB)-spaces*, Czechoslovak Math. J. **52(127)** (2002), no. 2, 295–307. MR1905436 (2003e:46004)

[33] J. Bonet, P. Domański, and M. Lindström, *Cotype and complemented copies of c_0 in spaces of operators*, Czechoslovak Math. J. **46(121)** (1996), no. 2, 271–289. MR1388616 (97d:46019)

[34] ———, *Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions*, Studia Math. **137** (1999), no. 2, 177–194. MR1734396 (2000m:47042)

[35] J. Bonet, P. Domański, M. Lindström, and M. S. Ramanujan, *Operator spaces containing c_0 or l_∞*, Results Math. **28** (1995), no. 3-4, 250–269. MR1356892 (97b:46007)

[36] J. Bonet, P. Domański, M. Lindström, and J. Taskinen, *Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **64** (1998), no. 1, 101–118. MR1490150 (98m:47039)

[37] J. Bonet, C. Fernandez, and R. Meise, *Operators of solution for convolution equations*, Proceedings of the Second International Workshop on Functional Analysis (Trier, 1997), vol. 17, 1997, pp. 1–12 (1999). MR1749777 (2001c:46077)

[38] J. Bonet, C. Fernández, and R. Meise, *Characterization of the ω-hypoelliptic convolution operators on ultradistributions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **25** (2000), no. 2, 261–284. MR1762416 (2001e:46071)

[39] J. Bonet, L. Frerick, A. Peris, and J. Wengenroth, *Transitive and hypercyclic operators on locally convex spaces*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 2, 254–264. MR2119025 (2005k:47021)

[40] J. Bonet and A. Galbis, *The identity $L(E,F) = LB(E,F)$, tensor products and inductive limits*, Note Mat. **9** (1989), no. 2, 195–216. MR1114932 (92e:46140)

[41] J. Bonet, A. Galbis, and R. Meise, *On the range of convolution operators on non-quasianalytic ultradifferentiable functions*, Studia Math. **126** (1997), no. 2, 171–198. MR1472697 (99a:46071)

[42] J. Bonet, M. Lindström, and M. Valdivia, *Two theorems of Josefson-Nissenzweig type for Fréchet spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 2, 363–364. MR1136233 (93d:46005)

[43] J. Bonet and M. Maestre, *A note on the Schwartz space $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ endowed with the strict topology*, Arch. Math. (Basel) **55** (1990), no. 3, 293–295. MR1075055 (91m:46031)

[44] J. Bonet, F. Martínez-Giménez, and A. Peris, *Linear chaos on Fréchet spaces*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (2003), no. 7, 1649–1655, Dynamical systems and functional equations (Murcia, 2000). MR2015614 (2004i:47016)

[45] J. Bonet, R. Meise, and B. A. Taylor, *On the range of the Borel map for classes of nonquasianalytic functions*, Progress in functional analysis (Peñíscola, 1990), North-Holland Math. Stud., vol. 170, North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 97–111. MR1150740 (93e:46044)

[46] J. Bonet and S.N. Melikhov, *Interpolation of entire functions and projective descriptions*, J. Math. Anal. Appl. **205** (1997), no. 2, 454–460. MR1428359 (98f:32015)

[47] J. Bonet, G. Metafune, M. Maestre, V. B. Moscatelli, and D. Vogt, *Every quojection is the quotient of a countable product of Banach spaces*, Advances in the theory of Fréchet spaces (Istanbul, 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 287, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, pp. 355–356. MR1083576 (91m:46012)

[48] J. Bonet and M. S. Ramanujan, *Localization of s-null sequences in LB-spaces*, Turkish J. Math. **18** (1994), no. 3, 203–210. MR1303339 (95i:46006)

[49] J. Bonet and W. J. Ricker, *Boolean algebras of projections in (DF)- and (LF)-spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **67** (2003), no. 2, 297–303. MR1972719 (2004m:47169)

