UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Modelos Dinámicos Continuos basados en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Segundo Orden a Coeficientes Constantes

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Sánchez Sánchez, Almudena; Villanueva Micó, Rafael Jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; alsncsnc@posgrado.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA

1 Resumen de las ideas clave

Numerosos modelos económicos de tipo dinámico, es decir, que describen la variación de una magnitud económica en función del tiempo (como por ejemplo, los modelos de mercado con expectativas, los modelos tipo acelerador-inversor, etc.) se formulan vía ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden a coeficientes constantes. El objetivo de este trabajo es la resolución de este tipo de ecuaciones para aprovechar los resultados generales obtenidos en el estudio de modelos de interés económico en futuros trabajos docentes.

2 Introducción

El precio $P(t)$ en el instante t de un bien cuyo valor y variación actuales están dados por P_0 y P_1, respectivamente, son conocidos, y cuya función de oferta contiene expectativas, puede formularse mediante una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) lineal de segundo orden a coeficientes constantes. En efecto, como puede comprobarse en la Ec.2, este tipo de modelos económicos de oferta y demanda con condición de equilibrio siguen el patrón descrito en la Ec.1 donde, además de la e.d.o., $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=b$, se han incluido las condiciones iniciales (c.i.'s), $x(t_0)=x_0$, y, $x'(t_0)=x_1$, que imponen información de la función incógnita $x(t)$ en el instante inicial del problema, ya que, en la práctica muchas veces se conoce el comportamiento de la solución (a través del valor que toma la misma y su primera derivada) en el instante t_0 en el cual se establece el modelo. A la formulación de la e.d.o. junto con las c.i.'s se le denomina en la literatura matemática, problema de valor inicial (p.v.i.).

$$\left.\begin{array}{rcl} x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t) &=& b \\ x(t_0) &=& x_0 \\ x'(t_0) &=& x_1 \end{array}\right\}, \quad x_0,\ x_1,\ a_1,\ a_2,\ b\in \mathbb{R}.$$

Ecuación 1. Patrón del p.v.i. asociado a una e.d.o. lineal de segundo orden a coeficientes constantes.

$$\left.\begin{array}{lcrcll} \text{Modelo de equilibrio} & & Q^D(t) &=& a-bP(t)+mP'(t)+nP''(t) & , \quad a,b>0,\ m,n\in \mathbb{R}, \\ \text{de oferta-demanda} & : & Q^S(t) &=& -c+dP(t) & , \quad c,d>0, \\ \text{con expectativas} & & Q^D(t) &=& Q^S(t) & , \quad \text{(condición de equilibrio).} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} P''(t)+\frac{m}{n}P'(t)-\frac{b+d}{n}P(t) &=& -\frac{a+c}{n}, \\ P(0) &=& P_0, \\ P'(0) &=& P_1, \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{c} a,b,c,d>0, \\ m,n\in \mathbb{R} \end{array}; \quad \text{identificación}: \left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& P(t), \\ t_0 &=& 0, \\ x_0 &=& P_0, \\ x_1 &=& P_1, \\ b &=& -\frac{a+c}{n}, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a_1 &=& \frac{m}{n}, \\ a_2 &=& -\frac{b+d}{n}. \end{array}\right.$$

Ecuación 2. Identificación de un modelo económico con el patrón dado en la Ec.1.

Otros modelos de interés económicos basados en el patrón dado en la Ec.1 pueden consultarse en las referencias [1] y [2].

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo, en relación con un p.v.i. basado en una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) lineal de segundo orden con coeficientes constantes son que el alumno sea capaz de:

- Reconocer que existen importantes modelos económicos que se adaptan a su patrón.
- Conocer cómo se aplica la técnica de la Ecuación Característica para obtener la solución de tales modelos.
- Conocer el comportamiento a largo plazo o asintótico de la solución de este tipo de modelos.

