



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Análisis cinemático de estructuras planas

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se efectuará un análisis cinemático de las estructuras planas consistente en la definición de las componentes cinemáticas y la relación entre ellas, la definición y obtención del grado de indeterminación cinemática, el establecimiento de las hipótesis de pequeños movimientos desde el punto de vista cinemático, el planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad y la definición de la configuración cinemática admisible.

2 Introducción

En el cálculo de una estructura intervienen siempre componentes estáticas y cinemáticas. Las componentes cinemáticas (movimientos externos e internos) se relacionan entre sí mediante ecuaciones de compatibilidad (externa o interna), de manera que todos los movimientos deben ser compatibles o cinemáticamente admisibles.

La resolución cinemática de la estructura consiste en la determinación del valor de todas las incógnitas cinemáticas (movimientos de los nudos, movimientos de los extremos de barra y funciones de desplazamiento). Para ello, dado que habitualmente las estructuras son hiperkinemáticas e hiperestáticas, será necesario incluir en el proceso de resolución tanto las ecuaciones derivadas de la aplicación de las condiciones de compatibilidad como las condiciones de equilibrio y leyes de comportamiento, en función del método escogido.

Para abordar el cálculo cinemático de una estructura, establecidas las hipótesis previas (pequeños movimientos, etc.), deben identificarse las incógnitas cinemáticas y formularse las ecuaciones de compatibilidad adecuadas.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- Identificar las incógnitas cinemáticas.
- Establecer las implicaciones cinemáticas de hipótesis de pequeños movimientos
- Formular las condiciones de compatibilidad
- Obtener el grado de indeterminación cinemática
- Dibujar una configuración cinemática admisible

4 Análisis cinemático de estructuras planas

4.1 Componentes cinemáticas.

Las componentes cinemáticas, figura 1, son los movimientos externos (movimientos de los nudos) y los movimientos internos (movimientos de los extremos de las barras). Algunos movimientos de los nudos serán dato, concretamente aquellos movimientos restringidos de los apoyos que constituyen

las condiciones e contorno de la estructura. En el caso de estructuras planas deberán ser como mínimo 3.

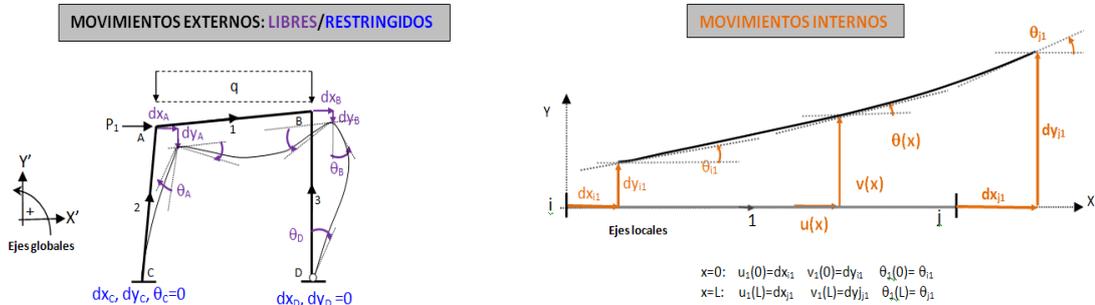


Figura 1. Componentes cinemáticas

La relación entre las funciones de deformación y las funciones de desplazamiento de la barra se establecen mediante integración o derivación. Estas relaciones, en el caso del axil y la flexión, se recogen en la figura 2. En esta misma figura se expresan también las relaciones entre funciones de desplazamiento y leyes de esfuerzos, supuesto un comportamiento lineal de la estructura.

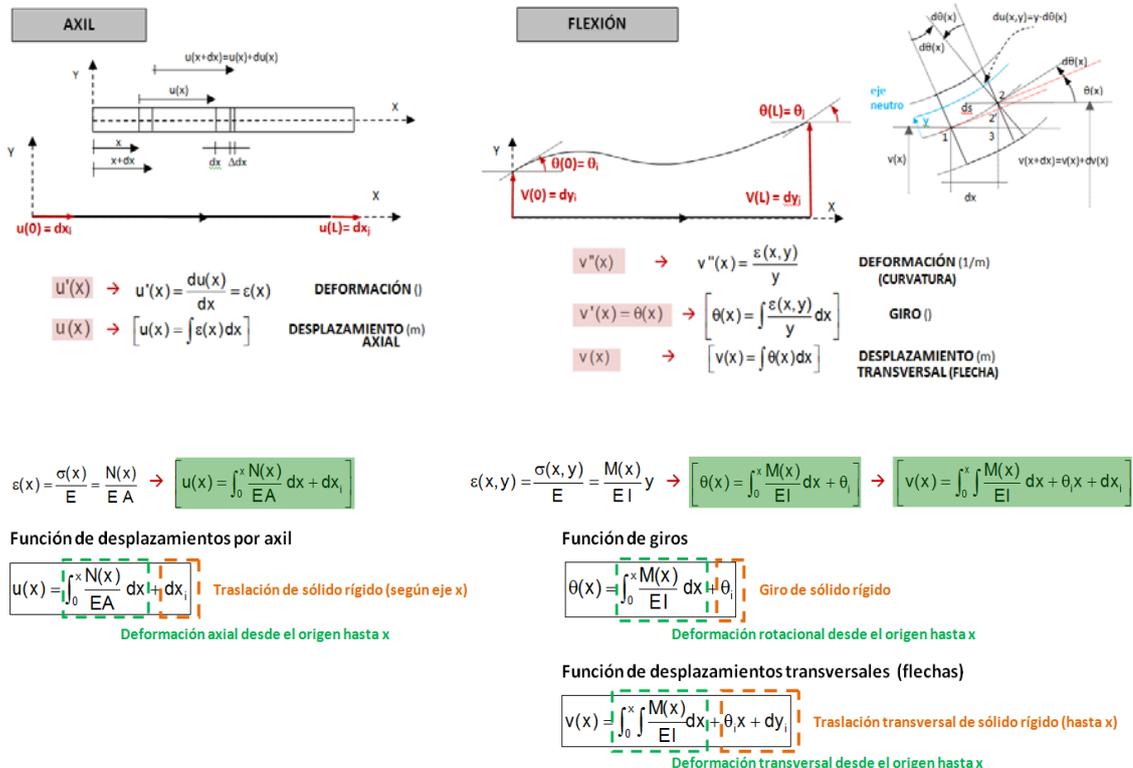


Figura 2. Relación funciones de deformación, funciones de desplazamiento y leyes de esfuerzos en la barra

4.2 Implicaciones cinemáticas de la hipótesis de pequeños movimientos

La hipótesis de pequeños movimientos puede aceptarse en el cálculo de estructuras cuando los movimientos son de pequeña magnitud en comparación con las dimensiones de las barras. Entonces, las relaciones entre fuerzas y movimientos así como las relaciones entre estos últimos son lineales.

Desde el punto de vista cinemático, la adopción de la hipótesis de pequeños movimientos tiene las siguientes implicaciones cinemáticas:

- La rotación es pequeña, por tanto, la tangente y el seno del ángulo girado coinciden prácticamente con el valor del ángulo en radianes y el coseno tiende a 1: $\operatorname{tg}(\theta) \approx \theta$ $\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta$ $\operatorname{cos}(\theta) \approx 1$
- La rotación de sólido rígido y la flexión no modifican la longitud de la barra
- Las elongaciones son pequeñas y únicamente son producidas por axil

La figura 3 muestra la posición inicial y final de una barra, aceptando la hipótesis de pequeños movimientos en el caso de que se produzca o no elongación de la misma.

