



Título del Trabajo Fin de Máster:

***APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS
JERARQUÍAS ANALÍTICAS PARA LA
TOMA DE DECISIONES
PARTICIPATIVA EN LA GESTIÓN DE
FUGAS EN REDES DE
ABASTECIMIENTO DE AGUA***

Intensificación:

HIDRÁULICA URBANA

Autor:

CARRIÓN SÁNCHEZ, LAURA

Director/es:

DR. JULIO BENÍTEZ LÓPEZ

DR. JOAQUÍN IZQUIERDO SEBASTIÁN

DR. RAFAEL PÉREZ GARCÍA

Fecha: SEPTIEMBRE, 2013



Título del Trabajo Fin de Máster:

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS JERARQUÍAS ANALÍTICAS PARA LA TOMA DE DECISIONES PARTICIPATIVA EN LA GESTIÓN DE FUGAS EN REDES DE ABASTECIMIENTO DE AGUA

Autor: **CARRIÓN SÁNCHEZ, LAURA**

Tipo	A <input type="checkbox"/> B <input checked="" type="checkbox"/>	Lugar de Realización	VALENCIA
Director	JULIO BENÍTEZ LÓPEZ, JOAQUÍN	Fecha de Lectura	SEPT., 2013
Codirector1	IZQUIERDO SEBASTIÁN, RAFAEL		
Codirector2	PÉREZ GARCÍA		
Tutor	JULIO BENÍTEZ LÓPEZ		

Resumen:

Castellano

En los abastecimientos de agua urbana actuales, adoptar un enfoque proactivo en la toma de decisiones es fundamental en las políticas de control de fugas. El proceso de decisión consiste en la elección de una de las alternativas posibles considerando un conjunto de criterios que hacen que unas alternativas sean más deseables o convenientes que otras. La toma de decisiones puede ser compleja por varias razones. Una de ellas es la comparación de criterios que, con frecuencia, no se puede realizar bajo la misma unidad de medida. Este conjunto de criterios cambia según las necesidades de la sociedad actual y de las directivas, lo que obliga a que se incluyan unos nuevos o a la retirada de los obsoletos. También se tiende a que intervengan todos los actores implicados. En Europa, en particular, la Directiva Marco del Agua exige la participación de los distintos actores en los procesos. Esto incrementa aún más la dificultad al proceso si alguno de los mismos no está completamente familiarizado con todos los criterios y emite un cuerpo de opinión incompleto, o bien, si estos juicios emitidos son muy distintos entre ellos y se busca un consenso.

Para tener en cuenta todos estos aspectos, se propone un marco dinámico basado en la metodología AHP (Analytic Hierarchy Process) que es una herramienta de apoyo a la toma de decisiones ampliamente usada en diversos campos y, por tanto, aplicable en la ingeniería hidráulica. Se basa en un proceso de linealización que puede ser fácilmente integrado en un sistema soporte de decisión adecuado. En este enfoque se pueden incorporar fácilmente nuevos criterios y retirar los obsoletos. Además, permite a los usuarios incluir información sobre sus preferencias de manera parcial y/o incompleta en distintos momentos, trata el consenso de las opiniones de varios expertos y, por último, pero no menos importante, permite equilibrar la coherencia con el juicio de los expertos para alcanzar una solución de compromiso entre la experiencia que aportan los mismos y una consistencia analítica.

Este trabajo se enmarca e incluye nuevas aportaciones en la línea ya iniciada por los investigadores del grupo Fluing-IMM de la Universidad Politécnica de Valencia. En concreto, se aborda el consenso de cuatro grupos distintos de actores involucrados en la gestión de distintos abastecimientos de agua urbana, para tener en cuenta su opinión pero de forma conjunta, mediante distintas técnicas de agregación de juicios, siendo la agregación de juicios individuales (AIJ) la más adecuada para grupos de actores más homogéneos y la agregación de prioridades individuales (AIP) para alcanzar el consenso entre grupos de actores con opiniones que son diferentes. Resulta vital que durante el

proceso, se establezca un 'feedback' con los actores; que en todo momento las partes implicadas estén de absoluta conformidad con los cambios que se vayan realizando.

Valenciano

En els abastiments d' aigua urbana actuals, adoptar un enfocament proactiu en la presa de decisions és fonamental en les polítiques de control de fugues. El procés de decisió consisteix en l'elecció d'una de les alternatives possibles considerant un conjunt de criteris que fan que unes alternatives siguin més desitjables o convenients que altres. La presa de decisions pot ser complexa per diverses raons. Una d'elles és la comparació de criteris que, ben sovint, no es pot realitzar baix la mateixa unitat de mesura. Aquest conjunt de criteris canvia segons les necessitats de la societat actual i de les directives i la importància d'uns criteris enfront d'altres obliga que s'incloguen uns nous o a la retirada dels obsolets. També es tendeix a que intervinguen tots els actors implicats. A Europa, en particular, la Directiva Marc de l'Aigua exigeix la participació dels diferents actors en els processos. Això incrementa encara més la dificultat al procés si algun d'aquests actors no està completament familiaritzat amb tots els criteris i emet un cos d'opinió incomplet, o bé, si aquestes opinions emeses són molt diferents entre elles i es busca un consens .

Per tindre en compte tots aquests aspectes, es proposa un marc dinàmic basat en la metodologia AHP (Analytic Hierarchy Process) que és una eina de suport a la presa de decisions àmpliament utilitzada en diversos camps i, per tant, aplicable a l'enginyeria hidràulica. El procés de linealització s'ha fet servir dins de la metodologia AHP que pot ser fàcilment integrat en un sistema suport de decisió adequat. En aquest enfocament es poden incorporar fàcilment nous criteris i retirar els obsolets. Així mateix modificar la importància d'alguns criteris enfront d'altres, permet als usuaris incloure informació sobre les seues preferències de manera parcial i/o incompleta en diferents moments, tracta el consens de les opinions de diversos experts i, finalment, però no menys important, permet equilibrar la coherència amb el judici dels experts per aconseguir una solució de compromís entre l'experiència que aporten els mateixos i una consistència analítica.

Aquest treball s'emmarca i inclou noves aportacions en la línia ja iniciada pels investigadors del grup Flulng - IMM de la Universitat Politècnica de València. En concret, s'aborda el consens de quatre grups diferents d'actors involucrats en la gestió de diferents abastiments d' aigua urbana, per tindre en compte la seua opinió però de forma conjunta, mitjançant diferents tècniques d'agregació de judicis, sent l'agregació de judicis individuals (AIJ) la més adequada per a grups d'actors més homogenis i l'agregació de prioritats individuals (AIP) per assolir el consens entre grups d'actors amb opinions que són diferents. Resulta vital que durant el procés, es pugui establir un 'feedback ' amb els actors; que en tot moment les parts implicades estiguen d'absoluta conformitat amb els canvis que es van realitzant.

Inglés

In current urban water supplies, adoption of adequate leak control policies by supply companies is essential to achieve a suitable water resources management. The decision process consists in choosing one of several feasible alternatives after considering a set of criteria which makes it more desirable or convenient than the others. This decision-making can be complex for several reasons. One of them is that criteria comparison is not often performed under the same measurement unit. Moreover, official directives and/or current societal needs make the set of criteria change thus forcing the inclusion of new criteria or the withdrawal of obsolete ones. Furthermore, current governance processes tend to involve all stakeholders, which increases the difficulty for decision-making processes. Particularly, in Europe, the Water Framework Directive requires the participation

of different actors in the process. This fact increases the difficulty of the process due to some of the actors involved may not be completely familiar with all the criteria under consideration and the body of opinion, in terms of pairwise comparison, is incomplete or stakeholders' judgments are very different and we are looking for a consensus.

To deal with all these aspects, we propose a dynamic framework based on the methodology AHP (Analytic Hierarchy Process) which is a support tool for decision-making widely used in different fields and thus in hydraulic engineering. It is based on a linearization process developed by the authors, which can be readily integrated in a suitable DSS (Decision Support System). In this approach, new criteria can be incorporated and obsolete ones withdrawn easily. Furthermore, it allows users to include data about their preferences in a partial and/or incomplete way at different times; it provides various types of voting systems to allow group decision making; and, last but not least, it enables balancing consistency and expert judgment for streamlining the trade-off between expert reliability and synthetic consistency.

This work is part and includes new contributions in the line developed by researchers of Fluing-IMM group of the Polytechnic University of Valencia. Specifically, it addresses the consensus of four different groups of actors involved in the management of several urban water supplies, to make decisions as a group, using different aggregation techniques such as the aggregation of individual judgments (AIJ), the most suitable for homogenous groups of actors, and the aggregation of individual priorities (AIP) to reach consensus among stakeholders with different points of view. It is essential to consider the feedback of the actors during the process in order to all stakeholders agree with the changes.

Palabras clave:

Toma de decisiones/ abastecimiento de agua/ control de fugas/ metodología AHP/ consenso

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quisiera mostrar mi agradecimiento a mis directores Julio Benítez, Joaquín Izquierdo y Rafael Pérez por su dedicación y ayuda en todo momento. Gracias a sus comentarios, correcciones, conocimientos, sugerencias e implicación, he podido realizar este trabajo. En muy poco tiempo me habéis enseñado mucho. Gracias a Julio por haberme brindado la oportunidad de realizar esta tesina a través del proyecto de colaboración del IMM de la Universidad Politécnica de Valencia y, en general, a todos los investigadores del grupo Fluing-IMM por haberme acogido y en tan poco tiempo haberme hecho sentir una más. También agradecer a la Dra. Xitlali V. Delgado Galván por la cesión de algunos de los datos utilizados.

Debo mencionar también a mis amigas y compañeras de carrera, en especial a María, Cristina, Sara y Ana. En estos tiempos tan difíciles para nosotras, sois un gran apoyo. A Ele, Cris y Rous, y a mis gatoveras, con las que nunca faltan las risas.

Por último, agradecer a mi familia por todo el apoyo y por creer siempre tanto en mí y darme ánimos sobre todo en mis momentos más bajos. Y a Rubén por todo el cariño y apoyo moral y por ser un pilar fundamental en mi vida. Os lo debo todo.

Gracias.

RESUMEN

En los abastecimientos de agua urbana actuales, adoptar un enfoque proactivo en la toma de decisiones es fundamental en las políticas de control de fugas. El proceso de decisión consiste en la elección de una de las alternativas posibles considerando un conjunto de criterios que hacen que unas alternativas sean más deseables o convenientes que otras. La toma de decisiones puede ser compleja por varias razones. Una de ellas es la comparación de criterios que, con frecuencia, no se puede realizar bajo la misma unidad de medida. Este conjunto de criterios cambia según las necesidades de la sociedad actual y de las directivas y la importancia de unos criterios frente a otros obliga a que se incluyan unos nuevos o a la retirada de los obsoletos. También se tiende a que intervengan todos los actores implicados. En Europa, en particular, la Directiva Marco del Agua exige la participación de los distintos actores en los procesos. Esto incrementa aún más la dificultad al proceso si alguno de estos actores no está completamente familiarizado con todos los criterios y emite un cuerpo de opinión incompleto, o bien, si estos juicios emitidos son muy distintos entre ellos y se busca un consenso.

Para tener en cuenta todos estos aspectos, se propone un marco dinámico basado en la metodología AHP (Analytic Hierarchy Process) que es una herramienta de apoyo a la toma de decisiones ampliamente usada en diversos campos y, por tanto, aplicable en la ingeniería hidráulica. El proceso de linealización se ha usado dentro de la metodología AHP que puede ser fácilmente integrado en un sistema soporte de decisión adecuado. En este enfoque se pueden incorporar fácilmente nuevos criterios y retirar los obsoletos. Asimismo modificar la importancia de algunos criterios frente a otros, permite a los usuarios incluir información sobre sus preferencias de manera parcial y/o incompleta en distintos momentos, trata el consenso de las opiniones de varios expertos y, por último, pero no menos importante, permite equilibrar la coherencia con el juicio de los expertos para alcanzar una solución de compromiso entre la experiencia que aportan los mismos y una consistencia analítica.

Este trabajo se enmarca e incluye nuevas aportaciones en la línea ya iniciada por los investigadores del grupo Fluing-IMM de la Universidad Politécnica de Valencia. En concreto, se aborda el consenso de cuatro grupos distintos de actores involucrados en la gestión de distintos abastecimientos de agua urbana, para tener en cuenta su opinión pero de forma conjunta, mediante distintas técnicas de agregación de juicios, siendo la agregación de juicios individuales (AIJ) la más adecuada para grupos de actores más homogéneos y la agregación de prioridades individuales (AIP) para alcanzar el consenso entre grupos de actores con opiniones que son diferentes. Resulta vital que durante el proceso, se establezca un 'feedback' con los actores; que en todo momento las partes implicadas estén de absoluta conformidad con los cambios que se vayan realizando.

ABSTRACT

In current urban water supplies, adoption of adequate leak control policies by supply companies is essential to achieve a suitable water resources management. The decision process consists in choosing one of several feasible alternatives after considering a set of criteria which makes it more desirable or convenient than the others. This decision-making can be complex for several reasons. One of them is that criteria comparison is not often performed under the same measurement unit. Moreover, official directives and/or current societal needs make the set of criteria change thus forcing the inclusion of new criteria or the withdrawal of obsolete ones. Furthermore, current governance processes tend to involve all stakeholders, which increases the difficulty for decision-making processes. Particularly, in Europe, the Water Framework Directive requires the participation of different actors in the process. This fact increases the difficulty of the process due to some of the actors involved may not be completely familiar with all the criteria under consideration and the body of opinion, in terms of pairwise comparison, is incomplete or stakeholders' judgments are very different and we are looking for a consensus.

To deal with all these aspects, we propose a dynamic framework based on the methodology AHP (Analytic Hierarchy Process) which is a support tool for decision-making widely used in different fields and thus in hydraulic engineering. It is based on a linearization process developed by the authors, which can be readily integrated in a suitable DSS (Decision Support System). In this approach, new criteria can be incorporated and obsolete ones withdrawn easily. Furthermore, it allows users to include data about their preferences in a partial and/or incomplete way at different times; it provides various types of voting systems to allow group decision making; and, last but not least, it enables balancing consistency and expert judgment for streamlining the trade-off between expert reliability and synthetic consistency.

This work is part and includes new contributions in the line developed by researchers of Fluing-IMM group of the Polytechnic University of Valencia. Specifically, it addresses

the consensus of four different groups of actors involved in the management of several urban water supplies, to make decisions as a group, using different aggregation techniques such as the aggregation of individual judgments (AIJ), the most suitable for homogenous groups of actors, and the aggregation of individual priorities (AIP) to reach consensus among stakeholders with different points of view. It is essential to consider the feedback of the actors during the process in order to all stakeholders agree with the changes.

RESUM

En els abastiments d' aigua urbana actuals, adoptar un enfocament proactiu en la presa de decisions és fonamental en les polítiques de control de fugues. El procés de decisió consisteix en l'elecció d'una de les alternatives possibles considerant un conjunt de criteris que fan que unes alternatives siguin més desitjables o convenients que altres. La presa de decisions pot ser complexa per diverses raons. Una d'elles és la comparació de criteris que, ben sovint, no es pot realitzar baix la mateixa unitat de mesura. Aquest conjunt de criteris canvia segons les necessitats de la societat actual i de les directives i la importància d'uns criteris enfront d'altres obliga que s'incloguen uns nous o a la retirada dels obsolets. També es tendeix a que intervinguen tots els actors implicats. A Europa, en particular, la Directiva Marc de l'Aigua exigeix la participació dels diferents actors en els processos. Això incrementa encara més la dificultat al procés si algun d'aquests actors no està completament familiaritzat amb tots els criteris i emet un cos d'opinió incomplet, o bé, si aquestes opinions emeses són molt diferents entre elles i es busca un consens .

Per tindre en compte tots aquests aspectes, es proposa un marc dinàmic basat en la metodologia AHP (Analytic Hierarchy Process) que és una eina de suport a la presa de decisions àmpliament utilitzada en diversos camps i, per tant, aplicable a l'enginyeria hidràulica. El procés de linealització s'ha fet servir dins de la metodologia AHP que pot ser fàcilment integrat en un sistema suport de decisió adequat. En aquest enfocament es poden incorporar fàcilment nous criteris i retirar els obsolets. Així mateix modificar la importància d'alguns criteris enfront d'altres, permet als usuaris incloure informació sobre les seues preferències de manera parcial i/o incompleta en diferents moments, tracta el consens de les opinions de diversos experts i, finalment, però no menys important, permet equilibrar la coherència amb el judici dels experts per aconseguir una solució de compromís entre l'experiència que aporten els mateixos i una consistència analítica.

Aquest treball s'emmarca i inclou noves aportacions en la línia ja iniciada pels investigadors del grup FluIng - IMM de la Universitat Politècnica de València. En

concret, s'aborda el consens de quatre grups diferents d'actors involucrats en la gestió de diferents abastiments d' aigua urbana, per tindre en compte la seua opinió però de forma conjunta, mitjançant diferents tècniques d'agregació de judicis, sent l'agregació de judicis individuals (AIJ) la més adequada per a grups d'actors més homogenis i l'agregació de prioritats individuals (AIP) per assolir el consens entre grups d'actors amb opinions que són diferents. Resulta vital que durant el procés, es puga establir un 'feedback ' amb els actors; que en tot moment les parts implicades estiguen d'absoluta conformitat amb els canvis que es van realitzant.

ÍNDICE DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS.....	1
RESUMEN.....	2
ABSTRACT	4
RESUM	6
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	8
1. INTRODUCCIÓN.....	11
1.1. Antecedentes.....	11
1.2. Objetivos.....	15
1.3. Metodología y contenido de la tesina	17
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	18
2.1. Pérdidas de agua en redes de abastecimiento.....	18
2.1.1. Nivel económico de fugas	19
2.1.2. Antecedentes	20
2.1.3. Costes asociados a las fugas.....	22
2.1.4. Balance hídrico	22
2.2. Gestión de fugas	23
2.2.1. Control activo de fugas	24
2.2.2. Gestión de la presión	24
2.2.3. Gestión de la infraestructura	25
2.2.4. Rapidez y calidad de las reparaciones.....	25
2.3. Externalidades.....	26
2.3.1. Externalidades sociales.....	27
2.3.2. Externalidades ambientales	27
2.4. MCDM: Métodos de decisión multicriterio	30
2.4.1. Toma de decisiones.....	30
2.4.2. Métodos de decisión multicriterio.....	32
2.5. Toma de decisiones en grupo	35
3. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS MATEMÁTICO DEL PROCESO	38
3.1. Método de las jerarquías analíticas.....	38

3.1.1.	Aplicaciones	40
3.1.2.	Escala	41
3.1.3.	Construcción de las matrices de comparación y del vector de prioridades 42	
3.1.4.	Propiedades de las matrices de comparación.....	43
3.1.5.	Procedimiento para verificar la consistencia de las matrices	48
3.1.6.	Mejora de la consistencia: proceso de linealización	49
3.1.7.	Solución de compromiso	52
3.1.8.	Fortalezas y debilidades de AHP.....	53
3.2.	Consenso entre las partes implicadas	57
3.2.1.	Homogeneidad en el número de juicios	57
3.2.2.	Heterogeneidad en el número de juicios: Terminación consistente de juicios incompletos.....	62
4.	APLICACIONES	68
4.1.	Grupo de tres actores	71
4.1.1.	AIJ-AMM	72
4.1.2.	AIJ-GMM	74
4.1.3.	AIP-AMM	76
4.1.4.	AIP-GMM	78
4.1.5.	AIJ-WAMM.....	79
4.1.6.	AIJ-WGMM	80
4.1.7.	AIP-WAMM.....	82
4.1.8.	AIP-WGMM.....	83
4.2.	Grupo de cuatro actores	84
4.2.1.	AIJ-AMM	86
4.2.2.	AIJ-GMM	88
4.2.3.	AIP-AMM	90
4.2.4.	AIP-GMM	93
4.2.5.	AIJ-WAMM.....	93
4.2.6.	AIJ-WGMM	96
4.2.7.	AIP-WAMM.....	97
4.2.8.	AIP-WGMM.....	98

4.3.	Grupo de cinco actores	99
4.3.1.	AIJ-AMM	102
4.3.2.	AIJ-GMM	106
4.3.3.	AIP-AMM	107
4.3.4.	AIP-GMM	111
4.4.	Grupo de ocho actores	112
4.4.1.	AIJ-AMM	114
4.4.2.	AIJ-GMM	116
4.4.3.	AIP-AMM	117
4.4.4.	AIP-GMM	121
4.5.	Análisis de resultados	123
5.	CONCLUSIONES	125
5.1.	Síntesis y conclusiones.....	125
5.2.	Líneas futuras de investigación.....	127
6.	REFERENCIAS	129
7.	APÉNDICE CON CÓDIGOS MATLAB.....	138
	ÍNDICE DE FIGURAS.....	140
	ÍNDICE DE TABLAS.....	141

1.INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

En los abastecimientos de agua actuales, adoptar políticas adecuadas de control de fugas por parte de las empresas es esencial para una correcta gestión de los recursos hídricos. Las fugas en las redes de abastecimiento son inevitables puesto que no existe ningún sistema de abastecimiento completamente perfecto y cada año las pérdidas económicas y los costes sociales y ambientales que se producen son considerables. Gestionar qué recursos invertir y de qué manera es de vital importancia para reducir las fugas (y sus pérdidas asociadas) lo máximo posible.

Este proceso puede resultar complicado debido a los muchos factores a tener en cuenta: trazar el objetivo a conseguir, reunir toda la información relevante para establecer los criterios y alternativas adecuados y tener en cuenta las preferencias y opiniones de todos los actores implicados.

Es por esto que para los gestores de los abastecimientos urbanos de agua se convierte en todo un reto alcanzar una buena gestión de las fugas de agua. Este se convierte en el objetivo principal en el que trabajar no solamente por el coste del agua que se pierde, sino porque estas pérdidas de agua conllevan una serie de costes que son susceptibles de ser evaluados. Entre ellos, además de los económicos y financieros, deben tenerse en cuenta los costes técnicos, costes asociados a la calidad del agua, así como los costes sociales y ambientales debido a que las actuaciones que tienen lugar en las empresas de agua no sólo afectan a la propia compañía sino que tienen repercusiones en la sociedad y en el medioambiente (Delgado-Galván, 2011).

Los criterios, con frecuencia, no se pueden comparar unos con otros bajo la misma unidad de medida, especialmente cuando se quiere incluir un mayor número de los mismos para tener en cuenta aspectos técnicos y económicos, pero también aquellas externalidades derivadas de las acciones de la compañía que crean impactos en la sociedad y el entorno en general. Además, las normativas y las necesidades actuales de

la sociedad son cambiantes y hacen que se tengan que incorporar criterios nuevos o eliminar los que se consideren obsoletos.

Si sólo se tuviesen en cuenta aspectos meramente económicos o técnicos, la lógica nos lleva a que lo más práctico es reparar únicamente aquellas fugas que son informadas o evidentes, aplicando una política de control de fugas pasiva puesto que desde esta perspectiva, cualquier inversión destinada a reducir fugas de menor entidad implicaría un mayor coste que el valor del agua recuperada. En cambio, desde un punto de vista global, teniendo en cuenta que se presta un servicio público y que su impacto abarca un ratio mayor, aplicar una política activa de control de fugas, actuando de forma preventiva, resulta más ventajoso.

También se tiende a que intervengan todos los actores involucrados. No sólo los expertos y con altos conocimientos en la materia, sino todos los participantes en el proceso, es decir, desde gestores de empresas de abastecimiento de agua, personal del área de fugas, proyectistas, supervisores de la administración pública o investigadores de instituciones universitarias hasta los propios usuarios que consumen el agua o los afectados por los impactos derivados de las fugas producidas. Esto incrementa aún más la dificultad al proceso si alguno de los mismos no está completamente familiarizado con todos los criterios y emite un cuerpo de opinión incompleto (Benítez *et al.*, 2012), o bien, si estos juicios emitidos son muy distintos entre ellos y se busca un consenso del grupo de actores. Actualmente los procesos de decisión colaborativos no solo son cada día más frecuentes, sino que a veces vienen impuestos por directivas a distintos niveles (véase por ejemplo *The EU Water Framework Directive* (EU-WFD, 2000)) y, por ello, es importante que se tenga en cuenta los conocimientos y opiniones de los gestores y partes interesadas.

La metodología AHP introducida por Saaty (1977, 2003, 2008) puede ser adaptada para integrar todos estos aspectos porque permite jerarquizar el problema en términos de objetivos, criterios y alternativas creando un marco interesante para la toma de decisiones. AHP ha sido extensamente utilizado en diferentes campos de aplicación. En la literatura existen numerosos problemas asociados a esta metodología (Omkarprasad

et al., 2006; Ho, 2008; Kabir *et al.*, 2013). Esta metodología, basada en la construcción de matrices de comparación que tienen que cumplir una serie de propiedades (positividad de sus componentes, homogeneidad, reciprocidad y consistencia, esta última más complicada que se cumpla), se diferencia de otras técnicas de valoración en que maneja juicios de las partes involucradas tanto cuantitativos como cualitativos (Macharis *et al.*, 2004) y, a pesar de que ha sido cuestionada, presenta una serie de ventajas y fortalezas que la convierten en la actualidad en una de las técnicas de toma de decisiones multicriterio mejor valoradas.

En el presente trabajo se aportan nuevas contribuciones a la línea de investigación ya iniciada por el grupo Fluing-IMM de la Universidad Politécnica de Valencia en la que se han abordado los aspectos anteriores. En Delgado-Galván *et al.* (2010), se presentaban una aplicación de AHP a la gestión de fugas incluyendo todos los costes y externalidades que se derivan, además de un método para la mejora de la consistencia y en Benítez *et al.* (2011a, 2011b y 2012b), se establecían diferentes métodos para mejorar la consistencia basados en la optimización y en la linealización, proponiendo un marco en el que se cumpliera un equilibrio entre la consistencia de la metodología y la coherencia de los juicios emitidos. En ocasiones, se requiere incorporar nuevos criterios o simplemente eliminar aquellos que se han quedado desfasados (Benítez *et al.*, 2012a). Además, puede ocurrir que, una vez determinados una serie de criterios suficientes para valorar ciertas alternativas, alguno de los actores que necesariamente tenga que tomar parte en el proceso, no esté familiarizado con todos los criterios y proporcione información de manera parcial, por lo que se hace necesario un mecanismo de terminación consistente de juicios incompletos (Izquierdo *et al.*, 2012; Benítez *et al.*, 2013b).

Las nuevas aportaciones que se presentan en este trabajo buscan el consenso de grupos de actores involucrados que emiten sus juicios. En AHP, existen diversas metodologías de agregación de juicios, siendo dos las más populares: a) agregar las opiniones individuales con respecto a cada conjunto de comparaciones por pares para producir una jerarquía agregada (AIJ); b) sintetizar cada una de las jerarquías individuales y agregar las prioridades resultantes (AIP) (Forman y Peniwati, 1998). En la

práctica, ambos métodos son fáciles de implementar y se usan prácticamente sin distinción pero la agregación de opiniones subjetivas es más compleja y el método empleado puede influir en la decisión (Wu *et al.*, 2008). Para establecer las medias, tanto la media aritmética como la geométrica son procedimientos adecuados para ser aplicados o bien en AIJ o bien en AIP.

1.2. Objetivos

Para tener en cuenta todos los aspectos involucrados en la toma de decisiones en la gestión de fugas de un abastecimiento de agua urbana, se propone un marco dinámico basado en la metodología AHP que pueda ser fácilmente integrado en un sistema de soporte de decisión adecuado y que sirva de herramienta de utilidad para los gestores.

Se establecen los siguientes objetivos del trabajo:

- Análisis de la importancia de la gestión del control de fugas por parte de las empresas de abastecimiento de agua urbana, teniendo en cuenta, no sólo los aspectos técnicos sino también aspectos sociales y ambientales, considerando que las acciones derivadas de la toma de decisiones de los gestores implican impactos externos tanto positivos como negativos que no sólo afectan a la propia empresa sino a la sociedad en general puesto que se presta un servicio público.
- Establecer una técnica que permita incluir los objetivos a conseguir, los criterios y alternativas adecuados para la toma de decisiones en la gestión de fugas y sus externalidades y que tenga en cuenta las preferencias y opiniones de todos los actores implicados. Esta técnica es el método de las jerarquías analíticas AHP. Se pretende desarrollar una herramienta que cumpla todas las características que requiere el proceso, destacando la de la consistencia que es la que conlleva más complejidad, en la que se puedan establecer tanto criterios nuevos como eliminar los obsoletos y en la que los usuarios puedan incluir información de forma parcial y/o incompleta en distintos momentos.
- Establecer diferentes técnicas de agregación de juicios para alcanzar el consenso de las opiniones vertidas por varios actores tanto si el grupo es homogéneo como si no lo es, o como si hay algún actor poco familiarizado con algún criterio y emite un juicio incompleto. Encontrar una solución de compromiso entre la consistencia que requiere el método y la fiabilidad y

experiencia que aportan los actores para alcanzar resultados coherentes y de conformidad para todas las partes implicadas.

1.3. Metodología y contenido de la tesina

El presente trabajo contiene tres grandes apartados que conforman el cuerpo sustancial del estudio, desarrollando y justificando la investigación realizada. En ellos se recogen toda la información obtenida, la descripción de las metodologías y procesos realizados y los resultados obtenidos.

En el primer gran bloque se ha realizado una definición del problema, en el que se analiza la situación actual de la gestión de fugas en las redes de abastecimiento de agua, y se desarrolla la importancia de las pérdidas de agua, prestando especial atención a las externalidades derivadas de las acciones que realizan las compañías suministradoras. Respecto a los métodos de decisión multicriterio (MCDM), se señala la importancia que han adquirido como herramienta fundamental para los procesos participativos de toma de decisiones.

En el segundo bloque, se realiza una descripción matemática de las herramientas utilizadas a lo largo del documento. Se describe de forma detallada el método de las jerarquías analíticas, la técnica de linealización empleada para la mejora de la consistencia y se presentan las técnicas de agregación de juicios para la toma de decisiones en grupo desarrolladas en el trabajo.

En el último bloque, se presentan los casos de estudio para distintos grupos de actores y la interpretación y análisis de los resultados obtenidos. Finalmente, se incluye un capítulo fundamental en el que se recogen las conclusiones más relevantes obtenidas del estudio, estableciendo futuras líneas de investigación posibles.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. Pérdidas de agua en redes de abastecimiento

Cuando se habla de pérdidas de agua en las redes urbanas, podemos diferenciar dos tipos: las pérdidas aparentes que corresponden con el agua consumida sin que la compañía tenga constancia de donde se usa (estimación incorrecta en la factura, error de medida o acometidas ilegales) y las denominadas pérdidas reales que son las fugas en sí. Las fugas de agua en las redes de abastecimiento urbano son la consecuencia de fallos en las tuberías, accesorios o depósitos de almacenamiento. Ningún sistema de abastecimiento es completamente perfecto y resulta inevitable tener unas pérdidas mínimas que se producen durante todo el proceso, desde la extracción hasta el punto de medición y consumo.

El origen y las principales causas de las fugas pueden ser el uso de materiales inadecuados, de mala calidad y defectuosos y del mal estado del terreno alrededor de la tubería; roturas de tuberías, ocasionadas por el transporte, almacenaje, manipulación y deficiencias en la mano de obra o mal montaje; errores de operación, que se traducen en exceso de presión o cierre muy rápido de válvulas que someten a las tuberías a una fatiga repetida, creando un potencial continuo para que ocurran fallos; mala calidad de las reparaciones y del mantenimiento de las tuberías y de los accesorios; corrosión interna debido a la agresividad del agua, o externa por la deficiente protección contra la agresividad del suelo o el agua e incluso daño premeditado o accidental.

Según el caudal de la fuga, se pueden clasificar en tres tipos de fugas: fugas comunicadas, fugas no comunicadas (fácilmente y no fácilmente detectables) y fugas de fondo indetectables. Las fugas comunicadas son las fugas debidas a roturas de gran caudal que tardan poco en repararse y que son evidentes; las fugas no comunicadas son aquellas que no son visibles, de pequeño caudal y cuyo periodo de actuación generalmente es dilatado en el tiempo. Estas pequeñas fugas ocultas, que a menudo duran años, pierden más agua incluso que roturas de gran tamaño con presencia en la

superficie y visibles. Por último, las fugas de fondo son aquellas fugas más difíciles de localizar porque se corresponden con los pequeños goteos en las acometidas y para las que existe un umbral mínimo de fugas debido a que, por mucho que se intenten reducir, siempre hay algunas que resultan indetectables.