[50] ———, *The canonical spectral measure in Köthe echelon spaces*, Integral Equations Operator Theory **53** (2005), no. 4, 477–496. MR2187433 (2007a:28009)

[51] J. Bonet and J. Schmets, *Examples of bornological $C(X;E)$ spaces*, Proceedings of the functional analysis conference (Silivri/Istanbul, 1985), vol. 10, 1986, pp. 83–90. MR872866 (88d:46061)

[52] J. Bonet and J. Taskinen, *Quojections and the problem of topologies of Grothendieck*, Note Mat. **11** (1991), 49–59, Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe. MR1258538 (94m:46010)

[53] José Bonet, *A note on the spaces $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n, E)$ and $S(\mathbf{R}^n, E)$*, Proceedings of the ninth conference of Portuguese and Spanish mathematicians, 1 (Salamanca, 1982) (Salamanca), Acta Salmanticensia. Ciencias, vol. 46, Univ. Salamanca, 1982, pp. 231–235. MR752329 (85j:46063)

[54] ———, *Representations of the spaces $\mathcal{E}^k(V, E)$ and $\mathcal{D}^k(V, E)$*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **76** (1982), no. 1, 121–129. MR666848 (84e:46036)

[55] ———, *Representations of the spaces $O_M(E)$ and $\mathcal{D}_{L^p}(E)$*, Collect. Math. **33** (1982), no. 1, 23–41. MR684092 (84c:46040)

[56] ———, *A projective description of weighted inductive limits of spaces of vector valued continuous functions*, Collect. Math. **34** (1983), no. 2, 115–125. MR766993 (86b:46052)

[57] ———, *Barrelledness and projective tensor products*, Proceedings of the tenth Spanish-Portuguese conference on mathematics, III (Murcia, 1985) (Murcia), Univ. Murcia, 1985, pp. 39–43. MR844073 (87i:46147)

[58] ———, *The countable neighbourhood property and tensor products*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **28** (1985), no. 2, 207–215. MR806751 (87a:46118)

[59] ———, *Quojections and projective tensor products*, Arch. Math. (Basel) **45** (1985), no. 2, 169–173. MR807449 (87b:46076)

[60] ———, *On weighted inductive limits of spaces of continuous functions*, Math. Z. **192** (1986), no. 1, 9–20. MR835386 (87h:46064)

[61] ———, *A note on the coincidence of topologies in tensor products*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **81** (1987), no. 1, 87–89. MR933527 (89e:46080)

[62] ———, *On the identity $L(E, F) = LB(E, F)$ for pairs of locally convex spaces E and F*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), no. 2, 249–255. MR870780 (88c:46009)

[63] ———, *Projective descriptions of inductive limits of Fréchet sequence spaces*, Arch. Math. (Basel) **48** (1987), no. 4, 331–336. MR884566 (88c:46005)

[64] ———, *A question of Antosik and Burzyk on nonbornological barrelled spaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **39** (1991), no. 3-4, 175–176. MR1194486 (93m:46001)

[65] ———, *A question of Valdivia on quasinormable Fréchet spaces*, Canad. Math. Bull. **34** (1991), no. 3, 301–304. MR1127750 (92k:46004)

[66] ———, *Intersections of Fréchet Schwartz spaces and their duals*, Arch. Math. (Basel) **68** (1997), no. 4, 320–325. MR1435331 (98a:46007)

[67] ______, *Closed linear maps from a barrelled normed space into itself need not be continuous*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), no. 2, 177–179. MR1617351 (98k:46005)

[68] ______, *Hypercyclic and chaotic convolution operators*, J. London Math. Soc. (2) **62** (2000), no. 1, 253–262. MR1772185 (2001g:47053)

[69] ______, *Weighted spaces of holomorphic functions and operators between them*, Seminar of Mathematical Analysis (Malaga/Seville, 2002/2003), Colecc. Abierta, vol. 64, Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville, 2003, pp. 117–138. MR2041333 (2005c:46025)

