Modelos Dinámicos Continuos basados en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden a Coeficientes Constantes

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Sánchez Sánchez, Almudena; Villanueva Micó, Rafael Jacinto jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; alsncsnc@posgrado.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

Numerosos modelos económicos de tipo dinámico, es decir, que describen la variación de una magnitud económica en función del tiempo (como por ejemplo, los tipos de interés, el valor de un principal que se invierte bajo un régimen de capitalización compuesto continuo, etc.) se formulan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden a coeficientes constantes. El objetivo de este trabajo es la resolución de este tipo de ecuaciones para aprovechar los resultados generales obtenidos en el estudio de modelos de interés económico en futuros trabajos docentes.

2 Introducción

El valor $P(t)$ que se obtiene en el instante t al invertir un principal P_0 que se capitaliza bajo un régimen compuesto continuo de un tipo de interés fijo r; la evolución temporal del tipo de interés $r(t)$ que, partiendo de un valor inicial r_0 regresa a largo plazo a un valor o tipo medio μ a la velocidad α, son algunos ejemplos de problemas de interés económico que se modelizan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s) lineales de primer orden a coeficientes constantes. En efecto, como puede comprobarse en la Ec.2, este tipo de problemas, los cuales han sido abordados en las referencias [1] y [2], respectivamente, siguen el patrón descrito en la Ec.1 donde, además de la e.d.o., $x'(t)=a\,x(t)+b$, se ha incluido una condición inicial (c.i.), $x(t_0)=x_0$, que impone información de la función incógnita $x(t)$ en el instante inicial del problema, ya que, en la práctica muchas veces se conoce el comportamiento de la solución en el instante t_0 en el cual se establece el modelo. A la formulación de la e.d.o. junto con la c.i. se le denomina en la literatura matemática, problema de valor inicial (p.v.i.).

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & a\,x(t)+b \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right\},\quad x_0,a,b\in \mathrm{IR}.$$

Ecuación 1. Patrón del p.v.i. asociado a una e.d.o. lineal de primer orden a coeficientes constantes.

$$\text{Modelo de Capitalización}: \left.\begin{array}{rcl} P'(t) & = & r\,P(t) \\ P(0) & = & P_0 \end{array}\right\},\quad P_0,r>0;\quad \text{identificación}: \left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & P(t), \\ t_0 & = & 0, \\ x_0 & = & P_0, \\ a & = & r, \\ b & = & 0. \end{array}\right.$$

$$\text{Modelo de Tipos de Interés}: \left.\begin{array}{rcl} r'(t) & = & \alpha(r(t)-\mu) \\ r(0) & = & r_0 \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{c} r_0, \alpha > 0, \\ \mu \in IR \end{array} ; \quad \text{identificación}: \left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & r(t), \\ t_0 & = & 0, \\ x_0 & = & r_0, \\ a & = & \alpha, \\ b & = & -\alpha\mu. \end{array}\right.$$

Ecuación 2. Identificación de dos modelos económicos con el patrón dado en la Ec.1.

Otros modelos de interés económicos basados en el patrón dado en la Ec.1 y, que han sido desarrollados por los autores en otros objetos docentes, pueden consultarse en las referencias [3], [4] y [5].

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo, en relación con un p.v.i. basado en una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) lineal de primer orden con coeficientes constantes, son que el alumno sea capaz de:

- Reconocer que existen importantes modelos económicos que se adaptan a su patrón.
- Conocer cómo se aplican las técnicas de Separación de Variables y de la Ecuación Característica para obtener la solución de tales modelos.
- Conocer el comportamiento a largo plazo o asintótico de la solución de este tipo de modelos.