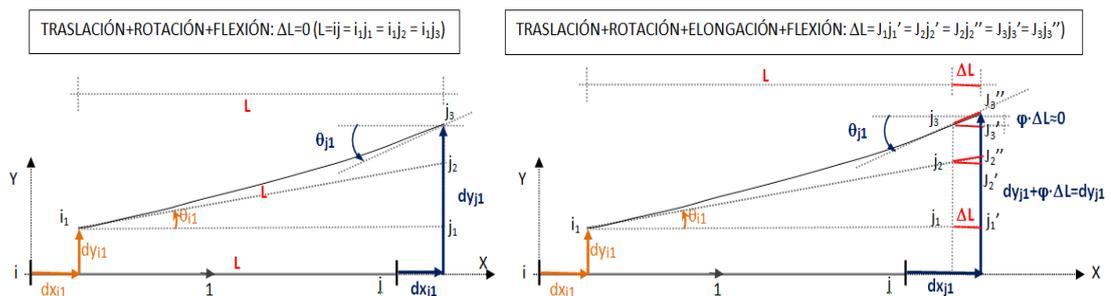


Figura 3. Movimientos de la barra (hipótesis de pequeños movimientos)

En el caso de que haya elongación, la longitud inicial y final de la barra difieren en un infinitésimo de 1^{er} orden ($L \approx L + \Delta L$) y los desplazamientos transversales de un punto, antes y después de la deformación, difieren en infinitésimos de 2^o orden y son, por tanto, despreciables ($\varphi \cdot \Delta L$)

4.3 Ecuaciones de compatibilidad en estructuras planas

El desplazamiento global de la estructura será compatible con las condiciones de contorno. Además, el desplazamiento de cualquier parte de la estructura será compatible con el desplazamiento general de la estructura completa, siendo continuo en todas sus partes o fragmentos. La compatibilidad se plantea, por tanto, en el contorno (compatibilidad externa) e internamente, en los puntos de corte de cada parte o fragmento en que se subdivide ésta.

El cumplimiento de estas condiciones genera unas ecuaciones llamadas ecuaciones de compatibilidad. En estructuras planas se dispone, únicamente, de 3 ecuaciones de compatibilidad en cada punto, expresadas en forma de igualdad de los tres movimientos posibles (desplazamientos según los ejes X e Y, giro según el eje Z).

COMPATIBILIDAD EXTERNA (figura 4)

Se plantea en los nudos de apoyo de la estructura. La estructura plana necesita, como mínimo, tres enlaces no nulos y no concurrentes para ser estable, por eso, habrá, como mínimo, 3 condiciones de compatibilidad externa. El número de condiciones dependerá del tipo de apoyo.

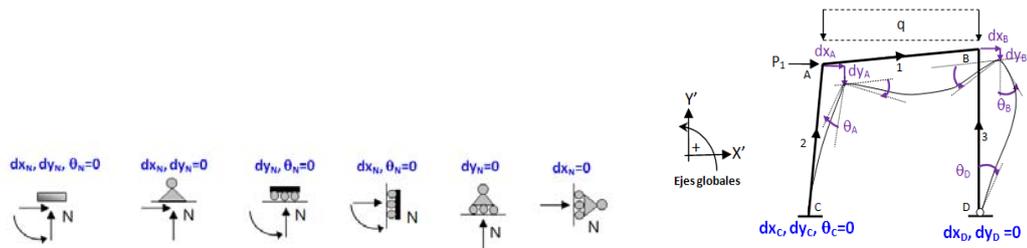


Figura 4. Compatibilidad externa

COMPATIBILIDAD INTERNA

a) Separación de la estructura en fragmentos (figura 5):

La compatibilidad se plantea entre los movimientos a ambos lados del corte. La continuidad puede ser total (3 condiciones de compatibilidad) o parcial (1 o 2 condiciones de compatibilidad)