3.1 Resolución del modelo dinámico continuo basado en una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden a coeficientes constantes mediante el método de la Ecuación Característica

En este apartado estudiaremos la técnica, denominada de la Ecuación Característica, para determinar la solución del p.v.i. dado en la Ec.1. Este método es una extensión del que se aplica para resolver e.d.o.'s lineales con coeficientes constantes de primer orden (véase [3]) y puede generalizarse con facilidad para resolver este mismo tipo de e.d.o.'s de órdenes mayores a 2. La presentación de esta técnica la vamos a estructurar en varios pasos que facilitan su puesta en práctica:

- Paso 1: Calcular la solución general $x^{gh}(t)$ de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa o no homogénea dada en la Ec.1. Esta e.d.o. es la resultante de hacer nulo el coeficiente b en $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=b$, lo que conduce a la e.d.o. $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0$. Como esta e.d.o. es lineal y de orden 2, su solución dependerá de dos constantes arbitrarias que en lo que sigue denotaremos por K_1 y K_2.
- Paso 2: Calcular una solución particular $x^{pc}(t)$ de la e.d.o. completa, i.e., de la ecuación $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=b$.
- Paso 3: Sumar las soluciones calculadas en los Pasos 1 y 2 anteriores, resultando así la solución general $x^{gc}(t)$ de la e.d.o. completa o no homogéna $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=b$. Por tanto, $x^{gc}(t)=x^{gh}(t)+x^{pc}(t)$.
- Paso 4: Imponer en la expresión de $x^{gc}(t)$ obtenida en el Paso 3 las c.i.'s $x(t_0)=x_0$ y $x'(t_0)=x_1$ para que represente la solución del p.v.i. dado en la Ec.1. Esto permite establecer un sistema de ecuaciones algebraicas cuya solución son las constantes K_1 y K_2 que aparecen en el Paso 1. La solución del p.v.i. dado en la Ec.1 se obtiene sustituyendo estas constantes en la solución obtenida en el Paso 3.

Vamos ahora a discutir la metodología expuesta en los Pasos 1-4.

El fundamento teórico del Paso 1 se basa en que el conjunto de funciones $x(t) \equiv x^{gh}(t)$ que son soluciones de la e.d.o. homogénea $x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = 0$ constituyen un subespacio vectorial de dimensión 2 de las funciones dos veces derivables (obsérvese que obviamente las funciones $x(t)$ que sean solución de la e.d.o. $x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = 0$ deben tener al menos segunda derivada). Por comodidad a este subespacio vectorial en lo que sigue lo denotaremos $S(x^{gh})$. Para ver que efectivamente $S(x^{gh})$ es un subespacio vectorial debemos mostrar que la combinación lineal $\alpha y(t) + \beta z(t)$ de dos soluciones, $y(t)$, $z(t)$, de la e.d.o. homogénea (es decir, que cumplen: $y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = 0$, $z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = 0$ respectivamente) debe ser también una solución de la e.d.o. homogénea. Esta comprobación se muestra en la Ec.3.

$$
\begin{gathered}
x(t) = \alpha y(t) + \beta z(t), \\
\Downarrow \\
x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = \left(\alpha y(t) + \beta z(t)\right)'' + a_1 \left(\alpha y(t) + \beta z(t)\right)' + a_2 \left(\alpha y(t) + \beta z(t)\right) \\
\Downarrow \\
= \alpha \Big(\underbrace{y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t)}_{=0} \Big) + \beta \Big(\underbrace{z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t)}_{=0} \Big) = 0.
\end{gathered}
$$

Ecuación 3. El conjunto de las soluciones de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 tiene estructura de subespacio vectorial.

Sin entrar en los fundamentos teóricos, porque ello nos alejaría del objetivo principal de este apartado, ahora se necesita demostrar que el subespacio $S(x^{gh})$ tiene dimensión 2. Para justificar este hecho, primero observemos que la dimensión de dicho subespacio debe ser menor o igual que dos, ya que, tres soluciones siempre son linealmente dependientes. Esto puede justificarse con la extensión a funciones del resultado correspondiente, y conocido a través de las matemáticas cursadas en Bachillerato, para vectores consistente en comprobar que tres soluciones de la e.d.o. homogénea tiene determinante nulo (a este determinante para funciones ¡no vectores!), se le denomina wronskiano (véase [1] y [2]). En la Ec. 4 se muestra que efectivamente es nulo haciendo uso de las propiedades elementales de los determinantes.

$$
\begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ a_1 x'(t) + a_2 x(t) & a_1 y'(t) + a_2 y(t) & a_1 z'(t) + a_2 z(t) \end{vmatrix}
$$

$$
= a_1 \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x(t) & y(t) & z(t) \end{vmatrix} = a_1 \times 0 + a_2 \times 0 = 0
$$

Ecuación 4. Comprobación de que la dimensión del subespacio vectorial que constituyen el conjunto de las soluciones de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 tiene dimensión menor o igual que dos usando el determinante wronskiano.

