



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Análisis estático de estructuras planas

<b>Apellidos, nombre</b>	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
<b>Departamento</b>	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
<b>Centro</b>	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



## 1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se efectuará un análisis estático de las estructuras planas consistente en la definición de las componentes estáticas y la relación entre ellas, la definición y obtención del grado de hiperestaticidad, el establecimiento de las hipótesis de pequeños movimientos desde el punto de vista estático y el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio.

## 2 Introducción

En el cálculo de una estructura intervienen siempre componentes estáticas y cinemáticas. Las componentes estáticas (fuerzas externas e internas) se relacionan entre sí mediante ecuaciones de equilibrio (global o parcial), de manera que todas las fuerzas que actúan sobre la estructura completa o sobre cualquier fragmento o parte de la misma deben estar en equilibrio. Estas ecuaciones de equilibrio permiten la resolución estática de la estructura, es decir, la determinación del valor de todas las incógnitas estáticas (reacciones, esfuerzos de extremo de barra y leyes de esfuerzos).

Sin embargo, en muchas ocasiones estas ecuaciones de equilibrio no bastan para la resolución estática de la estructura ya que, si la estructura es hiperestática, el número de incógnitas estáticas es mayor que el número de ecuaciones, debiendo incluir en el proceso de resolución a las condiciones de compatibilidad y leyes de comportamiento, en función del método escogido.

En definitiva, establecidas las hipótesis previas (pequeños movimientos, etc.), para abordar el cálculo estático de una estructura deben formularse las ecuaciones de equilibrio adecuadas, una vez realizado un análisis estático de la misma, clasificándola en función del grado de hiperestaticidad e identificando sus incógnitas estáticas.

## 3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- Identificar las incógnitas estáticas.
- Establecer las implicaciones estáticas de hipótesis de pequeños movimientos
- Formular las condiciones de equilibrio
- Obtener el grado de hiperestaticidad

## 4 Análisis estático de estructuras planas

### 4.1 Componentes estáticas.

Las componentes estáticas son tanto las fuerzas externas, acciones o reacciones, como las fuerzas internas (ver figura 1). Para representar estáticamente la estructura completa o un fragmento de la misma se representarán todas las fuerzas actuantes en el "*diagrama de cuerpo libre*" (de toda la estructura o del fragmento).

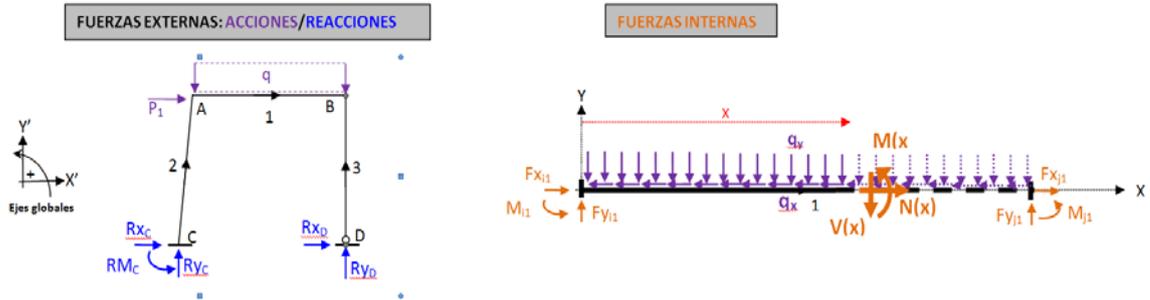


Figura 1. Componentes estáticas

La relación entre fuerzas externas y leyes de esfuerzos puede obtenerse mediante integración. Estas relaciones se recogen en la figura 2.

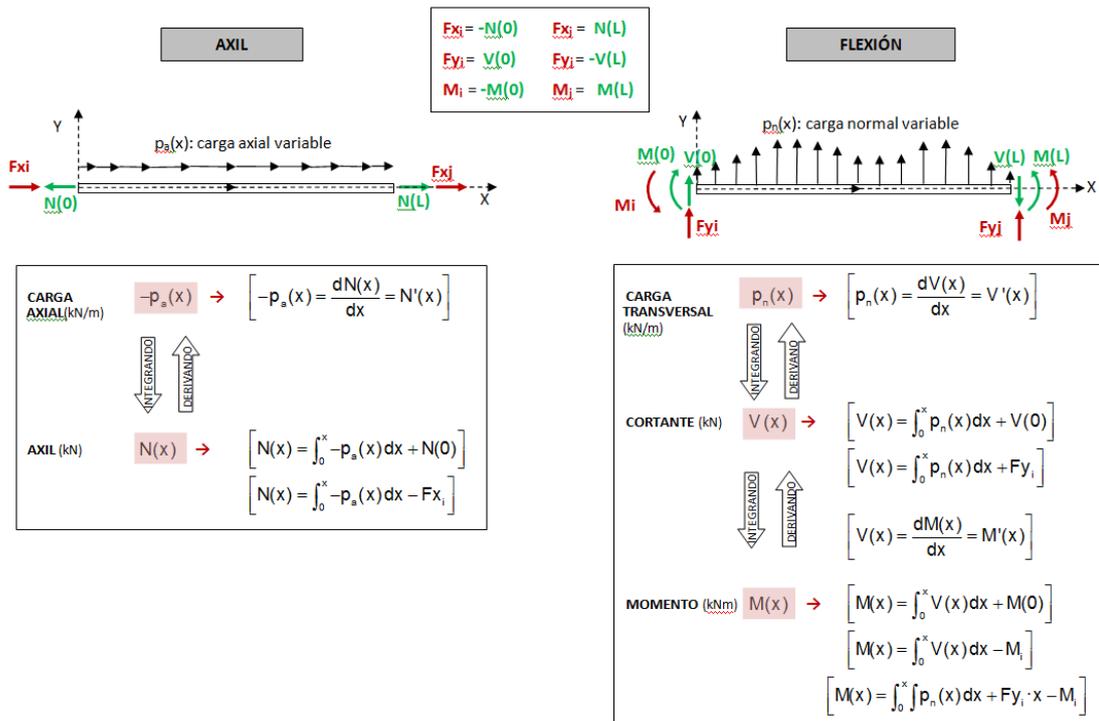


Figura 2. Relación fuerzas externas-leyes de esfuerzos en la barra

## 4.2 Implicaciones estáticas de la hipótesis de pequeños movimientos

La hipótesis de pequeños movimientos puede aceptarse en el cálculo de estructuras cuando los movimientos son de pequeña magnitud en comparación con las dimensiones de las barras. Entonces, las relaciones entre fuerzas y movimientos así como las relaciones entre estos últimos son lineales.

Desde el punto de vista estático, la adopción de la hipótesis de pequeños movimientos tiene las siguientes implicaciones estáticas:

- Las ecuaciones de equilibrio se plantean sobre la geometría indeformada de la estructura
- Los esfuerzos axiles no modifican la rigidez a flexión
- La línea de acción de cargas o esfuerzos axiles es la línea baricéntrica de la barra

### 4.3 Ecuaciones de equilibrio en estructuras planas

La estructura en su conjunto y cualquier parte o fragmento de la misma debe estar en equilibrio, bajo la acción de las fuerzas exteriores aplicadas y de las fuerzas internas. El cumplimiento de estas condiciones genera unas ecuaciones llamadas ecuaciones de equilibrio.

En estructuras planas se dispone, únicamente, de 3 ecuaciones de equilibrio, expresadas según los tres ejes:  $\Sigma F_x=0$ ,  $\Sigma F_y=0$  y  $\Sigma M=0$ . Esas ecuaciones pueden plantearse sobre el conjunto de la estructura o sobre una parte o fragmento de la misma.

#### EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA COMPLETA (figura 3)

En el equilibrio de la estructura completa intervienen únicamente las fuerzas externas: acciones y reacciones.

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0 & P_1+R_{X_C}+R_{X_D}=0 \\ \Sigma F_y=0 & R_{Y_C}+R_{Y_D}=q \cdot a \\ \Sigma M_c=0 & R_{M_C}+R_{Y_D} \cdot c=q \cdot a \cdot b+P_1 \cdot d\end{aligned}$$

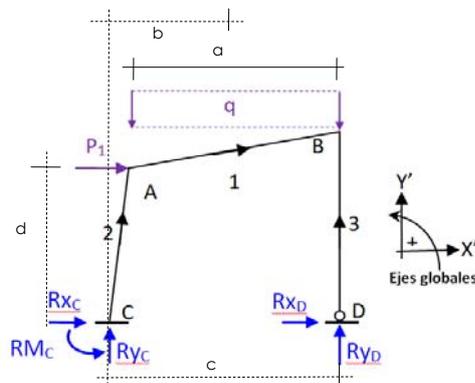


Figura 3. Equilibrio de la estructura completa

#### EQUILIBRIO DE UNA PARTE O FRAGMENTO

En el equilibrio de una parte o fragmento de la estructura intervienen las fuerzas externas que actúan sobre ese fragmento (acciones y reacciones) y las fuerzas internas en el corte.

En cada parte se plantearán las tres ecuaciones de equilibrio mencionadas. En la figura 4 se representan las fuerzas que intervendrán en el equilibrio de cada uno de los fragmentos planteados.

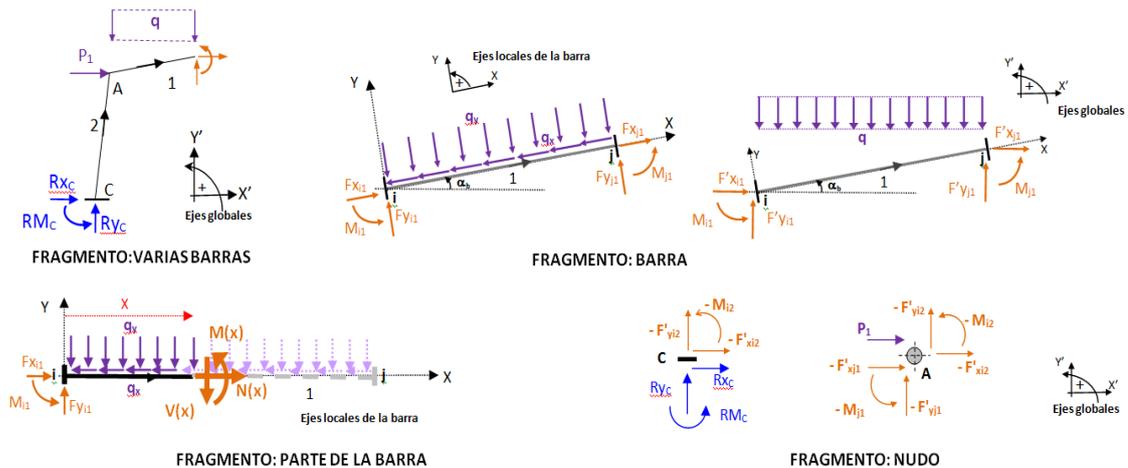


Figura 4. Equilibrio en una parte o fragmento de la estructura

#### 4.4 Grado de indeterminación estática

El grado de indeterminación estática (GIE) o grado de hiperestaticidad es el número de fuerzas redundantes de la estructura. Representa, por tanto, la diferencia entre el número de incógnitas estáticas y el número de ecuaciones estáticas (ecuaciones de equilibrio).

El número de fuerzas redundantes NO varía para una misma estructura, aunque sí pueden variar las incógnitas estáticas que se elijan como fuerzas redundantes. Estas fuerzas deben ser independientes entre sí

El grado de indeterminación estática puede determinarse efectuando el balance entre las incógnitas y las ecuaciones estáticas o ecuaciones de equilibrio, o bien mediante el método de los cortes.

##### BALANCE ENTRE INCÓGNITAS Y ECUACIONES ESTÁTICAS:

- Número de incógnitas estáticas:  $\sum R_{ext} + 6B$

EXTERNAS: reacciones exteriores. En una estructura plana habrá un máximo de 3 reacciones si el nudo está totalmente restringido ( $R_{ext} = 3$ ) y un mínimo de 1 si tiene 2 movimientos liberados ( $R_{ext} = 3 - DT_a$ ). Si tuviera los 3 movimientos liberados dejaría de ser un apoyo y pasaría a ser un nudo libre.

$\sum R_{ext}$ : número total de reacciones externas

$\sum R_{ext} = 3A - \sum DT_a$

A: número de nudos de apoyo

$\sum DT_a$  = nº desconexiones totales apoyos

INTERNAS: esfuerzos de extremo de barra. En cada extremo de la barra de una estructura plana, hay 3 esfuerzos, luego las incógnitas serán  $6B$ , siendo B el número de barras.

- Número de ecuaciones estáticas (ecuaciones de equilibrio):  $3NL + 3A + 3B + \sum DT_b$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN LOS NUDOS: En una estructura plana se pueden plantear 3 ecuaciones de equilibrio, según los ejes  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , en cada



nudo, tanto en los nudos libres (NL) como en los apoyos (A), por tanto habrá  $(3NL + 3A)$  ecuaciones

ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN LAS BARRAS: Hay 3 ecuaciones de equilibrio en la barra (3B). Éstas reducen el número de incógnitas efectivas de 6B a 3B

CONDICIÓN DE ESFUERZO NULO POR LA PRESENCIA DE UNA DESCONEXIÓN TOTAL EN EXTREMO DE BARRA. La presencia de una desconexión total en un extremo de barra añade una ecuación estática, ya que el esfuerzo en la dirección de la desconexión es nulo. El número de ecuaciones aportadas será  $\sum DTb$ , siendo DTb el número de desconexiones totales en extremo de barra

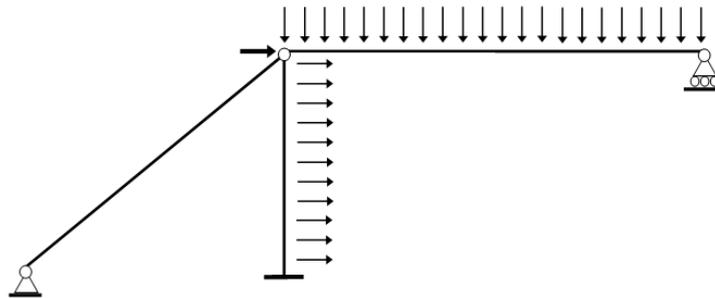
El grado de indeterminación estática será:

$$GIE = (\sum R_{ext} + 6B) - (3NL + 3A + 3B + \sum DTb) = (\sum R_{ext} + 3B) - (3NL + 3A + \sum DTb),$$

y como  $\sum R_{ext} = 3A - \sum DTa$ , puede obtenerse también mediante la expresión:

$$GIE = 3B - (3NL + \sum DTb + \sum DTa)$$

En la figura 5 se obtiene el grado de indeterminación estática mediante el balance entre incógnitas y ecuaciones estáticas.



$GIE = (\sum R_{ext} + 3B) - (3NL + 3A + \sum DTb)$	➔	$GIE = (6 + 3 \cdot 3) - (3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2) = 15 - 14 = 1$	<b>GIE = 1</b>
$GIE = 3B - (3NL + \sum DTb + \sum DTa)$	➔	$GIE = (3 \cdot 3) - (3 \cdot 1 + 5) = 9 - 8 = 1$	

Figura 5. Ejemplo de determinación del GIE: balance incógnitas-ecuaciones.

### MÉTODO DE LOS CORTES

Descomponiendo la estructura original en subestructuras mediante una serie de cortes, se puede obtener el grado de indeterminación estática sumando el número de esfuerzos internos suprimidos en cada corte y el GIE de cada subestructura.

La expresión del grado de indeterminación estática mediante este procedimiento es:

$$GIE = (\sum GIE_{subestructura} + \sum \text{Fuerzas corte})$$

En la figura 6 se obtiene el grado de indeterminación estática mediante el método de los cortes

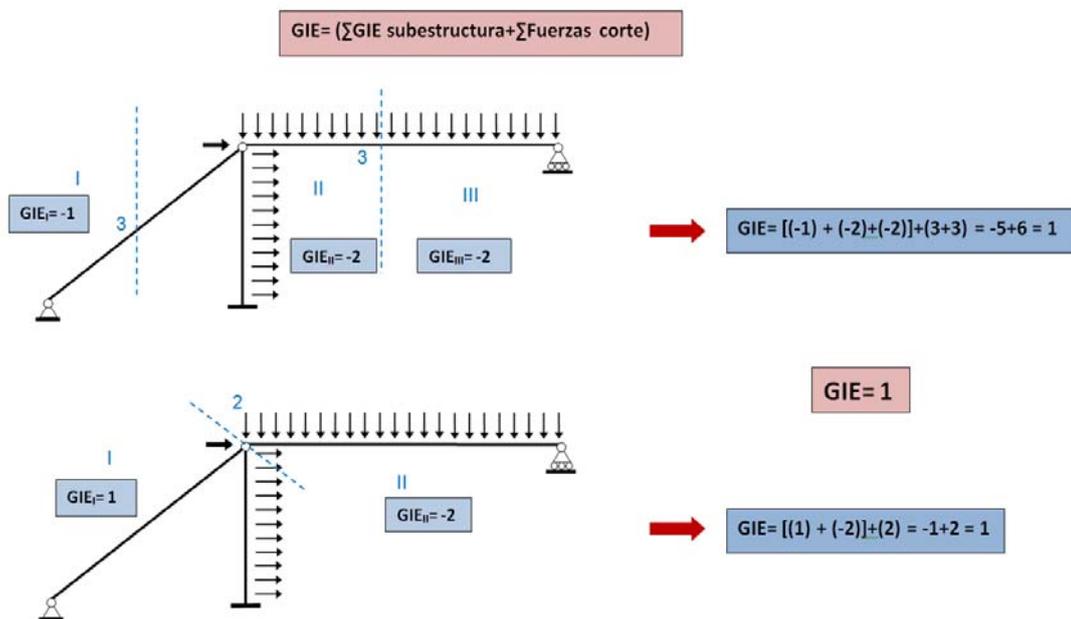


Figura 6. Ejemplo de determinación del GIE: método de los cortes.

Las estructuras se clasifican estáticamente, según el GIE, en estructuras hiperestáticas ( $GIE > 0$ ), estructuras isostáticas ( $GIE = 0$ ) y estructuras hipostáticas ( $GIE < 0$ ).

En las estructuras hiperestáticas, el número de ecuaciones de equilibrio es menor que el número de incógnitas estáticas (sistema compatible indeterminado), por lo que son estáticamente indeterminadas, es decir, tienen infinitas soluciones estáticas (para obtener el valor real de las incógnitas estáticas hay que considerar las condiciones de compatibilidad y las leyes de comportamiento). En el valor de las incógnitas estáticas influye la cinemática, el material, la geometría de las secciones, la deformación y los movimientos impuestos (asientos, ajustes, etc.).

En las estructuras isostáticas, el número de ecuaciones de equilibrio es igual que el número de incógnitas estáticas (sistema compatible determinado), por lo que son estáticamente determinadas, es decir, tienen una única solución estática (el valor real de las incógnitas estáticas se obtiene con las ecuaciones de equilibrio). El valor de las incógnitas estáticas es independiente de la cinemática, del material, de la geometría de las secciones, de la deformación y de los movimientos impuestos.

En las estructuras hipostáticas, el número de ecuaciones de equilibrio es menor que el número de incógnitas estáticas (sistema incompatible), por lo que no hay solución estática. La estructura no puede equilibrarse, es un mecanismo, produciéndose inestabilidades totales o parciales.

Es importante tener en cuenta que el hecho de que el GIE sea igual o mayor que 0 no garantiza que la estructura sea estable, pudiendo tener una inestabilidad local y, por tanto, será también un mecanismo.

En la figura 7 se muestran ejemplos de estructuras hiperestáticas, isostáticas y mecanismos.

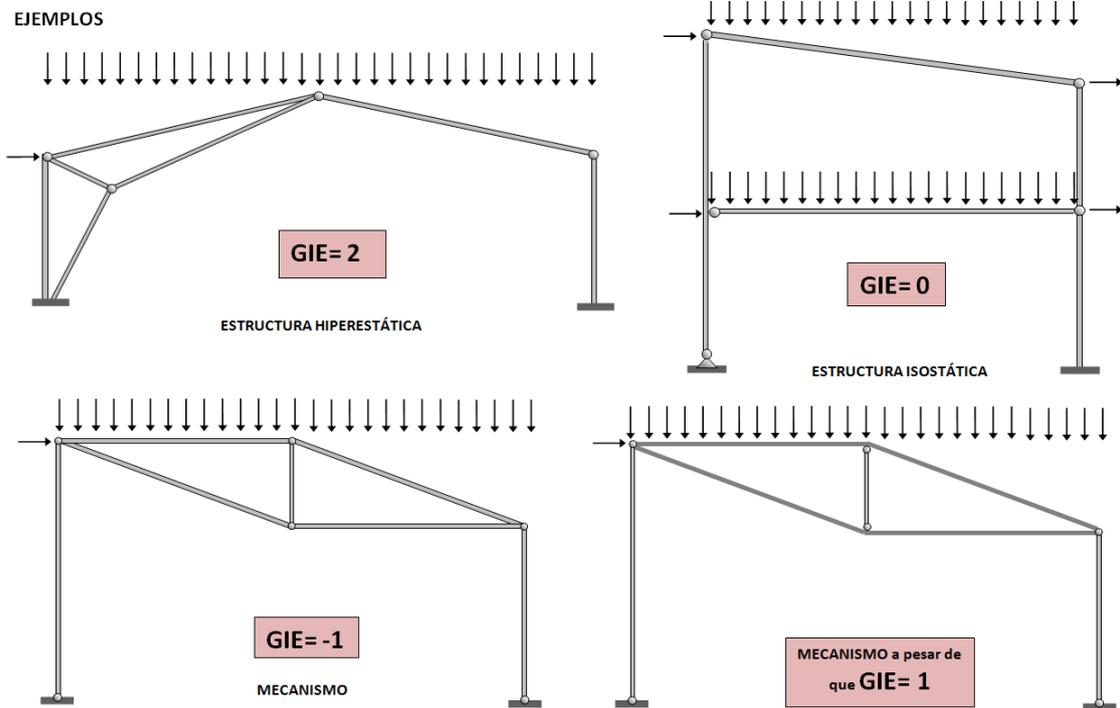


Figura 7. Ejemplos de estructuras hiperestáticas, isostáticas y mecanismos.

## 5 Cierre

A lo largo de este tema se ha presentado un análisis desde el punto de vista estático, identificando las componentes estáticas, enumerando las implicaciones estáticas de la hipótesis de los pequeños movimientos, formulando las ecuaciones de equilibrio y determinando el grado de hiperstaticidad, es decir el número de incógnitas estáticas principales, clasificando a partir de éste las estructuras.

Como ejercicio de aplicación se propone calcular el valor del grado de hiperstaticidad de la estructura de la figura mediante los dos métodos propuestos. Si la estructura fuese hiperestática proponer, a partir de ella, una estructura isostática, garantizando que sea estable, es decir, que no constituya un mecanismo

(Resultado:  $GIE=1$ . Una posibilidad de transformación en isostática es hacer deslizante el apoyo de la derecha)

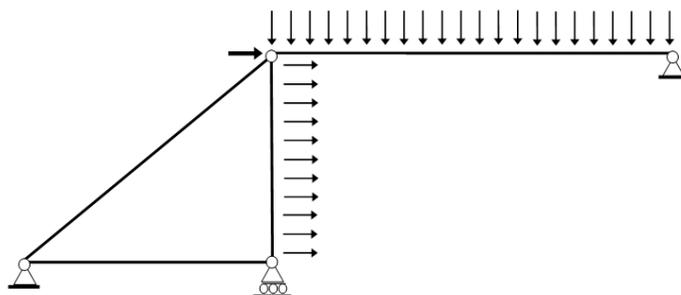


Figura 8. Ejercicio propuesto.



## 6 Bibliografía

### 6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Apuntes de clase.

[2] Basset, L. "Clasificación estática de las estructuras", Artículo Docente ETSA, 2012. Disponible en Riunet: <http://hdl.handle.net/10251/16447>

[2] Basset, L. "Cálculo estático de una estructura isostática", Artículo Docente ETSA, 2012. Disponible en Riunet: <http://hdl.handle.net/10251/16480>

### 6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Componentes estáticas

Figura 2. Relación fuerzas externas-leyes de esfuerzos en la barra

Figura 3. Equilibrio de la estructura completa

Figura 4. Equilibrio en una parte o fragmento de la estructura

Figura 5. Ejemplo de determinación del GIE: balance incógnitas-ecuaciones.

Figura 6. Ejemplo de determinación del GIE: método de los cortes.

Figura 7. Ejemplos de estructuras hiperestáticas, isostáticas y mecanismos.

Figura 8. Ejercicio propuesto