3.1 Resolución del modelo dinámico continuo basado en una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden a coeficientes constantes mediante el método de Separación de Variables

El objetivo de esta sección es resolver el p.v.i. dado en la Ec.1. usando una potente técnica muy utilizada en la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias denominada "*Separación de Variables*". La aplicación de esta técnica se puede describir en los siguientes pasos:

- Paso 1: Utilizar la notación diferencial de Leibniz para escribir la derivada que aparece en el miembro izquierdo de la e.d.o. dada en la Ec.1 en forma de cociente: $x'(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$.
- Paso 2: Denotar a la función incógnita $x(t)$ por la variable x: $x(t) \Rightarrow x$. De este modo la e.d.o. tiene dos variables, la variable independiente t y la variable dependiente o función incógnita: x.
- Paso 3: Separar en cada miembro las variables definidas en el Paso 2 usando operaciones algebraicas.
- Paso 4: Integrar cada miembro de la e.d.o. en la expresión obtenida en el Paso 3. El miembro de la izquierda (que debe involucrar la variable x) de la

e.d.o. resultante del Paso 3 se debe integrar sobre el intervalo $[x_0,x]$ y el miembro de la derecha (que debe involucrar la variable t) se debe integrar sobre el intervalo $[t_0,t]$. Sugerencia: para no confundir los extremos superiores de integración con la variable de integración, se recomienda usar para la variable de integración de cada miembro una notación distinta de x y t. Como dicha variable es muda, por ejemplo, se puede usar la variable s.

- Paso 5: Calculadas las integrales de cada miembro, se debe de proceder a despejar la variable x, la cual representa la solución del p.v.i. dado en la Ec. 1.

En la Ec.2 se explicitan los Pasos 1-5. Para su aplicación se asumirá que el parámetro a es no nulo: $a \neq 0$, ya que, como se observará ello se requiere en la aplicación del método de Separación de Variables. El caso $a = 0$ se analizará posteriormente. En el contexto $a \neq 0$, también asumiremos que $x(t) \neq -b/a$ para todo valor de t. Esta es una hipótesis técnica cuya inclusión se verá con naturalidad en la exposición que sigue.

$$x'(t) = a\,x(t) + b \overset{\text{Paso 1}}{\Rightarrow} \frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) + b \overset{\text{Paso 2}}{\Rightarrow} \frac{dx}{dt} = a\,x + b \overset{\text{Paso 3}}{\Rightarrow} \frac{dx}{a\,x+b} = dt$$

$$\overset{\text{Paso 4}}{\Rightarrow} \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{as+b} = \int_{t_0}^{t} ds \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \frac{a\,ds}{as+b} = \int_{t_0}^{t} ds \Rightarrow \frac{1}{a}\mathrm{Ln}\left(\left|as+b\right|\right)\Big|_{s=x_0}^{s=x} = s\Big|_{s=t_0}^{s=t}$$

$$\frac{1}{a}\left(\mathrm{Ln}\left(\left|a\,x+b\right|\right) - \mathrm{Ln}\left(\left|a\,x_0+b\right|\right)\right) = t - t_0 \overset{\text{Paso 5}}{\Rightarrow} \mathrm{Ln}\left(\left|\frac{a\,x+b}{a\,x_0+b}\right|\right) = a(t-t_0) \Rightarrow \frac{a\,x+b}{a\,x_0+b} = e^{a(t-t_0)}$$

$$a\,x + b = (a\,x_0+b)e^{a(t-t_0)} \Rightarrow ax = (a\,x_0+b)e^{a(t-t_0)} - b \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} x = \frac{1}{a}(a\,x_0+b)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}$$

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}, \quad a \neq 0.$$

Ecuación 3. Aplicación del Método de Separación de Variables para resolver el p.v.i. dado en la Ec.1. asumiendo $a \neq 0$.

Obsérvese que si $a = 0$, el p.v.i. dado en la Ec.1 se simplifica al dado en la Ec. 4 cuya solución es inmediata, ya que, se trata de buscar una función con derivada constante e igual a b, que satisfaga la c.i. $x(t_0) = x_0$.

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & b \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right\}, \quad x_0, b \in \mathrm{IR} \Rightarrow x(t) = x_0 + b(t-t_0).$$

Ecuación 4. Solución del pv.i. dado en la Ec.1 asumiendo $a = 0$.

Por lo tanto de forma resumida podemos compactar la solución del p.v.i. dado en la Ec.1 en la forma que se expresa en la Ec.5

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & a\,x(t)+b \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right\}, \quad x_0,b\in \mathrm{IR} \Rightarrow x(t)=\begin{cases} \left(x_0+\dfrac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)}-\dfrac{b}{a} & \text{si} \quad a\neq 0 \\ x_0+b(t-t_0) & \text{si} \quad a=0 \end{cases}$$

Ecuación 5. Solución del pv.i. dado en la Ec.1.

Obsérvese que dentro del contexto $a\neq 0$, se cumple que $a\,x(t)+b\neq 0$ para todo valor de t (véase Ec.6) y por ello los términos $a\,x+b$ y $a\,x_0+b$ que aparecen en los Pasos 3 y 5 en la Ec.3, respectivamente, son no nulos, lo cual legitima el cálculo algebraico realizado.

$$a\,x(t)+b=x'(t)=\underbrace{(a\,x_0+b)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{porque } x_0\neq -\frac{b}{a}}}\underbrace{e^{a(t-t_0)}}_{\neq 0}\neq 0.$$

Ecuación 6. Legitimación de la aplicación del Método de Separación de Variables en la Ec.3.

Finalmente, y a partir de la expresión de la solución de $x(t)$ observemos que en el caso $a\neq 0$ suponer que $a\,x(t)+b\neq 0$ para todo valor t equivale precisamente a que $x_0\neq -b/a$ (véase Ec.7). De hecho si $x_0=-b/a$, se comprueba directamente sin más que sustituir que $x(t)=-b/a$ es solución del p.v.i. dado en la Ec.1.

$$a\neq 0: \quad a\,x(t)+b\neq 0 \Leftrightarrow x(t)\neq -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x(t)=\left(x_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)}-\frac{b}{a}\neq -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_0\neq -\frac{b}{a}.$$

Ecuación 7. Justificación de una de las hipótesis realizadas para la aplicación del Método de Separación de Variables.

3.2 Resolución del modelo dinámico continuo basado en una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden a coeficientes constantes mediante el método de la Ecuación Característica

Adicionalmente al método de Separación de Variables, en este apartado estudiaremos otra técnica alternativa, denominada de la Ecuación Característica, para determinar la solución del p.v.i. dado en la Ec.1. El principal motivo que justifica este estudio es que este método puede extenderse con facilidad para resolver e.d.o.'s lineales con coeficientes constantes de orden mayor a 1, lo cual, por otra parte, se pretende abordar en un trabajo posterior.

Al igual que el método de Separación de Variables, la técnica que vamos a presentar también se puede estructurar en varios pasos que facilitan su puesta en práctica:

- Paso 1: Calcular la solución general $x^{gh}(t)$ de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa o no homogénea dada en la Ec.1. Esta e.d.o. es la resultante de hacer nulo el coeficiente b en $x'(t)=a\,x(t)+b$, lo que conduce a la e.d.o. $x'(t)=a\,x(t)$. Como esta e.d.o. es lineal y de orden

1, su solución dependerá de una constante arbitraria que en lo que sigue denotaremos por K.

- Paso 2: Calcular una solución particular $x^{pc}(t)$ de la e.d.o. completa, i.e., de la ecuación $x'(t) = a\,x(t) + b$.
- Paso 3: Sumar las soluciones calculadas en los Pasos 1 y 2 anteriores, resultando así la solución general $x^{gc}(t)$ de la e.d.o. completa o no homogéna $x'(t) = a\,x(t) + b$. Por tanto, $x^{gc}(t) = x^{gh}(t) + x^{pc}(t)$.
- Paso 4: Imponer en la expresión de $x^{gc}(t)$ obtenida en el Paso 3 la c.i. $x(t_0) = x_0$ para que represente la solución del p.v.i. dado en la Ec.1. Esto permite establecer una ecuación algebraica cuya solución es la constante K que aparece en el Paso 1. La solución del p.v.i. dado en la Ec.1 se obtiene sustituyendo esta constante en la solución obtenida en el Paso 3.

Vamos ahora a discutir la metodología expuesta en los Pasos 1-4.