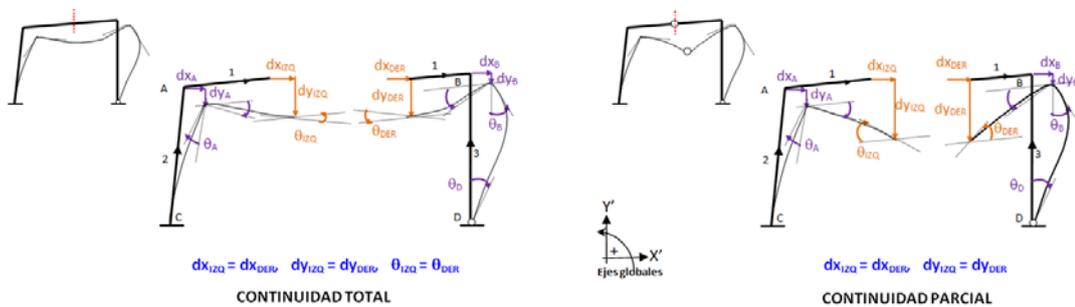


Figura 5. Compatibilidad entre dos fragmentos de la estructura

b) Compatibilidad de movimientos en la barra (figura 6):

Aislado la barra de la estructura mediante cortes en sus extremos, se pueden relacionar las 6 incógnitas cinemáticas planteando las ecuaciones de compatibilidad en ejes locales, expresando los movimientos en el extremo j en función de los movimientos en el extremo i, quedando reducidas éstas a 3.

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD EN LA BARRA b

$$\begin{cases} dx_{jb} = dx_{ib} + e_{xb} \\ dy_{jb} = dy_{ib} + \theta_{ib} \cdot L + e_{yb} \\ \theta_{jb} = \theta_{ib} + e_{\theta b} \end{cases}$$

$$q_{ib} = \begin{bmatrix} dx_{ib} \\ dy_{ib} \\ \theta_{ib} \end{bmatrix}, \quad q_{jb} = \begin{bmatrix} dx_{jb} \\ dy_{jb} \\ \theta_{jb} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_{xb} \\ e_{yb} \\ e_{\theta b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_{jb} - dx_{ib} \\ dy_{jb} - (dy_{ib} + \theta_{ib} \cdot L) \\ \theta_{jb} - \theta_{ib} \end{bmatrix}$$

$$e_{xb} = \int_0^L \frac{N(x)}{EA} dx, \quad e_{yb} = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx, \quad e_{\theta b} = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx$$

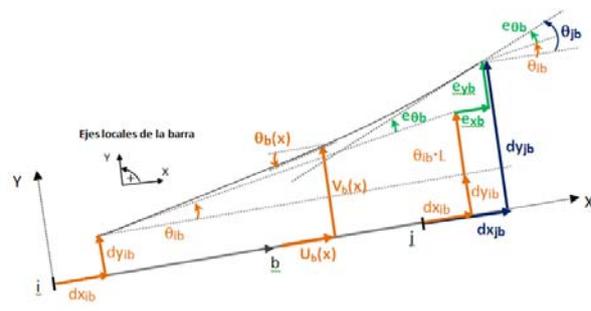


Figura 6. Compatibilidad de movimientos en la barra

Las componentes e_{x_b} , e_{y_b} y e_{θ_b} , representan las componentes según cada uno de los ejes de la deformación efectiva de la barra. De este modo queda claramente representado el movimiento de la barra como sólido rígido y como sólido deformable.

Las funciones de desplazamiento $[u(x), v(x), \theta(x)]$ definen el movimiento de cualquier sección garantizando la continuidad entre secciones consecutivas.

- c) Compatibilidad de movimientos entre extremo de barra y nudo (figura 7):
Los movimientos de los extremos de las barras deben ser compatibles con los movimientos de los nudos a los que están asociadas, en función de sus condiciones de vínculo. La compatibilidad se establece en ejes globales.

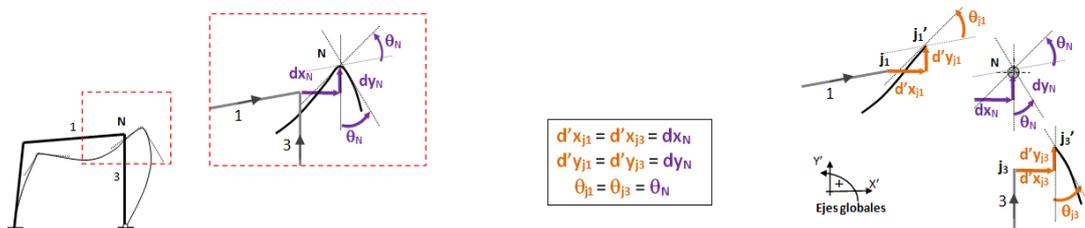


Figura 7. Compatibilidad de movimientos entre extremo de barra y nudo

4.4 Grado de indeterminación cinemática

El grado de indeterminación cinemática (GIC) o número de grados de libertad es el número mínimo de movimientos con el que es posible definir la configuración cinemática completa de la estructura, es decir, el número de movimientos independientes incógnita de la misma.

Son incógnitas cinemáticas los movimientos de nudo y los movimientos de extremo de barra.

Al aplicar las condiciones de compatibilidad en la barra y entre extremo de barra y nudo, estas incógnitas quedan reducidas a los movimientos de los nudos (3 para cada nudo libre, 1 o 2 para los apoyos si las condiciones de contorno permiten movimientos libres y 1, 2 o 3 si se trata de apoyos elásticos) y a los movimientos de los extremos de barra que son diferentes de los de sus nudos asociados, es decir, desconexiones totales o parciales en extremo de barra.

De este modo el número mínimo de movimientos con el que es posible definir la configuración cinemática completa de la estructura, GIC, será el movimiento de los nudos y de los extremos de barra con desconexiones, siempre que éstos sean independientes.

El GIC se puede obtener, por tanto, descontando del número total de movimientos incógnita el número de movimientos dependientes.

NÚMERO DE MOVIMIENTOS INCÓGNITA

Las coordenadas cinemáticas son las componentes de movimiento asociadas a nudo (tomando como origen la posición inicial de éste) y a extremo de barra (si difiere del movimiento nudo).

El número de coordenadas cinemáticas (NCC) de una estructura plana será:



$$NCC = 3(NL+A) + \sum DT_b + \sum DP_b$$

siendo NL = número nudos libres, A= número de nudos de apoyo, $\sum DT_b$ = número de desconexiones totales en extremo de barra, $\sum DP_b$ = número de desconexiones parciales en extremo de barra (muelles)

La capacidad cinemática (CC) de la estructura se define como el número total de movimientos incógnita, es decir, todos los movimientos de nudos y extremos de barra con desconexiones que no sean nulos. Obtendremos la capacidad cinemática descontando del número de coordenadas cinemáticas los movimientos nulos (en los apoyos).

$$CC = NCC - MN = 3(NL+A) + \sum DT_b + \sum DP_b - MN$$

siendo MN = nº de movimientos nulos.

Como el número de movimientos libres en cada apoyo será 3 menos el número de sus movimientos nulos: $(3A-MN = \sum DT_a + \sum DP_a)$ la capacidad cinemática puede expresarse también como:

$$CC = 3NL + \sum DT_b + \sum DT_a + \sum DP_b + \sum DP_a$$

siendo $\sum DT_a$ = número de desconexiones totales en los apoyos, $\sum DP_a$ = número de desconexiones parciales en los apoyos (muelles)

NÚMERO DE MOVIMIENTOS DEPENDIENTES

El número de movimientos dependientes coincidirá con el número de condiciones de dependencia ($\sum CD$) o relaciones entre movimientos que se establezcan, ya que cada condición de dependencia expresa un movimiento dependiente en función de uno o más movimientos independientes. Estas condiciones de dependencia se generan cuando haya modos rígidos en las barras (una condición para modo rígido axil, MRA, y dos para modo rígido a flector/cortante, MRF/C), apoyos inclinados o nudos dobles.

$\sum CD$: número de condiciones de dependencia (movimientos dependientes)

Por tanto el grado de indeterminación cinemática se obtiene descontando de la capacidad cinemática de la estructura el número de condiciones de dependencia.

$$GIC = CC - \sum CD$$

es decir;

$$GIC = [3(NL+A) + \sum DT_b + \sum DP_b - MN] - [\sum CD]$$

o bien

$$GIC = [3NL + \sum DT_b + \sum DT_a + \sum DP_b + \sum DP_a] - [\sum CD]$$

Veamos un ejemplo de obtención del GIC (figura 8)

$$GIC = [3(NL+A) + \sum DT_b + \sum DP_b - MN] - [\sum CD] = [3 \cdot (1+3) + 2 + 0 - 6] - [2] = 8 - 2 = 6$$

o bien

$$GIC = [3NL + \sum DT_b + \sum DT_a + \sum DP_b + \sum DP_a] - [\sum CD] = [3 \cdot 1 + 2 + 3 + 0 + 0] - [2] = 8 - 2 = 6$$

Los movimientos independientes son: dx_A , dy_A , θ_A , dx_B , θ_B , θ_{j3} (el giro del extremo inicial de la barra 1 es el giro del nudo A) y los movimientos dependientes: θ_{i2} , θ_{j2} ya que la barra 2 tiene un modo rígido MR F/C, por ser una barra biarticulada sin carga.

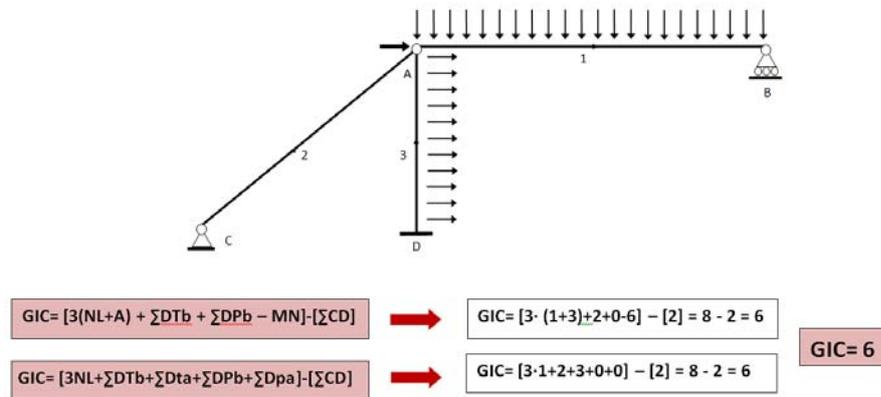


Figura 8. Ejemplo de determinación del GIC

Las estructuras se clasifican cinemáticamente (figura 9), según el GIC, en estructuras hipercinemáticas ($GIC > 0$), estructuras isocinemáticas ($GIC = 0$) y estructuras hiperrestringidas ($GIC < 0$).

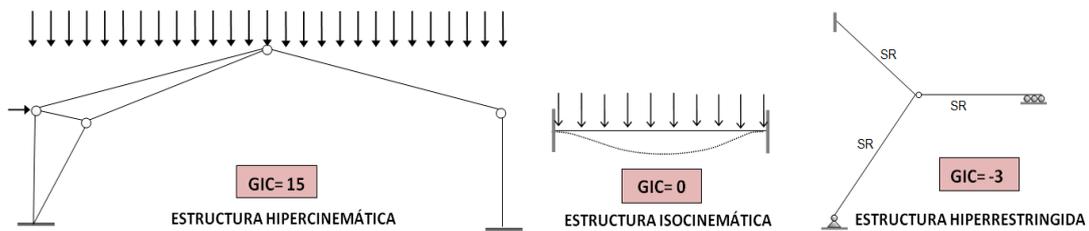


Figura 9. Ejemplos de estructuras hipercinemáticas, isocinemáticas e hiperrestringidas.

En las estructuras hipercinemáticas, el número de vínculos cinemáticos es menor que el número de coordenadas cinemáticas, por lo que están cinemáticamente indeterminadas, es decir, tienen infinitas configuraciones cinemáticamente admisibles. Para obtener la configuración cinemática real, es decir, el valor real de las incógnitas cinemáticas, hay que considerar las condiciones de compatibilidad y las leyes de comportamiento.

En las estructuras isocinemáticas el número de vínculos cinemáticos coincide con el número de coordenadas cinemáticas, por lo que están cinemáticamente determinadas, tienen una única configuración cinemática admisible, es decir, una única solución cinemática posible. La configuración cinemática real para el estado de cargas aplicadas, es decir, el valor real de las incógnitas cinemáticas se obtiene con las ecuaciones de compatibilidad.

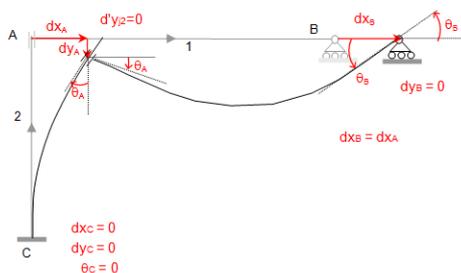
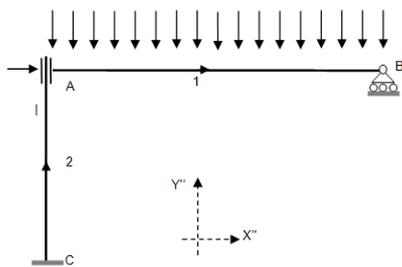
En las estructuras hiperrestringidas el número de vínculos cinemáticos es excesivo ya que supera el número de coordenadas cinemáticas. El número negativo se debe al número de restricciones en exceso, por lo que estará mal modelizada. El cálculo de una estructura hiperrestringida no sería factible (no hay solución cinemática) salvo que se detectaran, de antemano, las condiciones de rigidez redundantes y se suprimieran, pasando a ser isocinemática o hipercinemática.

4.5 Configuración cinemática admisible

La representación cinemática o configuración cinemática de la estructura completa (o de un fragmento de la misma) consiste en la representación de la posición desplazada de todos sus puntos (deformada).

La configuración cinemática será admisible si cumple con las condiciones de compatibilidad.

Veamos un ejemplo (figura 10). En la figura inferior izquierda se representan los movimientos de los nudos y en la de la derecha los movimientos de los extremos de barra, con las componentes de movimiento de sólido rígido y de deformación.



Movimientos totales del extremo j: $dx_j = dx_i + e_x$

$dy_j = (dy_i + \theta_i \cdot L) + e_y$ $\theta_j = \theta_i + e_\theta$

Barra 1: No deforma por axil ($e_{x1}=0$), pero sí flexa

$$\begin{aligned} dx_{j1} &= dx_{i1} + e_{x1} = dx_{i1} + 0 = dx_{i1} \\ dy_{j1} &= (dy_{i1} + \theta_{i1} \cdot L_1) + e_{y1} = 0 \\ \theta_{j1} &= \theta_{i1} + e_{\theta 1} \end{aligned}$$

Barra 2: No hay movimientos de sólido rígido. No deforma por axil ($e_{x2}=0$), pero sí flexa.

$$\begin{aligned} dx_{j2} &= dx_{i2} + e_{x2} = 0 + 0 = 0 \\ dy_{j2} &= (dy_{i2} + \theta_{i2} \cdot L_2) + e_{y2} = (0+0) + e_{y2} = e_{y2} \\ \theta_{j2} &= \theta_{i2} + e_{\theta 2} = 0 + e_{\theta 2} = e_{\theta 2} \end{aligned}$$

CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD:

$$\begin{aligned} d'x_{i1} = d'x_{j2} &= dx_A & d'y_{i1} &= dy_A & \theta_{i1} = \theta_{j2} &= \theta_A \\ d'x_{j1} &= dx_B & d'y_{j1} &= dy_B = 0 & \theta_{j1} &= \theta_B \\ d'x_{i2} &= dx_C = 0 & d'y_{j2} &= dy_C = 0 & \theta_{j2} &= \theta_C = 0 \end{aligned}$$

Relación entre movimientos de extremo de barra en ejes locales y globales:

Barra 1: ambos sistemas de ejes son coincidentes:

$$\begin{aligned} dx_{i1} &= d'x_{j1} & dy_{i1} &= d'y_{j1} & \theta_{i1} &= \theta'_{j1} \\ dx_{j1} &= d'x_{j1} & dy_{j1} &= d'y_{j1} & \theta_{j1} &= \theta'_{j1} \end{aligned}$$

Barra 2 los ejes locales están girados 90° en sentido antihorario:

$$\begin{aligned} dx_{i2} &= d'y_{j2} (=0) & dy_{i2} &= -d'x_{j2} (=0) & \theta_{i2} &= \theta'_{j2} (=0) \\ dx_{j2} &= d'x_{j2} & dy_{j2} &= -d'y_{j2} & \theta_{j2} &= \theta'_{j2} \end{aligned}$$

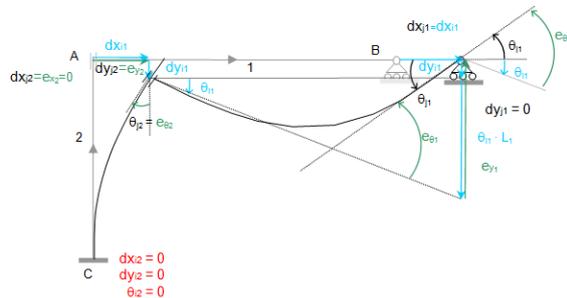


Figura 10. Configuración cinemática admisible.

5 Cierre

A lo largo de este tema se ha presentado un análisis desde el punto de vista cinemático, identificando las componentes cinemáticas, enumerando las implicaciones cinemáticas de la hipótesis de los pequeños movimientos, formulando las ecuaciones de compatibilidad y calculando el grado de indeterminación cinemática, es decir el número de movimientos incógnitas independientes, clasificando a partir de éste las estructuras. Se ha dibujado, asimismo la configuración cinemática admisible de una estructura.

Como ejercicio de aplicación se propone calcular el valor del grado de indeterminación cinemática de la estructura de la figura, identificando los



movimientos dependientes, si los hay. (Resultado: $GIC=13$, movimientos dependientes: giros de extremo de la barra 4)

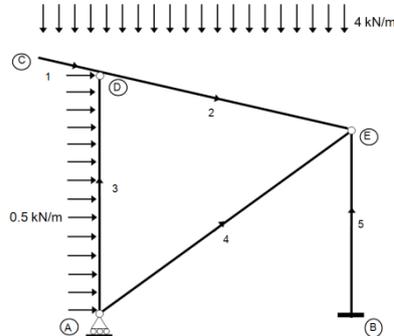


Figura 11. Ejercicio propuesto.

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Abdilla E. "Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1". Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

[2] Basset, L.; Apuntes de clase.

[3] Basset, L. "Clasificación cinemática de las estructuras", Artículo Docente ETSA, 2012. Disponible en Riunet: <http://hdl.handle.net/10251/12713>

[4] Basset, L. "Cálculo cinemático de una estructura isostática", Artículo Docente ETSA, 2012. Disponible en Riunet: <http://hdl.handle.net/10251/16497>

[5] Basset, L. "Leyes de esfuerzos y funciones de desplazamiento a lo largo de una barra", Artículo Docente ETSA, 2011. Disponible en Riunet: <http://hdl.handle.net/10251/12714>

6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Componentes cinemáticas

Figura 2. Relación funciones de deformación, funciones de desplazamiento y leyes de esfuerzos en la barra

Figura 3. Movimientos de la barra (hipótesis de pequeños movimientos)

Figura 4. Compatibilidad externa

Figura 5. Compatibilidad entre dos fragmentos de la estructura

Figura 6. Compatibilidad de movimientos en la barra

Figura 7. Compatibilidad de movimientos entre extremo de barra y nudo

Figura 8. Ejemplo de determinación del GIC

Figura 9. Ejemplos de estructuras hiperkinemáticas, isocinemáticas e hiperrestringidas.

Figura 10. Configuración cinemática admisible.

Figura 11. Ejercicio propuesto