En Figura 1 mostramos los valores aproximados de los diferentes tipos de fugas:

(a) Tipo de fuga	Q_f (l/h) (valores aproximados)	Q_f (l/s) (valores aproximados)
Fuga de fondo Indetectable	$Q_f \leq 10$ l/h	$Q_f \leq 0.003$ l/s
Fuga no comunicada no fácilmente detectable	(10 ÷ 200) l/h	(0.003 ÷ 0.14) l/s
Fuga no comunicada fácilmente detectable	200 l/h ÷ 500 l/h	(0.06 ÷ 0.14) l/s
(2) Fuga comunicada	(500 ÷ 50.000) l/h	(0.14 ÷ 14) l/s

Figura 1. Caudales de los diferentes tipos de fugas.

2.1.1. Nivel económico de fugas

El nivel económico de fugas es el nivel de fugas para el cual, el coste marginal del control activo de fugas se iguala con el coste marginal del agua que se pierde por fugas, es decir, se refiere a que el coste de reducir la pérdida de un metro cúbico de agua se iguala al valor de ese metro cúbico de agua. Para determinarlo, es fundamental conocer el precio del agua. En todo sistema de distribución de agua urbana, existe un nivel de fugas que no es económicamente rentable reparar. Esto quiere decir que existe un punto donde el valor del agua que se pierde a causa de las fugas es menor que el valor de la inversión para tomar acciones que reduzcan las fugas.

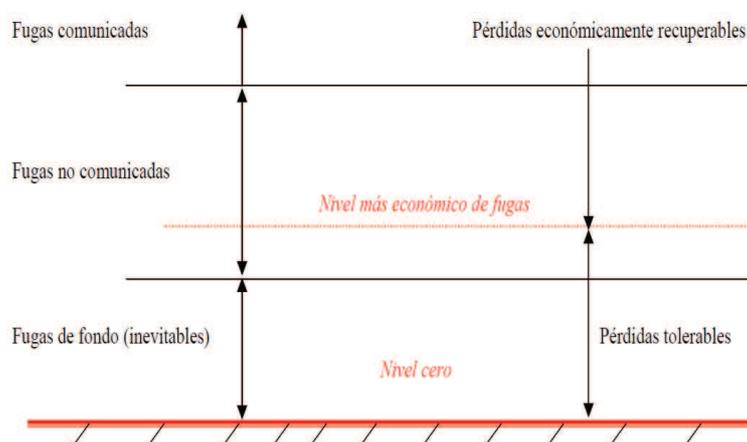


Figura 2. Economía de la fuga.

A corto plazo, el nivel económico de fugas depende de la presión media de la red, la condición en que se encuentra y la facilidad de obtener información sobre la misma, basándose en un análisis económico que estima el nivel óptimo considerando los costes y el valor del agua en el corto plazo en la zona de abastecimiento. A largo plazo, el nivel económico de fugas se basa en el análisis de inversiones teniendo en cuenta una serie de factores: el nivel actual de fugas, el nivel económico de fugas a corto plazo, la cantidad de agua ahorrada, el coste de las inversiones propuestas y el periodo de retorno (Farley y Trow, 2003).

Existen tres maneras de calcular el nivel económico de la reducción de fugas, basándose en el plan del coste mínimo total del control activo de fugas, mediante la determinación de la relación beneficio-coste, y a través del coste marginal del agua.

2.1.2. Antecedentes

El agua es un bien escaso y en los últimos años se han concentrado los esfuerzos por preservar un uso sostenible del mismo. Son numerosos los trabajos e investigaciones en el tema de las fugas en abastecimientos que han presentado aplicaciones, avances y propuestas para llevar a cabo una mejor gestión de este recurso. En 1998, en Inglaterra y Gales, por orden de la *Office of Water Services (OFWAT)* les fue impuesto a las compañías de suministro de agua potable el cálculo de niveles económicos de fugas y el objetivo de reducción de fugas. Para ello, desarrollaron un gran número de metodologías tras la privatización de la industria de abastecimiento de agua potable en 1989. Existe un problema: no se puede extrapolar al resto del mundo porque se han adecuado fundamentalmente a las características, necesidades y posibilidades de las redes y del sistema en Inglaterra y Gales.

La *International Water Association (IWA)*, una asociación internacional (Australia, USA, Holanda y Dinamarca) de expertos en *benchmarking*, ha desarrollado una forma de calcular el balance de agua diseñando un manual estándar de buenas prácticas. Además, propone una metodología de determinación del nivel económico de fugas, para los abastecimientos de agua y los sistemas de distribución, que considera el coste

marginal de cada actividad encaminada a reducir fugas comparada con su beneficio marginal. La idea actual del nivel económico de fugas se basa en que cuanto más grandes sean los recursos destinados a minimizar las pérdidas de agua, menores serán los beneficios marginales. Esta idea es la base de la metodología de la IWA.

En Sudáfrica, se incentiva el uso eficiente del agua y se sanciona a quien no lo cumple. Además, se han implantado sistemas para gestionar eficientemente las fugas. Algunos de esos modelos han sido desarrollados por la *Water Research Commission (WRC)*. Un ejemplo es el modelo *ECONOLEAK*, con el que la empresa identifica cuándo es necesario aplicar un control activo de fugas.

La *Water Services Association of Australia (WSAA)* regula la industria del agua en Australia, y está formada por más de 300 empresas de abastecimiento. En este país se han adoptado y adaptado las metodologías que ha propuesto la IWA y editan un manual cada año.

En México, el *Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA)* ha trabajado desde principios de 1990 en una metodología, en tres etapas, para solucionar la problemática de las fugas de agua potable. Es un organismo de gobierno que ha trabajado conjuntamente con empresas de suministro de todo el país, realizando cursos de capacitación, asesorías técnicas y editando manuales.

En USA, la *American Waterworks Association (AWWA)*, es una organización cuya finalidad es proporcionar conocimientos, información y promoción para mejorar la calidad y el suministro de agua en beneficio de la humanidad y el medio ambiente.

En España no hay regulador como tal aunque sí muchas iniciativas. Una de las más innovadoras es el *Aquarating*, un sistema de calificación para prestadores de servicios de agua y saneamiento que pretende analizar áreas de mejora (acceso al servicio, calidad del servicio, eficiencia operativa, sostenibilidad financiera y ambiental, etc.).

2.1.3. Costes asociados a las fugas

Las fugas de agua conllevan una serie de costes que resultan significativos. De forma resumida, estos costes se pueden englobar en los siguientes tipos:

- Costes energéticos.
- Costes técnicos, de operación y mantenimiento (personal, mantenimiento preventivo y correctivo).
- Costes asociados a la calidad del agua (potabilización, tratamientos, desinfección)
- Costes de capital (renovación).
- Costes sociales y ambientales (externalidades). Estos últimos, son difíciles de valorar.

2.1.4. Balance hídrico

No existe ninguna forma de calcular de manera exacta la cantidad de agua perdida por fugas en las redes de abastecimiento. Únicamente se puede obtener un volumen aproximado de las pérdidas. Una de las mejores maneras de conocer el estado de la red y diagnosticar puntos débiles es realizando un balance hídrico desde el punto de vista de las pérdidas. Para ello, la herramienta clave es la medición de ingresos de agua y retracciones en los puntos de consumo mediante caudalímetros.

Existen varias formulaciones para el cálculo del balance de agua. El método estándar formulado por la IWA es uno de los más conocidos y es el que se muestra en la Figura 3:

VOLUMEN DE ENTRADA DE AGUA AL SISTEMA	CONSUMO AUTORIZADO	CONSUMO AUTORIZADO FACTURADO	CONSUMO MEDIDO FACTURADO	AGUA FACTURADA
			CONSUMO NO MEDIDO FACTURADO	
		CONSUMO AUTORIZADO NO FACTURADO	CONSUMO MEDIDO NO FACTURADO	AGUA NO FACTURADA
			CONSUMO NO MEDIDO, NO FACTURADO	
	PÉRDIDAS DE AGUA	PÉRDIDAS APARENTES	CONSUMO NO AUTORIZADO	
			IMPRECISIONES DE MEDIDA	
		PÉRDIDAS REALES	FUGAS EN TUBERÍAS DISTRIBUCIÓN	
			FUGAS Y DERRAMES EN TANQUES DE ALMACENAMIENTO	
			FUGAS EN ACOMETIDAS ANTES DEL MEDIDOR	

Figura 3. Balance hídrico del IWA.

2.2. Gestión de fugas

La gestión de fugas son las acciones encaminadas a mitigar los efectos de la pérdida de agua. Se basa en cuatro principios básicos: planificar, organizar dirigir y controlar. Existen dos alternativas fundamentales a la hora de gestionar. El Control Activo de Fugas (ALC) es un proceso preventivo mediante el cual se detectan y reparan las fugas no visibles, que representan más del 90% del volumen total de pérdidas reales. Se compone de actividades de detección de fugas con objetivos bien definidos para localizar fugas no visibles, estrategias de comunicación para motivar a los clientes a informar inmediatamente sobre fugas visibles y administrar el trabajo de forma eficaz para garantizar reparaciones rápidas y de buena calidad. Este proceso es el contrario del control pasivo de las fugas (PLC) que básicamente es no hacer nada y únicamente reparar cuando aparecen fugas comunicadas (proceso reactivo). Es la reacción a roturas y caídas de presión, visibles y reportadas generalmente por usuarios o brigadas de inspección a la empresa de aguas. Este control es parte de la operación de cualquier organismo operador según la incidencia de fugas de su red.

Para llevar a cabo la gestión, el primer paso es cuantificar el nivel actual de fugas (pérdidas actuales de agua) y evaluar los recursos disponibles de la empresa. Posteriormente, se establecen los objetivos, planificando acciones y sus tiempos, calculando el nivel económico de fugas que es aquel que resultará rentable para la empresa suministradora. Se ejecuta el proyecto de reducción de fugas que recaerá en alguno de los pilares de la gestión (control activo, gestión de la presión, gestión de la infraestructura y rapidez y calidad en las reparaciones). Cuando se alcancen los objetivos propuestos, el monitoreo y el mantenimiento serán de gran importancia.

La Figura 4 resume de forma gráfica las cuatro acciones fundamentales de toda gestión de fugas de un abastecimiento urbano de agua:

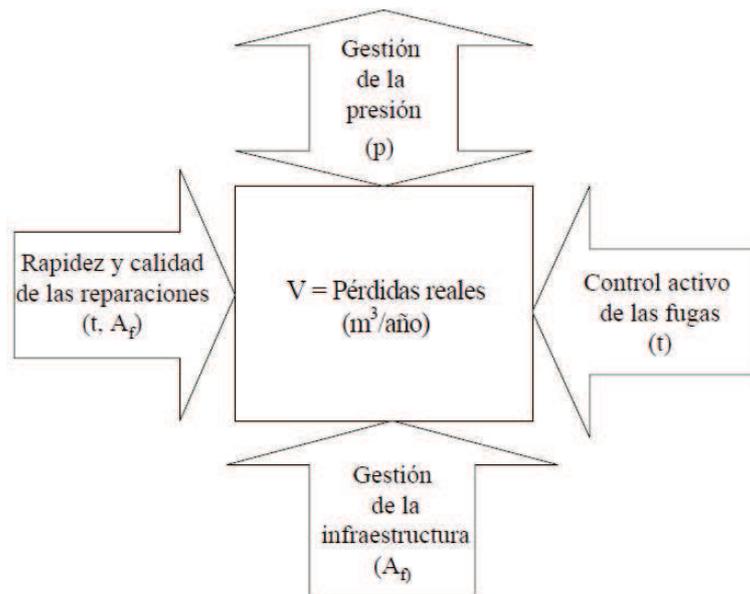


Figura 4. Acciones en la gestión de fugas

2.1.1. Control activo de fugas

Es la localización de las fugas no comunicadas y su reparación. Se requiere de una buena gestión y un sistema eficaz debido a la fuerte inversión que supone detectar fugas que no resultan evidentes y repararlas. Las fugas evidentes y reportadas también serán reparadas, lo que provocará una disminución en el nivel de fugas. Muchas de las fugas que son informadas no se hubiesen producido si hubiese habido una acción preventiva sobre ellas. El sistema SCADA (*Supervisory Control And Data*) es un sistema que vigila la red y controla las fugas, midiendo ciertas variables y comparándolas con las de referencia.

2.1.2. Gestión de la presión

Dado que a medida que aumenta la presión, el caudal de fugas es mayor, una eficiente gestión de la presión reducirá el volumen de agua de las fugas que son prácticamente indetectables (fugas de fondo). En este caso, los proyectos que resultan más rentables son aquellos que cubren grandes áreas y tienen un efecto significativo en las presiones medias. Normalmente consisten en la instalación de válvulas reductoras de presión (VRP) en una rama de una tubería principal que abastezca a una determinada área. El siguiente paso es la instalación de otras válvulas reductoras de presión de forma

conjunta en un distrito hidrométrico. El objetivo es conseguir una presión estable, sin sobrepresiones que provoquen mayor caudal fugado.

2.1.3. Gestión de la infraestructura

El objetivo que se persigue con los distritos hidrométricos es la división en áreas discretas abastecidas por una sola instalación de medición y con tendencia a minimizar la cantidad de válvulas de corte. El número de áreas depende del diseño de la red de suministro. En el caso de tuberías, su reemplazo reducirá el volumen de pérdidas de agua. Sin embargo la implementación de estas medidas requiere inversiones elevadas. De esta forma, se hace necesaria una buena gestión de los activos y la renovación de tuberías debe realizarse en aquellas que tienen mayor frecuencia de rotura y niveles de fugas de fondo o están más deterioradas.

2.1.4. Rapidez y calidad de las reparaciones

Si reducimos el tiempo de reparación de la fuga, se traducirá en una disminución de la cantidad de agua perdida. Hay que tener en cuenta que este tiempo de reparación se puede reducir hasta un cierto nivel, a partir del cual, el coste unitario de reparación no compensa el coste del agua perdida.

2.3. Externalidades

Una externalidad es aquella situación en la que se produce un impacto que puede traducirse en un coste o unos beneficios determinados a la sociedad o al entorno dependiendo del estado en que se encuentre la propia red de abastecimiento. Pueden ser de fácil identificación pero difícil valoración. Estos impactos pueden clasificarse en costes o daños (si son de carácter negativo) y beneficios (afección positiva) sociales, ambientales y emisiones de CO₂ derivados de las acciones y decisiones tomadas por los gestores de la compañía.

Se tratan de costes y beneficios externos difíciles de valorar que no se suelen tener en cuenta en los métodos tradicionales de valoración y que en el presente trabajo se quiere hacer especial hincapié en la importancia de incluirlos en los procesos de toma de decisiones en la gestión de fugas de agua.

Las acciones que se derivan de gestionar políticas activas de fugas, reparar las fugas que son informadas, gestionar la presión y renovar la red, provocan una serie de impactos como son el corte de caminos, interrupción de la red, disminución de la presión de agua, contaminación acústica y visual. Además, se generan emisiones de carbono en las labores de reparación, transporte y uso de materiales para la reparación y renovación de la red. La existencia de fugas provoca un uso adicional del agua por parte de la compañía suministradora que provoca impactos por emisiones de carbono en las distintas etapas del proceso por el uso de energía y combustible en la extracción de aguas de ríos, embalses, humedales o acuíferos, emisión de gases de efecto invernadero de la planta de tratamiento y de sus residuos y gasto de energía y combustible en la fase de distribución.

A continuación, se va a realizar una clasificación y descripción de algunas de la externalidades más relevantes relacionadas con las fugas y su gestión.

2.3.1. Externalidades sociales

La OFWAT (2007) considera como costes sociales la interrupción del paso de peatones por camino cerrado o restringido y el coste de su retraso y las molestias; el aumento del tránsito vehicular por caminos congestionados o corte de caminos con su consiguiente coste por el tiempo de retraso; beneficios en la reducción de frecuencia de interrupción por rotura de tuberías, estas interrupciones asociadas con las labores de reparación, reemplazo y rehabilitación, o por alguna rotura; Interrupción de suministro por cortes planeados o no planeados, disminución de la presión, costes de interrupción, por alguna compensación que deba pagarse; Inundaciones y daños a bienes muebles e inmuebles o a otras redes de servicio ocurridas por fugas o por los trabajos de reparación; aumento del nivel del ruido por las reparaciones y renovaciones, así como el efecto visual que provoca.

Una externalidad social sería la posibilidad de que una fuga, dependiendo de su magnitud, pueda acarrear ciertos perjuicios adicionales a la pérdida de agua, energía, presión, elementos químicos, entre otros.

2.3.2. Externalidades ambientales

En general, las externalidades ambientales se derivan de la existencia de fugas en sí y raramente de las acciones llevadas a cabo por las compañías suministradoras en la gestión de las fugas de agua. Estos impactos se traducen casi de forma exclusiva al aumento de la cantidad de agua que ha de extraerse para contrarrestar la que se ha perdido debido a las fugas o debido a los beneficios producidos por el uso del bien y por el no uso de mantener el agua en ríos, embalses, acuíferos o humedales y conservar el paisaje . Algunos de los aspectos que se ven afectados, son la pesca comercial, actividades recreativas (la pesca, la navegación, el baño), biodiversidad, uso agrícola, entre otros.

Incluir estas externalidades en cualquier método puede resultar costoso porque son impactos de difícil valoración. Según Freeman (1992, 2003), para estimar el valor del medio ambiente y del entorno de forma aproximada se deben considerar el valor de

uso (valor económico del uso directo), el valor de opción (disponibilidad de conservarlo para uso en un futuro aunque no se use en la actualidad) y el valor de no uso (conservarlo aunque personalmente nunca se hará uso).

Dentro de este grupo, se hace especial mención a las emisiones de CO₂, debido a la importancia que ha adquirido en los últimos años el cambio climático. En 1997 se estableció el Convenio Marco de Naciones Unidas sobre el Cambio Climático (Naciones Unidas, 1998) donde las partes implicadas se comprometían a la reducción de las emisiones de gases de efecto invernadero.

Las pérdidas de agua en la redes conllevan una serie de costes energéticos y gastos de combustible que se traducen en emisiones de carbono. Se consume energía y se produce gasto de combustible en el transporte, en la distribución por el bombeo del agua, en las plantas de tratamiento y cuando se realizan reparaciones y renovaciones.

La intención de incluir no sólo los costes económicos y técnicos sino también los costes sociales y ambientales asociados a la evaluación de las alternativas de gestión de fugas de agua ha llevado en los últimos años a la búsqueda de métodos alternativos a los tradicionales. Para decidir el método de valoración a utilizar, la elección se basará en aquel que mejor contemple el objetivo buscado, todas las características de la problemática y a todas las partes implicadas. En Delgado-Galván (2011) se analizan diferentes enfoques para valorar económicamente el valor de los activos sociales y ambientales, es decir, aquellos que se consideran intangibles o de difícil valoración. Algunos de los métodos que aparecen utilizan los precios de mercado (método de los precios de mercado, métodos de productividad, método de los precios hedónicos y método del coste de viaje). Otros utilizan la evidencia circunstancial, es decir que determinan la disposición a pagar imputada (métodos de coste de daños evitados, coste de reemplazo, y costes sustitutos). Por último, tenemos aquellos que utilizan las proyecciones y se basan en la disposición a pagar expresada (método de valoración contingente, elección contingente y método de las jerarquías analíticas). Una vez analizados los diferentes métodos y teniendo en cuenta que lo que interesa, a la hora de tomar decisiones en la gestión de fugas, es la inclusión de algunas externalidades

sin omitir el coste económico que supone el proyecto y su implantación, la metodología AHP es la que se considera más adecuada (Delgado-Galván, 2011). Este proceso, que se basa en la construcción de un modelo jerárquico a tres niveles (objetivo, criterios y alternativas), permite dar valores numéricos a los juicios de las personas, midiendo cómo contribuye cada elemento de la jerarquía al nivel inmediatamente superior, brindando al gestor la posibilidad de exponer su opinión respecto a la importancia que tiene cada uno de los elementos, respecto al objetivo buscado.

2.4. MCDM: Métodos de decisión multicriterio

2.4.1. Toma de decisiones

La toma de decisiones es un proceso de selección de entre una serie de alternativas posibles de acción, basado en un conjunto de criterios, para alcanzar uno o más objetivos y solucionar un problema. La toma de decisiones implica evaluar entre diferentes posibilidades disponibles y determinar la acción que se llevará a cabo.

En general, un proceso de toma de decisiones comprende los siguientes pasos. En la primera etapa se debe llevar a cabo un análisis de la situación y la identificación y formulación del problema: se identifica el objetivo que se quiere alcanzar y las posibilidades de resolución del problema (alternativas factibles) y se determina los diferentes criterios que deben considerarse en el proceso, es decir, los aspectos relevantes que deben tomarse en cuenta a la hora de evaluar cada una de las alternativas.

La segunda fase corresponde al análisis. Los tipos de análisis que pueden llevarse a cabo son de dos tipos, cuantitativo y cualitativo, dependiendo del tipo de decisión, la estructura del problema y el tipo de información que se disponga para la toma de decisiones. La evaluación consiste en realizar una reflexión mediante la comparación y el razonamiento de los elementos que integran el problema, mediante la aplicación de un modelo de decisión para obtener un resultado global y tomar una decisión.

Finalmente, se puede realizar un análisis de sensibilidad.



Figura 5. Proceso de toma de decisiones.

En procesos de toma de decisiones, la opinión de una única persona llega a resultar insuficiente cuando se analizan problemas complejos, en especial aquellos cuya solución puede afectar a otras personas o al entorno en general. Debido a esto se debe tender a generar discusión e intercambio entre los diferentes puntos de vista de los actores mediante una tormenta de ideas, que por su experiencia y conocimiento, ayudan a estructurar el problema y a evaluar las posibles soluciones.

En todo proceso de toma de decisiones, el riesgo y la incertidumbre juegan papeles fundamentales. En el caso del riesgo, el decisor considera la probabilidad de ocurrencia de los resultados de tomar cada alternativa. En relación a la incertidumbre, el experto se enfrenta a una situación en la que desconoce la probabilidad de ocurrencia de los posibles resultados de las alternativas disponibles (Ríos, 1976).

El decisor debe ser una persona interesada en el problema (Ríos, 1976), pero en especial, con conocimientos y experiencia necesaria para que sus juicios y opiniones sean útiles para el desarrollo del proceso y para justificar la decisión tomada. De esta forma, las aplicaciones que se han llevado a cabo en este trabajo, han contado con

actores de todo tipo, desde expertos en fugas de redes de agua y gestores de las compañías suministradoras hasta los propios usuarios de la red de agua potable.

La mayoría de los métodos de análisis tradicionales no contemplan muchos de estos aspectos. Es por ello que para resolver un problema que implica la toma de decisiones con diversos objetivos o criterios que simultáneamente deben incorporarse, surgen los métodos de decisión multicriterio como sistemas de ayuda a la decisión de los tomadores de decisiones.

2.4.2. Métodos de decisión multicriterio

Los métodos y modelos para la toma de decisiones con múltiples criterios proporcionan herramientas de utilidad cuando se requiere analizar problemas complejos por parte de las personas encargadas de tomar decisiones. Estas herramientas permiten contar con una mejor visualización de los factores que intervienen en los procesos, así como de las preferencias de las partes implicadas.

En general, los procesos de decisión relacionados con el desarrollo sostenible, como es la gestión de fugas de agua en las redes de abastecimiento, involucran tres factores fundamentales que con frecuencia están contrapuestos y están sujetos a diferentes niveles y tipos de incertidumbre: aspectos económicos, aspectos sociales y aspectos ambientales. La interrelación de estos tres sistemas puede producir conflictos de intereses. Además, la toma de decisiones requiere la opinión de los expertos e información técnica, a lo que hay que añadir también que las partes implicadas en el proceso, que toman parte en determinados momentos del proceso, cada vez tienen acceso a más información y se requiere su participación. Todo lo expuesto convierte la toma de decisiones en una tarea compleja que requiere de metodologías sistemáticas diferentes a las tradicionales (Sánchez, 2001; Kabir, 2013).

Los métodos de decisión multicriterio, en inglés *Multi-criteria decision-making* (MCDM) proporcionan un enfoque sistemático que combina múltiples criterios con las externalidades (beneficios y costes) y los juicios y puntos de vista de todos los actores implicados para clasificar las alternativas (Kabir, 2013). Los MCDM se usan para identificar y cuantificar las necesidades y consideraciones de las personas involucradas

sobre factores distintos a los económicos y, frecuentemente intangibles, seleccionando entre un conjunto de alternativas factibles para alcanzar un objetivo u objetivos mediante procedimientos de evaluación racionales y consistentes. No consideran la posibilidad de encontrar una solución óptima. Así, el problema central de los métodos multicriterio consiste en seleccionar las mejores alternativas, o en su caso, la mejor alternativa y rechazar aquellas que parecen malas y generar una ordenación de las consideradas mejores en orden de más adecuadas a menos (Sánchez, 2001).

Según numerosos autores (véase por ejemplo Zimmermann, 1996) los MCDM se clasifican en dos grupos: los modelos multi-objetivo (MODM) y los modelos multi-atributo (MADM). En la literatura es muy común que se hable de forma indistinta de MADM y MCDM (Triantaphyllou, 2000).

Los MODM son modelos de toma de decisiones cuyo espacio de solución es continuo. Las funciones objetivo, toman un número infinito de valores distintos, que conducen a un número infinito de alternativas posibles del problema.

En el caso de los MADM, son modelos de toma de decisiones cuyo espacio de solución es discreto. El objetivo no es encontrar una solución óptima al problema sino que consiste en determinar, mediante procesos de clasificación, un orden de las alternativas para elegir la más adecuada tomado en cuenta una serie de criterios determinados (Delgado-Galván, 2011). Estos modelos son los más comunes en la realidad. Se utilizan para realizar una evaluación y decisión respecto de problemas que, por naturaleza o diseño, admiten un número finito de alternativas de solución (Sadiq y Tesfamariam, 2009).

Dentro de la literatura relacionada con modelos de análisis multicriterio, se han identificado diversas metodologías específicas: *Weighted Sum Model* (WSM) (Fishburn, 1967), *Weighted Product Model* (WPM) (Bridgman, 1922; Miller y Starr, 1969), *Compromise Programming* (CP) (Zeleny, 1982), el método Electre III (Roy, 1978), el método de las Jerarquías Analíticas (AHP) (Saaty, 1980), TOPSIS (Hwang y Yoon, 1981),

el método PROMETHEE (Brans y Vincke, 1985), el método NAIADE (Munda, 1995) y el método VIKOR (Opricovic, 1998).

Estos enfoques de MCDM comparten algunos elementos matemáticos en común: ciertos valores para las alternativas son asignados según cada criterio que, posteriormente son multiplicados por los pesos correspondientes para valorar las alternativas de decisión (Huang *et al.*, 2011). Los métodos difieren fundamentalmente en la manera en que son asignados y combinados los valores de los criterios. Todos los procesos requieren diferente información o juicios de los expertos y los valores calculados tienen propiedades distintas. Según las debilidades y fortalezas de cada método, los usuarios se decantan por el uso de uno u otro según lo apropiado que sea para el problema en cuestión.

En el presente trabajo, el método que se considera más adecuado es el Método de las Jerarquías Analíticas (AHP) y será descrito más adelante. Esta metodología forma parte de los MADM ya que el número de alternativas y criterios posibles no puede exceder de $n = 7 \pm 2$ (Miller, 1955), por tratarse de un número crítico sobre los que una persona puede emitir juicios de manera simultánea (Delgado-Galván, 2011). Dadas las propiedades de esta metodología, no hay problema por conflicto de criterios ni por incompatibilidad de unidades de comparación ya que se brinda la oportunidad de hacer prevalecer un criterio sobre otro mediante los juicios emitidos por los actores según una escala de valores, sin importar la naturaleza de los criterios.

En conclusión, los métodos de decisión multicriterio ayudan a resolver problemas complejos que implican comparación de alternativas y la participación de todos los actores involucrados. Además, estos modelos permiten manejar la naturaleza cualitativa e intangible de los diversos criterios a tener en cuenta y de los aspectos económicos, sociales y ambientales que interrelacionan entre sí, de manera sencilla y gráfica (Sánchez, 2001).

2.5. Toma de decisiones en grupo

La toma de decisiones en grupo es una parte muy importante de los métodos de decisión multicriterio. Existe la necesidad creciente de que en los procesos de decisión intervengan todas las partes involucradas en la medida de lo posible. Aquellos actores implicados en el proceso de toma de decisiones pueden aportar sus conocimientos, experiencias y puntos de vista de forma que en conjunto pueden hacer frente a la complejidad del problema mucho mejor que uno sólo. Esto genera una serie de problemas. Uno de los principales es el diseño de mecanismos adecuados de consenso que permitan obtener una decisión final tratando de integrar al máximo los distintos puntos de vista de los actores y que estas perspectivas sean posiblemente conflictivas. Este es uno de los problemas en los que más esfuerzos se concentran actualmente (ver Huang *et al.*, 2009; Xu, 2009; Ben-Arieth *et al.*, 2009; Chen y Cheng, 2009; Dong *et al.*, 2010).

Uno de los métodos más apropiados para la toma de decisiones en grupo es el Método de las Jerarquías Analíticas (AHP), metodología anteriormente mencionada, junto con una serie de técnicas desarrolladas por diversos autores para obtener consistencia, completar de forma consistentes las informaciones emitidas de forma parcial, alcanzar una solución de compromiso y el consenso de todas las partes implicadas.

El problema de obtener un consenso entre las partes interesadas que emiten sus juicios según los criterios establecidos y las alternativas posibles es lo que se trata en el presente trabajo y el método AHP sirve de apoyo para la toma de decisiones en grupo concluyendo el proceso proporcionando una síntesis de resultados mediante un proceso adecuado de agregación de resultados.

Algunas técnicas sencillas de agregación de juicios basadas en AHP y recogidas a lo largo de la literatura son: agregación de los juicios individuales (AIJ), agregación de las prioridades individuales (AIP), *Interval group judgments*, *Taguchi's loss function*, *Goal programming*, *Fuzzy preference programming*, *Nonlinear least squares regression* y

Stochastic preference modeling. Además, es habitual encontrar metodologías que combinan más de una técnica de agregación.

A menudo resulta conveniente emplear medidas para evaluar las técnicas de agregación empleadas. Algunas de estas medidas pueden ser: *Satisfactory Index* (SAT), *Fitting Performance Index* (FP), *Group Euclidean Distance* (GED), *Group Minimum Violations* (GMV) y *Weights Distance* (WD).

En el presente estudio, nos centraremos en AIJ y AIP, dos de las metodologías más populares (Sun *et al.*, 2009; Ananda y Herath, 2008; Cortés *et al.*, 2009; Lee *et al.*, 2009) aunque no existen muchos estudios comparando ambas técnicas de agregación de juicios (Huang *et al.*, 2009).

La técnica AIJ consiste en la agregación de los juicios individuales respecto a cada conjunto de matrices de comparación dos a dos para producir una jerarquía agregada. El número de juicios para todos los expertos debe coincidir, es decir, el tamaño de las matrices tiene que ser el mismo.

Por otro lado, el método de agregación AIP se basa en sintetizar cada una de las ponderaciones individuales (vector de Perron) y agregar las prioridades resultantes.

Cuando tenemos varios grupos de actores involucrados, resulta más apropiado aplicar AIJ dentro del grupo, porque se suponen más homogéneos los juicios emitidos por los integrantes si actúan como grupo y el método funciona mejor; y el uso de AIP entre grupos o si actúan como unidades independientes, debido a la mayor heterogeneidad o disparidad de opiniones. Esto último ocurre de forma frecuente dado que el conjunto de la sociedad no suele adoptar posiciones unánimes. Incluso si los juicios emitidos son muy diferentes, conviene hacer pequeños grupos. En la práctica, ambos métodos son fáciles de implementar y se usan prácticamente sin distinción pero la agregación de opiniones subjetivas es más compleja y el método empleado puede influir en la decisión (Wu *et al.*, 2008).