[70] ______, *Topologizable operators on locally convex spaces*, Topological algebras and applications, Contemp. Math., vol. 427, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 103–108. MR2326347 (2008b:46067)

[71] José Bonet and José A. Conejero, *Duality for monomorphisms and almost open operators between locally convex spaces*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **70** (2001), no. 4-6, 183–193 (2002), Hommage à Pascal Laubin. MR1904053 (2003i:46001)

[72] ______, *The sets of monomorphisms and of almost open operators between locally convex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 12, 3683–3690 (electronic). MR1860503 (2002h:46004)

[73] José Bonet and Andreas Defant, *Projective tensor products of distinguished Fréchet spaces*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **85** (1985), no. 2, 193–199. MR845543 (87i:46148)

[74] ______, *The Levy-Steinitz rearrangement theorem for duals of metrizable spaces*, Israel J. Math. **117** (2000), 131–156. MR1760590 (2001d:46012)

[75] José Bonet, Andreas Defant, and Antonio Galbis, *Tensor products of Fréchet or (DF)-spaces with a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **166** (1992), no. 2, 305–318. MR1160926 (93e:46006)

[76] José Bonet and Juan Carlos Diaz, *Distinguished subspaces and quotients of Köthe echelon spaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **39** (1991), no. 3-4, 177–183. MR1194487 (94i:46012)

[77] José Bonet and Juan Carlos Díaz, *On the weak quasinormability condition of Grothendieck*, Doğa Mat. **15** (1991), no. 3, 154–164. MR1136184 (93c:46012)

[78] ______, *The problem of topologies of Grothendieck and the class of Fréchet T-spaces*, Math. Nachr. **150** (1991), 109–118. MR1109647 (92j:46002)

[79] ______, *The density condition in subspaces and quotients of Fréchet spaces*, Monatsh. Math. **117** (1994), no. 3-4, 199–212. MR1279112 (95g:46002)

[80] José Bonet, Juan Carlos Díaz, and Jari Taskinen, *On the (FT) and (DFT)-spaces*, Colloquium 1988–1990 (Badajoz, 1988–1990), Publ. Dep. Mat. Univ. Extremadura, vol. 25, Univ. Extremadura, Badajoz, 1991, pp. 88–94. MR1098943

[81] ______, *Tensor stable Fréchet and (DF)-spaces*, Collect. Math. **42** (1991), no. 3, 199–236 (1992). MR1203181 (94c:46140)

[82] José Bonet and Santiago Diaz-Madrigal, *Ranges of vector measures in Fréchet spaces*, Indag. Math. (N.S.) **11** (2000), no. 1, 19–30. MR1809658 (2002c:46084)

[83] José Bonet and Susanne Dierolf, *A note on biduals of strict (LF)-spaces*, Results Math. **13** (1988), no. 1-2, 23–32. MR928138 (89h:46002)

[84] ______, *A note on strict LF-spaces*, Advances in the theory of Fréchet spaces (Istanbul, 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 287, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, pp. 259–264. MR1083569

[85] ______, *On LB-spaces of Moscatelli type*, Doğa Mat. **13** (1989), no. 1, 9–33. MR1016649 (91b:46004)

[86] ______, *Countable strict inductive limits and the bounded decomposition property*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **90** (1990), no. 1, 63–71. MR1092708 (92c:46003)

[87] ______, *On distinguished Fréchet spaces*, Progress in functional analysis (Peñíscola, 1990), North-Holland Math. Stud., vol. 170, North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 201–214. MR1150747 (92i:46004)

[88] ______, *On the lifting of bounded sets in Fréchet spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **36** (1993), no. 2, 277–281. MR1221048 (94c:46006)

[89] ______, *Inductive duals of distinguished Fréchet spaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) **90** (1996), no. 3, 175–177. MR1646536 (99h:46002)

[90] José Bonet, Susanne Dierolf, and Khin Aye Aye, *Dense subspaces of quasinormable spaces*, Math. Nachr. **279** (2006), no. 7, 699–704. MR2226405 (2007d:46003)

