Métodos energéticos de cálculo de estructuras planas: el Principio de Conservación de la Energía

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València

1 Resumen de las ideas clave

Uno de los métodos energéticos aplicables a estructuras planas es el Principio de Conservación de la Energía, PCE.
En este artículo, tras explicar los conceptos de trabajo y energía de deformación y establecer las hipótesis de partida, se formulará la expresión de este principio, aplicándolo mediante un ejemplo práctico.

2 Introducción

El Principio de Conservación de la Energía es aplicable, entre otros, al campo de las estructuras. Aunque proporciona una única ecuación de balance energético, es uno de los métodos energéticos que permite la obtención de reacciones en estructuras resueltas cinemáticamente o de movimientos concretos en una estructura resuelta estáticamente, siendo ésta última su aplicación más habitual. Si hay una fuerza puntual actuando en ese punto y en la dirección del movimiento, y esa fuerza es la única que genera un trabajo exterior, en la ecuación de balance habrá una única incógnita que será el movimiento buscado.

Las fuerzas exteriores que actúan sobre una estructura generan diferentes tipos de trabajos modificando la energía del sistema. Estas magnitudes se relacionan mediante la ecuación de balance energético del Principio de Conservación de la Energía, interviniendo el trabajo elástico (W_e) y la energía de deformación (U) o bien el trabajo complementario (W*) y la energía de deformación complementaria (U*). Se explicarán estas magnitudes y sus expresiones, calculando su valor a partir de un ejemplo práctico.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- Distinguir entre trabajo de las fuerzas exteriores, trabajo elástico y trabajo complementario y obtener sus expresiones en el caso de una estructura plana con comportamiento elástico y lineal
- Obtener la expresión de la energía de deformación y de la energía de deformación complementaria en el caso de una estructura plana con comportamiento elástico y lineal
- Determinar si es aplicable el PCE para la obtención del movimiento deseado y, si no lo es, simplificar la estructura para que lo sea.
- Obtener el movimiento mediante el PCE

4 El Principio de Conservación de la Energía

4.1 Concepto elemental de trabajo y energía

Trabajo y energía son conceptos relacionados entre sí: las fuerzas del sistema producen trabajo y el sistema posee energía, de modo que el trabajo se desarrolla a expensas de una modificación de la energía. Ambas magnitudes dependen del tipo de fuerzas (externas, internas,...), de la forma de actuación de las fuerzas (instantánea, estática, ...) y de las características del sólido sobre el que actúen (rígido, deformable).

Se puede definir el trabajo como la acción de producir un cambio de configuración del sistema bajo la actuación de una o más fuerzas, por tanto, producen trabajo los campos de fuerzas sobre los campos de desplazamiento en su dirección. Desde el punto de vista estructural podemos considerar tres tipos de trabajo: Trabajo de las fuerzas exteriores (W_{ext}), Trabajo elástico (W_e) y Trabajo complementario (W^*)

Se puede definir la energía como la capacidad que tiene un sistema de producir un trabajo, es decir, de cambiar su configuración. No es, por tanto, un concepto absoluto sino relativo entre dos estados. Las formas de energía presentes en el ámbito de las estructuras son la energía potencial, energía cinética, energía elástica o de deformación, energía de disipación por rozamiento o fricción.

4.2 Trabajo total de las fuerzas exteriores (W_{ext}), Trabajo elástico (W_e) y Trabajo complementario (W^*)

El trabajo total de las fuerzas exteriores (W_{ext}) se produce cuando una fuerza se desplaza con las siguientes condiciones:

- Puesta en carga súbita o instantánea
- Fuerzas y desplazamientos con su valor final (total)