Para buscar la solución de la e.d.o. $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0$ lo que necesitamos es encontrar una base del subespacio vectorial $S(x^{gh})$, porque en ese caso, cualquier solución se expresa como combinación lineal de las funciones que forman dicha base. A continuación veremos que la dimensión de dicho subespacio es exactamente dos. Para ello, ensayaremos con funciones de la forma $x(t)=e^{rt}$ donde r es una constante que está por determinar. A este ensayo se le denomina Ensayo de Euler. En la Ec.5 se muestra que este ensayo conduce a una ecuación algebraica de segundo orden en r (llamada Ecuación Característica) y por tanto, dependiendo de si las soluciones o raíces de dicha ecuación son reales y simples (Caso 1), reales y dobles (Caso 2) o complejas conjugadas (Caso 3), tendremos dos soluciones (Casos 1 y 3) o, una solución (Caso 2).

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0 \underset{\text{Ensayo de Euler}}{\overset{x(t)=e^{rt}}{\Rightarrow}} (e^{rt})''+a_1(e^{rt})'+a_2(e^{rt})=0 \Rightarrow r^2e^{rt}+a_1re^{rt}+a_2e^{rt}=0,$$

$$\Downarrow$$

$$e^{rt}\left(r^2+a_1r+a_2\right)=0 \overset{e^{rt}\neq 0}{\Rightarrow} r^2+a_1r+a_2=0 \quad \text{(Ecuación Característica)},$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \text{Caso1: raíces reales y distintas} & r_1\neq r_2\in \mathrm{IR}, \begin{cases} r_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \\ r_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \end{cases} \\ \text{Caso2: raíces reales e iguales} & r_1=r_2=r\in \mathrm{IR}, r=-\dfrac{a_1}{2} \\ \text{Caso3: raíces complejas conjugadas} & r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta\in \mathrm{C}, \alpha=-\dfrac{a_1}{2}, \beta=\dfrac{\sqrt{4a_2-(a_1)^2}}{2}. \end{cases}$$

Ecuación 5. Ensayo de Euler para obtener la solución general de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1: Ecuación Característica.

Obtengamos la solución en cada uno de los Casos 1-3.

- Caso 1: Raíces reales y distintas ($r_1, r_2 \in \mathrm{IR}$, tales que: $r_1\neq r_2$). En este caso, según el ensayo las soluciones son $x_1(t)=e^{r_1t}$ y $x_2(t)=e^{r_2t}$. Obsérvese que ambas son linealmente independientes, ya que, su wronskiano es no nulo al ser ambas raíces distintas (véase Caso 1 en la Ec.6).
- Caso 2: Raíces reales e iguales ($r_1=r_2=r\in \mathrm{IR}$). En este caso, según el ensayo solo disponemos de una solución: $x_1(t)=e^{rt}$. Necesitamos de una segunda solución para completar la base del subespacio $S(x^{gh})$. Vamos a comprobar que la segunda solución es $x_2(t)=te^{rt}$ (véase Ec.7). Esta solución puede hallarse usando el denominado Método de Variación de Parámetros consistente en buscar esta segunda solución en la forma $x_2(t)=f(t)e^{rt}$ donde la función $f(t)$ se determina imponiendo que dicha expresión

candidata de la segunda solución satisfaga la e.d.o. $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0$ de donde después de ciertos cálculos se concluye que $f(t)=t$. Obsérvese que ambas son linealmente independientes, ya que, su wronskiano es no nulo (véase Caso 2 en la Ec.6).