[91] José Bonet, Susanne Dierolf, and Carmen Fernández, *Inductive limits of vector-valued sequence spaces*, Publ. Mat. **33** (1989), no. 2, 363–367. MR1030973 (90k:46020)

[92] ———, *On the three-space-problem for distinguished Fréchet spaces*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **59** (1990), no. 3-4, 301–306. MR1070413 (91i:46001)

[93] José Bonet and Pawel Domański, *Real analytic curves in Fréchet spaces and their duals*, Monatsh. Math. **126** (1998), no. 1, 13–36. MR1633255 (99i:46032)

[94] José Bonet and Paweł Domański, *Parameter dependence of solutions of partial differential equations in spaces of real analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 2, 495–503 (electronic). MR1800237 (2001j:46027)

[95] ———, *Sampling sets and sufficient sets for $A^{-\infty}$*, J. Math. Anal. Appl. **277** (2003), no. 2, 651–669. MR1961252 (2004c:30087)

[96] ———, *Parameter dependence of solutions of differential equations on spaces of distributions and the splitting of short exact sequences*, J. Funct. Anal. **230** (2006), no. 2, 329–381. MR2186216 (2006i:35019)

[97] José Bonet and Pawel Domański, *The structure of spaces of quasianalytic functions of Roumieu type*, Arch. Math. (Basel) **89** (2007), no. 5, 430–441. MR2363694

[98] José Bonet and Paweł Domański, *The splitting of exact sequences of PLS-spaces and smooth dependence of solutions of linear partial differential equations*, Adv. Math. **217** (2008), no. 2, 561–585. MR2370276

[99] José Bonet, Paweł Domański, and Mikael Lindström, *Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions*, Canad. Math. Bull. **42** (1999), no. 2, 139–148. MR1692002 (2000d:47052)

[100] ———, *Weakly compact composition operators on analytic vector-valued function spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **26** (2001), no. 1, 233–248. MR1816570 (2002b:47042)

[101] José Bonet, Paweł Domański, and Jorge Mujica, *Complete spaces of vector-valued holomorphic germs*, Math. Scand. **75** (1994), no. 1, 150–160. MR1308945 (95m:46051)

[102] José Bonet, Paweł Domański, and Dietmar Vogt, *Interpolation of vector-valued real analytic functions*, J. London Math. Soc. (2) **66** (2002), no. 2, 407–420. MR1920411 (2003h:46056)

[103] José Bonet, Miroslav Engliš, and Jari Taskinen, *Weighted L^∞-estimates for Bergman projections*, Studia Math. **171** (2005), no. 1, 67–92. MR2182272

[104] José Bonet and Carmen Fernández, *Bounded sets in (LF)-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 12, 3717–3723. MR1277098 (96b:46003)

[105] José Bonet, Leonhard Frerick, and Enrique Jordá, *Extension of vector-valued holomorphic and harmonic functions*, Studia Math. **183** (2007), no. 3, 225–248. MR2357988

[106] José Bonet and Miguel Friz, *Weakly compact composition operators on locally convex spaces*, Math. Nachr. **245** (2002), 26–44. MR1936342 (2003h:47045)

[107] ———, *Weakly compact wedge operators on Köthe echelon spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **29** (2004), no. 1, 223–231. MR2041950 (2005a:47041)

[108] José Bonet, Miguel Friz, and Enrique Jordá, *Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions*, Publ. Math. Debrecen **67** (2005), no. 3-4, 333–348. MR2162126 (2006d:30076)

[109] José Bonet and Antonio Galbis, *A note on Taskinen's counterexamples on the problem of topologies of Grothendieck*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **32** (1989), no. 2, 281–283. MR1001126 (90g:46009)

[110] ———, *The range of non-surjective convolution operators on Beurling spaces*, Glasgow Math. J. **38** (1996), no. 1, 125–135. MR1373966 (97a:46052)