Las medias aritmética (AMM y la ponderada WAMM) y geométrica (GMM y su ponderada WGMM) son empleadas indistintamente en ambas técnicas (Forman y Peniwati, 1998). La media geométrica ponderada (WGMM) para AIJ es la más usada en numerosas aplicaciones pero no es necesariamente la mejor o más adecuada. Aczel y Saaty (1983) probaron que la media geométrica era consistente en las cuatro propiedades en las que se basa AHP. Ramanathan y Ganesh (1994) cuestionaron que la media geométrica respetara el principio de optimalidad de Pareto pero Van Den Honert y Lootsma (1996) y Forman y Peniwati (1998) en trabajos posteriores rechazan esa teoría y defendían el uso de la media geométrica. Además, afirman que cuando los individuos actúan de manera independiente, se puede utilizar tanto la media geométrica como la aritmética, e incluso abogan por que la media geométrica es más consistente que la aritmética. Esta propuesta de Forman y Peniwati ha sido aceptada por una amplia parte de la literatura posterior, como Aull-Hyde *et al.* (2006), Srdjevic (2007), Chou *et al.* (2007) y Altuzarra *et al.* (2007). En Wu *et al.*, (2008) se concluye que sólo hay diferencias significativas entre los métodos si el número de actores y criterios es muy grande (no es nuestro caso), ya que la media geométrica no es aplicable, o si el número de criterios inferior a cuatro. En todos los casos la decisión final del grupo se adopta tras un proceso negociador en el que todos los participantes buscan un consenso final que represente adecuadamente sus intereses individuales.

3. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS MATEMÁTICO DEL PROCESO

3.1. Método de las jerarquías analíticas

El método de las jerarquías analíticas, desarrollado por Thomas L. Saaty (1977) y extensamente estudiado y refinado desde entonces, proporciona un marco racional y comprensivo que permite estructurar un problema de decisión complejo mediante la construcción de un modelo jerárquico estructurado en tres niveles: en el superior el objetivo, en el intermedio los criterios y, finalmente, en el inferior, las alternativas. Es una metodología que combina las matemáticas y la psicología, cuyo propósito es permitir que los tomadores de decisiones o partes involucradas en un proceso puedan estructurar un problema multicriterio en forma visual y de manera jerárquica. Cuando nos enfrentamos a un problema de decisión que resulta complejo, podemos usar una jerarquía para integrar grandes cantidades de información en nuestra comprensión de la situación. A medida que se construye esta estructura ordenada, se va formando una imagen del problema en su conjunto que nos ayuda a interpretarlo de forma más sencilla y más gráfica.

Una vez es establecida la jerarquía, se realizan comparaciones entre dichos elementos (criterios y alternativas) dos a dos formando matrices de comparación cuadradas cuyas entradas son valores numéricos que representan los juicios emitidos por los tomadores de decisiones según una escala de valores predefinida (Saaty 1980, 2001). Esta metodología representa y cuantifica sus elementos, relacionándolos con los objetivos generales y evaluando las alternativas. Cuando se hacen las comparaciones, únicamente se comparan dos elementos a la vez. Los decisores pueden usar datos concretos sobre los elementos, o pueden usar sus juicios sobre la importancia y el significado relativo de los elementos. Los elementos de la jerarquía pueden relacionarse a cualquier aspecto del problema de decisión, bien sea tangible o intangible, medido con precisión o aproximadamente estimado, bien o mal entendido, es decir, cualquier cosa que influya o tenga relevancia en la decisión que se está tomando. En AHP, es esencial que los juicios humanos puedan ser usados para realizar

las evaluaciones y no sólo la información subyacente. Depende tanto de la naturaleza del problema en cuestión, como del conocimiento, los juicios, valores, opiniones, y necesidades de los participantes en el proceso. Esto es lo que diferencia AHP de otras técnicas para la toma de decisiones.

El proceso culmina con la síntesis matemática de numerosos juicios sobre el problema de decisión que se esté tratando mediante un vector de n componentes que ordena las n alternativas.

El procedimiento de AHP se puede resumir en una serie de pasos que comienzan por modelar el problema como una jerarquía, identificando el objetivo que se pretende conseguir, estableciendo las alternativas factibles para alcanzarlo y los criterios para evaluar dichas alternativas. En la Figura 6 se observa de forma esquemática los elementos que forman el problema.

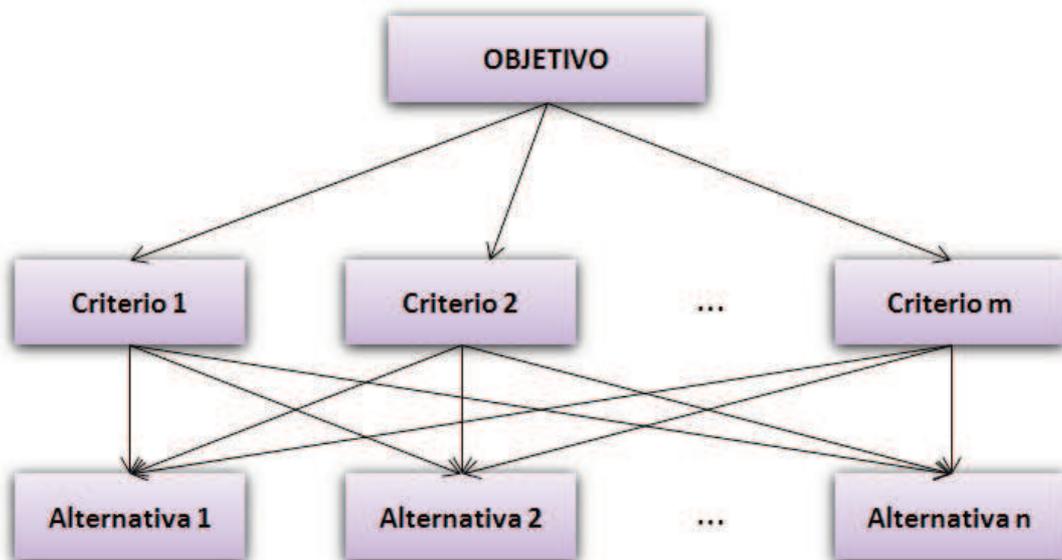


Figura 6. Modelo jerárquico de un problema para AHP.

Posteriormente, las partes involucradas realizan la comparación de criterios dos a dos, formándose una matriz cuadrada por cada actor que participa, que reúne los juicios emitidos representados por valores numéricos según una escala. Así, se establecen prioridades entre los elementos de la jerarquía. Seguidamente, se forman tantas matrices como criterios en las que los actores emiten sus juicios respecto a las

alternativas según el criterio correspondiente. Se revisa la consistencia de los juicios y se produce una síntesis de los mismos, a través de los valores de las matrices de comparación de criterios y de las matrices de comparación de alternativas, para, finalmente, producir, mediante un proceso adecuado de agregación, un conjunto de prioridades globales de la jerarquía y evaluar las alternativas, alcanzando una decisión final.

AHP tiene ventajas únicas si los elementos que son sometidos a comparación son difíciles de cuantificar o si la comunicación o el consenso entre las partes implicadas no es posible por tener diferentes puntos de vista o conocimientos.

Una de las características a tener en cuenta es que el número de elementos comparativos no debe exceder de $n = 7 \pm 2$ (Miller, 1955). Si se excede, se tendría que recurrir a la composición de conglomerados (Escobar y Moreno, 1997).

Entre los diversos métodos de valoración, AHP es uno de los que mejor recoge todos los aspectos que afectan a la gestión de fugas, incluyendo sus externalidades.

3.1.1. Aplicaciones

El método de las jerarquías analíticas ha sido ampliamente utilizado para la toma de decisiones en gran cantidad de campos de acción (Omkarprasad y Sushil, 2006; Ho, 2008; Kabir *et al.*, 2013). Es muy frecuente la aplicación de AHP a situaciones que requieren la toma de decisiones complejas tales como industria, salud, gobierno, educación, área de logística, manufactura, etc., especialmente aquellos con asuntos de altos intereses que involucran percepciones y aspectos subjetivos y pueden tener repercusiones a largo plazo. Esta metodología aplicada de forma adecuada, ha producido grandes resultados en problemas que involucran planificación, asignación de recursos, establecimiento de prioridades y selección de entre varias opciones o soluciones. Otras áreas donde AHP ha estado presente incluyen clasificaciones, *benchmarking*, justificación de presupuestos, gestión de la calidad, algunos problemas de gran interés actual como decidir la forma óptima de reducir el impacto en el cambio climático así como la evaluación del riesgo en la operaciones de los gasoductos de

petróleo de un país, entre muchos más problemas que involucren la toma de decisiones complejas (Busham y Kanwal, 2004; Forman y Saul, 2001-2007).

En el campo de la hidráulica e hidrología, en la literatura encontramos algunas aplicaciones de AHP para el mejor manejo de las cuencas hidrográficas de EE.UU., en la valoración de riesgos de fallos en redes de distribución o en la calidad del agua (Sadiq *et al.*, 2007), la valoración de los efectos sociales y ambientales que se derivan de las fugas en oleoductos (Dey, 2002) y también como soporte de toma de decisiones en la gestión del agua (Srdjevic, 2007). Respecto de la aplicación de AHP a la gestión de fugas de agua en abastecimientos urbanos, y más concretamente evaluando los costes y las externalidades sociales y ambientales que se puedan derivar, recientemente encontramos numerosas referencias en la literatura (Delgado-Galván *et al.*, 2010; Benítez *et al.*, 2012a; Izquierdo *et al.*, 2012).

3.1.2. Escala

El fundamento del proceso se basa en que AHP permite dar valores numéricos a los juicios dados por un actor, ya bien sean estos tangibles o intangibles, logrando medir cómo contribuye cada elemento de la jerarquía al nivel inmediatamente superior. Estas relaciones que establecen los actores realizando comparaciones por pares de elementos, se realizan basándose en una escala de valores construida en términos de preferencia o importancia. Existen algunos estudios relativos al desarrollo de escalas de valores que se pueden emplear (Dong *et al.*, 2008). A lo largo de este trabajo la escala que se utilizará será la escala desarrollada por Saaty (1980, 2001) que se muestra en la Tabla 1. Esta escala, que presenta valores discretos, relaciona un conjunto de opiniones verbales con la importancia de las mismas de forma que las cuantifica. Además, existe la posibilidad de emplear valores intermedios si es necesario expresar incertidumbres o determinada falta de claridad debido a que un juicio emitido se encuentra entre dos posibles valores de la tabla.

Juicio verbal Escala de Saaty	$(a_{i,j})$
Importancia absoluta del elemento i sobre el elemento j	9
Muy marcada importancia del elemento i sobre el elemento j	7
Marcada importancia del elemento i sobre el elemento j	5
Poca importancia del elemento i sobre el elemento j	3
Igual importancia o indiferencia entre i y j	1
Poca importancia del elemento j sobre el elemento i	1/3
Marcada importancia del elemento j sobre el elemento i	1/5
Muy marcada importancia del elemento j sobre el elemento i	1/7
Importancia absoluta del elemento j sobre el elemento i	1/9

Tabla 1. Escala de Saaty para la comparación entre pares de elementos.

3.1.3. Construcción de las matrices de comparación y del vector de prioridades

Como ya ha sido mencionado, al realizar las comparaciones por pares según los valores de una escala, se van formando tanto matrices de comparación de criterios como matrices de comparación de alternativas respecto de cada uno de los criterios. Estas matrices $A_{n \times n} = [a_{i,j}]$ con $i \leq i, j \leq n$ son matrices cuadradas y positivas (entre otras propiedades que serán descritas posteriormente) donde $a_{i,j}$ representa la comparación entre el elemento i y el elemento j a partir de los valores de la escala de la Tabla 1 y n es el número de elementos comparados.

AHP convierte estas evaluaciones a valores numéricos o prioridades. Una prioridad es derivada de cada elemento de una jerarquía, lo que permite que elementos diversos y frecuentemente inconmensurables sean comparados unos con otros de forma racional y consistente. La forma de conseguirlo es obteniendo, de cada matriz de comparaciones, su vector de prioridades asociado que resume las preferencias según las opiniones que han emitido los actores implicados. Existen numerosas técnicas para obtener el vector de prioridades. En este trabajo, se utilizará la propuesta original de Saaty (1977, 2001, 2008) que establece que el vector de prioridades es el vector propio de Perron asociado a cada matriz de comparación. Se obtiene un vector de prioridades de criterios y también un vector de prioridades de alternativas respecto a

cada criterio (Aznar y Guijarro, 2008). Tras agregar adecuadamente estos vectores de prioridades, se obtiene una ordenación de las alternativas que motiva la decisión. De esta forma, las prioridades numéricas se obtienen para cada una de las alternativas de decisión. Estos números representan el peso o la importancia relativa de las alternativas para lograr el objetivo de la decisión.

3.1.4. Propiedades de las matrices de comparación

Todas las matrices de comparación deben cumplir una serie de propiedades. Además de la positividad de sus componentes (derivada de la escala de Saaty), una matriz de comparación $A_{n \times n} = [a_{i,j}]$; $i \leq n, j \leq n$ debe cumplir (Saaty *et al.*, 1998):

1. Homogeneidad: Si los elementos i y j son considerados iguales en importancia, entonces se cumple que $a_{i,j} = a_{j,i} = 1$.

La homogeneidad es la igualdad o semejanza en la naturaleza o el género de varios elementos. En el caso particular en que un elemento i y un elemento j son el mismo o de igual importancia, el valor que debe darse es el de 1.

2. Reciprocidad: Si $a_{i,j} = x$, entonces $a_{j,i} = 1/x$.

La reciprocidad es la correspondencia mutua entre dos elementos. El valor otorgado a la comparación del elemento i con el elemento j se corresponde de forma lógica inversamente al valor dado a la comparación del elemento j con el elemento i .

3. Consistencia: Se cumple que $a_{i,k} = a_{i,j} a_{j,k}$ para todo $i, j, k = 1, \dots, n$.

La consistencia es la coherencia que existe entre los elementos de un conjunto.

Sea $A = [A]_{i,j}$ una matriz $n \times n$ y positiva. Se dice que A es recíproca (consistente) cuando A cumple la condición de reciprocidad (consistencia).

Sea A una matriz cuadrada y positiva. Si además de recíproca o consistente se cumple $a_{i,j} = a_{j,i}$, entonces A cumple la condición de homogeneidad $a_{i,j} = 1$.

Mientras la positividad, la homogeneidad y la reciprocidad son propiedades (lógicas) que se derivan de la escala de Saaty, no así la consistencia.

A continuación se enuncian una serie de teoremas, definiciones y demostraciones relativos a las propiedades de una matriz consistente:

En este punto, $M_{n,m}$ denotará el conjunto de las matrices reales de tamaño $n \times m$ y $M_{n,m}^+$ denotará el subconjunto de $M_{n,m}$, de las matrices positivas. Una matriz se dice positiva cuando todas sus entradas son positivas. Se asume que los elementos de R^n son vectores columna (se identifica R^n con $M_{n,1}$). Para $A \in M_{n,m}$, el elemento $a_{i,j}$ se denota por $[A]_{i,j}$ y para indicar la transposición de matrices se empleará el superíndice T .

La siguiente aplicación, que no es lineal, tendrá un papel importante en lo sucesivo:

$$J : M_{n,m}^+ \rightarrow M_{n,m}^+ \quad [J(A)]_{i,j} = 1/[A]_{i,j} .$$

El Teorema 1 es de demostración inmediata.

Teorema 1. Sea $A \in M_{n,m}^+$ y $\lambda > 0$. Entonces:

1. $J^2(A) = A$.
2. $J(\lambda A) = \lambda^{-1}J(A)$.
3. Si $x \in M_{n,1}^+$, entonces $x^T J(x) = J(x)^T x = n$.

De Benítez et al. (2011a) tenemos el siguiente resultado, con interesantes caracterizaciones para una matriz consistente.

Teorema 2. Sea $x \in M_{n,n}^+$. Si $a_{i,j} = [A]_{i,j}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe un $x \in M_{n,1}^+$, tal que $A = J(x)x^T$.
2. Existe un $y \in M_{n,1}^+$, tal que $A = yJ(y)^T$.
3. Existe $w = [w_1 \ \cdots \ w_n]^T \in M_{n,1}^+$, tal que $a_{i,j} = w_i/w_j$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
4. Se verifica $a_{i,j}a_{j,i} = 1$ y $a_{i,j}a_{j,k} = a_{i,k}$ para todo $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración

(1) \Rightarrow (2): Se asume que existe $x \in M_{n,1}^+$, tal que $A = J(x)x^T$. Se define $y = J(x)$, ahora, de acuerdo con el teorema 1, se tiene que $A = J(x)x^T = yJ(J(x))^T = yJ(y)^T$.

(2) \Rightarrow (3): Para $j \in \{1, \dots, n\}$, si $y_j = [y]_{j,1}$. Por hipótesis, se tiene que:

$$A = yJ(y)^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{y_1} & \cdots & \frac{y_1}{y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_n}{y_1} & \cdots & \frac{y_n}{y_n} \end{bmatrix}$$

Ahora queda claro que $a_{i,j} = y_i/y_j$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

(3) \Rightarrow (4): Es trivial.

(4) \Rightarrow (1): Definimos $x \in M_{n,1}^+$ mediante $x^T = [a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n}]$. Es posible probar $A = J(x)x^T$. Basta elegir cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y se tiene $[J(x)x^T]_{i,j} = a_{i,j}^{-1}a_{1,j} = a_{i,1}a_{1,j} = a_{i,j}$.

Este teorema permite dar una definición más general de matriz consistente.

Definición 1. Una matriz que cumple cualquiera de las condiciones equivalentes expresadas en el Teorema 2 es consistente.

Cabe remarcar que la prueba de (4) \Rightarrow (1) permite encontrar $x \in M_{n,1}^+$ tal que $A = J(x)x^T$ para cualquier matriz consistente A , lo que permitirá caracterizar a una matriz consistente en términos de un único vector.

Se sabe que el rango de una matriz de la forma uv^T es 1, siendo $u, v \in M_{n,1}$ diferentes de cero. Entonces, es claro que el rango de cualquier matriz consistente es 1.

Usando el Teorema 1 y la forma $A = J(x)x^T$, que el Teorema 2 proporciona para matrices consistentes $A \in M_{n,n}^+$ siendo $x \in M_{n,1}^+$, se puede escribir:

$$AJ(x) = J(x)x^T J(x) = nJ(x),$$

lo que prueba que n es un valor propio de cualquier matriz consistente $A = J(x)x^T$ de orden n y $J(x)$ es un vector propio de A asociado a n . Además, en Meyer (2000) se prueba que cualquier matriz de la forma uv^T donde $u, v \in M_{n,1}$ son diferentes de cero, es diagonalizable si y solo si $u^T v \neq 0$. Entonces, cualquier matriz consistente es diagonalizable. Por lo tanto, ya que el rango de la matriz A es 1, cualquier vector propio de A asociado a n es un múltiplo escalar de $J(x)$.

Se puede comprobar fácilmente que: si $\lambda > 0$ y $x \in M_{n,1}^+$, entonces $J(\lambda x)(\lambda x)^T = J(x)x^T$. ¿Se verifica algún tipo de resultado recíproco?

A continuación se demuestra que la representación de una matriz consistente A dada por el Teorema 2, es, en cierto sentido, única.

Teorema 3. Sean $x, y \in M_{n,1}^+$, tales que $J(x)x^T = J(y)y^T$. Entonces existe un real $\lambda > 0$, tal que $x = \lambda y$.

Demostración: Si se premultiplica $J(x)x^T = J(y)y^T$ por x^T , y se utiliza el Teorema 1, se obtiene $nx^T = x^T J(y)y^T$. Transponiendo se obtiene $x = \frac{1}{n} y J(y)^T x$, y considerando

que $J(y)^T x$ es un escalar y que cualquier escalar conmuta con todas las matrices, se obtiene $x = \frac{J(y)^T x}{n} y$.

Debe recordarse que una matriz recíproca $A = M_{n,n}^+$ cumple la condición $[A]_{i,j} [A]_{j,i} = 1$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Esta condición puede reescribirse usando matrices como $J(A) = A^T$.

Teorema 4. Cualquier matriz consistente es recíproca.

Demostración: Sea $A \in M_{n,1}^+$ una matriz consistente escrita como $A = J(x)x^T$ para algún $x \in M_{n,1}^+$. De la definición de J , se tiene $J(uv^T) = J(u)J(v)^T$ para cualesquiera $u, v \in M_{n,1}^+$. Por lo tanto

$$J(A) = J[J(x)x^T] = J^2(x)J(x)^T = xJ(x)^T = [J(x)x^T]^T = A^T$$

El resultado recíproco es, en general, cierto solo para $n = 2$.

Ahora damos un criterio que permite asegurar si una matriz recíproca es consistente. Este resultado se utiliza en la sección titulada 'Mejora de consistencia' para obtener consistencia para una matriz no consistente.

Teorema 5. Sea A una matriz recíproca. A es consistente si y solo si $\text{rango}(A) = 1$.

Demostración: Como ya se ha dicho antes, cualquier matriz consistente tiene rango 1. Supongamos ahora que A es una matriz recíproca con rango 1. Cualquier matriz $A \in M_{n,n}$ que tiene rango 1 puede ser escrita como $A = uv^T$, donde $u, v \in R^n$ son diferentes de cero. Además, ya que A es positiva, se puede asumir que los vectores u y v son positivos. De $A^T = J(A)$ se obtiene:

$$vu^T = J(uv^T) = J(u)J(v)^T \quad (\text{a})$$

Premultiplicando por v^T y transponiendo, se obtiene $(v^T v)u = (v^T J(u))J(v)$. Si se tiene en cuenta que u y v son positivos, se puede decir que $u = \lambda J(v)$, siendo $\lambda > 0$. Usando (a) se tiene que $\lambda v J(v)^T = J(\lambda J(v))J(v)^T$. De acuerdo con el Teorema 1 y considerando que $v J(v)^T \neq 0$ se tiene $\lambda = \lambda^{-1}$. Teniendo en cuenta que $\lambda > 0$ se tiene que $\lambda = 1$. Ya que se tiene $A = uv^T$ y $u = \lambda J(v)$, el Teorema 2 concluye la demostración (Benítez *et al.*, 2011a).

3.1.5. Procedimiento para verificar la consistencia de las matrices

Mientras la positividad, la homogeneidad y la reciprocidad son propiedades lógicas que se derivan de la escala de Saaty, no es así la consistencia. Precisamente, conseguir la consistencia es el gran objetivo de muchos métodos, entre otros, el de la linealización que se describirá más adelante.

Tal y como ya se ha mencionado, las matrices de comparación recogen los juicios expresados por los actores que no son más que valoraciones subjetivas que pueden generar cierto grado de inconsistencia. Entonces, si se asume que, los valores que emite un determinado actor al realizar las comparaciones por pares implican pequeñas perturbaciones sobre los valores ‘correctos’ al tratarse de información subjetiva, se puede probar que estas perturbaciones garantizan perturbaciones también pequeñas para los valores propios (Stewart, 2001) y es por esto que AHP admite cierto grado de inconsistencia.

Para verificar la consistencia es indispensable conocer el valor propio principal de una matriz ($\lambda_{m\acute{a}x}$). Su vector propio asociado (w) es el denominado vector de Perron y, al ser normalizado, otorga el vector de prioridades que se busca (Saaty, 2003, 2008). En general, se puede resolver el problema según la teoría Perron-Frobenius (Meyer, 2000) resolviendo el problema del valor propio $Aw = \lambda_{m\acute{a}x} w$ donde $\lambda_{m\acute{a}x}$ es el valor propio único de módulo mayor de A y es el que se corresponde con el vector de Perron. Saaty probó (Saaty, T.L., 2008) que $\lambda_{m\acute{a}x} \geq n$ y que $\lambda_{m\acute{a}x} = n$ sí y sólo sí A es consistente.

Para medir el grado de inconsistencia, Saaty propone utilizar el índice de consistencia IC . Este valor representa la media de los vectores propios no principales.

$$IC = \frac{\lambda_{\text{máx}} - n}{n - 1}$$

Una matriz es consistente si y sólo si IC es igual a cero.

Sin embargo, dado que es permisible una cierta desviación de los valores que dan como resultado una matriz consistente, para medir la magnitud de la inconsistencia, se compara el valor de IC con el valor de consistencia aleatorio IC^* (Saaty, 2008), que es un valor promediado para cada tamaño de matriz, considerando que los juicios numéricos en la matriz A fueran aleatorios. En la Tabla 2 se presentan los valores de consistencia aleatorios proporcionados por Saaty (1977, 2001, 2008).

Tamaño matriz (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IC aleatoria (IC^*)	0	0	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.4	1.45	1.49

Tabla 2. Valores de consistencia aleatoria.

De esta forma, se puede considerar una matriz que no es del todo consistente como válida respecto a la consistencia siempre que la tasa de consistencia TC no supere el 10% (Saaty, 2001). Esta tasa de consistencia es el cociente entre el índice de consistencia IC y el índice de consistencia aleatorio IC^* :

$$TC = \frac{IC}{IC^*}$$

Si se cumple que $TC \leq 0.1$, la estimación se acepta. Si ocurre lo contrario, deben modificarse los juicios emitidos por lo que se busca una nueva matriz hasta que cumpla que la tasa de consistencia se encuentre por debajo del 10%.

3.1.6. Mejora de la consistencia: proceso de linealización

Uno de los principales problemas para la aplicación de AHP es que, como trabajamos con juicios subjetivos, suele ocurrir que se cree cierto grado de inconsistencia que sea

inadmisible para el proceso. Una forma sencilla de resolver el problema es encontrar una matriz consistente B lo más próxima a A que proporcione la solución más aproximada al problema de la consistencia. Son muchos los autores que han desarrollado diversas técnicas para mejorar la consistencia. Existen diversas propuestas en la literatura como la que proponen Aznar y Guijarro (2008) empleando programación por metas para encontrar los valores de comparación más cercanos a las opiniones dadas; en Benítez *et al.* (2010) se propone usar la norma de Frobenius para minimizar la distancia entre las matrices A y B (también se puede emplear el método de los multiplicadores de Lagrange).

En este trabajo se utilizará la denominada técnica de linealización, desarrollada en la línea de investigación del equipo Fluing-IMM en diversos trabajos (Benítez *et al.*, 2011b; Benítez *et al.*, 2012), junto con una solución de compromiso entre un nivel aceptable de consistencia de las matrices y la aceptación, por parte de los expertos, de los cambios en los juicios que puedan producirse al modificar las matrices de comparación.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la mayoría de matrices de comparación que emiten los actores implicados no son consistentes ni tienen un grado de consistencia aceptable. De forma concisa, el proceso de linealización (Benítez *et al.*, 2011b) encontrará la matriz de comparación consistente más próxima a la matriz original emitida $A = [a_{i,j}]$ de tamaño $n \times n$ mediante la proyección ortogonal de $L(A)$ sobre $\mathcal{L}_n = \{L(A): A \text{ matriz } n \times n \text{ positiva y consistente}\}$, que resulta ser un subespacio de dimensión $n - 1$ del espacio de las matrices $n \times n$. La aplicación L asocia a una matriz positiva $X = (x_{ij})$ la matriz cuyo elemento (i,j) es $\log(x_{ij})$. La aplicación E asocia a una matriz $X = (x_{ij})$ la matriz cuyo elemento (i,j) es $\exp(x_{ij})$.

En la Figura 7, se muestra de forma gráfica el papel de las funciones L y E : Las matrices de los conjuntos de la izquierda son las matrices que aportan los expertos (recíprocas) y las matrices que proporcionan los vectores de prioridades (consistentes). Sin embargo, mediante la aplicación biyectiva L , se usan conjuntos equivalentes, pero dotados de estructura algebraica, lo que permite usar técnicas del álgebra lineal.

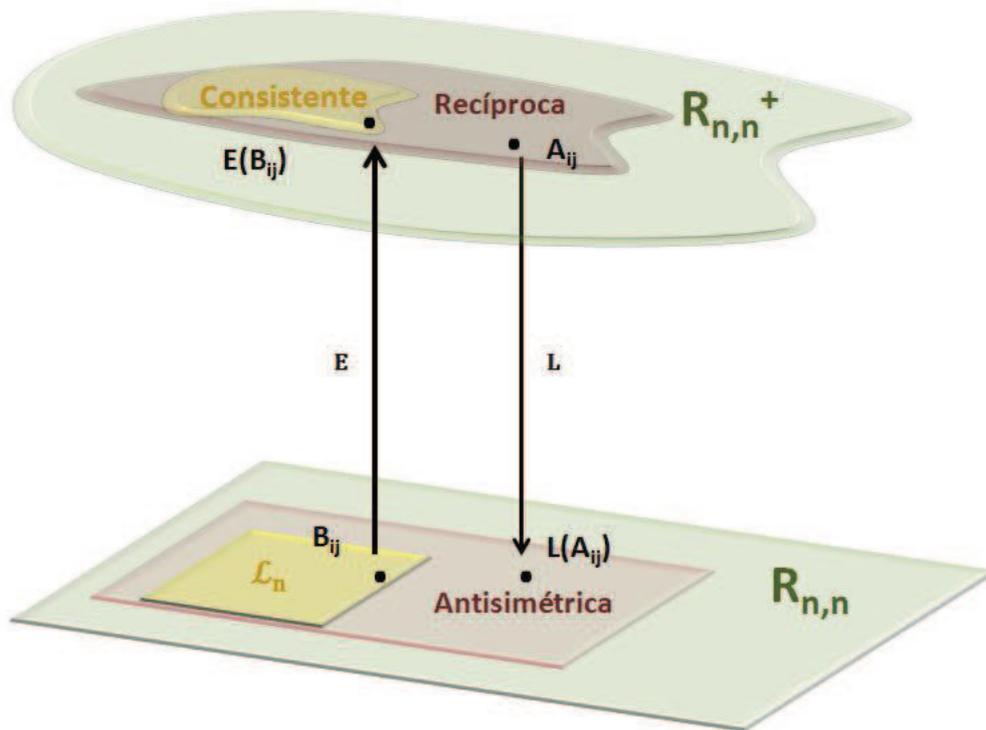


Figura 7. Proceso de linealización.

Esta proyección ortogonal viene dada por la expresión de Fourier:

$$p_n(L(A)) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\text{traza}(L(A)^T \phi_n(y_i))}{\|y_i\|_2^2} \phi_n(y_i) \quad (1)$$

donde ϕ_n se define mediante $\phi_n(v) = v1_n^T - 1_n v^T$, $v \in R^n$, siendo 1_n el vector $(1 \dots 1)^T$ de R^n , y $\{y_i, \dots, y_{n-1}\}$ una base del complemento ortogonal de la envoltura lineal de 1_n , pudiéndose probar que $\{\phi_n(y_1), \dots, \phi_n(y_{n-1})\}$ es una base de L_n (Benítez *et al.*, 2012).

Si la matriz inicial es recíproca, la proyección ortogonal se puede simplificar a una expresión más sencilla:

$$p_n(L(A)) = \frac{1}{n} [(L(A)U_n) - (L(A)U_n)^T] \quad (2)$$

donde $U_n = 1_n 1_n^T$ (Benítez *et al.*, 2013a).

Como esta fórmula sólo implica operaciones de sumas, la eficiencia computacional está garantizada y su integración en un sistema soporte a la decisión basado en AHP es sencillo y de gran interés.

Finalmente, la matriz consistente más próxima a A resulta ser $A^C = E(p_n(L(A)))$, donde E asocia a una matriz $X = (x_{ij})$ la matriz cuyo elemento (i,j) es $\exp(\sqrt[n]{x_{ij}})$.

El proceso de linealización completo se describe como un simple proceso matricial que emplea las funciones L y E de finidas previamente:

$$A \xrightarrow{L} L(A) \xrightarrow{p_n} p_n(L(A)) \xrightarrow{E} A^C \quad (3)$$

3.1.7. Solución de compromiso

El proceso de linealización proporciona, para una matriz A positiva y recíproca, una matriz A^C que es la matriz consistente más próxima a la matriz de comparaciones original A . Esta nueva matriz obtenida supone una ligera modificación respecto a los juicios emitidos por el agente implicado y puede no ser aceptada por éste, debido a que se trata de una matriz obtenida para mejorar la consistencia, de forma artificial, sintética y forzada a ser consistente, y puede no ser completamente representativa de su opinión. Por lo que asumir como vector de prioridades el vector de Perron de esta matriz sería un error y no tendría fiabilidad. En este punto, se debe establecer un 'feedback' entre la experiencia que aporta el tomador de decisiones y la consistencia que requiere la metodología para alcanzar una solución de compromiso aceptable. La matriz de la que se obtenga el vector de prioridades (vector de Perron) será aquella que, tras ser modificada y aceptada por el actor, exhiba un $TC \leq 0.1$ (Benítez *et al.*, 2011a).

En la Figura 8, se muestra un diagrama de flujo que representa todo el proceso a seguir para alcanzar una solución de compromiso entre la consistencia que requiere el método y los juicios y conocimientos que aportan las partes involucradas.

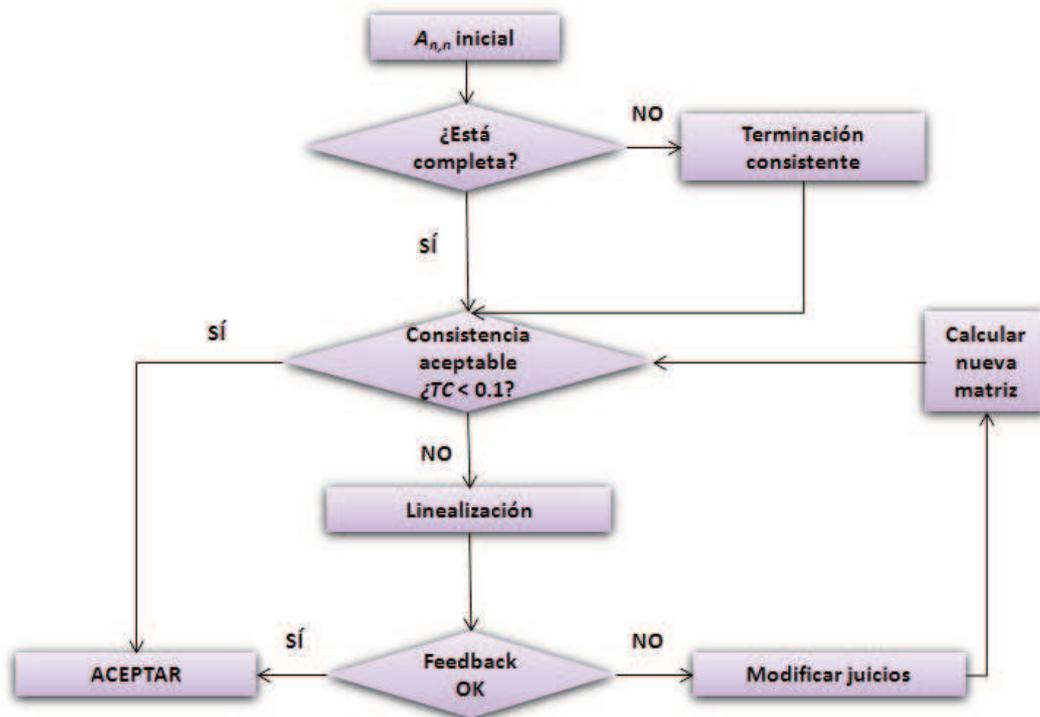


Figura 8. Diagrama de flujo para la solución de compromiso.

3.1.8. Fortalezas y debilidades de AHP

Las fortalezas y debilidades de AHP siempre ha sido tema de debate entre expertos en análisis multicriterio. Por muchas razones, AHP resulta uno de las metodologías más adecuadas para el análisis multicriterio de entre los diversos métodos de valoración que existen debido a las numerosas ventajas que proporciona. Algunas de sus fortalezas se detallan a continuación:

- La validez de AHP, método ampliamente utilizado en la literatura, está más que probada, justificada y fundamentada en resultados de trabajos anteriores o precedentes en diferentes campos de aplicación como planificación del medio ambiente, energías, ciencias sociales, agricultura y marketing (Kabir *et al.*, 2013). El éxito de esta metodología es el resultado de su simplicidad y robustez (Vargas, 1990).
- Al estar estructurado de forma jerárquica, los subproblemas son comprendidos más fácilmente, cada uno de los cuales puede ser analizado de forma

independiente y la importancia de cada elemento (criterio) resulta clara (Macharis *et al.* 2004).

- Permite la consideración conjunta de múltiples criterios de elección en los problemas de toma de decisiones.
- Permite cuantificar información cualitativa, subjetiva e intangible habitual en los problemas de toma de decisiones en los que, además, se consideran criterios no sólo técnicos y económicos, sino también sociales y medioambientales. Ocupa una posición única debido a que permite modelar situaciones de incertidumbre y riesgo en las que no existen escalas de medida ordinarias (Millet y Wedley 2002).
- Tiene la habilidad de manejar juicios de las partes interesadas (expertos, afectados, etc.) tanto cuantitativos como cualitativos (Macharis *et al.*, 2004). Esto resulta de particular interés debido a que, en Europa, en particular, la Directiva Marco del Agua exige la participación de los distintos actores en los procesos.
- Es muy intuitivo y atractivo para los tomadores de decisiones. Generalmente, las partes involucradas encuentran las comparaciones por pares de elementos cómoda y sencilla.
- AHP se utiliza generalmente en aplicaciones donde el número de alternativas consideradas es reducido, como es este caso. Otros métodos de clasificación como PROMETHEE y ELECTRE (Macharis *et al.*, 2004) son métodos multicriterio de ayuda a la decisión que implican varias votaciones en diferentes dimensiones para eliminar las alternativas menos votadas. Según Macharis *et al.* (2004), algunas características de AHP podrían mejorar estos métodos. En particular, afirman que los pesos de los criterios obtenidos mediante AHP tienen un nivel de coherencia, correlación, consistencia y precisión más alto que los pesos obtenidos en base a la intuición o conocimientos como en el método PROMETHEE.

- Tiene un gran potencial y aplicación práctica ya que se obtienen soluciones prácticas de forma sencilla para la toma de decisiones complejas.
- Es muy fácil de implementar. Existe software desarrollado y se integra fácilmente en un sistema soporte a la decisión.
- Permite captar eficazmente el nivel de acuerdo relativo entre los diferentes agentes implicados en el proceso así como el nivel de similitud o diferencia relativa de las alternativas.
- Clasifica las opciones según su eficacia en el cumplimiento de objetivos que se encuentren en conflicto.
- Una de las ventajas más potentes es la habilidad para detectar juicios inconsistentes. La consistencia se puede comprobar de forma sencilla y rápida consiguiendo unos resultados más precisos y fiables (Kablan, 2004). En el grupo Fluing-IMM se han desarrollado diversas técnicas con este fin. Además, la forma en que la consistencia es abordada asegura la calidad de los juicios y la eficiencia en la decisión final (Pohekar y Ramachandran, 2004).

Por otro lado, AHP también presenta una serie de debilidades que provocan que en ocasiones esta metodología sea cuestionada. Algunas de ellas se exponen brevemente a continuación:

- Las matrices de comparación pueden alcanzar cierto grado de inconsistencia. Aunque existen numerosas técnicas que de forma sencilla pueden superar este tipo de inconvenientes, se debe establecer siempre un 'feedback' con las partes implicadas porque puede que muchos de los cambios producidos en la matrices consistentes aproximadas no representen los juicios que inicialmente había emitido los actores.

- La dependencia entre criterios. Al igual que el resto de métodos multicriterio, AHP ha de basarse en criterios independientes entre sí. No obstante, esto es difícil de garantizar en la práctica.
- Una de la mayores debilidades de esta metodología es que si el número de comparaciones por pares es de gran magnitud, la incertidumbre aumenta de forma significativa (Macharis *et al.*, 2004), aunque en nuestro caso el número de elementos involucrados no es tan grande.
- Otra desventaja es la limitación artificial del uso de una escala de valor sobre 9. A veces, el tomador de decisiones encuentra difícil distinguir si una alternativa es 6 ó 7 veces más importante que otra. Además, AHP no puede hacer frente al hecho de que una alternativa es más importante que otra en más de 9 veces (Murphy, 1993; Belton y Gear, 1983; Belton, 1986).

En conclusión, AHP presenta un número muy significativo de ventajas (Ishizaka y Nemery, 2013). Las más importantes se traducen en su sencillez de aplicación, su atractivo para los tomadores de decisiones y su habilidad para incluir todo tipo de información, ya sea subjetiva o cualitativa (Saaty y Peniwati, 2007). Una de las características más importantes que deben cumplir las matrices de comparación es la consistencia y frecuentemente presentan cierto grado de inconsistencia debido a la naturaleza de los juicios emitidos, pero existen diversas técnicas que solventan este inconveniente. Por lo tanto, AHP se posiciona como uno de los métodos de análisis y decisión multicriterio por excelencia.

3.2. Consenso entre las partes implicadas

Por último, se tratará el consenso bajo varias posibilidades. La toma de decisiones en grupo es una parte muy importante cuando se realiza un análisis con múltiples criterios y la metodología AHP, como ya hemos visto, es una de las técnicas más apropiadas para resolver la toma de decisiones multicriterio cuando un mismo grupo de actores emiten sus juicios sobre una determinada forma de gestión de fugas de agua y se desea alcanzar un consenso.

Los juicios emitidos de manera individual pueden ser agregados de diversas maneras, ya sea mediante la agregación de los juicios individuales (AIJ) o bien mediante la agregación de las prioridades individuales (AIP). AIJ y AIP son dos de los principales métodos matemáticos de agregación; dos enfoques ampliamente usados en la literatura por su gran eficacia y sencillez.

Para realizar la agrupación tanto de juicios como de prioridades, los métodos utilizados por excelencia son la media aritmética (AMM) y la geométrica (GMM).

En este apartado, diferenciaremos cuando todos los actores opinan sobre el mismo número de criterios y, por tanto, el tamaño de las matrices es el mismo, y cuando alguno de los actores no puede emitir juicios sobre todos los criterios y, es decir, las matrices quedan incompletas o tenemos que agregar matrices de diferentes tamaños.

3.2.1. Homogeneidad en el número de juicios

La homogeneidad en el número de juicios es necesaria para que las técnicas de agregación puedan aplicarse. Significa que todas las matrices de comparación emitidas por cada uno de los actores que conforman el grupo del cual se busca el consenso, sean del mismo tamaño para que puedan ser agregadas unas con otras (AIJ) y para que sus vectores de prioridades tengan también el mismo número de elementos y puedan ser consensuados (AIP).

3.2.1.1. AIJ-AMM y AIJ-GMM

La primera de las técnicas de agregación es la agregación de juicios individuales AIJ. En este procedimiento, cada uno de los actores implicados expresa su cuerpo de opinión sobre todos los criterios, de forma individual, que se refleja en cada una de las matrices de comparación. Una vez las matrices están formadas serán agregadas, bien mediante la media aritmética (AMM) o bien mediante la media geométrica (GMM), en una sola matriz que será la matriz grupal a la que se le aplique la metodología AHP. En ambos casos, la importancia que se da a los expertos es la misma, ya que no se pondera ninguno de sus juicios. La igualdad (4) corresponde a la media aritmética de las matrices de comparación (ya bien sea la de criterios o la de alternativas según los criterios) donde $k = 1, 2, \dots, m$ expertos y $i, j = 1, 2, \dots, n$ criterios. Aunque las matrices iniciales cumplan las propiedades de reciprocidad y consistencia, la media aritmética no garantiza que se cumpla en la matriz grupal (sí que lo harán la positividad de componentes y la homogeneidad).

$$A_{AIJ-AMM} = [a_{i,j}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sum_{k=1}^m a_{12,k}}{m} & \dots & \frac{\sum_{k=1}^m a_{1n,k}}{m} \\ \frac{m}{\sum_{k=1}^m a_{12,k}} & 1 & & \frac{\sum_{k=1}^m a_{2n,k}}{m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{m}{\sum_{k=1}^m a_{1n,k}} & \dots & \frac{m}{\sum_{k=1}^m a_{2n,k}} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

La igualdad (5) corresponde a la media geométrica de las matrices de comparación. En los cálculos, la media geométrica satisface la reciprocidad, es decir, que si las matrices originales cumplen la propiedad de reciprocidad (además de las propiedades de positividad de componentes y de homogeneidad), la matriz grupal también lo hará. Esto se probará más adelante en el caso más general de la media geométrica ponderada. Como muestra de lo afirmado basta el siguiente ejemplo sencillo. Sean $a, b > 0$ y las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente, A y B son matrices consistentes (en particular recíprocas). Sin embargo poco cuesta comprobar que la matriz

$$\frac{1}{2}(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & (a + b)/2 \\ (a^{-1} + b^{-1})/2 & 1 \end{bmatrix}$$

es consistente si y solo si $a = b$.

$$A_{AIJ-GMM} = [a_{i,j}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{12,k}} & \dots & \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{1n,k}} \\ \frac{1}{\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{12,k}}} & 1 & & \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{2n,k}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{1n,k}}} & \dots & \frac{1}{\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{2n,k}}} & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

3.2.1.2. AIJ-WAMM y AIJ-WGMM

Si los actores implicados tienen distinta relevancia, se ponderan sus juicios con pesos α_k para $k = 1, 2, \dots, m$ expertos y se obtienen la media ponderada aritmética, WAMM, y la media ponderada geométrica, WGMM, de las matrices de comparación. Las igualdades (6) y (7) corresponden a cada una de estas medias, respectivamente donde $k = 1, 2, \dots, m$ expertos y $i, j = 1, 2, \dots, n$ criterios:

$$A_{AIJ-WAMM} = [a_{i,j}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sum_{k=1}^m a_{12,k} \alpha_k}{\sum_{k=1}^m \alpha_k} & \dots & \frac{\sum_{k=1}^m a_{1n,k} \alpha_k}{\sum_{k=1}^m \alpha_k} \\ \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k}{\sum_{k=1}^m a_{12,k} \alpha_k} & 1 & & \frac{\sum_{k=1}^m a_{2n,k} \alpha_k}{\sum_{k=1}^m \alpha_k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k}{\sum_{k=1}^m a_{1n,k} \alpha_k} & \dots & \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k}{\sum_{k=1}^m a_{2n,k} \alpha_k} & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$A_{AIJ-WGMM} = [a_{i,j}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & \prod_{k=1}^m (a_{12,k})^{\alpha_k} & \dots & \prod_{k=1}^m (a_{1n,k})^{\alpha_k} \\ \frac{1}{\prod_{k=1}^m (a_{12,k})^{\alpha_k}} & 1 & & \prod_{k=1}^m (a_{2n,k})^{\alpha_k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\prod_{k=1}^m (a_{1n,k})^{\alpha_k}} & \dots & \frac{1}{\prod_{k=1}^m (a_{2n,k})^{\alpha_k}} & 1 \end{bmatrix}^{\frac{1}{\sum_{k=1}^m \alpha_k}} \quad (7)$$

Es conveniente destacar que en (7), la potenciación no es la usual; sino es la llamada ‘elemento a elemento’, es decir, si X es una matriz y r es un real, entonces el elemento (i,j) de X^r es $(X_{ij})^r$.

Teorema. Sean A_1, \dots, A_k matrices cuadradas y positivas, sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ números positivos tales que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ y sea B la WGMM de las matrices A_i con pesos w_i . Si todas las matrices A_i son recíprocas (consistentes), entonces B es recíproca (consistente).

Demostración: Recuérdese la aplicación $L : M_{n,m}^+ \rightarrow M_{n,m}^+$ y el conjunto \mathcal{L}_n definidos en la sección 3.1.6. Se tiene que A es recíproca si y solo si $L(A)$ es antisimétrica y A es consistente si y sólo si $L(A) \in \mathcal{L}_n$. Con la notación del teorema se tiene además:

$$L(B) = \alpha_1 L(A_1) + \dots + \alpha_k L(A_k).$$

Esta igualdad, junto con el hecho de que \mathcal{L}_n y el conjunto formado por las matrices $n \times n$ antisimétricas son subespacios vectoriales, prueban el teorema.

3.2.1.3. AIP-AMM y AIP-GMM

En el segundo caso, se trata la agregación de las prioridades individuales (AIP), es decir, los vectores de prioridades obtenidos de las matrices de comparación de cada actor son los que van a ser agregados. Para ello, en primer lugar se aplica la metodología AHP por separado a cada una de las matrices de comparación individuales, obteniendo de cada una su vector de prioridades normalizado $w_k = [w_{1,k} \ w_{2,k} \ \dots \ w_{n,k}]$. Son estos

vectores los que son agregados mediante la media aritmética y la geométrica para obtener un único vector que exprese las prioridades del grupo. En las igualdades (8) y (9) tenemos la agregación de prioridades individuales mediante la media aritmética y la media geométrica, respectivamente:

$$w_{AIP-AMM} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = \left[\frac{\sum_{k=1}^m w_{1,k}}{m} \quad \frac{\sum_{k=1}^m w_{2,k}}{m} \quad \dots \quad \frac{\sum_{k=1}^m w_{n,k}}{m} \right] \quad (8),$$

$$w_{AIP-GMM} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = \left[\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m w_{1,k}} \quad \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m w_{2,k}} \quad \dots \quad \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m w_{n,k}} \right] \quad (9).$$

Al estar realizando la media de vectores y no de matrices, las propiedades de las matrices no se ven alteradas.

3.2.1.4. AIP-WAMM y AIP-WGMM

De nuevo, si queremos ponderar con pesos a cada uno de los actores, para aquellos casos en los que las partes implicadas tengan distinta importancia, se realizan las correspondientes medias ponderadas WAMM y WGMM. En las igualdades (10) y (11) tenemos las fórmulas correspondientes:

$$w_{AIP-WAMM} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = \left[\frac{\sum_{k=1}^m w_{1,k} \alpha_k}{\sum_{k=1}^m \alpha_k} \quad \frac{\sum_{k=1}^m w_{2,k} \alpha_k}{\sum_{k=1}^m \alpha_k} \quad \dots \quad \frac{\sum_{k=1}^m w_{n,k} \alpha_k}{\sum_{k=1}^m \alpha_k} \right] \quad (10),$$

$$w_{AIP-WGMM} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = \left[\prod_{k=1}^m (w_{1,k})^{\alpha_k} \quad \prod_{k=1}^m (w_{2,k})^{\alpha_k} \quad \dots \quad \prod_{k=1}^m (w_{n,k})^{\alpha_k} \right]^{\frac{1}{\sum_{k=1}^m \alpha_k}} \quad (11).$$

En (11) la potenciación es elemento a elemento.

Los métodos descritos cumplen las condiciones de los consensos. Si todos los expertos opinan lo mismo, es evidente que la opinión consensuada debe ser la misma. Normalmente, AIJ se suele aplicar para los casos en que las opiniones de los actores involucrados son similares ya que las entradas de unas matrices con otras se parecerán bastante y al realizar la media, ésta podrá ser representativa de cada una de las que la componen; por otro lado, AIP resulta más adecuado para aquellas opiniones que son más heterogéneas (Wu *et al.*, 2008).

Finalmente, presentamos de nuevo el proceso de en la Figura 9, esta vez con los métodos de agregación que se van a emplear en el presente trabajo, para mostrar de forma gráfica en qué momento del proceso se localizan cada uno de ellos.

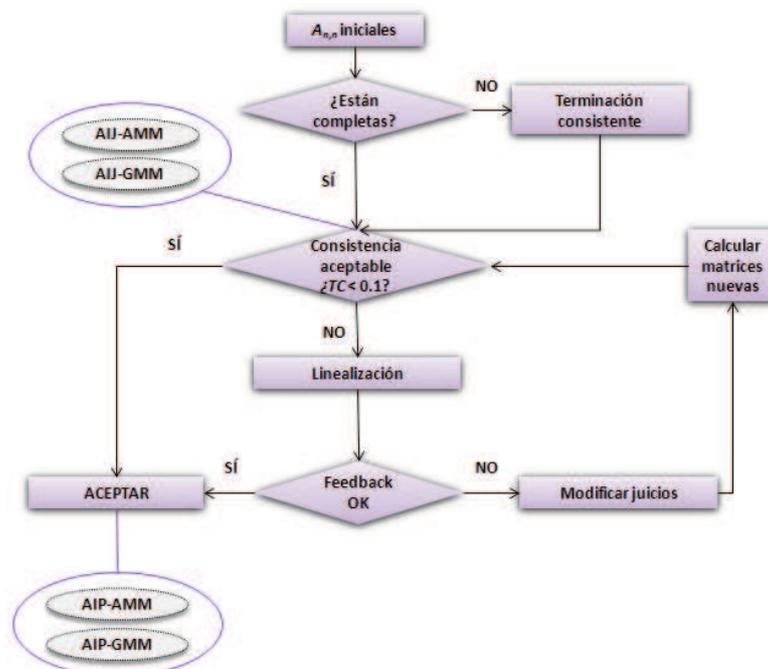


Figura 9. Diagrama de flujo para la solución de compromiso con las metodologías de agregación.

3.2.2. Heterogeneidad en el número de juicios: Terminación consistente de juicios incompletos

En el control de fugas, históricamente sólo los aspectos económicos habían sido contemplados en la gestión de fugas de abastecimientos urbanos. Sin embargo, los aspectos sociales y ambientales han ido poco a poco desempeñando un papel importante en la toma de decisiones. Es normal que para alguna de las partes implicadas, alguno de los aspectos a abordar se escape de sus conocimientos y no

pueda opinar de forma adecuada sobre ellos. En ocasiones, puede que alguno de los actores implicados no esté completamente familiarizado con todos los criterios o tenga un conflicto de intereses, por lo que el cuerpo de opinión queda incompleto. Para superar esta debilidad, el grupo de investigación de Fluing-IMM ha propuesto un marco que permite que los actores implicados puedan emitir sus juicios de forma parcial y/o incompleta estableciendo un mecanismo para obtener una matriz de comparación consistente de una matriz a la que le faltan algunas de sus entradas que se presenta en Izquierdo *et al.*, 2012 y Benítez *et al.*, 2013b.

Este mecanismo tiene como objetivo poder emplear (consistentemente) la información parcial o incompleta que emite un determinado actor, pues únicamente se puede construir una matriz de comparación incompleta, es decir, una matriz en la que algunas entradas, situadas en posiciones simétricas, están vacías.

Una forma de completar las matrices de manera consistente es rellenar con unos aquellas entradas que no han sido completadas por un determinado actor. De esta forma, seguimos cumpliendo las propiedades de positividad de componentes, homogeneidad y reciprocidad que requieren las matrices de comparación, aunque se puede perder la consistencia.

En el siguiente ejemplo muestra que una matriz consistente al ser ampliada con unos puede perder la consistencia. Sea $a > 0$ distinto de 1 y sean:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a^{-1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente A es consistente y sin embargo, la matriz B (que se ha obtenido a partir de A , ampliando ésta con unos) no es consistente, ya que $b_{12}b_{23} = a \cdot 1 = a$ y $b_{13} = 1$ se tiene $b_{12}b_{23} \neq b_{13}$.

En relación a la coherencia, puesto que el actor en cuestión no ha expresado su opinión sobre un determinado criterio, parece lógico que, al compararlo con otro

criterio (comparación entre el elemento i y el elemento j) resulten de igual importancia. De esta forma, si tenemos matrices de diferentes tamaños debido a que actores involucrados no han emitido sus juicios sobre un determinado criterio, podemos alcanzar la homogeneidad en el número de juicios al completar con unos los huecos que sean necesarios y poder así, aplicar las técnicas de agregación de juicios (AIJ-AMM, AIJ-GMM, AIJ-WAMM, AIJ-WGMM, AIP-AMM, AIP-GMM, AIP-WAMM y AIP-WGMM) descritas en el anterior apartado.

En Izquierdo *et al.*, 2012, consideran el siguiente problema:

Problema 1. Sea A una matriz $n \times n$ positiva con algunas de sus entradas simétricas sin definir. ¿Se puede completar esta matriz de forma consistente? En general, la respuesta a este problema es negativa, como se pone de manifiesto con la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & * \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1 & * \\ * & 1/2 & * & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Esta matriz no puede ser completada de manera consistente asignando valores a los asteriscos ya que su rango es mayor o igual a 3 (por tener una submatriz 3×3 no singular) y según se prueba en Benítez *et al.* (2012b), toda matriz consistente es necesariamente de rango 1. A la vista de este contraejemplo, formulamos el siguiente problema.

Problema 2. Sea A una matriz $n \times n$ positiva con algunas entradas simétricas sin especificar. ¿Cómo se puede completar esta matriz de forma que sea lo ‘más consistente’ posible? Tomando logaritmos este problema se puede reformular, dentro del contexto del método de linealización descrito más arriba, de otra forma más precisa.

Problema 3. Sea A una matriz $n \times n$ positiva con algunas entradas simétricas sin especificar. ¿Cómo se puede completar esta matriz de forma que se minimice $d(L(A), \mathcal{L}_n)$?

En este enunciado $d(\cdot, \cdot)$ representa una distancia apropiada.

Este problema tiene un interesante valor añadido. En efecto, permite también dotar de consistencia a una matriz recíproca en la que algunas entradas se consideren intocables, es decir, cuyos valores no se quiere sean modificados en el proceso de mejora de consistencia que se realice con dicha matriz.

Para la matriz (2) el problema 3 se plantea en términos de la matriz:

$$\begin{aligned}
 B(\lambda, \mu) &= \begin{bmatrix} 0 & \log 2 & \log 3 & \lambda \\ -\log 2 & 0 & 0 & \log 2 \\ -\log 3 & 0 & 0 & \mu \\ -\lambda & -\log 2 & -\mu & 0 \end{bmatrix} \\
 &= B_0 + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13) \\
 &= B_0 + \lambda(e_1 e_4^T - e_4 e_1^T) + \mu(e_3 e_4^T - e_4 e_3^T)
 \end{aligned}$$

donde

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & \log 2 & \log 3 & \lambda \\ -\log 2 & 0 & 0 & \log 2 \\ -\log 3 & 0 & 0 & \mu \\ -\lambda & -\log 2 & -\mu & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de ahora utilizaremos la notación:

$$B_{i,j} = e_i e_j^T - e_j e_i^T, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

En general, se puede enunciar el siguiente hecho, simple pero importante,

Proposición 2. Sea A una matriz $n \times n$ positiva con algunas entradas simétricas sin especificar. Existe una matriz $n \times n$ antisimétrica B_0 , y existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tales que:

$$L(A) = B_0 + \sum_{r=1}^k \lambda_r B_{i_r, j_r}$$

Teniendo en cuenta este resultado, el problema 3 puede enunciarse de manera equivalente:

Problema 4. Sea B_0 una matriz $n \times n$ antisimétrica y sean índices $1 \leq i_1, j_1, \dots, i_k, j_k \leq n$, con $i_r < j_r$, $r = 1, \dots, k$. Hallar $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tales que:

$$d(B_0 + \sum_{r=1}^k \lambda_r B_{i_r, j_r}, \mathcal{L}_n) \leq d(B_0 + \sum_{r=1}^k \lambda'_r B_{i_r, j_r}, \mathcal{L}_n), \quad \forall \lambda'_1, \dots, \lambda'_r \in R.$$

Teniendo en cuenta (12), este problema puede ser re enunciado como:

Problema 5. Sea B_0 una matriz $n \times n$ antisimétrica y sean índices $1 \leq i_1, j_1, \dots, i_k, j_k \leq n$, con $i_r < j_r$, $r = 1, \dots, k$. Hallar $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y μ_1, \dots, μ_{n-1} tal que:

$$\left\| B_0 + \sum_{r=1}^k \lambda_r B_{i_r, j_r} - \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s \Phi(y_s) \right\|_F \leq \left\| B_0 + \sum_{r=1}^k \lambda'_r B_{i_r, j_r} - \sum_{s=1}^{n-1} \mu'_s \Phi(y_s) \right\|_F$$

$$\forall \lambda'_1, \dots, \lambda'_r, \mu'_1, \dots, \mu'_{n-1} \in R.$$

En este problema, $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobenius, es decir, $\|X\|_F = \text{traza}(X^T X)$, que es la norma utilizada en Benítez *et al.* (2011b) para definir la distancia $d(\cdot, \cdot)$ entre matrices.

Se puede comprobar, pues, que este problema se reduce a encontrar la distancia mínima entre dos variedades lineales. La solución al problema viene dada por el resultado clásico de la técnica de mínimos cuadrados que puede encontrarse en cualquier libro de álgebra lineal por ejemplo Izquierdo y Torregosa (1999). Omitimos aquí, por brevedad, la demostración (no trivial) de este hecho. El problema se construye de la siguiente manera.

Solución. Sea B_0 una matriz $n \times n$ antisimétrica y sean índices $1 \leq i_1, j_1, \dots, i_k, j_k \leq n$, con $i_r < j_r$, $r = 1, \dots, k$. Sean b_{01}, \dots, b_{0n} las columnas de B_0 , b_{r1}, \dots, b_{rn} las columnas de B_{i_r, j_r} para $1 \leq r \leq k$, y c_{s1}, \dots, c_{sn} las columnas de $\phi_n(y_s)$ para $1 \leq s \leq n-1$. Se definen $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, vectores de n^2 componentes, dados por:

$$\begin{aligned}\beta_0^T &= [b_{01}^T \ \Lambda \ b_{0n}^T], \\ \beta_r^T &= [b_{r1}^T \ \Lambda \ b_{rn}^T], \\ \theta_s^T &= [c_{s1}^T \ \Lambda \ c_{sn}^T].\end{aligned}$$

También se definen:

$$\begin{aligned}M &= [\beta_0 \ \Lambda \ \beta_1 \ \theta_1 \ \Lambda \ \theta_{n-1}], \\ \Lambda &= [-\lambda_1 \ \Lambda \ -\lambda_k \ \mu_1 \ \Lambda \ \mu_{n-1}]^T.\end{aligned}$$

Se resuelve (utilizando mínimos cuadrados) el problema:

$$M^T M \Lambda = M^T b_0.$$

Los valores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ obtenidos se utilizan para construir la matriz dada por la Proposición 1, que resulta ser la proyección de $L(A)$ buscada:

$$p_n(L(A)) = B_0 + \sum_{r=1}^k \lambda_r B_{i_r, j_r}$$

Finalmente, como se indica en el último párrafo de la sección 3, la matriz buscada resulta ser $E(p_n(L(A)))$.

4.APLICACIONES

En este capítulo, se realizará la aplicación de la metodología desarrollada en diferentes procesos de toma de decisiones. La idea es descomponer el problema de forma jerárquica, expresando de forma sencilla y muy gráfica, los principales elementos a tener en cuenta en un problema de estas características clasificándolos entre objetivos, criterios y alternativas. Partiendo de la escala de Saaty (Tabla 1), los actores involucrados realizarán comparaciones de los criterios dos a dos y también de las alternativas según sus conocimientos en la materia.

Se han consultado tres grupos distintos de actores involucrados a empresas de gestión de agua urbana procedentes de España y de México.

En todos los casos, el objetivo es la selección de una política adecuada de gestión de fugas de entre dos principales alternativas que son el control activo de fugas (ALC), es decir, tomar acciones de forma preventiva y, por otro lado, el control pasivo de fugas (PLC) en el que únicamente se reparan las fugas reportadas y evidentes.

Entre los distintos criterios sobre los que los actores implicados emitirán sus juicios, se van a considerar no sólo aspectos técnicos sino también sociales y ambientales como externalidades que se ven afectadas debido a las fugas que se puedan producir en el sistema de abastecimiento. Respecto a los actores implicados, se van a tratar los juicios de tres grupos distintos de expertos que se corresponden con los siguientes grupos de criterios.

En el primer caso, tres expertos emitirán sus juicios sobre cuatro criterios diferentes (Tabla 3); en el segundo caso, cuatro expertos lo harán sobre los cinco criterios que se muestran en la Tabla 4 y, por último, sobre el conjunto de siete criterios, serán cinco expertos los que se tengan en cuenta (Tabla 5).

3 actores	
C1	Coste del desarrollo del plan y su implementación
C2	Daño a bienes muebles, inmuebles y a otras redes de servicio
C3	Corte del suministro
C4	Cierre total o parcial de caminos

Tabla 3. Criterios para tres actores.

4 actores	
C1	Coste del desarrollo del plan y su implementación
C2	Presupuestos y créditos
C3	Recuperación inversión
C4	Coste social
C5	Coste ambiental

Tabla 4. Criterios para cuatro actores.

5 actores	
C1	Coste del desarrollo del plan y su implementación
C2	Daño a bienes muebles, inmuebles y a otras redes de servicio
C3	Corte del suministro
C4	Cierre total o parcial de caminos
C5	Extracciones de agua
C6	Construcción de reservorios
C7	Emisiones de CO ₂

Tabla 5. Criterios para cinco actores.

Una vez establecidos los grupos de actores de los que se ha obtenido la información, definimos los casos que se van a analizar a continuación. Se van a realizar cuatro aplicaciones distintas según los grupos de actores. En las dos primeras aplicaciones, buscaremos el consenso de los grupos de tres actores y cuatro actores respectivamente. En ambos grupos, realizaremos las cuatro metodologías de agregación de juicios, tanto si consideramos todas las opiniones por igual (AIJ-AMM, AIJ-GMM, AIP-AMM y AIP-GMM) como si los actores están ponderados con pesos (AIJ-WAMM, AIJ-WGMM, AIP-WAMM y AIP-WGMM). La tercera aplicación es la de cinco actores, en la que todos los actores tienen igual importancia (AIJ-AMM, AIJ-GMM, AIP-AMM y AIP-GMM).

Además, puede ocurrir que el número de juicios para todos los expertos no coincida pero se requiera la valoración de todos en su conjunto, es decir, que el tamaño de las matrices no sea el mismo y que, para la consideración del grupo en conjunto, algunas matrices tengan ciertas entradas vacías correspondientes a varios criterios sobre los

que el actor no ha emitido su juicio. En la última aplicación realizaremos el consenso de un grupo de ocho actores formado por el primer grupo de tres expertos que opinan sobre cuatro criterios (matrices 4×4) junto con el del grupo de cinco actores opinando sobre siete criterios (matrices 7×7) cuyos cuatro primeros criterios son los mismos que en el primer grupo. Puesto que el tamaño de las matrices no es coincidente y se requiere el consenso de las ocho partes implicadas, se procederá a completar de forma consistente las matrices de 4×4 a matrices de 7×7 , obteniendo un total de ocho matrices de 7×7 .

4.1. Grupo de tres actores

En esta primera aplicación, se tendrá en cuenta la valoración por parte del gestor de la empresa, del encargado del área de proyectos y del encargado del área de reparación de fugas. La jerarquización del problema con cuatro criterios se representa en la Figura 10. En ella podemos observar como el objetivo es la gestión de fugas y los criterios sobre los que emiten sus opiniones los actores son:

- C1: Coste del desarrollo del plan y su implementación.
- C2: Daño a bienes muebles, inmuebles y a otras redes de servicio.
- C3: Corte del suministro.
- C4: Cierre total o parcial de caminos.

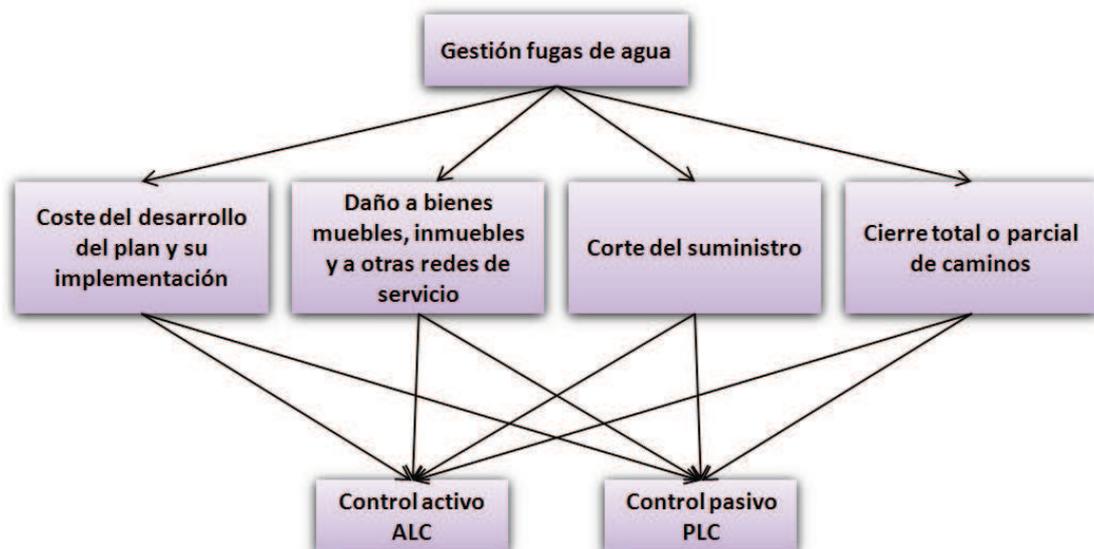


Figura 10. Estructura jerárquica para tres actores.

El proceso determina cuál de las dos alternativas posibles es la más adecuada, bien una evaluación con proyecto y de carácter preventivo (ALC) o una evaluación sin proyecto y reparando únicamente las fugas que son informadas (PLC).

Las matrices de comparación correspondientes a los juicios emitidos según los cuatro criterios de este grupo de actores son las que se presentan en la Tabla 6:

Actor nº 1					Actor nº 2					Actor nº 3				
	C1	C2	C3	C4		C1	C2	C3	C4		C1	C2	C3	C4
C1	1	2	5	7	C1	1	3	5	7	C1	1	5	3	7
C2	1/2	1	5	5	C2	1/3	1	3	5	C2	1/5	1	3	5
C3	1/5	1/5	1	2	C3	1/5	1/3	1	2	C3	1/3	1/3	1	2
C4	1/7	1/5	1/2	1	C4	1/7	1/5	1/2	1	C4	1/7	1/5	1/2	1

Tabla 6. Matrices de comparación de criterios para tres actores.

Además, los actores también han emitido sus juicios de comparación de alternativas según los criterios. Las matrices formadas son las de la Tabla 7.

Actor nº 1					Actor nº 2					
	C1	C2	C3	C4		C1	C2	C3	C4	
ALC	1	5	1	1/3	1	4	1	3	1	3
PLC	1/5	1	3	1	1/4	1	1/3	1	1/2	1

Actor nº 3								
	C1	C2	C3	C4				
ALC	1	7	1	1/5	1	3	1	2
PLC	1/7	1	5	1	1/3	1	1/2	1

Tabla 7. Matrices de comparación de alternativas según criterios para tres actores.

Una vez los expertos han emitido sus juicios y las matrices están formadas, se procede a realizar las cuatro metodologías de agregación de juicios. En primer lugar realizaremos las cuatro metodologías en el caso en que todos los actores tienen igual relevancia (AIJ- AMM, AIJ-GMM, AIP-AMM y AIP-GMM), es decir, todos los juicios están igualmente ponderados.

4.1.1. AIJ-AMM

En primer lugar, se realiza la media aritmética AMM (4) de las matrices presentadas en la Tabla 6. La matriz de la Tabla 8 es la matriz resultante de esta media aritmética y será a la que se le aplique la metodología AHP.

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3.33	4.33	7
C2	0.34	1	3.67	5
C3	0.24	0.29	1	2
C4	0.14	0.2	0.5	1

Tabla 8. Matriz AMM de criterios para tres actores.

De esta matriz, se cumplen los principios de positividad de componentes y homogeneidad. El de reciprocidad no se cumple (habitual al realizar la media aritmética de matrices, a diferencia de la media geométrica que sí lo garantiza). Se han obtenido los valores propios y el vector de Perron que es el vector asociado al máximo valor propio. Este valor máximo en este caso es $\lambda_{\text{máx}} = 4.181$ con lo que el vector que esté asociado al mismo nos proporcionará información sobre la importancia relativa que cada uno de los criterios tiene para valorar las alternativas posibles. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de la tasa de consistencia de $TC=0.0677$ por lo que podemos considerar la matriz lo suficientemente consistente para no aplicar la linealización.

Se obtiene el vector de prioridades o de Perron de la matriz grupal (Tabla 8) que resulta $w = (0.5611 \ 0.2748 \ 0.1052 \ 0.059)^T$. Como se puede observar, los actores consideran que el coste y desarrollo del plan y su implementación es parte fundamental a la hora de tomar las decisiones y según los resultados, influye en más de un 50%. Los dos últimos criterios, a pesar de formar parte a la hora de evaluar las alternativas, no tienen un gran peso en la decisión.

Se procede de la misma manera con las matrices de alternativas respecto a los criterios. Las matrices resultantes de aplicar la media aritmética (4) de las matrices de la Tabla 7 son las que se muestran en la Tabla 9:

	C1		C2		C3		C4	
ALC	1	6.33	1	0.24	1	3.33	1	2.33
PLC	0.17	1	4.33	1	0.31	1	0.44	1

Tabla 9. Matrices AMM de las alternativas según criterios para tres actores.

Se cumple la característica de que todas las matrices de orden $n = 2$ que cumplen las propiedades de homogeneidad, reciprocidad y positividad, son consistentes. Es por esto que obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin la necesidad de calcular el índice de consistencia. Puesto que tenemos cuatro matrices, obtendremos cuatro vectores de prioridades que se presentan en la Tabla 10:

	W _{C1}	W _{C2}	W _{C3}	W _{C4}
ALC	0.862	0.192	0.768	0.697
PLC	0.138	0.808	0.232	0.304

Tabla 10. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas según criterios para tres actores.

Finalmente, del resultado de ponderar las alternativas (Tabla 10) según el vector de prioridades de los criterios, se obtiene el vector de prioridades final para cada alternativa que resulta $W = (0.6583 \ 0.3418)^T$. El valor más alto en w está relacionado con la mejor alternativa y el valor más bajo con la peor alternativa. En este caso, la elección adecuada pasa por aplicar una política activa de gestión de fugas, teniendo en cuenta tanto los costes sociales y el coste del planeamiento en que se puede incurrir en ambas alternativas.

4.1.2. AIJ-GMM

Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior pero realizando la media geométrica GMM (5). La matriz resultante es la que se muestra en la Tabla 11:

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3.11	4.22	7
C2	0.32	1	3.56	5
C3	0.24	0.28	1	2
C4	0.15	0.2	0.5	1

Tabla 11. Matriz GMM de criterios para tres actores.

La GMM cumple los principios de positividad de componentes, homogeneidad y reciprocidad al promediar entre matrices. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de $\lambda_{\text{máx}} = 4.1093$ y un valor de $TC = 0.0409$ por lo que está dentro de los límites de consistencia de $TC \leq 10\%$, incluso se obtiene un valor de TC mejor que cuando se hace la media aritmética. Se obtiene el vector de prioridades de la matriz grupal, sin necesidad de aplicar la linealización, que resulta $w = (0.5567 \ 0.2765 \ 0.1063 \ 0.0605)^T$. Se obtienen resultados bastante parecidos a los del apartado anterior.

Para las alternativas, calculamos las matrices que resultan de realizar la media geométrica de las matrices de la Tabla 7 y los resultados se recogen en la Tabla 12:

	C1	C2	C3	C4
ALC	1	6.26	1	0.24
PLC	0.16	1	4.22	1

Tabla 12. Matrices GMM de alternativas según criterios para tres actores.

Como ya se ha comentado, al ser matrices de orden $n = 2$, obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin calcular el índice de consistencia:

	w _{C1}	w _{C2}	w _{C3}	w _{C4}
ALC	0.862	0.192	0.768	0.696
PLC	0.138	0.808	0.233	0.304

Tabla 13. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas según criterios para tres actores.

Procedemos como en el apartado anterior y obtenemos el vector de prioridades con la evaluación de cada alternativa realizando el producto matricial de los vectores de prioridades de las alternativas (Tabla 13) por el vector de prioridades de los criterios w traspuesto. El resultado de esta operación resulta $W = (0.6567 \ 0.3433)^T$.

4.1.3. AIP-AMM

En este caso, la metodología AHP se aplica a cada una de las matrices de comparación individuales tanto de criterios como de alternativas según los criterios. En cada caso, se ha obtenido la tasa de consistencia de cada matriz de comparaciones de criterios emitida por cada actor (Tabla 6) para comprobar si requieren una mejora de la consistencia. Según el orden de los tres actores, los valores propios máximos de las matrices y las tasas de consistencias de cada una de las matrices son $\lambda_{\text{máx}} = 4.0766$ y $TC = 0.0255$ para la primera matriz; $\lambda_{\text{máx}} = 4.0685$ y $TC = 0.0257$ para la segunda; y los valores de la tercera matriz son $\lambda_{\text{máx}} = 4.2782$ y $TC = 0.1042$. Se observa que las dos primeras matrices están dentro del límite de consistencia aceptable pero la tercera matriz no se puede considerar consistente con lo que requiere la aplicación del proceso de linealización. Puesto que esta matriz es recíproca, se puede aplicar la fórmula simplificada (2). La matriz consistente más próxima a la matriz original se muestra en la Tabla 14 cuyo valor propio máximo es $\lambda_{\text{máx}} = 4$ y la tasa de consistencia $TC = 0$.

	C1	C2	C3	C4
C1	1	2.43	4.66	9.26
C2	0.41	1	1.92	3.81
C3	0.21	0.52	1	1.99
C4	0.11	0.26	0.50	1

Tabla 14. Matriz consistente próxima a la matriz del tercer actor.

En este punto, tal y como se explicaba en el proceso en la Figura 8, se hace necesario establecer un 'feedback' con el actor en cuestión para ver si cree que sus opiniones se ven reflejadas en la nueva matriz calculada. En este caso, el actor otorga el visto bueno con lo que ya tenemos las tres matrices de comparación de criterios para trabajar con

ellas y aplicar la metodología AHP. Tras realizar el proceso en cada una de ellas, los vectores de prioridades que se obtienen de las matrices de comparación de criterios originales (o, en el caso de la tercera, modificada de forma consistente) son $w_1 = (0.5097 \ 0.3351 \ 0.0944 \ 0.0608)^T$, $w_2 = (0.5693 \ 0.2643 \ 0.1055 \ 0.0609)^T$ y $w_3 = (0.5768 \ 0.2372 \ 0.1237 \ 0.0623)^T$ respectivamente.

Para el caso de las matrices de alternativas (Tabla 7), en el que no es necesario el cálculo de TC dado que se trata de matrices 2×2 y cumplen las propiedades de homogeneidad, reciprocidad y positividad de componentes, los vectores de prioridades que se obtienen tras el proceso AHP son los representados en la Tabla 15.

Actor nº 1					Actor nº 2				
	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}		w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.833	0.25	0.8	0.75	ALC	0.875	0.167	0.75	0.667
PLC	0.167	0.75	0.2	0.25	PLC	0.125	0.833	0.25	0.333

Actor nº 3				
	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.875	0.167	0.75	0.667
PLC	0.125	0.833	0.25	0.333

Tabla 15. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales según criterios para tres actores.

Una vez obtenido los vectores de prioridades tanto de criterios como de las alternativas, se obtiene la media aritmética (8) de los mismos. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-AMM} = (0.5519 \ 0.2789 \ 0.1077 \ 0.0613)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio tenemos:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.861	0.195	0.767	0.695
PLC	0.139	0.806	0.233	0.306

Tabla 16. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para tres actores.

Finalmente, para cada alternativa tenemos que, tras realizar el producto de los vectores de prioridades de las alternativas con el traspuesto de los criterios, $W = (0.6546 \ 0.3452)^T$.

4.1.4. AIP-GMM

Para completar este primer grupo de actores en los que sus conocimientos sobre gestión de fugas de agua son considerados por igual, realizaremos el procedimiento anterior (AIP), pero esta vez en vez de emplear la media aritmética, se empleará la media geométrica (9) en los vectores de prioridades obtenidos en AIP-AMM tras la aplicación de AHP (que son los vectores de prioridades w de las matrices de comparación y los vectores de prioridades de las alternativas que se muestran en la Tabla 15). Estos vectores deben ser normalizados. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-GMM} = (0.5536 \ 0.2772 \ 0.1077 \ 0.0616)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio que resultan tras realizar la media se presentan en la Tabla 17:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.862	0.192	0.768	0.696
PLC	0.138	0.808	0.233	0.304

Tabla 17. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para tres actores.

Finalmente, hacemos el producto de los vectores resultantes y obtenemos que la evaluación para cada alternativa es $W = (0.656 \ 0.3441)^T$.

A continuación procedemos a la aplicación de las cuatro metodologías para la evaluación de las alternativas teniendo en cuenta que la opinión de los actores que intervienen no tiene el mismo peso a la hora de tomar decisiones en la gestión de fugas (AIJ- WAMM, AIJ-WGMM, AIP-WAMM y AIP-WGMM). En este caso los pesos para cada actor son se muestran en la Tabla 18:

	Pesos α_i
1. Gestor empresa	0.25
2. Encargado área proyectos	0.35
3. Encargado área reparación fugas	0.4

Tabla 18. Pesos para tres actores.

4.1.5. AIJ-WAMM

En primer lugar, se realiza la media aritmética WAMM (6) de las matrices presentadas en la Tabla 6 teniendo en cuenta los pesos α_i de la Tabla 18 puesto que ahora las opiniones emitidas por los actores no tienen igual importancia a la hora de evaluar las alternativas. La matriz de la Tabla 19 es la matriz resultante de esta media aritmética y será a la que se le aplique la metodología AHP.

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3.55	4.2	7
C2	0.32	1	3.5	5
C3	0.25	0.3	1	2
C4	0.14	0.2	0.5	1

Tabla 19. Matriz WAMM de criterios para tres actores.

La matriz cumple los principios de positividad de componentes y homogeneidad. Sin embargo, no cumple la reciprocidad. El valor propio máximo es $\lambda_{\text{máx}} = 4.191$. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de la tasa de consistencia de $TC = 0.0714$ por lo que no es necesaria la linealización.

Se obtiene el vector de prioridades o de Perron de la matriz grupal (Tabla 19) que resulta $w = (0.5671 \ 0.2669 \ 0.1071 \ 0.0589)^T$, destacando de nuevo el coste de desarrollo del plan y su implementación.

Se procede de la misma manera con las alternativas. Las matrices resultantes de aplicar la media aritmética ponderada WAMM (6) de las matrices de la Tabla 7 según los pesos α_i son las que se muestran en la Tabla 20:

	C1		C2		C3		C4	
ALC	1	6.5	1	0.23	1	3.25	1	2.25
PLC	0.16	1	4.5	1	0.31	1	0.46	1

Tabla 20. Matrices WAMM de las alternativas según criterios para tres actores.

Al ser matrices de orden $n = 2$ que cumplen las propiedades de positividad, reciprocidad y homogeneidad, ya son consistentes. Es por esto que obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin la necesidad de calcular el índice de consistencia. Los cuatro vectores de prioridades que obtenemos se presentan en la Tabla 21:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.865	0.186	0.689	0.689
PLC	0.135	0.815	0.311	0.311

Tabla 21. Vectores de prioridades w de las matrices WAMM de las alternativas según criterios para tres actores.

Finalmente, del resultado de ponderar las alternativas (Tabla 21) según el vector de prioridades de los criterios w , se obtiene el vector de prioridades para cada alternativa que resulta $W = (0.6547 \ 0.3453)^T$. El valor más alto en W está relacionado con la mejor alternativa, en este caso ALC se lleva más de un 65%, y el valor más bajo con la peor alternativa (PLC). En este caso, al aumentar la importancia del actor nº 3 (tiene el mayor peso), entonces de $W = (0.6567 \ 0.3433)^T$ se pasa a $W = (0.6547 \ 0.3453)^T$. La diferencia es prácticamente despreciable aunque la PLC aumenta muy ligeramente. Se podría deducir que, de alguna manera, el tercer actor estaría menos indispuesto a PLC que los restantes actores.

4.1.6. AIJ-WGMM

Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior pero realizando la media geométrica ponderada WGMM (7). La matriz resultante es la que se muestra en la Tabla 22:

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3.33	4.08	7
C2	0.3	1	3.41	5
C3	0.25	0.29	1	2
C4	0.14	0.2	0.5	1

Tabla 22. Matriz WGMM de criterios para tres actores.

La WGMM cumple los principios de positividad de componentes, homogeneidad y reciprocidad al realizar la operación entre matrices. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de $\lambda_{\text{máx}} = 4.1217$ y un valor de $TC = 0.0456$ por lo que está dentro de los límites de consistencia de $IC \leq 10\%$. En este caso, el valor de la tasa de consistencia es menor que la obtenida en WAMM ($TC = 0.0714$). Se obtiene el vector de prioridades de la matriz resultante de la WGMM que resulta ser $w = (0.5627 \ 0.2688 \ 0.1081 \ 0.0603)^T$.

Se realiza la WGMM para las matrices de comparación de alternativas de la Tabla 7 ponderando cada matriz con su correspondiente peso α_i y los resultados se recogen en la Tabla 23:

	C1		C2		C3		C4	
ALC	1	6.44	1	0.23	1	3.22	1	2.21
PLC	0.16	1	4.40	1	0.31	1	0.45	1

Tabla 23. Matrices WGMM de alternativas según criterios para tres actores.

Obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin calcular el índice de consistencia ya que se trata de matrices 2x2:

	w _{C1}	w _{C2}	w _{C3}	w _{C4}
ALC	0.865	0.185	0.763	0.689
PLC	0.135	0.815	0.237	0.311

Tabla 24. Vectores de prioridades w de las matrices WGMM de alternativas según criterios para tres actores.

Procedemos como en el apartado anterior, obteniendo el vector de prioridades con la preferencia para cada alternativa realizando el producto matricial de los vectores de prioridades de los vectores correspondientes. El resultado de esta operación resulta $W = (0.6608 \ 0.3391)^T$. En la GMM se obtenía $W = (0.656 \ 0.3441)^T$, mientras que la WGMM proporciona $(0.6608 \ 0.3391)^T$. Sin embargo, ocurre lo contrario que entre la AMM y la WAMM. Este resultado desmiente el hecho de que el tercer actor este más dispuesto a aplicar un control pasivo de fugas, sino todo lo contrario (más lógico).

4.1.7. AIP-WAMM

Para este apartado recuperaremos los datos del apartado AIP-AMM en el que realizábamos la media aritmética sin ponderar. Tras aplicar la metodología AHP, obteníamos que para las tres matrices originales de la Tabla 6, los vectores de prioridades que se obtenían de las matrices de comparación de criterios originales (o, en el caso de la tercera, modificada de forma consistente) eran $w_1 = (0.5097 \ 0.3351 \ 0.0944 \ 0.0608)^T$, $w_2 = (0.5693 \ 0.2643 \ 0.1055 \ 0.0609)^T$ y $w_3 = (0.5768 \ 0.2372 \ 0.1237 \ 0.0623)^T$ respectivamente. Una vez obtenido los vectores de prioridades, se obtiene la media aritmética ponderada WAMM (10) de estos vectores. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-WAMM} = (0.5574 \ 0.2712 \ 0.11 \ 0.0614)^T$.

Para el caso de las matrices de alternativas (Tabla 7), en el que no es necesario el cálculo de TC dado que se trata de matrices 2×2 , los vectores de prioridades que se obtenían se representaban en la Tabla 15.

Una vez obtenido los vectores de prioridades de las alternativas, se obtiene la media aritmética ponderada (10) de los mismos. Se muestran en la Tabla 25:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.865	0.188	0.763	0.688
PLC	0.135	0.813	0.238	0.313

Tabla 25. Vectores WAMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para tres actores.

Finalmente, para cada alternativa tenemos que, tras realizar el producto de los vectores de prioridades de las alternativas con el traspuesto de los criterios, $W = (0.6589 \ 0.3411)^T$.

4.1.8. AIP-WGMM

Para este último caso, realizaremos el procedimiento anterior (AIP), pero esta vez, en lugar de emplear la media aritmética ponderada, se empleará la media geométrica ponderada (11) en los vectores de prioridades obtenidos en AIP-AMM tras la aplicación de AHP (Tabla 15). El vector de prioridades de los criterios resultante es, ponderando con los pesos α_i y tras su normalización, $w_{AIP-WGMM} = (0.5589 \ 0.2696 \ 0.1098 \ 0.0617)^T$. Respecto a los vectores normalizados de prioridades de las alternativas según cada criterio que resultan tras realizar la media ponderada se presentan en la Tabla 26:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.865	0.185	0.763	0.689
PLC	0.135	0.815	0.237	0.311

Tabla 26. Vectores WGMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para tres actores.

Finalmente, hacemos el producto de los vectores resultantes y obtenemos que la evaluación para cada alternativa es $W = (0.6599 \ 0.3401)^T$. Los vectores que se obtienen en estos dos últimos casos son muy parecidos.

4.2. Grupo de cuatro actores

En este apartado, se tendrán en cuenta cuatro actores distintos. Dos de los expertos realizan labores en España (uno en una empresa de abastecimiento de aguas y otro en el gobierno supervisando obras de renovación) y los otros dos en México (uno en un instituto de investigación mejicano y otro desarrolla proyectos de agua potable). La jerarquización del problema se realizará con cinco criterios que se representan en la Figura 11. En ella podemos observar como el objetivo es la gestión de fugas y los criterios sobre los que emiten sus opiniones los actores son:

- C1: Coste del desarrollo del plan y su implementación.
- C2: Presupuestos y créditos.
- C3: Recuperación inversión.
- C4: Coste social.
- C5: Coste ambiental.

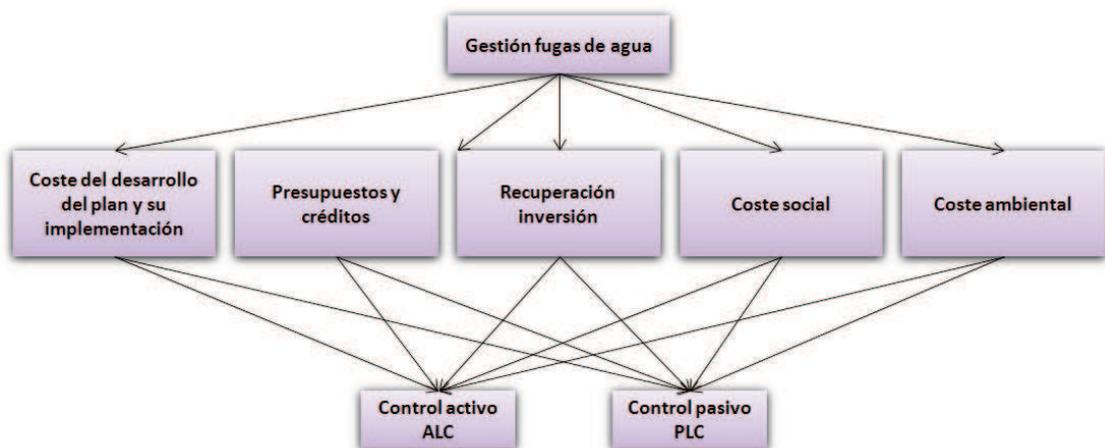


Figura 11. Estructura jerárquica para cuatro actores.

Estos criterios buscan una visión diferente, tratando directamente aspectos económicos y financieros con los tres primeros criterios y, además, teniendo en cuenta los impactos sociales y ambientales que puede provocar todo proyecto de control de fugas de acción preventiva, o las externalidades que se deriven de sólo reparar las fugas que son evidentes en una gestión del control de fugas pasiva.

Las dos alternativas posibles son las mismas que en el caso anterior, bien una evaluación con proyecto y de carácter preventivo (ALC) ó una evaluación sin proyecto y reparando únicamente las fugas que son informadas (PLC).

Las matrices de comparación correspondientes a los juicios emitidos según los cinco criterios de este grupo de actores son las que se presentan en la Tabla 27:

Actor nº 1						Actor nº 2					
	C1	C2	C3	C4	C5		C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1/3	3	7	9	C1	1	1	5	9	7
C2	3	1	1/3	5	7	C2	1	1	5	9	7
C3	1/3	3	1	5	7	C3	1/5	1/5	1	9	5
C4	1/7	1/5	1/5	1	1	C4	1/9	1/9	1/9	1	3
C5	1/9	1/7	1/7	1	1	C5	1/7	1/7	1/5	1/3	1

Actor nº 3						Actor nº 4					
	C1	C2	C3	C4	C5		C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1	5	3	3	C1	1	1/3	5	7	7
C2	1	1	4	3	3	C2	3	1	3	5	5
C3	1/5	1/4	1	1/3	1/3	C3	0.2	1/3	1	3	3
C4	1/3	1/3	3	1	5	C4	1/7	1/5	1/3	1	1
C5	1/3	1/3	3	1/5	1	C5	1/7	1/5	1/3	1	1

Tabla 27. Matrices de comparación de criterios para cuatro actores.

Los actores también han emitido sus juicios de comparación de alternativas según los criterios.

Actor nº 1										
	C1		C2		C3		C4		C5	
ALC	1	3	1	5	1	5	1	3	1	3
PLC	1/3	1	1/5	1	1/5	1	1/3	1	1/3	1

Actor nº 2

	C1		C2		C3		C4		C5	
ALC	1	7	1	9	1	3	1	1	1	5
PLC	1/7	1	1/9	1	1/3	1	1	1	1/5	1

Actor nº 3

	C1		C2		C3		C4		C5	
ALC	1	4	1	3	1	5	1	5	1	4
PLC	1/4	1	1/3	1	1/5	1	1/5	1	1/4	1

Actor nº 4

	C1		C2		C3		C4		C5	
ALC	1	5	1	7	1	3	1	1	1	1
PLC	1/5	1	1/7	1	1/3	1	1	1	1	1

Tabla 28. Matrices de comparación de alternativas según criterios para cuatro actores.

Una vez establecidos los datos, se procede a realizar las cuatro metodologías de agregación de juicios cuando todos los actores son considerados de igual importancia.

4.2.1. AIJ-AMM

La matriz resultante de realizar la media aritmética AMM (4) de las matrices presentadas en la Tabla 27 será a la que se le aplique la metodología AHP. La matriz de la Tabla 29 es la matriz resultante de esta media aritmética.

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	0.67	4.5	6.5	6.5
C2	2	1	3.08	5.5	5.5
C3	0.23	0.95	1	4.33	3.83
C4	0.18	0.21	0.91	1	2.5
C5	0.18	0.21	0.92	0.63	1

Tabla 29. Matriz AMM de criterios para cuatro actores.

De esta matriz, se cumplen los principios de positividad de componentes y homogeneidad. Debido a que trabajamos con la media aritmética, lo más común es que no se cumpla el principio de reciprocidad al realizarla, como ocurre en este caso. Además, se ha obtenido la tasa de consistencia ($TC = 0.3741$) y vemos que supera con creces el 10% admisible. Por tanto, aplicamos linealización a la matriz de la Tabla 29 para hallar la matriz próxima más consistente a la matriz promedio calculada.

Al ser una matriz no recíproca, no podemos emplear la fórmula simplificada de linealización, sino que se aplicará la fórmula genérica, más compleja (1). La matriz consistente que se obtiene se presenta en la Tabla 30:

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1.02	2.76	4.97	6.47
C2	0.93	1	2.71	4.88	6.35
C3	0.36	0.37	1	1.8	2.34
C4	0.2	0.21	0.56	1	1.3
C5	0.15	0.16	0.43	0.77	1

Tabla 30. Matriz AMM de criterios consistente para cuatro actores.

Con esta nueva matriz calculada, se debe establecer un proceso de retroalimentación para que los actores en cuestión muestren su conformidad. Se debe destacar que, precisamente cuando trabajamos con AIJ, es muy probable que si realizamos la media aritmética, la matriz grupal resultante no sea consistente y, tras un proceso de linealización, el ‘feedback’ que se tenga que realizar involucre no sólo a uno de los actores, como en el caso de AIP, sino a todos aquellos cuyas matrices de juicios han intervenido en la media, resultando más complejo el llegar a un consenso. En este caso, los cuatro actores se muestran de acuerdo con la matriz obtenida tras el proceso de linealización, por lo que se procede a aplicar la metodología AHP.

Se obtiene el vector de prioridades o de Perron de la matriz grupal (Tabla 30) que resulta $w = (0.3703 \ 0.3639 \ 0.1341 \ 0.0746 \ 0.0572)^T$. Se puede observar que los aspectos económicos se llevan el grueso de la influencia, aunque hay que tener en

cuenta los aspectos sociales y ambientales que suponen más de un 10% a la hora de tomar decisiones en la gestión de fugas de agua.

Se procede de la misma manera con las alternativas. Las matrices resultantes de aplicar la media aritmética de las matrices de la Tabla 28 son las que se muestran en la Tabla 31:

	C1		C2		C3		C4		C5	
ALC	1	4.55	1	2.5	1	3.92	1	2	1	2.69
PLC	0.22	1	0.4	1	0.26	1	0.5	1	0.37	1

Tabla 31. Matrices AMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.

Estas son las matrices consistentes más próximas que se han obtenido de las matrices que resultan de realizar la media. Puesto que tenemos cinco matrices, obtendremos cinco vectores de prioridades que se presentan en la Tabla 32:

	W _{C1}	W _{C2}	W _{C3}	W _{C4}	W _{C5}
ALC	0.819	0.713	0.795	0.665	0.73
PLC	0.181	0.287	0.205	0.335	0.27

Tabla 32. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.

Finalmente, del resultado de ponderar las alternativas (Tabla 32) según el vector de prioridades de los criterios, se obtiene el vector de prioridades para cada alternativa que resulta $W = (0.7608 \ 0.2393)^T$. La elección pasa por aplicar una política activa de gestión de fugas (76%) cuando influyen fundamentalmente aspectos económicos y financieros y algunas externalidades sociales y ambientales.

