



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Tipología de nudos y extremos de barra

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

En este artículo, una vez definido lo que se entiende por nudo y barra, se describirán los distintos tipos de nudo así como las diferentes tipologías de extremo de barra, caracterizándolos estática y cinemáticamente.

2 Introducción

Un elemento estructural es cada una de las partes diferenciables que constituyen geoméricamente la estructura. Si ésta está formada por agregación de elementos lineales se llama estructura de barras.

En todas las estructuras de barras se deben identificar unos puntos llamados nudos a los que se traslada la información estática y cinemática, por ser los puntos de unión entre barras y los puntos de apoyo de la estructura.

Los nudos se caracterizan estática y cinemáticamente dependiendo de las fuerzas (externas e internas) y de los movimientos permitidos. Al mismo tiempo, las barras concurrentes en un nudo podrán compartir o no los movimientos generándose distintas condiciones de vínculo que se expresarán estática y cinemáticamente.

A la hora de calcular una estructura es imprescindible representar adecuadamente tanto el tipo de nudo y sus condiciones de contorno como sus condiciones de vínculo con las barras concurrentes, con el fin de que el modelo de cálculo se ajuste a la realidad proyectada o construida.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- Identificar los nudos libres y los apoyos.
- Determinar la tipología de apoyos y las condiciones de contorno asociadas
- Identificar las desconexiones totales o parciales de extremo de barra
- Determinar las condiciones de vínculo (estáticas y cinemáticas) entre extremo de barra y nudo
- Representar simbólicamente la tipología de nudos y extremos de barra

4 Tipología de nudos y extremos de barra

4.1 Nudo, barra y extremo de barra.

En una estructura de barras (figura 1), un nudo es un punto de unión de dos o más barras o un punto de apoyo de la misma. También se asignará un nudo al extremo de voladizo, a los cambios de sección o de directriz de una barra y a cualquier punto de discontinuidad estática o cinemática. Por tanto, por propia definición, nunca puede estar aislado, estará siempre unido a una barra.

Las magnitudes que se refieran a los nudos, tanto fuerzas como movimientos, se expresan siempre según los ejes globales de la estructura.

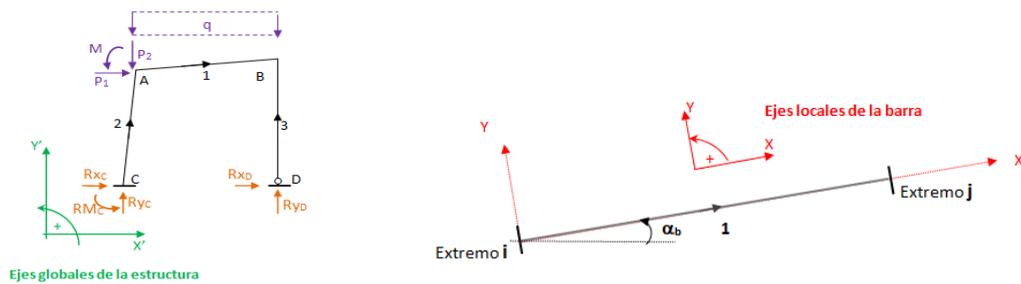


Figura 1. Nudos (A, B, C, D) y extremos de barra (i, j)

Una barra es un elemento estructural lineal y se caracteriza por sus dos extremos que son las secciones que la limitan y la unen al nudo. Los extremos se llaman "i" (extremo inicial) y "j" (extremo final), orientándose el eje X local de la barra siempre de i a j. Las magnitudes que se refieran a las barras, tanto fuerzas como movimientos, se pueden expresar en ejes locales o en ejes globales.

4.2 Tipología de nudos: apoyos y nudos libres

Se distinguen dos tipos de nudos:

- APOYO: Algún(os) movimiento(s) del nudo está(n) restringido(s).
- NUDO LIBRE: Todos los movimientos del nudo están permitidos

APOYOS

Los apoyos son nudos que tienen algún movimiento restringido. En una estructura plana el número máximo de restricciones es 3.

En la dirección de cada movimiento restringido hay una fuerza/momento llamada reacción que impide el movimiento en esa dirección.

Los tipos de apoyo son los siguientes:

- a) **Empotramientos:** Los empotramientos restringen tanto los movimientos de desplazamiento como el giro del nudo, por lo que, en estructuras planas, se generan dos fuerzas de reacción perpendiculares entre sí (en el plano de la estructura) y una reacción momento. La figura 2 muestra un ejemplo en estructura de hormigón y madera



Figura 2. Empotramiento en estructura de hormigón, metálica y de madera



- b) **Apoyo fijo o articulado**: El apoyo fijo (figura 3) permite el giro libre quedando restringidos los desplazamientos, por lo que, en estructuras planas, se generan dos reacciones perpendiculares entre sí (en el plano de la estructura).