[111] José Bonet, Antonio Galbis, and Siegfried Momm, *Nonradial Hörmander algebras of several variables and convolution operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 6, 2275–2291 (electronic). MR1814070 (2002d:46022)

[112] José Bonet, Pablo Galindo, Domingo García, and Manuel Maestre, *Locally bounded sets of holomorphic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), no. 2, 609–620. MR961603 (90a:46110)

[113] José Bonet, Enrique Jordá, and Manuel Maestre, *Vector-valued meromorphic functions*, Arch. Math. (Basel) **79** (2002), no. 5, 353–359. MR1951304 (2003m:46062)

[114] José Bonet and Mikael Lindström, *Convergent sequences in duals of Fréchet spaces*, Functional analysis (Essen, 1991), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 150, Dekker, New York, 1994, pp. 391–404. MR1241690 (94i:46002)

[115] ______, *Spaces of operators between Fréchet spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **115** (1994), no. 1, 133–144. MR1253288 (94k:46008)

[116] José Bonet and Manuel Maestre, *Representations of the spaces $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ and $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **77** (1983), no. 1, 141–159. MR706815 (85c:46034)

[117] José Bonet, Félix Martínez-Giménez, and Alfredo Peris, *A Banach space which admits no chaotic operator*, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), no. 2, 196–198. MR1815423 (2001m:47015)

[118] ______, *Universal and chaotic multipliers on spaces of operators*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), no. 2, 599–611, Special issue dedicated to John Horváth. MR2088683 (2005g:47006)

[119] José Bonet and Reinhold Meise, *Ultradistributions of Roumieu type and projective descriptions*, J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), no. 1, 122–136. MR1813813 (2002b:46065)

[120] ______, *Quasianalytic functionals and projective descriptions*, Math. Scand. **94** (2004), no. 2, 249–266. MR2053743 (2005d:46050)

[121] ______, *Characterization of the convolution operators on quasianalytic classes of Beurling type that admit a continuous linear right inverse*, Studia Math. **184** (2008), no. 1, 49–77. MR2365475

[122] José Bonet, Reinhold Meise, and Sergeĭ N. Melikhov, *Projective representations of spaces of quasianalytic functionals*, Studia Math. **164** (2004), no. 1, 91–102. MR2079772 (2005e:46038)

[123] José Bonet, Reinhold Meise, and Sergej N. Melikhov, *Holomorphic functions on locally closed convex sets and projective descriptions*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **10** (2003), no. 4, 491–503. MR2040526 (2005a:46051)

[124] ______, *The dual of the space of holomorphic functions on locally closed convex sets*, Publ. Mat. **49** (2005), no. 2, 487–509. MR2177639 (2006g:46041)

[125] José Bonet, Reinhold Meise, and B. Alan Taylor, *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Roumieu type*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **89** (1989), no. 1, 53–66. MR1021222 (90m:46035)

[126] José Bonet, Susumu Okada, and Werner J. Ricker, *The canonical spectral measure and Köthe function spaces*, Quaest. Math. **29** (2006), no. 1, 91–116. MR2209794 (2007b:46061)

[127] José Bonet and Pedro Pérez Carreras, *On the three-space problem for certain classes of Baire-like spaces*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **51** (1982), no. 9-12, 381–385. MR705014 (85e:46005)

[128] ———, *Remarks on the stability of barreled-type topologies*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **52** (1983), no. 5, 313–318. MR731286 (85h:46008)

[129] ———, *Some results on barreledness in projective tensor products*, Math. Z. **185** (1984), no. 3, 333–338. MR731681 (85f:46130)

[130] José Bonet and Alfredo Peris, *On the injective tensor product of quasinormable spaces*, Results Math. **20** (1991), no. 1-2, 431–443. MR1122351 (92j:46127)

[131] ———, *Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal. **159** (1998), no. 2, 587–595. MR1658096 (99k:47044)

[132] José Bonet and M. S. Ramanujan, *Two classes of operators between Fréchet spaces*, Functional analysis (Trier, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, pp. 53–68. MR1420437 (97j:47003)