En el caso de una barra en voladizo sobre la que actúa una fuerza axial (figura 1) el trabajo será:

$$W_{ext} = P_f \cdot \Delta_f$$

Δ_f: Desplazamiento (valor final o total), variable independiente

P_f: fuerza axial (valor final o total), variable dependiente

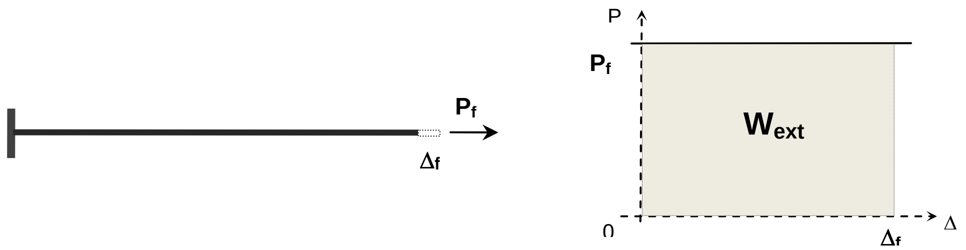


Figura 1. Trabajo de las fuerzas exteriores. Carga axial. Representación gráfica

El Trabajo elástico (W_e) y el trabajo complementario (W^*) se producen con las siguientes condiciones

- Puesta en carga lenta o estática
- La fuerza y los desplazamientos aumentan lentamente de 0 a su valor final

Debe conocerse la relación entre fuerzas y desplazamientos y viceversa

En el trabajo elástico (W_e), la variable independiente es el desplazamiento (Δ) y la variable dependiente es la fuerza (P), mientras que en el caso del trabajo complementario (W^*), la variable independiente es la fuerza (P) y la variable dependiente el desplazamiento (Δ).

Para el ejemplo anterior, las expresiones de ambos trabajos, representados gráficamente en la figura 2, son las siguientes:

Comportamiento elástico pero NO LINEAL:

$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P(\Delta)\, d\Delta \qquad\qquad W^* = \int_0^{P_f} \Delta(P)\, dP$$

Comportamiento elástico y LINEAL:

$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P(\Delta) d\Delta = \int_0^{\Delta_f} k\Delta d\Delta = k\frac{\Delta_f^{\,2}}{2} = \frac{1}{2} P_f \Delta_f \qquad W^* = \int_0^{P_f} \Delta(P) dP = \int_0^{P_f} \frac{P}{k} dP = \frac{P_f^{\,2}}{2k} = \frac{1}{2} P_f \Delta_f$$

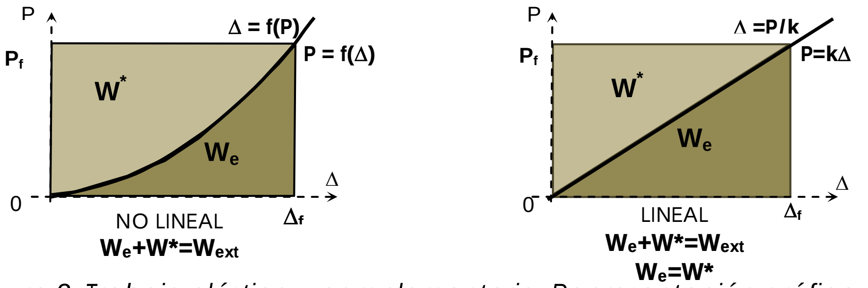


Figura 2. Trabajo elástico y complementario. Representación gráfica

Cuando actúan varias fuerzas el trabajo total de las fuerzas exteriores, el trabajo elástico y el trabajo complementario serán la suma del trabajo realizado por cada una de ellas. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1 (figura 3)

Trabajo de las fuerzas exteriores:

$$W_{ext} = W_{extP1} + W_{extq} + W_{extM} = P_1 \cdot dx_A + \int_0^{L_1} (-q_x) \cdot u_1(x) \cdot dx + \int_0^{L_1} (-q_y) \cdot v_1(x) \cdot dx + M \cdot \theta_B$$

(qx, qy son negativos por su sentido respecto a los ejes locales de la barra 1)

Trabajo elástico (comportamiento elástico y lineal):

$$W_e = W_{eP1} + W_{eq} + W_{eM} = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot dx_A + \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \cdot (-q_x) \cdot u_1(x) \cdot dx + \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \cdot (-q_y) \cdot v_1(x) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \theta_B$$