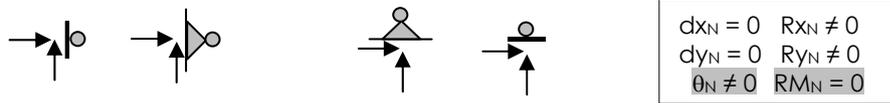


Figura 3. Apoyo fijo o articulado

- c) **Apoyo con deslizamiento según eje X' o según eje Y'**: Este apoyo deslizante permite el deslizamiento libre según uno de los ejes globales, quedando restringido el giro y el deslizamiento según el otro eje, por lo que, en estructuras planas, se genera una reacción perpendicular al movimiento impedido así como una reacción momento.



- d) **Apoyo simple o articulado-deslizante según eje X' o según eje Y'**: El apoyo simple o articulado-deslizante (figura 4) en estructuras planas permite el giro y el desplazamiento en una dirección, quedando restringido el desplazamiento en la dirección perpendicular, en la que actúa una reacción



Figura 4. Apoyo simple o articulado-deslizante



- e) **Apoyos elásticos o semirígidos**: Los apoyos elásticos restringen parcialmente el movimiento. Se genera una reacción relacionada con el movimiento parcialmente restringido cuyo valor depende de la rigidez del apoyo. En la dirección en la que no está el muelle el movimiento puede ser libre (no hay reacción) o bien restringido (hay reacción). En la figura 5 se presentan algunos ejemplos reales.

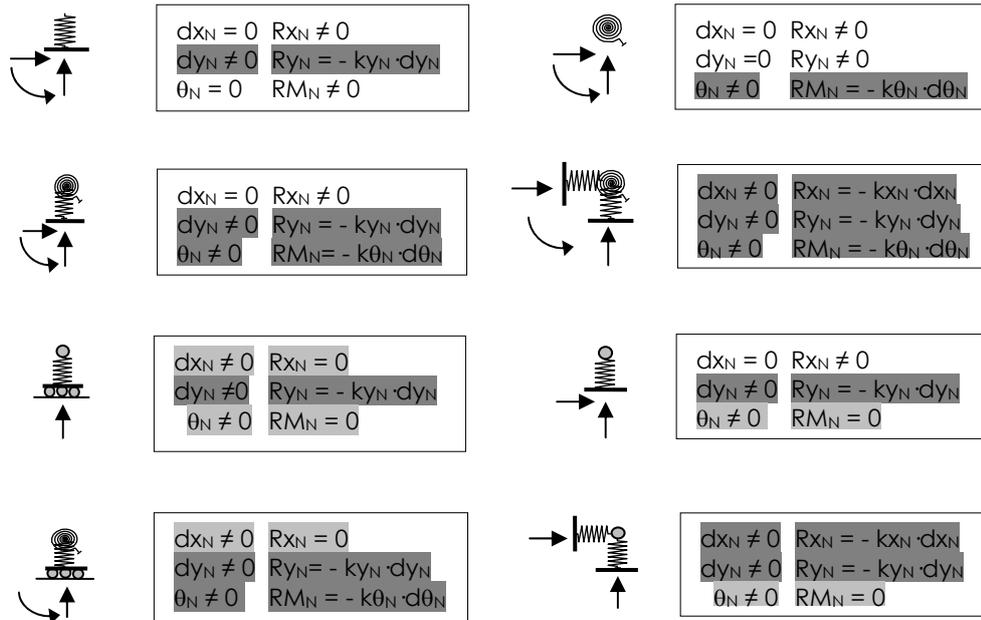


Figura 5. Apoyos elásticos

NUDOS LIBRES

En los nudos libres todos los movimientos del nudo están permitidos, por tanto, en estructuras planas, habrá tres movimientos posible, dos desplazamientos y un giro. Al estar permitidos los movimientos no hay reacciones.



$\begin{aligned} dx_N &\neq 0 & R_{X_N} &= 0 \\ dy_N &\neq 0 & R_{Y_N} &= 0 \\ \theta_N &\neq 0 & R_{M_N} &= 0 \end{aligned}$



Según el tipo de unión, las barras concurrentes en el nudo comparten todos o alguno de los movimientos. Cuando todas ellas están rígidamente unidas entre sí el nudo es rígido y cuando todas las barras están articuladas entre sí se dice que es un nudo articulado (figura 6).

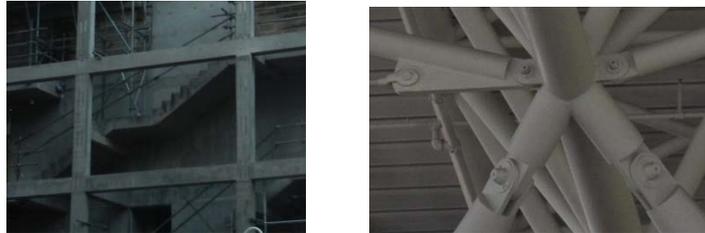


Figura 6. Nudos libres: nudo rígido y nudo articulado.

4.3 Vínculos entre nudo y extremo de barra

La conexión nudo- extremo de barra se establece (en el plano) mediante 3 enlaces o vínculos simples. Cada vínculo consiste en una fuerza de restricción (condición estática) y una igualdad de movimientos (continuidad cinemática).

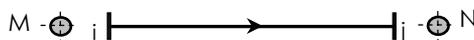
Cuando existe un vínculo entre extremo de barra y nudo en la dirección de cada desplazamiento/giro compartido se produce una transmisión de fuerza/momento interno que garantiza esa igualdad. Las fuerzas/momentos internos del extremo de barra se transmiten al nudo con el mismo valor pero con signo contrario.

Cuando hay un enlace completo entre extremo de barra y nudo se dice que la conexión es rígida, cuando el enlace es incompleto se dice que hay una desconexión que puede ser total o elástica.

CONEXIÓN RÍGIDA

El enlace entre nudo y extremo de barra es completo (figura 7). Hay continuidad estática y cinemática según los 3 ejes. Se dice que los extremos de la barra están empotrados elásticamente a los nudos adyacentes.

Las condiciones de movimientos y esfuerzos de extremo j de barra son:



$dx_j = dx_N$	$F_{x_j} \neq 0$
$dy_j = dy_N$	$F_{y_j} \neq 0$
$\theta_j = \theta_N$	$M_j \neq 0$



Figura 7. Conexión rígida. Barras empotradas elásticamente a los nudos.

DESCONEXIÓN

El enlace entre nudo y extremo de barra es incompleto. Se produce una pérdida de la continuidad estática y cinemática según uno o más ejes

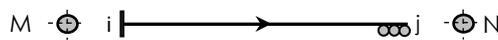


a) **DESCONEXIÓN TOTAL:**

El desplazamiento del extremo de barra en la dirección de la desconexión es diferente del movimiento del nudo. En la sección de contacto entre extremo de barra y nudo no se transmiten las fuerzas internas en la dirección de este desplazamiento.

La desconexión puede estar presente tanto en el extremo i como en el extremo j. A continuación se enumeran los diferentes tipos de desconexión asociados al extremo j:

a.1) **Desconexión total nudo-extremo j a movimiento según eje X:** El extremo j está liberado a movimiento según el eje X local, por lo que no se produce transmisión de esfuerzo según dicho eje en ese extremo de la barra.



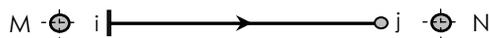
$dx_j \neq dx_N$	$F_{X_j} = 0$
$dy_j = dy_N$	$F_{Y_j} \neq 0$
$\theta_j = \theta_N$	$M_j \neq 0$

a.2) **Desconexión total nudo-extremo j a movimiento según eje Y:** El extremo j está liberado a movimiento según el eje Y local, por lo que no se produce transmisión de esfuerzo según dicho eje en ese extremo de la barra.



$dx_j = dx_N$	$F_{X_j} \neq 0$
$dy_j \neq dy_N$	$F_{Y_j} = 0$
$\theta_j = \theta_N$	$M_j \neq 0$

a.3) **Desconexión total nudo-extremo j a giro (articulación o rótula):** El extremo j está liberado a giro, por lo que no se produce transmisión de momento en ese extremo de la barra (figura 8).

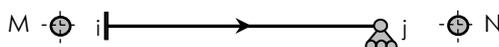


$dx_j = dx_N$	$F_{X_j} \neq 0$
$dy_j = dy_N$	$F_{Y_j} \neq 0$
$\theta_j \neq \theta_N$	$M_j = 0$



Figura 8. Desconexión total a giro.

a.4) **Desconexión total nudo-extremo j a giro y movimiento según el eje X:** El extremo j está liberado a giro y a movimiento según el eje X local, por lo que no se produce transmisión de momento ni de esfuerzo según dicho eje en ese extremo de la barra



$dx_j \neq dx_N$	$F_{X_j} = 0$
$dy_j = dy_N$	$F_{Y_j} \neq 0$
$\theta_j \neq \theta_N$	$M_j = 0$



a.5) Desconexión total nudo-extremo j a giro y movimiento según el eje Y: El extremo j está liberado a giro y a movimiento según el eje Y local, por lo que no se produce transmisión de momento ni de esfuerzo según dicho eje en ese extremo de la barra



$dx_j = dx_N$	$F_{Xj} \neq 0$
$dy_j \neq dy_N$	$F_{Yj} = 0$
$\theta_j \neq \theta_N$	$M_j = 0$

b) DESCONEXIÓN ELÁSTICA O SEMIRRÍGIDA

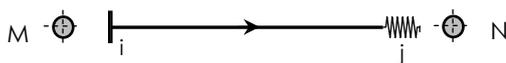
El desplazamiento relativo del extremo de barra y del nudo, en la dirección de la desconexión depende de la rigidez del muelle.

En la sección de contacto entre extremo de barra y nudo se transmiten una fuerza interna que depende de la rigidez del muelle y de su deformación (diferencia entre movimiento del extremo de barra y del nudo)



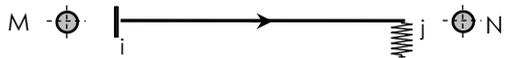
Figura 9. Desconexión elástica.

b.1) Desconexión elástica nudo-extremo j a movimiento según eje X: El extremo j está liberado parcialmente a movimiento según el eje X local, por lo que se produce una transmisión parcial de esfuerzo según dicho eje en ese extremo de la barra.



$dx_j \neq dx_N$	$F_{Xj} \neq 0$	$F_{Xj} = k_{Xj} (dx_N - dx_j)$
$dy_j = dy_N$	$F_{Yj} \neq 0$	
$\theta_j = \theta_N$	$M_j \neq 0$	

b.2) Desconexión elástica nudo-extremo j a movimiento según eje Y: El extremo j está liberado parcialmente a movimiento según el eje Y local, por lo que se produce una transmisión parcial de esfuerzo según dicho eje en ese extremo de la barra.



$dx_j = dx_N$	$F_{Xj} \neq 0$	$F_{Yj} = k_{Yj} (dy_N - dy_j)$
$dy_j \neq dy_N$	$F_{Yj} \neq 0$	
$\theta_j = \theta_N$	$M_j \neq 0$	

b.3) Desconexión elástica nudo-extremo j a giro: El extremo j está liberado parcialmente a giro, por lo que se produce una transmisión parcial de momento en ese extremo de la barra.



$dx_j = dx_N$	$F_{Xj} \neq 0$	
$dy_j = dy_N$	$F_{Yj} \neq 0$	
$\theta_j \neq \theta_N$	$M_j \neq 0$	$M_j = k_{\theta j} (\theta_N - \theta_j)$



b.4) Desconexión elástica nudo-extremo j a giro y a movimientos según los ejes

X e Y: El extremo j está liberado parcialmente a giro y a movimientos según los ejes X e Y locales, por lo que se produce una transmisión parcial de momento y de esfuerzos según dichos ejes en ese extremo de la barra.



$dx_j \neq dx_N$	$F_{X_j} \neq 0$	$F_{X_j} = k_{X_j} (dx_{N_j} - dx_j)$
$dy_j \neq dy_N$	$F_{Y_j} \neq 0$	$F_{Y_j} = k_{Y_j} (dy_{N_j} - dy_j)$
$\theta_j \neq \theta_N$	$M_j \neq 0$	$M_j = k_{\theta_j} (\theta_N - \theta_j)$

5 Cierre

A lo largo de este tema se han identificado las diferentes tipologías de nudo, caracterizándolos estática y cinemáticamente, así como las diferentes vínculos entre nudo y extremo de barra, necesarios para modelizar adecuadamente las estructura antes de su cálculo.

Como ejercicio de aplicación se propone al alumno buscar diferentes tipos de nudos y uniones entre barras y nudos.

Por ejemplo, en la figura 10 se presenta un ejemplo de nudo libre en el que todas las barras están conectadas rígidamente entre sí (nudo rígido) y un ejemplo de empotramiento, ambos en estructura metálica



Figura 10. Ejemplo de nudo libre y empotramiento en estructura metálica.

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Apuntes de clase.

[2] Basset, L.; Cálculo matricial de estructuras. Desconexiones y vínculos, Ed. UPV, SPUPV-97-643

6.2 Figuras: Autora de las figuras y de las fotografías: Luisa Basset

Figura 1. Nudos (A, B, C, D) y extremos de barra (i, j)

Figura 2. Empotramiento en estructura de hormigón, metálica y de madera

Figura 3. Apoyo fijo o articulado

Figura 4. Apoyo simple o articulado-deslizante

Figura 5. Apoyos elásticos



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Figura 6. Nudos libres: nudo rígido y nudo articulado.

Figura 7. Conexión rígida. Barras *empotradas elásticamente a los nudos*.

Figura 8. Desconexión total a giro.

Figura 9. Desconexión elástica.

Figura 10. Ejemplo de nudo libre y empotramiento en estructura metálica.