[133] José Bonet and Werner J. Ricker, *Spectral measures in classes of Fréchet spaces*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **73** (2004), no. 2-3, 99–117. MR2108923 (2006m:46052)

[134] ———, *Schauder decompositions and the Grothendieck and Dunford-Pettis properties in Köthe echelon spaces of infinite order*, Positivity **11** (2007), no. 1, 77–93. MR2297324 (2008d:46004)

[135] José Bonet and Jean Schmets, *Bornological spaces of type $C(X) \otimes_\epsilon E$ or $C(X; E)$*, Funct. Approx. Comment. Math. **17** (1987), 37–44. MR893739 (88g:46053)

[136] José Bonet and Jari Taskinen, *Nondistinguished Fréchet function spaces*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **58** (1989), no. 6, 483–490. MR1039677 (91d:46026)

[137] ———, *The subspace problem for weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions*, Michigan Math. J. **42** (1995), no. 2, 259–268. MR1342489 (96f:46036)

[138] ———, *The subspace problem for weighted inductive limits revisited*, Rocky Mountain J. Math. **30** (2000), no. 1, 85–99. MR1763798 (2001e:46035)

[139] José Bonet and Dietmar Vogt, *Weighted spaces of holomorphic functions and sequence spaces*, Proceedings of the Second International Workshop on Functional Analysis (Trier, 1997), vol. 17, 1997, pp. 87–97 (1999). MR1749782 (2000m:46047)

[140] ———, *On the topological description of weighted inductive limits of spaces of holomorphic and harmonic functions*, Arch. Math. (Basel) **72** (1999), no. 5, 360–366. MR1680435 (2000d:46027)

[141] José Bonet and Elke Wolf, *A note on weighted Banach spaces of holomorphic functions*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), no. 6, 650–654. MR2029241 (2004i:46037)

[142] Kh. Bonet, R. Maĭze, and S. N. Melikhov, *Topologies of spaces dual to spaces of functions holomorphic on locally closed convex sets*, Dokl. Akad. Nauk **389** (2003), no. 4, 448–451. MR2042067 (2005d:46053)

[143] José Bonet Solves and Juan C. Díaz Alcaide, *The problem of the Grothendieck topologies and the class of Fréchet T-spaces*, Proceedings of the XIVth Spanish-Portuguese Conference on Mathematics, Vol. I–III (Spanish) (Puerto de la Cruz, 1989) (La Laguna), Univ. La Laguna, 1990, pp. 261–265. MR1112882

[144] Pedro Pérez Carreras and José Bonet, *Remarks and examples concerning suprabarreled and totally barreled spaces*, Arch. Math. (Basel) **39** (1982), no. 4, 340–347. MR684404 (84h:46004)

[145] S. Dierolf and J. Bonet, *On LB-, Fréchet-, and LF-spaces of Moscatelli type*, Colloquium 1986–88 (Badajoz, 1986–88), Univ. Extremadura, Badajoz, 1988, pp. 69–89. MR979327 (90c:46005)

[146] Manuel Maestre and José Bonet, *On the space $\mathcal{D}_{+F}(\Omega, E)$*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **80** (1986), no. 1-2, 31–39. MR916020 (89a:46083)

[147] Pedro Pérez Carreras and José Bonet, *A note on codimension of subspaces of certain locally convex spaces*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **74** (1980), no. 5, 1002–1006. MR629224 (83h:46010)

[148] ______, *Note on a result of Eidelheit*, Collect. Math. **33** (1982), no. 2, 195–200. MR719289 (85e:46004)

[149] ______, *A note on tensor products*, Proceedings of the ninth conference of Portuguese and Spanish mathematicians, 1 (Salamanca, 1982) (Salamanca), Acta Salmanticensia. Ciencias, vol. 46, Univ. Salamanca, 1982, pp. 363–367. MR752361 (85j:46125)

[150] ______, *Barrelled locally convex spaces*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 131, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 113. MR880207 (88j:46003)