Trabajo complementario (comportamiento elástico y lineal):

$$W^* = W^*_{P1} + W^*_q + W^*_M = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot dx_A + \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \cdot (-q_x) \cdot u_1(x) \cdot dx + \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \cdot (-q_y) \cdot v_1(x) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \theta_B$$

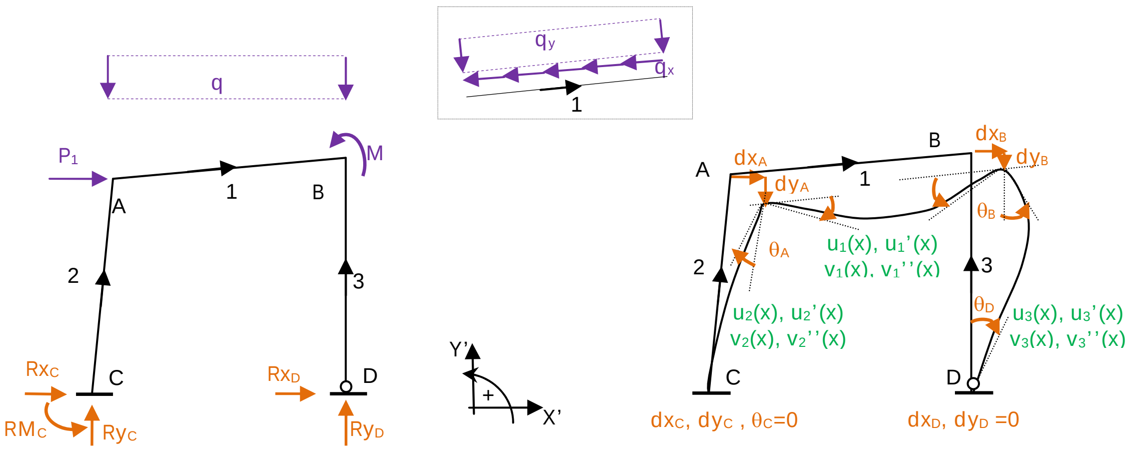


Figura 3. Ejemplo1: fuerzas exteriores y desplazamientos.

4.3 Energía de deformación (U) y energía de deformación complementaria (U*)

A medida que la estructura se deforma, con una puesta en carga lenta o estática y suponiendo un comportamiento elástico (lineal o no lineal) las fuerzas internas producen un trabajo llamado trabajo interno, que es siempre negativo. La energía de deformación (U) o energía potencial interna es la capacidad que tienen las fuerzas internas de producir ese trabajo, en virtud del estado deformado de la estructura. Es, por tanto, la energía elástica que se acumula a medida que ésta se deforma. Es siempre positiva. Su magnitud complementaria es la energía de deformación complementaria (U*)

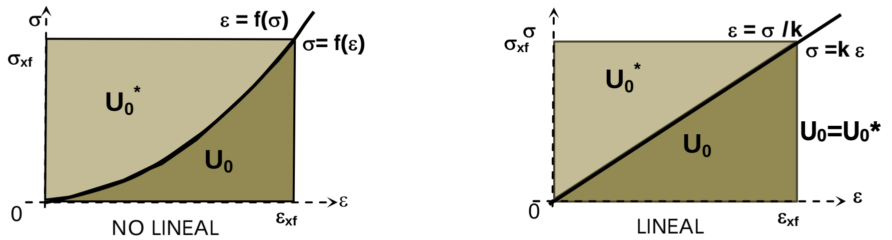
Si en la energía de deformación la variable independiente son deformaciones y la variable dependiente las tensiones (σ=f(ε)), en la energía de deformación complementaria (U*), la variable independiente son las tensiones y la variable dependiente las deformaciones (ε =f(σ)).