- Caso 3: Raíces complejas conjugadas ($r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta\in C$). En este caso, al igual que en el Caso 1 y según el ensayo las soluciones son $x_1(t)=e^{r_1t}$ y $x_2(t)=e^{r_2t}$. Obsérvese que ambas son linealmente independientes, ya que, su wronskiano es no nulo, ya que, al ser ambas raíces complejas, su parte imaginaria es distinta de cero, es decir, $\beta\neq 0$ (véase Caso 3 en la Ec.6).

$$\text{Caso1:}\quad \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ (x_1(t))' & (x_2(t))' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = \underbrace{(r_2-r_1)}_{\neq 0}\underbrace{e^{(r_1+r_2)t}}_{\neq 0}\neq 0,$$

$$\text{Caso2:}\quad \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ (x_1(t))' & (x_2(t))' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{vmatrix} = e^{2rt}\neq 0,$$

$$\text{Caso3:}\quad \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ (x_1(t))' & (x_2(t))' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = (r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)t} = -2i\beta e^{2\alpha t}\neq 0.$$

Ecuación 6. Comprobación de que las soluciones obtenidas para la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 son linealmente independientes.

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0 \overset{x(t)=te^{rt}}{\Rightarrow} (te^{rt})''+a_1(te^{rt})'+a_2(te^{rt})=0,$$

$$\Downarrow$$

$$(2r+r^2t)e^{rt}+a_1(1+rt)e^{rt}+a_2te^{rt}=0 \overset{e^{rt}\neq 0}{\Rightarrow} \left(\underbrace{r^2+a_1r+a_2}_{=0\text{ (ver (1))}}\right)te^{rt}+\left(\underbrace{2r+a_1}_{=0\text{ (ver (2))}}\right)e^{rt}=0,$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow & \text{Por ser r raíz de la Ec. Característica: } r^2+a_1r+a_2=0, \\ (2) \Rightarrow & \text{Por ser r raíz doble de la Ec. Característica: } r=-\dfrac{a_1}{2}\Rightarrow 2r+a_1=0. \end{cases}$$

Ecuación 7. Cálculo de la segunda solución para la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 en el Caso 2 (raíces reales dobles de la Ecuación Característica).

Finalmente, ya estamos en condiciones de dar una representación explícita de la solución general de e.d.o. homogénea $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0$, denotada por $x^{gh}(t)$, en cada uno de los Casos 1-3 distinguidos previamente (véase Ec. 8). Obsérvese que al ser $S(x^{gh})$ un subespacio vectorial de dimensión 2, dicha solución general se obtiene como combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes (las cuales han sido obtenidas en los Casos 1-3) y que por tanto aparecen de forma natural dos constantes libres K_1 y K_2. Obsérvese que para la descripción de $x^{gh}(t)$ en el Caso 3 se ha usado la fórmula de Euler para la exponencial de un complejo imaginario puro: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ siendo $x \in IR$ (véase Ec.9).

$$x^{gh}(t) = \begin{cases} K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} & \text{si} \quad r_1 \neq r_2 \in IR, \\ K_1 e^{rt} + K_2 t e^{rt} & \text{si} \quad r_1 = r_2 = r \in IR, \\ e^{\alpha t}\left(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)\right) & \text{si} \quad r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta \in C. \end{cases}$$

Ecuación 8. Obtención de la solución general de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t} \Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} \overset{\text{fórmula}}{\underset{\text{Euler}}{=}} c_1 e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right) \\ x_2(t) &= e^{(\alpha-i\beta)t} \Rightarrow x_2(t) = c_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \overset{\text{fórmula}}{\underset{\text{Euler}}{=}} c_2 e^{\alpha t}\left(\underbrace{\cos(-\beta t)}_{=\cos(\beta t)} + i\underbrace{\sin(-\beta t)}_{=-\sin(\beta t)}\right) \end{aligned}$$

$$x^{gh}(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{\alpha t}\left[\underbrace{\left(c_1 + c_2\right)}_{K_1}\cos(\beta t) + \underbrace{i\left(c_1 + c_2\right)}_{K_2}\sin(\beta t)\right] = e^{\alpha t}\left(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)\right)$$

Ecuación 9. Obtención de la solución general de la e.d.o. homogénea asociada a la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1. en el Caso 3 (raíces complejas conjugadas de la Ecuación Característica).

Obsérvese que la Ecuación Característica obtenida al aplicar el Ensayo de Euler (véase Ec.5), es una ecuación algebraica (es decir, sin derivadas) r en la cual se puede obtener directamente aplicando la siguiente regla de sustitución $x''(t) \to r^2; x'(t) \to r^1 = r; x(t) \to r^0 = 1$ en la e.d.o. homogénea $x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = 0$: $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$.

Para efectuar el Paso 2 necesitamos encontrar "*una*" solución (¡pero no todas! como sí se requirió en el Paso 1 porque allí buscábamos la solución general de la e.d.o. completa). Esto lo haremos por ensayo empezando por las funciones más sencillas, las polinómicas de grado 0, luego de grado 1 y finalmente de grado 2 (como se aprecia en los cálculos detallados en la Ec.10. no se necesitan más ensayos). Obsérvese que es necesario distinguir tres casos en función de si los coeficientes a_1 y a_2 son o no nulos. La Ec.11 resume los resultados obtenidos.

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b \underset{c=cte}{\overset{x^{pc}(t)=c}{\Rightarrow}} \underbrace{(c)''}_{=0} + a_1 \underbrace{(c)'}_{=0} + a_2 (c) = b \overset{\text{si } a_2 \neq 0}{\Rightarrow} c = \frac{b}{a_2} \Rightarrow x^{pc}(t) = \frac{b}{a_2}.$$

$$\text{Si } a_2 = 0 \Rightarrow x''(t) + a_1 x'(t) = b \underset{c=cte}{\overset{x^{pc}(t)=ct}{\Rightarrow}} \underbrace{(ct)''}_{=0} + a_1 \underbrace{(ct)'}_{=c} = b \Rightarrow a_1 c = b \overset{\text{si } a_1 \neq 0}{\Rightarrow} c = \frac{b}{a_1} \Rightarrow x^{pc}(t) = \frac{b}{a_1} t.$$

$$\text{Si } a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow x''(t) = b \underset{c=cte}{\overset{x^{pc}(t)=ct^2}{\Rightarrow}} \underbrace{(ct^2)''}_{=2c} = b \Rightarrow 2c = b \Rightarrow x^{pc}(t) = \frac{b}{2} t^2.$$

Ecuación 10. Detalle de los cálculos para la obtención de una solución particular de la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1 mediante ensayo directo de funciones polinómicas de grado 0,1 y 2.

$$x^{pc}(t) = \begin{cases} \dfrac{b}{a_2} & \text{si} \quad a_2 \neq 0, \\ \dfrac{b}{a_1}t & \text{si} \quad a_2 = 0, a_1 \neq 0, \\ \dfrac{b}{2}t^2 & \text{si} \quad a_2 = a_1 = 0. \end{cases}$$

Ecuación 11. Solución particular de la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1.

Cabe señalar que la obtención de estas soluciones se puede realizar también por el Método de Variación de Parámetros.

El Paso 3 es sin duda el más sencillo porque únicamente consiste en sumar las soluciones obtenidas en el Paso 1 (Ec.8) y en el Paso 2 2 (Ec.11). En la Ec.12 se justifica por qué efectivamente la suma de ambas soluciones es una solución de la e.d.o. completa $x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$.

$$\begin{gathered} x^{gc}(t) = x^{gh}(t) + x^{pc}(t) \\ \Downarrow \\ \left(x^{gc}(t)\right)'' + a_1\left(x^{gc}(t)\right)' + a_2\left(x^{gc}(t)\right) = \left(x^{gh}(t) + x^{pc}(t)\right)'' + a_1\left(x^{gh}(t) + x^{pc}(t)\right)' + a_2\left(x^{gh}(t) + x^{pc}(t)\right) \\ = \left[\underbrace{\left(x^{gh}(t)\right)'' + a_1\left(x^{gh}(t)\right)' + a_2\left(x^{gh}(t)\right)}_{=0}\right] + \left[\underbrace{\left(x^{pc}(t)\right)'' + a_1\left(x^{pc}(t)\right)' + a_2\left(x^{pc}(t)\right)}_{=b}\right] = 0 + b = b. \end{gathered}$$

Ecuación 12. Justificación del Paso 3, es decir, que la suma de las soluciones obtenidas en los Pasos 1 y 2 proporciona una solución de la e.d.o. completa del pv.i. dado en la Ec.1.

Finalmente, en el Paso 4 imponiendo las c.i.'s $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = x_1$ se determinan los valores de las constantes K_1 y K_2 que se introdujeron en el Paso 1. A modo ilustrativo, en la Ec.13 se plantea el sistema algebraico que se debe resolver para realizar el cálculo de estas constante en el caso en que la c.i. está establecida en el instante $t_0 = 0$, las raíces son reales y distintas y el coeficiente $a_2 \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{lllllll} x_0 & = & x(0) & = & K_1 e^{r_1 \times 0} + K_2 e^{r_2 \times 0} + \dfrac{b}{a_2} & = & K_1 + K_2 + \dfrac{b}{a_2}, \\ x_1 & = & x'(0) & = & K_1 r_1 e^{r_1 \times 0} + K_2 r_2 e^{r_2 \times 0} & = & K_1 r_1 + K_2 r_2. \end{array}\right\}$$

Ecuación 13. Sistema algebraico resultante para la determinación de las constantes K_1 y K_2 en un caso particular.

3.2 Comportamiento asintótico de la solución

Una cuestión de interés no solo matemático, sino también en las aplicaciones es conocer el comportamiento a largo plazo (cuando $t \to \infty$) de la solución del p.v.i. dado en la Ec.1. El estudio puede hacerse directamente a través de la expresión explícita de la solución obtenida a partir de las Ecs. 8 y 11. sin más que tomar límites. La discusión de este estudio se presenta en la Ec.14. Para ello obsérvese que, la solución particular $x^{pc}(t)$, que contribuye a la solución final en forma de suma tiene límite si $a_2 \neq 0$ ya que, en los otros casos dicha función es un polinomio que tiende a infinito cuando $t \to \infty$. Por otra parte, analizando la forma que tiene la parte de la solución dada mediante la solución general $x^{gh}(t)$, únicamente el límite puede ser finito si puede $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$ (Caso 1); si $r < 0$ (Caso 2); $\alpha < 0$ (Caso 3). Obsérvese que estos tres casos pueden unificarse imponiendo que la parte real de las raíces de la Ecuación Característica sea negativa.

$$\text{Caso 1:}\quad \text{Si } r_1 < 0, r_2 < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = K_1\left(\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{r_1 t}}_{=0}\right) + K_2\left(\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{r_2 t}}_{=0}\right) + \frac{b}{a_2} = \frac{b}{a_2}.$$

$$\text{Caso 2:}\quad \text{Si } r < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = K_1\left(\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{rt}}_{=0}\right) + K_2\left(\underbrace{\lim_{t\to\infty} t e^{rt}}_{\substack{=0 \\ \text{(regla de L'Hôpital)}}}\right) + \frac{b}{a_2} = \frac{b}{a_2}.$$

$$\text{Caso 3:}\quad \text{Si } \alpha < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \left(\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}}_{=0}\right)\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(K_1\cos(\beta t) + K_2\sin(\beta t)\right)}_{\text{acotado}} + \frac{b}{a_2} = \frac{b}{a_2}.$$

Ecuación 14. Comportamiento a largo plazo de la solución del pv.i. dado en la Ec.1. Obsérvese que el segundo límite que aparece en el Caso 2 es nulo por aplicación de la regla de L'Hôpital.

4 Cierre

Dado que existen numerosos modelos económicos que se formulan a través de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden a coeficientes constantes, los cuales tienen un gran valor formativo, en este trabajo hemos presentado un método para calcular su solución, y a partir de la expresión obtenida estudiar el comportamiento asintótico de la misma. El objetivo de este estudio es disponer de los resultados obtenidos para exponer de forma directa otros modelos de interés económico en futuros artículos docentes y permitir al lector interesado conocer los detalles de los fundamentos en los que se basa la solución de dichas ecuaciones diferenciales. Como continuación del trabajo aquí presentado y por los mismas razones que acabamos de apuntar, en futuros trabajos docentes extenderemos el estudio a los modelos discretos basados en ecuaciones en diferencias lineales de primer y segundo orden a coeficientes constantes porque existen numerosos modelos económicos que se formulan vía de este tipo de ecuaciones.

5 Bibliografía

[1] Shone, R.: “Economic Dynamics”, 2nd edition, Ed. Cambridge, 2002.

Excelente texto que presenta el estudio de modelos económicos dinámicos. Combina la exposición de los modelos con la presentación de software para analizarlos.

[2] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía.

[3] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D., Sánchez Sánchez, A. y Villanueva, R.J.: "Modelos Dinámicos Continuos basados en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden a Coeficientes Constantes". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE.