Representació de nombres enters: el conveni "complement a u"

Cognoms, nom	Martí Campoy, Antonio (amarti@disca.upv.es)
Departament	Informàtica de Sistemes i Computadors
Centre	Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Informàtica

UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

1 Resum de les idees clau

En aquest article es parla de la problemàtica de la representació de nombres enters en els computadors. També es presentarà una possible solució a aquest problema, que rep el nom de "representació en complement a u". Els coneixements previs necessaris per treballar aquest article es presenten en la taula 1.

Taula 1. Coneixements previs

Coneixements previs
1. Sistemes de numeració posicionals
2. Sistema de numeració binari
3. Canvis de base, especialment binari
4. Aritmètica bàsica en base 2

2 Objectius

Una vegada acabes de llegir aquest article docent i reproduïsques els exemples presentats, hauràs de ser capaç de **representar** nombres enters en binari **aplicant** el conveni anomenat "complement a u". A més a més, podràs **calcular** el rang de representació per a una grandària de bits determinada. També seràs capaç de **realitzar** operacions aritmètiques de suma i resta de nombres enters en binari i d'extensió de signe utilitzant la representació complement a u. Finalment, podràs **raonar** sobre els avantatges i desavantatges d'aquest conveni de representació de nombres enters.

3 Introducció

En la vida quotidiana els nombres enters es representen mitjançant els deu símbols (del 0 al 9) de la base decimal, juntament amb els símbols "+" i "-" per identificar els nombres positius i negatius, respectivament.

Quan es representen nombres enters en un computador (per emmagatzemar-los, operar-los o comunicar-los) el problema que hi apareix és que en els circuits digitals només es poden utilitzar dos valors, normalment representats pels símbols 0 i 1. No hi ha cap possibilitat de representar un tercer símbol ni un quart per distingir-ne els nombres positius dels nombres negatius.

D'aquesta manera sorgeix la necessitat de crear i definir convenis per a codificar el signe d'un nombre enter emprant únicament els símbols 0 i 1 disponibles en els circuits digitals.

Abans d'explicar-te el conveni complement a u, tema central d'aquest article, vull recordar-te que els nombres s'emmagatzemen en circuits digitals anomenats registres, i que la longitud d'aquests registres, és a dir, la quantitat de bits disponibles, és fixa. És a dir, quan parlem d'un nombre enter representat en binari i complement a u, cal indicar el nombre total de bits utilitzats per representar-lo.

4 El conveni complement a u

Aquest conveni s'anomena així perquè s'utilitza l'operació aritmètica de complement a u per a representar els nombres negatius. Per tant, és molt **important** que no confongues l'operació aritmètica de complementa a u (**fem** el complement a u a un nombre) amb la representació d'un nombre enter **en** complement a u (codifiquem o representem un nombre seguint el conveni).

També podràs trobar referències a aquest conveni com el conveni Ca1 o C'1, entre d'altres.

4.1 Definició

En aquest conveni es diferencia la forma en què es representa un nombre enter positiu d'un de negatiu. Considerem que utilitzem *n* bits per representar els nombres enters. El conveni, un acord arbitrari, diu que:

- Si el nombre és **positiu**, es representa per la seua magnitud amb n-1 bits, i s'afegeix un 0 a l'esquerra:

0	Magnitud (n-1 bits)

- Si el nombre és **negatiu** es procedeix de la manera següent. Es representa l'equivalent positiu corresponent, utilitzant n-1 bits per a la magnitud i li afegim un zero a l'esquerra, de la mateixa manera que s'ha descrit anteriorment. Una vegada tenim la representació de l'equivalent positiu, li fem el complement a u, i aquesta serà la representació del nombre negatiu:

Ca1(| 0 | Magnitud (n-1 bits) |)

Dues coses importants. La primera és recordar-te que el Ca1 d'un nombre es pot calcular o realitzar invertint-ne els bits, és a dir, canviant uns per zeros i zeros per uns.

La segona cosa important és que, en emprar la representació **en complement a u**, el bit de major pes, el de l'esquerra, indica el signe del nombre i rep el nom de **bit de signe**.

Exemple: utilitzant 8 bits (n = 8), representa el nombre +27 seguint el conveni de complement a u.

En primer lloc es converteix la magnitud o valor absolut, 27, a binari natural amb n-1=7 bits, i es completen amb zeros els bits de major pes si és necessari:

$$27_{10} = 0011011_2$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Com que el nombre que volem representar és positiu, s'afegeix un zero a l'esquerra:

$$+27_{10} = \mathbf{0}0011011_2$$

Exemple: utilitzant 8 bits (n = 8), representa el nombre –29, seguint el conveni de complement a u.

Tenint en compte que el nombre que cal representar és negatiu, necessitarem obtenir en primer lloc la representació del seu equivalent positiu. Convertim la magnitud o valor absolut, 29, a binari natural amb n-1=7 bits, i completem amb zeros els bits de major pes si és necessari:

$$29_{10} = 0011101_2$$

Ara afegim un zero a l'esquerra per obtenir la representació de +29:

$$+29_{10} = \mathbf{0}0011101_2$$

Com que el que realment volem és representar -29, que és negatiu, fem el complement a u a +29:

$$\text{Ca1 } (+29_{10}) = \text{Ca1 } (\mathbf{0}0011101_2) = \mathbf{1}1100010_2 = -29_{10}$$

Exemple. Obtín el valor decimal corresponent a 011010_2 i 101110_2 tenint en compte que ambdós estan representats en complement a u utilitzant 6 bits (n = 6).

$011010_2 \longrightarrow$ Com que el bit de major pes (bit de signe) és 0, sabem que es tracta d'un nombre positiu. Seguint el conveni, retirem el zero de major pes i ens queda la magnitud $11010_2 = 26_{10}$ i, per això, sabem que $011010_{2} = +26_{10}$.

$101110_2 \longrightarrow$ Com que el bit de major pes (bit de signe) és 1, sabem que es tracta d'un nombre negatiu. En aquest cas aprofitem que l'operació de complement a u és reversible (Ca1(Ca1(x)) = x) per obtenir l'equivalent positiu, i d'aquesta manera podem conèixer la magnitud:

$$\text{Ca1}(101110_2) = 010001_2 = +17_{10}$$

Eliminem el bit de signe i hi queda la magnitud $10001_2 = 17_{10}$

Per la qual cosa tenim que en complement a u, $101110_2 = -17_{10}$

Vull que recordes dues coses molt importants: la primera, que no sabem llegir nombres negatius representats en complement a u i, per aquesta raó, hem de trobar l'equivalent positiu, que sí que el sabem llegir. I la segona, que en aquest procés, cal no oblidar d'indicar el signe al final de la conversió.

4.2 Rang

El rang d'un sistema o conveni de representació és el conjunt de valors diferent que es pot representar. Estudiarem separadament el rang per als nombres positius i negatius quan es representen seguint el conveni complement a u:

Positius			Negatius
$000\cdots000_2$	+0	-0	$111\cdots111_2$
$000\cdots001_2$	+1	-1	$111\cdots110_2$
$011\cdots110_2$			$100\cdots001_2$
$011\cdots111_2$	$+(2^{n-1}-1)$	$-(2^{n-1}-1)$	$100\cdots000_2$

D'aquesta taula podem deduir que el rang de representació per a *n* bits en complement a u és:

Rang en binari:	[$100\cdots000$,	$111\cdots111$,	$000\cdots000$,	$011\cdots111$]
Rang en decimal:	[$-(2^{n-1}-1)$,	-0,	+0,	$+(2^{n-1}-1)$]

El rang és simètric, és a dir, inclou la mateixa quantitat de valors positius que de negatius, i inclou dues representacions per al zero, una de positiva i una altra de negativa. Però és important que pares atenció al fet que els nombres negatius no estan en l'ordre "natural", i això en complica la interpretació per part dels humans.

4.3 Suma i resta

L'operació de suma de nombres representats en complement a u es realitza utilitzant les regles de la suma binària de nombres naturals, independentment del signe dels operands. Però, si el valor de l'últim bit de *carry* és u, és necessari sumar aquest *carry* al resultat per obtenir la suma correcta. Finalment, el nou *carry* final es descarta, i no importa que siga zero o un.

L'operació de resta és realitza mitjançant una suma, on es canvia el signe al subtrahend. És a dir, A - B = A + (-B). I com hem vist abans, canviar el signe a un nombre representat en complement a u és molt senzill, tan sols fa falta fer-hi el complement a u.

A continuació pots veure com a exemple una suma i una resta de nombres enters representats en binari complement a u amb 4 bits (i els equivalents en decimal):

Binari Ca1 amb 4 bits	0100 + 1101 ***1***0001	Com que hi ha *carry*	0001 + **1** **0010**
Decimal	+4 + -2 +2		

Binari Ca1 amb 4 bits	0100 - 1101	Fem Ca1(1101)i es converteix en suma	0100 + 0010 **0110**
Decimal	+4 - -2 +6		

4.1 Desbordament en la suma i la resta

Quan es realitza una suma o una resta de nombres enters és possible que el resultat excedisca el rang de representació. En aquest cas es diu que no hi ha resultat o que el resultat no és representable.

Amb operands representats en complement a u es produeix desbordament o sobreeiximent si l'últim i el penúltim bit de *carry* són diferents. Una senzilla porta lògica or-exclusiva (XOR) permet detectar la condició de desbordament.

4.2 Extensió de signe

En alguns casos és necessari operar amb dades de diferent grandària. Per augmentar el nombre de bits amb què es representa una dada es realitza l'operació anomenada "extensió de signe".

En el cas de la representació en complement a u, l'extensió de signe es realitza **replicant** el bit de signe.

Exemple. Tenint els nombres enters 0010_2 i 1110_2 representats en complement a u amb 4 bits, estén el signe per representar-los amb 8 bits.

$$\mathbf{0}010_2 = \mathbf{00000}010_2$$
$$\mathbf{1}110_2 = \mathbf{11111}110_2$$

5 Exercicis

A continuació tens uns quants exercicis. És molt important que agafes llapis i paper i els resolgues. Recorda que estàs aprenent i que, per tant pots, i encara diria més, cal que consultes les seccions anteriors d'aquest document per resoldre els exercicis. També tens les solucions dels exercicis, però et demane amb fermesa que tractes de resoldre tots els exercicis abans i no les consultes.

5.1 Enunciats

1. Representa el nombre -65_{10} en binari complement a u amb 8 bits.
2. Representa el nombre $+69_{10}$ en binari complement a u amb 8 bits.
3. Indica la representació decimal de 10010101_2 tenint en compte que està representat en complement a u amb 8 bits.
4. Indica la representació decimal de 00110111_2 tenint en compte que està representat en complement a u amb 8 bits.

5. Quin és el rang de representació en complement a u amb 9 bits? Expressa'n el rang en decimal.
6. Realitza l'extensió de signe a 16 bits de 11010111_2 tenint en compte que està representat en complement a u amb 8 bits.
7. Realitza l'extensió de signe a 16 bits de 01010100_2 tenint en compte que està representat en complement a u amb 8 bits.

5.2 Solucions

1. Representa el nombre -65_{10} en binari complement a u amb 8 bits. Sol: 10111110_2
2. Representa el nombre $+69_{10}$ en binari complement a u amb 8 bits. Sol: 01000101_2
3. Indica la representació decimal de 10010101_2 tenint en conte que està representat en complement a u amb 8 bits. Sol: -106_{10}
4. Indica la representació decimal de 00110111_2 tenint en conte que està representat en complement a u amb 8 bits. Sol: $+55_{10}$
5. Quin és el rang de representació en complement a u amb 9 bits? Expressa el rang en decimal. Sol: $[-(2^8-1)\,,\,+(2^8-1)] = [-255\,,\,+255]$
6. Realitza l'extensió de signe a 16 bits de 11010111_2 tenint en conte que està representat en complement a u amb 8 bits. Sol: 1111111111010111_2
7. Realitza l'extensió de signe a 16 bits de 01010100_2 tenint en conte que està representat en complement a u amb 8 bits. Sol: 0000000001010100

6 Conclusions

Els circuits digitals tan sols poden emmagatzemar dos símbols, per la qual cosa és necessari establir un acord o conveni per a utilitzar aquests dos símbols, el 0 i l'1, per a representar el signe d'un nombre enter. El conveni anomenat "representació en complement a u" és senzill i presenta una aritmètica relativament senzilla. Tanmateix, aquest conveni pràcticament no s'utilitza en cap aplicació.

7 Bibliografia

7.1 Llibres

[1] Anasagasti, Pedro de Miguel. *Fundamentos de los computadores*, 9a ed. Madrid, Thomson-Paraninfo. 2004, 2007

[2] Wakerly, John F. *Diseño digital: principios y prácticas.* Madrid. Pearson Educación. 2001

7.2 Recursos electrònics

[3] Martí Campoy, Antonio. *Representación de enteros: Complemento a 1.* Universitat Politècnica de València, 2009. http://hdl.handle.net/10251/5233