El fundamento teórico del Paso 1 se basa en que el conjunto de funciones $x(t) \equiv x^{gh}(t)$ que son soluciones de la e.d.o. homogénea $x'(t) = a\,x(t)$ constituyen un subespacio vectorial de dimensión 1 de las funciones derivables (obsérvese que obviamente las funciones $x(t)$ que sean solución de la e.d.o. $x'(t) = a\,x(t)$ deben tener al menos primera derivada). Por comodidad a este subespacio vectorial en lo que sigue lo denotaremos $S(x^{gh})$. Para ver que efectivamente $S(x^{gh})$ es un subespacio vectorial debemos mostrar que la combinación lineal $\alpha y(t) + \beta z(t)$ de dos soluciones, $y(t)$, $z(t)$, de la e.d.o. homogénea (es decir, que cumplen: $y'(t) = a\,y(t)$, $z'(t) = a\,z(t)$ respectivamente) debe ser también una solución de la e.d.o. homogénea. Esta comprobación se muestra en la Ec.8.

$$
\begin{gathered}
x(t) = \alpha\,y(t) + \beta\,z(t), \\
\Downarrow \\
x'(t) = \big(\alpha\,y(t) + \beta\,z(t)\big)' = \alpha\,y'(t) + \beta\,z'(t) = \alpha(a\,y(t)) + \beta(a z(t)) = a(\alpha\,y(t) + \beta\,z(t)) = a\,x(t).
\end{gathered}
$$

Ecuación 8. El conjunto de las soluciones de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 tiene estructura de subespacio vectorial.

Sin entrar en los fundamentos teóricos, porque ello nos alejaría del objetivo principal de este apartado, ahora se necesita demostrar que el subespacio $S(x^{gh})$ tiene dimensión 1. Esto puede justificarse con la extensión a funciones del resultado correspondiente, y conocido a través de las matemáticas cursadas en Bachillerato, para vectores consistente en comprobar que dos soluciones de la e.d.o. homogénea tiene determinante nulo (a este determinante para funciones ¡no vectores!), se le denomina wronskiano (véase [6] y [7]). En la Ec. 9 se muestra que efectivamente es nulo.

$$
\begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ a\,x(t) & a\,y(t) \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x(t) & y(t) \end{vmatrix} = a \times 0 = 0.
$$

Ecuación 9. Comprobación de que la dimensión del subespacio vectorial que constituyen el conjunto de las soluciones de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 tiene dimensión 1 usando el determinante wronskiano.

Para buscar la solución de la e.d.o. $x'(t) = a x(t)$ todo lo que necesitamos es encontrar una base del subespacio vectorial $S(x^{gh})$, porque en ese caso como su dimensión es 1, cualquier solución se expresa como combinación lineal de la función (solo una porque la dimensión es 1) que forma dicha base. Para ello, ensayaremos con funciones de la forma $x(t) = e^{rt}$ donde r es una constante que está por determinar. A este ensayo se le denomina Ensayo de Euler. En la Ec.10 se muestra que el valor de la constante es $r = a$. Obsérvese que esta ecuación algebraica, es decir, sin derivadas, en r se obtiene directamente (esto es, sin hacer el ensayo de Euler mostrado en la Ec.10) sin más que aplicar la siguiente regla de sustitución en la e.d.o. homogénea $x'(t) = a x(t)$: poner $x'(t) \to r^1 = r;\ x(t) \to r^0 = 1$. Además obsérvese (tal y como se expresa al final de la Ec.10) que la solución general de la e.d.o. homogénea queda descrita multiplicando la solución obtenida mediante el ensayo de Euler por una constante arbitraria K, ya que, como hemos señalado anteriormente el conjunto de las soluciones de la e.d.o. homogénea forma un subespacio vectorial de dimensión 1.

$$x'(t) = a x(t) \underset{\text{Ensayo de Euler}}{\overset{x(t)=e^{rt}}{\Rightarrow}} (e^{rt})' = a(e^{rt}) \Rightarrow r e^{rt} = a e^{rt} \Rightarrow \underbrace{r = a}_{\substack{\text{ecuación} \\ \text{característica}}} \Rightarrow x(t) = e^{at} \Rightarrow x^{gh}(t) = K e^{at}, \quad K \in \mathrm{IR}.$$

Ecuación 10. Paso 1: Obtención de la solución general de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 mediante el ensayo de Euler que conduce a la denominada Ecuación Característica.

Para efectuar el Paso 2 necesitamos encontrar "*una*" solución de la e.d.o. completa (pero ¡no todas!, tal y como se ha requerido en el Paso 1 porque allí buscábamos la solución general de la e.d.o. homogénea). Esto lo haremos por ensayo empezando por las funciones más sencillas, las polinómicas de grado 0 y 1 (como se aprecia en los cálculos detallados en la Ec.11. no se necesitan más ensayos). Obsérvese que se hace necesario distinguir dos casos en función de si el coeficiente a es o no nulo. En la Ec.12 se resumen los resultados obtenidos.

$$x'(t) = a x(t) + b \Rightarrow \underset{c=cte}{\overset{x^{pc}(t)=c}{\Rightarrow}} (c)' = a c + b \Rightarrow 0 = a c + b \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} c = -\frac{b}{a} \Rightarrow x^{pc}(t) = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Si } a=0 \Rightarrow x'(t) = b \Rightarrow \underset{c=cte}{\overset{x^{pc}(t)=ct}{\Rightarrow}} (ct)' = b \Rightarrow c = b \Rightarrow x^{pc}(t) = bt.$$

Ecuación 11. Detalle de los cálculos para la obtención de una solución particular de la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 mediante ensayo directo de funciones polinómicas de grado 0 y 1.

$$x^{pc}(t) = \begin{cases} -\dfrac{b}{a} & \text{si} \quad a \neq 0, \\ bt & \text{si} \quad a=0. \end{cases}$$

Ecuación 12. Paso 2: Solución particular de la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1.

El Paso 3 es sin duda el más sencillo porque únicamente consiste en sumar las soluciones obtenidas en los Pasos 1 y 2. En la Ec.13 se resumen los resultados correspondientes. En la Ec.14 se justifica por qué efectivamente la suma de ambas soluciones es una solución de la e.d.o. completa $x'(t) = a x(t) + b$.

$$x^{gc}(t) = x^{gh}(t) + x^{pc}(t) = \begin{cases} K e^{at} - \dfrac{b}{a} & \text{si} \quad a \neq 0, \\ K + b t & \text{si} \quad a = 0. \end{cases}$$

Ecuación 13. Solución general de la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1. obtenida como la suma de la soluciones de los Pasos 1 y 2 (véase Ec.10 y Ec.12).

$$x^{gc}(t) = x^{gh}(t) + x^{pc}(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x^{gc}(t)\right)' = \left(x^{gh}(t) + x^{pc}(t)\right)' = \left(x^{gh}(t)\right)' + \left(x^{pc}(t)\right)' = \left(a x^{gh}(t)\right) + \left(a x^{pc}(t) + b\right) = a\left(x^{gh}(t) + x^{pc}(t)\right) + b = a x^{gc}(t) + b$$

Ecuación 14. Justificación del Paso 3, es decir, que la suma de las soluciones obtenidas en los Pasos 1 y 2 proporciona una solución de la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1.

Finalmente, en el Paso 4 se impone la c.i. $x(t_0) = x_0$ y se calcula el valor de la constante K que se introdujo en el Paso 1. Los detalles de los cálculos se presentan en la Ec.15 distinguiendo, tal y como aparece en la expresión general de la e.d.o. completa en la Ec.13, dos casos en función de si el coeficiente a es o no nulo.

$$\text{Si } a \neq 0: \quad x_0 = x(t_0) = K e^{a t_0} - \frac{b}{a} \Rightarrow K = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{-a t_0} \Rightarrow x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{-a t_0} e^{at} - \frac{b}{a} = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}.$$

$$\text{Si } a = 0: \quad x_0 = x(t_0) = K + b t_0 \Rightarrow K = x_0 - b t_0 \Rightarrow x(t) = x_0 - b t_0 + b t = x_0 + b(t - t_0).$$

Ecuación 15. Determinación de la constante K.

Observamos que la expresión obtenida por el método de la Ecuación Característica coincide con la hallada anteriormente mediante el método de Separación de Variables (véase Ec.5).

3.3 Comportamiento asintótico de la solución

Una cuestión de interés no solo matemático, sino también en las aplicaciones es conocer el comportamiento a largo plazo (cuando $t \longrightarrow \infty$) de la solución del p.v.i. dado en la Ec.1. El estudio puede hacerse directamente a través de la expresión explícita de la solución dada en la Ec.5 sin más que tomar límites. La discusión de este estudio se presenta en la Ec.16. Se observa que si el parámetro a es cero, como la solución es polinómica, $x(t) = x_0 + b(t - t_0)$, nunca habrá estabilidad (pues el límite vale $\pm\infty$ en función del signo del coeficiente b, si $b > 0$ el límite vale $+\infty$ y, si $b < 0$ el límite vale $-\infty$) salvo si también el parámetro $b = 0$, en cuyo caso la solución del p.v.i. dado en la Ec.1 sería $x(t) = x_0$ lo cual constituye un caso trivial, al tratarse de una solución constante. Si a no es nulo, el valor del límite depende del comportamiento en el infinito de la función exponencial, $e^{a(t-t_0)}$, que aparece entonces en la expresión de la solución. Esta función solo tiene límite finito (y es cero) cuando $t \longrightarrow \infty$ si $a < 0$ y de aquí se realiza fácilmente el estudio que se indica en la Ec.16.

$$\text{Si } a < 0: \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a} = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)\left(\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{a(t-t_0)}}_{=0}\right) - \frac{b}{a} = -\frac{b}{a}.$$

Ecuación 16. Comportamiento a largo plazo de la solución del pv.i. dado en la Ec.1.

4 Cierre

Dado que existen numerosos modelos económicos que se formulan a través de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden a coeficientes constantes, los cuales creemos tienen un gran valor formativo, en este trabajo hemos presentado y discutido dos métodos diferentes, pero equivalentes para determinar su solución, y a partir de la expresión obtenida estudiar el comportamiento asintótico de la misma. El objetivo de este estudio es disponer de los resultados obtenidos para exponer de forma más directa otros modelos de interés económico en futuros artículos docentes y permitir al lector interesado conocer los detalles de los fundamentos en los que se basa la solución de dichas ecuaciones diferenciales.

Como continuación del trabajo aquí presentado y por los mismas razones que acabamos de apuntar, en futuros trabajos docentes realizaremos un estudio análogo para problemas de valor inicial basados en e.d.o.'s lineales de segundo orden a coeficientes constantes. También nos planteamos como objetivo extender el estudio a los modelos discretos basados en ecuaciones en diferencias lineales de primer y segundo orden a coeficientes constantes porque existen numerosos modelos económicos que se formulan a través de este tipo de ecuaciones.

5 Bibliografía

[1] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D. y Villanueva, R.J.: "Modelos continuos de crecimiento: del modelo exponencial al modelo logístico". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE. URL: http://hdl.handle.net/10251/30892

[2] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D. y Villanueva, R.J.: "Introducción a los modelos dinámicos continuos de tipos de interés con reversión a la media". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE. URL: http://hdl.handle.net/10251/30893

[3] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D. y Villanueva, R.J.: "Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte I: Cuando el precio depende únicamente del exceso de demanda y del inventario". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE. URL: http://hdl.handle.net/10251/16535

[4] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D. y Villanueva, R.J.: "Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte II: Cuando el ajuste del precio depende del inventario y existe especulación". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE. URL: http://hdl.handle.net/10251/17061

[5] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D. y Villanueva, R.J.: "Modelos económicos discretos versus continuos: un estudio comparativo a través de la amortización de hipotecas". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE. URL: http://hdl.handle.net/10251/16534

[6] Shone, R.: "Economic Dynamics", 2nd edition, Ed. Cambridge, 2002.

Este excelente texto presenta el estudio de diferentes modelos económicos que aparecen en Microeconomía y en Macroeconomía con el denominador común de ser todos ellos de tipo de dinámico. Combina la exposición de los modelos con la presentación de software para analizarlos.

[7] Chiang, A.: “Métodos Fundamentales de Economía Matemática”, Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en economía.