4.2.2. AIJ-GMM

Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior pero realizando la media geométrica GMM (5). La matriz resultante es la que se muestra en la Tabla 33:

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	0.58	4.4	6.03	6.03
C2	1.73	1	2.12	5.1	5.21
C3	0.23	0.47	1	2.59	2.43
C4	0.17	0.2	0.39	1	1.97
C5	0.17	0.19	0.41	0.51	1

Tabla 33. Matriz GMM de criterios para cuatro actores.

La GMM cumple los principios de positividad de componentes, homogeneidad y reciprocidad al realizar la operación entre matrices. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de $\lambda_{\text{máx}} = 5.1966$ y un valor de $TC = 0.0443$ por lo que está dentro de los límites de consistencia de $TC \leq 10\%$ (a diferencia del apartado anterior en el que se obtenía una TC altísima). Se obtiene el vector de prioridades de la matriz grupal que resulta $w = (0.3699 \ 0.3716 \ 0.1357 \ 0.0695 \ 0.0533)^T$.

Para las alternativas, calculamos las matrices que resultan de realizar la media geométrica de las matrices de la Tabla 28 y los resultados se recogen en la Tabla 34:

	C1		C2		C3		C4		C5	
ALC	1	4.53	1	3.2	1	3.87	1	1.97	1	2.78
PLC	0.22	1	0.31	1	0.26	1	0.51	1	0.36	1

Tabla 34. Matrices GMM de alternativas según criterios para cuatro actores.

Como ya se ha comentado, al ser matrices de orden $n = 2$, obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin calcular el índice de consistencia:

	w _{C1}	w _{C2}	w _{C3}	w _{C4}	w _{C5}
ALC	0.819	0.762	0.795	0.663	0.736
PLC	0.181	0.238	0.205	0.337	0.2643

Tabla 35. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas según criterios para cuatro actores.

Procedemos como en el apartado anterior y obtenemos el vector de prioridades con la evaluación de cada alternativa realizando el producto matricial de los vectores de

prioridades de las alternativas (Tabla 35) por el vector de prioridades de los criterios w traspuesto. El resultado de esta operación resulta $W = (0.7793 \ 0.2207)^T$.

4.2.3. AIP-AMM

Para este apartado, la metodología AHP se aplica a cada una de las matrices de comparación individuales tanto de criterios como de alternativas. En cada caso, se ha obtenido la tasa de consistencia de cada matriz de comparaciones de criterios emitida por cada actor (Tabla 27) para comprobar si requieren una mejora de la consistencia. Según el orden de los cuatro actores, los valores propios máximos de las matrices y las tasas de consistencias de cada una de las matrices son $\lambda_{\text{máx}} = 5.906$ y $TC = 0.2041$ para la primera matriz; $\lambda_{\text{máx}} = 5.6385$ y $TC = 0.1438$ para la segunda; los valores de la tercera matriz son $\lambda_{\text{máx}} = 5.4211$ y $TC = 0.0948$; por último, $\lambda_{\text{máx}} = 5.3645$ y $TC = 0.0821$. Se observa que las dos primeras matrices no están dentro del límite de consistencia aceptable a diferencia de la tercera y cuarta matriz que sí los son, aunque la tercera está muy próxima al 10% por lo que la consideraremos como no consistente. Se procede a la linealización de las tres primeras matrices. Como son recíprocas, se puede aplicar la fórmula simplificada (2). Las matrices consistentes más próximas a las matrices originales de los actores nº 1, nº 2 y nº 3 se muestran en la Tabla 36 cuyo valor propio máximo es $\lambda_{\text{máx}} = 5$ y la tasa de consistencia $TC = 0$.

Actor nº 1						Actor nº 2					
	C1	C2	C3	C4	C5		C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1.13	1.13	6.43	7.74	C1	1	1	2.81	9.48	11.83
C2	0.89	1	1	5.72	6.88	C2	1	1	2.81	9.48	11.83
C3	0.89	1	1	5.72	6.88	C3	0.36	0.36	1	3.37	4.21
C4	0.16	0.17	0.17	1	1.2	C4	0.11	0.11	0.3	1	1.25
C5	0.13	0.15	0.15	0.83	1	C5	0.08	0.08	0.24	0.8	1

Actor nº 3

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1.05	6.05	1.93	3.68
C2	0.96	1	5.79	1.85	3.52
C3	0.17	0.17	1	0.32	0.61
C4	0.52	0.54	3.13	1	1.9
C5	0.27	0.28	1.64	0.53	1

Tabla 36. Nuevas matrices de criterios consistentes para cuatro actores.

En este punto, tal y como se explicaba en el proceso en la Figura 8, se hace necesario establecer un ‘feedback’ con los actores en cuestión para ver si creen que sus opiniones se ven reflejadas en la nuevas matrices calculadas. En este caso, el actor nº 1 no otorga el visto bueno a su matriz, pero los actores nº 2 y nº 3 sí que están conformes. De esta forma, el actor nº 1 procede a modificar de nuevo su matriz, la cual se muestra en la Tabla 37:

Actor nº 1

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	0.5	2	6.43	7.74
C2	2	1	0.5	5.72	6.88
C3	0.5	2	1	5.72	6.88
C4	0.16	0.17	0.17	1	1.2
C5	0.13	0.15	0.15	0.83	1

Tabla 37. Nueva matriz modificada por el actor nº1.

Esta nueva matriz modificada por el actor requiere la comprobación de la consistencia ya que sus entradas han variado parcialmente. Tras un proceso de AHP, se obtiene un valor propio máximo $\lambda_{\text{máx}} = 5.31$ y una tasa de consistencia $TC = 0.0708$.

Ya tenemos las cuatro matrices de comparación de criterios para trabajar con ellas y aplicar la metodología AHP. Tras realizar el proceso, los vectores de prioridades que se obtienen de las matrices de comparación de criterios originales o modificadas, según el

caso, son $w_1 = (0.3125 \ 0.3027 \ 0.2997 \ 0.0464 \ 0.0386)$, $w_2 = (0.3928 \ 0.3928 \ 0.1398 \ 0.0414 \ 0.0332)^T$, $w_3 = (0.3436 \ 0.2386 \ 0.0568 \ 0.1777 \ 0.0934)^T$ y $w_4 = (0.3391 \ 0.4357 \ 0.1207 \ 0.0523 \ 0.0523)$ respectivamente.

Para el caso de las matrices de alternativas (Tabla 28), en el que no es necesario el cálculo de TC dado que se trata de matrices 2×2 , los vectores de prioridades que se obtienen tras el proceso AHP son los representados en la Tabla 38.

Actor nº 1						Actor nº 2					
	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}		w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.75	0.83	0.83	0.75	0.75	ALC	0.875	0.9	0.75	0.5	0.83
PLC	0.25	0.17	0.17	0.25	0.25	PLC	0.125	0.1	0.25	0.5	0.17

Actor nº 3						Actor nº 4					
	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}		w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.8	0.25	0.83	0.83	0.8	ALC	0.83	0.875	0.75	0.5	0.5
PLC	0.2	0.75	0.17	0.17	0.2	PLC	0.17	0.125	0.25	0.5	0.5

Tabla 38. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales según criterios para cuatro actores.

Una vez obtenido los vectores de prioridades tanto de criterios como de las alternativas, se obtiene la media aritmética (8) de los mismos. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-AMM} = (0.347 \ 0.365 \ 0.154 \ 0.0795 \ 0.0544)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio tenemos:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.814	0.714	0.79	0.645	0.72
PLC	0.186	0.286	0.21	0.355	0.28

Tabla 39. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para cuatro actores.

Finalmente, para cada alternativa tenemos que, tras realizar el producto de los vectores de prioridades de las alternativas con el traspuesto de los criterios, $W = (0.7551 \ 0.2449)^T$.

4.2.4. AIP-GMM

Para completar este primer grupo de actores en los que sus conocimientos sobre gestión de fugas de agua son considerados por igual, realizaremos el procedimiento anterior (AIP), pero esta vez empleando la media geométrica (9) en los vectores de prioridades obtenidos en AIP-AMM tras la aplicación de AHP. El vector de prioridades de los criterios resultante, que deberá ser normalizado, es $w_{AIP-GMM} = (0.3632 \ 0.3793 \ 0.1367 \ 0.068 \ 0.0525)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio que resultan tras realizar la media y normalizarlos se presentan en la Tabla 40:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.818	0.761	0.793	0.662	0.735
PLC	0.182	0.239	0.207	0.338	0.265

Tabla 40. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para cuatro actores.

Finalmente, hacemos el producto de los vectores resultantes y obtenemos que la evaluación para cada alternativa es $W = (0.7776 \ 0.2221)^T$.

4.2.5. AIJ-WAMM

A continuación procedemos a la aplicación de las cuatro metodologías para la evaluación de las alternativas teniendo en cuenta que la opinión de los actores que intervienen no tiene el mismo peso a la hora de tomar decisiones en la gestión de fugas (AIJ- WAMM, AIJ-WGMM, AIP-WAMM y AIP-WGMM). A cada uno se le ha otorgado un peso según la relevancia de sus opiniones que se muestra en la Tabla 41:

	Pesos α_i
1. Empresa abastecimiento España	0.35
2. Gobierno obras renovación España	0.15
3. Instituto investigación México	0.1
4. Proyectos agua potable México	0.4

Tabla 41. Pesos para cuatro actores.

La matriz resultante de realizar la media aritmética ponderada WAMM (6) de las matrices presentadas en la Tabla 21 será a la que se le aplique la metodología AHP. La matriz de la Tabla 42 es la matriz resultante de esta media aritmética ponderada según los pesos α_i .

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	0.5	4.3	6.9	7.3
C2	2	1	2.47	5.4	5.8
C3	0.25	1.24	1	4.33	4.43
C4	0.16	0.2	0.52	1	1.7
C5	0.15	0.19	0.51	0.82	1

Tabla 42. Matriz WAMM de criterios para cuatro actores.

De esta matriz, se cumplen los principios de positividad de componentes y homogeneidad. Al igual que ocurría en la media sin ponderar, y debido a que trabajamos con la media aritmética, no se cumple el principio de reciprocidad y es necesario aplicar la fórmula genérica (1) para hallar la matriz consistente más próxima a la matriz promedio de la Tabla 42. La matriz consistente que se obtiene se presenta en la Tabla 43:

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	0.99	2.27	5.69	6.77
C2	1.01	1	2.3	5.76	6.86
C3	0.44	0.44	1	2.51	2.99
C4	0.18	0.17	0.4	1	1.19
C5	0.15	0.15	0.34	0.84	1

Tabla 43. Matriz WAMM de criterios consistente para cuatro actores.

Se reúne de nuevo a los actores y se les muestra la nueva matriz calculada para comprobar que estén conformes con los cambios. Los cuatro actores se muestran de acuerdo con la matriz obtenida tras el proceso de linealización, por lo que se procede a aplicar la metodología AHP.

Se obtiene el vector de prioridades o de Perron de la matriz grupal (Tabla 43) que resulta $w = (0.36 \ 0.3647 \ 0.1588 \ 0.0633 \ 0.0532)^T$. Se puede observar que los aspectos económicos se llevan el grueso de la influencia, aunque hay que tener en cuenta los aspectos sociales y ambientales que suponen más de un 10% a la hora de tomar decisiones en la gestión de fugas de agua.

Se procede de la misma manera con las alternativas. Las matrices resultantes de aplicar la media aritmética ponderada de las matrices de la Tabla 28 son las que se muestran en la Tabla 44:

	C1		C2		C3		C4		C5	
ALC	1	4.33	1	3.67	1	3.8	1	1.7	1	2.14
PLC	0.23	1	0.27	1	0.27	1	0.57	1	0.47	1

Tabla 44. Matrices WAMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.

Todas las matrices son consistentes porque son matrices de orden $n = 2$ que cumplen las propiedades de homogeneidad, reciprocidad y positividad. Obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin la necesidad de calcular el índice de consistencia. Los cinco vectores de prioridades asociados a las matrices de la Tabla 44 se presentan en la Tabla 45:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.812	0.785	0.791	0.636	0.681
PLC	0.188	0.215	0.209	0.364	0.319

Tabla 45. Vectores de prioridades w de las matrices WAMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.

Finalmente, del resultado de ponderar las alternativas (Tabla 45) según el vector de prioridades de los criterios, se obtiene el vector de prioridades para cada alternativa que resulta $W = (0.7805 \ 0.2195)^T$. Al evaluar las alternativas, se observa como la más adecuada es la de optar por una política de fugas activa (78%) cuando se tienen en cuenta aspectos económicos y financieros y externalidades sociales y ambientales.

4.2.6. AIJ-WGMM

Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior pero realizando la media geométrica ponderada WGMM (7). La matriz resultante es la que se muestra en la Tabla 46:

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	0.44	4.18	6.68	7.02
C2	2.28	1	1.55	5.19	5.62
C3	0.24	0.65	1	3.4	3.5
C4	0.15	0.19	0.29	1	1.39
C5	0.14	0.18	0.29	0.72	1

Tabla 46. Matriz WGMM de criterios para cuatro actores.

La GMM cumple los principios de positividad de componentes, homogeneidad y reciprocidad al realizar la operación entre matrices. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de $\lambda_{\text{máx}} = 5.2933$ y un valor de $TC = 0.0661$ por lo que está dentro de los límites de consistencia de $TC \leq 10\%$. Se obtiene el vector de prioridades de la matriz grupal que resulta $w = (0.3589 \ 0.3778 \ 0.1599 \ 0.0558 \ 0.0476)^T$.

Para las alternativas, calculamos las matrices que resultan de realizar la media geométrica ponderada de las matrices de la Tabla 27 y los resultados se recogen en la Tabla 47:

	C1		C2		C3		C4		C5	
ALC	1	4.3	1	4.77	1	3.78	1	1.73	1	2.15
PLC	0.23	1	0.21	1	0.27	1	0.58	1	0.47	1

Tabla 47. Matrices WGMM de alternativas según criterios para cuatro actores.

Como ya se ha comentado, al ser matrices de orden $n = 2$, obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin calcular el índice de consistencia:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.811	0.827	0.791	0.633	0.682
PLC	0.189	0.173	0.209	0.367	0.318

Tabla 48. Vectores de prioridades w de las matrices WGMM de alternativas según criterios para cuatro actores.

Procedemos como en el apartado anterior y obtenemos el vector de prioridades con la evaluación de cada alternativa realizando el producto matricial de los vectores de prioridades de las alternativas (Tabla 48) por el vector de prioridades de los criterios w traspuesto. El resultado de esta operación resulta $W = (0.7977 \ 0.2023)^T$.

4.2.7. AIP-WAMM

Una vez obtenidos los vectores de prioridades (mediante la metodología AHP) de cada matriz de comparaciones de criterios originales, se realiza la media de estos vectores pero ahora mediante la fórmula (10) que es la que tiene en cuenta los pesos de los actores. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-WAMM} = (0.3383 \ 0.372 \ 0.1798 \ 0.0611 \ 0.0488)^T$. De forma similar, obtenemos los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.806	0.801	0.786	0.621	0.667
PLC	0.194	0.199	0.214	0.379	0.333

Tabla 49. Vectores de prioridades w de las matrices WAMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.

Finalmente, para cada alternativa tenemos que $W = (0.7822 \ 0.2178)^T$.

4.2.8. AIP-WGMM

Empleando los mismos datos obtenidos con el proceso AHP en apartados anteriores, el vector de prioridades de los criterios normalizado resultante es $w_{AIP-WGMM} = (0.3503 \ 0.3812 \ 0.1634 \ 0.0568 \ 0.0483)^T$ tras la aplicación de la media geométrica ponderada para AIP (11). Los vectores de prioridades de las alternativas que se obtienen según cada criterio son:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.810	0.825	0.789	0.633	0.682
PLC	0.190	0.175	0.211	0.368	0.318

Tabla 50. Vectores de prioridades w de las matrices WGMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.

Finalmente, para cada alternativa tenemos que $W = (0.7961 \ 0.2039)^T$. Más adelante, en la sección 4.5 se muestran unas tablas en donde aparecen los vectores de prioridades obtenidos por los distintos métodos.

4.3. Grupo de cinco actores

En este apartado, se tendrán en cuenta cinco actores distintos. Las opiniones han sido proporcionadas por personal del área de proyectos de rehabilitación y también del área de fugas mediante una tormenta de ideas que concluyó en una jerarquización de siete criterios (los cuatro primeros coincidentes con el caso de tres actores) que se representan en la Figura 12. En este caso, no se especifica cada uno de los actores puesto que todos van a tener igual influencia a la hora de evaluar las alternativas. De nuevo el objetivo es la gestión de fugas. Los criterios sobre los que emiten sus opiniones los actores son:

- C1: Coste del desarrollo del plan y su implementación.
- C2: Daño a bienes muebles, inmuebles y a otras redes de servicio.
- C3: Corte del suministro.
- C4: Cierre total o parcial de caminos.
- C5: Extracciones de agua.
- C6: Construcción de reservorios.
- C7: Emisiones de CO₂.

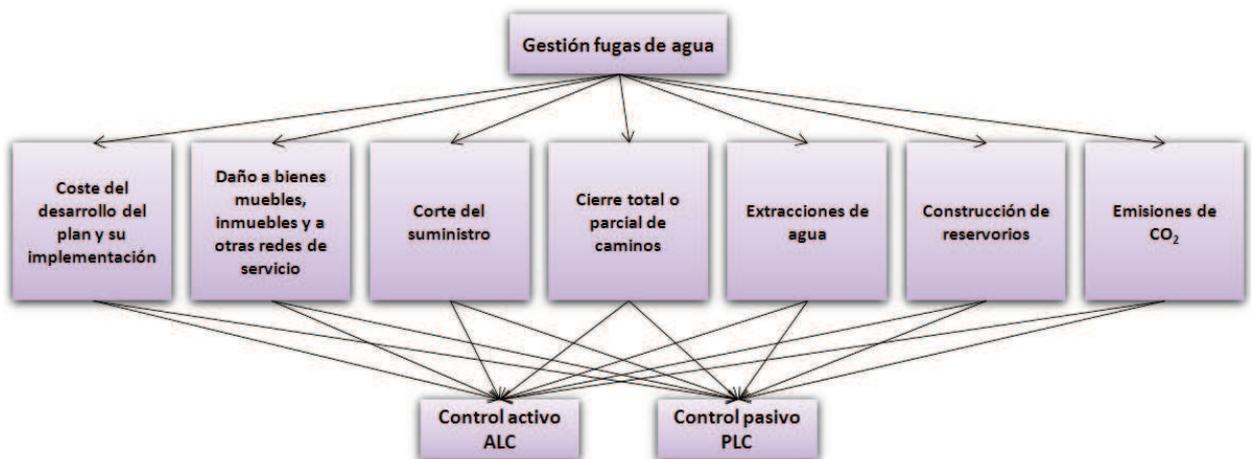


Figura 12. Estructura jerárquica para cinco actores.

Se realizará la evaluación de las dos alternativas ya comentadas anteriormente: ALC y PLC. Las matrices de comparación correspondientes a los juicios emitidos según los siete criterios de este grupo de actores son las siguientes:

Actor nº 1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	2	5	1	7	5	3
C2	1/2	1	2	1/2	5	2	1
C3	1/5	1/2	1	1/5	2	1	1/2
C4	1	2	5	1	7	3	2
C5	1/7	1/5	0.5	1/7	1	1/2	1/4
C6	1/5	1/2	1	1/3	2	1	1/2
C7	1/3	1	2	1/2	4	2	1

Actor nº 2

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1/3	1/5	1	1/4	2	3
C2	3	1	1/2	2	1/3	3	3
C3	5	2	1	4	5	6	5
C4	1	1/2	1/4	1	1/4	1	2
C5	4	3	1/5	4	1	3	1
C6	1/2	1/3	1/6	1	1/3	1	1/3
C7	1/3	1/3	1/5	1/2	1	3	1

Actor nº 3

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1/3	1/5	1	1/4	2	3
C2	3	1	1/2	2	1/3	3	3
C3	5	2	1	4	5	6	5
C4	1	1/2	1/4	1	1/4	1	2
C5	4	3	1/5	4	1	3	1
C6	1/2	1/3	1/6	1	1/3	1	1/3
C7	1/3	1/3	1/5	1/2	1	3	1

Actor nº 4

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	7	9	5	7	5	3
C2	1/7	1	5	9	5	7	5
C3	1/9	1/5	1	7	3	7	3
C4	1/5	1/9	1/7	1	7	5	5
C5	1/7	1/5	1/3	1/7	1	9	7
C6	1/5	1/7	1/7	1/5	1/9	1	5
C7	1/3	1/5	1/3	1/5	1/7	1/5	1

Actor nº 5

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	9	7	9	5	7	9
C2	1/9	1	5	7	1/9	1/5	7
C3	1/7	1/5	1	7	1/9	1/9	9
C4	1/9	1/7	1/7	1	1/9	1/9	5
C5	1/5	9	9	9	1	7	9
C6	1/7	5	9	9	1/7	1	9
C7	1/9	1/7	1/9	1/5	1/9	1/9	1

Tabla 51. Matrices de comparación de criterios para cinco actores.

Los actores también han emitido sus juicios de comparación de alternativas según los criterios.

Actor nº 1

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	9	1	1/5	1	1/5	1	3	1	1/5	1	1/5	1	9
PLC	1/9	1	5	1	5	1	1/3	1	3	1	5	1	1/9	1

Actor nº 2

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	1/8	1	5	1	5	1	1/3	1	4	1	1/5	1	6
PLC	8	1	1/5	1	1/5	1	3	1	1/4	1	5	1	1/6	1

Actor nº 3

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	9	1	1/3	1	1/5	1	1/3	1	1/3	1	1/5	1	9
PLC	1/9	1	3	1	5	1	3	1	3	1	5	1	1/9	1

Actor nº 4

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	7	1	3	1	7	1	7	1	9	1	7	1	5
PLC	1/7	1	1/3	1	1/7	1	1/7	1	1/9	1	1/7	1	1/5	1

Actor nº 5

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	9	1	5	1	7	1	7	1	7	1	1/5	1	1/5
PLC	1/9	1	1/5	1	1/7	1	1/7	1	1/7	1	5	1	5	1

Tabla 52. Matrices de comparación de alternativas según criterios para cinco actores.

Una vez establecidos los datos, se procede a realizar las cuatro metodologías de agregación de juicios (AIJ-AMM, AIJ-GMM, AIP-AMM y AIP-GMM) sin ponderar a los actores.

4.3.1. AIJ-AMM

La matriz resultante de realizar la media aritmética AMM (4) de las matrices presentadas en la Tabla 51 será a la que se le aplique la metodología AHP. La matriz de la Tabla 53 es la matriz resultante de esta media aritmética.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	5.07	4.84	4.2	5.65	4.4	4.6
C2	0.78	1	3.1	4.3	3.09	3.04	3.8
C3	1.16	0.65	1	3.68	2.09	3.42	4.1
C4	0.5	0.62	2.11	1	4.67	2.42	2.87
C5	0.92	2.52	2.61	2.68	1	4.5	3.49
C6	0.28	1.26	2.13	2.17	0.58	1	3.03
C7	0.26	0.4	0.6	0.88	2.05	1.66	1

Tabla 53. Matriz AMM de criterios para cinco actores.

Aunque se cumplen los principios de positividad de componentes y homogeneidad, al haber realizado la media aritmética, no ocurre lo mismo con la característica de reciprocidad. Por lo tanto, la matriz no es consistente ($TC = 0.853$) y requiere un proceso de linealización mediante la fórmula genérica (1), por la imposibilidad de emplear la simplificada al tratarse de una matriz no recíproca. La matriz próxima más consistente a la matriz de la Tabla 53 se muestra en la Tabla 54:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.76	2.56	3.06	2.47	3.76	4.89
C2	0.57	1	1.45	1.74	1.4	2.14	2.78
C3	0.39	0.69	1	1.2	0.97	1.47	1.92
C4	0.33	0.58	0.84	1	0.81	1.23	1.6
C5	0.41	0.71	1.03	1.24	1	1.52	1.98
C6	0.27	0.47	0.68	0.81	0.66	1	1.3
C7	0.20	0.36	0.52	0.63	0.51	0.77	1

Tabla 54. Matriz AMM de criterios consistente para cinco actores.

Con esta nueva matriz calculada, se debe establecer un proceso de ‘feedback’ para que los actores en cuestión muestren su conformidad. Este proceso de retroalimentación resulta más complejo porque son cinco actores los que tienen que mostrar su conformidad con los cambios realizados en una única matriz. En este caso, los cinco actores modifican parcialmente las entradas de esta nueva matriz porque no consideran que su opinión esté completamente representada en la misma. De esta forma, cada actor modifica la matriz de la Tabla 54 según su consideración, representando las nuevas matrices de cada uno de ellos en la Tabla 55.

Actor nº 1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.76	3	3	4	4	4.5
C2	0.57	1	1.45	1	3	2.14	2
C3	0.33	0.69	1	1.2	1.5	1.47	1
C4	0.33	1	0.84	1	4	2	1.6
C5	0.25	0.33	0.67	0.25	1	1	1
C6	0.25	0.47	0.68	0.5	1	1	1
C7	0.22	0.5	1	0.63	1	1	1

Actor nº 2

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.5	1	2	1	3	4
C2	0.67	1	1.45	1.74	1	2.14	2.78
C3	1	0.69	1	2	3	3	3
C4	0.5	0.58	0.5	1	0.81	2	1.6
C5	1	1	0.33	1.24	1	2	1.98
C6	0.33	0.47	0.33	0.5	0.5	1	0.5
C7	0.25	0.36	0.33	0.63	0.51	2	1

Actor nº 3

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	4	2.56	3.06	4	3.76	4.9
C2	0.25	1	2	2	3	2.14	2.78
C3	0.39	0.5	1	1.2	0.97	2	1.92
C4	0.33	0.5	0.84	1	5	1.23	1
C5	0.25	0.33	1.04	0.2	1	1.52	1
C6	0.27	0.47	0.5	0.81	0.66	1	1
C7	0.2	0.36	0.52	1	1	1	1

Actor nº 4

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	3	5	3.06	4	3.76	4.89
C2	0.33	1	4	5	2	4	2.78
C3	0.2	0.25	1	4	2	4	1.92
C4	0.33	0.2	0.25	1	3	3	3
C5	0.25	0.5	0.5	0.33	1	5	4
C6	0.27	0.25	0.25	0.33	0.2	1	4
C7	0.2	0.36	0.52	0.33	0.25	0.25	1

Actor nº 5

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	5	4	5	2.47	4	6
C2	0.2	1	3	3	1	1	5
C3	0.25	0.33	1	3	0.97	0.5	6
C4	0.2	0.33	0.33	1	0.81	0.5	4
C5	0.41	1	1.04	1.24	1	4	6
C6	0.25	1	2	2	0.25	1	6
C7	0.17	0.2	0.17	0.25	0.17	0.17	1

Tabla 55. Nuevas matrices de comparación de criterios modificadas por los cinco actores a partir de la matriz grupal.

Aplicando de nuevo la media aritmética AMM (4), obtenemos la nueva matriz grupal que se presenta en la Tabla 56:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	3.05	3.11	3.22	3.1	3.71	4.86
C2	0.4	1	2.38	2.55	2	2.28	3.07
C3	0.43	0.49	1	2.28	1.69	2.2	2.77
C4	0.34	0.52	0.55	1	2.72	1.75	2.24
C5	0.43	0.63	0.71	0.65	1	2.71	2.8
C6	0.27	0.53	0.75	0.83	0.52	1	2.5
C7	0.21	0.36	0.51	0.57	0.58	0.88	1

Tabla 56. Nueva matriz AMM de criterios para cinco actores tras las modificaciones.

No se trata de una matriz recíproca, por lo que procedemos a aplicar linealización para obtener la matriz consistente más próxima. El resultado, en la Tabla 57:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.78	2.44	3.07	3.17	4.31	5.94
C2	0.56	1	1.37	1.72	1.73	2.42	3.34
C3	0.41	0.73	1	1.26	1.30	1.77	2.44
C4	0.33	0.58	0.8	1	1.04	1.41	1.94
C5	0.32	0.56	0.77	0.97	1	1.36	1.87
C6	0.23	0.41	0.57	0.71	0.74	1	1.38
C7	0.17	0.3	0.41	0.52	0.53	0.73	1

Tabla 57. Nueva matriz AMM de criterios consistente para cinco actores tras las modificaciones.

En este caso, todos los actores ya están de acuerdo con la nueva matriz por lo que procedemos a aplicar la metodología AHP. Se obtiene el vector de prioridades o de Perron de la matriz grupal (Tabla 57) que resulta $w = (0.3318 \ 0.1865 \ 0.1361 \ 0.1082 \ 0.1045 \ 0.077 \ 0.0559)^T$.

Se procede de la misma manera con las alternativas. Las matrices resultantes de aplicar la media aritmética de las matrices de la Tabla 52 son las que se muestran en la Tabla 58:

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	2.04	1	1.24	1	1.36	1	1.6	1	1.78	1	0.62	1	2.28
PLC	0.5	1	0.8	1	0.74	1	0.61	1	0.56	1	1.61	1	0.44	1

Tabla 58. Matrices AMM de las alternativas según criterios para cinco actores.

De nuevo, recordamos que todas las matrices de orden $n = 2$ que cumplen las propiedades de homogeneidad, reciprocidad y positividad, son consistentes. Es por esto que obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin la necesidad de calcular el índice de consistencia. Obtenemos un vector de prioridades por cada matriz y los presentamos en la Tabla 59:

	W _{C1}	W _{C2}	W _{C3}	W _{C4}	W _{C5}	W _{C6}	W _{C7}
ALC	0.667	0.555	0.576	0.62	0.641	0.384	0.696
PLC	0.333	0.446	0.424	0.38	0.359	0.616	0.304

Tabla 59. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas según criterios para cinco actores.

Finalmente, del resultado de ponderar las alternativas (Tabla 59) según el vector de prioridades de los criterios, se obtiene el vector de prioridades para cada alternativa que resulta $W = (0.6058 \ 0.3942)^T$.

4.3.2. AIJ-GMM

Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior pero realizando la media geométrica GMM (5). La matriz resultante es la que se muestra en la Tabla 60:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	3.12	2.85	2.95	3.53	4.02	4.14
C2	0.32	1	2.37	2.86	1.36	1.91	3.16
C3	0.35	0.42	1	1.51	1.02	1.7	2.89
C4	0.34	0.35	0.66	1	1.65	1.38	2.02
C5	0.28	0.74	0.98	0.61	1	3.09	1.26
C6	0.25	0.52	0.59	0.72	0.32	1	1.20
C7	0.24	0.32	0.35	0.5	0.8	0.83	1

Tabla 60. Matriz GMM de criterios para cinco actores.

La GMM cumple los principios de positividad de componentes, homogeneidad y reciprocidad al realizar la operación entre matrices. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de $\lambda_{\text{máx}} = 7.3146$ y un valor de $TC = 0.0388$ por lo que está dentro de los límites de consistencia de $TC \leq 10\%$ (recordemos que cuando se realizaba la AMM el valor de la tasa de consistencia era muy elevado). Se obtiene el vector de prioridades de la matriz grupal que resulta $w = (0.3435 \ 0.1865 \ 0.1215 \ 0.1056 \ 0.1124 \ 0.0698 \ 0.0608)^T$. Para las alternativas, calculamos las matrices que resultan de realizar la media geométrica de las matrices de la Tabla 52 y los resultados se recogen en la Tabla 61:

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	3.64	1	1.38	1	1.58	1	1.75	1	1.95	1	0.41	1	3.45
PLC	0.28	1	1.73	1	0.63	1	0.57	1	0.51	1	2.46	1	0.29	1

Tabla 61. Matrices GMM de alternativas según criterios para cinco actores.

Como ya se ha comentado, al ser matrices de orden $n = 2$, obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin calcular el índice de consistencia:

	w _{C1}	w _{C2}	w _{C3}	w _{C4}	w _{C5}	w _{C6}	w _{C7}
ALC	0.784	0.58	0.612	0.636	0.661	0.289	0.775
PLC	0.216	0.42	0.388	0.364	0.339	0.711	0.225

Tabla 62. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas según criterios para cinco actores.

Procedemos como en el apartado anterior y obtenemos el vector de prioridades con la evaluación de cada alternativa realizando el producto matricial de los vectores de prioridades de las alternativas (Tabla 62) por el vector de prioridades de los criterios w traspuesto. El resultado de esta operación resulta $W = (0.6607 \ 0.3394)^T$. Con la media aritmética se obtenía $W = (0.6058 \ 0.3942)^T$. Ya no son similares los resultados.

4.3.3. AIP-AMM

Para este apartado, la metodología AHP se aplica a cada una de las matrices de comparación individuales tanto de criterios como de alternativas. En cada caso, se ha

obtenido la tasa de consistencia de cada matriz de comparaciones de criterios emitida por cada actor (Tabla 51) para comprobar si requieren una mejora de la consistencia. Según el orden de los cinco actores, los valores propios máximos de las matrices y las tasas de consistencias de cada una de las matrices son $\lambda_{\text{máx}} = 7.0492$ y $TC = 0.0061$ para la primera matriz; $\lambda_{\text{máx}} = 7.8878$ y $TC = 0.1096$ para la segunda; los valores de la tercera matriz son $\lambda_{\text{máx}} = 9.4977$ y $TC = 0.3084$; para la cuarta tenemos $\lambda_{\text{máx}} = 10.5606$ y $TC = 0.4396$; por último, $\lambda_{\text{máx}} = 9.4588$ y $TC = 0.3036$. Se observa que la primera matriz está dentro del límite de consistencia aceptable a diferencia del resto de matrices que no lo son. Se procede a la linealización de las cuatro últimas matrices. Como son recíprocas, se puede aplicar la fórmula simplificada (2). Las matrices consistentes más próximas a las matrices originales de los actores nº 2, nº 3, nº 4 y nº 5 se muestran en la Tabla 63 cuyo valor propio máximo es $\lambda_{\text{máx}} = 7$ y la tasa de consistencia $TC = 0$.

Actor nº 2

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	0.53	0.21	1.07	0.45	1.64	1.17
C2	1.9	1	0.4	2.03	0.85	3.13	2.23
C3	4.82	2.53	1	5.15	2.14	7.91	5.63
C4	0.94	0.49	0.19	1	0.42	1.54	1.09
C5	2.25	1.18	0.47	2.4	1	3.69	2.63
C6	0.61	0.32	0.13	0.65	0.27	1	0.71
C7	0.85	0.45	0.18	0.91	0.38	1.41	1

Actor nº 3

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	2.19	5.77	3.35	8.49	10.05	3.92
C2	0.46	1	2.63	1.53	3.87	4.58	1.79
C3	0.17	0.38	1	0.58	1.47	1.74	0.68
C4	0.3	0.66	1.72	1	2.54	3	1.17
C5	0.12	0.26	0.68	0.39	1	1.18	0.46
C6	0.1	0.22	0.57	0.33	0.85	1	0.39
C7	0.26	0.56	1.47	0.86	2.17	2.56	1

Actor nº 4

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.62	3.19	4.81	6.28	13.28	15.93
C2	0.62	1	1.97	2.97	3.88	8.19	9.83
C3	0.31	0.51	1	1.51	1.97	4.16	4.99
C4	0.21	0.34	0.66	1	1.31	2.76	3.31
C5	0.16	0.26	0.51	0.77	1	2.11	2.54
C6	0.08	0.12	0.24	0.36	0.47	1	1.2
C7	0.06	0.1	0.2	0.3	0.39	0.83	1

Actor nº 5

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	6.05	9.69	19.99	1.53	3.04	32.82
C2	0.17	1	1.6	3.31	0.25	0.5	5.43
C3	0.1	0.62	1	2.06	0.16	0.31	3.39
C4	0.05	0.3	0.49	1	0.08	0.15	1.64
C5	0.66	3.96	6.35	13.09	1	1.99	21.48
C6	0.33	1.99	3.19	6.58	0.5	1	10.8
C7	0.03	0.18	0.3	0.61	0.05	0.09	1

Tabla 63. Nuevas matrices de criterios consistentes para cinco actores.

Procedemos al ‘feedback’ con los actores en cuestión para ver si creen que sus opiniones se ven reflejadas en las nuevas matrices calculadas. Todos están de acuerdo.

Ya tenemos las cinco matrices de comparación de criterios para trabajar con ellas y aplicar la metodología AHP. Tras realizar el proceso, los vectores de prioridades que se obtienen de las matrices de comparación de criterios originales o modificadas, según el caso, son:

- $w_1 = (0.3019 \ 0.1398 \ 0.0635 \ 0.2644 \ 0.0342 \ 0.0685 \ 0.1278)^T$,
- $w_2 = (0.4287 \ 0.0709 \ 0.0442 \ 0.0214 \ 0.2806 \ 0.141 \ 0.0131)^T$,
- $w_3 = (0.4166 \ 0.1899 \ 0.0722 \ 0.1244 \ 0.0491 \ 0.0415 \ 0.1063)^T$,
- $w_4 = (0.4106 \ 0.2533 \ 0.1286 \ 0.0854 \ 0.0654 \ 0.0309 \ 0.0258)^T$
- $w_5 = (0.4287 \ 0.0709 \ 0.0442 \ 0.0214 \ 0.2806 \ 0.141 \ 0.0131)^T$.

Para el caso de las matrices de alternativas (Tabla 52), en el que no es necesario el cálculo de TC dado que se trata de matrices 2×2 , los vectores de prioridades que se obtienen tras el proceso AHP son los representados en la Tabla 64.

Actor nº 1

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.9	0.17	0.17	0.75	0.25	0.17	0.9
PLC	0.1	0.83	0.83	0.25	0.75	0.83	0.1

Actor nº 2

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.11	0.83	0.83	0.25	0.8	0.17	0.86
PLC	0.89	0.17	0.17	0.75	0.2	0.83	0.14

Actor nº 3

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.9	0.25	0.17	0.25	0.25	0.17	0.9
PLC	0.1	0.75	0.83	0.75	0.75	0.83	0.1

Actor nº 4

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.875	0.75	0.875	0.875	0.9	0.875	0.833
PLC	0.125	0.25	0.125	0.125	0.1	0.125	0.166

Actor nº 5

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.9	0.83	0.875	0.875	0.875	0.17	0.17
PLC	0.1	0.17	0.125	0.125	0.125	0.83	0.83

Tabla 64. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales para cinco actores.

Una vez obtenido los vectores de prioridades tanto de criterios como de las alternativas, se obtiene la media aritmética (8) de los mismos. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-AMM} = (0.3973 \ 0.14496 \ 0.07054 \ 0.1034 \ 0.14198 \ 0.08458 \ 0.05722)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio tenemos:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.737	0.566	0.584	0.6	0.615	0.311	0.733
PLC	0.263	0.434	0.416	0.4	0.385	0.689	0.267

Tabla 65. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas para cinco actores.

Finalmente, para cada alternativa tenemos que, tras realizar el producto de los vectores de prioridades de las alternativas con el traspuesto de los criterios, $W = (0.6336 \ 0.3663)^T$.

4.3.4. AIP-GMM

Para completar este primer grupo de actores en los que sus conocimientos sobre gestión de fugas de agua son considerados por igual, realizaremos el procedimiento anterior (AIP), pero esta vez en vez de emplear la media aritmética, se empleará la media geométrica (9) en los vectores de prioridades obtenidos en AIP-AMM tras la aplicación de AHP. Estos vectores deben ser normalizados. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-GMM} = (0.46 \ 0.1490 \ 0.0758 \ 0.0775 \ 0.1134 \ 0.0824 \ 0.042)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio que resultan tras realizar la media se presentan en la Tabla 66:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.784	0.579	0.613	0.636	0.661	0.293	0.777
PLC	0.216	0.421	0.387	0.364	0.34	0.707	0.223

Tabla 66. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para cinco actores.

Finalmente, hacemos el producto de los vectores resultantes y obtenemos que la evaluación para cada alternativa es $W = (0.6744 \ 0.3257)^T$. En AIP-AMM se había obtenido: $W = (0.6336 \ 0.3663)^T$. Se observa que la desviación entre AIP-AMM y AIP-AMM es mayor que con la geométrica. Además del hecho de que la reciprocidad se mantiene con la media geométrica, se induce que la geométrica se comporta mejor que la aritmética.

4.4. Grupo de ocho actores

En esta sección, el grupo estará formado por 8 actores. Cinco de ellos procedentes de una empresa de abastecimiento de agua en México, de igual relevancia, que emiten juicios sobre los siete criterios de la Tabla 5 considerados y que se trata de las opiniones vertidas en el caso anterior para cinco actores; los otros tres serán los correspondientes al primer grupo analizado que opinan sobre los cuatro criterios de la Tabla 3, coincidentes con los cuatro primeros de la Tabla 5. De esta forma se tendrán ocho matrices, algunas de ellas rellenas con unos que es una forma de completar de forma consistente y coherente puesto que, si el actor en cuestión no ha opinado sobre ese criterio, es porque no lo considera relevante sobre otro. De forma gráfica, se muestra en la Figura 13 la formación de las matrices de comparación que se van a emplear para este apartado.

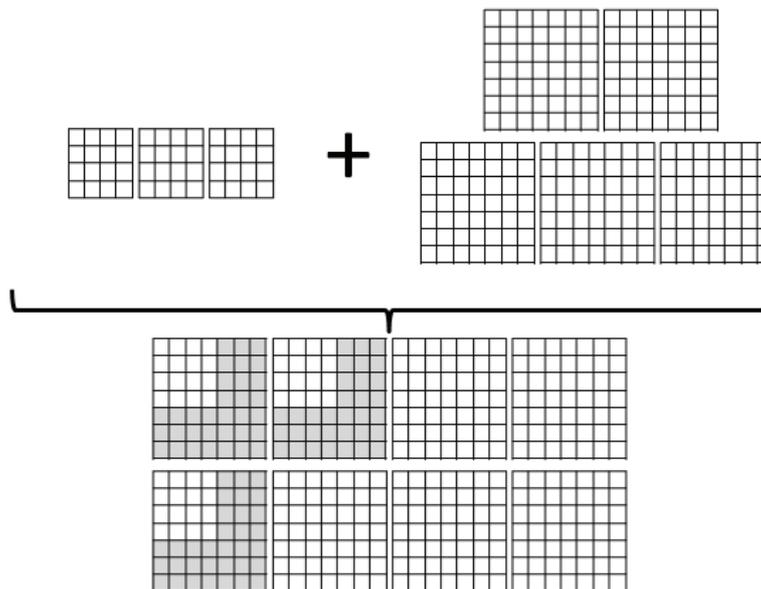


Figura 13. Formación de las matrices de comparación de criterios para ocho actores.

El problema sigue la misma jerarquización que en la Figura 12 con siete criterios, con el objetivo de la gestión de fugas y la evaluación de las dos alternativas ALC y PLC.

Así, las matrices de comparación a emplear serán las correspondientes a la Tabla 51 (cinco actores opinan sobre siete criterios) y habrá que añadir las que se muestran en la Tabla 67, estas últimas son las pertenecientes a las opiniones vertidas por el conjunto de tres actores y rellenas con unos, para los criterios C5, C6 y C7 que son

aquellos sobre los que no han vertido ninguna opinión y es la forma más natural ya que denota desconocimiento entre dos opciones.

Actor nº 6							
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	2	5	7	1	1	1
C2	1/2	1	5	5	1	1	1
C3	1/5	1/5	1	2	1	1	1
C4	1/7	1/5	1/2	1	1	1	1
C5	1	1	1	1	1	1	1
C6	1	1	1	1	1	1	1
C7	1	1	1	1	1	1	1

Actor nº 7							
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	3	5	7	1	1	1
C2	1/3	1	3	5	1	1	1
C3	1/5	1/3	1	2	1	1	1
C4	1/7	1/5	1/2	1	1	1	1
C5	1	1	1	1	1	1	1
C6	1	1	1	1	1	1	1
C7	1	1	1	1	1	1	1

Actor nº 8							
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	5	3	7	1	1	1
C2	1/5	1	3	5	1	1	1
C3	1/3	1/3	1	2	1	1	1
C4	1/7	1/5	1/2	1	1	1	1
C5	1	1	1	1	1	1	1
C6	1	1	1	1	1	1	1
C7	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 67. Matrices de comparación de criterios rellenas con unos para ocho actores.

Las matrices de comparación de alternativas según los criterios que han emitido los actores serán las de la Tabla 52 (cinco actores) más las que se muestran a continuación en la Tabla 68 que hacen un total de ocho grupos de matrices. Hay que señalar que aquellas matrices de comparación de alternativas respecto a los criterios C5, C6 y C7 para estos tres últimos actores (actores nº 6, nº 7 y nº 8) han sido rellenas también con unos.

Actor nº 6														
	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	5	1	1/3	1	1/4	1	3	1	1	1	1	1	1
PLC	1/5	1	3	1	4	1	1/3	1	1	1	1	1	1	1

Actor nº 7														
	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	7	1	1/5	1	3	1	2	1	1	1	1	1	1
PLC	1/7	1	5	1	1/3	1	1/2	1	1	1	1	1	1	1

		Actor nº 8													
		C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC		1	7	1	1/5	1	1/3	1	2	1	1	1	1	1	1
PLC		1/7	1	5	1	3	1	1/2	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 68. Matrices de comparación de alternativas según criterios para ocho actores.

Procedemos como en el resto de aplicaciones, con las diferentes metodologías de agregación.

4.4.1. AIJ-AMM

La matriz resultante de realizar la media aritmética AMM (4) de las matrices presentadas en la Tabla 51 y la Tabla 67 será a la que se le aplique la metodología AHP. La matriz de la Tabla 69 es la matriz resultante de esta media aritmética.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	4.42	4.65	5.25	3.91	3.13	3.25
C2	0.62	1	3.31	4.56	2.31	2.28	2.75
C3	0.82	0.51	1	3.05	1.68	2.51	2.94
C4	0.37	0.46	1.51	1	3.3	1.89	2.17
C5	0.95	1.95	2	2.05	1	3.19	2.56
C6	0.55	1.16	1.71	1.73	0.74	1	2.27
C7	0.54	0.63	0.75	0.93	1.66	1.41	1

Tabla 69. Matriz AMM de criterios para ocho actores.

Aunque se cumplen los principios de positividad de componentes y homogeneidad, al haber realizado la media aritmética, no ocurre lo mismo con la característica de reciprocidad. Por lo tanto, la matriz no es consistente y requiere un proceso de linealización mediante la fórmula genérica (1), ya que la matriz no es recíproca. La matriz próxima más consistente a la matriz de la Tabla 69 se muestra en la Tabla 70:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.63	2.47	3.04	2.24	2.96	3.55
C2	0.62	1	1.52	1.87	1.38	1.82	2.18
C3	0.41	0.66	1	1.23	0.91	1.2	1.43
C4	0.33	0.54	0.81	1	0.74	0.97	1.17
C5	0.45	0.73	1.1	1.36	1	1.32	1.58
C6	0.34	0.55	0.83	1.03	0.76	1	1.2
C7	0.28	0.46	0.7	0.86	0.63	0.84	1

Tabla 70. Matriz AMM de criterios consistente para ocho actores.

Con esta nueva matriz calculada, se debe establecer un proceso de ‘feedback’ para que los actores en cuestión estén de acuerdo con los cambios realizados. Son ocho los actores que tienen que mostrar su conformidad, lo cual dificulta el proceso. En este caso, todos los actores ya están de acuerdo con la nueva matriz por lo que procedemos a aplicar la metodología AHP directamente. Se obtiene el vector de prioridades o de Perron de la matriz grupal (Tabla 70) que resulta $w = (0.2929 \ 0.18 \ 0.1187 \ 0.0963 \ 0.1306 \ 0.0989 \ 0.0826)^T$.

Procedemos ahora con las alternativas. Las matrices resultantes de aplicar la media aritmética de las matrices de la Tabla 52 y la Tabla 68 son las que se muestran en la Tabla 71:

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	2.44	1	0.81	1	1.6	1	1.76	1	1.58	1	0.68	1	1.94
PLC	0.41	1	1.24	1	0.62	1	0.57	1	0.63	1	1.46	1	0.52	1

Tabla 71. Matrices AMM de las alternativas según criterios para ocho actores.

De nuevo, recordamos que todas las matrices de orden $n = 2$ que cumplen las propiedades de homogeneidad, reciprocidad y positividad, son consistentes. Obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin la necesidad de calcular el índice de consistencia. Obtenemos un vector de prioridades por cada matriz y los presentamos en la Tabla 72:

	w _{C1}	w _{C2}	w _{C3}	w _{C4}	w _{C5}	w _{C6}	w _{C7}
ALC	0.709	0.447	0.616	0.638	0.612	0.406	0.659
PLC	0.291	0.553	0.384	0.362	0.388	0.594	0.341

Tabla 72. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas según criterios para ocho actores.

Finalmente, del resultado de ponderar las alternativas (Tabla 72) según el vector de prioridades de los criterios, se obtiene el vector de prioridades para cada alternativa que resulta $W = (0.5972 \ 0.4028)^T$.

4.4.2. AIJ-GMM

Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior pero realizando la media geométrica GMM (5). La matriz resultante es la que se muestra en la Tabla 73:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	3.11	3.3	4.08	2.2	2.39	2.43
C2	0.32	1	2.76	3.52	1.21	1.5	2.05
C3	0.3	0.36	1	1.68	1.01	1.39	1.94
C4	0.25	0.28	0.6	1	1.37	1.22	1.55
C5	0.45	0.83	0.99	0.73	1	2.03	1.15
C6	0.42	0.67	0.72	0.82	0.5	1	1.12
C7	0.42	0.49	0.51	0.65	0.87	0.89	1

Tabla 73. Matriz GMM de criterios para ocho actores.

La GMM cumple los principios de positividad de componentes, homogeneidad y reciprocidad al realizar la operación entre matrices. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de $\lambda_{\max} = 7.3648$ y un valor de $TC = 0.045$ por lo que está dentro de los límites de consistencia de $TC \leq 10\%$. Se obtiene el vector de prioridades de la matriz grupal que resulta $w = (0.3162 \ 0.187 \ 0.1137 \ 0.0937 \ 0.1184 \ 0.089 \ 0.082)^T$.

Para las alternativas, calculamos las matrices que resultan de realizar la media geométrica de las matrices de la Tabla 52 y la Tabla 68 y los resultados se recogen en la Tabla 74:

	C1		C2		C3		C4		C5		C6		C7	
ALC	1	4.46	1	0.71	1	2.08	1	1.93	1	1.52	1	0.57	1	2.17
PLC	0.22	1	1.4	1	0.48	1	0.52	1	0.66	1	1.75	1	0.46	1

Tabla 74. Matrices GMM de alternativas según criterios para ocho actores.

Como ya se ha comentado, al ser matrices de orden $n = 2$, obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin calcular el índice de consistencia:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.817	0.416	0.676	0.659	0.603	0.363	0.684
PLC	0.183	0.584	0.325	0.341	0.397	0.637	0.316

Tabla 75. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas según criterios para ocho actores.

Procedemos como en el apartado anterior y obtenemos el vector de prioridades con la evaluación de cada alternativa realizando el producto matricial de los vectores de prioridades de las alternativas (Tabla 75) por el vector de prioridades de los criterios w traspuesto. El resultado de esta operación resulta $W = (0.6345 \ 0.3655)^T$.

4.4.3. AIP-AMM

Para este apartado, la metodología AHP se aplica a cada una de las matrices de comparación individuales tanto de criterios como de alternativas. En cada caso, se ha obtenido la tasa de consistencia de cada matriz de comparaciones de criterios emitida por cada actor para comprobar si requieren una mejora de la consistencia. Las cinco primeras son las que hemos calculado en el apartado de cinco actores con lo cual procederemos a emplear las matrices ya modificadas de la Tabla 63 de dicho apartado (AIP-AMM). Por tanto, nos quedarán por comprobar la consistencia de las otras tres matrices, aquellas que han sido rellenadas con unos (Tabla 67).

Calculamos los valores propios máximos y las tasas de consistencia de estas matrices y obtenemos que para la matriz del actor nº 6 $\lambda_{m\acute{a}x} = 7.8263$ y $TC = 0.1020$; $\lambda_{m\acute{a}x} = 7.7872$ y $TC = 0.0972$ para la del actor nº 7; y para el actor nº 8, $\lambda_{m\acute{a}x} = 7.8818$ y $TC = 0.1089$. Se observa que las matrices de los actores nº 6 y nº 8 no entran dentro del límite de consistencia por lo que tenemos que aplicar linealización. En este caso, como las matrices sí son recíprocas, podemos aplicar la fórmula simplificada, obteniendo dos nuevas matrices consistentes, las más próximas a las originales.

Estas matrices son las de la Tabla 76:

Actor nº 6

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.28	2.63	3.37	1.84	1.84	1.84
C2	0.78	1	2.06	2.63	1.44	1.44	1.44
C3	0.38	0.49	1	1.28	0.7	0.7	0.7
C4	0.3	0.38	0.78	1	0.55	0.55	0.55
C5	0.55	0.7	1.44	1.84	1	1	1
C6	0.55	0.7	1.44	1.84	1	1	1
C7	0.55	0.7	1.44	1.84	1	1	1

Actor nº 8

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.66	2.41	3.57	1.94	1.94	1.94
C2	0.6	1	1.45	2.15	1.17	1.17	1.17
C3	0.42	0.69	1	1.48	0.81	0.81	0.81
C4	0.28	0,47	0.68	1	0.55	0.55	0.55
C5	0.51	0,86	1.24	1.84	1	1	1
C6	0.51	0,86	1.24	1.84	1	1	1
C7	0.51	0,86	1.24	1.84	1	1	1

Tabla 76. Nuevas matrices de criterios consistentes de las matrices rellenas con unos.

Ambos actores muestran conformidad con los cambios realizados, por lo que pasamos a recapitular en la Tabla 77 todas las matrices con las que vamos a trabajar en este apartado.

Actor nº 1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	2	5	1	7	5	3
C2	1/2	1	2	1/2	5	2	1
C3	1/5	1/2	1	1/5	2	1	1/2
C4	1	2	5	1	7	3	2
C5	1/7	1/5	0.5	1/7	1	1/2	1/4
C6	1/5	1/2	1	1/3	2	1	1/2
C7	1/3	1	2	1/2	4	2	1

Actor nº 2

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	0.53	0.21	1.07	0.45	1.64	1.17
C2	1.9	1	0.4	2.03	0.85	3.13	2.23
C3	4.82	2.53	1	5.15	2.14	7.91	5.63
C4	0.94	0.49	0.19	1	0.42	1.54	1.09
C5	2.25	1.18	0.47	2.4	1	3.69	2.63
C6	0.61	0.32	0.13	0.65	0.27	1	0.71
C7	0.85	0.45	0.18	0.91	0.38	1.41	1

Actor nº 3

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	2.19	5.77	3.35	8.49	10.05	3.92
C2	0.46	1	2.63	1.53	3.87	4.58	1.79
C3	0.17	0.38	1	0.58	1.47	1.74	0.68
C4	0.3	0.66	1.72	1	2.54	3	1.17
C5	0.12	0.26	0.68	0.39	1	1.18	0.46
C6	0.1	0.22	0.57	0.33	0.85	1	0.39
C7	0.26	0.56	1.47	0.86	2.17	2.56	1

Actor nº 4

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.62	3.19	4.81	6.28	13.28	15.93
C2	0.62	1	1.97	2.97	3.88	8.19	9.83
C3	0.31	0.51	1	1.51	1.97	4.16	4.99
C4	0.21	0.34	0.66	1	1.31	2.76	3.31
C5	0.16	0.26	0.51	0.77	1	2.11	2.54
C6	0.08	0.12	0.24	0.36	0.47	1	1.2
C7	0.06	0.1	0.2	0.3	0.39	0.83	1

Actor nº 5

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	6.05	9.69	19.99	1.53	3.04	32.82
C2	0.17	1	1.6	3.31	0.25	0.5	5.43
C3	0.1	0.62	1	2.06	0.16	0.31	3.39
C4	0.05	0.3	0.49	1	0.08	0.15	1.64
C5	0.66	3.96	6.35	13.09	1	1.99	21.48
C6	0.33	1.99	3.19	6.58	0.5	1	10.8
C7	0.03	0.18	0.3	0.61	0.05	0.09	1

Actor nº 6

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.28	2.63	3.37	1.84	1.84	1.84
C2	0.78	1	2.06	2.63	1.44	1.44	1.44
C3	0.38	0.49	1	1.28	0.7	0.7	0.7
C4	0.3	0.38	0.78	1	0.55	0.55	0.55
C5	0.55	0.7	1.44	1.84	1	1	1
C6	0.55	0.7	1.44	1.84	1	1	1
C7	0.55	0.7	1.44	1.84	1	1	1

Actor nº 7

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	3	5	7	1	1	1
C2	1/3	1	3	5	1	1	1
C3	1/5	1/3	1	2	1	1	1
C4	1/7	1/5	1/2	1	1	1	1
C5	1	1	1	1	1	1	1
C6	1	1	1	1	1	1	1
C7	1	1	1	1	1	1	1

Actor nº 8

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1.66	2.41	3.57	1.94	1.94	1.94
C2	0.6	1	1.45	2.15	1.17	1.17	1.17
C3	0.42	0.69	1	1.48	0.81	0.81	0.81
C4	0.28	0.47	0.68	1	0.55	0.55	0.55
C5	0.51	0.86	1.24	1.84	1	1	1
C6	0.51	0.86	1.24	1.84	1	1	1
C7	0.51	0.86	1.24	1.84	1	1	1

Tabla 77. Matrices de criterios consistentes para el caso de ocho actores.

Ya tenemos las ocho matrices de comparación de criterios que están dentro del límite de consistencia para poder aplicar la metodología AHP. Tras realizar el proceso, los vectores de prioridades que se obtienen son:

- $w_1 = (0.3019 \ 0.1398 \ 0.0635 \ 0.2644 \ 0.0342 \ 0.0685 \ 0.1278)^T$,
- $w_2 = (0.4287 \ 0.0709 \ 0.0442 \ 0.0214 \ 0.2806 \ 0.141 \ 0.0131)^T$,
- $w_3 = (0.4166 \ 0.1899 \ 0.0722 \ 0.1244 \ 0.0491 \ 0.0415 \ 0.1063)^T$,
- $w_4 = (0.4106 \ 0.2533 \ 0.1286 \ 0.0854 \ 0.0654 \ 0.0309 \ 0.0258)^T$,
- $w_5 = (0.4287 \ 0.0709 \ 0.0442 \ 0.0214 \ 0.2806 \ 0.141 \ 0.0131)^T$,
- $w_6 = (0.2443 \ 0.191 \ 0.0928 \ 0.0726 \ 0.1331 \ 0.1331 \ 0.1331)^T$,
- $w_7 = (0.2777 \ 0.1674 \ 0.0951 \ 0.0745 \ 0.1284 \ 0.1284 \ 0.1284)^T$ y
- $w_8 = (0.2604 \ 0.1567 \ 0.108 \ 0.073 \ 0.1339 \ 0.1339 \ 0.1339)^T$.

Para el caso de las matrices de alternativas (Tablas 52 y 68), en el que no es necesario el cálculo de *TC* dado que se trata de matrices 2x2, los vectores de prioridades que se obtienen tras el proceso AHP son los representados en la Tabla 78.

Actor nº 1

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.9	0.17	0.17	0.75	0.25	0.17	0.9
PLC	0.1	0.83	0.83	0.25	0.75	0.83	0.1

Actor nº 2

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.11	0.83	0.83	0.25	0.8	0.17	0.86
PLC	0.89	0.17	0.17	0.75	0.2	0.83	0.14

Actor nº 3

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.9	0.25	0.17	0.25	0.25	0.17	0.9
PLC	0.1	0.75	0.83	0.75	0.75	0.83	0.1

Actor nº 4

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.875	0.75	0.875	0.875	0.9	0.875	0.833
PLC	0.125	0.25	0.125	0.125	0.1	0.125	0.166

Actor nº 5

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.9	0.83	0.875	0.875	0.875	0.17	0.17
PLC	0.1	0.17	0.125	0.125	0.125	0.83	0.83

Actor nº 6

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.833	0.25	0.8	0.75	0.5	0.5	0.5
PLC	0.167	0.75	0.2	0.25	0.5	0.5	0.5

Actor nº 7

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.875	0.167	0.75	0.667	0.5	0.5	0.5
PLC	0.125	0.833	0.25	0.333	0.5	0.5	0.5

Actor nº 8

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.875	0.167	0.75	0.667	0.5	0.5	0.5
PLC	0.125	0.833	0.25	0.333	0.5	0.5	0.5

Tabla 78. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales según criterios para ocho actores.

Una vez obtenido los vectores de prioridades tanto de criterios como de las alternativas, se obtiene la media aritmética (8) de los mismos. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-AMM} = (0.3461 \ 0.155 \ 0.0811 \ 0.0921 \ 0.1382 \ 0.1023 \ 0.08519)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio tenemos:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.784	0.427	0.653	0.635	0.572	0.382	0.645
PLC	0.217	0.573	0.348	0.365	0.428	0.618	0.355

Tabla 79. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para ocho actores.

Finalmente, para cada alternativa tenemos que, tras realizar el producto de los vectores de prioridades de las alternativas con el traspuesto de los criterios, $W = (0.6218 \ 0.3781)^T$.

4.4.4. AIP-GMM

Para completar el último grupo de actores en los que sus conocimientos sobre gestión de fugas de agua son considerados por igual, realizaremos el procedimiento anterior (AIP), pero esta vez en vez de emplear la media aritmética, se empleará la media geométrica (9) en los vectores de prioridades obtenidos en AIP-AMM tras la aplicación de AHP. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-GMM} = (0.3828 \ 0.1617 \ 0.0861 \ 0.0782 \ 0.1236 \ 0.1012 \ 0.0664)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las

alternativas según cada criterio que resultan tras realizar la media se presentan en la Tabla 80:

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}	w_{C6}	w_{C7}
ALC	0.817	0.416	0.676	0.659	0.603	0.366	0.686
PLC	0.183	0.585	0.324	0.341	0.397	0.634	0.314

Tabla 80. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para ocho actores.

Finalmente, obtenemos que la evaluación para cada alternativa es $W = (0.6466 \ 0.3534)^T$.

4.5. Análisis de resultados

A modo de resumen, presentamos todos los resultados obtenidos para los vectores de prioridades que ordenan las alternativas y motivan la decisión, en las Tablas 81, 82, 83 y 84.

	AIJ				AIP			
	AMM	WAMM	GMM	WGMM	AMM	WAMM	GMM	WGMM
ALC	0.6583	0.6547	0.6567	0.6608	0.6546	0.6589	0.656	0.6599
PLC	0.3418	0.3453	0.3433	0.3391	0.3452	0.3411	0.3441	0.3401

Tabla 81. Resumen resultados para tres actores.

	AIJ				AIP			
	AMM	WAMM	GMM	WGMM	AMM	WAMM	GMM	WGMM
ALC	0.7608	0.7805	0.7793	0.7977	0.7551	0.7822	0.7776	0.7961
PLC	0.2393	0.2195	0.2207	0.2023	0.2449	0.2178	0.2221	0.2039

Tabla 82. Resumen resultados para cuatro actores.

	AIJ		AIP	
	AMM	GMM	AMM	GMM
ALC	0.6058	0.6607	0.6336	0.6744
PLC	0.3942	0.3394	0.3663	0.3257

Tabla 83. Resumen resultados para cinco actores.

	AIJ		AIP	
	AMM	GMM	AMM	GMM
ALC	0.5972	0.6345	0.6218	0.6466
PLC	0.4028	0.3655	0.3781	0.3534

Tabla 84. Resumen resultados para ocho actores.

El valor más alto está relacionado con la mejor alternativa y el valor más bajo con la peor alternativa. Resulta obvio que la mejor alternativa siempre es la de tomar un control activo de fugas antes que sólo reparar las fugas que son informadas. Pero además esta metodología permite decidir la proporción de los recursos a invertir en la gestión de fugas.

En general, los valores de los casos de tres, cinco y ocho actores para el control activo de fugas rondan el 65 % frente al 35 % del control pasivo. Los valores más altos los encontramos en el caso de cuatro actores (para el control activo de fugas rondan en torno al 80%). Esto se debe fundamentalmente a que los criterios en la aplicación de

cuatro actores varían respecto a los otros casos y están más enfocados a aspectos económicos. A pesar de que hayan considerado costes sociales y ambientales, los actores al emitir sus juicios han considerado de mayor importancia los criterios económicos sobre las externalidades, lo cual se puede observar en las matrices de comparación originales y en los resultados obtenidos en los vectores de prioridades. Esto se puede deber a que, aunque se deben emprender acciones para minimizar la existencia de fugas en la red por los daños que puedan causar, prima el criterio económico ya que para ello se debe invertir una suma considerable de recursos.

Respecto a las metodologías de agregación de juicios, los valores que se obtienen dentro de cada grupo son bastante similares, lo cual demuestra que funcionan bien. Existe cierta diferencia cuando aplicamos la media aritmética de las matrices de juicios en el caso de ocho expertos (AIJ-AMM). Esto se debe a que las opiniones de los actores que intervienen no son muy homogéneas y AIJ funciona mejor cuando los juicios son más similares entre sí. En este caso, al ser diversos actores, de procedencias distintas, se puede observar que las entradas de las matrices son bastante diferentes. El momento y lugar en que se efectúa la tormenta de ideas para el planteamiento del problema condiciona los juicios que se emiten puesto que los encargados de tomar decisiones pueden estar más sensibilizados, a la hora de evaluar los criterios, si tienen una visión más global del problema o más específica por la relación que tengan con la materia o incluso si recientemente ha ocurrido alguna catástrofe medioambiental.

Además, cuando se aplica la media aritmética AMM, suele requerir mayor número de operaciones debido a que no se cumple la propiedad de reciprocidad al ser aplicada entre matrices (AIJ-AMM). En general, la matriz grupal obtenida en AIJ-AMM no será consistente, teniendo que aplicar el proceso de linealización, pero además como tampoco será recíproca, siendo la fórmula genérica de la linealización la necesaria, dificultando más el proceso.

Se observa que, aunque los actores sean ponderados, los resultados en general, no varían de forma significativa.

5. CONCLUSIONES

5.1. Síntesis y conclusiones

En la actualidad, la toma de decisiones en los abastecimientos de agua resulta vital para aplicar políticas de control de fugas. Las fugas en redes de abastecimiento de agua no sólo implican costes económicos sino también externalidades sociales y ambientales, de ahí la importancia de tener en cuenta los juicios de todas las partes implicadas y alcanzar un consenso.

En la literatura está ampliamente extendido el uso de la metodología AHP para procesos de toma de decisiones en grupo, puesto que permite jerarquizar el problema de forma gráfica, observando el objetivo a alcanzar, las alternativas posibles, los criterios que son necesarios evaluar y tener en cuenta los juicios de todos los actores. El hecho de que AHP puede incluir las externalidades sociales y ambientales en los problemas de decisión multicriterio en la gestión de fugas y, la posibilidad tener en cuenta aspectos tanto cualitativos como cuantitativos, tangibles o intangibles, objetivos y subjetivos (de forma habitual no se incluyen), lo convierten en una metodología superior a las tradicionales, siempre teniendo en cuenta que este método debe cumplir una serie de características que, de no hacerlo, conllevaría tomar una decisión errónea.

En el presente trabajo, se han visto cuatro aplicaciones de gestión de fugas donde se han analizado técnicas de agregación de juicios para tener en cuenta la opinión, de forma conjunta, de actores involucrados en la gestión de distintos abastecimientos de agua urbana. El objetivo ha sido la selección de una política adecuada de gestión de fugas. Se ha analizado un grupo reducido de tres actores, considerando como criterios más influyentes el coste de desarrollo del plan y su implementación y los daños a bienes, resultando menos importantes el corte de suministro o el cierre de caminos; con el grupo de cuatro actores se han tratado temas fundamentalmente económicos, aunque se trataban algunas externalidades sociales y ambientales; un grupo de cinco actores ha opinado sobre siete criterios diversos; finalmente, para considerar un grupo

numeroso de actores que emiten sus juicios de forma parcial o incompleta, se ha analizado un grupo de ocho actores evaluando las alternativas según siete criterios diferentes. En todos los casos, las principales alternativas han sido el control activo de fugas (ALC), es decir, tomar acciones de forma preventiva y el control pasivo de fugas (PLC) en el que únicamente se reparan las fugas reportadas y evidentes. La alternativa que prevalece en todos los cálculos es la de aplicar un control activo de fugas.

Los resultados sirven de guía para los tomadores de decisiones y para el intercambio de puntos de vista entre las partes interesadas respecto a la gestión.

Para alcanzar el consenso, hemos empleado distintas técnicas de agregación de juicios (AIJ-AMM, AIJ-GMM, AIP-AMM, AIP-GMM, AIJ-WAMM, AIJ-WGMM, AIP-WAMM y AIP-WGMM). En general, todas obtienen buenos resultados pero se ha comprobado que entre actores dentro del mismo grupo en el que sus opiniones son más homogéneas, AIJ funciona bien pero para alcanzar el consenso entre grupos de actores con opiniones que son diferentes, resulta más adecuado AIP. Por último, cuando se realiza AIJ, la AMM suele dar más problemas porque esta media entre numerosas matrices no suele cumplir la hipótesis de reciprocidad y conlleva mayor número de operaciones. Además, la matriz que se obtiene al realizar la media, debe ser sometida a un proceso de 'feedback' en el que no sólo uno de los actores implicados sino todos tienen que estar de acuerdo con esa única matriz o someterla a cambios uno a uno (a diferencia de AIP que sólo requerirán cambios aquellas matrices individuales que no sean consistentes y cada actor de su propia matriz, no de la matriz grupal). Se observa que la desviación entre AIJ-AMM y AIP-AMM es mayor que con la geométrica. Si añadimos el hecho de que la reciprocidad se mantiene con la media geométrica, se induce que la media geométrica se comporta mejor que la aritmética. En general, con AIP, realizas la metodología AHP con las matrices originales una sola vez y, una vez que ya has obtenido los vectores de prioridades de cada una de las matrices, realizas las medias únicamente trabajando con vectores que es mucho más sencillo que trabajar realizando medias con matrices (AIJ). Una de las técnicas de agregación más extensamente utilizadas es la media geométrica ponderada de los juicios individuales

(AIJ-WGMM). Es muy conocida y sencilla pero no significa necesariamente que sea la más adecuada o la mejor.

En cualquiera de los casos, cabe destacar la importancia de que exista un 'feedback' con las partes implicadas respecto a los resultados que se van obteniendo en cada parte del proceso matemático para preservar la coherencia de la situación real que se trata.

5.2. Líneas futuras de investigación

En futuras investigaciones esta metodología se puede aplicar a otros problemas relacionados con los sistemas de abastecimiento de agua, como podría ser la sectorización de redes.

Además, se podrían combinar las diferentes técnicas de agregación que existen en la literatura o establecer unas nuevas. Una de las variantes respecto a las aplicaciones realizadas, consistiría en aplicar el procedimiento de AIJ-GMM en matrices que sean consistentes y si bien las originales no lo son, aplicar la metodología AHP sobre estas matrices iniciales y posteriormente realizar la agregación de juicios.

Respecto a la consistencia, podrían aplicarse otros métodos para medir el grado de inconsistencia. En Alonso y Lamata (2006), critican el método tradicional de la tasa de consistencia por ser demasiado restrictivo cuando el tamaño de las matrices aumenta y proponen un nuevo sistema para aceptar o rechazar matrices de comparación respecto a la consistencia.

Teniendo en cuenta que no todos los actores que participan en el proceso emiten juicios sobre todos los criterios, muchas matrices pueden quedar incompletas. Una de las aplicaciones futuras podría consistir en caracterizar cuando una matriz puede ser completada para que sea consistente o incluso completarla pero permitiendo a las entradas conocidas variar dentro de márgenes establecidos a priori.

Resultaría de gran interés analizar los distintos métodos de agregación respecto el punto de vista de la teoría de la decisión. A modo de ejemplo, sería de gran utilidad analizar si la obtención de vectores de prioridades mediante AMM o GMM (o con sus ponderaciones respectivas) verifica algunas propiedades deseables como por ejemplo:

- Dominio no restringido o universalidad.
- No imposición o criterio de Pareto débil.
- Ausencia de dictadura.
- Asociación positiva de los valores individuales y sociales o monotonía.
- Independencia de las alternativas irrelevantes.

Es de destacar que el teorema imposibilidad de Arrow dice que si el cuerpo que toma las decisiones tiene al menos dos integrantes y al menos tres opciones entre las que debe decidir, entonces es imposible diseñar una regla de elección social que satisfaga simultáneamente todas estas condiciones.

6. REFERENCIAS

Aczel, J., Saaty, T.L., (1983). "Procedures for synthesizing ratio judgements". Journal of Mathematical Psychology, 27, pp.93-102.

Alonso, J.A., Lamata, M^aT., (2006). "Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach". International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 14, pp. 445-459.

Altuzarra, A., Moreno-Jiménez J.M., Salvador, M., (2007). "A Bayesian prioritization procedure for AHP-group decision making". European Journal of Operational Research, 182, pp.367-382.

Ananda, J., Herath, G., (2008). "Multi-attribute preference modelling and regional land-use planning". Ecological Economics, 65, pp. 325-335.

Aull-Hyde, R., Erdogan, S., Duke, J.M., (2006). «An experiment on the consistency of aggregated comparison matrices in AHP». European Journal of Operational Research, 171, pp.290-295.

Aznar Bellver, J.; Guijarro Martínez, F., (2008). "Nuevos métodos de valoración. Modelos multicriterio". Universidad Politécnica de Valencia. España.

Belton, V., Gear, T., (1983). "On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies". Omega, 11, pp. 228–230.

Belton, V., (1986). "A comparison of the analytic hierarchy process and a simple multi-attribute value function". European Journal of Operational Research, 26, pp. 7–21.

Ben-Arieth, D.; Easton, T.; Evans, B., (2009). "Minimum cost consensus with quadratic cost functions". IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans, 39, pp. 210–217.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Gutiérrez, J.A., Izquierdo, J., (2011a). “Balancing consistency and expert judgment in AHP”. Math. Comput. Model., 54, pp. 1785–1790.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Pérez-García, R., (2011b). “Achieving matrix consistency in AHP through linearization”. Appl. Math. Model., 35, pp. 4449–4457.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Pérez-García, R., (2012a). “An approach to AHP decision in a dynamic context”. Decision Support Systems, 53, pp. 499-506.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Pérez-García, R., (2012b). “Improving consistency in AHP decision-making processes”. Applied Mathematics and Computation, 219, pp. 2432-2441.

Benítez, J., Izquierdo, J., Pérez-García, R., Ramos-Martínez, E., (2013a). “A simple formula to find the closest consistent matrix to a reciprocal matrix”. App. Math. Model., bajo revisión.

Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Pérez-García, R., (2013b). “Consistent completion of incomplete judgments in decision making using AHP”. Appl. Math. Comp., bajo revisión.

Bhushan, Navneet; Kanwal Rai (January 2004). “Strategic Decision Making: Applying the Analytic Hierarchy Process”. London: Springer-Verlag. ISBN 1-85233-756-7.

Brans, J.P., (1997). “Multicriterial decision aid: The Promethee-Gaia Solution”.

Bridgman, P.W., (1922). “Dimensional Analysis”. New Haven, CT, U.S.A.: Yale University Press.

Chen, Y.L., Cheng, L.C., (2009). “Mining maximum consensus sequences from group ranking data”. European Journal of Operational Research, 198, pp. 241–251.

Chou, M.T., Lee, H.S., Chu, C.W., Cheng, C.Y. (2007). "Synthesizing comparison matrices of AHP under group decision", Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems. Springer, Berlin, pp.1323-1330.

Cortés-Aldana, F.A., García-Melón, M., Fernández-de-Lucio, I., Aragonés-Beltrán, P., Poveda-Bautista, R., (2009). "University objectives and socioeconomic results: A multicriteria measuring of alignment". European Journal of Operational Research, 199, pp.811-822.

Delgado-Galván, X., Pérez-García, R., Izquierdo, J., Mora-Rodríguez, J., (2010). "Analytic hierarchy process for assessing externalities in water leakage management". Mathematical and Computer Modelling, 52, pp. 1194–1202.

Delgado-Galván, X., (2011). "Aplicación del método de las jerarquías analíticas (AHP) a la gestión de pérdidas de agua en redes de abastecimiento". Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Valencia. Valencia, 2011.

Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Benítez, J., Pérez-García, R. (2013). "Joint Stakeholder Decision-Making on the Management of the Silao-Romita Aquifer Using AHP". Environmental Modeling and Software. Artículo bajo revisión.

Dey, P.K. (2002). "An integrated assessment model for cross-country pipelines". Environmental Impact Assessment Review, 22, pp. 703-721.

Dong, Y., Xu, Y., Li, H., Dai, M. (2008). "A comparative study of the numerical scales and the prioritization methods in AHP". European Journal of Operational Research, 186, pp. 229-242.

Dong, Y.C., Zhang, G., Hong, W.C., Xu, Y.F., (2010). "Consensus models for AHP group decision making under row geometric mean prioritization method". Decision Support Systems, 49, pp. 281–289.

Escobar, Urmeneta, M.T., Moreno Jiménez, J.M., (1997). "Problemas de gran tamaño en el proceso analítico jerárquico". Estudios de Economía Aplicada, 8, pp. 25-40.

EU-WFD, (2000). Directive 2000/60/EC of the European Parliament and of the Council establishing a framework for the Community action in the field of water policy.
<http://ec.europa.eu/environment/water/water-framework/>

Farley, M., Trow, S. (2003). "Losses in Water Distribution Networks. A practitioner's guide to assessment, monitoring and control". IWA publishing. UK.

Fishburn, P.C., (1967). "Additive Utilities with Incomplete Product Set: Applications to Priorities and Assignments". American Society of Operations Research (ORSA), Baltimore, MD, U.S.A..

Forman, E., Peniwati, K., (1998). "Aggregating Individual Judgements and Priorities with the Analytic Hierarchy Process". Eur. J. of Oper. Res. 108, pp. 165-169.

Forman, Ernest H., Saul I. Gass (2001-07). "The analytical hierarchy process—an exposition". Operations Research, 49, pp. 469–487. doi:10.1287/opre.49.4.469.11231 (<http://dx.doi.org/10.1287%2Fopre.49.4.469.11231>).

Freeman III, A.M., (1992). "Control de la contaminación del agua y del aire". Limusa. México, D.F.

Freeman III, A.M., (2003). "The measurement of environmental and resource values: Theory and methods". Washington: Resources for the future. 2ª. Edición.

Ho, W. (2008). "Integrated analytic hierarchy process and its applications – A literature review". European Journal of Operational Research, 186, pp. 211–228.

Huang, Y.S., Liao, J.T., Lin, Z.L., (2009). "A study on aggregation of group decisions". Systems Research and Behavioral Science, 26, pp.445-454.

Huang, Y.F., Hsu, K.H., Chen, P.S., Dong, S.H., (2011). "Discussing performance index of human resource valuation with AHP-occupational safety section in T company in Taiwan as the case study". Inform. Technol. J., 10, pp.549-556.

Hwang, C.L., Yoon, K., (1981). "Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications". Springer, New York.

Ishizaka, A., Nemery, P., (2013). "Multicriteria Decision Aid: Methods and software". Wiley, Chichester.

Izquierdo, J., Benítez, J., Delgado-Galván, X., Pérez-García, R., (2012). "Toma consistente de decisiones multicriterio en presencia de cuerpos de enjuiciamiento incompletos". 16 Convención de ingeniería y arquitectura Palacio de Convenciones de la Habana.

Izquierdo, J., Torregosa, J.R., (1997). "Álgebra y ecuaciones diferenciales". Valencia (España), Universidad Politécnica de Valencia, 1997.

Kabir, G., Sadiq, R., Tesfamariam, S., (2013). "A review of multi-criteria decision-making methods for infrastructure management". Structure and Infrastructure Engineering: Maintenance, Management, Life-Cycle Design and Performance, DOI: 10.1080/15732479.2013.795978

Kablan, M. M., (2004). "Decision support for energy conservation promotion: an analytic hierarchy process approach". Energy Policy, 32, pp. 1151-1158.

Lee, A.H., Chang, H.J., Lin, C.Y., (2009). "An evaluation model of buyer-supplier relationships in high-tech industry - The case of an electronic components manufacturer in Taiwan". Computers & Industrial Engineering, 57, pp. 1417-1430.

Macharis, C., Springael, J., De Brucker, K., Verbeke, A., (2004). "PROMETHEE and AHP: The

design of operational synergies in multicriteria analysis. Strengthening PROMETHEE with ideas of AHP". Eur. J. of Oper. Res., 153, pp. 307–317.

Meyer, C.D. (2000), "Matrix Analysis and Applied Linear Algebra". SIAM.

Miller, G.A. (1955). "The Magical Number Seven, Plus or Minus Two. Some Limits on Our Capacity for Processing Information". The psychological Review 63, pp. 81-97.

Miller, D.W., Starr, M.K., (1969). "Executive Decisions and Operations Research." Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, U.S.A.

Millet, I., Wedley, W.C., (2002). "Modelling Risk and Uncertainty with the Analytic Hierarchy Process". Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 11, pp. 97–107.

Munda, G., (1995). "NAIADE Manual and Tutorial". Version 1.0. ENG.

Murphy, C.K., (1993). "Limits on the analytic hierarchy process from its consistency index". European Journal of Operational Research, 65, pp. 138–139.

Naciones Unidas, (1998). Protocolo de Kyoto de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático. FCCC/INFORMAL/83* GE.05-61702 (S) 130605 130605.

OFWAT, (2007). "Water Service Regulation Authority. Providing best practice guidance on the inclusion of externalities in the ELL calculation". Main Report and Guidance V05 13 November 2007. Ref. PROC /01/0075. Reino Unido.

Omkarprasad, S.V., Sushil, K. (2006). "Analytic hierarchy process: An overview of applications". European Journal of Operational Research, 169, pp. 1-29.

Oprić, S., (1998). "Multicriteria optimization of civil engineering systems". Belgrade: Faculty of Civil Engineering.

Pohekar S. D., Ramachandran M., (2004). "Application of multi-criteria decision making to sustainable energy planning – A review". Renew. Sustain. Energy Rev., 8, pp. 365-381.

Ramanathan, R., Ganesh, L.S., (1994). "Group preference aggregation methods employed in AHP: An evaluation and an intrinsic process for deriving members weightages". European Journal of Operational Research, 79, pp.249-265.

Ríos, S., (1976). "Análisis de decisiones". Ediciones ICE. España.

Roy, B., (1978). "Multicriteria methodology fo Decision-Making". Kluwer Academic Publishers.

Saaty, T.L., (1977). "A scaling method for priorities in hierarchical structures". J. of Math. Psychol. 15, pp. 234-281.

Saaty, T.L., (1980). "The Analytic Hierarchy Process". NewYork: McGraw-Hill.

Saaty, T.L., (2001). "The Analytic Network Process". RWS Pub., Pittsburgh.

Saaty, T.L., (2003). "Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary". Eur. J. of Oper. Res. 145, pp. 85-91.

Saaty, T. L., Peniwati, K., (2007). "Group Decision Making: Drawing Out and Reconciling Differences". RWS Publications, Pittsburgh, PA.

Saaty, T.L., (2008a). "Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making. Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors|". The Analytic Hierarchy/Network Process, Revista de la Real Academia de Ciencias Serie A: Matemáticas 102, pp. 251-318.

Saaty, T.L., (2008b). "Decision Making with the Analytic Hierarchy Process". Int. J. Serv. Sci. 1, pp. 83-98.

Sánchez, R., (2001). "La toma de decisiones con múltiples criterios: un resumen conceptual y teórico". CEPLAG-UMSS.

Sadiq, R., Kleiner, Y., Rajani, B., (2007). "Water quality failures in distribution networks – Risk analysis using fuzzy logic and evidential reasoning". Risk analysis, 27.

Sadiq, R., Tesfamariam, S., (2009). "Multi-criteria decisionmaking (MCDM) using intuitionistic fuzzy analytic hierarchy process (IF-AHP)". Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 23, pp.75–91.

Srdjevic, Bojan, (2007). "Linking analytic hierarchy process and social choice methods to support group decision making in water management". Elsevier Decision Support Systems, 42, pp. 2261-2273.

Stewart, G.W., (2001). "Matrix Algorithms", vol. II, SIAM.

Sun, J., Li, H., (2009). "Financial distress early warning based on group decision making". Computers & Operations Research, 36, pp.885-906.

Triantaphyllou, E. (2000). "Multi-Criteria Decision Making Methods: a comparative study". Kluwer Academic Publishers, Boston.

Van Den Honert, R. C., Lootsma, F. A., (1997). "Group preference aggregation in the multiplicative AHP. The model of the group decision process and Pareto optimality". European Journal of Operational Research, 96, pp.363-370.

Vargas, L.G., (1990). "An overview of the analytic hierarchy process and its applications". European Journal of Operational Research, 48, pp. 2–8.

Vincke, Ph., (1992). "Decision Aid". Wiley and Sons.

Wu, W., Chiang, W., Lin, C., (2008). "Comparing the aggregation methods in the analytic hierarchy process when uniform distribution". WSEAS TRANSACTIONS on BUSINESS and ECONOMICS. Issue 3, Volume 5.

Xu, Z.S. (2009). "An automatic approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making". Computers & Industrial Engineering, 56, pp. 1369–1374.

Zeleny, M., (1982). "Multiple Criteria Decision Making". McGraw-Hill, New York. pp. 60-77.

Zimmermann, H., (1996). "Fuzzy sets, decision making and expert systems". New York: McGraw-Hill.

7. APÉNDICE CON CÓDIGOS MATLAB

En este apartado, vamos a presentar los códigos MATLAB empleados en este trabajo.

En primer lugar, dada una matriz de comparaciones A , se presenta el código Matlab para comprobar si está dentro de los límites de consistencia establecidos. En el caso en que la matriz se pueda considerar suficientemente consistente, el código devolverá el vector de prioridades w de dicha matriz:

```
%% ÍNDICE DE CONSISTENCIA
% Valores de consistencia aleatoria
RI = [0 0 0.52 0.89 1.11 1.25 1.35 1.4 1.45 1.49];

%Cálculo del valor propio máximo y del índice de consistencia
[x lambda]=eig(A); % x: vectores propios columna D: valores propios diagonal
[m,i]=max(diag(abs(lambda))); % Posición máximo valor propio
lambdaMax = max(max(lambda))
[m n] = size(A);
IC = (lambdaMax - n)/(n-1);

% Tasa de consistencia
TC = IC/RI(1,n)
if TC > 0.10
    str = 'TC is %% %1.4f. Matriz no consistente';
    str=sprintf(str,TC);
    disp(str);
end
VPnorm2=x(:,i); % Vector propio máximo en columna.
W=abs(VPnorm2/norm(x(:,i),1)) %Vector propio máximo norma 1.
```

Cuando una matriz no es consistente, hay que aplicar linealización para hallar la matriz consistente más próxima a la original. Si es recíproca, se puede emplear la fórmula de linealización sencilla (2). El código Matlab correspondiente se muestra a continuación:

```
% Introducir matriz A
[m,n]=size(A);
U=ones(m,m);
aux=log(A)*U;
P=(aux-aux')/m;
Consistente=exp(P);
```

A=Consistente;

Por otro lado, cuando la matriz no es recíproca, se requiere de la fórmula genérica para aplicar la linealización (1). La implementación de esta fórmula en Matlab es un procedimiento sencillo:

```
function y = y (n)
% Esta función calcula matrices Y del teorema 2.6 (Benítez et al, 2011b)
y = zeros (n,n-1);
for k = 1:n-1
y (1:k,k)=ones (k,1);
y (k + 1,k)=-k;
end

function matrix = matrix (A)
% Esta function calcula la matriz consistente buscada del teorema 2.5 (Benítez et al, 2011b)
B = log (A);
[n m]=size (A);
Y = y (n);
X = zeros (size (A));
for i = 1:n-1
phiy = Y (:,i)*ones (1,n)-ones (n,1)*Y (:,i)';
factor = trace (B'*phiy)/(i + i^2);
X = X + factor * phiy;
end
X = X/(2 * n);
matrix=exp(X);
[x lambda]=eig(A); % x: vectores propios columna D: valores propios diagonal
[m,i]=max(diag(abs(lambda))); % Posición máximo valor propio
lambdaMax = max(max(lambda))
[m n] = size(A);
VPnorm2=x(:,i);
W=abs(VPnorm2/norm(x(:,i),1))
```

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Caudales de los diferentes tipos de fugas.....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 2. Economía de la fuga.....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 3. Balance hídrico del IWA.....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 4. Acciones en la gestión de fugas.....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 5. Proceso de toma de decisiones</i>	<i>31</i>
<i>Figura 6. Modelo jerárquico de un problema para AHP.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 7. Proceso de linealización.....</i>	<i>51</i>
<i>Figura 8. Diagrama de flujo para la solución de compromiso.....</i>	<i>53</i>
<i>Figura 9. Diagrama de flujo para la solución de compromiso con las metodologías de agregación.....</i>	<i>62</i>
<i>Figura 10. Estructura jerárquica para tres actores.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 11. Estructura jerárquica para cuatro actores.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 12. Estructura jerárquica para cinco actores.....</i>	<i>99</i>
<i>Figura 13. Formación de las matrices de comparación de criterios para ocho actores.....</i>	<i>112</i>

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1. Escala de Saaty para la comparación entre pares de elementos.....</i>	<i>42</i>
<i>Tabla 2. Valores de consistencia aleatoria.....</i>	<i>49</i>
<i>Tabla 3. Criterios para tres actores.....</i>	<i>69</i>
<i>Tabla 4. Criterios para cuatro actores.....</i>	<i>69</i>
<i>Tabla 5. Criterios para cinco actores.....</i>	<i>69</i>
<i>Tabla 6. Matrices de comparación de criterios para tres actores.....</i>	<i>72</i>
<i>Tabla 7. Matrices de comparación de alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>72</i>
<i>Tabla 8. Matriz AMM de criterios para tres actores.....</i>	<i>73</i>
<i>Tabla 9. Matrices AMM de las alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>74</i>
<i>Tabla 10. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>74</i>
<i>Tabla 11. Matriz GMM de criterios para tres actores.....</i>	<i>75</i>
<i>Tabla 12. Matrices GMM de alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>75</i>
<i>Tabla 13. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas según criterios para tres actores.</i>	<i>75</i>
<i>Tabla 14. Matriz consistente próxima a la matriz del tercer actor.....</i>	<i>76</i>
<i>Tabla 15. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales según criterios para tres actores.....</i>	<i>77</i>
<i>Tabla 16. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>77</i>
<i>Tabla 17. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>78</i>
<i>Tabla 18. Pesos para tres actores.....</i>	<i>79</i>
<i>Tabla 19. Matriz WAMM de criterios para tres actores.....</i>	<i>79</i>
<i>Tabla 20. Matrices WAMM de las alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>80</i>
<i>Tabla 21. Vectores de prioridades w de las matrices WAMM de las alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>80</i>
<i>Tabla 22. Matriz WGMM de criterios para tres actores.....</i>	<i>81</i>
<i>Tabla 23. Matrices WGMM de alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>81</i>
<i>Tabla 24. Vectores de prioridades w de las matrices WGMM de alternativas según criterios para tres actores.</i>	<i>81</i>

<i>Tabla 25. Vectores WAMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para tres actores.</i>	<i>82</i>
<i>Tabla 26. Vectores WGMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para tres actores.....</i>	<i>83</i>
<i>Tabla 27. Matrices de comparación de criterios para cuatro actores.....</i>	<i>85</i>
<i>Tabla 28. Matrices de comparación de alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>86</i>
<i>Tabla 29. Matriz AMM de criterios para cuatro actores.....</i>	<i>86</i>
<i>Tabla 30. Matriz AMM de criterios consistente para cuatro actores.....</i>	<i>87</i>
<i>Tabla 31. Matrices AMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>88</i>
<i>Tabla 32. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.</i>	<i>88</i>
<i>Tabla 33. Matriz GMM de criterios para cuatro actores.....</i>	<i>89</i>
<i>Tabla 34. Matrices GMM de alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>89</i>
<i>Tabla 35. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>89</i>
<i>Tabla 36. Nuevas matrices de criterios consistentes para cuatro actores.....</i>	<i>91</i>
<i>Tabla 37. Nueva matriz modificada por el actor nº1.....</i>	<i>91</i>
<i>Tabla 38. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>92</i>
<i>Tabla 39. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>92</i>
<i>Tabla 40. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>93</i>
<i>Tabla 41. Pesos para cuatro actores.....</i>	<i>94</i>
<i>Tabla 42. Matriz WAMM de criterios para cuatro actores.....</i>	<i>94</i>
<i>Tabla 43. Matriz WAMM de criterios consistente para cuatro actores.....</i>	<i>95</i>
<i>Tabla 44. Matrices WAMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>95</i>
<i>Tabla 45. Vectores de prioridades w de las matrices WAMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>96</i>
<i>Tabla 46. Matriz WGMM de criterios para cuatro actores.....</i>	<i>96</i>
<i>Tabla 47. Matrices WGMM de alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>97</i>
<i>Tabla 48. Vectores de prioridades w de las matrices WGMM de alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>97</i>
<i>Tabla 49. Vectores de prioridades w de las matrices WAMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>98</i>

<i>Tabla 50. Vectores de prioridades w de las matrices WGMM de las alternativas según criterios para cuatro actores.....</i>	<i>98</i>
<i>Tabla 51. Matrices de comparación de criterios para cinco actores.....</i>	<i>100</i>
<i>Tabla 52. Matrices de comparación de alternativas según criterios para cinco actores.....</i>	<i>101</i>
<i>Tabla 53. Matriz AMM de criterios para cinco actores.....</i>	<i>102</i>
<i>Tabla 54. Matriz AMM de criterios consistente para cinco actores.....</i>	<i>103</i>
<i>Tabla 55. Nuevas matrices de comparación de criterios modificadas por los cinco actores a partir de la matriz grupal.....</i>	<i>104</i>
<i>Tabla 56. Nueva matriz AMM de criterios para cinco actores tras las modificaciones.....</i>	<i>105</i>
<i>Tabla 57. Nueva matriz AMM de criterios consistente para cinco actores tras las modificaciones.....</i>	<i>105</i>
<i>Tabla 58. Matrices AMM de las alternativas según criterios para cinco actores.....</i>	<i>106</i>
<i>Tabla 59. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas según criterios para cinco actores.....</i>	<i>106</i>
<i>Tabla 60. Matriz GMM de criterios para cinco actores.....</i>	<i>106</i>
<i>Tabla 61. Matrices GMM de alternativas según criterios para cinco actores.....</i>	<i>107</i>
<i>Tabla 62. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas según criterios para cinco actores.....</i>	<i>107</i>
<i>Tabla 63. Nuevas matrices de criterios consistentes para cinco actores.....</i>	<i>109</i>
<i>Tabla 64. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales según criterios para cinco actores.....</i>	<i>110</i>
<i>Tabla 65. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para cinco actores.....</i>	<i>110</i>
<i>Tabla 66. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para cinco actores.....</i>	<i>111</i>
<i>Tabla 67. Matrices de comparación de criterios rellenas con unos para ocho actores.....</i>	<i>113</i>
<i>Tabla 68. Matrices de comparación de alternativas según criterios para ocho actores.....</i>	<i>114</i>
<i>Tabla 69. Matriz AMM de criterios para ocho actores.....</i>	<i>114</i>
<i>Tabla 70. Matriz AMM de criterios consistente para ocho actores.....</i>	<i>114</i>
<i>Tabla 71. Matrices AMM de las alternativas según criterios para ocho actores.....</i>	<i>115</i>
<i>Tabla 72. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas según criterios para ocho actores.....</i>	<i>115</i>
<i>Tabla 73. Matriz GMM de criterios para ocho actores.....</i>	<i>116</i>
<i>Tabla 74. Matrices GMM de alternativas según criterios para ocho actores.....</i>	<i>116</i>

<i>Tabla 75. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas según criterios para ocho actores.....</i>	<i>117</i>
<i>Tabla 76. Nuevas matrices de criterios consistentes de las matrices rellenas con unos.....</i>	<i>118</i>
<i>Tabla 77. Matrices de criterios consistentes para el caso de ocho actores.....</i>	<i>119</i>
<i>Tabla 78. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales según criterios para ocho actores.....</i>	<i>121</i>
<i>Tabla 79. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para ocho actores.....</i>	<i>121</i>
<i>Tabla 80. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas según criterios para ocho actores.....</i>	<i>122</i>
<i>Tabla 81. Resumen resultados para tres actores.....</i>	<i>123</i>
<i>Tabla 82. Resumen resultados para cuatro actores.....</i>	<i>123</i>
<i>Tabla 83. Resumen resultados para cinco actores.....</i>	<i>123</i>
<i>Tabla 84. Resumen resultados para ocho actores.....</i>	<i>123</i>