La expresión general es:

$$U = \int_V U_0 \, dV = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) \, d\varepsilon \right) dV \qquad \text{(}U_0\text{: densidad de energía de deformación)}$$

$$U^* = \int_V U_0^* dV = \int_V \left(\int_0^{\sigma} \varepsilon(\sigma) \, d\sigma \right) dV \qquad \text{(}U_0^*\text{: densidad de energía de deformación complementaria)}$$

En la figura 4 se puede ver la representación gráfica de la densidad de energía de deformación en el caso de la barra con carga axial de la figura 1.



$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{xf}} \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad U_0^* = \int_0^{\sigma_{xf}} \varepsilon(\sigma)\, d\sigma$$

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{xf}} E\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_{xf}\varepsilon_{xf} \qquad U_0^* = \int_0^{\sigma_{xf}} \frac{\sigma}{E} d\sigma = \frac{1}{2}\sigma_{xf}\varepsilon_{xf}$$

Figura 4. Densidad de energía de deformación normal y complementaria. Carga axial. Representación gráfica

La energía de deformación de una estructura de barras es la suma de la energía de deformación de cada barra.

Retomemos el ejemplo 1 (figura 3) del que hemos calculado la expresión del trabajo. La expresión de la energía de deformación y de la energía de deformación complementaria, suponiendo un comportamiento elástico y lineal y despreciando la deformación por cortante, será la siguiente:

Energía de deformación:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = U_{axil1} + U_{flector1} + U_{axil2} + U_{flector2} + U_{axil3} + U_{flector3}$$

AXIL: ε_x=u'(x)

$$U_{axil} = \int_V U_0 \, dV = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} E\,\varepsilon_x \, d\varepsilon \right) dV = \int_V \frac{1}{2} E\,\varepsilon_x^2 \, dV = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} E \left[u'(x)\right]^2 dA \right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} E\,A \left[u'(x)\right]^2 dx$$

FLECTOR: $\varepsilon_x = y \cdot v''(x)$

$$U_{flector} = \int_V U_0\, dV = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} E\, \varepsilon_x\, d\varepsilon \right) dV = \int_V \frac{1}{2} E\, \varepsilon_x^2\, dV = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} E y^2 \left[v''(x) \right]^2 dA \right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left[v''(x) \right]^2 dx$$

Energía de deformación complementaria:

$$U^* = U_1^* + U_2^* + U_3^* = U_{axil1}^* + U_{flector1}^* + U_{axil2}^* + U_{flector2}^* + U_{axil3}^* + U_{flector3}^*$$

AXIL: $\sigma_x = N(x)/A$

$$U_{axil}^* = \int_V U_0^*\, dV = \int_V \left(\int_0^{\sigma} \frac{\sigma_x}{E}\, d\sigma \right) dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E}\, dV = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} \frac{\left[N(x) \right]^2}{EA^2} dA \right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{\left[N(x) \right]^2}{EA} dx$$

FLECTOR: $\sigma_x = [M(x)y]/I$

$$U_{flector}^* = \int_V U_0^*\, dV = \int_V \left(\int_0^{\sigma} \frac{\sigma_x}{E}\, d\sigma \right) dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E}\, dV = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} \frac{\left[M(x) \right]^2}{EI^2} y^2 dA \right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{\left[M(x) \right]^2}{EI} dx$$

4.4 El Principio de Conservación de la Energía (PCE)

Partiendo de una puesta en carga lenta, en un proceso isotérmico y adiabático, la ecuación de balance energético del PCE es la siguiente:

$W_e = U$, o bien, desde el punto de vista complementario, $W^* = U^*$

Si el comportamiento, además de elástico, es lineal, como: $W^* = W_e$ y $U = U^*$, entonces:

$W^* = W_e = W_{ext}/2 = U = U^*$

Puede utilizarse para la obtención de una fuerza incógnita en la dirección y punto de aplicación de un movimiento conocido (W_e=U) o bien para la obtención de un movimiento incógnita en la dirección y punto de aplicación de una fuerza conocida (W*=U*).

Al disponer de una única ecuación de balance energético, sólo puede haber una incógnita y ésta debe estar en la ecuación. Además, la estructura debe estar resuelta cinemáticamente (We=U) o estáticamente (W*=U*).

Aplicaremos el PCE al cálculo de la flecha en el punto de aplicación de la carga en la estructura de la figura 5.

Datos: EA_1=546000 kN, EA_2=4153800 kN, EI_2=121128 kNm^2

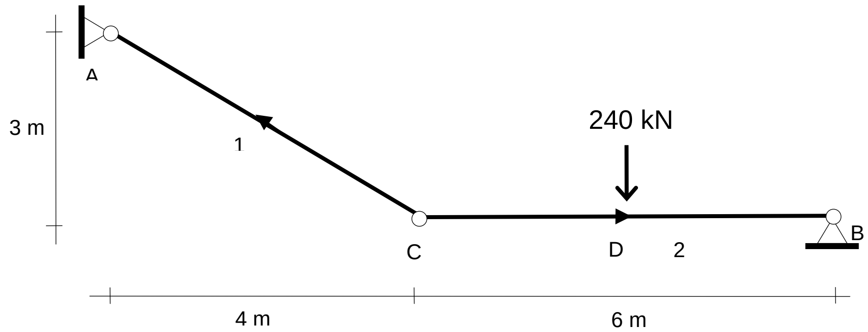


Figura 5. Ejemplo de aplicación del PCE.

Empezaremos resolviendo estáticamente la estructura.

Reacciones:

Rx_A=-160 kN Ry_A=120 kN Rx_B=160 kN Ry_B=120 kN

Leyes de esfuerzos:

N_1= 200 N_2=160 $M_{2CD}(x)$=120x $M_{2DB}(x)$=360-120x

Si aplicamos el PCE tendremos la siguiente ecuación de balance energético:

W* = U*

siendo:

$$W^* = \frac{1}{2}\cdot(-240)\cdot dy_D$$

$$U^* = \frac{200^2\cdot 5}{2EA_1} + \frac{160^2\cdot 6}{2EA_2} + \int_0^3 \frac{[120x]^2}{2EI_2}dx + \int_0^3 \frac{[360-120x]^2}{2EI_2}dx = \frac{2.5431}{2}$$

$$W^* = U^* \quad \rightarrow \quad \frac{-240\cdot dy_D}{2} = \frac{2.5431}{2} \quad \rightarrow \quad dy_D = -1.06\cdot 10^{-2}\text{ m}$$

5 Cierre

A lo largo de este tema se han explicado los conceptos de trabajo y energía. Asimismo, se ha explicado la diferencia entre trabajo de las fuerzas exteriores, trabajo elástico y trabajo complementario obteniendo sus expresiones mediante un ejemplo. Ese mismo ejemplo se ha utilizado para expresar la energía de deformación y la energía de deformación complementaria.

Finalmente, se ha formulado el principio de conservación de la energía obteniendo el valor de la flecha en el punto de aplicación de una fuerza puntual.

Como ejercicio de aplicación se propone calcular el valor del giro en el nudo B de la estructura de la figura 6.

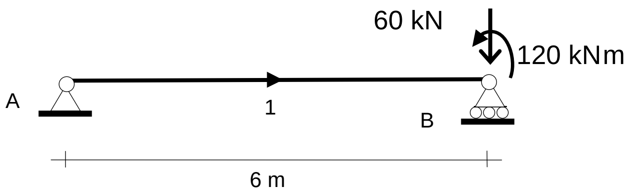


Figura 6. Ejercicio propuesto.

Datos: EI=24717 kNm^2.
(Resultado: $\theta = -9.71\cdot 10^{-3}$ rad)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Abdilla E. “Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1”. Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

[2] Basset, L.; Apuntes de clase.

[3] Gere J.M., Timoshenko S.P. “Mecánica de Materiales” Grupo editorial Iberoamérica. 1984

6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset