



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

Departamento de Ingeniería Electrónica

---

Diseño y caracterización de metamateriales  
acústicos basados en guías de onda

---

Presentado por: D. Rogelio Graciá Salgado  
Dirigida por: Profesor José Sánchez-Dehesa  
Codirigida por: Dr. Daniel Torrent Martí

Mayo, 2014



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi director de tesis, José Sánchez-Dehesa, que me haya brindado la oportunidad de realizar el doctorado dentro del grupo de fenómenos ondulatorios así como el tiempo y el esfuerzo dedicado al desarrollo de este trabajo.

También quiero agradecer a mi codirector, Daniel Torrent Martí, su dedicación y supervisión que han sido componentes fundamentales para hacer posible la realización de este trabajo, así como su apoyo en los momentos más difíciles que surgieron en su desarrollo, especialmente al comienzo de ésta. Sin olvidarme de los miembros que siguen o han pertenecido al grupo: Francisco Cervera, Suitberto Cabrera, Héctor Miquel, Ana Díaz, Jorge Carbonell, Edgar Reyes, Matthew Guild, Alfonso Climente y Victor García, los cuales me han aceptado desde el primer día y cuyo apoyo y dedicación han contribuido a mi trabajo diario y a mejorar como persona.

A nivel personal doy gracias a mi familia siempre presentes en mi vida. Especialmente el apoyo de mis padres a lo largo de toda mi formación académica. Nunca podré agradecerles el esfuerzo y sobre todo la paciencia que han demostrado a lo largo de este proceso. Sin olvidarme de mi hermano Cristóbal que siempre ha sido una fuente de apoyo moral y ejemplo de superación personal y mi cuñada Ana por sus ánimos y consejos a nivel personal. Gracias a los dos por haber aumentado la familia con Cristóbal y Emma que han llenado de alegría nuestras vidas.

También quiero dar gracias a mis compañeros de facultad David Poquet, Guillem Usach, David Castro, María José y Laura por aquellas vivencias y sentimientos compartidos a lo largo de la carrera de los que surgieron anécdotas que nos acompañaran a lo largo de nuestra vida y que siempre recordaremos en nuestras reuniones.

Sin olvidarme de mis amigos Alejandro López, Marí Carmen López, Pedro Torres, Miguel Ángel Azorín, Pablo Martínez, Gaspar, Alejandro Conejero, Jose Luis Muñoz, Iván Almagro, Pablo Solera y Vanesa Almagro con los que he compartido momentos inolvidables a lo largo de la carrera y el doctorado. Por último agradecer especialmente por su apoyo incondicional a Coral, he tenido momentos muy duros a lo largo de estos cuatro años y siempre has estado a mi lado apoyándome y dándome ánimos y sobre todo aguantándome,

no tengo palabras para agradecértelo. Muchas gracias por lo que has aportado a mi vida.





A mis Padres y a Coral



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del Arte . . . . .	1
1.2. Objetivo de la tesis . . . . .	4
1.3. Contenido de la tesis . . . . .	6
<b>I Teoría</b>	<b>9</b>
<b>2. La ecuación de onda acústica</b>	<b>11</b>
2.1. Acústica . . . . .	11
2.1.1. Principio de conservación . . . . .	12
2.1.2. Equilibrio mecánico de un fluido ideal . . . . .	13
2.1.3. Ecuación de estado de un fluido ideal . . . . .	14
2.2. La ecuación de onda . . . . .	15
2.3. Condiciones de contorno . . . . .	18
2.4. Guía de ondas . . . . .	20
2.5. Cristales Sónicos . . . . .	23
<b>3. Dispersión del campo acústico: Matriz-T</b>	<b>25</b>
3.1. Dispersión de ondas . . . . .	25
3.2. Campo incidente: La onda plana . . . . .	27
3.3. Matriz-T de una cavidad con un fluido anisótropo en su interior	29
3.4. Casos particulares . . . . .	36
3.4.1. Matriz-T de una cavidad con un fluido isótropo en su interior . . . . .	36
3.4.2. Matriz-T de una cavidad con un fluido que presenta una fuerte anisotropía angular . . . . .	37

3.5. Campo lejano . . . . .	39
3.6. Convergencia . . . . .	41
3.6.1. Convergencia de la matriz-T . . . . .	41
3.6.2. Convergencia del campo dispersado . . . . .	44
3.7. Elementos dispersivos localizados arbitrariamente en el espacio	45
<b>4. Homogenización</b>	<b>53</b>
4.1. Homogenización de una distribución de elementos dispersores .	53
4.2. Parámetros acústicos del elemento de dispersión para bajas frecuencias . . . . .	55
4.3. Parámetros efectivos de una distribución de elementos disper- sivos . . . . .	57
4.3.1. Módulo de compresibilidad efectivo $B^*$ . . . . .	58
4.3.2. Densidad efectiva $\rho^*$ . . . . .	59
4.3.3. Velocidad efectiva . . . . .	60
<b>II Aplicaciones</b>	<b>63</b>
<b>5. Dispositivo refractivo: Lente acústica</b>	<b>65</b>
5.1. Caracterización de una distribución de cavidades . . . . .	66
5.2. Lente acústica . . . . .	69
5.3. Experimento numérico: Lente acústica . . . . .	71
5.4. Influencia de los modos evanescentes sobre los parámetros efec- tivos de una red de cavidades . . . . .	72
5.5. Acoplamiento de las propiedades dispersivas al espacio libre .	82
5.6. Resumen . . . . .	88
<b>6. Metamaterial acústico con módulo de compresibilidad negativo</b>	<b>91</b>
6.1. Metafluido quasi-bidimensional: Estructura de bandas acústica	92
6.2. Realización experimental . . . . .	100
6.2.1. Medida de la estructura de bandas . . . . .	103
6.2.2. Reflectancia y transmitancia espectral . . . . .	106
6.2.3. Parámetros efectivos . . . . .	108
6.3. Efecto pelicular en la interfaz aire-metamaterial . . . . .	111

6.4. Resumen . . . . .	114
<b>7. Metamaterial acústico doblemente negativo</b>	<b>115</b>
7.1. Parámetros efectivos del elemento de dispersión: $B_a(\omega)$ y $\rho_a(\omega)$ . . . . .	116
7.2. Parámetros efectivos del metamaterial: $B^*(\omega)$ y $\rho^*(\omega)$ . . . . .	122
7.2.1. Diagramas de fase en el plano $\omega - L/h$ . . . . .	124
7.2.2. Diagramas de fase en el plano $\omega - R_a/R_b$ . . . . .	126
7.3. Resumen . . . . .	129
<b>8. Metamateriales acústicos con densidad negativa y cercana a cero: diseño y aplicaciones</b>	<b>131</b>
8.1. Metamaterial acústico: parámetros efectivos . . . . .	132
8.1.1. Parámetros efectivos de la unidad de dispersión: $B_a(\omega)$ y $\rho_a(\omega)$ . . . . .	132
8.1.2. Parámetros efectivos del metamaterial acústico: $B^*(\omega)$ y $\rho^*(\omega)$ . . . . .	135
8.2. Estados acústicos superficiales . . . . .	140
8.2.1. Relación de dispersión de los estados superficiales . . . . .	140
8.2.2. Experimento numérico usando Comsol Multiphysics . . . . .	144
8.3. Aplicaciones de metamateriales con $\rho^* \approx 0$ . . . . .	148
8.3.1. Efecto Túnel para ondas acústicas a través de canales estrechos . . . . .	149
8.3.2. Control del campo de radiación . . . . .	152
8.3.3. Transmisión perfecta a través de curvas cerradas y es- quinas . . . . .	154
8.3.4. Divisor de ondas acústicas . . . . .	154
8.4. Caracterización experimental . . . . .	157
8.5. Resumen . . . . .	159
<b>9. Observaciones finales</b>	<b>163</b>
9.0.1. Conclusiones . . . . .	163
9.0.2. Trabajo Futuro . . . . .	164
<b>A. Funciones de Bessel</b>	<b>167</b>
A.1. Relaciones básicas . . . . .	167

A.1.1. Ecuación diferencial de Bessel y soluciones . . . . .	167
A.1.2. Relaciones de recurrencia . . . . .	168
A.1.3. Formas asintóticas para argumentos pequeños . . . . .	169
A.1.4. Formas asintóticas para argumentos grandes . . . . .	170
A.1.5. Forma integral de las funciones de Bessel . . . . .	170
A.2. Teorema de adición: caso bidimensional . . . . .	171
<b>B. Comportamiento para bajas frecuencias:</b>	
<b>Matriz-T cilindro fluido</b>	<b>175</b>
B.1. Matriz-T cilindro fluido . . . . .	175
B.1.1. Casos particulares . . . . .	177
B.2. Comportamiento en bajas frecuencias . . . . .	177
<b>C. Cálculo de la matriz-T mediante elementos finitos</b>	<b>181</b>
C.1. Procedimiento . . . . .	182
C.2. Ejemplo . . . . .	183
<b>D. Caracterización de un metamaterial acústico</b>	<b>185</b>
D.1. Reflectancia y transmitancia . . . . .	185
D.2. Medida de la transmitancia y la reflectancia . . . . .	188
D.3. Extacción de parámetros . . . . .	190
<b>E. Producción Científica</b>	<b>195</b>
E.1. Artículos científicos . . . . .	195
E.2. Congresos nacionales o internacionales . . . . .	195

# Índice de figuras

2.1. Guía de ondas . . . . .	20
2.2. Representación de un cristal sónico. . . . .	24
3.1. Campo dispersado . . . . .	26
3.2. Campo incidente . . . . .	28
3.3. Matriz-T de una cavidad que presenta un fluido anisótropo en su interior . . . . .	30
3.4. Campo dispersado por una cavidad . . . . .	38
3.5. Campo lejano . . . . .	40
3.6. Convergencia de los modos de la matriz-T para el orden $q = 0$	42
3.7. Convergencia de los modos de la matriz-T para el orden $q = 1$	43
3.8. Convergencia del campo dispersado . . . . .	44
3.9. Esquema dispersión múltiple . . . . .	46
3.10. Campo de presiones red cuadrada . . . . .	49
5.1. Esquema Cavidad . . . . .	66
5.2. Parámetros efectivos obtenidos sin considerar la interacción de los modos . . . . .	69
5.3. Índice de refracción en función de la fracción de llenado . . . . .	70
5.4. Mapas del campo acústico: lente acústica parte1 . . . . .	73
5.5. Mapas del campo acústico: lente acústica parte2 . . . . .	74
5.6. Comparación del elemento de matriz $T_0$ y $T_1$ obtenido por el modelo y por simulación basada en elementos finitos . . . . .	76
5.7. Comparación del campo lejano obtenido por el modelo y por simulación basada en elementos finitos . . . . .	77
5.8. Comparación de la densidad efectiva del modelo simplificado y el modelo general . . . . .	78



5.9. Parámetros efectivos en función de la frecuencia . . . . .	80
5.10. Índice de refracción en función de la frecuencia . . . . .	81
5.11. Mapas de presión de la lente acústica mediante la teoría de la dispersión múltiple . . . . .	83
5.12. Esquema del montaje experimental: acoplamiento al espacio libre . . . . .	84
5.13. Acoplamiento lente al espacio libre: mapas de presión . . . . .	85
5.14. Perfil del campo de presión acoplado al espacio libre . . . . .	86
6.1. Esquema estructura de bandas acústicas . . . . .	93
6.2. Estructura de bandas de una red hexagonal de cavidades . . . . .	99
6.3. Montaje experimental . . . . .	100
6.4. Estructura de bandas experimental . . . . .	102
6.5. Estructura de bandas experimental . . . . .	104
6.6. Reflectancia y transmitancia . . . . .	105
6.7. Mapas de presión $2D$ . . . . .	107
6.8. Mapas de presión $3D$ . . . . .	109
6.9. Extracción del módulo de compresibilidad efectivo . . . . .	109
6.10. Perfiles del campo acústico . . . . .	111
6.11. Extracción experimental del efecto pelicular. . . . .	113
7.1. Representación del Metamaterial y esquema del elemento de dispersión . . . . .	117
7.2. Parámetros efectivos del elemento de dispersión . . . . .	120
7.3. Campo de presión dispersado: resonancia monopolar y dipolar	121
7.4. Diagrama de fase en el plano $\omega - L/h$ . . . . .	124
7.5. Parámetros efectivos de la distribución para $L = 3h$ . . . . .	125
7.6. Diagrama de fase en el plano $\omega - R_a/R_b$ . . . . .	127
7.7. Parámetros efectivos de la distribución para $R_a = 0,7R_b$ . . . . .	128
8.1. Esquema del metamaterial y elemento de dispersión anisótropo	133
8.2. Parámetros efectivos del elemento de dispersión anisótropo . . . . .	136
8.3. Diagrama de fase en el plano $\omega - L/h$ . . . . .	138
8.4. Parámetros efectivos del metamaterial . . . . .	139
8.5. Diagramas de fase en el plano $\omega - R_a/R_b$ . . . . .	141
8.6. Esquema del experimento numérico . . . . .	142

---

8.7. Amplitud del modo superficial . . . . .	146
8.8. Relación de dispersión de los estados superficiales . . . . .	147
8.9. Efecto túnel . . . . .	150
8.10. Flujo de energía transmitido . . . . .	151
8.11. Control del patrón de radiación . . . . .	153
8.12. Transmisión perfecta a través de un codo $90^\circ$ . . . . .	155
8.13. Divisor de ondas . . . . .	156
8.14. Muestras experimentales . . . . .	158
8.15. Caracterización experimental de las muestras . . . . .	160
A.1. Esquema de dispersión múltiple . . . . .	171
A.2. Definiciones de distancia y ángulo para el teorema de Graf . . . . .	172
C.1. Matriz-T extraída por elementos finitos . . . . .	183
D.1. Esquema sistema multicapa . . . . .	186
D.2. Esquema de extracción de la reflectancia y la transmitancia a partir del campo de presiones . . . . .	189

RESUMEN DE LA TESIS DOCTORAL

## **Diseño y caracterización de metamateriales acústicos basados en guías de onda**

de

**D. Rogelio Graciá Salgado**

El objetivo de este trabajo ha sido la obtención de metamateriales acústicos que exhiban doble negatividad en sus parámetros efectivos a partir de estructuras fabricadas con materiales acústicamente rígidos. Para lograr dicho objetivo se consideraron metamateriales acústicos cuyas unidades dispersivas consisten en cavidades perforadas en el interior de una guía bidimensional. Se realizó un estudio paramétrico del comportamiento de la densidad dinámica de masa y del módulo de compresibilidad efectivos como función de la frecuencia.

Este estudio ha permitido encontrar nuevos metamateriales acústicos que presenten un comportamiento negativo en uno o en los dos parámetros efectivos que les caracterizan, abriendo de esta manera la posibilidad de diseño de nuevos dispositivos acústicos.

Como resultados destacables del trabajo realizado cabe señalar la obtención de un metamaterial que presenta una densidad dinámica de masa menor que la del medio que lo rodea y un módulo de compresibilidad que presenta un comportamiento resonante en determinados rangos de frecuencia. También es destacable el diseño de una unidad dispersiva que permite obtener metamateriales que presenten una densidad dinámica de masa cercana a cero en un determinado rango de frecuencias y que, en otro rango, presentan un comportamiento doblemente negativo en sus parámetros efectivos.

Como principales aplicaciones de impacto y novedad dentro del campo de la acústica se han propuesto y simulado el efecto túnel, filtro de modos verticales, divisor de ondas acústicas. Todas estas aplicaciones son posibles gracias al comportamiento de las estructuras diseñadas como metamateriales con densidad dinámica de masa cercana a cero. Otra aplicación de interés que se ha propuesto es la posibilidad de diseñar una lente acústica mediante cavidades localizadas en el interior de una guía de ondas.

RESUM DE LA TESI DOCTORAL

## **Disseny i caracterització de metamaterials acústics basats en guia d'ona**

de

**D. Rogelio Graciá Salgado**

L'objectiu d'aquest treball ha sigut l'obtenció de metamaterials acústics que exhibisquen doble negativitat en els paràmetres efectius a partir d'estructures fabricades amb materials acústicament rígids. Per a assolir l'objectiu, s'han considerat metamaterials acústics les unitats dispersives dels quals consisteixen en cavitats perforades a l'interior d'una guia d'ones bidimensional. S'ha dut a terme un estudi paramètric del comportament de la densitat dinàmica de massa i del mòdul de compressibilitat efectius com a funció de la freqüència.

Aquest estudi ha permès trobar nous metamaterials acústics que presenten un comportament negatiu en un o en els dos paràmetres efectius que els caracteritzen, un fet que obri la possibilitat de dissenyar nous dispositius acústics.

Com a resultats destacables d'aquest treball, cal assenyalar l'obtenció d'un metamaterial que presenta una densitat dinàmica de massa menor que la del medi que l'envolta, i un mòdul de compressibilitat que presenta un comportament ressonant en determinats rangs de freqüència. També és destacable el disseny d'una unitat dispersiva que permet obtenir metamaterials que presenten una densitat dinàmica de massa propera a zero en un determinat rang de freqüències i que, en un altre rang, presenten un comportament doblement negatiu en els paràmetres efectius.

Com a principals aplicacions d'impacte i novetat dins del camp de l'acústica, s'han proposat i s'han simulat l'efecte túnel, el filtre de modes verticals i el divisor d'ones acústiques. Totes aquestes aplicacions són possibles gràcies al comportament de les estructures dissenyades com a metamaterials amb densitat dinàmica de massa propera a zero. Una altra aplicació d'interès que s'ha proposat és la possibilitat de dissenyar una lent acústica mitjanant cavitats localitzades a l'interior d'una guia d'ones.

ABSTRACT OF THE DOCTORAL THESIS

## **Design and characterization of acoustic Metamaterials in waveguides**

by

**D. Rogelio Graciá Salgado**

The aim of this work has been to obtain acoustic metamaterials which exhibit double negative behavior in their effective parameters from structures made of materials that are considered acoustically rigid. To accomplish this objective, an acoustic metamaterial whose scattering units consist of drilled cavities inside two-dimensional waveguide are considered. A parametric study of the effective dynamical mass density and effective bulk modulus as a function of frequency was performed. This study has demonstrated new acoustic metamaterials that possess a negative behavior in one or both effective parameters that characterize them, enabling the possibility to design new acoustic devices.

The significant results of the work performed include the theoretical and experimental demonstration of an acoustic metamaterial having to a dynamical mass density less than of the surrounding medium and bulk modulus having a resonant behavior over a range frequencies. Furthermore, the design of the scattering unit allows one to obtain metamaterials which exhibit a near zero density in over a range of frequencies and that, in another range of frequencies, has a double negative behavior in their effective parameters.

Based in this work novel application in the field of acoustics are possible including the tunneling effect, controlling the radiation field, and a acoustic wave guide splitter. All these applications are made possible by making use of near zero density behavior that exhibited by some of the metamaterials studied in this work. Another interesting application that has been proposed is the possibility of designing an acoustic lens using cavities localized inside of the waveguide.

# Capítulo 1

## Introducción

Este capítulo sirve como introducción al lector para que adquiera una visión general del trabajo realizado dentro del campo de los metamateriales. El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la sección 1.1 se realiza una introducción histórica sobre los metamateriales para seguidamente describir los trabajos realizados en el campo específico de los metamateriales acústicos, subrallando de esta manera la aportación de este trabajo en los distintos tópicos expuestos. En la sección 1.2 se expone el objetivo de la tesis y finalmente en la sección 1.3 se hace una breve descripción del contenido de los capítulos que componen el presente manuscrito.

### 1.1. Estado del Arte

Los metamateriales son medios estructurados que presentan propiedades inusuales, no encontradas en los materiales naturales que los constituyen. Estas propiedades son debidas al comportamiento de la estructura en sí, más que en la de sus componentes elementales. En un sentido más estricto se considera metamaterial a aquél material constituido por una estructura periódica de unidades elementales, cuya dimensión y periodicidad sea menor que la longitud de onda con la que se vaya a trabajar.

En 1968 Victor Veselago, un físico de la antigua unión soviética introdujo por primera vez la propuesta de materiales electromagnéticos doblemente negativos, es decir, metamateriales que presentan una permitividad eléctrica  $\epsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$  negativas [Ves68]. En esa época se sabía que la

permitividad y la permeabilidad de un material dependían de la frecuencia. El comportamiento frecuencial de estas magnitudes mostraba que presentaban valores negativos en ciertas regiones frecuenciales, aunque no de manera simultánea. Basándose en esto Veselago se cuestionó que ocurriría si la ondas electromagnéticas se propagarían en un medio con ambos parámetros negativos. De su trabajo se predice una velocidad de fase negativa, es decir, que la fase de la onda se desplaza en sentido contrario a la propagación de energía dado por el vector de Poynting, como exige el principio de causalidad, dando por tanto origen a lo que ahora se conoce como metamaterial con índice de refracción negativo.

28 años después Sir John Pendry, del Imperial College de Londres, fue el primero en teorizar una forma práctica de implementar un metamaterial electromagnético, obteniendo con la ayuda de sus colaboradores un material artificial (metamaterial) con permitividad dieléctrica  $\epsilon$  negativa [PHSY96]. Sin embargo el verdadero reto, debido a que en la naturaleza existen medios que presentan permitividad negativa (ferroeléctricos), era la obtención de metamateriales que presentaran una permeabilidad magnética  $\mu$  negativa. Finalmente, en 1999 nuevamente Pendry y sus colaboradores idearon una forma de obtener un permeabilidad negativa mediante resonadores con forma de “C” [PHRS99]. Un año más tarde, David Smith y sus colaboradores de la universidad de California en San diego fueron los primeros en implementar de una manera práctica las ideas de Pendry y fabricaron un metamaterial que presenta simultáneamente ambos parámetros negativos [SPV<sup>+</sup>00]. Inmediatamente después se pudo verificar experimentalmente un metamaterial que presenta un índice de refracción negativo [SSS01] y se demostraron fenómenos tan interesantes como la super resolución [Pen00] y el manto de invisibilidad [SMJ<sup>+</sup>06].

La contraparte acústica comenzó sobre el año 1993 con los estudios de estructuras periódicas de elementos de dispersión del sonido, los cristales sónicos, que permitieron demostrar fenómenos físicos como la existencia de “band gaps” [KHDDR93, SPCMS<sup>+</sup>98, RCSP<sup>+</sup>99]. Con estas estructuras cristalinas se pudo demostrar la focalización de un cristal bidimensional de cilindros rígidos en aire [CSSP<sup>+</sup>01] y se pudo obtener un índice de refracción negativo empleando una distribución 3D de esferas sólidas en agua [YPL<sup>+</sup>04].

A partir del 2003 el estudio del comportamiento de los cristales sónicos

para grandes longitudes de onda (grande en comparación con la separación entre los elementos dispersores) empezó a cobrar creciente interés. En este régimen el cristal sónico se comporta como un medio efectivo cuyos parámetros ( el módulo de compresibilidad  $B^*$  y densidad dinámica de masa  $\rho^*$ ) venían determinados principalmente por la fracción de volumen que ocupan los elementos dispersores. Las propiedades refractivas fueron estudiadas por diversos grupos [KAG03, GY03a, MLWS06, THCS06, TSD06, TSD07b].

Las propiedades de homogenización de los cristales sónicos han sido empleadas para diseñar dispositivos acústicos refractivos como, por ejemplo, lentes acústicas cuyas propiedades de focalización están basadas la forma que presentaba la superficie externa del cristal sónico [CSSP<sup>+</sup>01, GY03b, HC05]. Cabe señalar que en el primer trabajo de Cervera y colaboradores [CSSP<sup>+</sup>01] se obtuvo el índice de refracción de la lente acústica mediante un modelo fenomenológico, que posteriormente se demostró como válido solo para fracciones de llenado bajas.

También se han fabricado y caracterizado experimentalmente dispositivos refractivos obtenidos mediante la técnica de diseño inverso, usando algoritmos genéticos [HSD04]. Por otra parte, usando inteligentemente la estructura compositiva [TSD07a, CLHL07, CLHL07] se pudieron también obtener dispositivos acústicos que presentaban refracción negativa [QZL05, DDH<sup>+</sup>09, ZYF09]. Lentes acústicas con gradiente de índice fueron propuestas por Torrent y Sánchez-Dehesa en 2007 [TSD07a], pero no fue hasta el 2010 que pudieron ser demostradas experimentalmente [CTSD10, MNO<sup>+</sup>10].

A partir de los resultados obtenidos con la teoría de homogenización se propuso estudiar un sistema con densidad dinámica de masa menor que la del medio que lo rodea, dicha propiedad se utilizó para el diseño de un dispositivo acústico refractivo bidimensional que permitió la focalización del campo acústico en una región del espacio. Este trabajo se describe en el capítulo 5 de esta tesis.

El concepto de metamaterial ha abierto una nueva frontera en el campo de la acústica porque está permitiendo obtener materiales con parámetros que no se pueden encontrar en los materiales acústicos convencionales. Por ejemplo, metamateriales que presenten un módulo de compresibilidad negativo han sido demostrados por diferentes grupos de manera independiente [FXA<sup>+</sup>06, ZSC<sup>+</sup>08, LPCS09]. Se ha demostrado que el módulo de compre-



sibilidad negativo se obtiene de forma efectiva gracias a la existencia de una resonancia monopolar embebida en las unidades que se repiten. El inconveniente es que estas unidades presentan pérdidas debido a la fricción del aire en el cuello del resonador. Partiendo de estos resultados, en esta tesis se diseñó una nueva estructura con la que se obtenía el mismo tipo de resonancia pero que presenta pocas pérdidas. La caracterización experimental de este tipo de metamaterial se encuentra en el capítulo 6. Por otra parte, diversos grupos de manera independiente han demostrado que la densidad dinámica efectiva negativa se obtiene a través de una resonancia dipolar [YMY<sup>+</sup>08, ZXY<sup>+</sup>11]. La resonancia dipolar en la propagación aérea se ha obtenido hasta ahora únicamente mediante el uso de membranas.

Mediante la combinación de ambos tipos de resonancias en la propagación aérea o mediante el uso de materiales elásticos se han propuesto y caracterizado experimentalmente metamateriales que exhiben un comportamiento doblemente negativo [LC04, LLQ06, CXL08, ZYF09, LPY<sup>+</sup>10, BLM10, FZ11]. Con estos precedentes, en esta tesis nos propusimos diseñar un metamaterial que exhibiera el mismo comportamiento mediante la inclusión de un metafluido en cada una de las unidades dispersivas que forman el metamaterial. El análisis teórico de este material se encuentra descrito en el capítulo 7.

También han sido propuestos otros tipos de metamateriales acústicos como los metamateriales con masa efectiva anisótropa [TSD08, PL08]. Algunos de ellos han sido experimentalmente demostrados usando estructuras corrugadas [TSD11a, STSD11]. En base a los resultados obtenidos en dichos trabajos, se extrajo la idea de proponer un nuevo metamaterial que mediante la utilización de una estructura anisótropa presenta un comportamiento doblemente negativo y una densidad cercana a cero. El análisis teórico así como su caracterización experimental se exponen en el capítulo 8. Es interesante apuntar que este tipo de metamateriales están bajo estudio debido a sus aplicaciones potenciales como el manto de invisibilidad acústica [CS07] o lentes de aumento [LFY<sup>+</sup>09].

## 1.2. Objetivo de la tesis

El objetivo fundamental de esta tesis ha sido la obtención de metamateriales acústicos que exhibieran un comportamiento doblemente negativo y

que presentará pocas pérdidas siendo el medio de propagación de las ondas acústicas el aire.

Para lograr dicho objetivo nos hicimos dos preguntas:

1. ¿ Cuáles son los mecanismos que permiten la obtención de los parámetros negativos?.
2. ¿ Cómo se pueden implementar dichos mecanismos en la unidad dispersiva del sonido y que además presenten pocas pérdidas?.

Para hacer frente a la primera pregunta se hizo necesario una documentación bibliográfica de los trabajos realizados hasta el momento así como el seguimientos de publicaciones que abarcarán este tópico. En estos trabajos se exponen los mecanismos mediante los cuales se obtienen los parámetros negativos. Este mecanismo se basa en introducir un comportamiento resonante en la unidad dispersiva que formaba el metamaterial. Los trabajos realizados hasta el momento indicaban que obtenían la doble negatividad mediante medios elásticos considerando el agua como medio de propagación del campo acústico. Sin embargo en la propagación aérea se obtenían utilizando dos mecanismos resonantes, el primer mecanismo era resonador de Helmholtz y el segundo lo constituyen las membranas. Ambos mecanismos presentan pérdidas y, además, la utilización de las membranas presenta inconvenientes añadidos, ya que no se puede asegurar que la tensión sea la misma en todas las membranas que constituyen el metamaterial. Por otra parte, los parámetros que caracterizan a las membranas cambian con el paso del tiempo; es decir, las membranas se deterioran.

Para hacer frente a la segunda pregunta se comenzó con un análisis teórico que nos permitiera obtener un modelo físico que explicara, si era posible con expresiones analíticas, el comportamiento resonante de la unidad dispersiva. Este análisis teórico se complementó con simulaciones basadas en elementos finitos (Comsol) para la comprobación y validez del modelo teórico formulado.

El primer paso para alcanzar el objetivo establecido era obtener el mismo comportamiento resonante que se obtiene con los resonadores de Helmholtz pero que presentara pocas pérdidas. Las pérdidas de estos resonadores son principalmente debidas a la fricción, ya que la masa de aire localizada en

el cuello presenta un movimiento oscilatorio, cuya frecuencia coincide con la frecuencia del campo incidente, produciéndose pérdidas debido a la fricción de la masa del aire con las paredes del cuello del resonador. Finalmente se alcanzó dicho objetivo con el estudio de un sistema de cavidades localizadas en el interior de una guía de ondas. Este sistema demostró que a partir de ciertos valores umbrales de la longitud de la cavidad presentaba el mismo comportamiento resonante que los resonadores de Helmholtz pero con pocas pérdidas.

El segundo objetivo presentaba un reto mayor, ya que se tenía que proponer un mecanismo que dotara a la unidad dispersiva de un comportamiento resonante dipolar. Dicho comportamiento se había obtenido en aire mediante el uso de membranas. Por tanto el reto era encontrar una unidad dispersiva que presentara el comportamiento resonante de las membranas pero que fuera mucho más robusto que estas, es decir que evitaran las inconveniencias de las membranas y que además presentara pocas pérdidas. Para ello se realizó un estudio paramétrico de los parámetros efectivos para cada una de las estructuras que se consideraron candidatas a ese tipo de comportamiento. El criterio de búsqueda de las estructuras se basó en un sistema que nos permitiera obtener el mecánimo reportado en [LC04], es decir sistemas que presentaran una densidad menor que la del aire ( $\rho^* < \rho_b$ ) y que la velocidad de propagación del sonido a través del metamaterial fuera menor que la del aire ( $c^* < c_b$ ). Finalmente se obtuvo dicho comportamiento mediante dos tipos de unidades dispersivas. Sin embargo, la verificación experimental quedó enmascarada por la pérdidas que obtuvimos con el montaje experimental. Dichas pérdidas no eran debidas a la unidad dispersiva en sí, ya que se observó que también se obtenía pérdidas muy altas cuando se media el campo sin la muestra. Este hecho nos impidió verificar experimentalmente que la muestra propuesta presentaba pocas pérdidas.

### 1.3. Contenido de la tesis

El contenido de la tesis se divide en dos partes, una parte teórica y otra de aplicaciones.

En la parte teórica se exponen los conceptos, fundamentos y las herramientas necesarias que nos permiten realizar el estudio teórico de los me-

metamateriales propuestos. La parte teórica está formada por los siguientes capítulos:

- **Capítulo 2:** en este capítulo se exponen los principios fundamentales para la deducción de la ecuación de onda acústica. Dicha ecuación se resuelve para el caso de una onda acústica propagándose a través de un medio fluido localizado en el interior de una guía de ondas. Finalmente se introduce el concepto de cristal sónico.
- **Capítulo 3:** en este capítulo se explica el método utilizado para la obtención de la matriz de transferencia que caracteriza las propiedades dispersivas del elemento de dispersión general, a partir del cual se pueden derivar todos los casos estudiados en el presente trabajo. También se obtienen las expresiones analíticas que permiten el cálculo del campo lejano. El capítulo finaliza con la descripción de la teoría de la dispersión múltiple.
- **Capítulo 4:** en este capítulo se expone el método de homogenización empleado en la obtención de las expresiones analíticas que nos permiten el cálculo de los parámetros efectivos que caracterizan al metamaterial.

En la parte de aplicaciones se realizan análisis más completos de los metamateriales que se han propuesto para conseguir el objetivo marcado de esta tesis. La parte de aplicaciones consta de los siguientes capítulos:

- **Capítulo 5:** en este capítulo se analizan las propiedades refractivas del metamaterial que hemos utilizado en el diseño de un dispositivo refractivo que permite la focalización del campo de presiones. También se exponen los resultados experimentales preliminares de una prueba de concepto. Esta prueba consistió en demostrar que las propiedades refractivas no se quedan confinadas en la guía de onda sino que se pueden acoplar al espacio libre.
- **Capítulo 6:** en este capítulo se expone la caracterización teórica y experimental de un metamaterial que presenta un módulo de compresibilidad efectivo negativo. La caracterización del metamaterial se obtuvo mediante la medida de la reflectancia y la transmitancia, la extracción de los parámetros efectivos, la obtención de la relación de dispersión y, finalmente, mediante la medición del efecto pelicular.

- **Capítulo 7:** en este capítulo se realiza un estudio teórico de un metamaterial que presenta un comportamiento doblemente negativo y se analiza dicho comportamiento en función de los parámetros físicos que caracterizan las unidades de dispersión.
- **Capítulo 8:** en este capítulo se realiza un estudio teórico y la caracterización experimental de un metamaterial que presenta densidades negativa y cercana a cero, respectivamente. Este metamaterial permite, en principio, la excitación de ondas superficiales así como el diseño de diversos dispositivos acústicos, explotando la propiedad de densidad cercana a cero.
- **Capítulo 9:** este capítulo resume los principales resultados de la tesis así como las propuestas de trabajo futuro.

**Parte I**

**Teoría**



# Capítulo 2

## La ecuación de onda acústica

En este capítulo se exponen los conceptos fundamentales para la deducción de la ecuación de onda acústica. La obtención de la ecuación de onda se ha realizado considerando únicamente fenómenos acústicos lineales despreciando, por tanto, los términos no lineales que aparecen en la ecuación general. Finalmente se realizará una breve introducción sobre los cristales sónicos.

### 2.1. Acústica

En el presente trabajo se considerará que las ondas acústicas se propagan en un medio fluido ideal. El concepto físico de fluido ideal involucra ciertas condiciones que han de verificar las fuerzas que actúan en el fluido. Para exponer dichas condiciones considérese un elemento de superficie  $\Delta S$  con una forma arbitraria localizada en el interior de un medio fluido. Las porciones del fluido localizadas en esa superficie arbitraria están sometidas a un campo de fuerzas debido al contacto ejercido por ellas. Cuando estas fuerzas son normales a la superficie (i.e. no tienen componente tangencial) y las magnitudes de esas fuerzas son independientes a la orientación de la superficie (fuerza isotrópica), entonces el sistema puede caracterizarse mediante una única magnitud  $P$ , la presión, cuya definición viene dada por

$$P \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{|\Delta F|}{\Delta S} \right), \quad (2.1.1)$$



cuando un fluido satisface estas condiciones se denomina fluido ideal.

Para la deducción de la ecuación de onda es necesario introducir el principio de conservación de la masa en forma de ecuación diferencial, definir la condición de equilibrio mecánico de un fluido y, finalmente, introducir la ecuación de estado de un fluido ideal.

### 2.1.1. Principio de conservación

Un medio fluido se caracteriza mediante su densidad  $\rho$ , y su campo de velocidades  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ .

La conservación de masa de un fluido ideal impone ciertas restricciones en el campo de velocidades que caracteriza al fluido. Para la obtención de dichas restricciones se considera una superficie cerrada  $S$ , cuya posición está fija en el espacio, la cual define un volumen  $V$  ocupado en su totalidad por el fluido. Si  $\rho(\mathbf{r}, t)$  es la densidad del fluido, en la posición  $\mathbf{r}$  y en el instante  $t$ , la masa  $m$  de fluido encerrada en ese volumen para cualquier instante  $t$  es

$$m = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV, \quad (2.1.2)$$

siendo  $dV$  un diferencial de volumen encerrado.

Por otra parte, debido a que las partículas que constituyen el fluido están en continuo movimiento, se considera la existencia de un flujo neto de masa que atraviesa la superficie definida por el elemento de volumen  $dV$ , el cual se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\Phi = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.1.3)$$

siendo  $dS$  el diferencial de área definida alrededor de la superficie y  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal a la superficie.

El principio de conservación o de continuidad de masa establece que, en ausencia de fuentes, la masa del fluido se conserva, pudiendo escribir la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.1.4)$$

realizando operaciones sobre esta expresión y transformando la integral de superficie en una integral de volumen se puede reescribir la anterior expresión como

$$\int_V \left\{ \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} dV = 0. \quad (2.1.5)$$

Esta relación es válida para cualquier elemento de volumen que cubra el fluido en su totalidad, lo cual es posible si la integral es idénticamente cero en cualquier punto del fluido. Teniendo en cuenta este argumento podemos extraer la condición que ha de verificar el campo de velocidades en todos los puntos del fluido ideal

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.1.6)$$

La ecuación (2.1.6) es una de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos. También se le conoce como “ecuación de continuidad de la masa”, sin embargo en este estudio hemos considerado mejor denominarla “ecuación de conservación” debido a que este nombre ejerce una mayor alusión al sentido físico que involucra esta ecuación.

### 2.1.2. Equilibrio mecánico de un fluido ideal

Se dice que un sólido se encuentra en estado de equilibrio cuando la suma de todas las fuerzas que actúan sobre éste, tanto internas como externas, es cero. Sin embargo las condiciones que determinan el estado de equilibrio en un fluido son más complicadas. Dichas condiciones deben considerar que los diferentes elementos que constituyen el fluido pueden desplazarse uno respecto del otro y deben permanecer individualmente en equilibrio.

Sobre cualquier elemento de fluido actúan fuerzas volumétricas y superficiales. Las fuerzas volumétricas son debidas a agentes externos al elemento de fluido, mientras que el origen de las fuerzas superficiales es debido a la materia que rodea la porción de fluido. Para que el fluido se considere en estado de equilibrio las fuerzas que intervienen en cualquier porción del fluido deben estar equilibradas. La fuerza total que actúa sobre el fluido, de volumen  $V$ , es

$$\mathbf{F}_V = \int_V \rho \mathbf{f} dV = 0, \quad (2.1.7)$$

donde  $\mathbf{f}$  es la fuerza por unidad de masa y  $\rho$  es la densidad del fluido, pudiendo ser ambas cantidades, en general, función de la posición del fluido  $\mathbf{r}$ . La fuerza total ejercida por el contacto de la materia que rodea a la superficie  $S$  es

$$\mathbf{F}_S = - \int_S P \mathbf{n} dS, \quad (2.1.8)$$

donde  $P$  es también, en general, función de la posición  $\mathbf{r}$  del fluido y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie  $S$ . Esta última integral puede ser transformada en una integral de volumen usando el teorema de la divergencia, de modo que la condición de equilibrio en el fluido viene dada por la siguiente expresión

$$\int_V \left( \rho \mathbf{f} + \nabla P \right) dV = 0, \quad (2.1.9)$$

esta condición es válida para cualquier elemento de volumen  $V$  que incluya el elemento de fluido, lo cual es posible si la integral de volumen en cualquier punto de fluido es cero.

De esta expresión se obtiene la condición de equilibrio mecánico que han de satisfacer las fuerzas involucradas en cualquier punto del fluido

$$\rho \mathbf{f} = -\nabla P. \quad (2.1.10)$$

### 2.1.3. Ecuación de estado de un fluido ideal

La ecuación de estado completa la descripción de un fluido ideal y es la primera expresión que relaciona todas las variables del fluido. Su obtención se realiza mediante la definición del coeficiente de compresibilidad

$$B \equiv \rho \frac{\Delta P}{\Delta \rho}, \quad (2.1.11)$$

dicha expresión se puede reescribir en forma diferencial

$$B \equiv \rho \frac{dP}{d\rho} \rightarrow dP = \frac{B}{\rho} d\rho. \quad (2.1.12)$$

En el caso general en que la presión  $P(\mathbf{r}, t; \rho)$  y la densidad  $\rho(\mathbf{r}, t)$  son funciones tanto de las coordenadas espaciales  $\mathbf{r}$  como del tiempo podemos desarrollar, en la ecuación (2.1.12), los términos  $dP$  y  $d\rho$  obteniendo de esta manera la siguiente ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial t} dt + \mathbf{v} \cdot \nabla P dt = \frac{B}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{B}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho dt. \quad (2.1.13)$$

Finalmente, la expresión anterior se puede dividir por  $dt$ , obteniendo de esta manera la ecuación de estado de un fluido ideal

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = \frac{B}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{B}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho. \quad (2.1.14)$$

## 2.2. La ecuación de onda

El punto de partida para la obtención de la ecuación de onda es la relación de equilibrio mecánico obtenida en el apartado

(2.1.2)

$$\rho \mathbf{f} = -\nabla P, \quad (2.2.1)$$

que se puede reescribir teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, la cual nos indica que la fuerza por unidad de masa es

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{f} = \mathbf{a}, \quad (2.2.2)$$

sustituyendo la expresión anterior dentro de la ecuación (2.2.1) obtendremos

$$\rho \mathbf{a} = -\nabla P, \quad (2.2.3)$$

donde  $\mathbf{a}$  representa la aceleración del fluido. Nótese que la cantidad  $\mathbf{a}$  no

representa la aceleración del elemento del fluido en la posición  $\mathbf{r}$  en el instante  $t$ , debido a que dicho elemento se encuentra instantáneamente en esa posición. La expresión correcta de la aceleración de un elemento de fluido se deduce teniendo en cuenta que un elemento en la posición  $\mathbf{r}'$  en un instante  $\Delta t$  puede escribirse como

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\Delta t. \quad (2.2.4)$$

Un cambio en el vector de posición implica un cambio en su velocidad, la cual viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(\mathbf{r}', t') &= \mathbf{v}'(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\Delta t, t + \Delta t) \simeq \\ &\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \left[ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \right] \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \Delta t, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

de donde se obtiene la aceleración de una partícula de fluido, que, por definición, es

$$\mathbf{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{v}' - \mathbf{v}}{\Delta t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (2.2.6)$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (2.2.3), se obtiene la segunda relación entre las variables del fluido

$$-\nabla P = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]. \quad (2.2.7)$$

Para poder desacoplar el campo de velocidades y el campo de presiones del fluido de la expresión (2.2.7), necesitamos otra ecuación que nos relacione las variables  $P$  y  $\mathbf{v}$ . Esa relación la obtenemos en la ecuación de estado obtenida en el apartado 2.1.3 que es

$$\frac{dP}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = \frac{B}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{B}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho. \quad (2.2.8)$$

Usando la ecuación de conservación (2.1.6) la anterior ecuación se puede reescribir como

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = -B \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.2.9)$$

Las expresiones (2.2.7) y (2.2.9) constituyen las ecuaciones básicas para la obtención de la ecuación de onda. Se puede ver que estas ecuaciones tienen términos intrínsecamente no lineales. En la ecuación (2.2.7) el término no lineal  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  puede ser despreciado, ya que se asume que la variación de la posición del elemento del fluido es pequeña predominado el término lineal sobre los términos cuadráticos. Finalmente se asume que la densidad del fluido solo depende de las coordenadas espaciales. Esta última aproximación se puede entender considerando que las variaciones temporales de la densidad son términos de segundo orden, los cuales, al multiplicarlos por la derivada temporal de la partícula  $\mathbf{v}$  resulta una cantidad insignificante. La aproximación lineal de la ecuación (2.2.7) será

$$\nabla P + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0. \quad (2.2.10)$$

En la ecuación (2.2.9) el término no lineal es  $\mathbf{v}\nabla P$ ; despreciando ese término, la versión lineal de esta ecuación es

$$\frac{\partial P}{\partial t} + B\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (2.2.11)$$

Es conveniente indicar de una manera implícita la dependencia con las variables espaciales y temporales de los parámetros involucrados en ellas

$$\nabla P(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + B(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.2.13)$$

Para poder realizar el desacoplamiento entre las variables  $\mathbf{v}$  y  $P$ , en primer lugar se deriva la ecuación (2.2.13) respecto del tiempo y el resultado se introduce en la ecuación (2.2.12) obteniendo de esta forma la ecuación de onda lineal

$$\frac{\partial^2 P(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + B(\mathbf{r})\nabla [\rho^{-1}(\mathbf{r})\nabla P(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (2.2.14)$$

Para el caso de un campo de presión armónico con una frecuencia angular  $\omega$

$$P(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.2.15)$$

y expandiendo el segundo término de la ecuación (2.2.14) obtendremos la ecuación de Helmholtz inhomogénea

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})\nabla\rho^{-1}(\mathbf{r})\nabla P(\mathbf{r}), \quad (2.2.16)$$

siendo

$$k^2(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{B(\mathbf{r})}\omega^2. \quad (2.2.17)$$

### 2.3. Condiciones de contorno

Cuando se realiza un estudio de un sistema generalmente nos centramos en una región determinada del espacio donde nuestro sistema, en general, presenta discontinuidades en el medio (paredes, cavidades, ect..). La presencia de discontinuidades nos permite considerar que el sistema es homogéneo en limitadas regiones o porciones del espacio considerando, por tanto, que el sistema involucra la presencia de diferentes medios. A la región espacial de separación entre dos medios se denomina interfaz.

Para la resolución de problemas que involucran más de un medio es necesario imponer ciertas condiciones al campo que describe el sistema en la interfaz definida por los dos medios. Estas condiciones se denominan condiciones de contorno y dependen de la naturaleza de los medios involucrados en el sistema, es decir, no son las mismas condiciones de contorno impuestas en una interfaz que separa dos medios fluidos que las que se imponen en una interfaz que separa un medio fluido de un medio elástico. Sin embargo, dichas condiciones se pueden generalizar considerando una interfaz elástica-elástica, y posteriormente especificarlas para el caso de un fluido, considerando el medio fluido como un medio elástico que no presenta ondas transversales a la dirección de propagación.

Las condiciones de contorno generales que se imponen en una interfaz elástica-elástica son la continuidad del vector desplazamiento  $u(\mathbf{r}, t)$  y la continuidad de la componente normal del tensor de fuerzas  $\sigma_{ij}$ :

$$u^+ = u^-, \quad (2.3.1)$$

$$\sum_i \sigma_{ni}^+ n_i = \sum_i \sigma_{ni}^- n_i, \quad (2.3.2)$$

donde los signos  $\pm$  nos indican el medio donde se ha de evaluar las cantidades indicadas. Si uno de los dos medios es un fluido, la primera condición se reemplaza por la continuidad de la componente normal del campo de velocidades  $\mathbf{v}$  del elemento del fluido. En el presente trabajo las interfaces están definidas por estructuras que presentan simetría cilíndrica, a continuación se enumeran las condiciones de contorno que presentan los sistemas estudiados.

- **Cilindro fluido en un medio fluido**

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial P^-(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_a} = \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P^+(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_a}, \quad (2.3.3)$$

$$P^-(R_a) = P^+(R_a). \quad (2.3.4)$$

- **Cilindro sólido en un medio fluido**

$$0 = \sigma_{r\theta}^+(R_a), \quad (2.3.5)$$

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial P^-(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_a} = u_r^+(R_a), \quad (2.3.6)$$

$$-P^-(R_a) = \sigma_{rr}^+(R_a). \quad (2.3.7)$$

De estas últimas se puede extraer la condición de contorno que ha de verificar un sistema que se considera sólido rígido ( $\rho_a \rightarrow \infty$ )

- **Cilindro rígido en un medio fluido**

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial P^-(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_a} = 0. \quad (2.3.8)$$



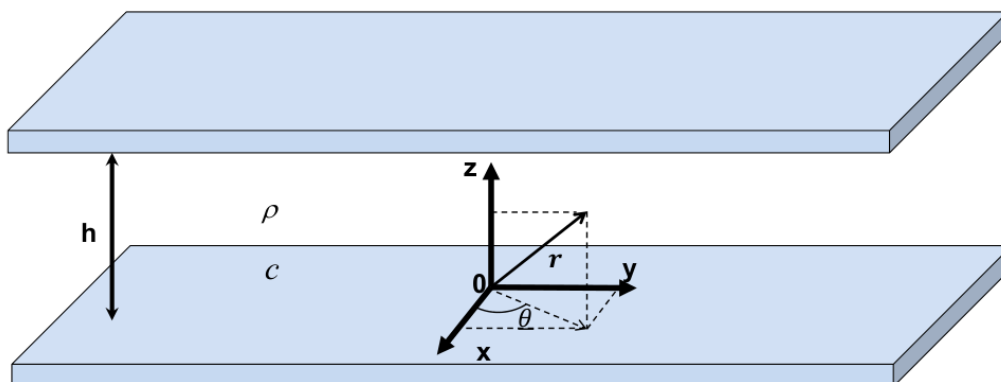


Figura 2.1: Definición de variables para la caracterización del campo de presiones en el interior de una guía de ondas de altura  $h$ . La guía se encuentra rellena de un medio fluido caracterizado por la densidad  $\rho$  y la velocidad del sonido  $c$

## 2.4. Guía de ondas

En el presente trabajo se realizan estudios de sistemas acústicos que se encuentran localizados en el interior de una guía de ondas (ver figura 2.1). Para la realización de dichos estudios es necesario conocer la forma funcional del campo que caracteriza el sistema que, en nuestro caso particular, corresponde al campo de presiones  $P(\mathbf{r})$ .

En la obtención del campo de presiones se realizan las siguientes hipótesis: *i*) ausencia de fuentes dentro de la guía de ondas, *ii*) el campo de presiones en el interior de la guía presenta un comportamiento armónico y, finalmente, *iii*) los parámetros que caracterizan el medio fluido en el interior de la guía de ondas, densidad  $\rho$  y velocidad del sonido  $c$ , no dependen de la posición. Considerando estas condiciones la ecuación de onda (2.2.16) se reduce a la ecuación de Helmholtz homogénea

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]P(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.4.1)$$

Los sistemas acústicos estudiados en este trabajo presentan una simetría cilíndrica, siendo el campo de presión una función  $P(r, \theta, z)$ . La ecuación (2.4.1) en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P(r, \theta, z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P(r, \theta, z)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P(r, \theta, z)}{\partial z^2} + k^2 P(r, \theta, z) = 0. \quad (2.4.2)$$

La resolución de esta ecuación diferencial en derivadas parciales se realiza mediante el método de separación de variables. Este método se basa en suponer que la dependencia funcional del campo de presiones se puede expresar de la siguiente forma

$$P(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z). \quad (2.4.3)$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (2.4.2) y dividiendo por  $R(r)\Theta(\theta)$ ,  $Z(z)$  se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0. \quad (2.4.4)$$

Analizando la expresión anterior se puede encontrar un término que depende únicamente de la variable  $z$ , pudiéndose establecer la siguiente relación

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2. \quad (2.4.5)$$

A través de la resolución de esta relación se puede extraer la forma funcional  $Z(z)$

$$Z(z) = Ae^{ik_z z} + Be^{-ik_z z}, \quad (2.4.6)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $k_z$  son constantes cuyo valor se podrá determinar a través de las condiciones de contorno del problema a resolver.

Las guías de ondas presentadas en este trabajo están formadas por dos superficies paralelas rígidas separadas una distancia  $h$ . En la resolución de los sistemas abordados en el presente trabajo, el origen de la coordenada  $z$  se establece en una de las paredes que conforman la guía de ondas, situando de esta manera las paredes en  $z = 0$  y  $z = h$ , como se puede ver en la figura 2.1. De la imposición de la condición de contorno de paredes rígidas explicada en el apartado 2.3

$$\left. \frac{\partial Z(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.4.7)$$

y

$$\left. \frac{\partial Z(z)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 \quad (2.4.8)$$

se obtiene la expresión final de  $Z(z)$

$$Z(z) = A \cos(k_z z), \quad (2.4.9)$$

siendo

$$k_z = \frac{n\pi}{h} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.4.10)$$

la cual nos indica que  $k_z$  no puede tomar cualquier valor sino que es una variable discreta cuyos posibles valores son múltiplos enteros de  $\frac{\pi}{h}$ . Teniendo en cuenta la ecuación (2.4.5) y multiplicando por  $r^2$ , la ecuación (2.4.4) se puede reescribir como

$$\frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + r^2 k_r^2 = 0, \quad (2.4.11)$$

siendo

$$k_r^2 = k^2 - k_z^2. \quad (2.4.12)$$

Vemos que  $\Theta(\theta)$  debe cumplir

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = -q^2, \quad (2.4.13)$$

donde  $q$  es una constante.

La solución a esta ecuación es análoga a la ecuación (2.4.5), obteniendo la forma funcional de la función  $\Theta(\theta)$

$$\Theta(\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} A_q e^{iq\theta}. \quad (2.4.14)$$

Para que la condición de periodicidad en  $\theta$  se verifique, la constante  $q$  ha de ser un valor entero. Retornando a la ecuación (2.4.11), desarrollando el

término de la derivada parcial con respecto de  $r$ , multiplicando por  $R(r)$  y teniendo en cuenta (2.4.14), obtenemos la ecuación que satisface la función  $R(r)$

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial R(r)}{\partial r} + (k_r^2 - q^2)R(r) = 0. \quad (2.4.15)$$

Esta ecuación es la ecuación diferencial de Bessel, cuyas soluciones son

$$R(r) = A_q J_q(kr) + B_q Y_q(kr), \quad (2.4.16)$$

donde  $J_q$  y  $Y_q$  son, respectivamente, la función de Bessel de primera y segunda especie.

Finalmente la forma funcional del campo de presiones en el interior de una guía de ondas se obtiene sustituyendo las ecuaciones (2.4.16), (2.4.14), (2.4.9) en la ecuación (2.4.3) y haciendo la suma para todos los valores posibles de  $q$  y de  $k_z$

$$P(r, \theta, z; k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [A_{qn} J_q(k_r r) + B_{qn} Y_q(k_r r)] e^{iq\theta} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right). \quad (2.4.17)$$

## 2.5. Cristales Sónicos

Un cristal sónico es una estructura periódica constituida por elementos dispersores del campo acústico y a través de la cual está permitida la propagación de las ondas. La interacción del campo acústico con los elementos dispersores produce, en general, un acoplamiento del campo de presiones en el interior de los elementos dispersivos excitando, de esta manera, ondas elásticas que se propagan en el interior de estos elementos.

El problema consiste, principalmente, en obtener los parámetros que caracterizan estas distribuciones periódicas, pero también caracterizar la propagación de las ondas acústicas a través de estas distribuciones y los efectos del campo dispersado.

Los sistemas tratados a lo largo del presente trabajo son estudiados en el límite de grandes longitudes de onda. En este límite las distribuciones de elementos dispersores del sonido se comportan como un medio efectivo, que presenta unas propiedades acústicas que difieren de las que presentan

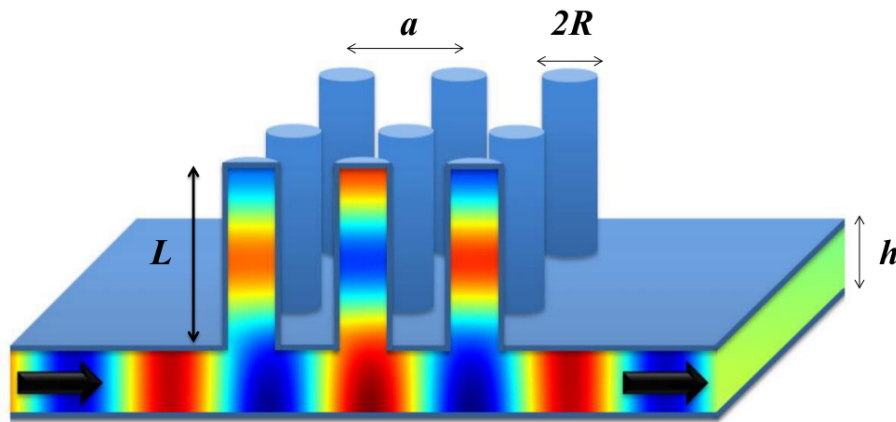


Figura 2.2: Cristal sónico localizado en el interior de una guía de ondas de altura  $h$ . Los elementos dispersores del sonido son cavidades cilíndricas de longitud  $L$  y radio  $R$  que penetran en una de las superficies de la guía.

individualmente los elementos dispersivos que lo componen. Este límite se conoce como límite de homogenización y define un nuevo tipo de material acústico denominado metamaterial, cuyas propiedades acústicas no se pueden encontrar en la naturaleza.

# Capítulo 3

## Dispersión del campo acústico: Matriz-T

Este capítulo comienza explicando el método utilizado para la obtención de la matriz-T, que caracteriza las propiedades dispersivas del campo acústico de una discontinuidad localizada en el interior de una guía de ondas. Posteriormente se introduce la teoría de la dispersión múltiple, donde se analiza un sistema formado por un número finito de elementos dispersores del campo localizados de una manera arbitraria en el espacio.

### 3.1. Dispersión de ondas

El fenómeno de dispersión se produce cuando un campo externo alcanza una región cerrada del espacio  $\partial\Omega$  que presenta diferentes parámetros acústicos con respecto al medio que lo rodea. Esta variación provoca la excitación de un campo dispersado cuando se produce la propagación de la onda acústica a través de dicho medio. A la región del espacio que provoca el fenómeno de dispersión se le denomina región dispersiva.

En este trabajo, debido a la simetría cilíndrica que presentan los elementos de dispersión del campo, la frontera entre ambos medios corresponderá a una superficie cilíndrica con el eje paralelo al eje  $z$ .

El campo externo incidente en una guía de ondas sin fuentes se puede

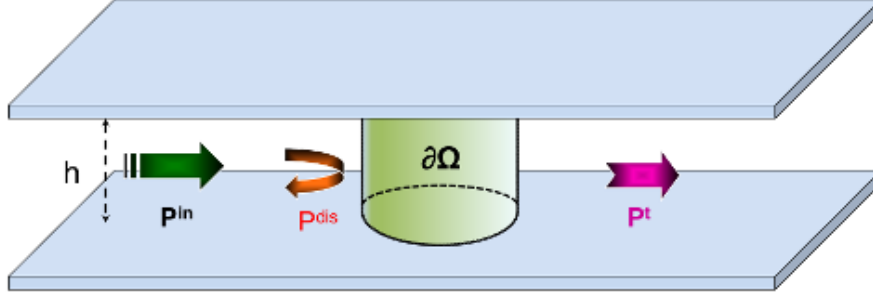


Figura 3.1: Esquema del problema general de dispersión del campo acústico. El sistema consiste en una guía de ondas, de altura  $h$ , en cuyo interior se localiza una región dispersiva  $\partial\Omega$  que presenta diferentes parámetros acústicos respecto al fluido que lo rodea.

descomponer siempre mediante las funciones regulares de Bessel  $J_q(\cdot)$

$$P^{in}(r, \theta, z; \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{qn} J_q(k_n r) e^{iq\theta} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right), \quad (3.1.1)$$

sin embargo, para caracterizar el campo dispersado es necesario incluir el comportamiento de las funciones no regulares de Bessel  $Y_q(\cdot)$

$$P^{dis}(r, \theta, z; \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [B_{qn} J_q(k_n r) + C_{qn} Y_q(k_n r)] e^{iq\theta} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right), \quad (3.1.2)$$

donde  $k_n = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}$  es el número de onda,  $c_b$  la velocidad del sonido y  $h$  la altura de la guía de ondas.

Para que el campo dispersado verifique la condición de radiación Sommerfeld,

$$r \left( \frac{\partial P^{dis}}{\partial r} - ik P^{dis} \right) \rightarrow 0 \quad \text{con } r \rightarrow \infty, \quad (3.1.3)$$

la ecuación (3.1.2) toma la siguiente forma

$$P^{dis}(r, \theta, z; \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_{qn} H_q(k_n r) e^{iq\theta} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right), \quad (3.1.4)$$

donde  $H_q(\cdot) = J_q(\cdot) + iY_q(\cdot)$  es la llamada función Hankel.

Esta expresión es la que se utilizará para caracterizar el campo dispersado fuera de la región dispersiva.

En el problema general (ver Fig.3.1), los coeficientes  $A_{qn}$  del campo incidente son magnitudes conocidas, mientras que los coeficientes  $B_{qn}$  son magnitudes a determinar. Los coeficientes  $B_{qn}$  son magnitudes que dependen de la naturaleza del dispersor y del campo incidente.

La dependencia con el dispersor se obtiene mediante las condiciones de contorno. La dependencia con el campo incidente se puede obtener mediante argumentos físicos.

Todos los fenómenos de dispersión del campo acústico analizado en este trabajo son lineales en frecuencia, esto significa que el campo dispersado por la incidencia de un campo externo asociado a una frecuencia  $\omega$  sobre la región dispersiva corresponderá a la misma  $\omega$ . Para caracterizar el campo dispersado se tiene que encontrar para cada coeficiente  $B_{qn}$  una función del siguiente tipo

$$B_{qn} = f_{qn}(A_{sm}), \quad (3.1.5)$$

donde  $q, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty$  y  $n, m = 0, 1, 2, \dots, \infty$  son números enteros. Si imponemos el comportamiento lineal en la respuesta del campo interno la función  $f_{qn}$  es un tensor, de manera que la relación (3.1.5) será

$$B_{qn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} (T(\omega; \xi)_{qs})_{nm} A_{sm}, \quad (3.1.6)$$

donde el argumento  $\xi$  indica que los elementos de la matriz  $(T_{qs})_{nm}$  dependen de una serie de constantes físicas. Los elementos de la matriz  $(T_{qs})_{nm}$  forman la denominada “matriz de transferencia” o matriz-T. La expresión de la matriz no sólo depende de la naturaleza física del elemento dispersor del campo acústico, sino también, de la forma externa del elemento dispersor.

## 3.2. Campo incidente: La onda plana

Cuando se trabaja en el marco de la teoría de la dispersión múltiple los campos incidentes, independientemente de su forma funcional, se han de expresar en términos de las funciones regulares de Bessel.

En este trabajo se ha usado la onda plana como campo incidente. La finalidad de este apartado no es solo introducir el concepto de onda plana



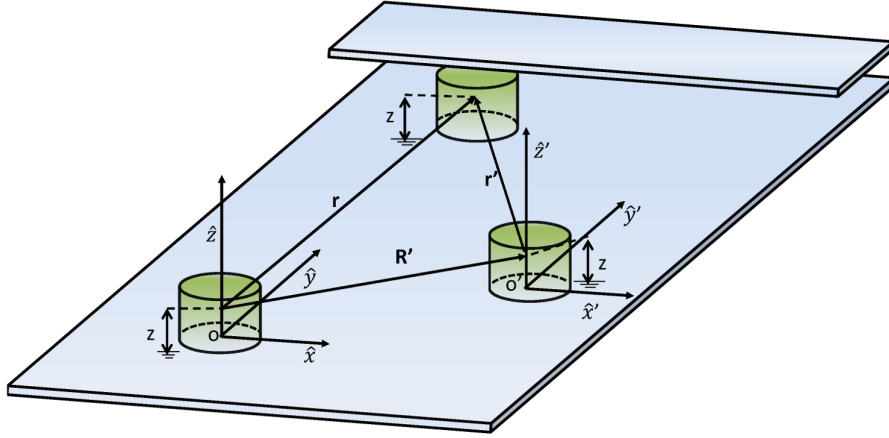


Figura 3.2: Definición de coordenadas para el campo incidente.

sino mostrar también cómo se puede expresar la onda plana en términos de las funciones regulares de Bessel.

La onda plana es una distribución de campo que presenta la siguiente forma funcional

$$P^{in}(\mathbf{r}) = C_o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.2.1)$$

donde  $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$  es el vector de onda expresado en coordenadas cartesianas y  $C_o$  es la amplitud de la onda.

La expansión de Jacobi-Anger nos permite expresar la onda plana como

$$P^{in}(\mathbf{r}; \mathbf{k}) = C_o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = C_o (A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}) \sum_q i^q e^{-iq\theta_o} J_q(k_n r) e^{iq\theta}. \quad (3.2.2)$$

En este trabajo la onda plana se propaga en el interior de una guía de ondas de altura  $h$ . Aplicando las condiciones de contorno en las paredes de la guía la expresión anterior se puede reescribir como

$$P^{in}(\mathbf{r}; \mathbf{k}) = C_o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = C_o \sum_n \sum_q i^q e^{-iq\theta_o} J_q(k_n r) e^{iq\theta} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right). \quad (3.2.3)$$

Comparando (3.2.3) con (3.2.1) vemos que los coeficientes del campo incidente en la base de coordenadas cilíndricas  $A_{qn}$  se expresan de la siguiente forma

$$A_{qn} = C_o i^q e^{-iq\theta_o} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right). \quad (3.2.4)$$

En la teoría de la dispersión múltiple, el cálculo del campo dispersado debido a la presencia de  $N$  elementos se realiza mediante la suma del campo dispersado por cada elemento que constituye el cristal. El campo dispersado por cada elemento se calcula teniendo como origen de sistema de coordenadas el centro de dicho elemento cuya contribución se va a calcular. De esta manera tendremos  $N$  cambios de origen de coordenadas para calcular el campo total dispersado del cristal sónico.

Por ello se hace necesario mostrar la modificación en la expresión del campo incidente al someterlo a un cambio de sistema de referencia que lo describe  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}'$ .

Para la obtención de la expresión se considera que no hay cambio en la coordenada  $z$  entre los dos sistemas de referencia, es decir, el cambio de coordenadas se realiza en el plano con  $z' = z$ ,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}', \quad (3.2.5)$$

donde  $\mathbf{R}'$  es el vector que va desde el origen de coordenadas del sistema de referencia  $\mathbf{r}$  al origen de coordenadas del sistema de referencia  $\mathbf{r}'$

$$\begin{aligned} P^{in}(\mathbf{r}; \mathbf{k}) &= C_o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = C_o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}'} e^{ik_z z} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \\ &= C_o \sum_n \sum_q e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}'} i^q e^{-iq\theta_o} J_q(k_n r) e^{iq\theta'} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right), \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

obteniendo así la relación que cumplen los coeficientes del campo incidente acústico expresados en dos sistemas de referencia diferentes

$$A'_{qn} = C_o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}'} i^q e^{iq\theta_o} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}'} A_{qn}. \quad (3.2.7)$$

### **3.3. Matriz-T de una cavidad con un fluido anisótropo en su interior**

En esta sección se explica el proceso para obtener la expresión, de la matriz T para el sistema mostrado en la figura (3.3). El sistema esta formado por una guía de ondas de altura  $h$  y una cavidad cilíndrica de paredes rígidas de altura  $L$  y radio  $R_b$ , perforada en uno de los lados de la guía. El interior

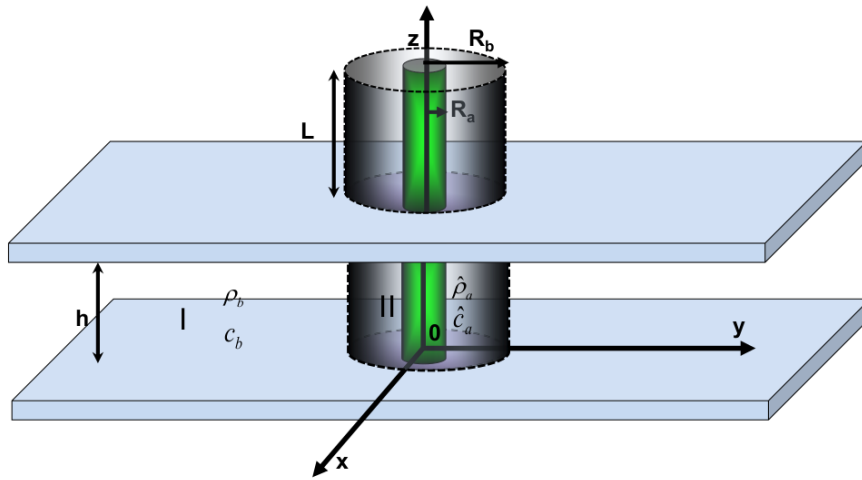


Figura 3.3: Esquema para la obtención de la matriz-T. El sistema está formado por una guía de ondas, de altura  $h$ , y una cavidad de altura  $L$  y radio  $R_b$ . El interior de la cavidad presenta un cilindro rígido de radio  $R_a$  rodeado de un fluido anisótropo caracterizado por una densidad tensorial  $\hat{\rho}_a$  y un módulo de compresibilidad  $B_a$  escalar. El sistema se divide en dos regiones: región I, fuera de la cavidad y que presenta unos parámetros acústicos  $\rho_b$  y  $c_b$ , y la región II, dentro de la cavidad.

de la cavidad presenta un cilindro rígido, de radio  $R_a$ , rodeado de un fluido anisótropo; es decir, de un fluido cuyas propiedades acústicas dependen de la dirección de propagación de la onda acústica, caracterizado por una densidad tensorial  $\hat{\rho}_a$ , y un módulo de compresibilidad escalar  $B_a$ .

La obtención de la matriz T se realiza haciendo uso del método de adaptación de modos (“mode matching”) [KT70, Ito76, Ri76, TP83, KWB85, RGP, RP87, RSP89, Chr10]. La base teórica de este método fue formulada por Schelkunoff [KT70] para guías de ondas electromagnéticas.

El método consiste fundamentalmente en la descomposición de las ondas acústicas en sus modos propios, los cuales constituyen una base ortogonal, y la proyección de estos modos en las condiciones de contorno que el sistema ha de satisfacer. A continuación se mostrará, de una forma detallada, el proceso de obtención de la matriz-T.

En la figura (3.3) se puede observar que el sistema se ha dividido en dos regiones. Se denomina región I a la zona de la guía de ondas fuera de la región dispersiva, y region II a la zona de la guía de ondas que se encuentra en el interior de la región dispersiva. El campo de presiones que describe la región I se construye mediante la suma de dos contribuciones

$$P^I(\mathbf{r}; \omega) = P^{in}(\mathbf{r}; \omega) + P^{disp}(\mathbf{r}; \omega), \quad (3.3.1)$$

donde  $P^{in}$  es el campo incidente y  $P^{disp}$  es el campo dispersado por la región II. El campo dispersado en la región I ha de verificar la condición de radiación de Sommerfeld (ver Ec.(3.1.3)).

Teniendo esto en cuenta, la forma funcional del campo de presiones en la región I viene dada por

$$P^I(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{qn} J_q(k_n^I r) + B_{qn} H_q(k_n^I r)] \Phi_n^I(z) e^{iq\theta}, \quad (3.3.2)$$

donde  $A_{qn}$  y  $B_{qn}$  son los coeficientes del campo incidente y campo dispersado, respectivamente. Las funciones  $\Phi_n^I(z)$  son autofunciones normalizadas de los modos propios verticales  $k_z^I$  de la región I y que satisfacen las condiciones de pared rígida en  $z = 0$  y  $z = h$ , es decir,  $\frac{\partial \Phi_n^I(z)}{\partial z} = 0$  en  $z = 0$  y  $z = h$ ,

$$\Phi_n^I(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{h}} \cos(k_{nz}^I z), \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \neq 0 \\ 2 & \text{si } n = 0 \end{cases}. \quad (3.3.3)$$

Estas autofunciones constituyen una base ortonormal en la región I cumpliéndose la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_0^h \Phi_n^I(z) \Phi_k^I(z) dz = \delta_{nk}. \quad (3.3.4)$$

Los coeficientes  $\epsilon_n$  se obtienen al normalizar la condición de ortogonalidad de los modos verticales. Finalmente, las cantidades  $k_n^I$  y  $k_{nz}^I$  representan a las componentes transversal y vertical del vector de ondas  $\mathbf{k}^I$ , cuyos valores se pueden obtener mediante las siguientes relaciones

$$(k_n^I)^2 = \left(\frac{\omega}{c_b}\right)^2 - (k_{nz}^I)^2 \quad y \quad k_{zn}^I = \frac{n\pi}{h}. \quad (3.3.5)$$

Llegados a este punto cabe recordar que en los problemas analizados a lo largo de este trabajo se generan dos tipos modos, los propagantes y los evanescentes. El número de modos propagantes depende de la geometría del problema a analizar y de la frecuencia de trabajo. En nuestro caso, se dice que un modo es propagante si dado un  $n$  se cumple la siguiente condición

$$\left(\frac{\omega}{c_b}\right)^2 - (k_{nz}^I)^2 > 0, \quad (3.3.6)$$

mientras que si no satisface dicha relación se le denomina evanescente.

El campo de presiones que describe la región II presenta dos contribuciones

$$P^{II}(\mathbf{r}; \omega) = P^+(\mathbf{r}; \omega) + P^-(\mathbf{r}; \omega) \quad (3.3.7)$$

donde  $P^+$  es el campo transmitido de la región uno a la región II y  $P^-$  es el campo dispersado debido a la presencia de un cilindro rígido, de radio  $R_a$  y altura  $L + h$ , localizado en el interior de la zona dispersiva.

En la región II la onda se propaga a través de un fluido anisótropo caracterizado por el tensor diagonal densidad  $\hat{\rho}_a$  y por el módulo de compresibilidad escalar  $B_a$ . La resolución de la ecuación de ondas para un fluido anisótropo establece que el campo de presiones en la región II presenta la siguiente forma funcional

$$P^{II}(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [C_{qm} J_{\gamma q}(k_m^{II} r) + D_{qm} Y_{\gamma q}(k_m^{II} r)] e^{iq\theta} \Phi_m^{II}(z), \quad (3.3.8)$$

donde  $C_{qm}$  y  $D_{qm}$  son los coeficientes del campo transmitido y del campo dispersado por el cilindro rígido. Las funciones  $\Phi_m^{II}$  son las autofunciones de los modos verticales propios de la región II

$$\Phi_m^{II}(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{h+L}} \cos(k_{mz}^{II}z), \quad \epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \neq 0 \\ 2 & \text{si } m = 0 \end{cases}, \quad (3.3.9)$$

las cuales satisfacen la condición de contorno  $\frac{\partial \Phi_m^{II}}{\partial z} = 0$  en  $z = 0$  y  $z = L + h$  y constituyen una base ortonormal en la región II

$$\int_0^{h+L} \Phi_m^{II}(z) \Phi_k^{II}(z) dz = \delta_{mk}. \quad (3.3.10)$$

Las cantidades  $k_m^{II}$  y  $k_{mz}^{II}$  corresponden a la componente normal y vertical del vector de ondas  $\mathbf{k}^{II}$  y vienen dadas por las siguientes expresiones

$$(k_m^{II})^2 = \left(\frac{\omega}{c_r}\right)^2 - (\gamma_z k_{mz}^{II})^2 \quad \text{y} \quad k_{zm}^{II} = \frac{m\pi}{h+L}, \quad (3.3.11)$$

donde  $c_r$  es la componente radial del tensor velocidad de propagación de la onda,  $\gamma = \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_\theta}}$  y  $\gamma_z = \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_z}}$  son los índices de anisotropía, respecto a la dirección radial, de la componente angular y vertical, respectivamente.

La relación entre los coeficientes  $D_{qm}$  y  $C_{qm}$  se puede obtener imponiendo la condición de cilindro rígido localizado, según el esquema de la Fig.3.1, en  $r = R_a$

$$\left. \frac{\partial P^{II}(\mathbf{r}; \omega)}{\partial r} \right|_{r=R_a} = 0. \quad (3.3.12)$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión (3.3.8) del campo  $P^{II}$  obtenemos la expresión final del campo de presiones en la región II

$$P^{II}(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{\gamma qm} \left[ J_{\gamma q}(k_m^{II}r) - \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II}R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II}R_a)} Y_{\gamma q}(k_m^{II}r) \right] e^{iq\theta} \Phi_m^{II}(z). \quad (3.3.13)$$

donde  $\dot{X}(u(r)) \equiv \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u(r)}{\partial r} dr$

Una vez caracterizadas las dos regiones que forman el sistema se imponen las condiciones de contorno que deben satisfacer los campos en la interfaz, que se encuentra situada, según la Fig.(3.3), en  $r = R_b$

$$P^I(\mathbf{r}; \omega)|_{r=R_b} = P^{II}(\mathbf{r}; \omega)|_{r=R_b}, \quad (3.3.14)$$

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial P^I(\mathbf{r}; \omega)}{\partial r} \Big|_{r=R_b} = \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P^{II}(\mathbf{r}; \omega)}{\partial r} \Big|_{r=R_b}. \quad (3.3.15)$$

La primera condición corresponde a la continuidad del campo de presiones en la interfaz, mientras que la segunda corresponde a la continuidad de la componente normal de la velocidad de propagación.

Para una correcta proyección de los modos propios en las condiciones de contorno anteriores primero se ha de buscar cuál es la condición de contorno más restrictiva que se aplica en la interfaz, y cuál de las regiones en que se divide el problema produce esa restricción. Una vez localizada la condición y la región más restrictiva se procede a proyectar en esa condición de contorno los modos propios de esa región.

En el sistema que estamos analizando la condición más restrictiva es la de la continuidad del campo de presiones y el motivo de esta restricción se debe a que el campo de presiones en la región I está definido para  $z \in [0, h]$ . Por tanto, en nuestro caso, se proyectan los modos de la región I en la condición de continuidad del campo de presiones, mientras que los modos de la región II se proyectan en la condición de continuidad de la componente normal del campo de velocidades, pudiendo así escribir

$$\int_0^h P^I(\mathbf{r}; \omega) \Big|_{r=R_b} \Phi_k^I(z) dz = \int_0^h P^{II}(\mathbf{r}; \omega) \Big|_{r=R_b} \Phi_k^I(z) dz, \quad (3.3.16)$$

$$\frac{1}{\rho_b} \int_0^{h+L} \frac{\partial P^I(\mathbf{r}; \omega)}{\partial r} \Big|_{r=R_b} \Phi_k^{II}(z) dz = \frac{1}{\rho_r} \int_0^{h+L} \frac{\partial P^{II}(\mathbf{r}; \omega)}{\partial r} \Big|_{r=R_b} \Phi_k^{II}(z) dz. \quad (3.3.17)$$

Después de integrar los campos y teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad de los modos propios (3.3.6) y (3.3.10), las ecuaciones (3.3.16) y (3.3.17) se convierten en

$$A_{qk} J_q(k_k^I R_b) + B_{qk} H_q(k_k^I R_b) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{qm} \left[ J_{\gamma q}(k_m^{II} r) - \frac{J_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{Y_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} Y_{\gamma q}(k_m^{II} r) \right] G_{km} \quad (3.3.18)$$

y

$$\frac{1}{\rho_b} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{qn} \dot{J}_q(k_n^I R_b) + \dot{H}_q(k_n^I R_b)] G_{nk} = \quad (3.3.19)$$

$$\frac{1}{\rho_r} C_{qk} \left[ \dot{J}_{\gamma q}(k_k^{II} R_b) - \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_k^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_k^{II} R_a)} \dot{Y}_{\gamma q}(k_k^{II} R_b) \right],$$

donde  $G_{km}$  representan la interacción entre los modos de la region I y II, respectivamente, cuyos valores son

$$G_{km} \equiv \int_0^h \Phi_k^I(z) \Phi_m^{II}(z) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{h+L}} \epsilon_k \epsilon_m \left[ \text{sinc}((k_{kz}^I + k_{mz}^{II})h) + \text{sinc}((k_{kz}^I - k_{mz}^{II})h) \right], \quad (3.3.20)$$

siendo  $\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x}$ .

Los coeficientes  $C_{\gamma qk}$  se obtienen de la ecuación (3.3.19)

$$C_{qk} = \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\dot{J}_q(k_n^I R_b) G_{nk} A_{qn} + \dot{H}_q(k_n^I R_b) G_{nk} B_{qn}}{\dot{J}_{\gamma qk}(k_k^{II} R_b) - \frac{\dot{J}_{\gamma qk}(k_k^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma qk}(k_k^{II} R_a)} \dot{Y}_{\gamma qk}(k_k^{II} R_b)} \right], \quad (3.3.21)$$

y, se insertan en la ecuación (3.3.18) para obtener, después de un poco álgebra, la siguiente relación

$$\begin{aligned} & A_{qk} J_q(k_k^I R_b) - \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{J}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_{\gamma q}(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} Y_{\gamma q}(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_b)} \right] A_{qn} = \\ & - \left[ B_{qk} H_q(k_k^I R_b) - \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{H}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_{\gamma q}(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} Y_{\gamma q}(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_b)} \right] B_{qn} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Esta ecuación se puede reescribir en forma matricial

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\hat{J}_q)_{kn} A_{qn} = - \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{H}_q)_{kn} B_{qn} \quad (3.3.23)$$



donde

$$(\hat{J}_q)_{kn} \equiv J_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{J}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_{\gamma q}(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} Y_{\gamma q}(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_b)} \right],$$

$$(\hat{H}_q)_{kn} \equiv H_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{H}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_{\gamma q}(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} Y_{\gamma q}(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_{\gamma q}(k_m^{II} R_b)} \right]. \quad (3.3.24)$$

Multiplicando la ecuación (3.3.23) por la inversa de la matriz  $(\hat{H}_q)_{nm}^{-1}$  podemos obtener los  $B_{qm}$

$$B_{qm} = \sum_{n=0}^{\infty} (T_q)_{mn} A_{qn} \quad (3.3.25)$$

donde

$$(T_q)_{mn} = - \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{H}_q)_{mk}^{-1} (\hat{J}_q)_{kn} \quad (3.3.26)$$

obteniendo de esta manera la matriz de transferencia del sistema.

### 3.4. Casos particulares

En esta sección se describen las expresiones particulares de las matrices-T utilizadas para la obtención de los parámetros efectivos de las estructuras estudiadas. Estas expresiones corresponden a casos particulares de la matriz obtenida en la sección (3.3). En todos los casos expuestos, la matriz T se calcula haciendo uso de la expresión (3.3.26). Los casos particulares expuestos únicamente modifican las expresiones de las matrices  $(\hat{J}_q)_{km}$  y  $(\hat{H}_q)_{km}$  necesarias para el cálculo de la matriz-T.

#### 3.4.1. Matriz-T de una cavidad con un fluido isótropo en su interior

Para obtener la matriz-T que caracteriza a éste sistema se considera que  $\gamma = \gamma_z = 1$ ,  $\rho_a$  y  $c_a$  son escalares y verifican  $\rho_r = \rho_\theta = \rho_z = \rho_a$ . Se pueden distinguir dos situaciones:

- **Matriz-T de una cavidad con un cilindro rígido en su interior**

En este caso las ecuaciones (3.3.24) se transforman en

$$\begin{aligned}
 (\hat{J}_q)_{kn} &= J_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_a}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{J}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_q(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_q(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_q(k_m^{II} R_a)} Y_q(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_q(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_q(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_q(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_q(k_m^{II} R_b)} \right], \\
 (\hat{H}_q)_{kn} &= H_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_a}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{H}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_q(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_q(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_q(k_m^{II} R_a)} Y_q(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_q(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_q(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_q(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_q(k_m^{II} R_b)} \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.4.1}$$

- **Matriz-T de una cavidad vacía**

En este caso la cavidad no tiene un cilindro rígido en su interior. El campo en la región II se construye con el campo transmitido de la región I a la región II. Este caso se puede obtener a partir de las ecuaciones (3.3.24) considerando que los términos con las funciones  $Y_{\gamma q}(\cdot)$  y  $\dot{Y}_{\gamma q}(\cdot)$  no contribuyen, pudiendo escribir

$$(\hat{J}_q)_{kn} = J_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_a}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\dot{J}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} J_q(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_q(k_m^{II} R_b)} \right],
 \tag{3.4.2}$$

$$(\hat{H}_q)_{kn} \equiv H_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_a}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\dot{H}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} J_q(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_q(k_m^{II} R_b)} \right].$$

### 3.4.2. Matriz-T de una cavidad con un fluido que presenta una fuerte anisotropía angular

En este caso el fluido localizado en el interior de la cavidad presenta únicamente anisotropía en la componente angular  $\rho_\theta \rightarrow \infty$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\gamma_z = 1$ ,

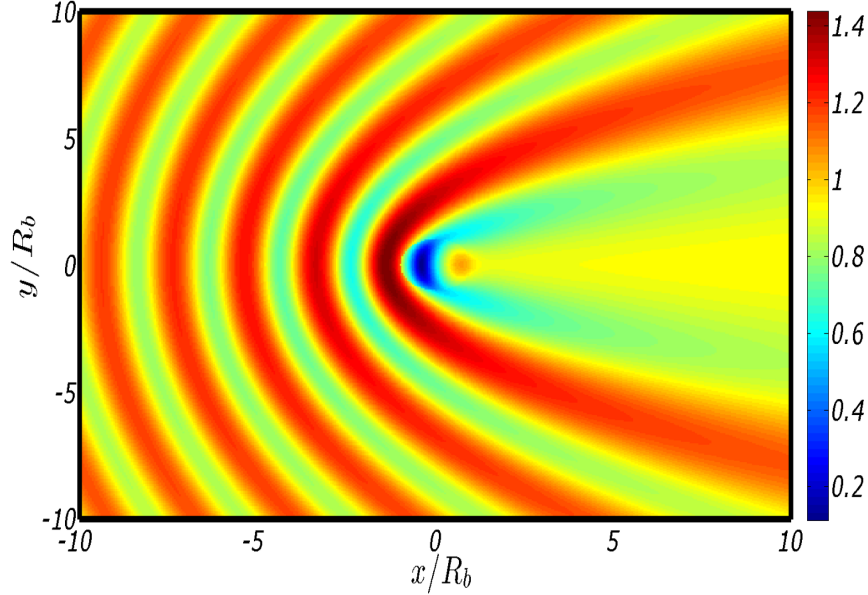


Figura 3.4: Campo de presiones de una cavidad de longitud  $L = 0.5h$  localizada en el interior de una guía de ondas de altura  $R_b = 0.9h$  para una longitud de onda  $\lambda = 3.64h$ . Para el cálculo del campo de presiones se ha considerado que la densidad y la velocidad de propagación en el interior de la cavidad verifican las siguientes relaciones  $\rho_a = \rho_b$  y  $c_a = c_b$ .

modificando de esta manera las ecuaciones (3.3.24)

$$\begin{aligned}
 (\hat{J}_q)_{kn} &= J_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{J}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_0(k_m^{II} R_b) + \frac{j_0(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_0(k_m^{II} R_a)} Y_0(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_0(k_m^{II} R_b) + \frac{j_0(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_0(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_0(k_m^{II} R_b)} \right], \\
 (\hat{H}_q)_{kn} &= H_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{H}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_0(k_m^{II} R_b) + \frac{j_0(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_0(k_m^{II} R_a)} Y_0(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_0(k_m^{II} R_b) + \frac{j_0(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_0(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_0(k_m^{II} R_b)} \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.4.3}$$

### 3.5. Campo lejano

Los mapas de presión 2D nos proporcionan una forma visual de comprender algunos aspectos del fenómeno de dispersión del campo acústico debido a la presencia de elementos dispersivos. Sin embargo, la comparación de dos campos de presiones diferentes es una tarea difícil de realizar. Siendo, por tanto, necesario una forma de representación que nos permita realizar la comparación de una manera más sencilla.

El campo lejano es una cantidad usual para entender las propiedades del campo dispersado debido a la presencia de elementos dispersivos y se define como

$$\sigma^{dis}(\theta; z; \omega) \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} |\sqrt{r} P^{dis}(r, \theta, z; \omega)|. \quad (3.5.1)$$

Empleando la forma asintótica de la función de Hankel para argumentos grandes (ver apéndice A) podemos reescribir el campo dispersado como

$$\begin{aligned} P^{dis}(\mathbf{r}; \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_{qn} H_q(k_n^I r) e^{iq\theta} \Phi_n^I(z) \simeq \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{k_n^I \pi r}} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{ik_n^I r} (-i)^q (B_q)_n e^{iq\theta} \Phi_n^I(z). \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Si consideramos que para una frecuencia dada  $\omega$  en nuestro sistema presenta  $N$  modos no evanescentes, la ecuación (3.5.2) se puede desdoblar en dos contribuciones

$$\begin{aligned} P^{dis}(\mathbf{r}; \omega) &= \sum_{n=0}^N \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{k_n^I \pi r}} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{ik_n^I r} (-i)^q (B_q)_n e^{iq\theta} \Phi_n^I(z) \\ &+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{k_n^I \pi r}} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{-k_n^I r} (-i)^q (B_q)_n e^{iq\theta} \Phi_n^I(z), \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

donde hemos usado que la  $k_n^I$  de los modos evanescentes es imaginaria pura. Sustituyendo esta expresión (3.5.3) en la ecuación (3.5.1) el término de los modos evanescentes tiende a cero, contribuyendo en el cálculo del campo

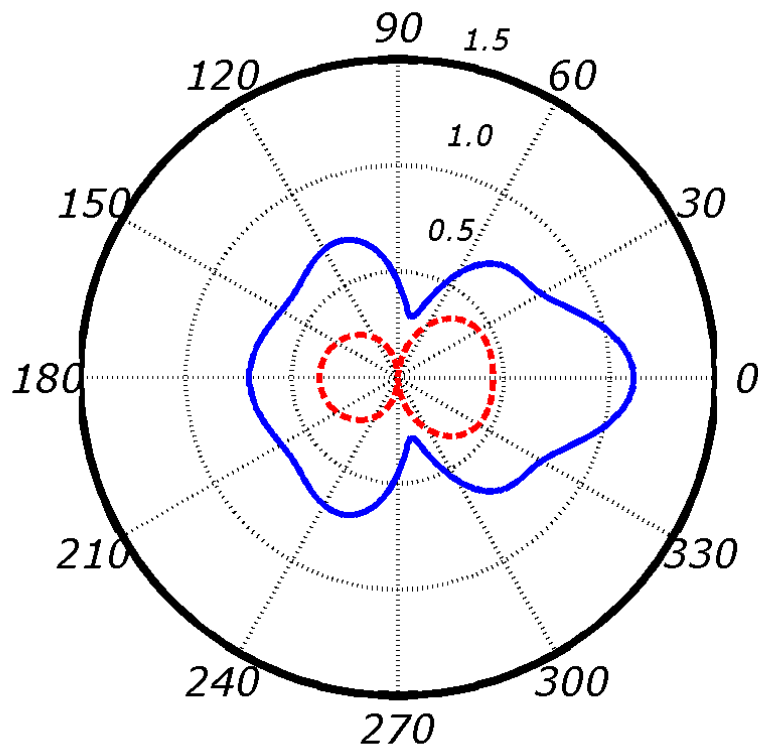


Figura 3.5: Campo de dispersión lejano para el caso de un cilindro rígido (curva continua) y una cavidad (curva discontinua), localizados ambos en el interior de una guía de ondas, de altura  $R_b = 0.9h$ . La longitud de onda es el doble del radio del elemento de dispersión considerado en el cálculo ( $\lambda = 1.82h$ ). Para la cavidad se ha usado  $\rho_a = \rho_b$  y  $c_a = c_b$  y  $L = 2h$ .

lejano los  $N$  modos que se propagan en el sistema

$$\sigma^{dis}(\theta, z; \omega) = \left| \sum_{n=0}^N \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi k_n^I}} B_{qn} e^{iq\theta} \Phi_n^I(z) \right|. \quad (3.5.4)$$

La cantidad calculada para un ángulo  $\theta = 0$  se denomina “forward scattering” y se denota por  $\sigma_0^{dis}$  y la cantidad calculada para un  $\theta = \pi$  se denomina “back scattering” y se denota por  $\sigma_\pi^{dis}$ .

En la figura (3.5) se representa el campo de dispersión lejano correspondiente a un cilindro rígido y una cavidad, ambos localizados en una guía de onda de altura  $h = 1.1R_b$ . La cavidad presenta un longitud  $L = 2h$ .

Se puede ver que el campo dispersado por el cilindro rígido es mayor que el campo dispersado por la cavidad presentando una mayor dispersión en la región incidente del campo de presiones, como es de esperar.

## 3.6. Convergencia

En los sistemas analizados a lo largo de este trabajo se considera el modo fundamental como el único modo que se propaga en la guía de ondas. No obstante, para el cálculo de la matriz-T se consideran los modos evanescentes, debido a que en el proceso de cálculo de la matriz-T hay una inversión de matrices, influyendo de esta manera los modos evanescentes sobre el elemento  $(T_q)_{00}$  correspondiente al modo fundamental. Por tanto es necesario hacer un estudio de convergencia sobre la matriz  $(T_q)_{nm}$  y otro estudio sobre el cálculo del campo dispersado.

### 3.6.1. Convergencia de la matriz-T

Para estudiar la convergencia se elige un número  $N$  de modos evanescentes y se realiza el cálculo de la matriz-T. Una vez terminado el cálculo se incrementa el número de modos evanescentes  $N = N + 1$  y se vuelve a calcular la matriz-T para finalmente comparar este resultado con el resultado obtenido en el cálculo anterior. Este procedimiento se repetirá a menos que la diferencia entre ellos sea menor o igual a un error definido previamente y que se considera aceptable.

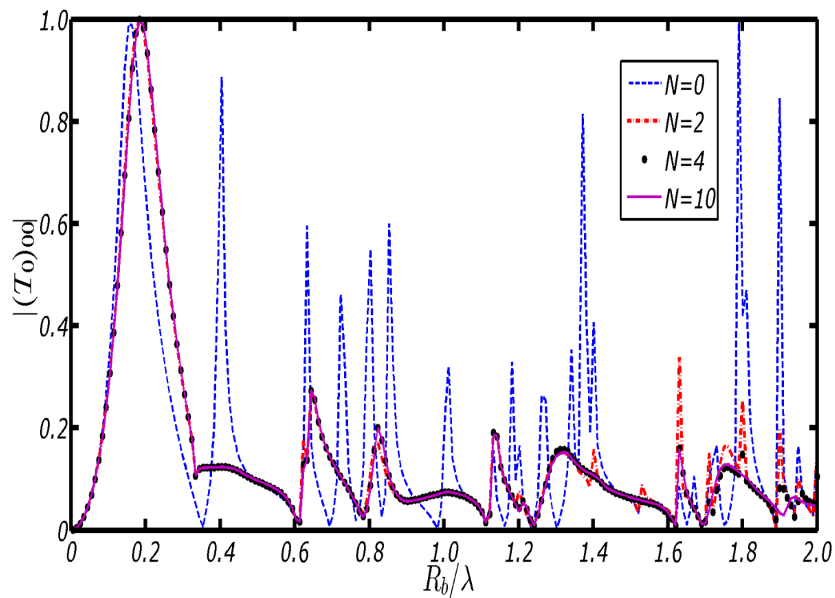


Figura 3.6: Estudio de la convergencia del elemento de la matriz  $T$  para el orden  $q = 0$ . En la figura se muestra los valores del elemento de la matriz  $(T_0)_{00}$  correspondiente al modo fundamental para diferentes valores de  $N$  frente a un barrido en frecuencia.

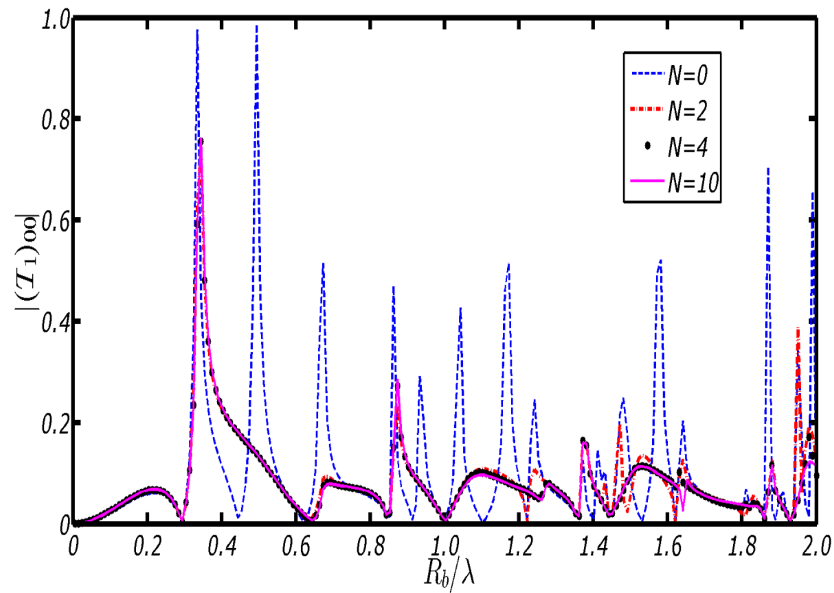


Figura 3.7: Estudio de la convergencia del elemento de la matriz  $T$  para el orden  $q = 1$ . En la figura se muestra los valores del elemento de la matriz  $(T_1)_{00}$  correspondiente al modo fundamental para diferentes valores de  $N$  frente a un barrido en frecuencia.



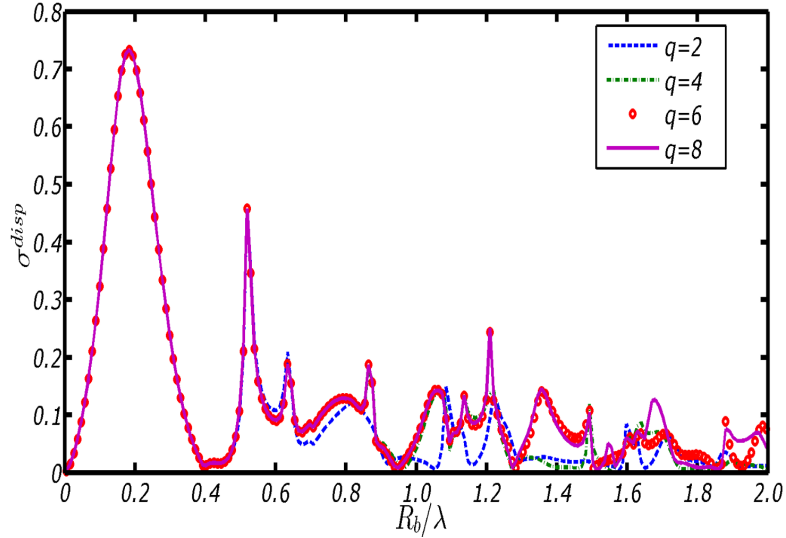


Figura 3.8: Estudio de la convergencia de campo dispersado para los diferentes órdenes  $q$ . En la figura se representa los valores del campo dispersado en la dirección incidente frente a un barrido en frecuencia.

Las figuras (3.6) y (3.7) representan los resultados obtenidos para el elemento de matriz  $(T_0)_{00}$  y  $(T_1)_{00}$  para diferentes valores de  $N$ . En ellas se puede observar que la convergencia depende de la frecuencia. Por tanto el número de modos evanescentes  $N$  que se debe escoger dependerá del rango frecuencial en el que se realizará el estudio. En este trabajo se considera  $\lambda > 0.5R_b$  quedándose la convergencia garantizada para  $N = 4$ . Se ha representando únicamente los modos  $q = 0$  y  $q = 1$  debido a que estos modos son predominantes en el cálculo del campo dispersado. Aunque el estudio se ha realizado hasta  $q = 4$  se ha considerado que las gráficas de convergencia de los otros modos no aportan información adicional a la discutida en las gráficas mostradas.

### 3.6.2. Convergencia del campo dispersado

Una vez garantizada la convergencia de la matriz-T, se obtienen los coeficientes del campo dispersado pudiendo calcular el campo con la siguiente

expresión.

$$P^{dis}(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N B_{qn} H_q(k_n^I r) \Phi_n^I(z) e^{iq\theta}. \quad (3.6.1)$$

Esta suma infinita de  $q$  se puede reducir a un valor finito  $Q$  siempre que aseguremos que la suma ha alcanzado la convergencia. El criterio de convergencia es el mismo que se ha usado en la sección anterior, es decir, una vez seleccionado un valor finito  $Q$  se calcula el campo dispersado. Una vez calculado el campo dispersado se incrementa el valor  $Q = Q + 1$  para finalmente comparar este resultado con el obtenido anteriormente. Esta operación se realiza hasta que la diferencia entre los campos dispersados calculados sea menor que un cierto error definido previamente y que se considera aceptable.

En la figura (3.8) se representa el campo lejano para  $\theta = 0$  frente a la frecuencia para diferentes valores de  $q$ . Al igual que ocurre en la sección anterior la convergencia depende del rango frecuencial en el que se realiza el estudio. Para el rango de frecuencias considerado en este trabajo,  $\lambda > 0.5R_b$ , la convergencia queda garantizada para  $q = 4$ .

Es recomendable realizar una análisis de convergencia para todos los sistemas que sean objeto de estudio. El motivo de realización del análisis de convergencia es debido al tiempo requerido por la CPU para la resolución de un sistema que contenga un número elevado de elementos dispersivos del campo acústico. En este tipo de sistemas, si no se realiza un análisis de convergencia el tiempo de resolución puede ser excesivamente elevado, siendo recomendable usar el número más pequeño  $Q_{max}$  que garantice la convergencia.

### 3.7. Elementos dispersivos localizados arbitrariamente en el espacio

Considérese una guía de ondas, de altura  $h$ , en cuyo interior se encuentran  $L$  dispersores localizados en  $\mathbf{R}_\alpha$ , con  $\alpha = 1, 2, \dots, L$ .

Si un campo incidente  $P^{in}(\mathbf{r}, \omega)$  interacciona con dichos elementos, el campo total dispersado vendrá dado por la suma del campo dispersado por cada uno de ellos, es decir

$$P^{disp}(\mathbf{r}_\alpha, \omega) = \sum_{\alpha=1}^L \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (B_\alpha)_{qn} H_q(k_n^I r_\alpha) e^{iq\theta_\alpha} \Phi_n(z_\alpha), \quad (3.7.1)$$

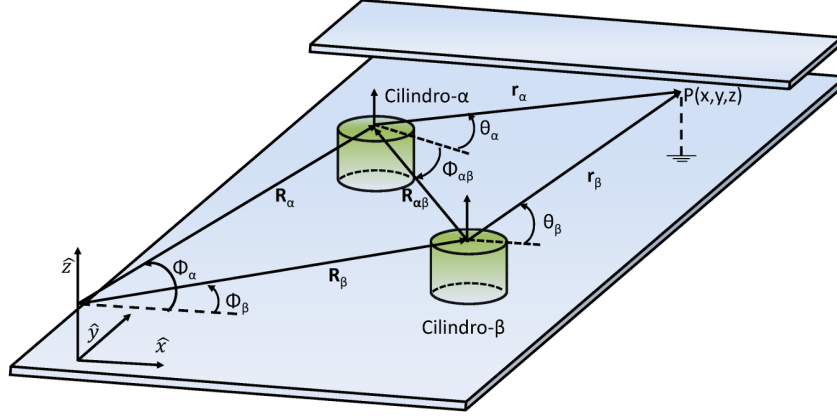


Figura 3.9: Definición de las variables empleadas en la teoría de dispersión múltiple.

donde  $H_q(\cdot)$  es la función de Hankel de orden  $q$  de primera especie,  $\mathbf{r}_\alpha = (r_\alpha, \theta_\alpha, z)$  son las coordenadas cilíndricas respecto al sistema de referencia localizado en el centro del elemento dispersor- $\alpha$ ; es decir,  $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r} - \mathbf{R}_\alpha$  como se muestra en la figura (3.9),  $k_n^I$  corresponde al número de onda de la región no dispersiva, cuyos valores vienen dados a través de la siguiente expresión  $k_n^I = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}$  y, finalmente,  $(B_\alpha)_{qn}$  son los coeficientes a determinar. El campo incidente en el cilindro  $\alpha$  se puede expresar como una combinación lineal de funciones de Bessel de primera especie:

$$P^{in}(\mathbf{r}_\alpha; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_\alpha)_{qn} J_q(k_n^I r_\alpha) e^{iq\theta_\alpha} \Phi_n^I(z_\alpha). \quad (3.7.2)$$

Los coeficientes del campo incidente  $(A_\alpha)_{qn}$  están relacionados con los coeficientes del campo dispersado  $(B_\alpha)_{qn}$  mediante la siguiente relación:

$$(B_\alpha)_{qn} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} ((T_\alpha)_{qs})_{nm} (A_\alpha)_{sm}, \quad (3.7.3)$$

donde  $T_\alpha$  es la matriz T del elemento dispersor  $\alpha$ .

El campo total incidente en el elemento dispersor  $\alpha$  es la suma del campo externo incidente  $P^{ext}(\mathbf{r}_\alpha; \omega)$  y el campo dispersado por todos los demás

elementos, es decir

$$P^{in}(\mathbf{r}_\alpha; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_\alpha^0)_{qn} J_q(k_n^I r_\alpha) e^{iq\theta_\alpha} \Phi_n^I(z_\alpha) + \quad (3.7.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta \neq \alpha}^L (B_\beta)_{qn} H_q(k_n^I r_\beta) e^{iq\theta_\beta} \Phi_n^I(z_\beta),$$

donde los coeficientes  $(A_\alpha^0)_{qn}$  corresponden al campo incidente externo referenciado en el elemento dispersor  $\alpha$ .

El término del campo dispersado se puede escribir en el sistema de referencia del elemento dispersor  $\alpha$  mediante el uso del teorema de Graf (ver apéndice A). Pudiendo, de esta manera, reescribir la ecuación (3.7.4) en términos del elemento dispersivo  $\alpha$ ,

$$P^{in}(\mathbf{r}_\alpha; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_\alpha^0)_{qn} J_q(k_n^I r_\alpha) e^{iq\theta_\alpha} \Phi_n^I(z) \quad (3.7.5)$$

$$+ \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \neq \alpha}^L \sum_{s=-\infty}^{\infty} (B_\beta)_{sn} H_{q-s}(k_n^I r_{\alpha\beta}) e^{i(s-q)\theta_{\alpha\beta}} J_q(k_n^I r_\alpha) e^{iq\theta_\alpha} \Phi_n^I(z).$$

Si comparamos la ecuación (3.7.5) con la ecuación (3.7.2) obtenemos que los coeficientes del campo incidente vienen dados por la siguiente relación

$$(A_\alpha)_{qn} = (A_\alpha^0)_{qn} + \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (B_\beta)_{sn} H_{q-s}(k_n^I r_{\alpha\beta}) e^{i(s-q)\theta_{\alpha\beta}}. \quad (3.7.6)$$

Multiplicando la ecuación (3.7.6) por  $((T_\alpha)_{rq})_{nm}$  y sumando, para los valores posibles de  $q$  y  $m$ , se obtiene la siguiente relación

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} ((T_\alpha)_{rq})_{nm} (A_\alpha)_{qm} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} ((T_\alpha)_{rq})_{nm} (A_\alpha^0)_{qm} + \quad (3.7.7)$$

$$\sum_{\beta \neq \alpha}^L \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} ((T_\alpha)_{rq})_{nm} H_{q-s}(k_m^I r_{\alpha\beta}) e^{i(s-q)\theta_{\alpha\beta}} (B_\beta)_{qm}.$$

Haciendo uso de la ecuación (3.7.3) se puede agrupar los coeficientes  $(B_\alpha)_{rn}$  en la ecuación (3.7.7) obteniendo

$$(B_\alpha)_{rn} - \sum_{\beta \neq \alpha}^L \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} ((G_{\alpha\beta})_{rs})_{nm} (B_\beta)_{sm} =$$

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} ((T_\alpha)_{rq})_{nm} (A_\alpha^0)_{qm}, \quad (3.7.8)$$

donde  $((G_{\alpha\beta})_{rs})_{nm}$  se define como

$$((G_{\alpha\beta})_{rs})_{nm} \equiv \sum_{q=-\infty}^{\infty} ((T_\alpha)_{rq})_{nm} H_{q-s}(k_m^I r_{\alpha\beta}) e^{i(s-q)\theta_{\alpha\beta}}. \quad (3.7.9)$$

Finalmente, definiendo

$$((M_{\alpha\beta})_{rs})_{nm} \equiv \delta_{\alpha\beta} \delta_{rs} \delta_{nm} - ((G_{\alpha\beta})_{rs})_{nm} \quad (3.7.10)$$

La ecuación (3.7.8) se puede escribir en forma matricial

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} ((M_{\alpha\beta})_{rs})_{nm} (B_\beta)_{sm} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} ((T_\alpha)_{rq})_{nm} (A_\alpha^0)_{qm}. \quad (3.7.11)$$

Las sumas en (3.7.11) corresponden a sumas infinitas. En la sección 3.6 se expuso que estas sumas se pueden reducir a una suma finita de valores que garanticen su convergencia. Si la suma de  $q$  y  $s$  se reducen a un valor  $Q_{max}$  y las sumas en  $n$  y  $m$  a un valor  $M_{max}$ , la Ec.(3.7.11) nos define un sistema lineal de  $N(2Q_{max} + 1)(M_{max} + 1)$  ecuaciones con  $N(2Q_{max} + 1)(M_{max} + 1)$  incógnitas. La inversa de la matriz  $M$  nos permite obtener la solución del sistema de ecuaciones

$$B = M^{-1} T A^0. \quad (3.7.12)$$

Esta solución está obtenida en términos de la posición, de las propiedades de cada uno de los elementos de dispersión y del campo externo.

En este trabajo el campo externo es una onda plana de amplitud  $C_0$  y un ángulo de incidencia  $\theta_o$ , los coeficientes  $(A_\alpha^0)_{qm}$  vienen dados por la expresión

$$(A_\alpha^0)_{q0} = C_o i^q e^{-iq\theta_o} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_\alpha}. \quad (3.7.13)$$

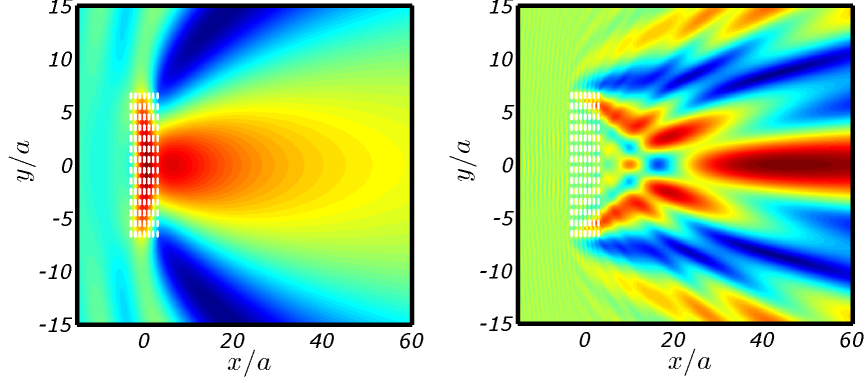


Figura 3.10: Dispersión del campo acústico en el plano  $(r, \theta)$  definido por  $z = 0$  debido a una distribución cuadrada de cavidades, de longitud  $L = 0.39a$  y radio  $R_a = 0.36a$ , que presentan un cilindro rígido en su interior, de radio  $R_a = 0.5R_b$ , localizadas en el interior de una guía de ondas, de altura  $h = 0.36a$ . La figura de la izquierda corresponde a una  $\lambda = 8a$  y la de la derecha corresponde  $\lambda = a$ . Se observa que el comportamiento dispersivo de la distribución depende de la longitud de onda. Cuando la  $\lambda = 8a$  la distribución se comporta como un fluido homogéneo pudiendo observar una concentración del campo de presiones en el interior de la distribución y en las proximidades de la misma. Para el caso de  $\lambda = a$  se observan ondas de difracción produciéndose una focalización del campo debido a las ondas difractadas en los bordes de la distribución. El color rojo indica amplitud máxima del campo de presiones mientras que el color azul indica valor mínimo.

Finalmente, el campo total de presión en cualquier punto del espacio es la suma del campo incidente y el campo total dispersado

$$P(\mathbf{r}; \omega) = P^{in}(\mathbf{r}; \omega) + \sum_{n=0}^{M_{max}} \sum_{q=-Q_{max}}^{Q_{max}} \sum_{\alpha=1}^L (B_{\alpha})_{qn} H_q(k_n^I r_{\alpha}) e^{iq\theta_{\alpha}} \Phi_n^I(z). \quad (3.7.14)$$

En la figura (3.10) se representa el mapa de presión obtenido para el caso de una onda plana incidiendo en una estructura periódica de elementos dispersores ordenada en una red cuadrada, cuyo parámetro de red es  $a$ . Los elementos dispersores que forman la red periódica están formados por una cavidad, de altura  $L = 0.78a$  y de radio  $R_b = 0.36a$ , que presenta un cilindro rígido en su interior, de radio  $R_a = 0.18a$ , localizados en el interior de una guía de altura  $h = 0.39a$ .

En la izquierda de la figura (3.10), se representa el mapa de presiones obtenido para  $\lambda = 8a$ ; en este caso la estructura se comporta como un medio homogéneo que presenta unas propiedades acústicas efectivas que difieren de las que presentan individualmente los elementos dispersores, como se verá en el siguiente capítulo.

En la derecha de la figura (3.10), se representa el mapa de presiones obtenido para  $\lambda = a$ ; se puede ver un efecto de focalización del campo debido a los efectos de difracción que presenta la estructura.

Al igual que explicamos en la sección 3.5 para el caso de un elemento de dispersión del campo acústico, la forma usual de comparar los campos de presiones obtenidos para el caso de dos estructuras compuestas por  $N$  elementos dispersores localizados de manera arbitraria en el espacio, es mediante el campo lejano.

El campo dispersado por una estructura compuesta por  $L$  dispersores viene dada por

$$P^{dis}(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{\alpha=1}^L \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (B_{\alpha})_{qm} H_q(k_m^I r_{\alpha}) e^{iq\theta_{\alpha}} \Phi_m^I(z). \quad (3.7.15)$$

Esta ecuación, usando la expresión asintótica de la función de Hankel para argumentos grandes ( $kr \gg 1$ ), se puede reescribir como

$$P^{dis}(\mathbf{r}; \omega) \simeq e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{\alpha=1}^L \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (B_{\alpha})_{qm} (-i)^q \sqrt{\frac{2}{\pi k_m^I r_{\alpha}}} e^{ik_m^I r_{\alpha}} e^{iq\theta_{\alpha}} \Phi_m^I(z), \quad (3.7.16)$$

donde el vector  $\mathbf{r}_{\alpha}$ , según la figura (3.9), es

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_{\alpha}, \quad (3.7.17)$$

y por tanto

$$|r_{\alpha}|^2 = r^2 + R_{\alpha}^2 - 2rR_{\alpha} \cos(\theta - \Phi_{\alpha}) \stackrel{r \gg R_{\alpha}}{\simeq} r^2 - 2rR_{\alpha} \cos(\theta - \Phi_{\alpha}) \quad (3.7.18)$$

y

$$|r| \simeq r - R_{\alpha} \cos(\theta - \Phi_{\alpha}),$$

de forma que (3.7.16) se puede escribir como

$$P^{dis}(\mathbf{r}; \omega) \simeq e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{\alpha=1}^L \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (B_{\alpha})_{qm} (-i)^q \sqrt{\frac{2}{\pi k_m^I r_{\alpha}}} e^{ik_m^I r} e^{iq\theta_{\alpha}} e^{-iR_{\alpha} \cos(\theta - \Phi_{\alpha})} \Phi_m^I(z). \quad (3.7.19)$$

Al igual que en el caso de un cilindro dentro de la guía de ondas para una frecuencia  $\omega$  se propagarán  $M$  modos siendo, por tanto, el resto de modos evanescentes.

Teniendo esto en cuenta y realizando algunas operaciones algebraicas llegamos a la expresión que nos permite calcular el campo lejano

$$\begin{aligned} \sigma^{disp}(\omega, \theta) &\equiv \lim_{r \rightarrow \infty} |\sqrt{r} P^{dis}(\mathbf{r}; \omega)| = \\ &= \left| \sum_{\alpha=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi k_m^I}} (-i)^q (B_\alpha)_{qm} e^{iq\theta} e^{-iR_\alpha \cos(\theta - \Phi_\alpha)} \Phi_m^I(z) \right| \end{aligned} \tag{3.7.20}$$





# Capítulo 4

## Homogenización

En este capítulo se describe el método utilizado para la obtención de los parámetros efectivos, módulo de compresibilidad efectiva  $B^*$  y densidad efectiva  $\rho^*$ , que caracterizan una distribución de elementos dispersores del campo acústico en el límite de homogenización.

### 4.1. Homogenización de una distribución de elementos dispersores

Las teorías de homogenización para una distribución de elementos de dispersión se basan en las expansiones asintóticas a baja  $\omega$  de los campos que describen tanto la región dispersiva como la región no dispersiva.

Cuando se trabaja con metamateriales se asume que el número de onda asociado al medio que rodea la región de dispersión es asintóticamente pequeño, mientras que el número de onda asociado a la región de dispersión no presenta ese comportamiento asintótico, siendo por tanto un número finito que puede ser comparable al tamaño del elemento de dispersión. Físicamente, esto significa que fuera de la región dispersiva el campo se propaga a través de un medio efectivo, pero en el interior de las regiones dispersivas se producen oscilaciones del campo. Éstas conducen a la obtención de parámetros negativos en un estrecho rango de frecuencias como se verá a continuación mediante un ejemplo.

Si la región dispersiva presenta una velocidad del sonido menor que la región que la rodea  $c_a \ll c_b$ , entonces se obtiene que la longitud de onda

dentro de la región dispersiva es mucho menor que la longitud de onda del medio que lo rodea, es decir,  $\lambda_a \ll \lambda_b$ . Por tanto el campo fuera de la región dispersiva oscila lentamente, ya que el campo presenta una frecuencia espacial  $k_b = \omega/c_b$ , mientras que el campo en el interior de la región dispersiva presenta una oscilación mayor como función de  $k_a = \omega/c_a$ .

La teoría de homogenización establece que para frecuencias por debajo de un cierto umbral, es decir para  $\lambda > 4a$  el cristal sónico se comporta como un medio efectivo caracterizado mediante unos parámetros efectivos constantes, pero, debido al campo dentro de la región efectiva, el medio efectivo resultante presenta unos parámetros que son finalmente dependientes de la frecuencia.

El método de homogenización utilizado para obtener los parámetros efectivos es la homogenización del campo dispersado. Esta condición de homogenización se basa en la suposición de que, dado una distribución finita de dispersores, el campo dispersado para bajas frecuencias por la distribución será igual al campo dispersado por un elemento homogéneo compacto. Matemáticamente esta condición se expresa de la siguiente manera

$$\lim_{k_b \rightarrow 0} \frac{P_{dist}^{dis}(\mathbf{r}; k_b) - P_{hom}^{dis}(\mathbf{r}; k_b)}{P_{hom}^{dis}(\mathbf{r}; k_b)} = 0. \quad (4.1.1)$$

El campo dispersado por una distribución de elementos dispersores es:

$$P_{dist}^{dis}(\mathbf{r}; k_b) = \sum_{qs} \sum_{nm} (T_{qs}^{dist})_{nm} A_{sm}^0 H_q(k_n^I r) e^{iq\theta} \Phi_n^I(z), \quad (4.1.2)$$

donde el elemento de matriz  $(T_{qs}^{distrib})_{nm}$  es ([TSD06])

$$(T_{qs}^{dist})_{nm} = \sum_{\alpha\beta} \sum_k \sum_l ((M_{\alpha\beta}^{-1})_{qk})_{nl} ((T_{\beta})_{ks})_{lm}. \quad (4.1.3)$$

El campo dispersado por un elemento compacto homogéneo es

$$P_{hom}^{dis}(\mathbf{r}; k_b) = \sum_{qs} \sum_{nm} (T_{qs}^{hom})_{nm} A_{sm}^0 H_q(k_n^I r) e^{iq\theta} \Phi_n^I(z). \quad (4.1.4)$$

Estas expresiones se pueden simplificar empleando un elemento homogéneo compacto con simetría cilíndrica. Este hecho tiene como consecuencia que la matriz-T se vuelva diagonal en  $q$ , simplificando de esta manera el cálculo de la misma.

Otro aspecto a tener en cuenta es que en el límite de homogenización  $\lambda \rightarrow \infty$

se considera el modo fundamental como el único modo no evanescente en la guía de ondas, pudiendo omitir el sumatorio en  $n$  en las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.4). El campo dispersado por una distribución de elementos dispersores es

$$P_{dist}^{dis}(\mathbf{r}; k_b) = \sum_q (T_q^{dist})_{00} A_q^0 H_q(k_b^I r) e^{iq\theta}, \quad (4.1.5)$$

y el campo dispersado por un elemento homogéneo será

$$P_{hom}^{dis}(\mathbf{r}; k_b) = \sum_q (T_q^{hom})_{00} A_q^0 H_q(k_b^I r) e^{iq\theta}. \quad (4.1.6)$$

A partir de las expresiones simplificadas y teniendo en cuenta la condición de homogenización (4.1.1) se obtiene que en el límite de homogenización ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) las matrices de ambos sistemas cumplen ([TSD06])

$$\frac{(T_q^{dist})_{00}}{k^{(2q+\delta_{oq}2)}} = \frac{(T_q^{hom})_{00}}{k^{(2q+\delta_{oq}2)}}. \quad (4.1.7)$$

Mediante esta condición se pueden determinar, como se verá a continuación, los parámetros que caracterizan a la distribución de elementos dispersores. En nuestro caso los parámetros a determinar son la densidad efectiva ( $\rho^*$ ) y el módulo de compresibilidad ( $B^*$ ).

## 4.2. Parámetros acústicos del elemento de dispersión para bajas frecuencias

Para la obtención de los parámetros acústicos tomamos como elemento de dispersión un cilindro fluido de radio  $R_b$  cuyas propiedades efectivas vienen caracterizadas mediante la matriz-T (ver apéndice B)

$$(T_q)_{00} = \frac{\chi_q J'_q(k_b R_b) - J_q(k_b R_b)}{\chi_q H'_q(k_b R_b) - H_q(k_b R_b)}, \quad \chi_q = \frac{\rho_a c_a J_q(k_a R_b)}{\rho_b c_b J'_q(k_a R_b)}. \quad (4.2.1)$$

El método de homogenización basado en la teoría de dispersión múltiple usa las formas asintóticas de las funciones de Hankel y Bessel para derivar las propiedades efectivas del medio. En particular se consideran la componente monopolar y dipolar ( $q = 0$  y  $q = 1$ ) de la matriz-T para obtener el módulo de compresibilidad efectivo y la densidad efectiva, respectivamente, cuando

ambos son positivos [THCSD06, TSD06]. Sin embargo, como se mostrará a continuación, el comportamiento de metamaterial (es decir, con parámetros efectivos que presentan valores negativos) aparece en el régimen donde solamente las funciones de Hankel y Bessel correspondientes al medio que rodea el metamaterial se pueden reemplazar por sus formas asintóticas para bajas frecuencias. En otras palabras, cuando se considera que la longitud de onda en el medio que rodea la región dispersiva es grande mientras que la longitud de onda dentro de la región dispersiva es comparable a su tamaño.

Considerando que los argumentos de las funciones de Bessel  $J_q(\cdot)$  y Hankel  $H_q(\cdot)$  son pequeños ( $k_b R_b \ll 1$ ), y usando sus formas asintóticas (ver apéndice B), la componente monopolar de la matriz-T es

$$(T_0)_{00} \approx \frac{i\pi R_b^2 k_b^2}{4} \frac{1 + \frac{1}{2} k_b R_b \chi_0}{\frac{k_b^2 R_b^2}{2} \ln(k_b R_b) - \frac{1}{2} k_b R_b \chi_0} \quad (4.2.2)$$

donde el término logarítmico en el denominador es despreciable en comparación con el término lineal  $k_b$  en el límite de bajas frecuencias pero no se desprecia cuando se trata con metamateriales. Cuando se consideran metamateriales que presentan parámetros acústicos negativos el término  $\chi_0$  depende de  $k_a$ , donde para cierto rango en frecuencias se puede tener que  $k_a < k_b$  y por tanto el término  $\frac{1}{2} k_b \chi_0 R_b$  no predomina sobre el término logarítmico.

Este término se ha despreciado en los estudios realizados anteriormente sobre metamateriales acústicos y electromagnéticos, siendo un parámetro importante para la determinación de los parámetros efectivos por lo anteriormente mencionado.

Realizando las mismas consideraciones obtenemos que la componente dipolar de la matriz-T es

$$(T_1)_{00} \approx \frac{i\pi R_b^2 k_b^2 \frac{\chi_1}{k_b R_b} - 1}{4 \frac{\chi_1}{k_b R_b} + 1}. \quad (4.2.3)$$

Por otra parte, si se considera un elemento de dispersión homogéneo con parámetros  $\rho_a$  y  $c_a$ , las expresiones asintóticas de la componente monopolar y dipolar de la matriz-T que caracteriza al elemento presenta la siguiente forma (ver apéndice B)

$$(T_0)_{00} \approx \frac{i\pi R_b^2 k_b^2}{4} \left[ \frac{B_b}{B_a} - 1 \right], \quad (4.2.4)$$

$$(T_1)_{00} \simeq \frac{i\pi R_b^2 k_b^2}{4} \frac{\rho_a - \rho_b}{\rho_a + \rho_b}. \quad (4.2.5)$$

Comparando las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) con (4.2.4) y (4.2.5), se puede introducir la dependencia en frecuencia del módulo de compresibilidad y la densidad

$$\frac{B_a(\omega)}{B_b} = \frac{k_b^2 R_b^2}{2} \ln(k_b R_b) - \frac{1}{2} k_b R_b \chi_0, \quad (4.2.6)$$

$$\frac{\rho_a(\omega)}{\rho_b} = \frac{\chi_1}{k_b R_b}. \quad (4.2.7)$$

Estas cantidades dependen de la densidad  $\rho_b$  del medio fluido, del campo y de su derivada en la superficie del elemento de dispersión.

### 4.3. Parámetros efectivos de una distribución de elementos dispersores

Una distribución de elementos de dispersión cilíndricos definida por sus parámetros homogéneos  $\rho_a$  y  $B_a$  se comporta en el límite de bajas frecuencias (es decir, para longitudes de onda más grandes que la distancia de separación entre los elementos de dispersión) como un medio homogéneo con parámetros efectivos  $\rho^*$  y  $B^*$ . Estos parámetros fueron obtenidos por Berryman [Ber80] en 1980 haciendo la comparación de las propiedades de dispersión que presentaba la distribución y el elemento efectivo de dispersión. El resultado obtenido no es exacto debido a que no se consideraron los términos de la dispersión múltiple. Este enfoque fue generalizado incluyendo todos los términos de interacción de la dispersión múltiple entre los elementos de dispersión obteniendo de esta manera expresiones generales de los parámetros efectivos [THCSD06, TSD06, TSD08].

En las siguientes secciones se mostrarán los argumentos que permiten la generalización de la expresiones que se obtuvieron en los estudios anteriormente citados para el caso de los metamateriales cuyos parámetros presentan

una dependencia en frecuencia. Para ello se considera que los parámetros  $\rho_a$  y  $B_a$  se pueden reemplazar por sus valores dependientes en frecuencias  $\rho_a(\omega)$  y  $B_a(\omega)$ . En el trabajo de tesis de Daniel Torrent [TSD11b] se demuestra que este método es consistente y que proporciona un buen método que permite la obtención de los parámetros efectivos que caracterizan a un metamaterial acústico en el límite de bajas frecuencias.

### 4.3.1. Módulo de compresibilidad efectivo $B^*$

Para la obtención del módulo de compresibilidad efectivo se parte de la condición de homogenización para la componente monopolar  $q = 0$  a baja  $\omega$  de la matriz-T

$$(T_0^{dist})_{00} = (T_0^{hom})_{00}. \quad (4.3.1)$$

Asumiendo que la estructura de dispersión efectiva es un cilindro fluido de radio  $R_{eff}$ , el término monopolar de la matriz-T que caracteriza al medio fluido es

$$(T_0^{hom})_{00} \approx \frac{i\pi R_{eff}^2 k_b^2}{4} \left[ \frac{B_b}{B^*} - 1 \right]. \quad (4.3.2)$$

Por otra parte, la forma asintótica de la componente monopolar de la matriz-T para una distribución finita de  $N$  cilindros fluidos es

$$(T_0^{dist})_{00} = \sum_{\alpha=1}^N ((T_\alpha)_0)_{00} \approx \sum_{\alpha=1}^N \frac{i\pi R_\alpha^2 k_b^2}{4} \left[ \frac{B_b}{B_\alpha(\omega)} - 1 \right]. \quad (4.3.3)$$

Igualando las ecuaciones (4.3.2) y (4.3.9) obtenemos

$$\left[ \frac{B_b}{B^*} \right] = \sum_{\alpha} \left[ \frac{B_b}{B_\alpha(\omega)} - 1 \right] f_\alpha; \quad f_\alpha = \frac{NR_\alpha^2}{R_{eff}^2}. \quad (4.3.4)$$

Resolviendo la ecuación anterior para el módulo de compresibilidad efectivo se obtiene

$$\frac{1}{B^*(\omega)} = \frac{1-f}{B_b} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{f_\alpha}{B_\alpha(\omega)}. \quad (4.3.5)$$

Si todos los cilindros son iguales

$$\frac{1}{B^*(\omega)} = \frac{1-f}{B_b} + \frac{f}{B_a(\omega)}. \quad (4.3.6)$$

Siempre que el sistema se pueda considerar homogéneo el módulo de compresibilidad efectivo se calcula mediante la ecuación (4.3.6).

A continuación se muestra el proceso mediante el cual se calcula el módulo de compresibilidad efectivo de un sistema:

- 1.- Con la matriz-T del sistema a estudiar se extrae  $\chi_0$  usando (4.2.2).
- 2.- Se calcula  $B_\alpha(\omega)$  introduciendo el valor  $\chi_0$  en (4.2.6).
- 3.- Se introduce el valor  $B_\alpha(\omega)$  en (4.3.5).

### 4.3.2. Densidad efectiva $\rho^*$

El proceso para la obtención de la densidad efectiva es similar al descrito en la sección anterior . La condición de homogenización para la componente dipolar es

$$(T_1^{dist})_{00} = (T_1^{hom})_{00}. \quad (4.3.7)$$

La forma asintótica de la componente dipolar  $q = 1$  de la matriz-T de un cilindro fluido efectivo de radio  $R_{eff}$  es

$$(T_1^{compact})_{00} \approx \frac{i\pi R_{eff}^2 k_b^2}{4} \left[ \frac{\rho^* - \rho_b}{\rho^* + \rho_b} \right]. \quad (4.3.8)$$

Para una distribución de cilindros

$$(T_1^{distrib})_{00} = \sum_{\alpha=1}^N ((T_\alpha)_1)_{00} \approx \sum_{\alpha=1}^N \frac{i\pi R_b^2 k_b^2}{4} \left[ \frac{\rho_\alpha(\omega) - \rho_b}{\rho_\alpha(\omega) + \rho_b} \right]. \quad (4.3.9)$$

En la ecuación anterior se ha asumido que los elementos que forman la distribución son iguales.

Igualando las ecuaciones (4.3.8) y (4.3.9) se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{\rho^* - \rho_b}{\rho^* + \rho_b} = \sum_{\alpha} \frac{\rho_\alpha(\omega) - \rho_b}{\rho_\alpha(\omega) + \rho_b} f_\alpha. \quad (4.3.10)$$

Suponiendo todos los elementos dispersores iguales y resolviendo para la densidad efectiva en la ecuación anterior obtenemos

$$\rho^*(\omega) = \frac{\rho_a(\omega)(1 + f) + \rho_b(1 - f)}{\rho_a(\omega)(1 - f) + \rho_b(1 + f)} \rho_b. \quad (4.3.11)$$



Esta última ecuación solamente es válida para distribuciones de elementos de dispersión que presenta una fracción de llenado baja. Esto es debido a que en la deducción de esta ecuación no se ha tenido en cuenta los efectos de la dispersión múltiple debido a las interacciones entre los elementos que forman la distribución.

En los trabajos [THCSD06, TSD06] se obtiene la expresión de la densidad efectiva generalizada para altas fracciones de llenado, donde los términos de la dispersión múltiple son introducidos en (4.3.11) mediante el llamado factor  $\Delta$

$$\rho^*(\omega) = \frac{\rho_a(\omega)(\Delta + f) + \rho_b(\Delta - f)}{\rho_a(\omega)(\Delta - f) + \rho_b(\Delta + f)} \rho_b. \quad (4.3.12)$$

El factor  $\Delta$  se define como  $\Delta \equiv \frac{\sum_{\alpha\beta} ((M_{\alpha\beta}^{-1})_{11})_{00}}{N}$  y representa la corrección para la densidad efectiva. Tiene en cuenta todas las interacciones que se producen en la dispersión múltiple entre los elementos de una distribución. Para las fracciones de llenado bajas los trabajos [THCSD06, TSD06] demuestran que el factor delta  $\Delta = 1$  recuperándose el resultado obtenido en la ecuación (4.3.11). Los detalles técnicos de su derivación vienen dados en el apéndice de [TSD11b].

No obstante, las redes consideradas en el presente trabajo presentan una fracción de llenado lo suficientemente baja para poder despreciar los efectos de interacción de la dispersión múltiple entre los elementos que forman la distribución. Por tanto, la densidad efectiva que caracteriza la distribución se obtiene utilizando (4.3.11).

Por último, se indica el proceso mediante el cual se obtiene la densidad efectiva de una distribución homómegea:

- 1.- Con la matriz-T del sistema estudiado se extrae  $\chi_1$  usando (4.2.3).
- 2.- Se calcula  $\rho_a(\omega)$  introduciendo el valor de  $\chi_1$  en (4.2.7).
- 3.- Se introduce el valor  $\rho_a(\omega)$  en (4.3.11) si la fracción de llenado es  $f \leq 70\%$  o en (4.3.12) para fracciones de llenado  $f > 70\%$ .

### 4.3.3. Velocidad efectiva

Una vez obtenido el módulo de compresibilidad efectivo y la densidad efectiva se puede determinar la velocidad efectiva mediante la siguiente ex-

presión

$$c^*(\omega) = \pm \sqrt{\frac{B^*(\omega)}{\rho^*(\omega)}}. \quad (4.3.13)$$

La propagación del sonido a través del metamaterial viene determinada por esta expresión.

Cuando la velocidad de fase del metamaterial efectivo es imaginaria pura el sonido no se puede propagar dentro en el medio. Este caso ocurre cuando uno de los dos parámetros  $B^*$  o  $\rho^*$  que caracterizan el medio es imaginario puro. Por otra parte, cuando ambos parámetros son positivos o negativos la velocidad del sonido es número real positivo o negativo, respectivamente propagándose el sonido a través del medio efectivo. Cuando ambos parámetros son negativo se dice que estamos en una zona de propagación doblemente negativa (DN) [ZL04, DLQS07, LL12].



**Parte II**  
**Aplicaciones**



# Capítulo 5

## Dispositivo refractivo: Lente acústica

En este capítulo se aplica el método de homogenización del capítulo 4 en la caracterización de una distribución de cavidades localizadas en el interior de una guía de ondas. Esta caracterización servirá para el diseño de un nuevo tipo de dispositivo refractivo basado en distribuciones de cavidades en lugar del caso habitual de cilindros rígidos [MN72, CSSP<sup>+</sup>01, GY03a, TSD07a, LHSW09, PHJ<sup>+</sup>10, CTSD10].

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la sección 5.1 se analiza el sistema considerando el modo fundamental como el único modo no evanescente en el interior de la guía de ondas y despreciando la interacción de los demás modos sobre el fundamental. En la sección 5.2 se diseña un dispositivo acústico refractivo. A continuación en la sección 5.3 se expondrá la realización experimental que permite la verificación del modelo teórico expuesto. En la sección 5.4 teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el experimento se analizará la influencia de los modos evanescentes sobre los parámetros efectivos y sobre las propiedades dispersivas de la distribución. En la sección 5.5 se expone un estudio preliminar mediante el cual se observa el acoplamiento de las propiedades refractivas del dispositivo acústico al espacio libre. Finalmente en la sección 5.6 se exponen las conclusiones de este estudio.

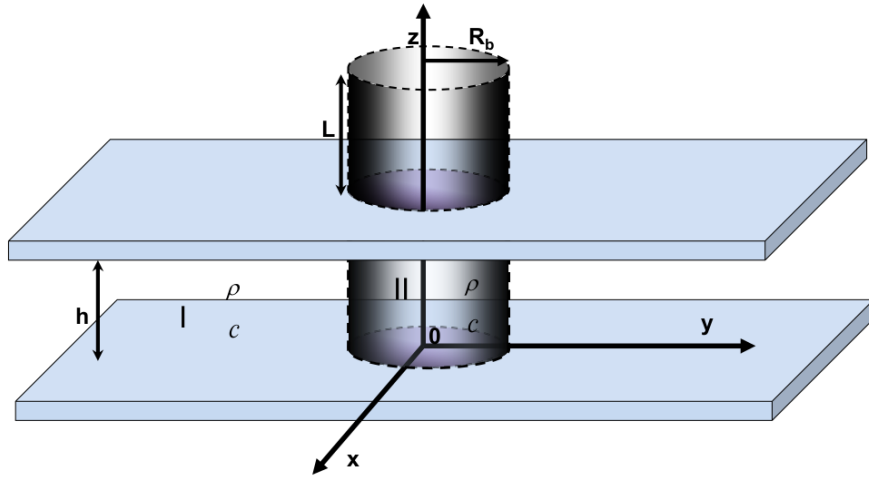


Figura 5.1: Esquema del elemento de dispersión. Este consiste en una cavidad de radio  $R_b$  y longitud  $L$  localizada en el interior de una guía de ondas de altura  $h$ .

## 5.1. Caracterización de una distribución de cavidades

En esta sección se obtienen los parámetros efectivos de una distribución periódica de elementos dispersores en el espacio, caracterizada por un parámetro de red  $a$ . Los elementos de dispersión consisten en cavidades cilíndricas de radio  $R_b$  y de longitud  $L$  situada en el interior de una guía de ondas de altura  $h$ . En la figura 5.1 se representa el elemento de dispersión empleado.

En el límite de homogenización, que está definido para longitudes de onda  $\lambda \geq 4a$ , se considera el modo fundamental como único modo no evanescente en el interior de la guía de ondas, pudiendo despreciarse la contribución de los modos evanescentes y obteniéndose, de esta manera, un modelo sencillo que describe el comportamiento de este sistema. En la figura 5.1 se puede ver que el sistema se ha dividido en dos regiones: la región I ( $r > R_b$ ) que corresponde

al medio no dispersivo (aire en este trabajo) y la región II ( $r < R_b$ ) que corresponde al interior de la cavidad.

El campo de presiones en la región I se puede expresar de la siguiente forma

$$P^I(r, \theta) = \sum_q [A_q J_q(kr) + B_q H_q(kr)] e^{iq\theta}, \quad (5.1.1)$$

mientras que el campo de presión en la región II se puede expresar

$$P^{II}(r, \theta) = \sum_q C_q J_q(kr) e^{iq\theta}. \quad (5.1.2)$$

Donde los coeficientes  $A_q$ ,  $B_q$  y  $C_q$  representan el campo incidente, el campo dispersado y el campo transmitido, respectivamente. Para obtener los coeficientes  $B_q$  y  $C_q$  se aplican las siguientes condiciones de contorno:

$$\int_0^h P^I(\mathbf{R}_b) dz = \int_0^h P^{II}(\mathbf{R}_b) dz, \quad (5.1.3)$$

$$\int_0^h \left. \frac{\partial P^I(\mathbf{r})}{\partial r} \right|_{r=R_b} dz = \int_0^{h+L} \left. \frac{\partial P^{II}(\mathbf{r})}{\partial r} \right|_{r=R_b} dz. \quad (5.1.4)$$

Sustituyendo (5.1.1) y (5.1.2) en las condiciones de contorno obtenemos

$$A_q J_q(kR_b) + B_q H_q(kR_b) = C_q J_q(kR_b), \quad (5.1.5)$$

$$hk[A_q J'_q(kR_b) + B_q H'_q(kR_b)] = (L+h)kC_q J'_q(kR_b), \quad (5.1.6)$$

donde ' representa la derivada con respecto al argumento. De esta última ecuación se obtienen los coeficientes  $C_q$

$$C_q = \frac{h [J'_q(kR_b) + B'_q H_q(kR_b)]}{L J'_q(kR_b)}, \quad (5.1.7)$$

introduciendo estos coeficientes en la ecuación (5.1.5) obtenemos

$$A_q J_q(kR_b) + B_q H_q(kR_b) = \frac{h J_q(kR_b)}{L J'_q(kR_b)} [J'_q(kR_b) + B'_q H_q(kR_b)], \quad (5.1.8)$$



agrupando los coeficientes y resolviendo para los coeficientes  $B_q$ , obtenemos que la matriz-T es:

$$T_q = -\frac{\chi_q J'_q(kR_b) - J_q(kR_b)}{\chi_q H'_q(kR_b) - H_q(kR_b)}, \quad (5.1.9)$$

donde

$$\chi_q = \frac{h}{h+L} \frac{J_q(kR_b)}{J'_q(kR_b)}. \quad (5.1.10)$$

La matriz-T obtenida para este sistema tiene la misma forma funcional que la de un cilindro fluido (ver apéndice) donde la cantidad  $\chi_q^{fluido}$  es igual

$$\chi_q^{fluido} = \frac{\rho_a c_a}{\rho_b c_b} \frac{J_q(k_a R_b)}{J'_q(k_a R_b)}. \quad (5.1.11)$$

Comparando (5.1.10) con (5.1.11) obtenemos:

$$\rho_a = \frac{h}{L+h} \rho_b; \quad c_a = c_b, \quad (5.1.12)$$

donde  $\rho_a$  ( $\rho_b$ ) corresponde a la densidad del elemento de dispersión (fluido que lo rodea, aire en este caso) y  $c_a$  ( $c_b$ ) es la velocidad del sonido del elemento de dispersión (del aire). A partir de estas relaciones se puede obtener el módulo de compresibilidad que presenta el elemento de dispersión.

$$B_a = c_a^2 \rho_a = c_b^2 \frac{h}{h+L} \rho_b. \quad (5.1.13)$$

Por tanto, el elemento de dispersión se comporta como un cilindro fluido de tal forma que si  $L \gg h$  la densidad que presenta el elemento de dispersión es mucho menor que la del medio que lo rodea.

Una vez obtenidos los parámetros que caracterizan el elemento de dispersión se pueden obtener los parámetros efectivos que caracterizan a una distribución formada por cavidades cilíndricas, utilizando (4.3.6) y (4.3.12).

En la figura 5.2 se representan los parámetros efectivos de una distribución hexagonal de cavidades localizadas en el interior de una guía de ondas. Para el cálculo de estos parámetros efectivos se ha considerado un valor fijo de altura de la guía de ondas y se ha realizado un barrido para diferentes alturas de la cavidad. La fracción de llenado que se ha considerado para este

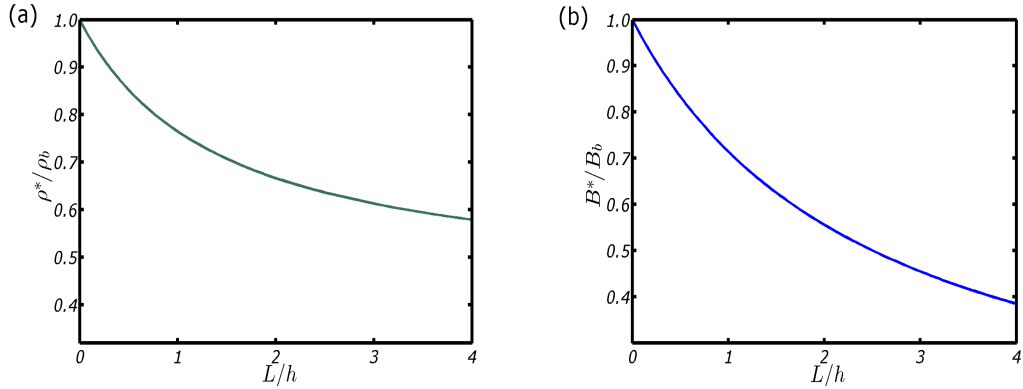


Figura 5.2: Parámetros efectivos para el caso de una red hexagonal de cavidades que presente una fracción de llenado del 40 %

cálculo es  $f = 40\%$ , pudiendo de esta manera despreciar la contribución de las interacciones de la dispersión múltiple en la ecuación de la densidad efectiva expuesta en el capítulo anterior. La figura 5.2a representa la densidad efectiva de la distribución de cavidades en función de la longitud de la cavidad. Se puede ver que el medio efectivo se comporta como un medio fluido cuya densidad es menor que la densidad del medio que lo rodea. La figura 5.2b representa el módulo de compresibilidad del medio efectivo en función de la longitud de la cavidad. Se puede observar que presenta un comportamiento similar al de la densidad.

## 5.2. Lente acústica

A partir de los parámetros efectivos representados en la figura 5.2 es fácil deducir que la velocidad efectiva que presenta el sistema es menor que la del medio que lo rodea, es decir, que el índice de refracción es mayor que el del medio que rodea la distribución. Este hecho nos permite diseñar dispositivos refractivos, como por ejemplo una lente acústica.

El índice de refracción del medio efectivo se define como:

$$n^* = \frac{c_b}{c^*}, \quad (5.2.1)$$

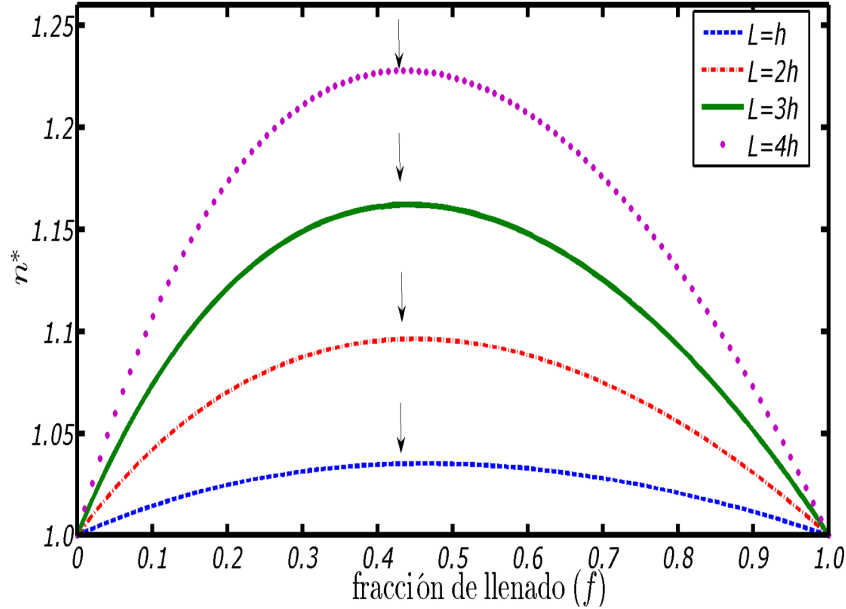


Figura 5.3: Variación del índice de refracción de una distribución de cavidades en función de la fracción de llenado. Las Líneas de colores representan los diferentes valores de la longitud de la cavidad considerados en este estudio.

con

$$c^* = \sqrt{\frac{B_a B_b}{B_a(1-f) + f B_b} \frac{\rho_a(1-f) + \rho_b(1+f)}{[\rho_a(1+f) + \rho_b(1-f)] \rho_b}}. \quad (5.2.2)$$

Para un valor fijo de la altura de la guía de ondas  $h$  se puede ver que el valor del índice de refracción efectivo depende de la longitud de la cavidad  $L$  y de la fracción de llenado de la red  $f$ . El estudio de la dependencia del índice de refracción con estos dos parámetros se muestra en la figura 5.3

En esta figura se representa el valor del índice de refracción en función de la fracción de llenado para diferentes valores de longitud de la cavidad (líneas de colores). Se pueden ver que para todos los casos considerados el índice de refracción máximo se obtiene para el caso donde la fracción de llenado de la red es  $f \approx 44\%$ .

La lente acústica se realizó usando de una red hexagonal de parámetro de red  $a$  y manteniendo, dentro de las limitaciones físicas existentes en la construcción de la lente real, la relación entre los parámetros geométricos que definen la lente acústica para la obtención del máximo índice de refracción.

### 5.3. Experimento numérico: Lente acústica

Para la realización del experimento numérico, utilizando el software Comsol, de la lente acústica se consideró una muestra finita con forma lenticular que consiste en 7 filas de cavidades de radio  $R_b = 1\text{cm}$  y longitud  $L = 9\text{cm}$ . La red hexagonal que distribuye las cavidades presenta un parámetro de red  $a = 3\text{cm}$ . Esta muestra se sitúa en una guía de ondas acústica  $2D$  que presenta una altura  $h = 5\text{cm}$ .

Con el objetivo de demostrar que la focalización de la lente acústica es debido a un fenómeno refractivo y no difractivo se realizó otro experimento numérico donde se introdujo una muestra con forma cuadrada. El resultado de estos experimentos numéricos se muestra en las figuras 5.4 y 5.5, donde comparamos los mapas de presión obtenidos para una muestra que presenta una forma lenticular y para una muestra rectangular. En la columna de la izquierda de las figuras 5.4 y 5.5 se representan los mapas de presión obtenidos para las frecuencias indicadas en la parte superior de la figura. La selección de esas frecuencias nos permite ver el comportamiento del dispositivo.

En el intervalo de frecuencias estudiado se observa que conforme aumentamos la frecuencia el punto focal se define de una manera más nítida y se obtiene una región más estrecha de focalización como se puede ver en la columna de la izquierda de la figura 5.5 para la frecuencia correspondiente a  $\nu = 2655\text{Hz}$ .

Se puede observar que los patrones del campo de presión transmitido obtenidos mediante la lente son muy diferentes a los obtenidos por la muestra cuadrada. Los patrones obtenidos por la lente presentan una mayor concentración del campo en la región espacial localizada en el centro de la lente. Sin embargo se observa que conforme nos alejamos de la zona central obtenemos que el campo de presión es mínimo. Este comportamiento difiere al observado por la muestra cuadrada donde se puede observar que los patrones obtenidos no presentan una gran concentración del campo en su zona central. Nótese que en la zona central presenta una zona muy localizada donde el campo es mínimo, este hecho no se encuentra en los patrones obtenidos por la lente. También se observa que la amplitud del campo es más uniforme en las zonas espaciales alejadas del centro de la muestra. Esto se debe a que los patrones del campo transmitido obtenidos son debidos a la difracción que se produce en los bordes de la muestra.

Nótese que la focalización debido a la difracción de la muestra rectangular no coincide en posición ni en magnitud con la obtenida mediante la muestra con forma lenticular pudiendo decir que la focalización observada en la lente acústica se debe a un fenómeno refractivo.

Por otra parte, cabe señalar que los resultados de las simulaciones nos muestran que el comportamiento del dispositivo acústico depende de la región de frecuencias exhibiendo dos tipos de comportamiento, uno como colimador del campo acústico y otro como lente acústica. Este hecho nos indica que los parámetros efectivos que caracterizan el dispositivo dependen de la frecuencia conduciéndonos a revisar el modelo aproximado explicado en la sección anterior. Para obtener un modelo teórico más completo que explique lo observado se tiene que incluir la interacción de los modos evanescentes en el modelo teórico.

## 5.4. Influencia de los modos evanescentes sobre los parámetros efectivos de una red de cavidades

En vista de los resultados obtenidos anteriormente se hace necesario revisar el modelo teórico desarrollado en la sección 5.1. En el desarrollo del modelo simplificado se consideró el modo fundamental sin incluir la interacción que ejercen los modos evanescentes sobre el modo fundamental.

El procedimiento para la obtención de la matriz-T teniendo en cuenta la interacción de los modos evanescentes se explicó en el capítulo 3 llegando a la siguiente expresión de la matriz-T

$$(T_q)_{mn} = - \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{H}_q)_{mk}^{-1} (\hat{J}_q)_{kn}, \quad (5.4.1)$$

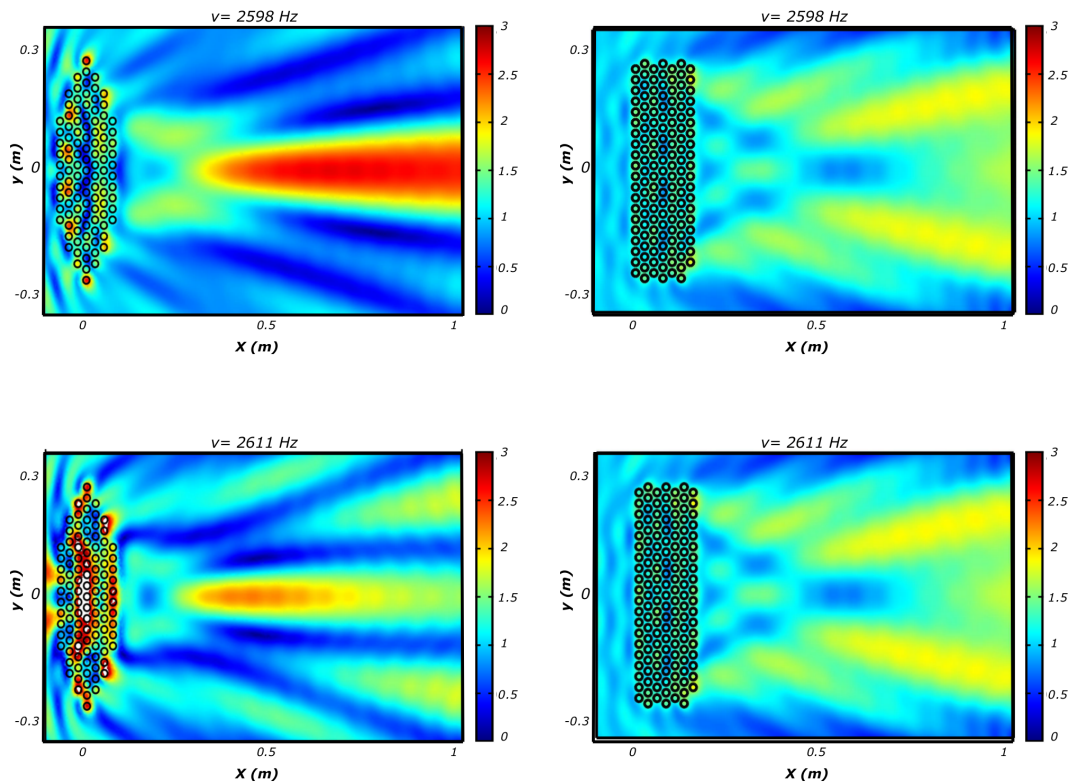


Figura 5.4: En la columna de la izquierda se representan los mapas de presión obtenidos con la lente acústica en las simulaciones basadas en elementos finitos (Comsol) para las frecuencias  $2598\text{Hz}$  y  $2611\text{Hz}$ . En la columna de la derecha se representa los campos acústicos obtenidos en la simulación con la muestra rectangular para las frecuencias  $2598\text{Hz}$  y  $2611\text{Hz}$ . Para la realización de las simulaciones se utilizó una distribución hexagonal de cavidades de radio  $R_b = 1\text{cm}$  y longitud  $L = 9\text{cm}$  y de parámetro de red  $a = 3\text{cm}$ .

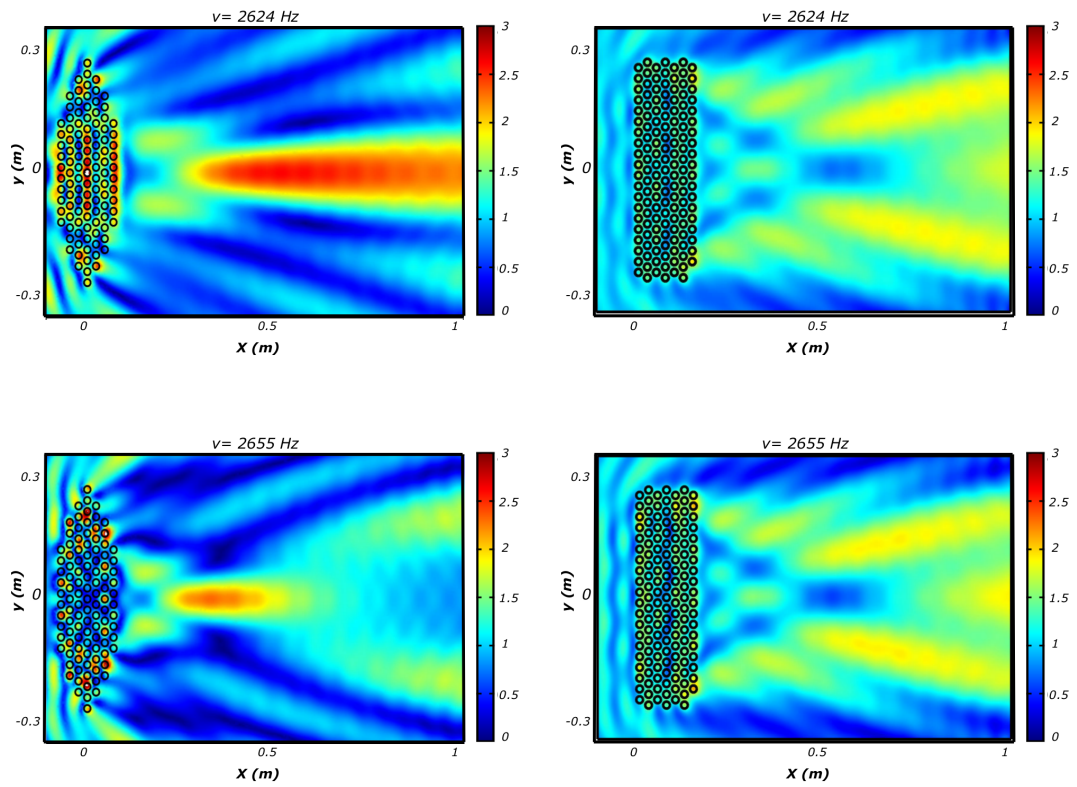


Figura 5.5: En la columna de las izquierda se representan los mapas de presión obtenidos con la lente en una simulación numérica utilizando Comsol para las frecuencias  $2624\text{Hz}$  y  $2655\text{Hz}$ . En la columna de la derecha se representa el campo acústico obtenido con la muestra rectangular para las mismas frecuencias. Para la obtención de las simulaciones se utilizó una distribución hexagonal de cavidades de radio  $R_b = 1\text{cm}$  y longitud  $L = 9\text{cm}$  y de parámetro de red  $a = 3\text{cm}$ .

donde las cantidades  $(\hat{H}_q)_{mk}$  y  $(\hat{J}_q)_{kn}$  se definen de la siguiente manera:

$$(\hat{J}_q)_{kn} \equiv J_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\dot{J}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} J_q(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_q(k_m^{II} R_b)} \right], \quad (5.4.2)$$

$$(\hat{H}_q)_{kn} \equiv H_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\dot{H}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} J_q(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_q(k_m^{II} R_b)} \right],$$

siendo

$$G_{km} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{h+L}} \epsilon_k \epsilon_m \left[ \text{sinc}((k_{kz}^I + k_{mz}^{II})h) + \text{sinc}((k_{kz}^I - k_{mz}^{II})h) \right], \quad (5.4.3)$$

donde el término  $G_{km}$  representa la interacción de los modos verticales generados en la interfaz, localizada en  $r = R_b$ , de la guía de ondas y de la cavidad. Las  $k_l^i$  con  $i = I, II$  son los números de onda correspondientes a la región I y II y cuyos valores se obtienen mediante la siguiente expresión

$$k_l^i = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (k_z^i)^2}, \quad \text{siendo} \quad k_z^i = \begin{cases} \frac{l\pi}{h} & \text{si } i = I \\ \frac{l\pi}{h+L} & \text{si } i = II \end{cases}. \quad (5.4.4)$$

La expresión de la matriz en este caso es más compleja no pudiendo obtenerse una forma analítica como la que se obtuvo en el modelo anterior.

Para la verificación de la matriz obtenida con el modelo teórico se utilizó el método explicado en el apéndice C. Mediante este método se puede realizar la comparación de la matriz-T obtenida mediante el modelo teórico y la obtenida mediante una simulación basada en elementos finitos.

En la figura 5.6a y 5.6b se muestra la comparación de los elementos de matriz  $q = 0$  y  $q = 1$ , respectivamente, en función de la frecuencia, para el caso de una cavidad de radio  $R_b$  y de longitud  $L = 0.33R_b$  localizada en el interior de una guía de ondas de altura  $h = 0.33R_b$ . Se puede ver que los elementos de matriz obtenidos por ambos métodos presentan el mismo comportamiento en frecuencia, validando de esta manera la matriz -T que caracteriza el sistema.



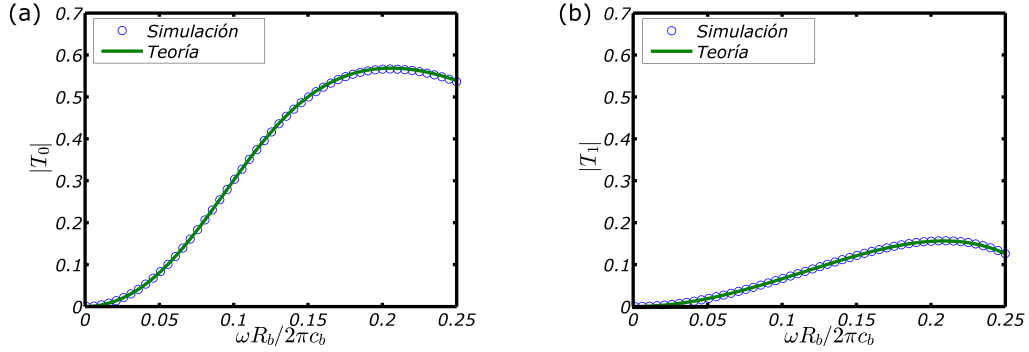


Figura 5.6: (a) Amplitud de los elementos de la matriz de transferencia  $T_0$  en función de la frecuencia obtenidos mediante el modelo teórico y mediante una simulación basada en elementos finitos. (b) Amplitud de los elementos de la matriz de transferencia en una cavidad para el caso  $q = 1$  en función de la frecuencia obtenidos por el modelo teórico y la simulación basada en elementos finitos. Ambos casos corresponden a una cavidad de radio  $R_b$  y longitud  $L = 0.33R_b$  localizada en el interior de una guía de ondas de altura  $h = 0.33R_b$ .

Una manera de ver como influye el incluir los modos evanescentes en el modelo teórico sobre las propiedades dispersivas del elemento de dispersión es mediante el campo lejano. En la figura 5.7a se muestra el campo lejano de una cavidad incluyendo los modos evanescentes (línea continua) y el obtenido mediante el modelo simplificado (línea discontinua) para el caso de una cavidad de radio  $R_b$  y de longitud  $L = 0.33R_b$  localizada en una guía de ondas de altura  $h = 0.33R_b$  para una longitud de onda incidente  $\lambda = 2R_b$ . Se puede observar como difiere no solo la forma del campo dispersado obtenido por ambos modelos sino también su amplitud. La figura 5.7b muestra el campo lejano obtenido mediante una simulación 3D basada en elementos finitos. Nótese que la forma del campo lejano extraída de la simulación coincide con la obtenida mediante el modelo teórico cuando se incluyen los modos evanescentes. Por tanto, aunque el modo fundamental es el único modo propagante en la guía de ondas es necesario incluir los modos evanescentes en el cálculo de los elementos de la matriz de transferencia.

Cabe señalar que el modelo simplificado se obtuvo en el límite de homogenización, es decir para una  $\lambda \rightarrow \infty$ . Con el fin de mostrar la validez del

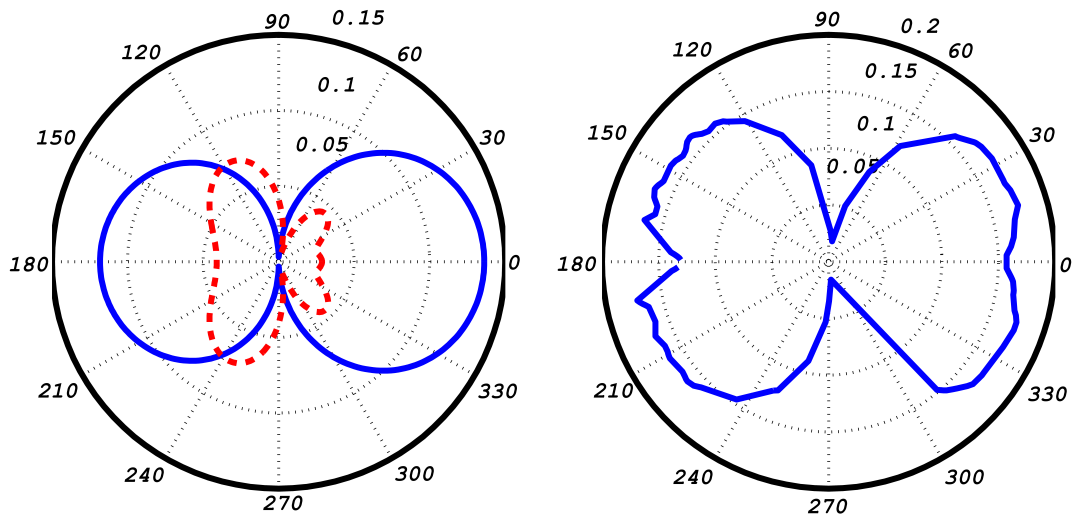


Figura 5.7: (a) Campo Lejano obtenido mediante el modelo teórico (línea continua) y el modelo simplificado (línea discontinua). (b) Campo lejano obtenido mediante una simulación 3D basada en elementos finitos. Ambas figuras corresponden al caso de una cavidad de radio  $R_b$  y de longitud  $L = 0.33R_b$  localizada en el interior de una guía de ondas de altura  $h = 0.33R_b$  para una  $\lambda = 2R_b$ .

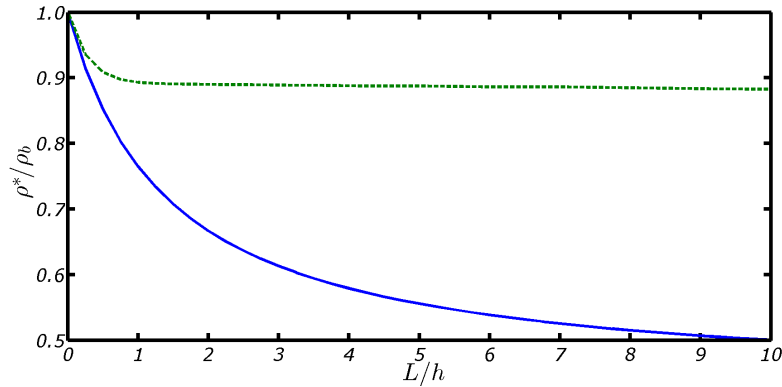


Figura 5.8: Densidad efectiva, obtenida a partir del modelo simplificado (línea continua) y el modelo general (línea discontinua), que caracteriza a un metamaterial constituido por cavidades de radio  $R_b = 0.33a$  en función de la altura de las cavidades  $L$  localizado en el interior de una guía de ondas de altura  $h = 1.67a$ . Donde  $a$  es el parámetro de red que caracteriza a la red hexagonal que presenta una fracción de llenado  $f = 40\%$ . La Longitud de onda del campo incidente es  $\lambda = 100a$

modelo simplificado se calculó la densidad efectiva que caracteriza un metamaterial localizado en una guía de ondas de altura  $h = 1.67a$  constituido por cavidades de radio  $R_a = 0.33a$  en función de longitudes de las cavidades que constituyen el metamaterial para una longitud de onda  $\lambda = 100a$ . En el cálculo de los parámetros efectivos se consideró una red hexagonal que presenta una fracción de llenado del 40%. El resultado de dicho estudio se muestra en la figura 5.8 en donde se compara la densidad efectiva obtenida mediante el modelo simplificado (línea continua) y la densidad efectiva obtenida incluyendo los modos evanescentes (línea discontinua). Nótese que el modelo simplificado sólo es válido para valores pequeños de la longitud de la cavidad  $L < 0.5h$ . Este estudio demuestra que para las longitudes consideradas en la construcción del dispositivo acústico el modelo simplificado no es aplicable y por tanto el modelo teórico de dicho dispositivo debe incluir la influencia de los modos evanescentes.

Para una mejor comprensión de lo observado se realizó el cálculo de los parámetros efectivos con el nuevo modelo desarrollado. El cálculo de los parámetros efectivos se realizó siguiendo el proceso indicado en el capítu-

lo 4 a partir de la matriz  $T_q$  que caracteriza las propiedades dispersivas de la red de cavidades.

Para el cálculo de los parámetros efectivos se consideró el caso de la lente acústica, es decir, un metamaterial formado por cavidades de radio  $R_b = 1cm$  y longitud  $L = 9cm$  que se encuentran localizadas en una guía de ondas de altura  $h = 5cm$ . La red que forma el metamaterial es una red hexagonal cuyo parámetro de red es  $a = 3cm$  obteniendo una fracción de llenado  $f = 40\%$ . Los resultados de estos cálculos se muestran en la figura 5.9; en la figura 5.9a se representa la densidad efectiva del metamaterial en función de la frecuencia mientras que en la figura 5.9b se representa el módulo de compresibilidad en función de la frecuencia.

Se puede ver que la densidad efectiva es menor que la del medio que lo rodea en casi todo el rango de frecuencias salvo cuando nos acercamos al límite de homogenización que corresponde a  $\nu_h \approx c_b/4a = 2858Hz$ .

No obstante, el comportamiento interesante del sistema a estudiar se ve reflejado en el módulo de compresibilidad. Se puede ver que presenta un comportamiento resonante en ciertos intervalos de frecuencia, teniendo por tanto dos regiones en frecuencia donde el módulo de compresibilidad efectiva se hace negativo. Debido a la definición de la velocidad efectiva  $c^*(\nu) = \sqrt{B^*(\nu)/\rho^*(\nu)}$  las regiones donde el módulo de compresibilidad es negativo el sonido no puede pasar a través del metamaterial. Dicho comportamiento resonante será objeto de estudio en el siguiente capítulo 6.

Finalmente para poder entender el comportamiento de la lente acústica observado en las simulaciones se procedió a obtener el valor del índice de refracción que presenta dicho metamaterial en función de la frecuencia  $n^*(\nu)$ . Dicho comportamiento se representa en la figura 5.10, donde se puede observar como el valor del índice de refracción presenta dos regiones en frecuencia donde su valor es nulo. En esas regiones de frecuencia el índice de refracción es imaginario puro, ya que corresponden a las regiones donde únicamente el módulo de compresibilidad es negativo.

Si nos centramos en el intervalo frecuencial de interés de la lente acústica que corresponde a las frecuencias  $[2580 - 2655]Hz$  se puede ver que el índice de refracción experimenta grandes variaciones en función de la frecuencia. Estas grandes variaciones son debidas a que nos encontramos cerca de la segunda resonancia del módulo de compresibilidad dando por tanto valores

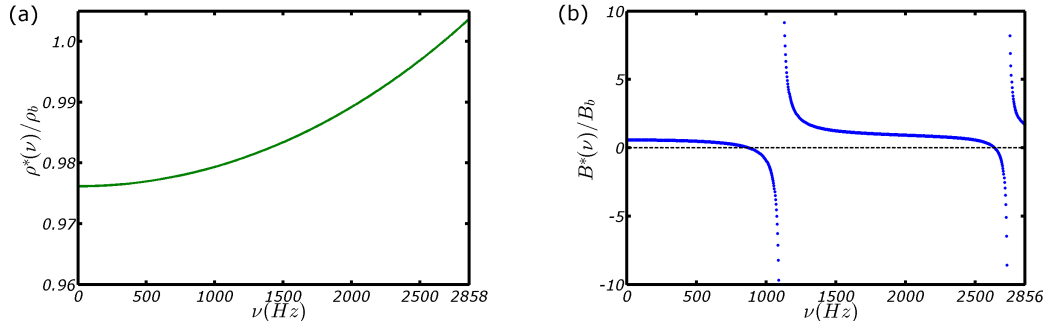


Figura 5.9: (a) Densidad de masa efectiva en función de la frecuencia. (b) Módulo de compresibilidad efectivo en función de la frecuencia. Ambas figuras corresponden al caso de un metamaterial formado por cavidades de radio  $R_b = 0.01\text{cm}$  y de longitud  $L = 9\text{cm}$  localizadas en una guía de onda de altura  $h = 5\text{cm}$ . El parámetro de red del metamaterial  $a = 3\text{cm}$  dando una fracción de llenado  $f = 40\%$ .

del índice de refracción que varían entre  $n^*(\nu) \in [1.8 - 6]$  en un rango estrecho en frecuencia. Este hecho demuestra la alta dependencia en frecuencia tanto de la posición del punto focal como la concentración del campo acústico que se observa en la lente acústica.

En la figura 5.11 se muestran cuatro mapas de presión con los que se puede resumir el comportamiento de la lente acústica que predice el modelo teórico.

La amplitud del campo de presión se representa en código de colores (azul el mínimo y rojo el máximo). El rango de amplitud es el mismo en los cuatro mapas de presión.

Se puede observar que conforme aumenta la frecuencia el punto focal de la lente se localiza en una región espacial más estrecha, mejorando así su definición. Obteniendo su mejor definición para la frecuencia  $\nu = 2640\text{Hz}$  que corresponde a la frecuencia donde el índice de refracción obtiene su valor máximo  $n^* = 6.49$ . A partir de esa frecuencia el foco desaparece debido a que el módulo de compresibilidad se hace negativo, no permitiéndose en esa región de frecuencia la propagación del sonido a través de la lente.

Nótese que el comportamiento en frecuencia de la lente observado en estas figuras es el mismo que el observado en las figuras 5.4 y 5.5. Por tanto

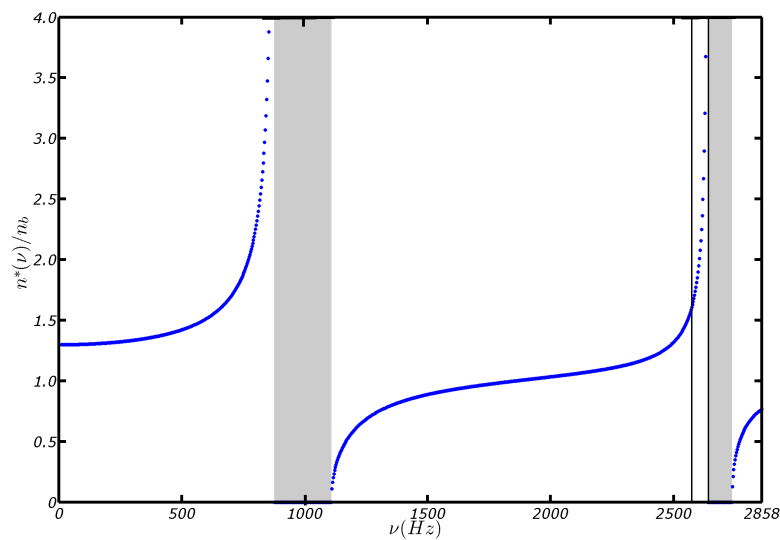


Figura 5.10: Índice de refracción en función de la frecuencia de un metamaterial formado por cavidades de radio  $R_b = 1\text{cm}$  y de longitud  $L = 9\text{cm}$  que se encuentran localizadas en el interior de una guía de ondas de altura  $h = 5\text{cm}$ . La red que forma el metamaterial corresponde a una red hexagonal cuyo parámetro de red es  $a = 3\text{cm}$  con una fracción de llenado  $f = 40\%$ , obtenida bajo esas condiciones. Las zonas sombreadas corresponden a las regiones en frecuencia donde el índice de refracción es puramente imaginario. El rectángulo de la figura corresponde a la región de frecuencias de trabajo.

podemos decir que el modelo teórico general explica adecuadamente el comportamiento de la lente acústica en función de la frecuencia. El modelo teórico predice los dos comportamientos observados en las simulaciones basadas en la dispersión múltiple y en el experimento numérico, ya que dependiendo de la región en frecuencias el dispositivo acústico presenta un índice de refracción permitiendo actuar al dispositivo acústico como colimador del campo acústico o como lente acústica.

Como la refracción del campo acústico es debida principalmente al comportamiento en frecuencia que presenta el módulo de compresibilidad en la zona próxima a la resonancia, el rango frecuencial en el que el dispositivo actúa como lente es muy pequeño.

Para finalizar esta sección cabe señalar que existe un desplazamiento en frecuencia  $\Delta\nu/\nu = 0.5\%$  entre el modelo teórico general y las simulaciones basadas en elementos finitos. Es posible que dicho desplazamiento frecuencial se pueda minimizar añadiendo mayor número de elementos de mallado en la simulación. Sin embargo, el hecho de ser una simulación *3D* conlleva aumentar de manera significativa el tiempo de cálculo de cada simulación. Aunque existe ese pequeño desplazamiento frecuencial, el modelo teórico y las simulaciones predicen el mismo comportamiento para el dispositivo acústico.

## 5.5. Acoplamiento de las propiedades dispersivas al espacio libre

Para finalizar este capítulo expondremos un breve estudio preliminar que demuestra que las propiedades dispersivas de un metamaterial confinado en un guía de ondas pueden acoplarse al espacio libre.

En este caso se demuestra experimentalmente que la focalización del sonido de una lente acústica formada por cavidades confinadas en una guía de ondas también se produce en el espacio libre.

Para ello construimos el montaje experimental representado en la figura 5.12. La lente acústica se construyó a partir de dos placas de aluminio de  $12\text{mm}$  de espesor. La red de cavidades, de parámetro de red  $a = 4\text{mm}$ , se ha realizado mediante brocas de  $3\text{mm}$  de diámetro que perforan completamente

## 5.5 Acoplamiento de las propiedades dispersivas al espacio libre

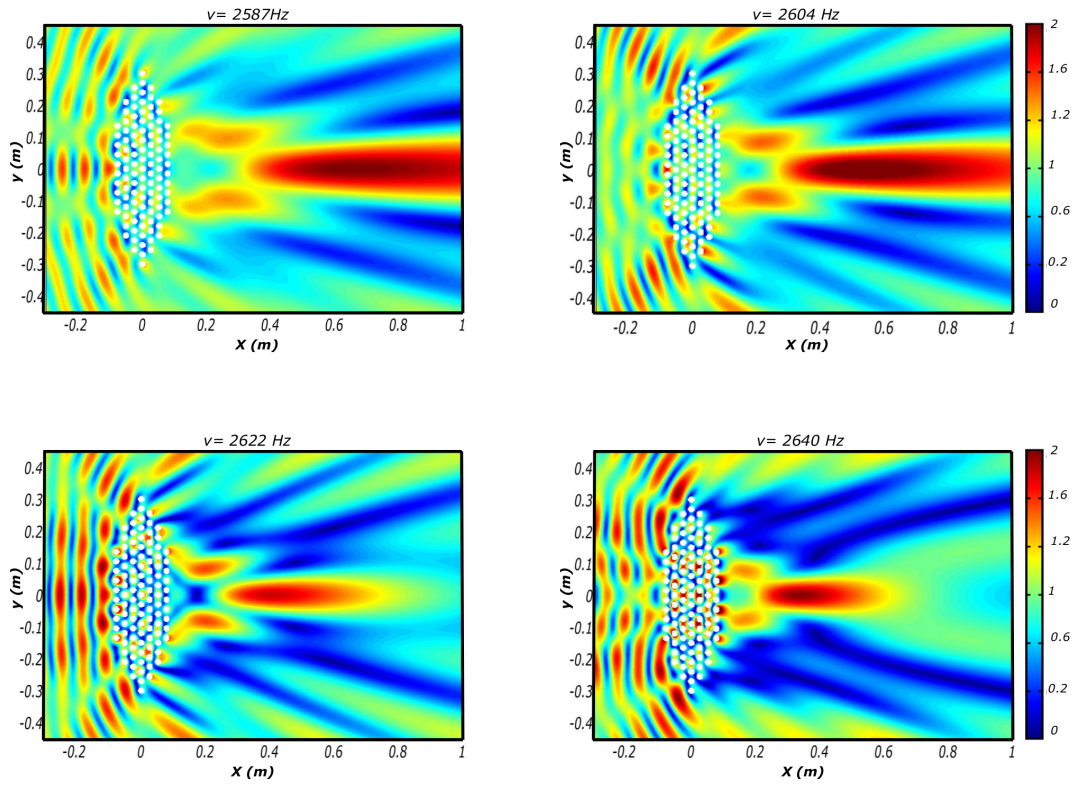


Figura 5.11: Mapas de la amplitud del campo de presiones obtenidos a partir de la teoría de la dispersión múltiple para el caso de un metamaterial con forma lenticular formado por cavidades de radio  $R_b = 1\text{cm}$  y longitud  $L = 9\text{cm}$  localizadas en el interior de una guía de ondas de altura  $h = 5\text{cm}$  para las frecuencias  $\nu = 2587, 2604, 2622, 2640\text{Hz}$ .



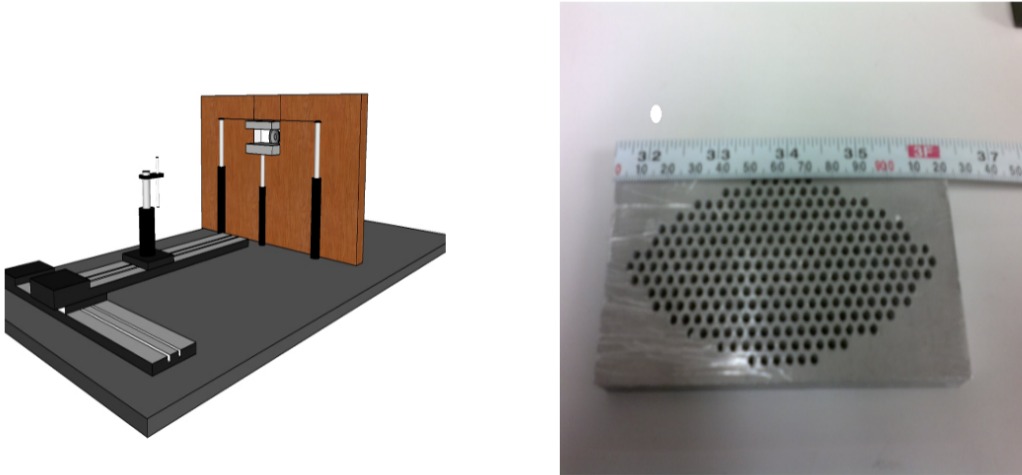


Figura 5.12: En la figura de la izquierda se muestra una representación artística del montaje experimental empleado en la realización del experimento. La figura de la derecha muestra la placa de aluminio de dimensiones  $60\text{mm} \times 120\text{mm} \times 12\text{mm}$  donde se han perforado cavidades de radio  $R_b = 15\text{mm}$  y longitud  $L = 12\text{mm}$  distribuidas mediante una red hexagonal que presenta un parámetro de red de  $a = 4\text{mm}$

una de las placas que forma la lente acústica. La lente se sustenta mediante tres columnas, que permiten regular la posición y la altura de la misma. En el montaje experimental se ha incluido una pared de madera con el objetivo de evitar la difracción del sonido por el borde de la lente, garantizando de esta manera que el sonido registrado por el micrófono sólo pasa a través de la muestra.

La excitación acústica se realiza mediante un altavoz situado a  $10\text{cm}$  del centro de la lente operando en un rango de frecuencias de  $17\text{kHz}$  a  $21\text{kHz}$ . El campo acústico es registrado a través de un micrófono modelo *B&K* – 4958 que se desplaza por la zona de medida por dos desplazadores lineales de Thorlabs. La señal registrada por el micrófono es digitalizada mediante una tarjeta NI PXI-5142. El procesamiento de datos así como el movimiento de los desplazadores y la generación de la señal de excitación son gestionados a través de un ordenador ejecutando un programa implementado en la plataforma LabView.

## 5.5 Acoplamiento de las propiedades dispersivas al espacio libre

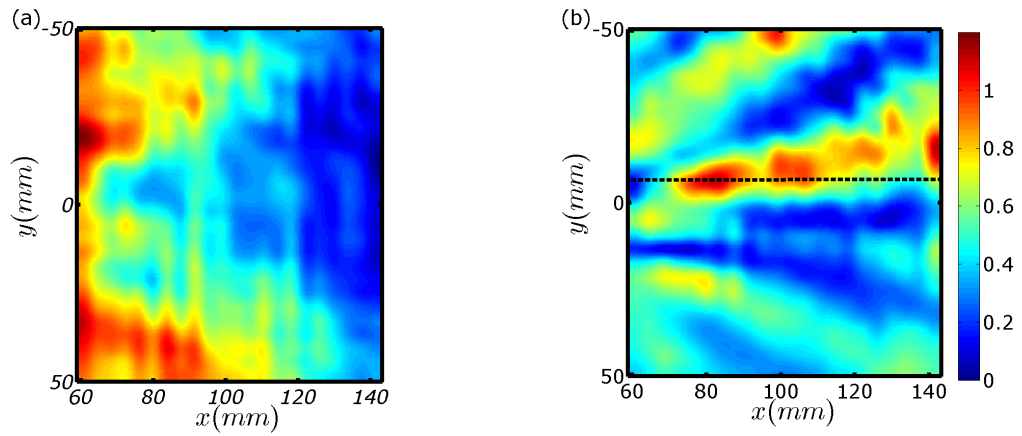


Figura 5.13: (a) Medida en el exterior de la guía de ondas del campo de presión transmitido correspondiente a la medida de vacío. (b) Medida en el exterior de la guía de ondas del campo de presión transmitido para una lente formada por cavidades de radio  $R_b = 15mm$  y de longitud  $L = 12mm$  para una altura de la guía de ondas  $h = 5mm$ . Se puede observar la focalización del sonido en una región del espacio. Ambas figuras corresponden a una frecuencia  $\nu = 20kHz$ .

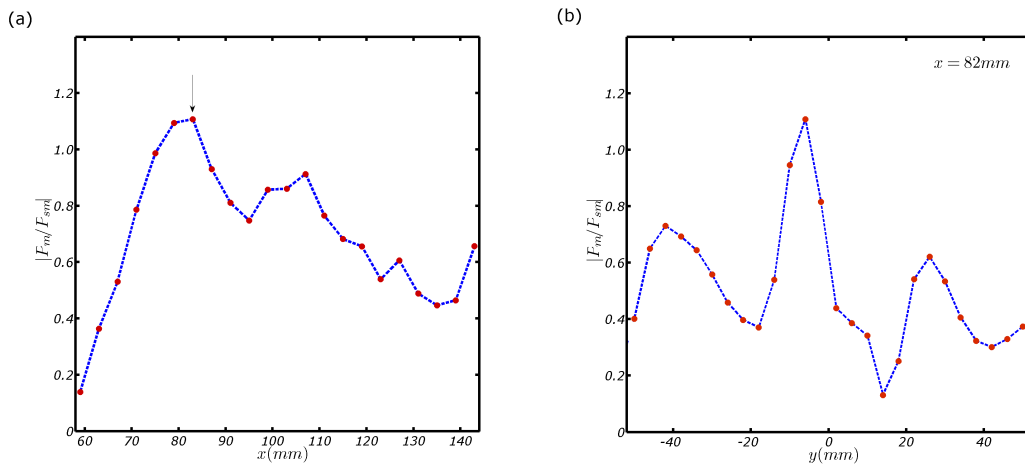


Figura 5.14: (a) Perfil de la medida del campo de presiones transmitido en el punto focal en la dirección vertical respecto a la orientación de la lente. (b) Perfil de la medida del campo de presiones transmitido en el punto focal en la dirección horizontal respecto a la orientación de la lente. Ambas figuras corresponden al caso de una lente formada por cavidades de radio  $R_b = 15\text{mm}$  y de longitud  $L = 12\text{mm}$  para una altura de la guía de ondas  $h = 5\text{mm}$  y para una frecuencia  $\nu = 20\text{kHz}$ .

## 5.5 Acoplamiento de las propiedades dispersivas al espacio libre 87

El proceso de obtención de las medidas experimentales se comenzó realizando una medida en vacío. Dicha medida consiste en colocar una muestra con dos placas sin cavidades. Seguidamente se coloca y se mide la muestra perforada. De esta manera las condiciones de medida son las mismas en ambos casos, cambiando únicamente la muestra. Pudiendo así calcular las pérdidas de inserción del sistema mediante la siguiente expresión:

$$IL = \frac{P_m}{P_{sm}}, \quad (5.5.1)$$

donde  $P_m$  y  $P_{sm}$  corresponden al campo de presión para la muestra con cavidades y para la muestra sin cavidades, respectivamente.

Las medidas se realizaron para longitudes de onda  $\lambda > 4a$ , que en nuestro caso son para  $\lambda > 16mm$ , que corresponden a frecuencias  $\nu < 21kHz$ . Los resultados nos muestran que la lente focaliza el sonido fuera de la guía de ondas para un ancho de banda limitado, que corresponden a las frecuencias dentro del intervalo  $[19.9 - 20.6]kHz$ . A continuación en la figura 5.13 se puede observar el campo obtenido para una frecuencia de  $20kHz$ . La figura 5.13a nos muestra la amplitud del campo acústico obtenido en la medida de vacío, es decir, el campo sin la lente acústica. Se puede ver como el campo se concentra en la zona más cercana a la muestra (siendo el centro de la muestra el origen de coordenadas) disminuyendo su amplitud conforme nos alejamos de la muestra.

La figura 5.13b nos muestra la amplitud del campo acústico obtenido tras realizar el cálculo de la pérdida de inserción. Nótese que existe una región en el espacio donde se produce el fenómeno de focalización debido a la presencia de la lente. Este fenómeno es debido al carácter refractivo de la lente y no por difracción de la muestra ya que la focalización no se observa en la medida de vacío (ver Fig.5.13a). Cabe concluir que los patrones de difracción observados son debidos a la naturaleza tridimensional del dispositivo, ya que el campo acústico ha sido medido fuera de la guía y no dentro de ella.

Las asimetrías observadas en el mapa de presión pueden ser debidas a que las placas paralelas que forman la lente no se encuentren perfectamente paralelas entre sí teniendo, por tanto, zonas donde la distancia entre las placas sea mayor o menor.

En la figura 5.14 representamos los perfiles del campo acústico en torno al punto focal que se encuentra localizado en  $(x, y) = (80, 0)$ . La figura 5.14a

corresponde al perfil en la dirección  $\hat{x}$ ; en esta figura se puede observar que conforme nos desplazamos en la dirección vertical respecto a la orientación de la lente el campo acústico va aumentando en amplitud hasta alcanzar un valor máximo, que corresponde al punto focal de la lente. Si seguimos alejándonos de la lente la amplitud comienza a decaer como es de esperar. La figura 5.14b corresponde al perfil en la dirección  $\hat{y}$  tomando  $x = 80mm$ , en esta figura se observa un comportamiento análogo al descrito en la figura 5.14a pero desplazándonos en la dirección horizontal respecto a la orientación de la lente. Se puede ver que el campo de presión es máximo en la zona central de la lente acústica, como es de esperar en dispositivos de este tipo.

Finalmente cabe decir que mediante este estudio preliminar se ha demostrado experimentalmente que las propiedades refractivas de una lente acústica no se quedan confinadas dentro de la guía de ondas, sino que se acoplan al espacio libre. Este experimento abre una posible línea de investigación en la que se obtenga un modelo teórico que permita comprender como se produce el mecanismo que permite el acoplamiento de las propiedades dispersivas de un metamaterial confinado en una guía de ondas al espacio libre

## 5.6. Resumen

En resumen, se ha demostrado que una distribución de cavidades localizadas en el interior de una guía de ondas se puede utilizarse para diseñar dispositivos acústicos refractivos, debido a que una cavidad simple puede ser modelada como un fluido que presenta una densidad menor que la del medio que lo rodea. Se ha analizado teóricamente un metamaterial basado en cavidades localizadas en el interior de una guía de ondas, estableciéndose los límites del primer modelo simplificado siendo únicamente válido para valores pequeños de longitud  $L < 0.5h$ . A partir de los resultados obtenidos mediante simulaciones basadas en elementos finitos y experimentalmente se ha demostrado la necesidad de incluir la contribución de los modos evanescentes que se forman en la interfaz definida entre el medio dispersivo y el medio no dispersivo para la obtención de un modelo general que explique el comportamiento frecuencial del dispositivo acústico.

Finalmente, y mediante un estudio preliminar se ha observado que las propiedades de focalización bidimensionales de la lente se mantienen cuando

el dispositivo se acopla al espacio libre, mostrando que las propiedades del dispositivo no están restringidas a la guía de ondas.

Cabe señalar que mediante el análisis teórico realizado en este capítulo se abren dos vías de investigación. La primera vía, en vista del comportamiento en frecuencia del módulo de compresibilidad, el diseño de metamateriales que presenten uno o ambos parámetros efectivos negativos. La segunda vía, en vista del resultado obtenido en el estudio preliminar, el desarrollo de un modelo teórico que nos permita comprender los mecanismos que hacen posible el acoplamiento de las propiedades refractivas al espacio libre.



## Capítulo 6

# Metamaterial acústico con módulo de compresibilidad negativo

En este capítulo se propone un nuevo tipo de metamaterial acústico que presenta un comportamiento negativo en módulo de compresibilidad efectivo. Esta propiedad ha sido estudiada previamente usando estructuras basadas en resonadores de Helmholtz [FXA<sup>+</sup>06, ZSC<sup>+</sup>08, CLX10, FR11] o mediante agujeros abiertos [LPY<sup>+</sup>10] en el interior de una guía de ondas unidimensional ( $1D$ ), donde el conjunto de agujeros radiaban como una fuente monopolar efectiva.

Este capítulo describe la realización física de un metafluido quasi-bidimensional ( $2D$ ) con módulo de compresibilidad negativo. El metafluido consiste en una red hexagonal de cavidades acústicas en una guía  $2D$ . Por otra parte la realización de la caracterización experimental del módulo de compresibilidad negativo se realiza en un entorno bidimensional (guía  $2D$ ) usando una red  $2D$  de unidades individuales. Los trabajos anteriormente citados emplean distribuciones de resonadores de Helmholtz en un entorno quasi- $1D$ . En la estructura propuesta el comportamiento negativo del módulo de compresibilidad aparece como consecuencia de la interacción de los modos, localizados en la cavidad, con las ondas acústicas que se propagan dentro de la guía de ondas. Se demuestra que la estructura introducida en este capítulo, al contrario que las estructuras anteriormente citadas, no presenta pérdidas y es



fácilmente sintonizable.

Este capítulo se organiza de la siguiente manera: en la sección 6.1 se comenzará definiendo el metafluido y se realizará un análisis teórico a partir del cual se obtendrán y se analizarán las estructuras de bandas que presenta la estructura. En la sección 6.2 se expone la caracterización experimental de una estructura finita (se mide la transmitancia y la reflectancia) pudiendo extraer los parámetros efectivos que caracterizan esta distribución, comparándose los resultados obtenidos con simulaciones basadas en elementos finitos. En la sección 6.3 se caracteriza experimentalmente el fenómeno “skin depth” y se contrasta con un modelo analítico que depende de los parámetros del metafluido. Finalmente, en la sección 6.4 se exponen las conclusiones del estudio realizado.

## 6.1. Metafluido quasi-bidimensional: Estructura de bandas acústica

Supongamos un sistema como el mostrado en la figura 6.1, formado por una distribución periódica de cavidades, que presentan el mismo radio  $R_b$  y la misma profundidad  $L$ , perforadas en una de las superficies sólidas que forman la guía de ondas de altura  $h$ . La posición de la cavidad  $\alpha$  dentro de la guía de ondas viene dada por  $\mathbf{R}_n = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2$ , donde los vectores  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  son los vectores primitivos de la red de Bravais y que para el caso de la red hexagonal definida en la figura 6.1 toman los siguientes valores

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= a \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} \right), \\ \mathbf{a}_2 &= a \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} \right), \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

donde  $a$  es el parámetro de red.

Conviene recordar que las ondas sonoras que se propagan en el interior de una guía de ondas ( $2D$ ) formada por paredes rígidas de altura  $h$ , presentan frecuencias propias  $\omega_n = 2\pi \times \nu_n$  que dependen de la altura [Mun]

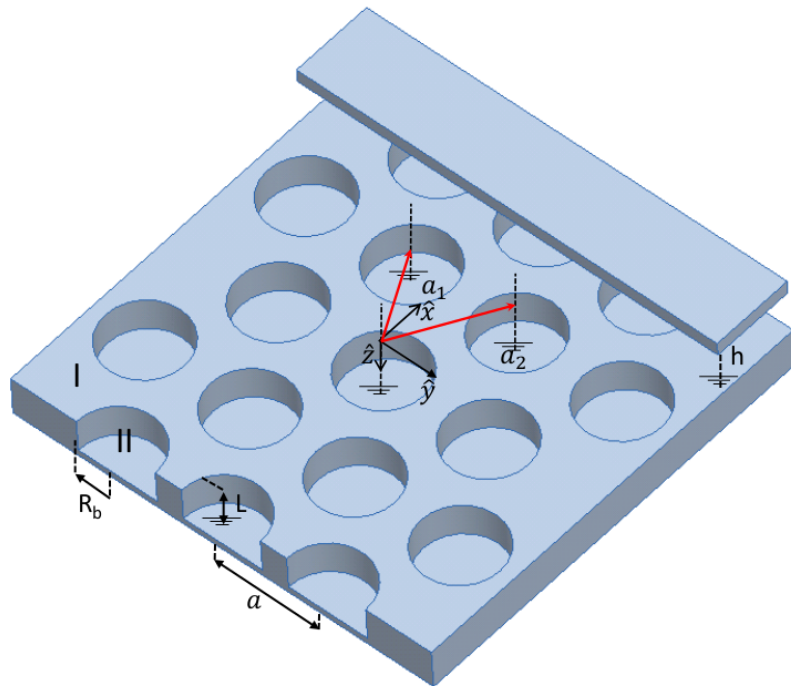


Figura 6.1: Esquema para la obtención de las estructuras de bandas de sistemas periódicos constituidos por una red hexagonal (cuyo parámetro de red es  $a$ ) de cavidades (de altura  $L$  y radio  $R_b$ ) localizadas en una guía de ondas de altura  $h$ .

$$\nu_n = \frac{c}{2\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}, \quad (6.1.2)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido en el aire y  $n$  es un número entero,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Por lo tanto el número de onda en el plano XY viene dado por la siguiente relación

$$k_x^2 + k_y^2 \equiv k_{\parallel,n}^2 = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}, \quad (6.1.3)$$

donde  $k_0 = \omega_0/c$ . Cualquier modo puede propagarse sin atenuación si

$$k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 > 0. \quad (6.1.4)$$

Una vez recordado ésto se abordará el problema estudiando cómo cambia la relación de dispersión (6.1.2) dentro de la guía de ondas cuando en el interior de ésta se encuentra una red hexagonal de cavidades perforadas en su superficie inferior. La solución se ha obtenido mediante el método de adaptación de modos (“mode matching technique”) como se explicará a continuación.

Para la obtención de las estructuras de bandas se ha dividido el problema en dos regiones (ver figura 6.1). La región I corresponde a  $z > 0$  y la región II corresponde a  $z < 0$ . El campo de presiones en la región I,  $P^I$ , se obtiene mediante una combinación de modos de Bloch que satisfacen las condiciones de contorno en la superficie inferior y superior de la guía de ondas. Considerando que las superficies son paredes rígidas, la componente normal de la velocidad de las partículas,  $\frac{\partial P^I}{\partial z}$ , es cero en  $z = 0$  (superficie inferior) y en  $z = h$  (superficie superior). La expresión que se obtiene para el campo de presiones en la región I es por tanto

$$P^I(\mathbf{K}, \mathbf{r}, z; \omega) = \sum_{\mathbf{G}} A_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \cos(k_z(z-h)), \quad (6.1.5)$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y)$  define un punto arbitrario en el espacio  $2D$  y  $k_z^2 = k_0^2 - |\mathbf{K} + \mathbf{G}|$ . Los vectores del espacio recíproco son  $\mathbf{G} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2$ , con

$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})$  y  $\mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$ . El vector  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\omega)$  define la estructura de bandas. Las funciones  $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$  son funciones ortogonales en la superficie  $S_d$  de la celda unidad que verifican

$$\int \int_{S_d} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}} dS_d = S_d \delta_{\mathbf{G}\mathbf{G}'}. \quad (6.1.6)$$

Dentro de las cavidades el campo de presiones se puede escribir de la siguiente manera

$$P^{II}(r, \theta, z; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q J_q(k_r r) e^{iq\theta} \left[ C e^{ik_z z} + D e^{-ik_z z} \right]. \quad (6.1.7)$$

El campo de presiones dentro de las cavidades de radio  $R_b$  y de longitud  $L$  ha de verificar las siguientes condiciones de contorno

$$\left. \frac{\partial P^{II}}{\partial z} \right|_{z=-L} = 0, \quad (6.1.8)$$

$$\left. \frac{\partial P^{II}}{\partial r} \right|_{r=R_b} = 0. \quad (6.1.9)$$

Sustituyendo (6.1.7) en las condiciones de contorno (6.1.8) y (6.1.9) se obtiene la forma funcional que describe el campo de presiones dentro de las cavidades

$$P^{II}(r, \theta, z; \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_q J_q(\alpha'_{qm} \frac{r}{R_b}) e^{iq\theta} \cos(k_{zqm}(z + L)), \quad (6.1.10)$$

donde  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares en el plano XY, los  $\alpha'_{qm}$  corresponden al  $n$ -ésimo cero de la derivada de la función de Bessel  $J_q(\cdot)$  para  $m = 1, 2, 3, \dots$ , y

$$k_{zqm} = \sqrt{k_0^2 - \left( \frac{\alpha'_{qm}}{R_b} \right)^2}. \quad (6.1.11)$$

Las funciones  $J_q(\alpha'_{qm} \frac{r}{R_b}) e^{iq\theta}$  son funciones ortogonales en la superficie  $S_c$  formada por la cavidad

$$\int \int_{S_c} J_q(k'_{rqn} \frac{r}{R_b}) e^{iq\theta} J_q(k'_{rsm} \frac{r}{R_b}) e^{is\theta} dS_c = S_c \delta_{mn} \delta_{qs}. \quad (6.1.12)$$

Considerar modos diferentes al modo fundamental implicaría oscilaciones del campo a lo largo de la coordenada radial, estas oscilaciones deberían acoplarse con la oscilación del campo en  $z = 0$ . Pero en  $z = 0$  el campo también se describe mediante ondas de Bloch y debido a que las longitudes de onda consideradas en este trabajo son mayores que cuatro veces el radio de la cavidad,  $\lambda \gg 4R_b$ , la excitación de modos diferentes al modo fundamental para las frecuencias consideradas serán muy débiles, por lo que se puede considerar únicamente el modo fundamental. Con esta notación el modo fundamental corresponde al  $k_{01} = 0$  donde  $J_0(0) = 1$  y  $J_q(0) = 0$  para  $q \neq 0$ , y por tanto  $k_{z01} = k_{0,1}$  pudiendo escribir la ecuación (6.1.10) de la siguiente manera

$$P^{II}(r, \theta, z; \omega) \approx B \cos(k_0(z + L)). \quad (6.1.13)$$

Siguiendo el proceso explicado en la sección 3.3 la proyecciones de las funciones ortogonales de cada región

$$\int \int_{S_c} P^I(\mathbf{K}, \mathbf{r}, z; \omega)|_{z=0} J_q(k'_{rsm} \frac{r}{R_b}) e^{-is\theta} dS_c = \quad (6.1.14)$$

$$\int \int_{S_c} P^{II}(r, \theta, z; \omega)|_{z=0} J_q(k'_{rsm} \frac{r}{R_b}) e^{-is\theta} dS_c,$$

$$\int \int_{S_d} \frac{\partial P^I(\mathbf{K}, \mathbf{r}, z; \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{G}' \cdot \mathbf{r}} dS_d = \quad (6.1.15)$$

$$\int \int_{S_d} \frac{\partial P^{II}(r, \theta, z; \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{G}' \cdot \mathbf{r}} dS_c.$$

La condición de contorno (6.1.14) correspondiente a la continuidad del campo de presiones, se simplifica si tenemos en cuenta que los modos de orden superior al modo fundamental son despreciables, proyectándose únicamente  $J_0(0)e^{i0} = 1$ . Teniendo esto en cuenta y sustituyendo las ecuaciones (6.1.5) y (6.1.13) en la ecuación (6.1.14) obtenemos

$$\sum_{\mathbf{G}} A_{\mathbf{G}} \cos(k_z h) \int \int_{S_c} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{G}' \cdot \mathbf{r}} dS_c = \pi R_b^2 B \cos(k_0 L), \quad (6.1.16)$$

donde la integral de superficie es

$$\int \int_{S_c} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} dS_c = 2\pi \frac{R_b}{|\mathbf{G} + \mathbf{K}|} J_1(|\mathbf{G} + \mathbf{K}|R_b). \quad (6.1.17)$$

Por otro lado, sustituyendo (6.1.5) y (6.1.13) en la condición de contorno del campo de velocidades a través de la celda unidad (6.1.15) y teniendo en cuenta (6.1.12) obtenemos

$$k_z A_{\mathbf{G}'} \sin(k_z h) S_d = -k_0 B \sin(k_0 L) \int \int_{S_c} e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}} dS_c. \quad (6.1.18)$$

Resolviendo la anterior ecuación para  $A_{\mathbf{G}'}$  se tiene

$$A_{\mathbf{G}'} = -2f \frac{k_0 \sin k_0 L}{k_z \sin k_z h} \frac{J_1(|\mathbf{G}' + \mathbf{K}|R_b)}{|\mathbf{G}' + \mathbf{K}|R_b}, \quad (6.1.19)$$

donde  $f = S_c/S_d$  es la fracción de llenado de la red hexagonal.

Finalmente insertando la ecuación (6.1.19) en la ecuación (6.1.16) llegamos a la ecuación que describe la estructura de bandas

$$\cot\left(\frac{\omega L}{c}\right) = f\chi(\omega; \mathbf{K}), \quad (6.1.20)$$

siendo

$$\chi(\omega; \mathbf{K}) = -4 \sum_{\mathbf{G}} \frac{k_0 \cos(k_z h)}{k_z \sin(k_z h)} \left( \frac{J_1(|\mathbf{G} + \mathbf{K}|R_b)}{|\mathbf{G} + \mathbf{K}|R_b} \right)^2. \quad (6.1.21)$$

En la figura 6.2 se muestran las relaciones de dispersión de las ondas que se propagan en la guía de ondas para los valores:  $h/a = 1.667$  (a),  $h/a = 0.5$  (b) y  $h/a = 0.1$  (c). El radio y la longitud de las cavidades se mantienen fijas y corresponden a  $R_b = a/3$  y  $L = 3a$ , respectivamente.

Llegados a este punto es conveniente recordar que las frecuencia lineal de las resonancias localizadas en una cavidad cilíndrica de radio  $R_b$  y de longitud  $L$  [Mun] son

$$\nu_{c,m} = \frac{\omega_{c,m}a}{2\pi c} = \frac{2m+1}{4\left(\frac{L}{a} + 0.8\frac{R_b}{a}\right)} \quad (6.1.22)$$

donde  $m$  es un número entero  $(0, 1, 2, 3, \dots)$ . Para las cavidades empleadas en este estudio, las frecuencias correspondientes son  $\nu_{c,1} = 0.076$ ,  $\nu_{c,1} = 0.229$  y  $\nu_{c,1} = 0.383$ , que corresponden a las bandas planas mostradas en la figura 6.2b y 6.2c. Las líneas gruesas continuas representan la bandas, que están representadas a lo largo de las direcciones de simetría de la red en la zona de Brillouin de la red hexagonal (véase el recuadro), donde  $k_J = 2\pi/a(2/3, 0)$ . La línea continua roja y la punteada representan la relación de dispersión de los modos  $\bar{\nu}_{g,0}$  y  $\bar{\nu}_{g,1}$ , respectivamente, de una guía (2D) vacía (ver (6.1.2))

$$\nu_{g,0} = \frac{\nu_0 a}{2\pi} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (6.1.23)$$

$$\nu_{g,1} = \frac{\nu_1 a}{2\pi} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2}.$$

Nótese en la figura 6.2 que la primera banda del modo excitado en el punto  $\Gamma$  tiene como valor  $\nu_{g,1} = 0.30$  para  $h = 1.667a$ , siendo la línea de puntos representada en la figura 6.2 la relación completa de dispersión. Sin embargo, las bandas del primer modo excitado correspondientes a los valores  $h = 0.5a$  y  $h = 0.1a$  tienen valores en frecuencia superiores a los mostrados en la figura 6.2b y figura 6.2c, respectivamente. Se observa que la relación de dispersión de los modos de la guía de ondas con cavidades son el resultado de la interacción entre los modos localizados dentro de las cavidades (banda plana) con los modos que se propagan en la guía de ondas vacía.

La figura 6.2a muestra que la interacción entre el primer modo de las cavidades  $\nu_{c,1}$  con el modo fundamental  $\nu_{g,0}$  de la guía de ondas produce un “band gap” frecuencial completa en la región  $[0.078 - 0.095]$ . Este “band gap” aparece en frecuencias mucho más bajas que el “gap” de Bragg situada en  $\bar{\nu}_{Bragg} \approx k_J a / 2\pi = 0.667$  (no se muestra en la Fig.6.2). La existencia del “band gap” a bajas frecuencias en la relación de dispersión para cristales fonónicos está típicamente asociado con la existencia de modos de baja frecuencia en los elementos de dispersión individuales y han sido descritos en la

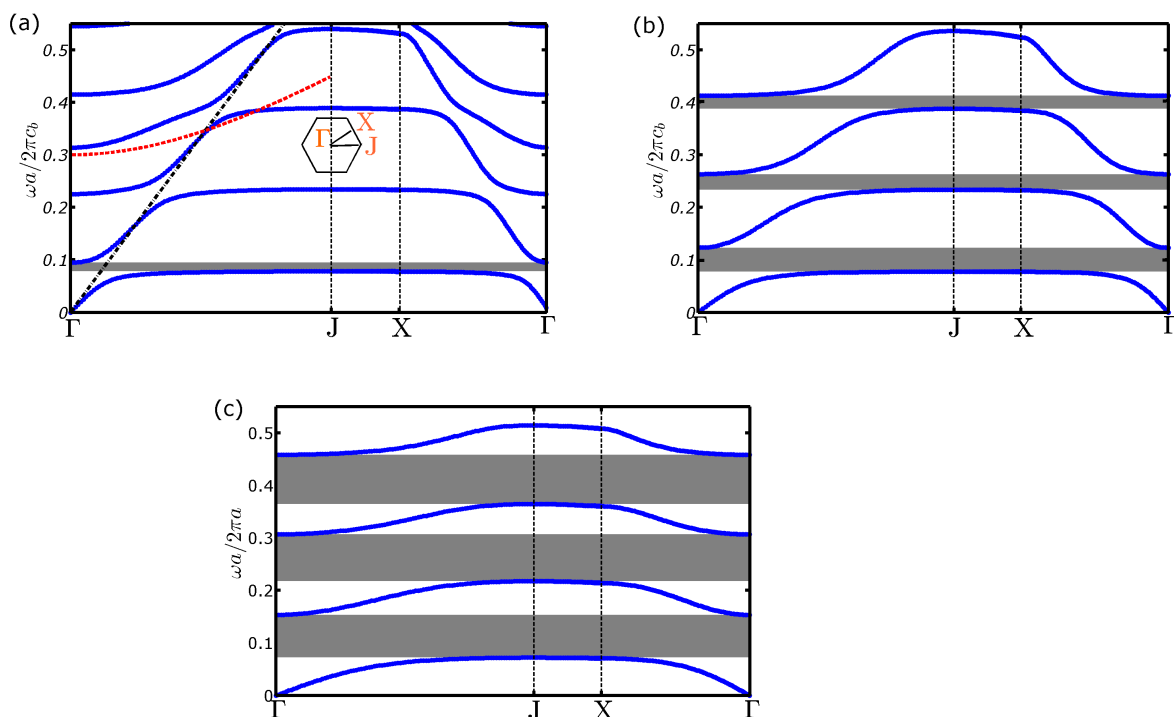


Figura 6.2: Estructura de bandas de un sistema formado por una distribución hexagonal de cavidades cilíndricas y de parámetro de red  $a$  (ver Fig.6.1). Las bandas mostradas corresponden a tres valores diferentes de la altura de la guía de ondas: (a)  $h = 1.667a$ , (b)  $h = 0.5a$  y (c)  $h = 0.1a$ . El radio y altura de las cavidades son  $R_b = 0.3a$  y  $L = 3a$ , respectivamente. La línea discontinua (punteada) representa la relación de dispersión del modo fundamental  $n = 0$  (el primer modo excitado,  $n = 1$ ) que se propaga en una guía de ondas sin la distribución de cavidades. El recuadro muestra la zona de Brillouin para una red hexagonal y sus puntos de mayor simetría.



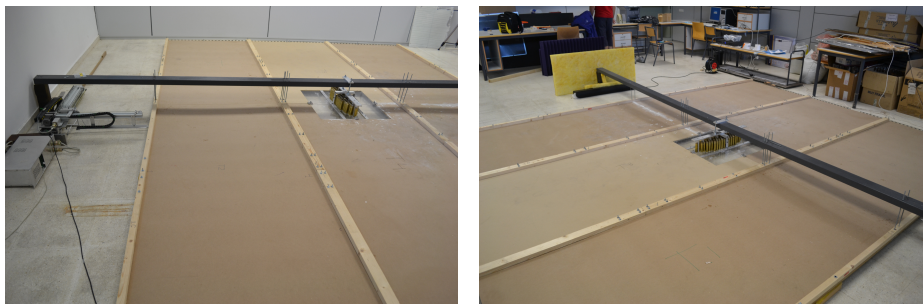


Figura 6.3: Montaje experimental. Guía de ondas bidimensional formada por placas de madera que forma la superficie superior de la misma, en el centro se coloca la muestra.

literatura [ZXY<sup>+</sup>11, FXA<sup>+</sup>06, SXG08, ZSC<sup>+</sup>08], por ejemplo, el análisis que realizó Wang [ZSC<sup>+</sup>08] sobre la estructura de bandas en una guía de ondas estrecha unidimensional con una distribución de resonadores de Helmholtz conduce a conclusiones similares, es decir, la interacción entre los modos resonantes con las ondas propagantes producen “band gaps” alrededor de las frecuencias de resonancia. En nuestro caso los “band gaps” de bajas frecuencias están determinados por la resonancia de la cavidad que puede ser fácilmente modificada mediante los parámetros físicos  $R_b$  y  $L$ .

Las Fig.6.2b y Fig.6.2c muestran que estrechando la guía de ondas (es decir, decreciendo  $h$ ) se produce un ensanchamiento de la interacción entre los modos propagantes en la guía de ondas con los modos  $1D$  localizados en la cavidades. A partir de esas figuras se puede concluir que para  $h \rightarrow 0$  la relación de dispersión consistirá en una banda baja que comenzará desde cero en el punto  $\Gamma$  y que alcanzará el valor  $\nu_{c,1}$  dado por la ecuación (6.1.2). Para frecuencias superiores a  $\nu_{c,1}$ , se obtendrán un conjunto de bandas dispersivas que corresponderá a los valores discretos  $m = 3, 5, 7, \dots$  en la ecuación (6.1.2).

## 6.2. Realización experimental

Para la verificación experimental de los resultados expuestos en la sección anterior se ha construido una muestra que consiste en 7 filas de cilindros de bronce huecos con una longitud  $L = 9$  cm y un radio  $R_b = 1$  cm. Cada fila

contiene 15 cilindros a lo largo del eje  $\hat{y}$ . Los cilindros están sujetos a una placa de Plexiglass que tiene un área  $68 \text{ cm} \times 68 \text{ cm}$  donde se ha perforado una red hexagonal (que presenta un parámetro de red  $a = 3 \text{ cm}$ ). La muestra se sitúa en el centro de una guía de ondas acústica  $2D$  de dimensiones  $460 \text{ cm} \times 366 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ , la altura de la guía de ondas es  $h = 5 \text{ cm}$ . La superficie superior de la guía de ondas esta hecha de placas de madera y se utilizó el suelo de la habitación como superficie inferior. La temperatura dentro de la guía durante la medida tomaba valores  $23.7 \text{ }^\circ\text{C} \pm 1 \text{ }^\circ\text{C}$ , que dan a la velocidad del sonido un valor de  $345 \text{ m/s}$ , el cual se utilizó para la realización de simulaciones numéricas. Cabe señalar que no se esperan modos con variaciones a lo largo de la dirección vertical hasta frecuencias superiores al valor de corte  $\omega_{g,1} = 2\pi \times 3.45 \text{ Hz}$ , la cual corresponde a la condición de  $h = \frac{\lambda}{2}$ . El sonido que se propaga en el interior de la guía de ondas es excitado usando una columna de altavoces localizada frente a la guía de ondas. Los laterales de la guía son tapados usando  $5 \text{ cm}$  de espesor de fibra de vidrio para evitar reflexiones no deseadas. En la cara opuesta del altavoz hay un robot programable que mueve el micrófono con una resolución espacial de  $5 \text{ mm}$  a lo largo de la línea debajo de la muestra con el fin de poder medir el perfil de la presión a lo largo de la interfaz aire/metamaterial, que se discutirá en la sección 6.3.

La generación del sonido se realiza a través de una tarjeta NI PCI-6731; la salida analógica de este dispositivo va a un amplificador de potencia que lo conduce a un altavoz. Cabe señalar que algunas reflexiones tienen lugar entre el altavoz, la habitación y los espacios abiertos de la guía de ondas, debido a esto la señal se emite en un tiempo limitado y los datos son adquiridos hasta el tiempo de llegada de la primera reflexión no deseada, pudiendo decir de esta manera que las medidas son realizadas bajo condición libre de ecos. La señal excitada consta de una onda sinusoidal modulada por una envolvente Gaussiana. La frecuencia de la portadora es de  $2.5 \text{ Hz}$  y el espectro de la señal completa cubre un rango en frecuencia que abarca desde el valor de corte inferior del altavoz (alrededor de  $80 \text{ Hz}$ ) hasta los  $5 \text{ kHz}$ .

El sonido dispersado por la muestra es captado por tres micrófonos B&K 4958 Mic1, Mic2 y Mic3 cuya posición está fijada al porta-muestras, como muestra el esquema de la figura 6.4, con  $l_1 = 3 \text{ cm}$  y  $l_2 = 9 \text{ cm}$ . La recepción de datos se realizará a través de los micrófonos y son amplificados mediante

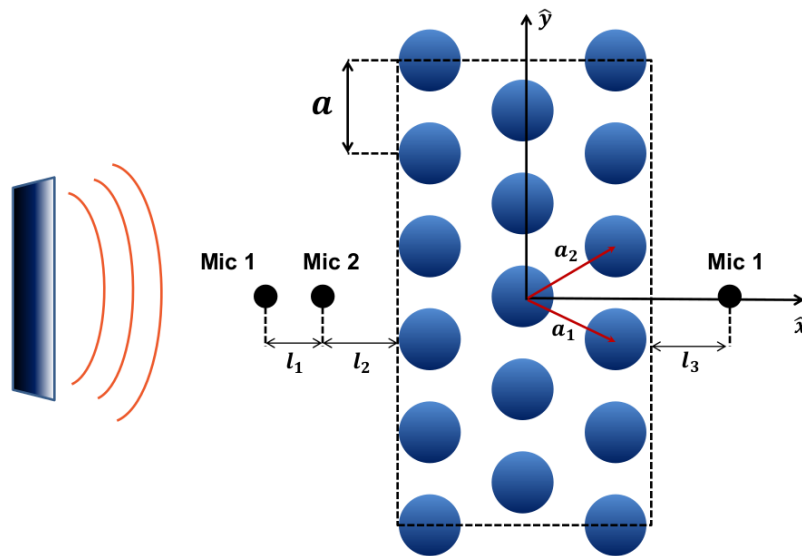


Figura 6.4: Esquema del montaje experimental empleado para la caracterización del metamaterial. Los círculos azules representan las cavidades;  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  son los vectores primitivos de la red hexagonal con parámetro de red  $a$ . Para la medida de la reflectancia y transmitancia se han usado tres micrófonos (Mic), dichas magnitudes son empleadas para la extracción de los parámetros que caracterizan al metamaterial.

un dispositivo B&K 2694-B. La señal resultante es entonces adquirida por un Picoscope 3224 digitalizer, el cual vuelca los datos a la computadora donde son almacenados y procesados. Durante la medida se emite un pulso que contiene todas las componentes en frecuencia que se obtienen a partir de los datos adquiridos a través de la FFT (“Fast Fourier Transform”). Con el fin de reducir el ruido aleatorio, se emiten varios pulsos promediándose las respuestas. Este proceso se realiza para cada uno de los micrófonos localizados en sus posiciones fijas de la figura 6.4 y también para cada posición del barrido espacial. Todo el proceso (generación del sonido, movimiento del robot, adquisición del sonido y procesado) es gestionado por un programa que fue desarrollado por el grupo de fenómenos ondulatorios.

### 6.2.1. Medida de la estructura de bandas

Las siete filas de la estructura bajo estudio son alineadas a lo largo de la dirección  $\Gamma J$  de la zona de Brillouin y su ancho total se toma como  $D = 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = 21.87$  cm, el cual ha sido calculado considerando que las superficies están localizadas a la mitad de la distancia de la capa de separación. Esta es la suposición tradicional cuando se trabaja con superficies cristalinas.

El ancho de la muestra es lo suficientemente grande para que se pueda obtener experimentalmente la relación de dispersión a partir de la fase del coeficiente de transmisión  $\varphi_t$  a través de la relación  $\varphi_t = k_s D + 2\pi l$ , donde  $l$  es un número entero y  $k_s$  el número de onda de la muestra que se quiere calcular. Los “band gap” de frecuencia se identifican en la relación de dispersión a través de las discontinuidades en  $\varphi_t$ . El parámetro  $l$  permite ajustar la banda teniendo en cuenta las discontinuidades de  $\varphi_t$ .

Los triángulos en la figura 6.5 representan los puntos experimentales medidos usando esta técnica. Nótese la gran concordancia entre la relación medida y la que predice el modelo teórico para las dos primeras bandas. Para la tercera banda la concordancia entre la teoría y los datos experimentales no es suficientemente buena, debido al hecho que la condición de homogenización  $\lambda \approx 4a$  no se cumple satisfactoriamente para esta tercera banda.

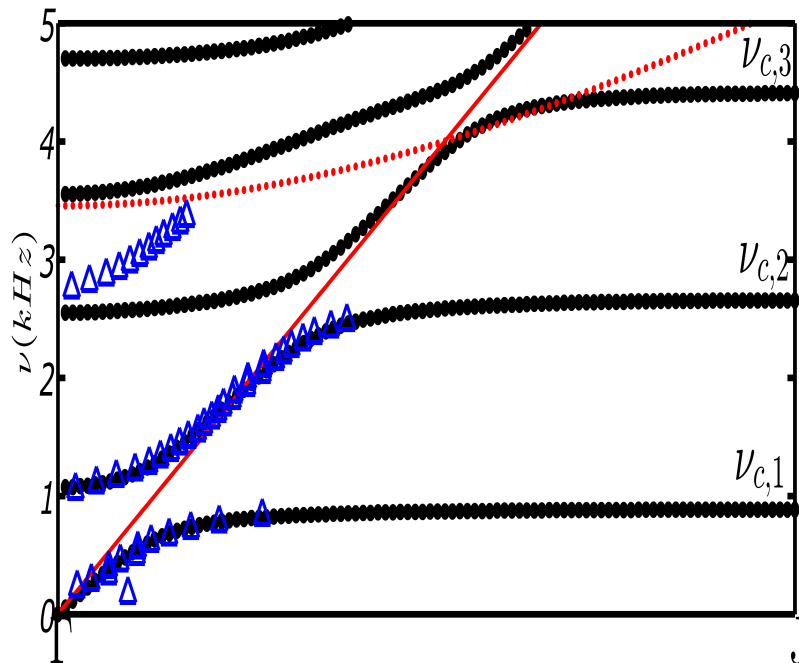


Figura 6.5: Estructura de bandas a lo largo de la dirección de alta simetría  $\Gamma J$  de la zona de Brillouin. Los símbolos representan la banda medida usando la técnica de la diferencia de fase. Las líneas negras son la relación de dispersión usando el método de adaptación de modos (“mode matching”). Esta estructura de bandas corresponde a la mostrada en la Fig.6.2a. La línea discontinua (punteada) define la relación de dispersión de modo 0(1) en una guía de ondas libre.

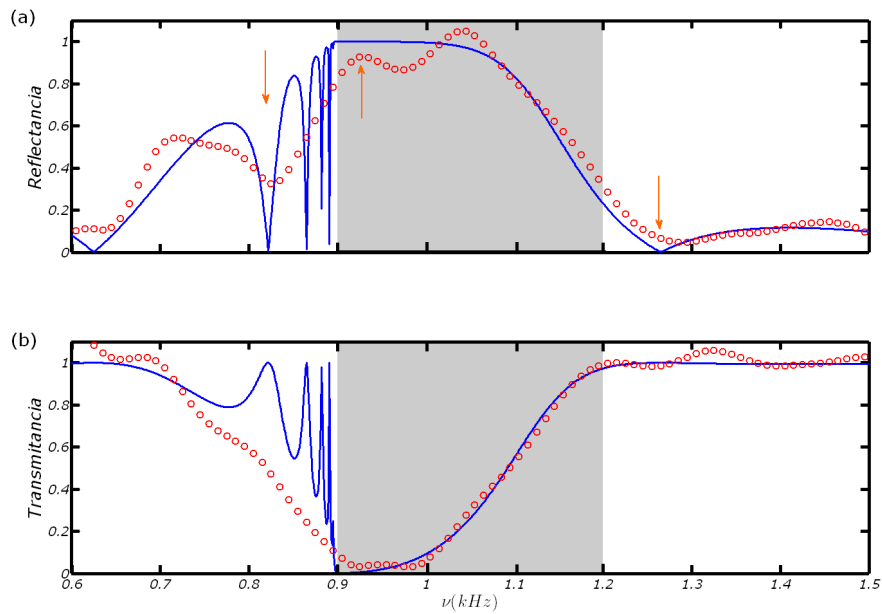


Figura 6.6: Reflectancia (a) y transmitancia (b) de una muestra que consiste en 7 filas de tubos huecos metálicos abiertos a una guía de ondas bi-dimensional con altura  $h = 5\text{cm}$ . Los tubos están distribuidos en una red hexagonal con parámetro de red  $a = 3\text{cm}$  y tienen una longitud  $L = 9\text{cm}$  y un radio  $R_b = 1\text{cm}$ . Los círculos en ambas gráficas corresponden a los datos experimentales, mientras que la líneas continuas representan las simulaciones numéricas basadas en elementos finitos.

### 6.2.2. Reflectancia y transmitancia espectral

Para bajas de frecuencias, como las usadas en este trabajo, el sonido se propaga con un frente de onda plano y el campo de presiones a lo largo del eje puede ser obtenido resolviendo la ecuación de ondas de propagación 1D

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\rho(x; \omega)} \frac{dP(x; \omega)}{dx} \right] + \frac{\omega^2}{B(x; \omega)} P(x; \omega) = 0, \quad (6.2.1)$$

donde los parámetros  $\rho(x; \omega)$  y  $B(x; \omega)$  son inhomogéneos y pueden depender de la frecuencia. Dentro de la guía de ondas, se distinguen dos regiones que se pueden asociar a un medio I y a un medio II, que corresponderán al aire dentro de la guía de ondas y al metamaterial, respectivamente. Para el medio I la ecuación (6.2.1) se reduce a

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d^2 P^I(x; \omega)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{B_0} P^I(x; \omega) = 0, \quad (6.2.2)$$

donde  $B_0 = 1.01 \times 10^5$  Pa y  $\rho_0 = 1.2041$  Kg/m<sup>3</sup> son el módulo de compresibilidad y densidad del aire, respectivamente. El coeficiente de reflexión  $r$  y el de transmisión  $t$  se obtiene rápidamente usando los datos adquiridos por los micrófonos Mic1 y Mic2 a través de la relación (ver apéndice D)

$$r(\omega) = \frac{P_2 e^{-ik_0 x_1} - P_1 e^{-ik_0 x_2}}{P_1 e^{-ik_0 x_2} - P_2 e^{-ik_0 x_1}}, \quad (6.2.3)$$

$$t(\omega) = \frac{P_3 e^{-ik_0 x_2} + r e^{ik_0 x_2}}{P_2 e^{-ik_0 x_3}} e^{ik_0 D}, \quad (6.2.4)$$

donde  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  son los valores complejos de la presión adquirida en las posiciones  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  por los micrófonos Mic1, Mic2 y Mic3, respectivamente.  $D$  representa el espesor de la muestra. Nótese que (6.2.3) no es válida cuando  $x_1 - x_2$  es igual a un múltiplo entero de media longitud de onda, estableciendo un límite superior de frecuencias en la medida. En nuestro caso la separación entre el Mic1 y el Mic2 es  $l_1 = 3$  cm, localizando por tanto ese límite para frecuencias  $\geq 5750$  Hz, la cual es mucho mayor que las frecuencias de interés.

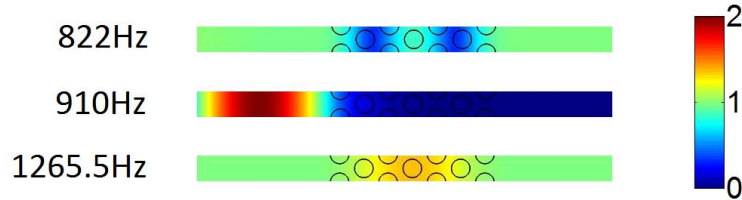


Figura 6.7: Mapa de presión tomado en el plano ecuatorial para la guía de ondas mostrada en Fig.6.1. Las frecuencias seleccionadas se indican con una flecha en la Fig.6.6.

Una vez obtenidos los coeficientes  $r$  y  $t$  se calcula la reflectancia  $R$  y la transmitancia  $T$  mediante la siguiente relación

$$R(\omega) = |r(\omega)|^2, \quad T(\omega) = |t(\omega)|^2. \quad (6.2.5)$$

Los símbolos en la figura 6.6a muestran el espectro de la reflectancia obtenida experimentalmente haciendo uso de la ecuación (6.2.3). La línea continua representa las soluciones basadas en elementos finitos simulando el montaje experimental. Nótese que el espectro muestra características de interés, como las caídas estrechas asociadas a los modos resonantes Fabry-Perot, estas caídas estrechas no se observan experimentalmente debido a que aunque nuestro sistema no presenta casi pérdidas como se demostrará en la sección 6.2.3, éstas nos impiden detectar experimentalmente esas caídas. Los perfiles experimentales muestran las principales características del espectro predichas por las simulaciones de elementos finitos, a pesar que se ha empleado un modelo  $1D$  para su medida.

El espectro  $T(\omega)$  está representado en la Fig.6.6b junto a su correspondiente simulación numérica. Como en el caso del espectro  $R(\omega)$  se encuentra una gran concordancia entre la transmitancia obtenida experimentalmente y la obtenida a través de las simulaciones numéricas basadas en elementos finitos. Para ser más exhaustivos en este estudio, se muestran los mapas de presión obtenidos a través de las simulaciones de elementos finitos en las figuras 6.7 y 6.8. Las frecuencias seleccionadas corresponden a las características espectrales observadas en el espectro de la reflectancia y que son indicadas



mediante flechas en la figura 6.6(a). La frecuencia más baja corresponde a la resonancia Fabry-Perot, la cual se caracteriza por una bajada (pico) en el espectro de la reflectancia (transmitancia). En el mapa  $2D$  de la figura 6.7 se puede observar claramente este comportamiento, donde la longitud de onda coincide perfectamente con la anchura de la muestra  $d$ . En la figura 6.8 se muestra una gran concentración de sonido localizado en el interior de las cavidades, siendo la intensidad sonora dependiente de la posición de la cavidad a lo largo del eje  $\hat{x}$ . Las mayores intensidades se localizan en la primera, media y última fila, las cuales corresponden al máximo de amplitud en el plano ecuatorial (ver figura 6.7). Para la frecuencia correspondiente a 930 Hz, que está situada dentro del “gap”, el correspondiente mapa de presión de la figura 6.7 muestra una reflexión cercana a la unidad, ya que el sonido solo penetra en la primera fila, como se puede ver en la figura 6.8 (b). Finalmente, para la frecuencia correspondiente a 1265 Hz, la figura 6.7 muestra una perfecta transmisión del sonido y la figura 6.8 (c) muestra que el sonido penetra en todas las cavidades, que tienen el mismo perfil de intensidad a lo largo del eje del cilindro.

### 6.2.3. Parámetros efectivos

Estamos interesados aquí en las propiedades de la estructura para frecuencias por debajo de la frecuencia umbral definida por el límite de homogenización. Este límite ha sido establecido experimentalmente para longitudes de onda  $\lambda \geq 4a$  para una red hexagonal de cilindros rígidos [THCSD06]. En este experimento se toma este límite como válido, el cual toma como valor  $\omega_l = 2\pi \times 2.87$  kHz para la estructura bajo estudio, ya que su validez ha sido demostrada en muchas estructuras equivalentes que consisten en distribuciones de elementos de dispersión del sonido en aire. Sin embargo la estructura artificial estudiada actúa como un metamaterial acústico con unos parámetros efectivos dados, cuyos valores se obtendrán a continuación, para cualquier frecuencia por debajo de 2.87 kHz.

La dependencia en frecuencia de los parámetros efectivos del metamaterial  $\rho^*(\omega)$  y  $B^*(\omega)$  es extraída a partir de la reflectancia  $R(\omega)$  y la transmitancia  $T(\omega)$  y el procedimiento de su extracción está explicado en el apéndice D. La densidad de masa efectiva no depende de la frecuencia y su valor es prácti-

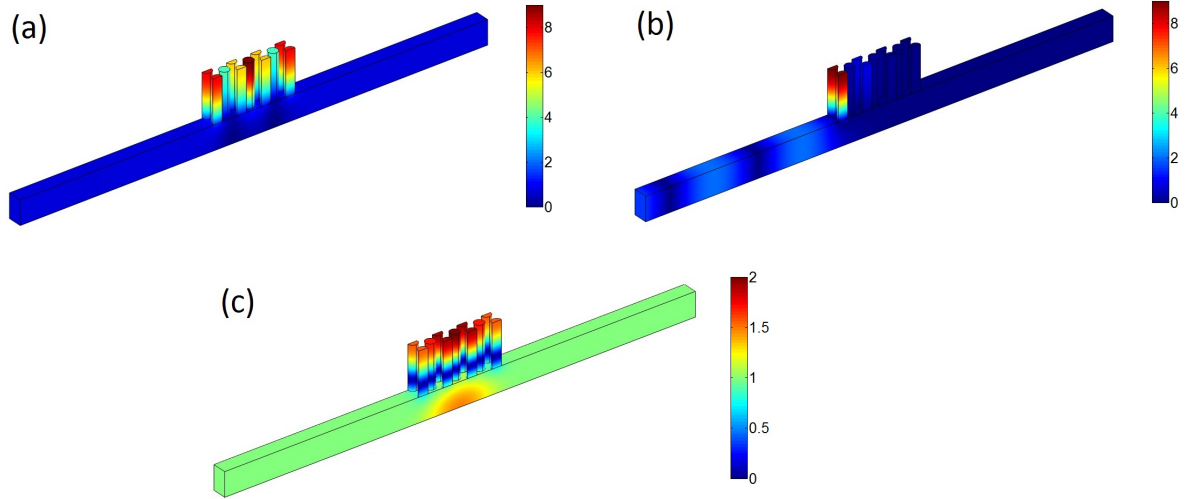


Figura 6.8: Mapas de presión dentro de la estructura artificial bajo estudio . Fueron obtenidas a partir de simulaciones basadas en elementos finitos para tres valores diferentes de frecuencias, las cuales están señaladas por flechas en la Fig.6.6. El panel (a) corresponde  $\nu = 822$  Hz, (b)  $\nu = 910$  Hz y (c)  $\nu = 1265.5$  Hz.

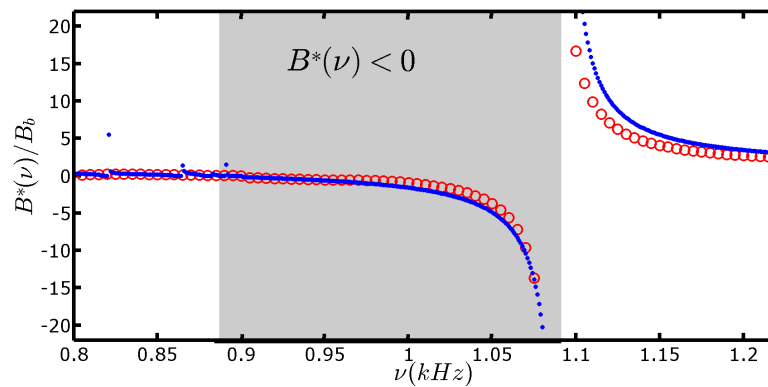


Figura 6.9: Dependencia en frecuencia del módulo de compresibilidad efectivo del metamaterial. Los símbolos representan el módulo de compresibilidad extraídos a partir del espectro de la reflectancia y de la transmitancia, mientras que la línea continua define el parámetro extraído de las simulación numérica basada en elementos finitos.

camente igual al del aire  $\rho_0$ . El módulo de compresibilidad efectivo  $B^*(\omega)$ , normalizado al aire, se representa por símbolos en la figura 6.9, donde la región con sombra indica las frecuencias en las que el módulo de compresibilidad toma valores negativos. Los parámetros efectivos teóricos han sido extraídos a partir del espectro de reflectancia y transmitancia obtenidos a partir de las simulaciones numéricas y el método explicado en el apéndice D.

La figura 6.9 muestra la extracción teórica del módulo de compresibilidad efectivo (línea continua), y es comparada con los valores obtenidos experimentalmente (símbolos). Se puede observar que existe una gran concordancia entre la teoría y el experimento. Nótese que el módulo de compresibilidad es negativo en el marco de frecuencias que corresponde con el primer “gap”, definida por la región gris. La densidad de masa efectiva extraída es prácticamente constante con un valor  $\rho^* \approx 0.98\rho_0$ .

Se puede concluir que la estructura se comporta como un medio fluido efectivo que tiene como módulo de compresibilidad  $B^*(\omega)$  cuyo perfil es similar al que presenta la distribución de resonadores de Helmholtz y puede ser expresado de la siguiente manera

$$(B^*)^{-1} = B_0^{-1} \left[ 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \right], \quad (6.2.6)$$

donde  $F$  es un factor que define el ancho del band gap, determinado por frecuencias  $\omega_0 < \omega < \omega_0\sqrt{1+F}$ ;  $\omega_0$  es la frecuencia angular de resonancia y  $\Gamma$  es la pérdida por disipación en las cavidades resonantes. El perfil mostrado en la figura 6.9 se ajusta perfectamente a este modelo usando como valores  $\omega_0 = 2\pi \times 874$  Hz, que corresponde a la frecuencia del modo  $m = 1$  de los tubos cerrados y  $F = 0.556$ , que determina el ancho del “gap”. El término de pérdidas es el único parámetro que se ajusta y su valor ( $\Gamma = 2\pi \times 3.4$  Hz) es mucho más pequeño que los valores obtenidos ( $\Gamma = 2\pi \times 400$  Hz) para metamateriales basados en distribuciones de resonadores de Helmholtz [FXA<sup>+</sup>06]. Las pérdidas en la estructura propuesta son también más pequeñas que las medidas con las distribuciones de agujeros abiertos en sus dos extremos en una guía unidimensional, estructura que fue propuesta como metamaterial con pocas pérdidas. Es importante indicar que la estructura propuesta tiene pocas pérdidas en comparación con las anteriormente citadas debido a diferentes razones. Por una parte, en comparación con los resonadores de

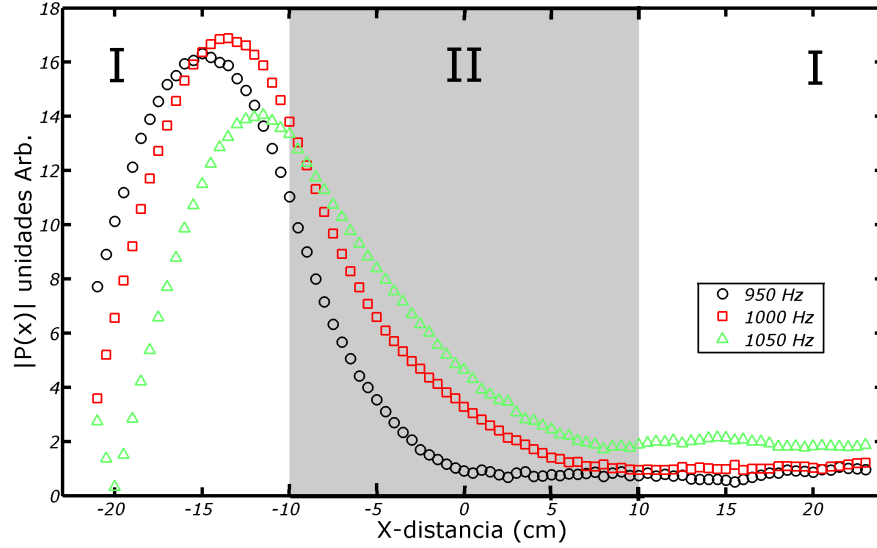


Figura 6.10: Amplitud de presión medida a lo largo del eje  $\hat{x}$  de la muestra constituida por siete filas de cavidades cilíndricas. Se observa el decaimiento exponencial dentro del metamaterial (región sombreada).

Helmholtz [FXA<sup>+</sup>06, ZSC<sup>+</sup>08, CLX10, FR11], la estructura propuesta no presenta canales estrechos donde tienen lugar procesos de disipación debidos a la fricción del aire con las paredes. Por otra parte, con respecto a la estructura que consiste en cavidades abiertas por sus extremos [LPY<sup>+</sup>10], la estructura propuesta no presenta pérdidas por radiación debido al hecho de que las cavidades usadas están cerradas por un extremo de las mismas.

### 6.3. Efecto pelicular en la interfaz aire-metamaterial

Supongamos una interfaz entre dos medios semi infinitos donde el medio I es el aire (con un densidad de masa y módulo de compresibilidad positivos) mientras que el medio II es el metamaterial bajo estudio con una densidad de masa positiva  $\rho^*$  y módulo de compresibilidad  $B^*$  negativo. La ecuación (6.2.1) particularizada al metamaterial se convierte

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{d^2 P^{II}(x; \omega)}{dx^2} - \frac{\omega^2}{|B^*(\omega)|} P^{II}(x; \omega) = 0, \quad (6.3.1)$$

cuya solución es

$$P^{II}(x; \omega) = Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}, \quad (6.3.2)$$

$\delta$  es rápidamente obtenida por la sustitución de la ecuación (6.3.2) en la ecuación (6.3.1)

$$\delta^2 = \frac{1}{\omega^2} \frac{|B^*(\omega)|}{\rho^*}. \quad (6.3.3)$$

En nuestro caso el coeficiente de la ecuación 6.3.2 debe cumplir  $B = 0$  para obtener una solución con significado físico. El término  $\delta$  nos indica el valor del efecto pelicular del metamaterial. Este valor es un indicativo de la profundidad de penetración de la onda en el metamaterial de manera que cuanto mayor es el valor  $\delta$  más capacidad tiene de penetrar la onda en el metamaterial. La ecuación de onda para la propagación del sonido en aire (medio I) viene dada por (6.2.2) y su solución es

$$P^I(x; \omega) = e^{ik_0x} + re^{-ik_0x}, \quad (6.3.4)$$

donde  $r$  es el coeficiente de reflexión, que se determina aplicando la condición de continuidad del campo de presiones y de la componente normal de velocidades en la interfaz aire/metamaterial,

$$r = -\frac{Z_0 - iZ^*(\omega)}{Z_0 + iZ^*(\omega)}, \quad (6.3.5)$$

donde  $Z_0 = \sqrt{B_0\rho_0}$  y  $Z^*(\omega) = \sqrt{|B^*(\omega)|\rho^*(\omega)}$  son las impedancias características del aire y del metamaterial, respectivamente. La expresión para  $r$  indica que  $|r|^2 = 1$  (reflexión total) para cualquier frecuencia. El espectro de la reflectancia mostrado en la figura 6.6, el cual se obtuvo para una muestra finita de metamaterial, muestra que esta conclusión es verdadera para una región grande en frecuencias dentro del “gap”. Se usará este resultado para

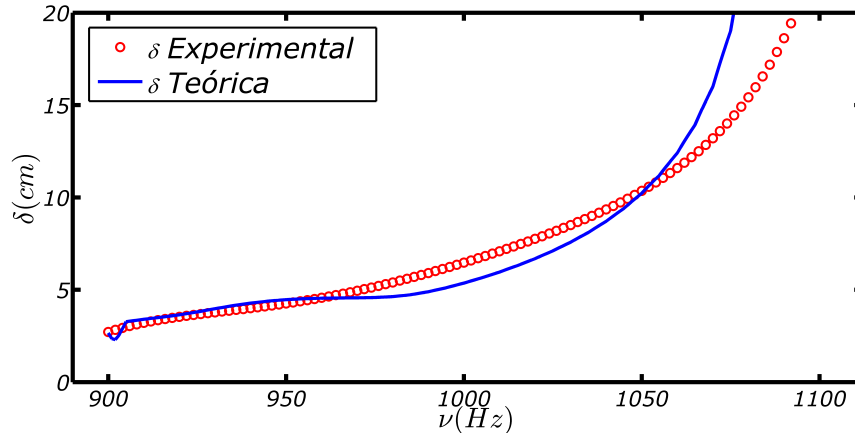


Figura 6.11: Efecto pelicular  $\delta$  como función de la frecuencia. Los símbolos corresponden a los valores obtenidos ajustando los perfiles de amplitud, mostrados en la Fig. 6.10 a una función exponencial decreciente mostrada en la Ec(6.3.2). La línea continua son los valores previstos por el modelo (6.3.3), en el cual se han empleado los parámetros extraídos del experimento

analizar la reflexión en la interfaz usando la fórmula obtenida a partir de un medio semi-infinito.

Experimentalmente, se empleó un micrófono para escanear la guía de ondas  $2D$  a lo largo del eje  $\hat{x}$  dentro del metamaterial. El micrófono empleado corresponde al modelo *B&K* 4598 que tiene un  $1/4$  de pulgada de diámetro, para las frecuencias consideradas el diámetro es aproximadamente  $\lambda/10$ , considerando por tanto que la alteración producida por el micrófono al campo de presiones medido es despreciable. La figura 6.10 representa la amplitud de la presión como función de la posición para tres valores diferentes de frecuencias que pertenecen al “band gap”. Se observa que el campo que incide en el metamaterial es una función oscilante, mientras que dentro del metamaterial es una función exponencialmente decreciente.

El parámetro del efecto pelicular  $\delta$  se ha obtenido experimentalmente mediante el ajuste de los perfiles mostrados en la figura 6.10 con una función exponencial decreciente. El resultado se representa en la figura 6.11 mediante símbolos y son comparados con los resultados obtenidos usando la fórmula (6.3.3) (línea continua). Se puede concluir que  $\delta$  crece monotonamente en la región del gap. Para frecuencias cercanas a la resonancia del módulo de

compresibilidad efectivo  $B^*$ ,  $\delta$  incrementa con la frecuencia siguiendo un perfil exponencial.

## 6.4. Resumen

En resumen, se ha introducido un metamaterial acústico quasi-bidimensional que presenta intrínsecamente pocas pérdidas y con módulo de compresibilidad negativo. La estructura artificial consiste en una distribución periódica  $2D$  de cavidades cilíndricas a una guía de ondas  $2D$ . Las medidas y el modelo teórico desarrollado muestran que la región donde la estructura presenta un módulo de compresibilidad negativo desarrolla un “band gap” frecuencial cuyo ancho puede ser modificado con los parámetros geométricos de las cavidades (radio y longitud). Se ha realizado una completa caracterización del metamaterial incluyendo el efecto “skin depth”.

Por otra parte, la amplitud extraordinaria de sonido obtenido dentro de las cavidades puede ser usada para diseñar dispositivos de alta absorción mediante el relleno de las cavidades de material disipativo.

Un metamaterial que presenta ambos parámetros negativos puede lograrse fácilmente añadiendo a esta estructura membranas como las descritas en [PPL<sup>+</sup>11].

Este capítulo esta basado en:

1. – Victor Manuel García-Chocano, Rogelio Graciá-Salgado, Daniel Torrent, Francisco Cervera y José Sánchez-Dehesa. *Quasi-Two-dimensional acoustic with negative bulk modulus*. Phys. Review. B. Vol. **85**, art. nro. 184102, pp.1 – 8, (2012)

# Capítulo 7

## Metamaterial acústico doblemente negativo

En el capítulo anterior se mostró que una distribución de cavidades presenta un comportamiento resonante en el módulo de compresibilidad efectivo que caracteriza a esa distribución en el límite de homogenización. Dicho comportamiento se ha obtenido con estructuras basadas en resonadores de Helmholtz y cavidades abiertas en el extremo de las mismas [FXA<sup>+</sup>06, LPCS09]. Para poder obtener un metamaterial que presente un comportamiento doblemente negativo en sus parámetros efectivos se ha de proponer un mecanismo que permita que la densidad efectiva sea negativa. Cuando la propagación del sonido es en aire, la fabricación de metamateriales que presenten una densidad efectiva negativa no es fácil de obtener, ya que involucran estructuras más complejas, incluyendo la mayoría de ellas membranas [YMY<sup>+</sup>08, YZH10, PPL<sup>+</sup>11]. Este hecho dificulta la obtención de estructuras que presenten comportamiento doblemente negativos a pesar de que las condiciones para realizarlos están relativamente bien establecidas ya que no se puede garantizar que la tensión y el coeficiente elástico de cada una de las membranas que forman el metamaterial sean idénticos.

Se ha demostrado que un medio efectivo que presente densidad negativa se puede obtener a través de una distribución de elementos dispersores que presenten una densidad y una velocidad efectiva mas baja que el medio que lo rodea [TSD11b].

Estas propiedades son fáciles de obtener cuando el medio que rodea a los



elementos dispersores es agua, ya que hay sólidos con  $\rho < \rho_{agua}$  y  $c < c_{agua}$ . Sin embargo en aire, donde todos los materiales son considerados acústicamente rígidos, estas propiedades son difíciles de obtener. En este capítulo se demostrará que se pueden obtener metamateriales que presenten una densidad negativa o un comportamiento doblemente negativo en aire mediante materiales rígidos. Los metamateriales propuestos implican el uso de metafluidos que presenten una velocidad más pequeña que el aire y una densidad mayor que el aire. Estas propiedades no son usuales en los fluidos, pero se pueden obtener mediante una distribución de varillas rígidas para longitudes de ondas mucho mayores que su separación [THCSD06, TSD06, TSD07a].

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la sección 7.1 se realizó un análisis del elemento de dispersión objeto de estudio en el límite de bajas frecuencias. En la sección 7.2 se resuelve el problema de una distribución de cavidades obteniéndose los parámetros efectivos de la estructura en función de las variables geométricas que definen una cavidad, permitiendo de esta manera encontrar las dimensiones donde ambos parámetros, módulo de compresibilidad efectivo y densidad efectiva, son negativos simultáneamente. Finalmente, los resultados son resumidos en la sección 7.3.

## 7.1. Parámetros efectivos del elemento de dispersión: $B_a(\omega)$ y $\rho_a(\omega)$

La estructura bajo estudio se encuentra representada en la figura 7.1a. Esta estructura consiste en una distribución de elementos dispersivos cilíndricos localizados en el interior de una guía de ondas, de altura  $h$ , donde los elementos de dispersión penetran una longitud  $L$  dentro de la superficie superior de la guía de ondas. La figura 7.1b describe la estructura interna que presenta cada elemento de la distribución, que consiste en una cavidad cilíndrica, de radio  $R_b$  y altura  $L$ , perforada en una de las superficies que forman la guía de ondas  $2D$ . En el interior de la cavidad se encuentra un cilindro rígido, de radio  $R_a < R_b$ , rodeado de un meta-fluido que presenta una densidad  $\rho_s > \rho_b$  y una velocidad  $c_s < c_b$ , donde  $c_b$  es la velocidad del sonido y  $\rho_b$  la densidad del sonido que corresponden al medio que rodea el elemento de dispersión (aire en este trabajo). Es interesante resaltar que este sistema presenta 6 parámetros

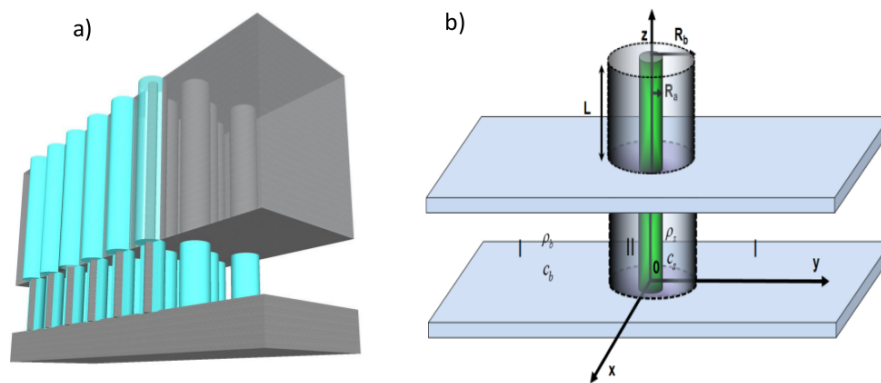


Figura 7.1: (a) Esquema de la estructura objeto de estudio. Esta estructura consiste en una distribución de dispersores cilíndricos localizados en el interior de una guía de ondas 2D. Nótese que éstos penetran la superficie superior de la guía de onda. (b) Estructura interna de un elemento de dispersión. Este elemento consiste en una cavidad, de altura  $L$  y radio  $R_b$ , perforada dentro de la guía de ondas de altura  $h$  (región I). Un cilindro rígido, de radio  $R_a$  y longitud  $h + L$ , está localizado en el interior de la cavidad y está rodeado por un meta-fluido (región II) que presenta una densidad efectiva  $\rho_s > \rho_b$  y una velocidad efectiva  $c_s < c_b$ , donde  $\rho_b$  y  $c_b$  son la densidad y la velocidad, respectivamente, del fluido en la región I.

que se pueden modificar con el fin de ajustar las propiedades acústicas de los elementos que forman la distribución:  $R_a, R_b, L, h, \rho_s, c_s$ .

La longitud de onda en el interior del elemento de dispersión es más pequeña que fuera, ya que  $c_s < c_b$ . Por tanto, aunque la longitud de onda puede ser mucho más grande que  $R_b$ , el campo de presiones dentro del elemento de dispersión puede tener un comportamiento oscilatorio, conduciendo a un conjunto de respuestas resonantes en el metamaterial. Si la cavidad representada en la figura 7.1a no existiera (es decir  $L = 0$ ) la densidad efectiva del elemento de dispersión es mayor que la densidad del medio que lo rodea. No obstante, esta densidad se puede hacer más pequeña usando la cavidad ( $L > 0$ ), como se explicará a continuación.

La posibilidad de diseñar densidad de masa más pequeña que el medio fluido que rodea a la estructura ha sido propuesta en [TSD11a, STSD11], donde se muestra que una cavidad que presenta una profundidad  $L$  dentro de una guía de ondas  $2D$  se comporta como un elemento de dispersión del sonido con una velocidad igual a la del sonido y densidad de masa  $\rho_c \simeq h/(h+L)\rho_b$ , siendo  $h$  la altura de la guía de ondas y  $L$  la profundidad de la cavidad. Por tanto, si la cavidad es rellena por un meta-fluido de densidad  $\rho_s$  y velocidad  $c_s$ , el sistema completo se comportará como un elemento de dispersión con una densidad dada por:

$$\rho_a \simeq \frac{h}{h+L}\rho_s. \quad (7.1.1)$$

Esta expresión nos indica, en primera aproximación, que conforme  $L$  aumenta se reduce la densidad efectiva del fluido obteniendo, de esta manera un elemento de dispersión del sonido en el que tanto la densidad efectiva como la velocidad efectiva son más pequeñas que la del fluido que lo rodea. Por lo tanto, esta estructura es idónea para que presente parámetros efectivos negativos.

El modelo de la densidad efectiva del elemento de dispersión propuesto es solamente cualitativo, ya que como se vio en el capítulo ?? es una buena aproximación para  $0 < L < 1$ . Esta predicción, por tanto, debe ser demostrada resolviendo el problema general, es decir, teniendo en cuenta la influencia de los modos evanescentes sobre los parámetros efectivos, como se mostrará a continuación.

En el marco de la teoría de dispersión múltiple la matriz-T es una mag-

nitudo compleja que presenta una dependencia con la frecuencia y que nos permite extraer, (ver capítulo 4), la dependencia en frecuencia del módulo de compresibilidad y densidad usando las siguientes relaciones

$$\frac{\rho_a(\omega)}{\rho_b} = \frac{\chi_1}{k_b R_b}, \quad (7.1.2)$$

$$\frac{B_a(\omega)}{B_b} = \frac{k_b^2 R_b^2}{2} \ln(k_b R_b) - \frac{1}{2} k_b R_b \chi_0,$$

donde  $\rho_b$  y  $B_b$  corresponden a la densidad y módulo de compresibilidad, respectivamente, del medio que rodea al elemento de dispersión y  $k_b$  corresponde al número de ondas fuera del elemento de dispersión. Las cantidades  $\chi_1$  y  $\chi_0$  son obtenidas utilizando la siguiente expresión

$$T_q = -\frac{\chi_q J'_q(kR_a) - J_q(kR_a)}{\chi_q H'_q(kR_a) - H_q(kR_a)}, \quad (7.1.3)$$

ya que las expresiones que se obtuvieron en el capítulo 4 secciones 4.3.1 y 4.3.2 no se pueden aplicar en este caso debido a que la parte real de la matriz  $T_q$  es una cantidad comparable a la parte imaginaria de la misma en el rango de frecuencias en el que se producen las resonancias.

El comportamiento en frecuencia de los parámetros que caracterizan al elemento de dispersión representado en la figura 7.1b se muestra en la figura 7.2. El cálculo de estos parámetros corresponden al caso en que  $h = L = R_b$ ,  $\rho_s = 4\rho_b$  y  $c_s = 0.3c_a$ . Se puede observar como los parámetros, en unidades normalizadas, presentan un comportamiento complejo en su respuesta en frecuencia, debido a que en el interior del elemento de dispersión el campo de presiones oscila y, consecuentemente, se produce un proceso resonante. En la figura 7.3a se representa el patrón del campo de presiones dispersado calculado en el plano ecuatorial de la guía de ondas para una frecuencia  $\nu = 0.06$  (en unidades reducidas), donde el módulo de compresibilidad es negativo. El campo presenta el patrón de una resonancia monopolar que es responsable del valor negativo del módulo de compresibilidad [LC04]. La figura 7.3b representa el patrón del campo dispersado para una frecuencia  $\nu = 0.12$  u.r, donde la densidad efectiva es negativa. En este caso el campo presenta un patrón que tiene la forma de resonancia dipolar, que explica el valor negativo de la densidad.

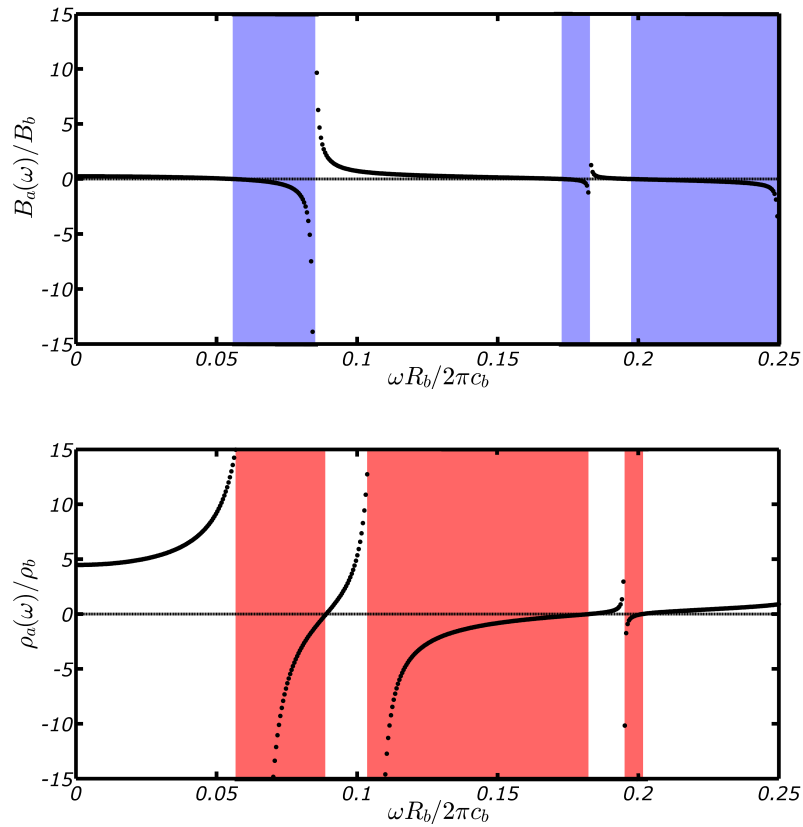


Figura 7.2: Dependencia en frecuencia (en unidades reducidas) del módulo de compresibilidad (arriba) y densidad de masa (abajo) del elemento de dispersión representado en la figura 7.1b para  $h = R_b$ ,  $L = h$ ,  $R_a = 0.5R_b$ ,  $\rho_s = 4\rho_a$  y  $c_s = 0.3c_b$ . Las zonas sombreadas definen las frecuencias en las que los parámetros son negativos.

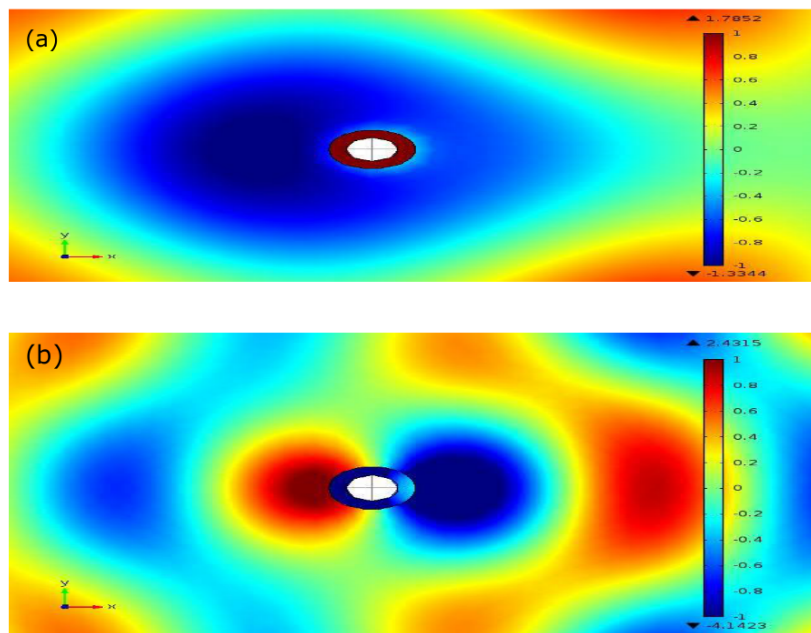


Figura 7.3: (a) Mapa del campo de presión dispersado correspondiente a una frecuencia  $\nu = 0.06$  (en unidades reducidas) donde el módulo de compresibilidad es negativo. (b) Mapa del campo de presión dispersado correspondiente a una frecuencia  $\nu = 0.12$  u.r donde la densidad dinámica es negativa. La cavidad esta centrada en la posición  $(0, 0)$  y el radio de la cavidad es  $R_b = 1\text{cm}$ .

Los parámetros efectivos,  $B^*$  y  $\rho^*$ , que caracterizan al medio efectivo dependen de las dimensiones de los elementos que forman el medio ( $R_a, R_b, h, L$ ) y del meta-fluido localizado en su interior ( $\rho_s, c_s$ ). Las expresiones analíticas para  $B^*(\omega)$  y  $\rho^*(\omega)$  son difíciles de obtener, no obstante, en la siguiente sección se mostrarán los resultados obtenidos en diagramas de fase, donde las condiciones en las que aparecen los parámetros negativos se pueden mostrar de una forma más clara.

## 7.2. Parámetros efectivos del metamaterial:

### $B^*(\omega)$ y $\rho^*(\omega)$

Los parámetros acústicos  $B_a(\omega)$  y  $\rho_a(\omega)$  que caracterizan individualmente a los elementos de dispersión son empleados aquí para obtener los parámetros efectivos de una red formada por esos elementos.

Considerando una red isótropa (es decir hexagonal o cuadrada) en la que la fracción del volumen ocupado por los elementos es  $f$  y siguiendo el proceso explicado en el capítulo 4, los parámetros efectivos pueden ser obtenidos usando las siguiente expresiones

$$\frac{1}{B^*(\omega)} = \frac{1-f}{B_b} - \frac{f}{B_a(\omega)}, \quad (7.2.1)$$

$$\rho^*(\omega) = \frac{(1+f)\rho_a + (1-f)\rho_b}{(1-f)\rho_a + (1+f)\rho_b},$$

en las que los términos de la dispersión múltiple no son considerados debido a que en el presente capítulo consideramos los metamateriales con una fracción de llenado baja.

Las resonancias que tienen lugar en el interior del elemento de dispersión generan en los parámetros efectivos fuertes oscilaciones que pasan por cero. El presente trabajo se centra en las regiones donde los parámetros efectivos cambian de signo, ya que el signo define las regiones de propagación que tienen lugar en el metamaterial. Estas regiones se encuentran definidas

mediante la velocidad de fase efectiva que presenta el metamaterial,

$$c^*(\omega) = \sqrt{\frac{B^*(\omega)}{\rho^*(\omega)}}. \quad (7.2.2)$$

De esta relación se deduce que cuando ambos parámetros son positivos o negativos, la velocidad de fase del sonido es positiva o negativa, respectivamente. Sin embargo, cuando uno de los parámetros es negativo y el otro positivo el resultado es una velocidad de fase puramente imaginaria y, por tanto, no hay propagación a través del medio. El estudio del signo en los parámetros efectivos se realiza a través de los diagramas de fase, donde los cambios de signo de los parámetros efectivos son representados en función de la frecuencia y una selección de variables físicas que definen el elemento de dispersión. Esta forma de representación de datos es especialmente útil cuando las magnitudes de interés dependen de muchos parámetros.

En este trabajo se muestran dos ejemplos de diagramas de fase: uno en el que se mantiene constante la relación  $R_a/R_b$  observándose los cambios de signo como función de la relación  $L/h$ ; otro en el que se mantiene constante esta relación mostrándose los cambios de signo en función de  $R_a/R_b$ . En ambos ejemplos el valor de la altura de la guía de ondas está fijado a  $h = 0.44a$ , siendo  $a$  el parámetro de la red hexagonal donde los elementos de dispersión se encuentran distribuidos. Este valor pequeño de  $h$  es necesario para reforzar la naturaleza cuasi bidimensional del sistema. El término cuasi bidimensional es debido a que a pesar de que el problema es estrictamente tridimensional se considera propagación en el plano XY. También se mantiene en ambos ejemplos el valor del radio externo de la cavidad, siendo  $R_b = 0.44a = h$ . Este valor es escogido para que la fracción de llenado sea lo suficientemente alta para observar los efectos de la dispersión pero lo suficientemente baja para despreciar la corrección de la dispersión múltiple en los parámetros efectivos. En los dos ejemplos el meta-fluido localizado en el interior de las cavidades presenta una densidad  $\rho_s = 4\rho_b$  y  $c_s = 0.3c_b$ . Los valores del meta-fluido no se han escogido de forma aleatoria; sino que corresponden a valores de parámetros efectivos considerando redes formadas por cilindros rígidos [THCSD06, TSD06, TSD07a].



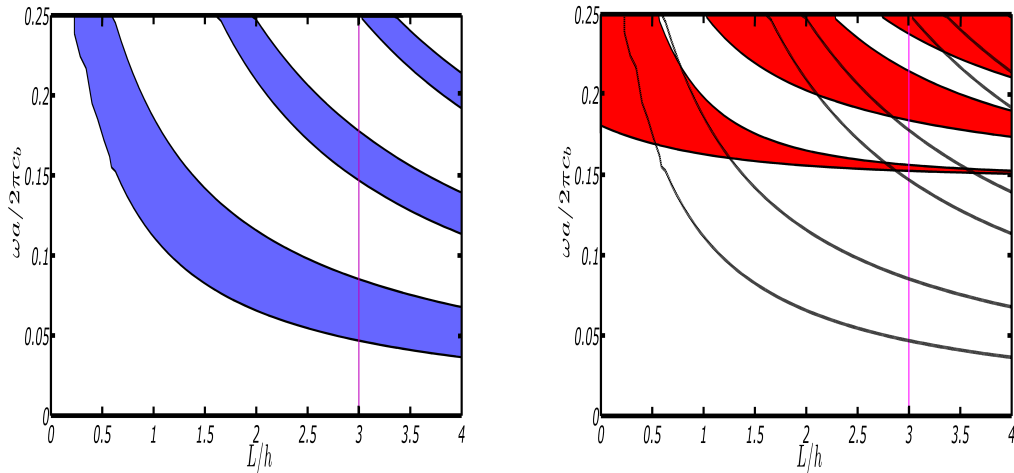


Figura 7.4: Las regiones de color representan los valores de  $\omega - L/h$  donde el módulo de compresibilidad efectivo (panel izquierdo) y la densidad dinámica efectiva (panel derecho) son negativos. Con el propósito de comparar ambos diagramas se representan las líneas continuas (negras) en el panel derecho que encierran las regiones donde el módulo de compresibilidad es negativo; la superposición con las regiones de densidad negativa define las condiciones donde ambos parámetros son negativos simultáneamente.

### 7.2.1. Diagramas de fase en el plano $\omega - L/h$

La figura 7.4 muestra el diagrama de fase para el módulo de compresibilidad (panel izquierdo) y densidad efectiva (panel derecho) para el caso en que el radio del cilindro rígido localizado en el interior del elemento de dispersión tiene como valor  $R_a = 0.5R_b$  y realizando el barrido para la relación  $L/h$ . La zona de color representa los valores en los que los parámetros acústicos presentan signo negativo.

El panel izquierdo de la figura 7.4 muestra que  $B^*$  se hace negativo a partir de un valor de corte  $L/h \geq 0.3$ , ya que por encima de este valor la cavidad actúa como un resonador de Helmholtz como se explicó en el capítulo 6. El panel derecho de la figura 7.4 muestra que la densidad negativa, al contrario del módulo de compresibilidad, no presenta un valor de corte.

En comparación con  $B^*$ , las regiones que presentan valores de  $\rho^*$  negativos son más anchas en frecuencia. No obstante, como en el caso del módulo

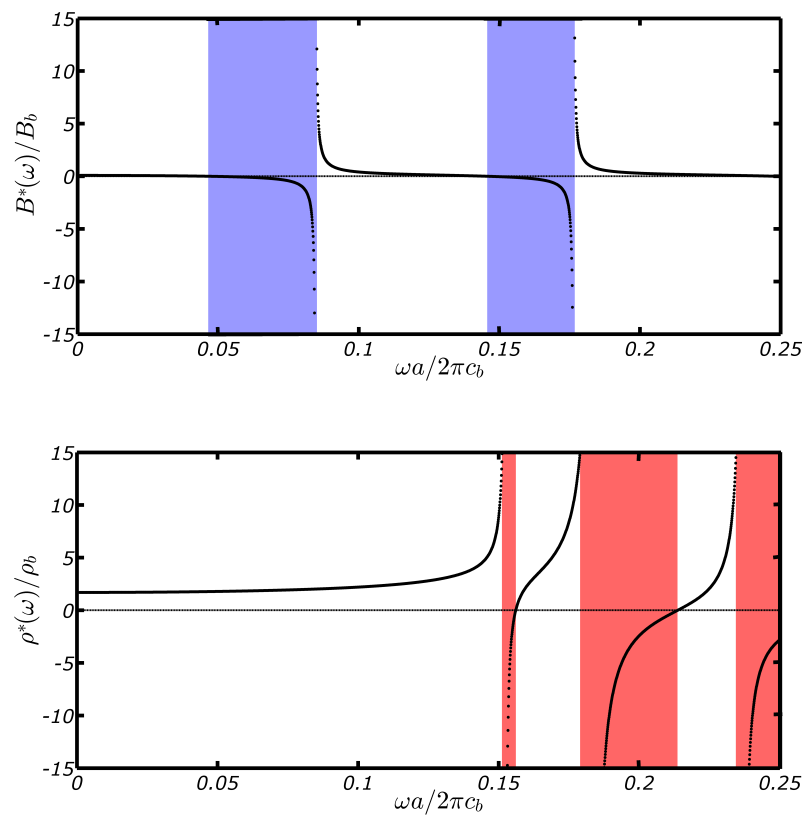


Figura 7.5: Módulo de compresibilidad efectivo (arriba) y densidad efectiva (abajo) en función de la frecuencia para la estructura analizada en la figura 7.1(a). Estos resultados corresponden al caso definido por  $L = 3h$  en el diagrama de fase de la figura 7.4.

de compresibilidad efectivo, conforme la profundidad  $L$  de la cavidad se incrementa, el número de resonancias aumenta, apareciendo más regiones con  $\rho^*$  negativa.

En el panel derecho de la figura 7.4 también se representan líneas discontinuas que encierran la región en la que el módulo de compresibilidad es negativo. La superposición con las regiones de color rojo definen las condiciones en que se espera un comportamiento doblemente negativo, los cuales se pueden determinar fácilmente a partir de los diagramas de fase.

Nótese que puede obtenerse una región que presenta un rango de frecuencia relativamente ancho donde ambos parámetros acústicos son negativos usando cavidades con valores comprendidos en  $0.52 \leq L/h \leq 1.26$ . Mientras que para cavidades  $2.1 \leq L/h \leq 2.28$  y  $3.3 \leq L/h \leq 4$  se obtienen regiones que presentan un comportamiento doblemente negativo pero en un rango más estrecho de frecuencias.

La figura 7.5 muestra la dependencia en frecuencia del módulo de compresibilidad efectiva (panel izquierdo) y de la densidad efectiva (panel derecho) extraídos de la figura 7.5 para una relación  $L/h = 3$ , que está definida por una línea vertical roja en el diagrama fase. Se puede ver que los parámetros efectivos presentan regiones negativas conforme a lo descrito en el diagrama de fase.

### 7.2.2. Diagramas de fase en el plano $\omega - R_a/R_b$

La figura 7.6 muestra el diagrama de fase para  $B^*$  (panel izquierdo) y  $\rho^*$  (panel derecho) para el mismo metamaterial estudiado en la figura 7.4, pero en este caso se fija el valor  $L = h$  y el barrido se hace ahora en la relación  $R_a/R_b$ . En este caso el medio presenta una variación más suave ya que el número de resonancias no incrementa, pudiendo decir que el número de resonancias es esencialmente función de  $L$ . Se puede observar que cuando la relación  $R_a/R_b \rightarrow 1$  el comportamiento negativo desaparece, como es de esperar, ya que la cavidad se convierte en un cilindro rígido. También es destacable que, aunque la región de frecuencias en la que el módulo de compresibilidad es negativo varía lentamente como función de  $R_a/R_b$ , la región en la que la densidad es negativa aparece a bajas frecuencias para un valor  $R_a/R_b \simeq 0.7$ . Siendo esta región la más apropiada para trabajar, ya que el

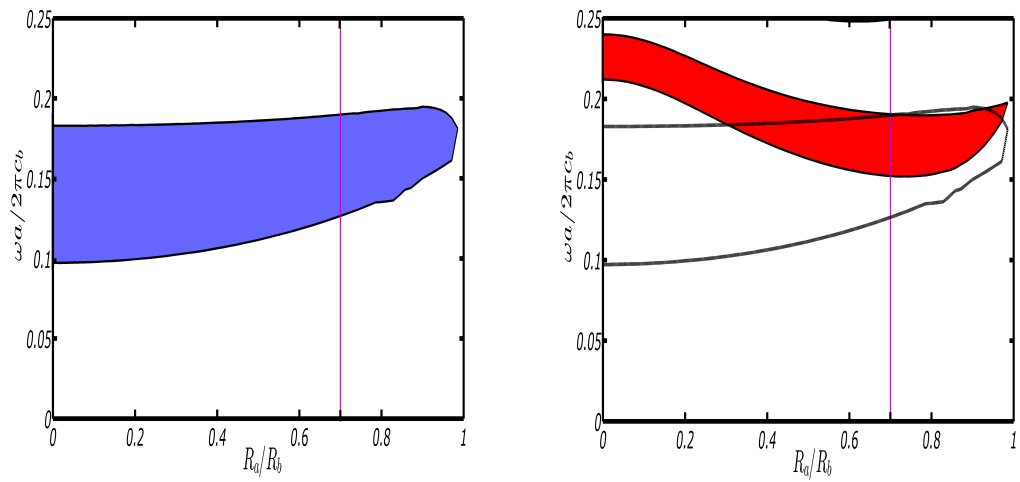


Figura 7.6: La región en color define los valores  $\omega - R_a/R_b$  donde el módulo de compresibilidad efectivo (panel izquierdo) y la densidad (panel derecho) efectiva son negativos. Con el propósito de comparar ambos diagramas se representan líneas discontinuas en el panel derecho que encierran los valores en el que el módulo de compresibilidad es negativo. La superposición entre ambas regiones define las condiciones en las que se esperan que ambos parámetros sean negativos.

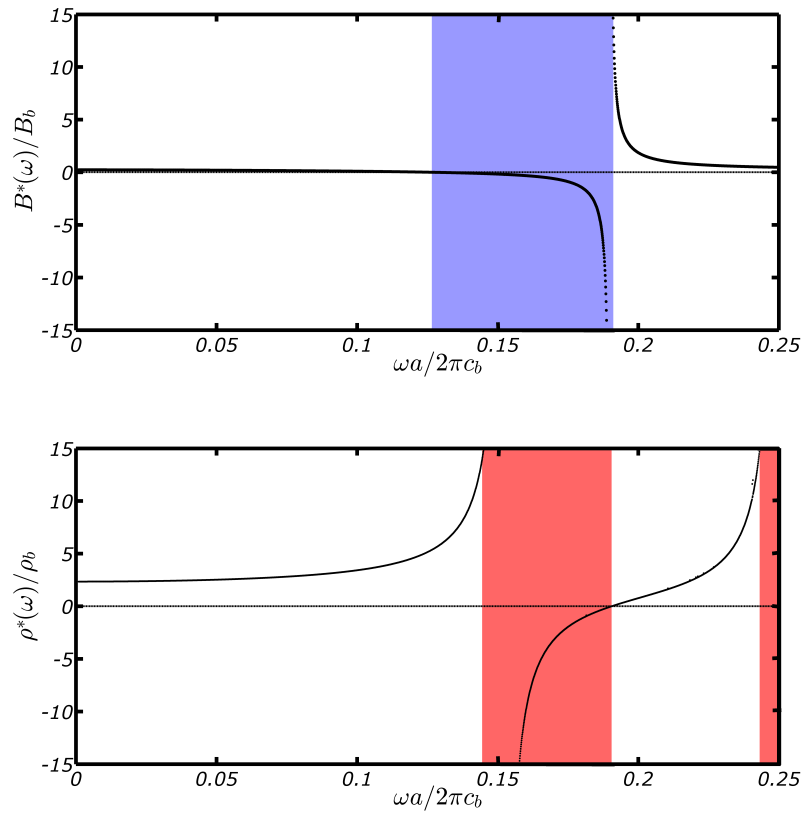


Figura 7.7: Dependencia en frecuencia del módulo de compresibilidad efectivo (arriba) y densidad dinámica efectiva (abajo) para la estructura estudiada en la figura 7.6. Estos resultados corresponden al caso  $R_a = 0.7R_b$ . La línea discontinua horizontal actúa como referencia visual para indicar el valor cero del parámetro acústico correspondiente.

comportamiento del metamaterial es mejor cuanto menor sea la frecuencia. La superposición entre el módulo de compresibilidad (representado mediante líneas discontinuas en el panel derecho) y la densidad efectiva se obtiene para valores  $0.32 \leq R_a/R_b \leq 0.97$ . Esta región se podría utilizar para construir una muestra que exhiba refracción negativa.

La figura 7.7 muestra el comportamiento en frecuencia de los parámetros efectivos del sistema descrito en la figura 7.6 para  $R_a/R_b = 0.6$ .

### 7.3. Resumen

En resumen, en este capítulo se ha introducido una nueva estructura de dispersión en una guía de ondas  $2D$  para la propagación del sonido en aire que puede ser usada para diseñar metamateriales que presenten uno o ambos parámetros acústicos negativos.

El elemento de dispersión diseñado consiste en una cavidad perforada en una de las superficies que forman la guía de ondas con un cilindro rígido en su interior, siendo el resto de la cavidad rellena por un metafluido que tiene una velocidad de fase del sonido menor que la del aire. Esta estructura de dispersión es especialmente adecuada para diseñar metamateriales con parámetros acústicos negativos cuando el sonido se propaga en aire, pero también puede usarse para construir metamateriales viables para la propagación del sonido en agua. Se ha mostrado que la modificación o adaptación de los parámetros acústicos efectivos del metamaterial presenta muchos grados de libertad, como la fracción de llenado, la altura de la guía de ondas, la longitud de la cavidad, ect, los cuales hacen que sea un problema difícil de analizar. Para superar esa dificultad los resultados se han representado en diagramas de fase, que permiten de una manera más fácil el diseño de metamateriales negativos.

Debido al reto que supone la construcción de metamateriales que presenten simple o doble negatividad en sus parámetros acústicos y que además presenten pocas pérdidas para la propagación del sonido en aire, la estructura de dispersión propuesta en este capítulo es un buen candidato para lograr dicho objetivo.

Este capítulo esta basado en:

1. – Rogelio Graciá-Salgado, Daniel Torrent y José Sánchez-Dehesa. *Double-negative acoustic metamaterial based on quasi-two-dimensional fluid-like shells*. New J. Phys. Vol. **14**, art. nro. 103052, pp.1 – 15 (2012)

## Capítulo 8

# Metamateriales acústicos con densidad negativa y cercana a cero: diseño y aplicaciones

En el capítulo anterior se demostró que cuando el medio de propagación del sonido es el aire, la obtención de un metamaterial acústico que presentara un comportamiento doblemente negativo en sus parámetros efectivos se podía realizar mediante una distribución de cavidades en cuyo interior se localizaba un metafluido isótropo con una velocidad efectiva del sonido menor que la del aire.

En este capítulo se muestra el diseño de un nuevo tipo de material acústico formado por elementos de dispersión anisótropos que presenta resonancias en ambos parámetros acústicos efectivos, módulo de compresibilidad y densidad de masa.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: En la sección 8.1 se analiza la estructura propuesta en el límite de homogenización; obteniéndose los parámetros efectivos que caracterizan al metamaterial resultante. En la sección 8.2 se expone la realización de un experimento numérico donde se muestra que es posible la excitación de estados superficiales. En la sección 8.3 se analizan varias aplicaciones de este tipo de metamateriales en el rango de frecuencias en el que muestra una densidad dinámica de masa efectiva cercana a cero como el efecto túnel, filtrado de modos transversales, transmisión del campo a través de varios canales, etc . . . . En la sección 8.4 se analizará la



caracterización experimental de dos muestras diferentes de metamaterial. Finalmente, en la sección 8.5 se resumirán los resultados obtenidos.

## 8.1. Metamaterial acústico: parámetros efectivos

La figura 8.1a muestra el esquema del metamaterial objeto de estudio. Éste consiste en una distribución de elementos dispersores cilíndricos localizados en el interior de una guía de ondas, formada por dos placas paralelas separadas una distancia  $h$ . La estructura de cada elemento se muestra en la figura 8.1b. Las cavidades son agujeros de longitud  $L$  y de radio  $R_b$  perforadas en una de las dos placas que forman la guía de ondas. Dentro de cada cavidad hay un cilindro de radio  $R_a$  y de altura  $h + L$ . En el espacio definido entre el cilindro rígido y el radio externo de la cavidad existe una distribución angular de capas que consiste en la alternancia de un material acústicamente rígido y aire, tal y como se muestra en la figura 8.1c.

Es interesante resaltar que al igual que en el capítulo anterior, el sistema consta de 5 parámetros mediante los cuales se pueden ajustar las propiedades acústicas de la unidad diseñada:  $R_b, R_a, h, L, \alpha$ . En primer lugar se mostrará que la unidad de dispersión presenta resonancias monopulares y dipolares en intervalos separados de frecuencia. Esta propiedad justifica su uso como elemento unidad en la construcción de metamateriales que presenten parámetros acústicos negativos.

### 8.1.1. Parámetros efectivos de la unidad de dispersión: $B_a(\omega)$ y $\rho_a(\omega)$

En el límite de homogenización la unidad de dispersión se puede describir como un fluido anisótropo homogeneizado. La estructura propuesta presenta anisotropía cilíndrica,  $\rho_r = cte$ ,  $\rho_\theta = \infty$ . Esta anisotropía establece que en el interior de la estructura de dispersión se verifique que  $c_\theta = 0$  y  $c_r = c_b$ , donde  $c_b$  es la velocidad del sonido en el fluido que rodea el elemento de dispersión, siendo por tanto el coeficiente de anisotropía  $\gamma = \frac{c_\theta}{c_r} = 0$ .

Para obtener los parámetros que caracterizan la unidad dispersiva hay

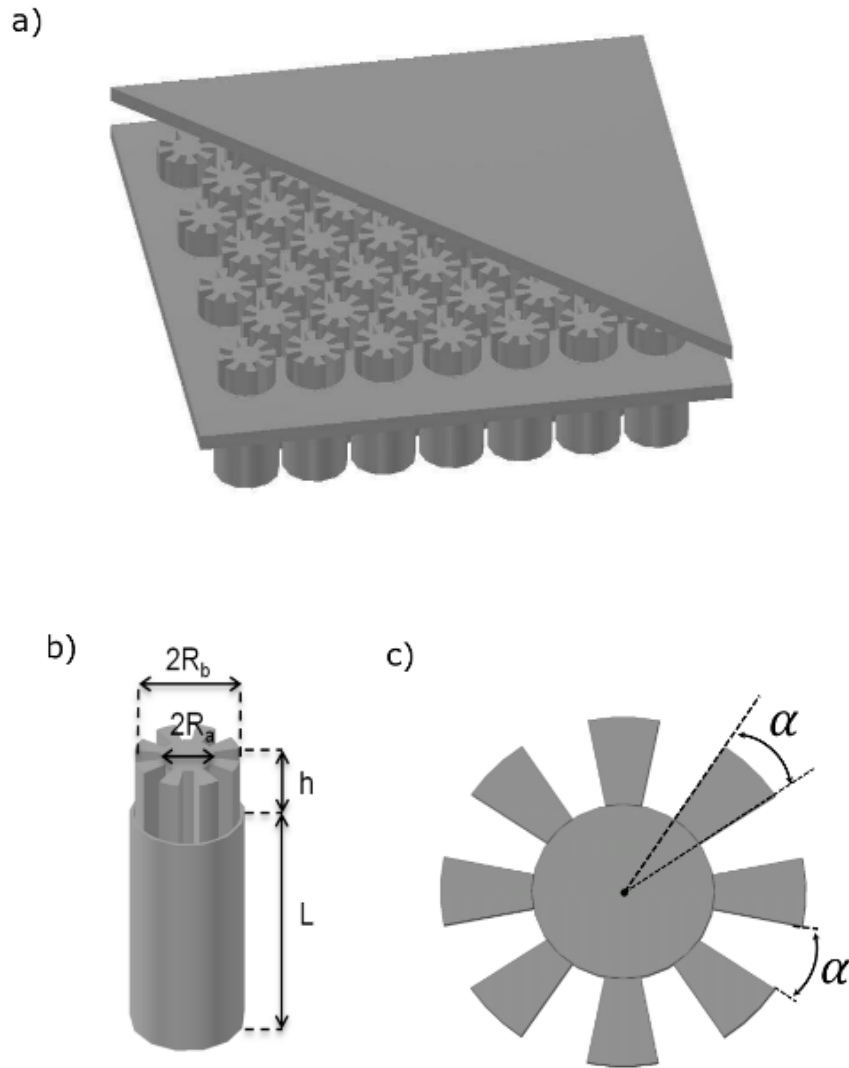


Figura 8.1: (a) Vista esquemática de la estructura objeto de estudio. Ésta consiste en una distribución anisótropa de elementos dispersores localizados en el interior de una guía de ondas de altura  $h$ . (b) Esquema de un elemento individual de dispersión que consiste en una estructura cilíndrica de radio  $R_b$  de altura total  $L + h$ , donde  $L$  es la longitud que se extiende en el interior de la guía de ondas  $2D$ . (c) Sección del elemento de dispersión que muestra la anisotropía angular. Las regiones grises representan un material acústicamente rígido.

que obtener la matriz de transferencia del sistema. El proceso de obtención de la matriz-T fue explicado en el capítulo 3,

$$(T_q)_{mn} = - \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{H}_q)_{mk}^{-1} (\hat{J}_q)_{kn} \quad (8.1.1)$$

donde

$$(\hat{J}_q)_{kn} = J_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{J}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_0(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_0(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_0(k_m^{II} R_a)} Y_0(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_0(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_0(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_0(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_0(k_m^{II} R_b)} \right],$$

$$(\hat{H}_q)_{kn} = H_q(k_k^I R_b) \delta_{nk} - \frac{\rho_r}{\rho_b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \dot{H}_q(k_n^I R_b) G_{km} G_{nm} \frac{J_0(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_0(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_0(k_m^{II} R_a)} Y_0(k_m^{II} R_b)}{\dot{J}_0(k_m^{II} R_b) + \frac{\dot{J}_0(k_m^{II} R_a)}{\dot{Y}_0(k_m^{II} R_a)} \dot{Y}_0(k_m^{II} R_b)} \right], \quad (8.1.2)$$

y

$$G_{km} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{h+L}} \epsilon_k \epsilon_m \left[ \text{sinc}((k_{kz}^I + k_{mz}^{II})h) + \text{sinc}((k_{kz}^I - k_{mz}^{II})h) \right]. \quad (8.1.3)$$

Los  $k_n^I$  y  $k_m^{II}$  corresponden al número de onda en el medio que rodea la unidad de dispersión y en el interior del elemento de dispersión, respectivamente, siendo

$$k_k^i = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_b}\right)^2 - (k_{zk}^i)^2}, \quad k_{zk}^i = \begin{cases} \frac{k\pi}{h} & \text{si } i = I \\ \frac{k\pi}{h+L} & \text{si } i = II \end{cases}, \quad (8.1.4)$$

Como se ha visto a lo largo de este trabajo, el módulo de compresibilidad y la densidad dinámica de masa efectiva del elemento de dispersión resonante presenta una dependencia en frecuencia a través de las siguientes relaciones

$$\frac{B_a(\omega)}{B_b} = \frac{k_b^2 R_b^2}{2} \ln(k_b R_b) - \frac{1}{2} k_b R_b \chi_0, \quad (8.1.5)$$

$$\frac{\rho_a(\omega)}{\rho_b} = \frac{\chi_1}{k_b R_b},$$

donde  $B_b$  y  $\rho_b$  son los parámetros del medio que rodea a la estructura dispersiva y  $k_b$  el número de onda de dicho medio. Las cantidades  $\chi_0$  y  $\chi_1$  están

relacionadas con la matriz-T como se vio en el capítulo 4, pero en este caso, al igual que el capítulo anterior, su extracción se realiza a través de la siguiente relación

$$T_q = -\frac{\chi_q J'_q(k_b R_b) - J_q(k_b R_b)}{\chi_q H'_q(k_b R_b) - H_q(k_b R_b)}. \quad (8.1.6)$$

Las soluciones de  $\chi_0$  y  $\chi_1$  obtenidas en la anterior ecuación se introducen en las ecuaciones 8.1.5, permitiéndonos así obtener el comportamiento en frecuencia de los parámetros que caracterizan el elemento dispersivo  $B_a(\omega)$  y  $\rho_a(\omega)$ .

La figura 8.2 muestra el comportamiento en frecuencia de estos parámetros para una geometría dada. En ellas se puede ver que la respuesta en frecuencia es compleja debido a las oscilaciones del campo de presión en el interior del elemento de dispersión. Estas oscilaciones aparecen por las anisotropía. Nótese que el elemento de dispersión penetra una longitud  $L$  en una de las superficies de la guía de ondas presentando una densidad efectiva aparente más pequeña que la del medio que lo rodea ( $\approx \frac{h}{L}$ ), y la presencia de sectores rígidos en el interior del elemento de dispersión impiden la propagación del sonido en la dirección angular, que tiene como efecto la disminución de la velocidad del sonido en el interior del mismo. La existencia de una región en frecuencia donde la estructura presenta un módulo de compresibilidad negativo, es debido a que la longitud de la cavidad actúa como un resonador de Helmholtz, como se ha visto en capítulos anteriores.

### 8.1.2. Parámetros efectivos del metamaterial acústico:

$$B^*(\omega) \text{ y } \rho^*(\omega)$$

Se ha demostrado experimentalmente la existencia de metamateriales con densidad dinámica de masa negativa usando esferas de goma en agua [ZXY<sup>+</sup>11], o empleando membranas en aire [YMY<sup>+</sup>08, YZH10, PPL<sup>+</sup>11]. El valor negativo de la densidad es obtenido mediante una resonancia dipolar que presentan las unidades dispersivas que constituyen el metamaterial. Este tipo de resonancias dipolares producen que la aceleración este en contra fase con el gradiente de la presión dinámica [LC04].

El inconveniente de este tipo de metamateriales es la repetición exacta de las unidades dispersivas (tension en la membrana, parámetros elásticos) para

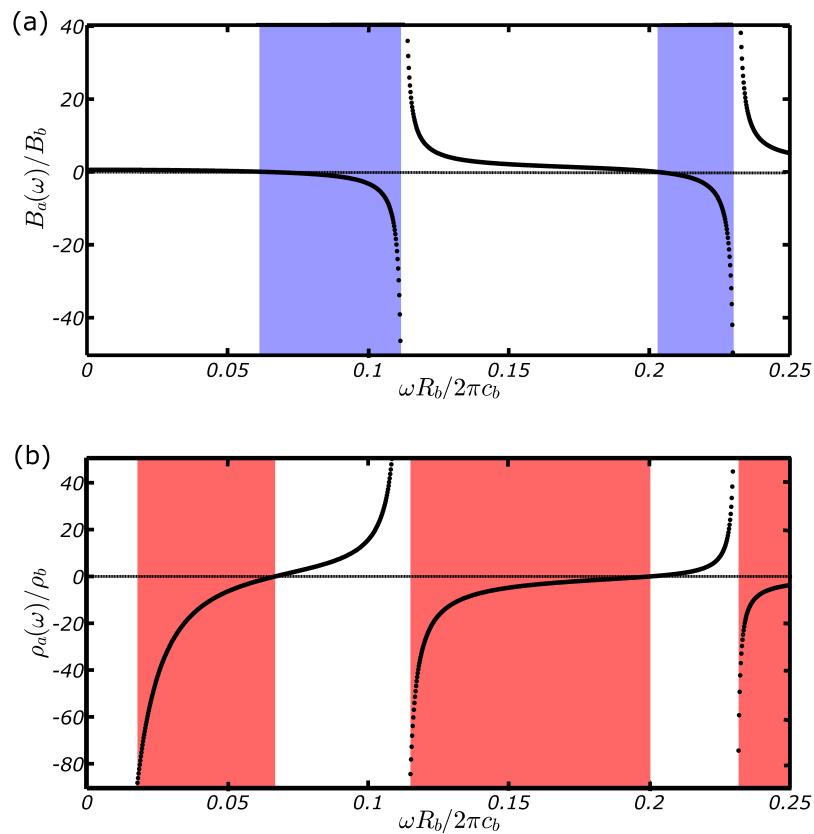


Figura 8.2: (a) Módulo de compresibilidad y (b) densidad de masa efectiva en función de la frecuencia en unidades reducidas. Ambas figuras corresponden a un elemento de dispersión representado en la Fig.?? b). Los parámetros geométricos con los que se ha obtenido dicho comportamiento son  $h = R_b$ ,  $L = 3.5h$ ,  $R_a = 0.5R_b$  y  $\alpha = \pi/8$ . Las zonas sombreadas definen las frecuencias donde los parámetros acústicos presentan valores negativos.

la construcción de metamateriales. Este problema hace necesario la investigación de nuevos enfoques que permitan proponer estructuras más robustas que presenten el mismo comportamiento negativo en la densidad de masa efectiva.

Vamos a considerar ahora una estructura periódica como la mostrada en la figura 8.1a, que consiste en una distribución hexagonal de unidades dispersivas como las mostradas en la figura 8.1b. Para longitudes de ondas más grandes que el parámetro de red  $a$ , estas estructuras se convierten en un medio efectivo que presenta una densidad efectiva de masa y un módulo de compresibilidad efectivo que depende de la frecuencia, y que se obtienen a través de los parámetros efectivos que caracterizan un elemento de dispersión  $B_a(\omega)$  y  $\rho_a(\omega)$  usando las siguientes relaciones

$$\frac{1}{B^*(\omega)} = \frac{1-f}{B_b} + \frac{1}{B_a(\omega)}, \quad (8.1.7)$$

$$\rho^*(\omega) = \frac{\rho_a(\omega)(1+f) + \rho_b(1-f)}{\rho_a(\omega)(1-f) + \rho_b(1+f)} \rho_b,$$

donde  $f$  es la fracción de llenado de la distribución. Para el caso de una red hexagonal  $f = (2\pi/\sqrt{3})(R_b/a)^2$ . Al igual que en el capítulo anterior, debido a los numerosos parámetros que presenta el sistema primero, se realizó un estudio donde se hacen variar los parámetros  $L$  y  $R_a$  de la unidad dispersiva fijando los valores  $h = R_b = 0.44a$ .

La figura 8.3 representa el diagrama de fase obtenido en el plano  $\omega - L/h$ , es decir, manteniendo constante el valor del radio del cilindro interno a  $R_a = 0.5R_b$ . El área encerrada por las líneas continuas representa las regiones donde la densidad dinámica de masa efectiva es negativa, mientras que el área encerrada por las líneas de puntos corresponden a las regiones donde el módulo de compresibilidad es negativo. El rango de frecuencias representado corresponde al límite de homogenización, es decir, en términos de longitudes de onda para  $\lambda \geq 0.25a$  [THCSD06]. El comportamiento negativo de la densidad efectiva empieza para valores  $L/h \geq 0.78$ . Por encima de este punto, la reducción de la densidad efectiva en la unidad de dispersión es lo suficientemente grande para producir un metamaterial con densidad dinámica negativa. La figura también muestra que la cavidad del elemento de disper-

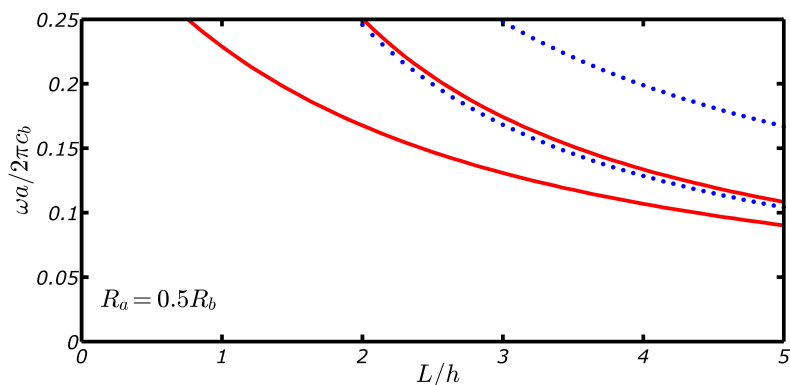


Figura 8.3: Diagrama de fase en el plano  $\omega - L/h$  del metamaterial. El área encerrada por la línea de puntos define los valores  $\omega - L/h$  donde el módulo de compresibilidad es negativo. El área encerrada por la línea continua define la región donde la densidad dinámica de masa es negativa. El pequeño solapamiento entre ambas regiones nos indica las condiciones donde ambos parámetros son simultáneamente negativos.

sión no actúa como un resonador de Helmholtz hasta valores  $L/h \geq 2$ . Nótese que al incrementar los valores  $L/h$  los valores en frecuencia en los que se obtienen parámetros negativos se desplazan hacia bajas frecuencias, donde la homogenización es mucho más precisa.

Si realizamos la comparación con estructuras análogas basadas en distribuciones de metafluidos isótropos (ver Fig.7.5) observamos que el solape entre las regiones negativas ahora se producen en un rango estrecho en frecuencias. Este resultado es debido a la separación en frecuencia en que se producen las resonancias asociadas a la densidad efectiva y al módulo de compresibilidad efectivo que presenta la unidad dispersiva, como se muestra en la figura 8.2. Conviene recordar que la negatividad en uno de los parámetros que caracterizan el metamaterial (ver fig.8.3) corresponde a valores puramente imaginarios de la velocidad efectiva  $c^*$ . En esas regiones no habrá propagación a través del metamaterial, existiendo un “gap” de frecuencias en la estructura de bandas para un sistema infinitamente periódico.

La dependencia en frecuencia de los parámetros efectivos se muestra en la figura 8.4, correspondiente a un corte a lo largo de  $L = 3.5h$  en el diagrama de fase mostrado en la figura 8.3. En esta figura se puede observar la región estrecha en frecuencia, localizado en  $[0.146, 0.151]$ , donde ambos

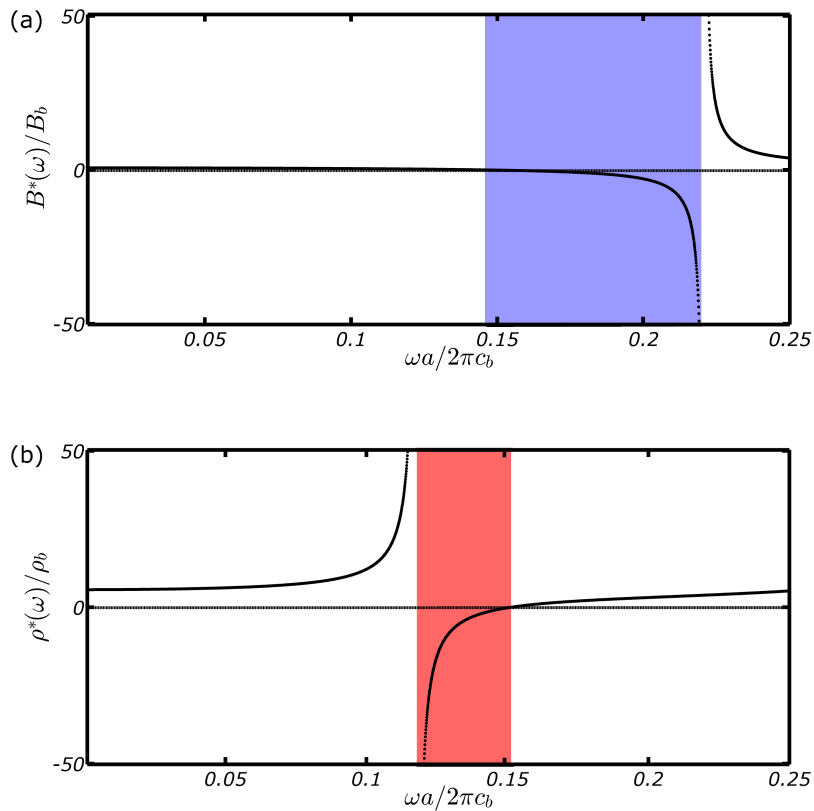


Figura 8.4: Parámetros efectivos de la estructura representada en figura 8.1. (a) Dependencia en frecuencia del módulo de compresibilidad. (b) Dependencia en frecuencia de la densidad de masa. Los resultados corresponden a  $h = R_b = 0.44a$ ,  $R_a = 0.5R_b$  y  $L = 3.5h$ . Las regiones sombreadas corresponden a las frecuencias donde los valores de los parámetros son negativos.



parámetros son negativos. El comportamiento doblemente negativo permite observar fenómenos muy interesantes en todo tipo de metamateriales pero su demostración en aire constituye un gran desafío debido a que la posibilidad de obtener estructuras resonantes es muy limitada, porque la interacción de las ondas acústicas con estructuras sólidas es muy débil.

En la figura 8.5 se representa el diagrama de fase en el plano  $\omega - R_a/R_b$ . En él se representa la dependencia en frecuencia para la misma estructura pero ahora se mantiene constante la longitud de la cavidad,  $L = 3.5h$ , pudiendo analizar el comportamiento negativo en función  $(R_a/R_b)$ . Como antes, el área encerrada en las líneas continuas y punteadas encierran las regiones donde se encuentran la densidad dinámica de masa efectiva y el módulo de compresibilidad negativos. Se puede ver que la influencia que ejerce el parámetro del radio del cilindro rígido interno es débil para valores  $R_a/R_b \leq 0.4$ , lo que significa que en el proceso de fabricación el cilindro no afecta al comportamiento global del metamaterial. Por encima de ese valor, se observa el estrechamiento de las regiones negativas hasta que desaparecen completamente para  $R_a \simeq R_b$ , donde las unidades dispersivas se convierten en un cilindro rígido.

## 8.2. Estados acústicos superficiales

Se ha demostrado la amplificación de ondas evanescentes en metamateriales  $2D$  basados en membranas [PPL<sup>+</sup>11]. En esta sección se demuestra que la amplificación es también posible usando nuestras estructuras *quasi-2D* en las regiones en frecuencia donde la densidad de masa es negativa. La amplificación de modos evanescentes fue teóricamente expuesta por Ambati y colaboradores [AFSZ07] siguiendo un resultado análogo que se obtuvo para ondas electromagnéticas que se propagaban en distribuciones de materiales que presentaban una permitividad negativa.

### 8.2.1. Relación de dispersión de los estados superficiales

Considérese una interfaz entre dos medios semi infinitos (ver figura 8.6) donde el medio I es un fluido con densidad dinámica de masa ( $\rho_b > 0$ ) y

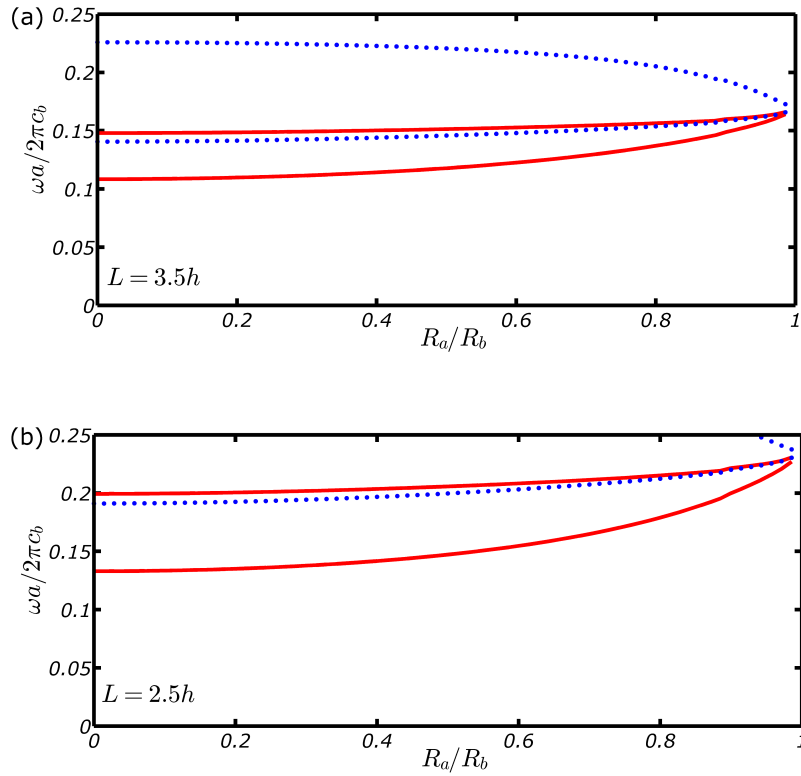


Figura 8.5: Diagrama de fase del metamaterial en el plano  $\omega - R_a/R_b$ . área encerrada por las líneas discontinuas indican los valores de  $\omega - R_a/R_b$  en los que se obtiene el módulo de compresibilidad negativo mientras que el área encerrada por la líneas continuas indica la condiciones en la que obtenemos una densidad de masa negativa. La regiones en donde se producen solapamiento indica las condiciones en las que se obtiene simultáneamente ambos parámetros negativos. (a) Representa el estudio para el caso en el que se fija la longitud de las cavidades  $L = 3.5h$ . (b) El caso donde la longitud de la cavidad es  $L = 2.5h$ .

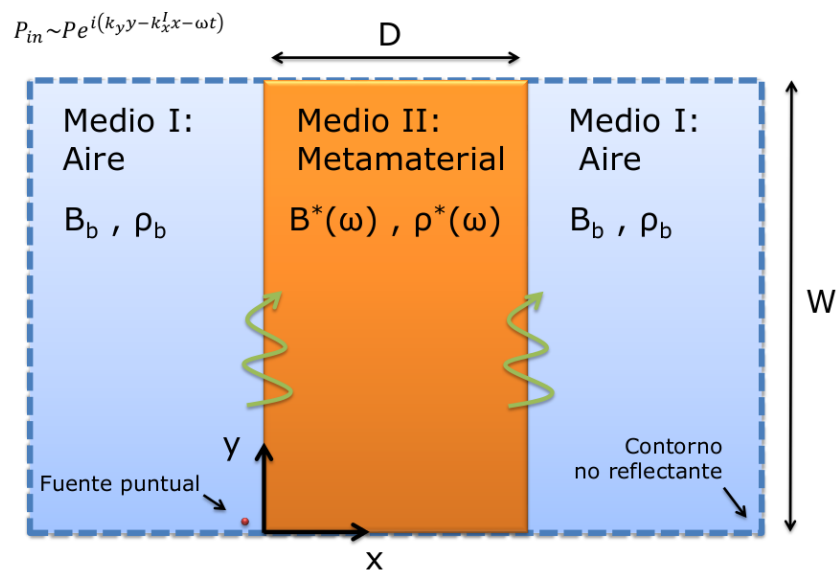


Figura 8.6: Esquema del experimento númerico. Un sistema multicapa, aire/metamaterial/aire, es encerrado en un dominio que presenta contornos no reflectantes. Una fuente puntual es colocada en la esquina inferior izquierda del metamaterial a una distancia próxima a éste con el fin de excitar los modos superficiales a lo largo de la interfaz.

módulo de compresibilidad ( $B_b > 0$ ) positivos, mientras que el medio II es un metamaterial acústico, isótropo, caracterizado por una densidad de masa dinámica efectiva ( $\rho^*$ ) y un módulo de compresibilidad ( $B^*$ ).

El campo de presiones en el medio I se puede escribir como

$$P^I(x, y) = P_o e^{i(-k_x^b x + k_y^b - \omega t)}, \quad (8.2.1)$$

y en el metamaterial como

$$P^{II}(x, y) = P_o e^{i(k_x^M x + k_y^M - \omega t)}, \quad (8.2.2)$$

donde  $\mathbf{k}^b = (k_x^b, k_y^b)$  y  $\mathbf{k}^M = (k_x^M, k_y^M)$  es el número de ondas del medio fluido y del metamaterial respectivamente. Un estado superficial representa una perturbación en el campo de presión que es máxima en la interfaz y que decae exponencialmente en la dirección perpendicular a la superficie que define la interfaz.

Para obtener la condición necesaria que permite la existencia de estos estados superficiales aplicamos las condiciones de contorno de continuidad del campo de presiones y de continuidad de la componente normal del campo de velocidades en la interfaz fluido/metamaterial ( $x = 0$ )

$$P^I|_{x=0} = P^{II}|_{x=0}, \quad (8.2.3)$$

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial P^I}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^{II}}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Sustituyendo (8.2.1) y (8.2.2) en (8.2.3) obtenemos la siguiente relación

$$\frac{k_x^b}{\rho_b} + \frac{k_x^M}{\rho^*} = 0. \quad (8.2.4)$$

La condición necesaria para que exista un estado superficial en la interfaz fluido/metamaterial es que las  $k_x^i$ , con  $i = b$  y  $M$  tengan parte imaginaria positiva, lo cual implica que la densidad del metamaterial debería de ser negativa ( $\rho^* < 0$ ). La relación de dispersión de los estados superficiales entre  $\omega$  y el vector de onda  $k_y$  de los estados superficiales se deduce de la ecuación

(8.2.4), y las relaciones de dispersión del medio fluido y del metamaterial

$$(k_x^b)^2 + (k_y^b)^2 = \omega^2 \left( \frac{\rho_b}{B_b} \right), \quad (8.2.5)$$

$$(k_x^M)^2 + (k_y^M)^2 = \omega^2 \left( \frac{\rho^*}{B^*} \right),$$

siendo requerida la continuidad del vector de onda tangencial  $k_y$  sobre la interfaz, es decir  $k_y^b = k_y^M$ . Despejando  $k_x^i$  con  $i = b, M$  de las ecuaciones (8.2.5) y sustituyéndolos en la ecuación (8.2.4) obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{\omega^2 \left( \frac{1}{B_b} \right)}{\rho_b} - \frac{k_y^2}{\rho_b^2} = \frac{\omega^2 \left( \frac{1}{B^*} \right)}{\rho^*} - \frac{k_y^2}{(\rho^*)^2}, \quad (8.2.6)$$

haciendo un poco de álgebra y resolviendo la ecuación anterior para  $k_y$  obtenemos la relación de dispersión de los estados superficiales

$$k_y = \omega^2 \frac{\rho^* \rho_b}{(\rho^*)^2 - (\rho_b)^2} \left( \frac{\rho^*}{B_b} - \frac{\rho_b}{B^*} \right) \quad (8.2.7)$$

### 8.2.2. Experimento numérico usando Comsol Multiphysics

Para la realización del experimento numérico se consideró una distribución finita, de ancho  $d = 9a$ , de los elementos de dispersión objeto de estudio (ver figura 8.1a). los elementos se colocan en una red cuadrada con un parámetro de red  $a$ . La figura 8.6 muestra las condiciones de contorno que se han impuesto en la simulación para los dominios externos. Éstos se consideran medios no reflectantes que absorben las ondas salientes. La excitación de los estados superficiales se realiza a través de una fuente puntual situada en la proximidad de la superficie del metamaterial. Se ha elegido la red cuadrada porque presenta ventajas a la hora de representar ciertos datos, como por ejemplo, la obtención del campo de presiones a lo largo de un eje que pase a través de dos filas consecutivas de elementos dispersores. El metamaterial se localiza en el interior de una guía de ondas de ancho  $W = 17a$  y altura  $h = 0.44a$ . Los valores de los parámetros que describen las unidades dispersivas son (ver figura 8.1b)  $R_a = 0.5R_b$  y  $L = 1.65a$  ( $L = 3.5h$ ). Para

estos valores el comportamiento de la densidad dinámica de masa negativa aparece dentro del rango en frecuencias  $\omega a/2\pi c_b \in [0.105, 0.135]$ .

La figura 8.7a muestra la amplitud del campo de presión excitado con una fuente radiante a una frecuencia  $\omega a/2\pi c_b = 0.122$ . En ella se observa que las ondas superficiales acústicas son generadas en ambas interfaces aire/metamaterial. La cuantía de este efecto se representa mejor en la figura 8.7b, donde se muestra dependencia de la amplitud a lo largo del eje horizontal para un valor  $y = 8.5a$ . Esta figura muestra que la amplitud es máxima en la interfaz donde se localiza la fuente y decrece conforme se aleja del metamaterial, como es de esperar. Sin embargo, nótese que conforme nos adentramos en el interior del metamaterial la envolvente de la amplitud decrece hasta alcanzar el centro del metamaterial, donde comienza a aumentar hasta alcanzar la interfaz opuesta. Los máximos observados en la envolvente son debidos a la excitación de resonancias locales en los elementos dispersores, produciéndose una acumulación del campo acústico en el interior de los mismos. Esta acumulación es menor cuanto más profunda es la posición del elemento dispersor en el interior del metamaterial. El incremento de la amplitud de la interfaz opuesta es debido a que las condiciones para la propagación de las ondas superficiales se cumple. Sin embargo, ya que la anchura del metamaterial es lo suficientemente pequeña, es posible el acoplamiento entre ambos estados superficiales. Por tanto, mediante de la excitación de estados superficiales en una de las interfaces del metamaterial se obtiene la excitación en la interfaz opuesta. Este comportamiento es similar al observado experimentalmente por Park y colaboradores [PPL<sup>+</sup>11], quien usó una distribución  $2D$  de membranas localizada en el interior de una guía de ondas  $h = 5mm$ . Existe la posibilidad de construir una lente acústica que presente super-resolución mediante el uso de las unidades dispersivas propuestas si las pérdidas asociadas a las resonancias del tipo dipolar son lo suficientemente pequeñas [PPL<sup>+</sup>11].

La obtención de la relación de dispersión de los estados superficiales se ha realizado mediante los datos extraídos de la simulación numérica basada en el método de elementos finitos programada en el software comercial Comsol Multiphysics. La componente vertical del vector de ondas  $k_y$  de cada estado se obtiene a partir de la longitud de onda a lo largo del eje  $y$  para cada frecuencia. Ésta tarea se llevó a cabo a través de la transformada de Fourier

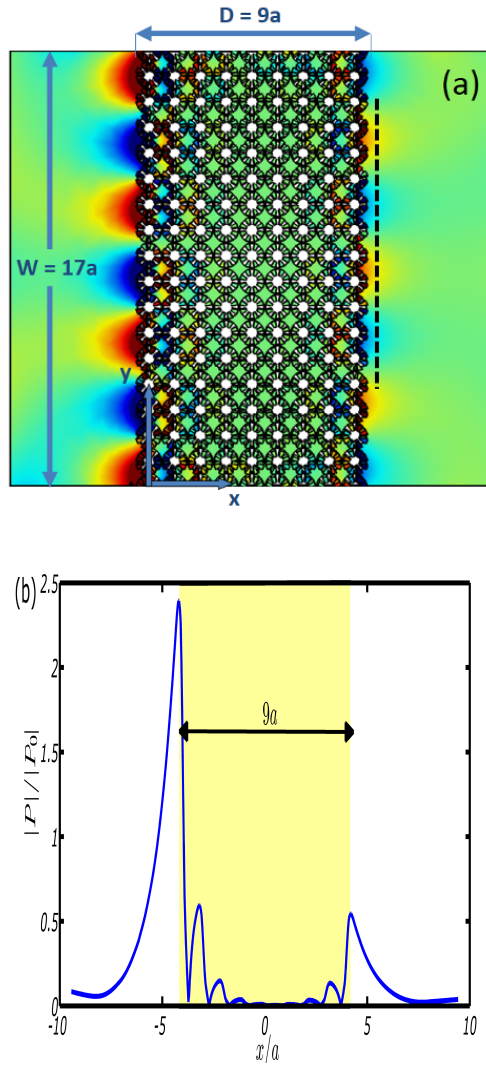


Figura 8.7: (a) Onda superficial excitada en el interfaz aire/metamaterial usando una fuente puntual que radia a una frecuencia  $\omega a/2\pi c_b = 0.122$ . La línea vertical punteada indica la zona donde el campo de presión es procesado para obtener la relación de dispersión de los modos. (b) Perfil de amplitud normalizada del campo de presión de los modos evanescentes a lo largo de la dirección-x. Se obtiene en un plano ecuatorial entre dos filas de elementos de dispersión.

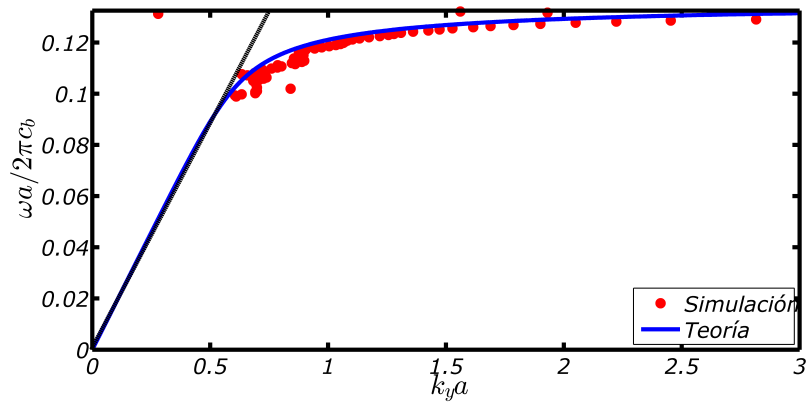


Figura 8.8: Relación de dispersión de los estados superficiales obtenidos en la interfaz del metamaterial, donde el metamaterial consiste en una distribución hexagonal de unidades dispersivas cilíndricas representada en la Fig.8.1. Los parámetros geométricos que definen las unidades de dispersión son:  $R_a = 0.5R_b$ ,  $Rb = h = 0.47a$ ,  $L = 3.5h$  y  $\alpha = \pi/8$ , donde  $a$  es el parámetro de red. La línea continua representa los resultados obtenidos usando el método de adaptación de modos (mode matching) mientras que los símbolos son los resultados obtenidos en las simulaciones  $3D$  basadas en elementos finitos. La línea negra discontinua describe la propagación en el medio que rodea el metamaterial, aire en este caso  $\omega = k_b c_b$



del campo de presiones evaluada a lo largo de la línea discontinua representada en la figura 8.7a que es paralela a la interfaz aire/metamaterial para  $x = 9a$ . La respuesta obtenida se representa mediante símbolos en la figura 8.8. La línea continua representada en esta figura corresponde a la relación de dispersión teórica obtenida previamente (ver 8.2.7).

La relación de dispersión de los estados superficiales, mostrada en la figura 8.8, es similar a la de los plasmones superficiales, ya que se localizan en la superficie del metamaterial y aparecen a frecuencias por debajo de la línea de luz  $k_b c_b$ , que es representada por una línea discontinua negra en la figura 8.8. Cabe señalar que en esta figura existen pequeñas discrepancias entre los datos obtenidos en la simulación y los datos obtenidos por el modelo analítico. Esta desviación es debido a que en el enfoque teórico se aproxima el coeficiente de anisotropía  $\gamma$  a 0. Por otra parte, valores elevados de  $k_y$  conducen a longitudes de onda pequeñas a lo largo del eje  $y$ , por tanto la distribución ya no se comporta como un metamaterial homogéneo. Este hecho conduce a los puntos espúreos observados en las frecuencias más altas de la figura 8.8. No obstante, se ha obtenido una gran concordancia entre el modelo teórico y el experimento numérico.

### 8.3. Aplicaciones de metamateriales con $\rho^* \approx 0$

La contraparte electromagnética de los metamateriales acústicos con densidad cercana a cero ( $\rho^* \approx 0$ ) son aquellos materiales que presentan una permitividad dieléctrica  $\epsilon^*$  cercana a cero ( $\epsilon^* \approx 0$ ) que han sido propuestos para una variedad de aplicaciones, como el manto de invisibilidad (cloaking) [AE05, WL13], efecto túnel para ondas electromagnéticas a través de canales estrechos [SE06, LCH<sup>+</sup>08, EAY<sup>+</sup>08] y control del patrón de la radiación [ASSE07], ya que todos los fenómenos citados explotan básicamente la condición de velocidad de fase infinita de las ondas electromagnéticas que presentan los materiales con  $\epsilon^* \approx 0$ . Se espera un comportamiento similar en la contraparte acústica cuando se trabaja con metamateriales con  $\rho^* \approx 0$ .

En esta sección se expone, a través de simulaciones basada en elementos finitos, que las estructuras introducidas pueden ser empleadas para desarro-

llar aplicaciones similares. En particular, se demuestra teóricamente el efecto túnel a través de canales estrechos, la transmisión perfecta a través de un codo de 90 o varios canales y la filtración de modos verticales.

### 8.3.1. Efecto Túnel para ondas acústicas a través de canales estrechos

Una aplicación del metamaterial propuesto es la posibilidad de pasar gran parte de la energía de propagación del sonido  $2D$  a través de un canal ultra estrecho, como ha sido recientemente demostrado en su contraparte electromagnética [LCH<sup>+</sup>08, EAY<sup>+</sup>08]. Como en el caso de ondas electromagnéticas, el fenómeno puede ser explicado en términos de la velocidad de fase efectiva, que es infinita dentro del metamaterial ( $\rho^* \approx 0$ ). En resumen, como  $c^* = \sqrt{B^*/\rho^*}$ , para las frecuencias seleccionadas tenemos una  $\rho^* \simeq 0$ , por lo que  $c^* \rightarrow \infty$  y consecuentemente el vector de onda dentro del metamaterial  $k^M = \frac{\omega}{c^*} \rightarrow 0$ , implicando que la fase en el interior del metamaterial no avanza mientras el sonido avanza por el interior del mismo.

Cabe señalar que las reflexiones son evitadas en la interfaz aire/metamaterial mediante la selección de una frecuencia particular  $\omega_0$  que verifica una condición adicional en la que se consigue un acoplamiento perfecto de impedancias con el aire, en otras palabras,  $Z^*(\omega) = \rho^*(\omega)c^*(\omega) = \rho_b(\omega)c_b(\omega) = Z_b(\omega)$ . Ambas condiciones permiten el fenómeno de efecto túnel a través de un canal estrecho existente en el interior del metamaterial DNZ, como se muestra en la figura 8.9b. Esta figura muestra una instantánea de la transmisión de la onda del sonido a una frecuencia  $\omega a/2\pi c_b = 0.1455$  a través de un metamaterial al que se le ha introducido un canal estrecho. El metamaterial está formado por nueve capas de las estructuras analizadas y el canal presenta una anchura en la dirección del eje  $y$  de un parámetro de red  $a$  y una anchura en la dirección del eje  $x$  de  $2R_b$ . Nótese que  $a$  es la longitud mínima del canal que se puede construir con el metamaterial objeto de estudio. La figura 8.9a muestra el resultado que se obtiene cuando se usa la misma configuración pero sin el metamaterial. Como se puede observar parte de la onda incidente se refleja debido a la presencia de la pared rígida, mientras que la onda transmitida ya no presenta un frente de onda plano. Es interesante señalar que el comportamiento mostrado en la figura 8.9b ha sido obtenido en una región en

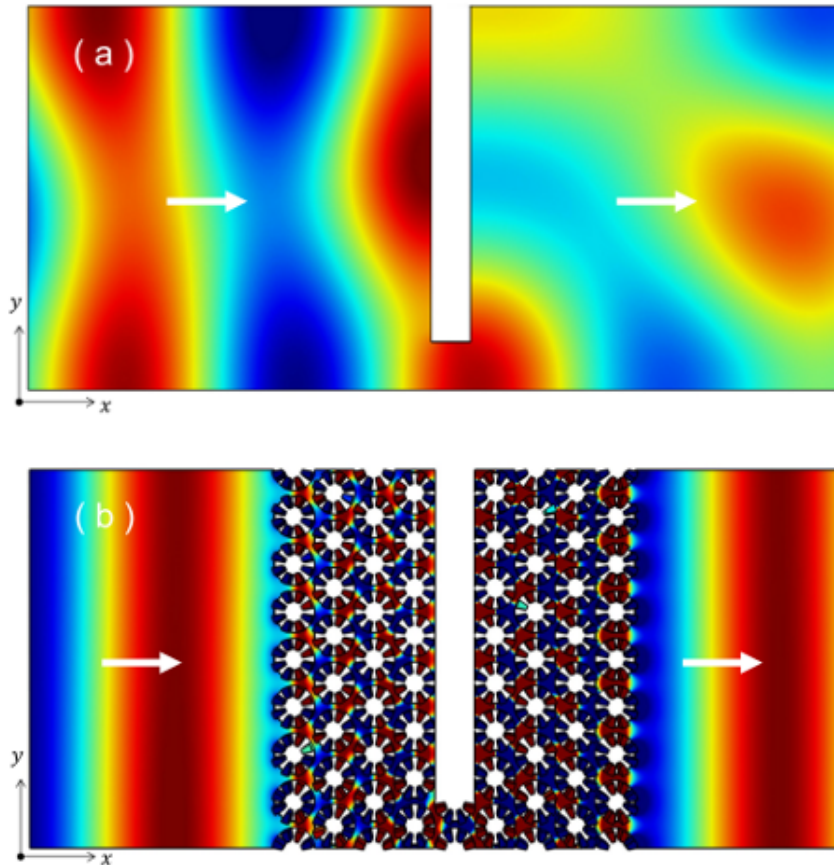


Figura 8.9: (a) Mapa del campo de presión obtenido en la propagación del sonido a través de canales estrechos. La franja blanca representa una pared rígida. (b) Mapa de presión resultante cuando el canal está localizado en el interior de un metamaterial con  $\rho^* \approx 0$  compuesto por las estructuras representadas en 8.1. La flechas blancas indican la dirección de propagación de la onda.

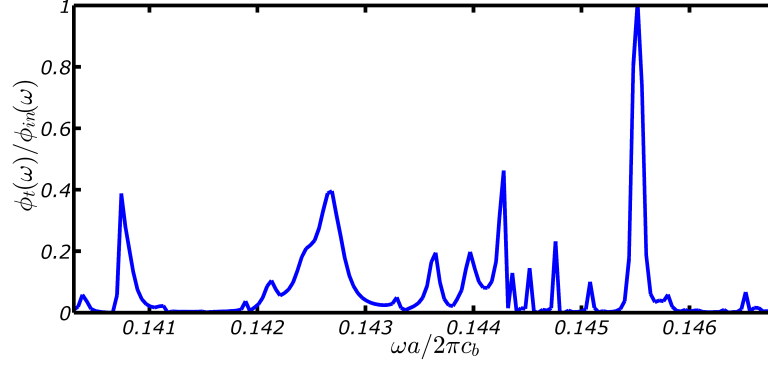


Figura 8.10: Energía de flujo transmitido a través del metamaterial mostrado en la figura 8.9(b). Los valores son obtenidos en el intervalo en frecuencia donde el metamaterial es doblemente negativo (ver figura 8.4). La unidad de transmisión se produce a una frecuencia  $\omega a/2\pi c_b = 0.1455$  donde el efecto túnel tiene lugar.

frecuencia donde el metamaterial es doblemente negativo.

Con el fin de determinar la cantidad de energía sonora que se transmite a través del canal se ha calculado el flujo de energía transmitido  $\phi_t$  y se ha comparado con el flujo de energía incidente  $\phi_{in}$ . La figura 8.10 muestra el flujo transmitido normalizado respecto al flujo incidente. El flujo de energía que pasa a través de una superficie  $S$  en una posición arbitraria se calcula mediante la siguiente expresión

$$\phi(x; \omega) = \int \int_S \text{Re}(P(\omega)v_x^*(\omega)dS_x), \quad (8.3.1)$$

donde  $dS_x$  es el área perpendicular al eje  $x$ ,  $v_x^*$  es el complejo conjugado de la componente  $x$  de la velocidad y  $P$  es el campo de presiones. Cabe señalar que la transmisión perfecta se obtiene a  $\omega a/2\pi c_b = 0.1455$ , frecuencia que corresponde a la instantánea del efecto túnel representada en la figura 8.9b. También hay que tener en cuenta que el efecto túnel aparece a una frecuencia correspondiente a una longitud de onda mucho más grande que la anchura del canal  $a$ , es decir  $\lambda = 6.0a$ .

El efecto túnel se puede obtener para grandes longitudes de onda comparadas con la apertura del canal mediante el uso de metamateriales que presenten una mayor longitud de cavidad  $L$  (ver figura 8.3) ya que el com-

portamiento de  $\rho^* \approx 0$  se obtiene a frecuencias más bajas. La simulación numérica mostrada en la figura 8.9b junto con la unidad de transmisión obtenida a la misma frecuencia confirma el “estrechamiento de la onda acústica” en el canal con un desplazamiento de fase insignificante a través del metamaterial aquí introducido.

### 8.3.2. Control del campo de radiación

Un trabajo reciente de Wei y colaboradores [WCL13] investiga sobre la propagación de ondas en  $2D$  de metamateriales acústicos con índice de refracción cercano a cero ( $n^* \approx 0$ ) y con ( $\rho^* \approx 0$ ) que incluyen defectos. Aunque no proponen ninguna estructura específica con las propiedades bajo estudio, sus simulaciones indican una transmisión total, una refracción total y una transmisión ajustable que puede ser alcanzada mediante la introducción adecuada de defectos. En particular se muestra un efecto de invisibilidad acústica. Resultados similares se pueden obtener mediante las estructuras artificiales analizadas seleccionando para ello frecuencias donde se obtengan  $n^* \approx 0$  y  $\rho^* \approx 0$ . Sin embargo en esta sección vamos a analizar otra aplicación interesante de los metamateriales  $\rho^* \approx 0$ : el control del campo de radiación.

Considérese la dispersión de una onda plana que incide en un defecto localizado en una guía de ondas  $2D$  vacía. Por simplificación suponemos que el defecto es un elemento de dispersión rígido con sección circular y radio  $R_d$ . El campo dispersado presenta un patrón complejo como se muestra en la figura 8.11a. Obsérvese que el campo radiado contiene ondas planas de orden superior a cero. Sin embargo, si ponemos un metamaterial DNZ a una cierta distancia detrás del elemento dispersor rígido el frente de onda plano se recupera perfectamente. Este fenómeno se observa en la figura donde se muestra una instantánea del campo de presiones para el sistema descrito. Cabe señalar que el metamaterial  $\rho^* \approx 0$  está formado por tres capas de estructuras artificiales.

La figura 8.11b demuestra como se transforma el complejo patrón de radiación de campo a la salida del metamaterial: El campo de radiación a la salida presenta una forma conforme a la superficie  $S$  de salida del metamaterial debido a que la variación de fase en el interior del mismo es muy pequeña. De esta manera se consigue filtrar todas las componentes transver-

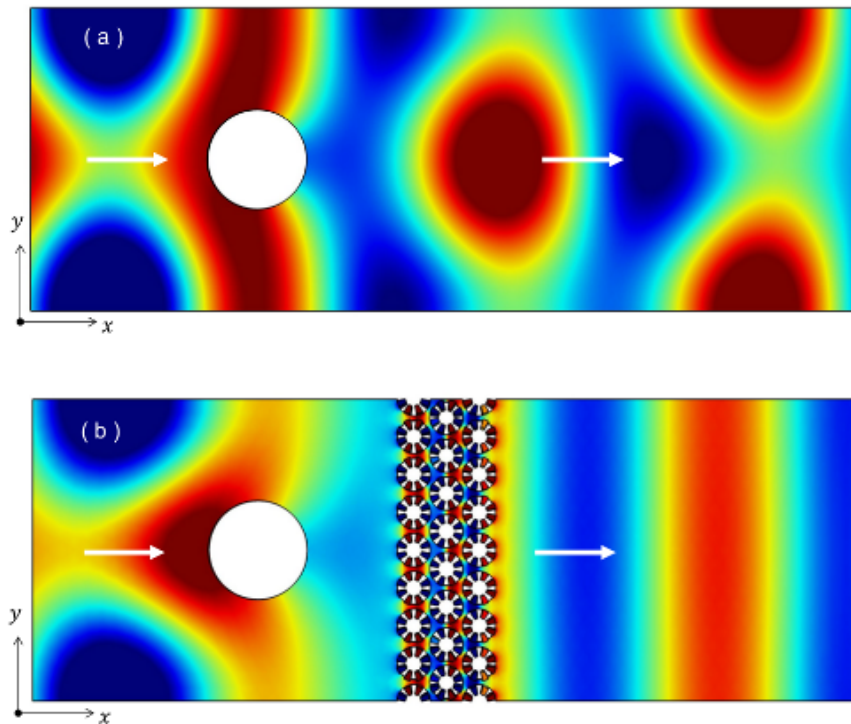


Figura 8.11: (a) Mapa de presión (parte real) del sonido dispersado por una cilindro rígido (círculo blanco). (b) Mapa de presión en el que un metamaterial  $\rho^* \approx 0$  se coloca detrás del cilindro rígido. Las flechas blancas representan la dirección de la propagación del sonido. Se observa que los modos de orden superior al cero, que aparecen como resultado de la dispersión debida al cilindro rígido, son completamente suprimidos a la salida del metamaterial.

sales de las ondas viajeras. A pesar de las simplificaciones empleadas para definir la forma del defecto dispersor y sus propiedades acústicas, la principal conclusión es completamente general y puede extenderse a cualquier tipo de forma y material que el defecto dispersivo forme. De hecho este resultado se puede considerar una aplicación de los metamateriales  $\rho^* \approx 0$  como medio para la adaptación del patrón de fase de la radiación de fuentes arbitrarias, una aplicación que fue previamente presentada para materiales EM con  $\epsilon^* \approx 0$  [ASSE07].

### 8.3.3. Transmisión perfecta a través de curvas cerradas y esquinas

La idea de transmisión perfecta de ondas EM a través de canales estrechos rodeados de metamateriales  $\epsilon^* \approx 0$  puede extenderse al caso en el que los metamateriales  $\epsilon^* \approx 0$  forman curvas cerradas o esquinas [SE06]. Como en el caso de la transmisión a través de canales estrechos, el valor extremadamente grande de la longitud de onda dentro del metamaterial implica que la onda tiene que ser capaz de propagarse con pérdidas de reflexiones despreciables a través de curvas cerradas o cruces [LXC<sup>+</sup>12]. En la contraparte acústica, los metamateriales DNZ pueden ser empleados como medios que presenta una transmisión perfecta del sonido en el interior de una guía de ondas 2D con curvas cerradas o esquinas. Como ejemplo se ha estudiado el caso en el que el metamaterial  $\rho^* \approx 0$  objeto de estudio se usa como enlace entre dos guías que presenta la misma anchura.

La figura 8.12 representa la transmisión a través de una curva de 90° en la que los brazos horizontales y verticales de la guía de ondas presenta una anchura de tres veces el parámetro de red. Obsérvese que la onda del sonido pasa a través de la esquina sin reflexión manteniéndose el frente de ondas plano. La contraparte EM del fenómeno ha sido demostrada experimentalmente usando materiales  $\epsilon^* \approx 0$  por Edwards y colaboradores [EASE09].

### 8.3.4. Divisor de ondas acústicas

A parte de las aplicaciones basadas en una guía simple los metamateriales  $\rho^* \approx 0$  también permiten el diseño de redes que contienen más de dos puertos. Un ejemplo consiste en un divisor de ondas, donde la energía de la señal

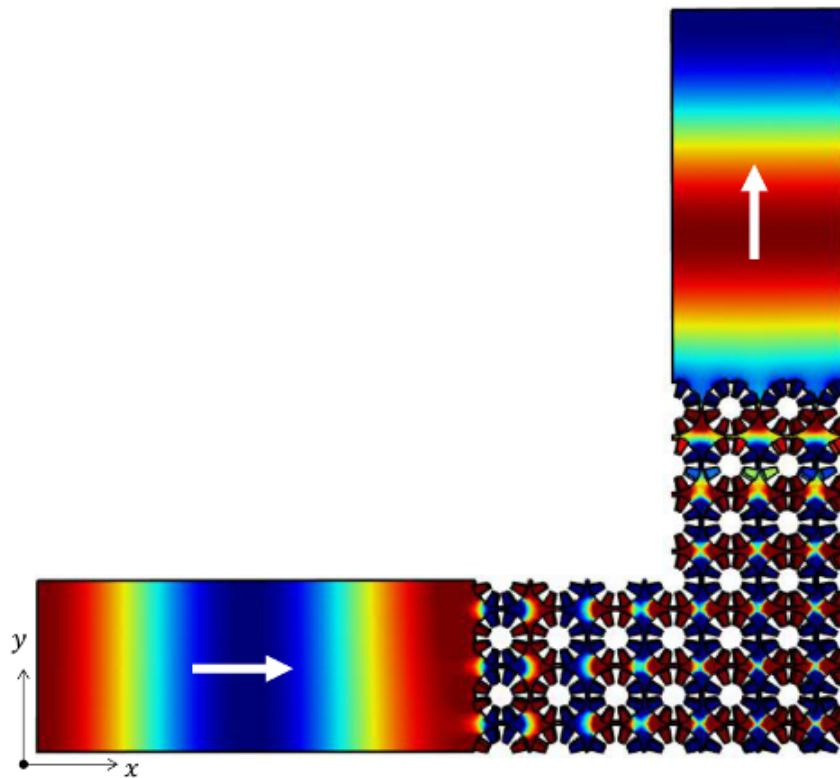


Figura 8.12: Instantánea del campo de presión (parte real) que muestra la transmisión a través de una curva de una guía de ondas que tiene una curva de  $90^\circ$ . Nótese que se ha introducido un metamaterial con  $\rho^* \approx 0$  para conseguir la transmisión perfecta.



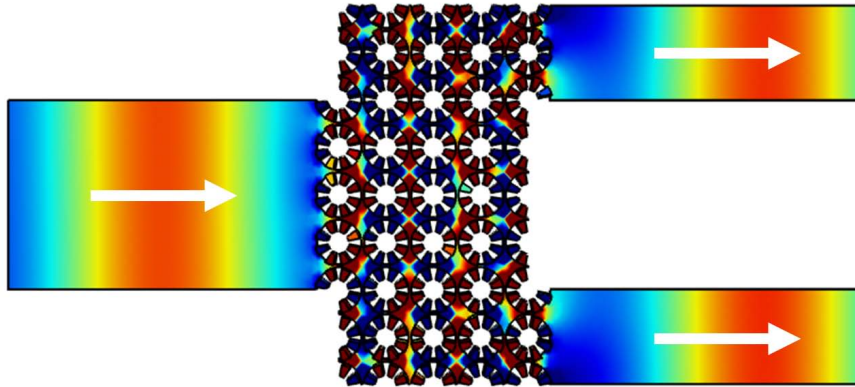


Figura 8.13: Mapa de presión de un divisor de onda basado en metamaterial  $\rho^* \approx 0$ . La energía del puerto de entrada se transfiere a las salidas de la guía de ondas. Las flechas blancas indican la dirección de propagación del sonido.

de entrada es dividida en múltiples salidas. Este tipo de dispositivo ha sido propuesto recientemente para ondas EM mostrando que se puede proporcionar una distribución perfecta de potencia, independiente de su forma y de la sección transversal, así como del número de salidas y orientación [OMP13]. Cabe señalar que esas características se logran siempre que la suma de las secciones transversales de todas las salidas sea igual a la del puerto de entrada. En la figura 8.13 se muestra un divisor de guía de onda donde la energía del puerto de entrada (puerto izquierdo) es transmitida a dos puertos (puertos de la derecha). La anchura del puerto de entrada es de  $4a$ , cada puerto presenta una anchura de  $2a$ , la frecuencia de operación y los parámetros geométricos son los que se emplearon en las secciones anteriores. Debido a la existencia de una transmisión de energía perfecta no se observan reflexiones en la entrada mientras que la amplitud de la onda de salida coincide con la amplitud de la onda incidente. Cabe señalar que este dispositivo se puede usar de manera inversa, de tal forma que se obtendría un combinador, si ambos puertos son simultáneamente excitados transmitiendo su energía hacia el puerto izquierdo.

## 8.4. Caracterización experimental

En esta sección se exponen los resultados experimentales obtenidos en la caracterización de las estructuras artificiales propuestas. Para ello se fabricaron dos muestras, hechas en plástico con una impresora 3D. El plástico utilizado presenta los siguientes parámetros una densidad  $\rho = 1050 \text{ Kg/m}^3$  una velocidad del sonido transversal  $c_t = 880.91 \text{ m/s}$  y longitudinal  $c_l = 1833 \text{ m/s}$ , pudiéndose considerar que las muestras son acústicamente rígidas con respecto al aire. En la figura 8.14 se pueden ver las fotografías de las muestras utilizadas. Las muestras se fabrican de una sola pieza incluyendo los elementos dispersores cilíndricos, la superficie superior de la guía de ondas 2D y las paredes laterales. Estas paredes permiten realizar el encaje de la pieza en la guía de ondas.

La muestra A, mostrada en la figura 8.14a, consiste en 7 filas de centros dispersivos con parámetros  $R_b = 9.8\text{mm}$ ,  $R_a = R_b/2$ ,  $h = 9\text{mm}$ ,  $L = 3.5h$  y  $\alpha = \pi/8$ . Estos se distribuyen en una red hexagonal con un parámetro de red constante  $a = 21\text{mm}$ , que corresponde a una fracción de llenado del 70%. La muestra B, mostrada en la figura 8.14b, es fabricada con centros dispersivos más pequeños ( $R_b = 7\text{mm}$ ), siendo la fracción de llenado del 40%. La longitud de las cavidades perforadas en la parte inferior de la guía de ondas son  $L = 3.5h$  y  $L = 2.5h$  para las muestras A y B, respectivamente. La longitud de la muestra viene determinada por el número de filas, mientras que la anchura corresponde a un parámetro de red  $a$ , de tal manera que las paredes laterales actúan como un espejo. Por lo tanto, las muestras pueden ser consideradas infinitas a lo largo de los laterales.

La guía donde inciden y se transmiten las ondas consiste en un tubo de aluminio de altura  $h$  y anchura  $a$ . La muestra se coloca en el centro de la guía de onda dejando una longitud de  $1.5m$  en cada lado. En un lado del tubo se coloca un altavoz para proporcionar una señal de excitación, y un micrófono *B&k* – 4958 se coloca al otro lado de la muestra a una distancia de  $20\text{cm}$  respecto del centro de la muestra. Cabe decir que la guía de ondas tiene una longitud finita produciéndose reflexiones no deseadas en ambos extremos. Para evitar los ecos se ha empleado una técnica de medida pulsada. En resumen, la técnica emplea como señal de excitación un pulso corto que contiene todas las frecuencias de interés; cuando la señal es emitida

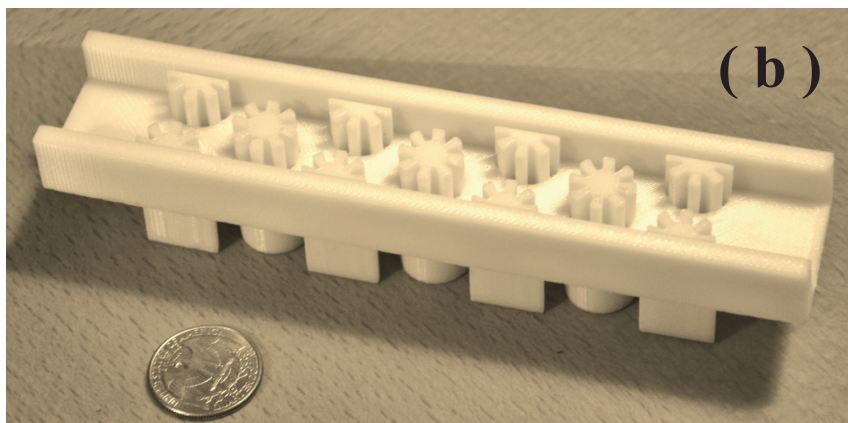
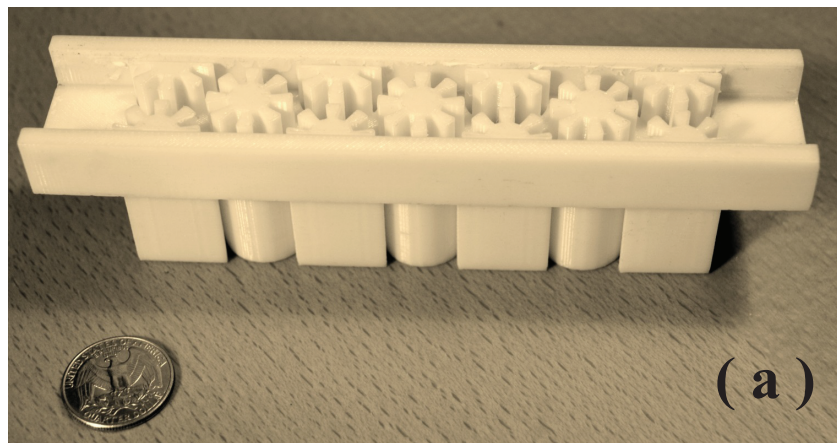


Figura 8.14: Fotografías de las muestras fabricadas con una impresora 3D. Las unidades de dispersión están ordenadas en una red hexagonal de parámetro de red ( $a = 21mm$ ), con radio exterior  $R_b = 9.2mm$  para la muestra en (a), y  $R_b = 7mm$  para la muestra en (b). La fracción de llenado correspondiente es de 70% y 40%, respectivamente.

el micrófono adquiere los datos hasta la llegada del primer eco. Este proceso se lleva a cabo varias veces obteniéndose así el promedio de la presión con el fin de mejorar la relación señal-ruido.

Debido a las enormes pérdidas medidas a la hora de adquirir los resultados experimentales, la caracterización se realizó estudiando las pérdidas de inserción (insertion Loss, IL). Para ello, primero se midió la dependencia en frecuencia del campo transmitido  $P_t$  para cada muestra. Una vez obtenido se midió la presión de referencia  $P_0$ , repitiendo la medida en las mismas condiciones, pero esta con la guía vacía. Mediante estas dos medidas se obtienen las pérdidas de inserción  $IL = P_t/P_0$ . Este resultado se muestra en la figura 8.15 y se compara con la inversa del coeficiente de transmisión obtenido mediante simulaciones basadas en elementos finitos (Comsol Multiphysics). Como se puede observar ambas muestras presentan un “gap” caracterizado mediante un perfil que muestra una alta atenuación.

Es importante señalar las pérdidas observadas en todo el espectro, incluso con la guía vacía. Estas pérdidas son debidas a las pequeñas dimensiones de la guía de tal manera que la energía es disipada debido a la fricción viscosa en las paredes de la guía y de la muestra. Como consecuencia, el pico de transmisión debido a la doble negatividad no se puede detectar experimentalmente; sin embargo, la posición de los “gaps” donde estas estructuras responden dinámicamente con negatividad simple han sido correctamente caracterizadas. Este resultado es alentador ya que la densidad dinámica de masa en aire sólo se ha obtenido mediante estructuras compuestas de membranas [PPL<sup>+</sup>11]. Se espera que se disminuya las pérdidas por viscosidad para estructuras con dimensiones escogidas apropiadamente, esperando observar fenómenos asociados a la doble negatividad y a la densidad cercana a cero.

## 8.5. Resumen

En resumen, se ha introducido un nuevo tipo de estructura bidimensional basada en unidades dispersivas que presentan una anisotropía angular. Los parámetros efectivos se pueden sintonizar mediante el ajuste de los parámetros físicos que caracterizan a la unidad dispersiva. Para las unidades analizadas en este trabajo se ha demostrado que los metamateriales exhiben comportamientos de simple negatividad, doble negatividad y densidad cercana a

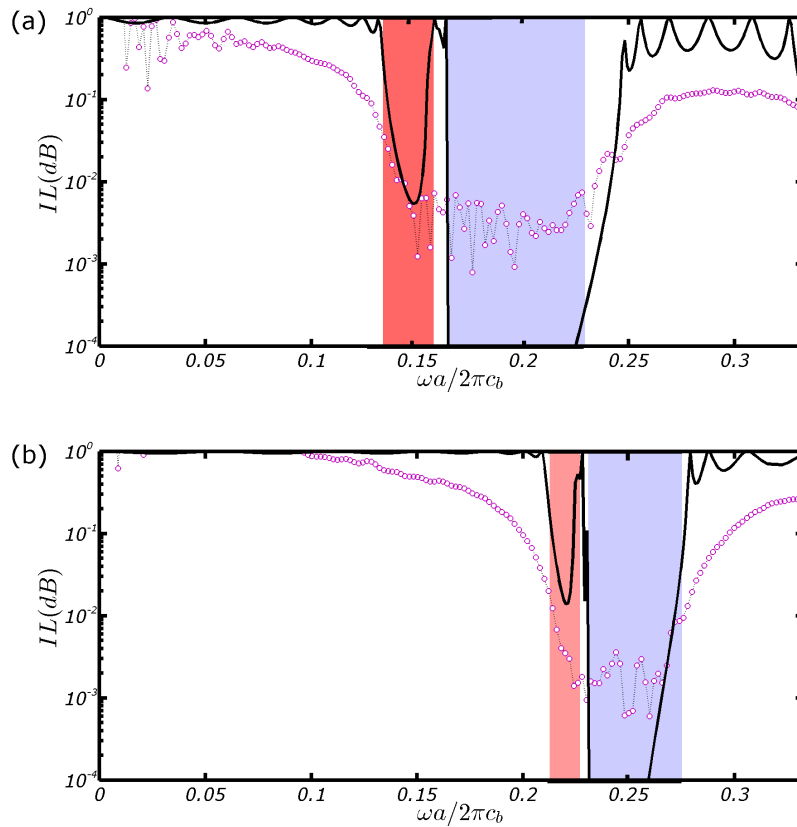


Figura 8.15: (a) Transmitancia de la muestra A en función de la frecuencia. La línea de puntos representa la medida experimental y la línea continua la teórica. La longitud de esta muestra corresponde a  $L = 31.5\text{mm}$ . (b) Corresponde a los resultados obtenidos en la muestra B donde  $L = 22.5\text{mm}$ . Los cálculos teóricos han sido realizados mediante elementos finitos. Las regiones sombreadas definen las frecuencias donde los parámetros acústicos toman valores negativos de acuerdo con la teoría de homogenización. Los picos de la transmitancia corresponden a las frecuencias donde las muestras se comportan como un metamaterial doblemente negativo.

cero, dependiendo de la región en frecuencia de trabajo. En particular, se ha demostrado que para frecuencias donde el metamaterial exhibe una densidad dinámica de masa negativa esta estructura puede usarse para la amplificación de ondas evanescentes y, por tanto, para la fabricación de dispositivos acústicos que presenten super-resolución.

Por otra parte, en las regiones en frecuencia donde el metamaterial presenta un comportamiento doblemente negativo y una densidad dinámica de masa cercana a cero se ha mostrado que las estructuras pueden ser usadas para diseñar dispositivos acústicos que permiten a la onda acústica desplazarse a través de canales extremadamente estrechos, o que actúen como filtros de modos transversales, así como para una perfecta transmisión a través de curvas cerradas y esquinas.

Sin embargo mientras que en la caracterización de las muestras fabricadas se podían observar la densidad de masa negativa, el comportamiento doblemente negativo que se esperaba obtener en las muestras ha sido completamente enmascarado debido a la fuerte absorción observada en todo el rango de frecuencias. Debido a que los materiales constitutivos no presentan pérdidas de manera intrínseca, la fuerte atenuación observada es atribuida a las pérdidas por viscosidad en aire, concluyendo que una realización práctica de los metamateriales aquí propuestos deberían realizarse aumentando la dimensión de los mismos, donde se espera que las pérdidas por viscosidad sean más pequeñas.

Este capítulo está basado en:

1. – Rogelio Graciá-Salgado, Victor Manuel García-Chocano, Daniel Torrent, and José Sánchez-Dehesa *Negative mass density and  $\rho$ -near-zero quasi-two-dimensional metamaterials: Design and applications* Phys. Review. B. Vol. **88**, art. nro. 224305, pp.1 – 12 (2013)



# Capítulo 9

## Observaciones finales

En este capítulo se resumen los principales resultados obtenidos a lo largo de este trabajo. Se muestra que aunque este trabajo ha resuelto varios problemas de interés ha abierto nuevos problemas que merecen ser estudiados más exhaustivamente.

### 9.0.1. Conclusiones

Es evidente que el comportamiento a bajas frecuencias de un cristal sónico nos abre la posibilidad de diseñar nuevos metamateriales acústicos que exhiben propiedades inusuales que no existen en la naturaleza. Concretamente en este trabajo se ha centrado en el diseño de metamateriales acústicos cuasi-bidimensionales localizados en el interior de una guía de ondas cuyas unidades dispersivas están formadas por elementos que se consideran acústicamente rígidos.

Mediante el estudio de las propiedades refractivas de los metamateriales se diseñó un nuevo dispositivo refractivo basado en cavidades que permite la focalización del campo acústico en una región del espacio. Mediante una prueba de concepto se demostró que las propiedades refractivas del dispositivo no se quedan confinadas en la guía de ondas, sino que se acoplan al espacio libre.

A través del estudio de los parámetros efectivos que caracterizan al metamaterial acústico se han obtenido metamateriales acústicos que nos permiten obtener un comportamiento de simple o doble negatividad en sus parámetros efectivos, abriendo así la posibilidad de fabricar nuevos dispositivos acústicos.



La implementación de este tipo de metamateriales está exenta del uso de membranas, ya que están basadas en estructuras que son consideradas acústicamente rígidas, dando de esta manera una mayor robustez al sistema.

Las propiedades acústicas de los metamateriales estudiados a lo largo de este trabajo pueden ser fácilmente seleccionadas mediante el diseño apropiado de los parámetros geométricos que definen la unidad dispersiva.

Además de la obtención de los parámetros negativos, se han podido obtener metamateriales que presentan una densidad cercana a cero. Dicho comportamiento probablemente es el que mayor impresión provoca, ya que permite la observación del efecto túnel y abre la posibilidad al diseño de nuevos dispositivos acústicos como, por ejemplo, filtro de modos verticales, divisor de ondas, ect . . . .

### 9.0.2. Trabajo Futuro

Los resultados obtenidos en el presente trabajo sugieren que es posible la obtención de metamateriales acústicos que presenten ambos parámetros, densidad y módulo de compresibilidad efectivos, negativos a través de unidades de dispersión que son consideradas acústicamente rígidas. No obstante, la verificación experimental de este comportamiento en los metamateriales propuestos no se ha realizado todavía debido a las pérdidas observadas en las muestras consideradas.

Es evidente, por tanto, que es necesario un estudio sobre la absorción de las ondas acústicas para llegar a entender que factores son los relevantes en la absorción de dichas ondas y poder diseñar muestras que presenten poca absorción, evitando de esta manera el enmascaramiento del comportamiento doblemente negativo del metamaterial.

Por otra parte, aunque el metamaterial estudiado en el capítulo 8 muestra un comportamiento doblemente negativo, se hace necesario diseñar metamateriales que sean fácilmente implementables y robustos que permitan la obtención de los parámetros efectivos negativos en un amplio rango de frecuencias y que presenten pocas pérdidas.

Finalmente, cabe mencionar que mediante un estudio experimental preliminar se observó que es posible el acoplamiento de las propiedades del dispositivo refractivo (lente acústica) al espacio libre, abriendo por tanto, un

posible estudio en el que se comprenda los mecanismos que permiten que dicho acoplamiento sea posible.



# Apéndice A

## Funciones de Bessel

### A.1. Relaciones básicas

#### A.1.1. Ecuación diferencial de Bessel y soluciones

Las funciones de Bessel son soluciones canónicas  $\Psi_q$  de la ecuación diferencial de Bessel

$$\left( x^2 \frac{d^2 \Psi_q(x)}{dx^2} + x \frac{d \Psi_q(x)}{dx} + (x^2 - q^2) \right) \Psi_q(x) = 0, \quad (\text{A.1.1})$$

donde  $q$  puede ser un número real o complejo y es el orden de las funciones de Bessel.

La ecuación de Bessel aparece cuando se buscan soluciones de la ecuación de Helmholtz o de la ecuación de Laplace mediante separación de variables en coordenadas tanto cilíndricas como esféricas. Por ello las funciones de Bessel son importantes en cualquier problema descrito por las ecuaciones anteriormente mencionadas en simetrías cilíndrica y esférica. Cuando se resuelve la ecuación de Bessel en coordenadas cilíndricas el orden de la función de Bessel es un número entero, por la simetría del problema verificando así la periodicidad angular.

Como la ecuación de Bessel es una ecuación de orden dos, tiene dos soluciones que son linealmente independientes. La solución regular de la ecuación de Bessel es la llamada función de Bessel que para  $q$  enteros es

$$J_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+q+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+q}. \quad (\text{A.1.2})$$

La función de Bessel para órdenes enteros cumple la siguiente propiedad

$$J_{-q}(x) = (-1)^q J_q(x). \quad (\text{A.1.3})$$

Esta última relación nos indica que la función de Bessel de órdenes enteros negativos no es linealmente independiente y, por tanto, no puede ser la segunda solución de la ecuación de Bessel.

La segunda solución linealmente independiente de las funciones de Bessel  $J_q(\cdot)$  son las denominadas funciones irregulares de Bessel

$$Y_q(x) = \lim_{p \rightarrow q} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, \quad (\text{A.1.4})$$

y también verifica la propiedad

$$Y_{-q}(x) = (-1)^q Y_q(x). \quad (\text{A.1.5})$$

En este trabajo, la llamada función de Hankel de primera especie es usada para presentar las ondas dispersivas salientes, y son las soluciones más usadas para las soluciones no regulares

$$H_q(x) = J_q(x) + iY_q(x). \quad (\text{A.1.6})$$

### A.1.2. Relaciones de recurrencia

En esta sección se indican algunas relaciones de recurrencia que verifican las funciones de Bessel irregulares y regulares (el símbolo ' representa la derivada respecto al argumento).

$$\Psi_{q+1}(x) = \frac{2q}{x} \Psi_q(x) - \Psi_{q-1}(x), \quad (\text{A.1.7})$$

$$\Psi'_{q+1}(x) = \frac{1}{2}[\Psi_{q-1}(x) - \Psi_{q+1}(x)], \quad (\text{A.1.8})$$

$$\Psi''_{q+1}(x) = \frac{1}{4}[\Psi_{q-2}(x) - 2\Psi_q(x) + \Psi_{q+2}(x)]. \quad (\text{A.1.9})$$

### A.1.3. Formas asintóticas para argumentos pequeños

En este apartado se indican las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel y Hankel para el límite cuando el argumento  $x \rightarrow 0$ . La función de Bessel se puede aproximar en

$$J_q(x) \approx \frac{1}{q!} \frac{x^q}{2^q} \left[ 1 - \frac{x^2}{4(q+1)} \right], \quad (\text{A.1.10})$$

mientras que la función de Hankel se aproxima por

$$H_q(x) = \begin{cases} -\frac{i(q-1)!}{\pi} \frac{2^q}{x^q} & q > 0, \\ \frac{2i}{\pi} \ln x & q = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.11})$$

Con las expresiones de arriba se puede ver que la forma asintótica para la primera derivada de la función de Bessel viene expresada por

$$J'_q(x) = \begin{cases} \frac{1}{(q-1)!} \frac{x^{q-1}}{2^q} & q > 0, \\ -\frac{x}{2} & q = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1.12})$$

mientras que para la función de Hankel es

$$H_q(x) = \begin{cases} \frac{iq!}{\pi} \frac{2^q}{x^{q+1}} & q > 0, \\ \frac{2i}{\pi x} & q = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.13})$$

### A.1.4. Formas asintóticas para argumentos grandes

En el límite en el que el argumento de la funciones de Bessel y Hankel  $x \rightarrow \infty$  se pueden expresar como

$$J_q(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{q\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{A.1.14})$$

$$Y_q(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{q\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{A.1.15})$$

$$H_q(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (-i)^q e^{i\pi/4} e^{ix}. \quad (\text{A.1.16})$$

### A.1.5. Forma integral de las funciones de Bessel

La representación integral de las funciones de Bessel y Hankel son de especial utilidad cuando se tratan problemas de dispersión.

La representación integral para la función de Bessel es

$$J_q(x) = \frac{i^{-q}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \tau} e^{iq\tau} d\tau. \quad (\text{A.1.17})$$

La representación integral para la función de Neumann es

$$Y_q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \tau - q\tau) d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{qt} + (-1)^q e^{-qt} \right] e^{-x \sinh t} dt. \quad (\text{A.1.18})$$

Con las expresiones anteriores se obtiene la expresión integral de las función de Hankel

$$H_q(x) = \frac{i^{-q}}{\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon + \pi i} e^{x \sinh t} e^{-qt} dt. \quad (\text{A.1.19})$$

Si reemplazamos  $t = i(\pi/2 - \tau)$  encontramos

$$H_q(x) = \frac{i^{-q}}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{i\epsilon - \pi/2}^{-i\epsilon + \pi/2} e^{ix \cos \tau} e^{iq\tau} d\tau. \quad (\text{A.1.20})$$

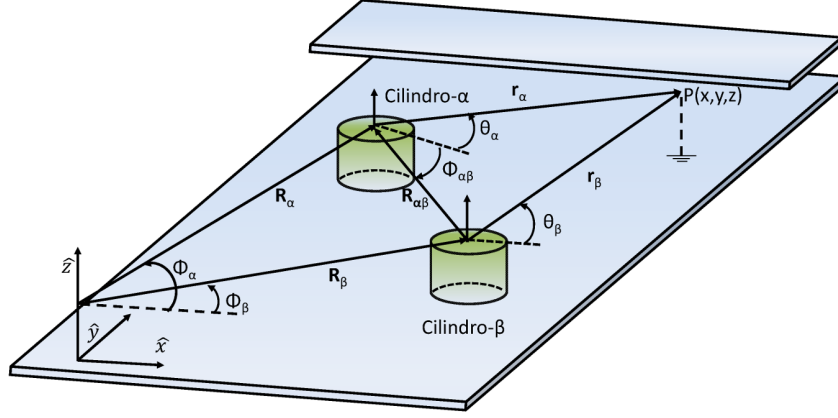


Figura A.1: Figura de la sección 3.7

## A.2. Teorema de adición: caso bidimensional

El teorema de adición permite un cambio en el sistema de referencia de las funciones de Bessel. El teorema establece que

$$\Psi_s(w)e^{i\theta_w u} = \sum_q \Psi_{s+q}(u)J_q(v)e^{iq\theta_{uv}}, \quad v < u \quad (\text{A.2.1})$$

donde las funciones  $\Psi_q(\cdot)$  pueden ser funciones de Bessel o de Hankel y las cantidades  $u, v, w, \theta_{wu}, \theta_{vu}$  están definidas en la figura A.1.

En la teoría de la dispersión múltiple descrita en la sección 3.7 el objetivo es expresar la cantidad

$$H_s(kr_\beta)e^{iqr_\beta}, \quad (\text{A.2.2})$$

en el sistema de referencia del cilindro  $\alpha$ .

Para la geometría considerada en la figura A.1 el triángulo que envuelve el cambio de sistema de referencia es el definido por  $r_\alpha, r_\beta$  y  $R_{\alpha\beta}$ . Es importante relacionar este triángulo con el triángulo  $\widehat{uvw}$ .

A partir de la figura A.2 se puede ver  $w = r_\beta$  ya que  $r_\beta$  es la variable de la función a la que se le aplica el cambio de referencia. Ya que este cambio es necesario para aplicar las condiciones de contorno, en el nuevo marco  $r_\alpha$



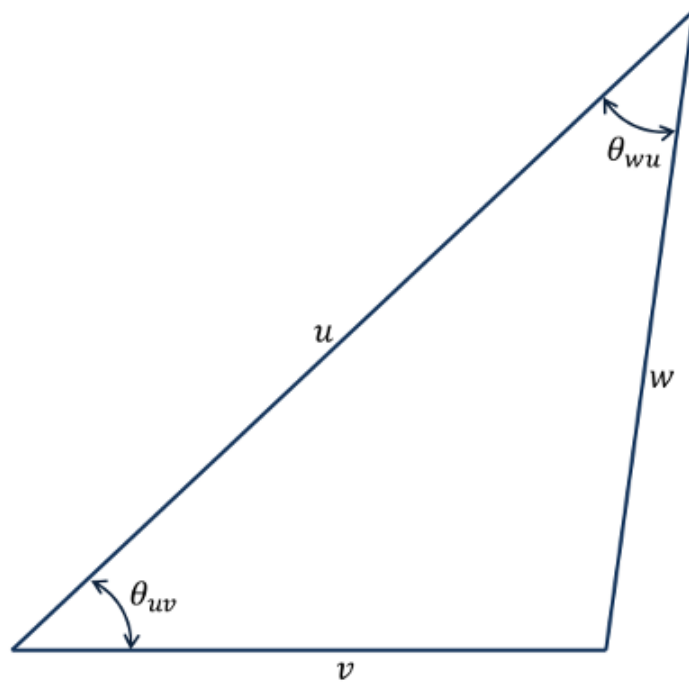


Figura A.2: Definiciones de ángulos y distancia para el teorema de adición de Graf bidimensional

que será igual al radio del cilindro siendo, siempre mas pequeño que  $R_{\alpha\beta}$  es decir

$$r_\alpha < R_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.2.3})$$

Teniendo en cuenta ésto, se pueden hacer las identificaciones  $v = r_\alpha$  y  $u = R_{\alpha\beta}$ . El ángulo  $\theta_{wu}$  corresponde al ángulo formado entre el vector  $\mathbf{r}_\beta$  y el vector  $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ , el cual es  $\theta_{wu} = \Phi_{\alpha\beta} - \theta_\beta$ . Finalmente el ángulo  $\theta_{uv}$  es el formado entre los vectores  $\mathbf{r}_\alpha$  y  $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ , que es  $\theta_{uv} = \theta_\alpha - \Phi_{\alpha\beta}$ . Teniendo en cuenta esto el teorema de Graff puede expresarse como

$$H_s(kr_\beta)e^{is\Phi_{\beta\alpha}}e^{-is\theta_\beta} = \sum_q H_{s+q}(kR_{\alpha\beta})J_q(kr_\alpha)e^{iq\theta_\alpha}e^{-iq\Phi_{\alpha\beta}} \quad (\text{A.2.4})$$

o

$$H_s(kr_\beta)e^{is\theta_\beta} = (-1)^s e^{is\Phi_{\beta\alpha}} \sum_q H_{q-s}(kR_{\alpha\beta})J_q(kr_\alpha)e^{iq\theta_\alpha}e^{-iq\Phi_{\alpha\beta}}. \quad (\text{A.2.5})$$

Teniendo en cuenta que  $\Phi_{\alpha\beta} = \pi + \Phi_{\beta\alpha}$ , como muestra la figura A.1 se obtiene

$$H_s(kr_\beta)e^{is\theta_\beta} = \sum_q H_{q-s}(kR_{\alpha\beta})e^{i(q-s)\Phi_{\alpha\beta}} J_q(kr_\alpha)e^{iq\theta_\alpha}. \quad (\text{A.2.6})$$



# Apéndice B

## Comportamiento para bajas frecuencias: Matriz-T cilindro fluido

### B.1. Matriz-T cilindro fluido

Considérese un cilindro fluido de radio  $R_a$  y parámetros acústicos  $\rho_a$  y  $c_a$ , rodeado por otro fluido cuyos parámetros acústicos son  $\rho_b$  y  $c_b$ .

En la región externa al cilindro fluido el campo de presiones viene dado por la suma del campo externo y el campo dispersado

$$P^I(\mathbf{r}) = \sum_q [A_q J_q(k_b r) + B_q H_q(k_b r)] e^{iq\theta}, \quad (\text{B.1.1})$$

mientras que en el interior del cilindro fluido no presenta fuentes y, por tanto, el campo viene dado por

$$P^{II}(\mathbf{r}) = \sum_q C_q J_q(k_a r) e^{iq\theta}, \quad (\text{B.1.2})$$

donde el  $k$  y  $k_a$  son el número de onda de la región I y del cilindro fluido respectivamente.

Las condiciones de contorno que hay que aplicar a la superficie circular son:

$$P^I(\mathbf{R}_a) = P^{II}(\mathbf{R}_a), \quad (\text{B.1.3})$$

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial P^I(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_a} = \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P^{II}(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_a}, \quad (\text{B.1.4})$$

sustituyendo (B.1.1), (B.1.2) en las condiciones de contorno obtenemos

$$\sum_q [A_q J_q(kR_a) + B_q H_q(kR_a)] e^{iq\theta} = \sum_q C_q J_q(k_a R_a) e^{iq\theta}, \quad (\text{B.1.5})$$

$$\frac{k}{\rho_b} \sum_q [A_q J'_q(kR_a) + B_q H'_q(kR_a)] e^{iq\theta} = \frac{k_a}{\rho_a} \sum_q C_q J'_q(k_a R_a) e^{iq\theta}, \quad (\text{B.1.6})$$

donde ' representa la derivada respecto al argumento.

Las sumas en  $q$  se pueden eliminar multiplicando cada ecuación por  $e^{is\theta}$  e integrando desde 0 hasta  $2\pi$ . En este caso los términos que verifican  $s = q$  son diferentes de cero obteniendo

$$[A_q J_q(kR_a) + B_q H_q(kR_a)] e^{iq\theta} = C_q J_q(k_a R_a) e^{iq\theta}, \quad (\text{B.1.7})$$

$$\frac{k}{\rho_b} [A_q J'_q(kR_a) + B_q H'_q(kR_a)] e^{iq\theta} = \frac{k_a}{\rho_a} C_q J'_q(k_a R_a) e^{iq\theta}. \quad (\text{B.1.8})$$

Ahora se puede obtener la relación de los coeficientes del campo dispersado  $B_q$  respecto al campo incidente  $A_q$ , que define la matriz-T. Despejando los coeficientes  $C_q$  de la ecuación B.1.8 y sustituyéndolos en la ecuación (B.1.7) se obtiene la matriz-T

$$T_q = -\frac{\chi_q J'_q(kR_a) - J_q(kR_a)}{\chi_q H'_q(kR_a) - H_q(kR_a)}, \quad (\text{B.1.9})$$

donde

$$\chi_q = \frac{\rho_a c_a J_q(k_a R_a)}{\rho_b c_b J'_q(k_a R_a)}. \quad (\text{B.1.10})$$

### B.1.1. Casos particulares

A partir de la expresión de la matriz-T (B.1.9) se pueden obtener las expresiones para dos casos límites. El primero es la matriz de un cilindro rígido, donde la densidad del cilindro  $\rho_a$  en relación con la densidad del fluido que lo rodea  $\rho_b$  se puede considerar infinita. Teniendo esto en cuenta la cantidad definida por  $\chi_q$  es infinita, obteniendo que la expresión de la matriz-T para un cilindro rígido es

$$T_q = -\frac{J'_q(kR_a)}{H'_q(kR_a)}. \quad (\text{B.1.11})$$

El segundo caso es el de un cilindro vacío, que corresponde al caso opuesto al considerado anteriormente. Ahora la densidad del cilindro fluido  $\rho_a$  en relación con la densidad del fluido que lo rodea se puede considerar cero, obteniendo como matriz-T para un cilindro vacío

$$T_q = \frac{J_q(kR_a)}{H_q(kR_a)}. \quad (\text{B.1.12})$$

## B.2. Comportamiento en bajas frecuencias

La teoría de la homogenización explicada en este trabajo se basa en las propiedades de los elementos de dispersión en el límite de bajas frecuencias. En este apartado se obtienen las expresiones de la matriz-T de un fluido para dicho límite.

La matriz T de un fluido-fluido viene dada por la ecuación (B.1.9)

$$T_q = -\frac{\chi_q J'_q(kR_a) - J_q(kR_a)}{\chi_q H'_q(kR_a) - H_q(kR_a)}, \quad (\text{B.2.1})$$

donde

$$\chi_q = \frac{\rho_a c_a J_q(k_a R_a)}{\rho_b c_b J'_q(k_a R_a)}. \quad (\text{B.2.2})$$

En el apéndice A se dan las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel para argumentos pequeños. Estas expresiones son utilizadas para analizar el comportamiento de la matriz-T en el límite de bajas frecuencias, debido a que  $\lambda \rightarrow \infty$  el número de onda  $k \rightarrow 0$ .

- Para  $q = 0$  la cantidad  $\chi_0$  cuando  $k_a \rightarrow 0$  será

$$\chi_0 = \frac{\rho_a c_a J_q(k_a R_a)}{\rho_b c_b J'_q(k_a R_a)} \approx -\frac{\rho_a c_a}{\rho_b c_b} \frac{2}{k_a R_a}. \quad (\text{B.2.3})$$

Por tanto, el numerador de la matriz-T será

$$\chi_q J'_q(k R_a) - J_q(k R_a) \approx \frac{\rho_a c_a^2}{\rho_b c_b^2} - 1, \quad (\text{B.2.4})$$

y el denominador de la matriz-T será

$$\chi_q H'_q(k R_a) - H_q(k R_a) \approx -\frac{\rho_a c_a^2}{\rho_b c_b^2} \frac{4i}{\pi k^2 R_a^2} - \frac{2i}{\pi} \ln(k R_a). \quad (\text{B.2.5})$$

El término proporcional  $1/k^2$  en el límite  $k \rightarrow 0$  domina sobre el término logarítmico pudiendo escribir

$$\chi_q H'_q(k R_a) - H_q(k R_a) \approx -\frac{\rho_a c_a^2}{\rho_b c_b^2} \frac{4i}{\pi k^2 R_a^2}. \quad (\text{B.2.6})$$

Por tanto la forma asintótica del elemento de matriz  $T_0$  será

$$T_0 \approx \frac{i\pi R_a^2}{4} \left[ \frac{\rho_a c_a^2}{\rho_b c_b^2} - 1 \right] k^2. \quad (\text{B.2.7})$$

Teniendo en cuenta que  $B_a = c_a^2 \rho_a$  y  $B_b = c_b^2 \rho_b$  la anterior expresión se puede reescribir como

$$T_0 \approx \frac{i\pi R_a^2}{4} \left[ \frac{B_a}{B_b} - 1 \right] k^2. \quad (\text{B.2.8})$$

- Para  $q > 0$  el elemento  $\chi_q$  será

$$\chi_q \approx \frac{\rho_a c_a}{\rho_b c_b} \frac{k_a R_a}{q}, \quad (\text{B.2.9})$$

y el numerador de la matriz T será

$$\chi_q J'_q(k R_a) - J_q(k R_a) \approx \frac{k^q R_a^q}{q! 2^q} \left[ \frac{\rho_a}{\rho_b} - 1 \right], \quad (\text{B.2.10})$$

mientras que el denominador será

$$\chi_q H'_q(kR_a) - H_q(kR_a) \approx \frac{i(q-1)!2^q}{\pi k^q R_a^2} \left[ \frac{\rho_a}{\rho_b} + 1 \right]. \quad (\text{B.2.11})$$

Teniendo, por tanto, que la forma asintótica del elemento de matriz  $T_q$  será

$$T_q \approx \frac{i\pi R_a^{2q}}{4^q} \frac{1}{q!(q-1)!} \frac{\rho_a - \rho_b}{\rho_a + \rho_b} k^{2q}. \quad (\text{B.2.12})$$

Nótese que de la ecuación (B.1.9) se puede ver que

$$T_{-q} = T_q, \quad (\text{B.2.13})$$

por lo que la forma asintótica también es válida para  $q < 0$ .





# Apéndice C

## Cálculo de la matriz-T mediante elementos finitos

En el capítulo 3 se obtienen las expresiones teóricas de la matriz-T en el marco de la teoría de la dispersión múltiple, mediante la aplicación de condiciones de contorno en las interfaces que definen los diferentes medios que conforman el problema de dispersión. Este procedimiento es relativamente simple de realizar en el caso en que los elementos de dispersión cilíndricos presenten sección circular. Sin embargo cuando no se verifican estas condiciones la obtención de la matriz-T se hace más compleja siendo útil otra herramienta que permita su calculo. En las simulaciones basadas en elementos finitos se puede simular cualquier estructura permitiéndonos calcular la matriz-T genérica de un cilindro genérico.

En el capítulo 3 se explicó que el campo de presiones incidente se puede expresar como

$$P^{in}(\mathbf{r}) = \sum_q A_q J_q(kr) e^{iq\theta}, \quad (\text{C.0.1})$$

mientras que el campo dispersado se puede expresar como

$$P^{disp}(\mathbf{r}) = \sum_q B_q H_q(kr) e^{iq\theta}. \quad (\text{C.0.2})$$

Suponiendo que los elementos de dispersión tienen sección circular, la matriz-T que caracteriza las propiedades dispersivas del elemento de disper-

sión se convierte en una matriz diagonal. Los elementos de la matriz-T son definidos mediante la siguiente relación

$$T_q = \frac{B_q}{A_q}. \quad (\text{C.0.3})$$

La extracción de la matriz-T se realiza aplicando un campo incidente cilíndrico que presenta la siguiente forma funcional  $P_{in} = J_q(kr)e^{iq\theta}$  para un  $q$  dado. En este caso el campo dispersado presenta la siguiente forma funcional  $T_q H_q(kr)e^{iq\theta}$  ya que se  $A_q = 1$  pudiéndose obtener la matriz-T mediante el campo dispersado obtenido en las simulación a través de la siguiente relación

$$T_q = \frac{P_{dis,q}}{H_q(kr)e^{iq\theta}}. \quad (\text{C.0.4})$$

Aunque para la extracción de la matriz-T se ha supuesto una sección circular, cabe señalar que esta condición puede ser flexible, ya que mediante este método se puede extender para obtener las matrices-T de elementos de dispersión que presenten en promedio una sección circular y a elementos dispersivos que presenten irregularidades y detalles que estén por debajo de longitud de onda incidente cuyos efectos, bajo estas condiciones se homogeneizan. También puede aplicarse para casos en el que los cilindros que presenten variaciones en la dirección de sus ejes, el cual implica simulaciones  $3D$ .

## C.1. Procedimiento

Considérese un elemento de dispersión desconocido que tiene un radio externo  $R$ . Este elemento de dispersión deber ser simulado en un entorno de elemento finitos. Una vez introducido la geometría del problema en el entorno gráfico del simulador de elementos finitos, este elemento debe ser rodeado mediante un anillo concéntrico de radio externo  $R_{ext}$  y un radio interno  $R$ . Este anillo representa el medio no dispersivo. El campo incidente se configura en la circunferencia (simulaciones  $2D$ ) o en la superficie cilíndrica (simulaciones  $3D$ ) de radio  $R_{ext}$ . Es importante realizar un mallado adecuado (que presente muchos elementos) en esta zona y en las interfaces entre los

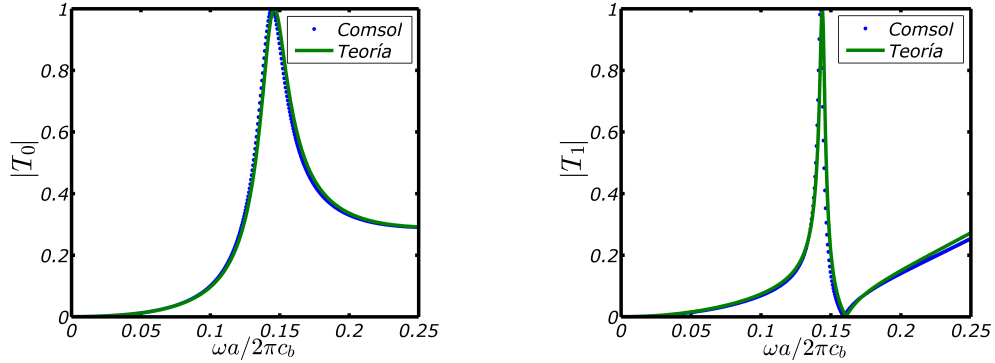


Figura C.1: Modulo del elemento  $T_0$  y  $T_1$  en el caso de una cavidad, de radio  $R_b = 3\text{cm}$  y longitud  $L = 3.5h$ , en cuyo interior hay un fluido anisótropo y que se encuentra localizada en el interior de una guía de ondas de altura  $h = R_b$ . Las líneas azules corresponden a la matriz-T obtenida por elementos finitos y la línea verde la obtenida mediante un análisis teórico

diferentes medios que formen el problema, para obtener resultados que aseguren que se ha alcanzado la convergencia. Una vez finalizada la geometría y definido los parámetros acústicos se realiza un barrido en frecuencia para cada orden  $q$ . La matriz-T es obtenida a partir de la ecuación (C.0.4) para cada frecuencia y cada orden simulado. Cualquier punto que pertenezca al medio no dispersivo es válido para obtener la matriz-T del sistema, aunque es recomendable extraer el campo dispersado en  $r = R_{ext}$  ya que pueden existir modos evanescentes en las cercanías de la interfaz definida por el medio no dispersivo y el medio dispersivo que influyen en el campo dispersado, obteniendo un resultado erróneo. También se puede realizar la extracción de la matriz-T seleccionando múltiples puntos y realizando el promediado.

## C.2. Ejemplo

A continuación mostramos un ejemplo que nos permita realizar test del método aplicado. Para ello consideramos una cavidad localizada en el interior de una guía de ondas de altura  $h$  y en cuyo interior se encuentra localizado un fluido anisótropo. La expresión de la matriz T se puede encontrar en la ecuación en la sección 3.3. El radio de la cavidad es de  $R_b = 3\text{cm}$  y el radio

del anillo concéntrico es  $R_{ext} = 15R_b$ . En la figura C.1 muestra la comparación entre la matriz-T obtenida mediante un análisis teórico y la obtenida mediante elementos finitos para  $q = 0, 1$ . Se puede ver gran concordancia entre la matriz-T obtenida por ambos métodos obteniendo, por tanto, un método de verificación que nos permite validar el procedimiento teórico que nos permite la obtención de la matriz-T del sistema a estudiar. Se puede ver discrepancias que normalmente aparecen al incrementar la frecuencia debido a que se incrementan las distancias entre los elementos relativos conforme decrece la longitud de onda. Obviamente este problema se resuelve añadiendo mas elementos al mallado. Este método presenta una fuerte dependencia a la densidad de elementos que envuelve el proceso de mallado, especialmente en las interfaces o fronteras. Por otra parte, este ejemplo en particular la discrepancia también es debida a la aproximación que se realizó para la obtención de la matriz-T analítica como se comenta en el capítulo 8.

# Apéndice D

## Caracterización de un metamaterial acústico

En este apéndice se expondrán las distintas magnitudes a partir de las cuales se puede caracterizar un metamaterial y que permiten, en el caso de que las pérdidas no sean muy grandes, la extracción de los parámetros acústicos que lo caracteriza.

### D.1. Reflectancia y transmitancia

Cuando una onda acústica se propaga a través de un medio y se encuentra con la frontera de un segundo medio se generan ondas de reflexión y transmisión. El estudio de este fenómeno se simplifica si se asume que las ondas incidentes y las generadas en la frontera del medio son ondas planas y que los medios involucrados puedan considerarse fluidos.

La relación de las amplitudes de las ondas reflejadas y la transmitidas, respecto de la onda incidente, depende de la impedancia acústica del medio, de la velocidad de propagación del sonido y del ángulo de incidencia que define la onda en la interfaz del segundo medio.

Consideremos el sistema definido en la figura D.1. El sistema consiste en una multicapa donde se pueden distinguir tres regiones. La regiones 1 y 3, en el caso considerado, son el mismo fluido caracterizado por  $\rho_b, c_b$  mientras que la región 2 representa el segundo medio de propagación del sistema, caracterizado por los parámetros  $\rho_a, c_a$ .

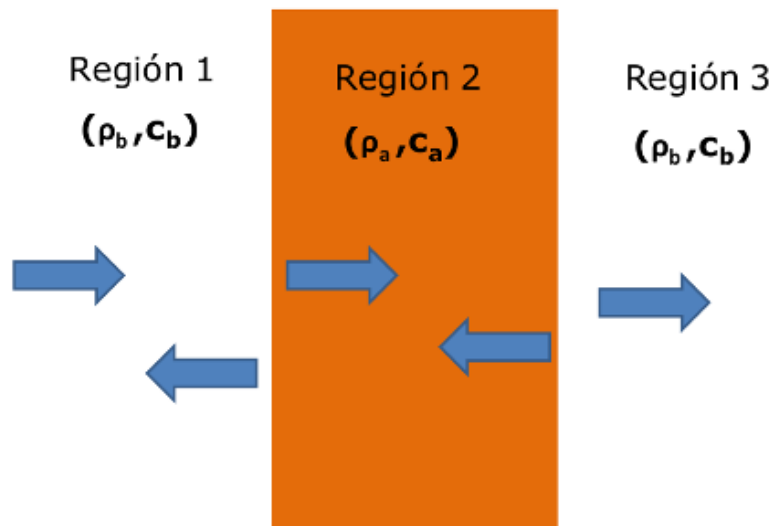


Figura D.1: Esquema de un sistema donde un fluido con densidad  $\rho_a$  y velocidad del sonido  $c_a$  se localiza entre dos medios fluidos de densidad  $\rho_b$  y velocidad del sonido  $c_b$ . Cada cambio de medio genera una onda reflejada que se representa mediante una flecha que indica la dirección opuesta al campo incidente en la interfaz de cada región, en este caso, hacia la izquierda

Para obtener la expresión teórica de la reflectancia y de la transmitancia consideraremos el convenio de signos utilizado por los ingenieros (que no es más que el complejo conjugado de la magnitud obtenida mediante el convenio de signos en los libros de física), el motivo de la elección de este convenio es debido a que se utilizó para la caracterización del metamaterial expuesto en el capítulo 6.

Las expresiones de los campos acústicos que se propagan en los diferentes medios son (se asume  $e^{i\omega t}$ )

$$P^I(x; \omega) = e^{-ik_b x} + R e^{ik_b x}, \quad (\text{D.1.1})$$

$$P^{II}(x; \omega) = \zeta_1 e^{-ik_a x} + \zeta_2 e^{ik_a x}, \quad (\text{D.1.2})$$

$$P^{III}(x; \omega) = C e^{-ik_b x}. \quad (\text{D.1.3})$$

Mediante la siguiente relación podemos obtener la velocidad de propagación de la onda en los diferentes medios

$$\mathbf{v} = \frac{-1}{i\omega\rho} \nabla P. \quad (\text{D.1.4})$$

Sustituyendo las ecuaciones D.1.1, D.1.2 y D.1.3 en D.1.4, obtenemos

$$v^I(x; \omega) = \frac{1}{z_b} \left[ e^{-ik_b x} - R e^{ik_b x} \right], \quad (\text{D.1.5})$$

$$v^{II}(x; \omega) = \frac{1}{z_a} \left[ \zeta_1 e^{-ik_a x} - \zeta_2 e^{ik_a x} \right], \quad (\text{D.1.6})$$

$$v^{III}(x; \omega) = \frac{1}{z_b} C e^{-ik_b x}, \quad (\text{D.1.7})$$

donde  $z_b = \rho_b c_b$  y  $z_a = \rho_a c_a$

A partir del campo de presión y de la velocidad del campo de presiones se obtienen las expresiones de la reflectancia y transmitancia imponiendo las siguientes condiciones de contorno.

$$P^I(0; \omega) = P^{II}(0; \omega), \quad (\text{D.1.8})$$

$$v^I(0; \omega) = v^{II}(0; \omega), \quad (\text{D.1.9})$$

$$P^{II}(d; \omega) = P^{III}(d; \omega), \quad (\text{D.1.10})$$



$$v^{II}(d; \omega) = v^{III}(d; \omega). \quad (\text{D.1.11})$$

Sustituyendo las expresiones de los campos se obtienen las siguientes relaciones

$$1 + R = \zeta_1 + \zeta_2, \quad (\text{D.1.12})$$

$$\frac{1}{z_b} [1 + R] = \frac{1}{z_a} [\zeta_1 + \zeta_2], \quad (\text{D.1.13})$$

$$\zeta_1 e^{-ikd} + \zeta_2 e^{ikd} = C e^{-ik_0 d}, \quad (\text{D.1.14})$$

$$\frac{1}{Z_a} [\zeta_1 e^{-ikd} - \zeta_2 e^{ikd}] = \frac{1}{z_b} C e^{-ikd}. \quad (\text{D.1.15})$$

A partir de estas relaciones se llega a las expresiones finales de la reflectancia y transmitancia

$$R(\omega) = \rho \frac{1 - e^{-2ikd}}{1 - \rho^2 e^{-2ikd}}, \quad (\text{D.1.16})$$

$$T(\omega) = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 e^{-2ikd}} e^{-ikd} e^{ik_0 d}, \quad (\text{D.1.17})$$

donde

$$\rho = \frac{z_a - z_b}{z_a + z_b}. \quad (\text{D.1.18})$$

## D.2. Medida de la transmitancia y la reflectancia

Las ecuaciones de la transmitancia y la reflectancia obtenidas en la sección anterior nos permiten calcular ambas magnitudes cuando se conocen las magnitudes que caracterizan al medio.

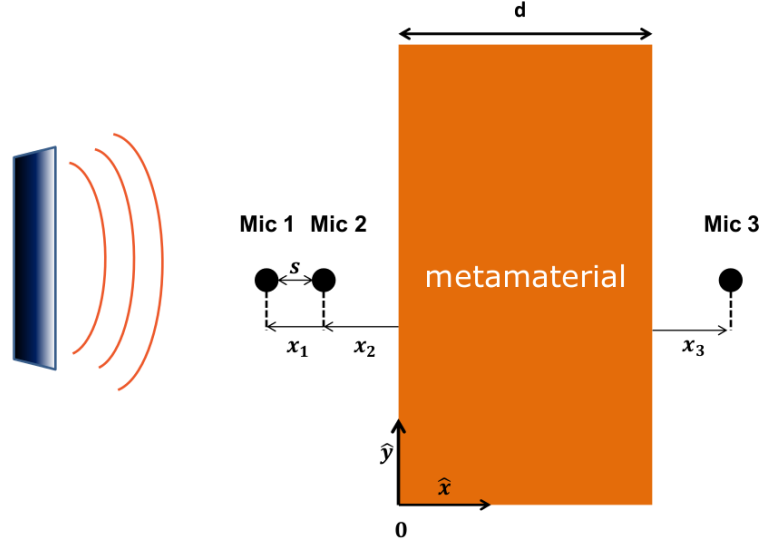


Figura D.2: Esquema del sistema para la extracción de la transmitancia y la reflectancia a partir de la obtención del campo de presiones en tres puntos diferentes

Las medidas experimentales de la reflectancia y la transmitancia que se obtienen al introducir un material cuyos parámetros acústicos son desconocidos se realiza a través del campo de presiones obtenido en tres puntos diferentes. La colocación de los micrófonos se realiza de la siguiente manera se colocan dos micrófonos separados una distancia  $s$  en la parte de la muestra donde incide el campo y un micrófono en el lado opuesto de la misma. La distancia de separación de los dos micrófonos  $s$  tiene que ser tal que  $s \leq \lambda/2$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda del campo incidente.

Suponiendo que el campo de presiones corresponde a una onda plana obtenemos los campos captados por los micrófonos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  están dados por

$$P_1 = Ae^{-ik_0x_1} + Be^{ik_0x_1}, \quad (\text{D.2.1})$$

$$P_2 = Ae^{-ik_0x_2} + Be^{ik_0x_2}, \quad (\text{D.2.2})$$

$$P_3 = Ce^{-ik_0x_3}. \quad (\text{D.2.3})$$

La reflectancia se define como  $R = B/A$  y la transmitancia como  $T = C/A$ . Para obtener la transmitancia despejamos el coeficiente A de la ecuación D.2.2 obteniendo

$$A = P_2 e^{ik_o x_2} - B e^{2ik_o x_2}. \quad (\text{D.2.4})$$

Sustituyendo el coeficiente A en la ecuación D.2.1 obtenemos el coeficiente B

$$B = \frac{P_1 e^{ik_o x_1} - P_2 e^{ik_o x_2}}{e^{2ik_o x_1} + e^{2ik_o x_2}}, \quad (\text{D.2.5})$$

pudiendo obtener el coeficiente A

$$A = \frac{P_1 e^{-ik_o x_1} - P_2 e^{-ik_o x_2}}{e^{-2ik_o x_1} - e^{-2ik_o x_2}}. \quad (\text{D.2.6})$$

Finalmente la reflectancia se obtiene a través de la siguiente relación:

$$R(\omega) = \frac{B}{A} = \frac{P_2 e^{-ik_o x_1} - P_1 e^{-ik_o x_2}}{P_1 e^{ik_o x_2} - P_2 e^{ik_o x_1}}. \quad (\text{D.2.7})$$

En el proceso de obtención de la transmitancia dividimos por el coeficiente A la ecuación D.2.2 y resolvemos la ecuación para el coeficiente A obteniendo

$$A = \frac{P_2}{e^{-ik_o x_2} - R e^{-ik_o x_2}}. \quad (\text{D.2.8})$$

El campo de presión obtenido en el punto  $x_3$  hay que referenciarlo en el origen del coordenadas como indica la figura D.2

$$P_3 = C e^{-ik_o x_3} e^{-ik_o d}. \quad (\text{D.2.9})$$

Despejando de la anterior ecuación y dividiendo por ecuación D.2.8 obtenemos la expresión que nos permite obtener la transmitancia

$$T(\omega) = \frac{P_3 e^{-ik_o x_2} - R(\omega) e^{ik_o x_2}}{P_2 e^{-ik_o x_3}} e^{-ikd}. \quad (\text{D.2.10})$$

### D.3. Extacción de parámetros

En este apartado se expondrá el método utilizado para la extracción de los parámetros efectivos que caracterizan a un metamaterial a partir de la reflectancia y transmitancia obtenidas experimentalmente.

Este método es una extensión del método que permite caracterizar las propiedades efectivas de los metamateriales electromagnéticos [SSMS02, CGW<sup>+</sup>02].

En este método de extracción se obtiene el índice de refracción efectivo y la impedancia efectiva a partir de los coeficientes de la transmitancia y la reflectancia considerando que los campos son ondas planas y que inciden normalmente al metamaterial. La densidad de masa efectiva y la velocidad efectiva se extraen de  $n$  y  $z$ .

Para obtener las expresiones finales que permiten obtener los parámetros anteriormente mencionados se parte de las expresiones de la transmitancia y de la reflectancia en función de las impedancias de los medios que intervienen en el proceso.

Considérese una onda plana que incide en un fluido con densidad  $\rho_2$  y velocidad del sonido  $c_2$  localizado entre dos medios fluidos diferentes con densidades  $\rho_1$  y  $\rho_3$  y velocidades  $c_1$  y  $c_3$ , la transmitancia y la reflectancia en este viene dada por las siguientes relaciones [Bre]

$$R = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 - z_3)e^{-2i\phi} + (z_1 - z_2)(z_2 + z_3)}{(z_1 + z_2)(z_2 - z_3)e^{-2i\phi} + (z_1 - z_2)(z_2 + z_3)}, \quad (\text{D.3.1})$$

$$T = \frac{4z_1z_2}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)e^{i\phi} + (z_1 + z_2)(z_2 + z_3)}, \quad (\text{D.3.2})$$

donde  $z_i = \rho_i c_i$  y  $\phi = k_2 d = \frac{\omega}{c_2} d$  para el caso de la incidencia normal  $\theta_{inc} = 0$ . siendo  $\omega$  la frecuencia angular de la onda acústica y  $d$  la anchura del metamaterial.

Teniendo en cuenta el sistema de la figura D.1 se puede ver que  $z_1 = z_3$  pudiendo simplificar las anteriores ecuaciones D.3.1 y D.3.2 obteniendo

$$R = \frac{z_2^2 - z_1^2}{z_1^2 + z_2^2 + 2iz_1z_2 \cot(\phi)}, \quad (\text{D.3.3})$$

$$T = \frac{1 + R}{\cos(\phi) - \frac{z_1}{z_2} \sin(\phi)}. \quad (\text{D.3.4})$$

Definiendo las siguientes cantidades  $m = \rho_2/\rho_1$ ,  $n = c_1/c_2$ ,  $k = \omega/c_1$  y  $\xi = \rho_2 c_2/\rho_1 c_1$ , sustituyéndolas en las ecuaciones anteriores y tras una serie de operaciones matemáticas llegamos a las siguientes expresiones

$$R = \frac{\tan(nkd) \left( \frac{1}{\xi} - \xi \right) i}{2 - \tan(nkd) \left( \frac{1}{\xi} + \xi \right) i}, \quad (\text{D.3.5})$$

$$T = \frac{2}{\cos(nkd) \left[ 2 - \tan(nkd) \left( \frac{1}{\xi} + \chi \right) i \right]}. \quad (\text{D.3.6})$$

Resolviendo las anteriores ecuaciones para  $\xi$  y  $n$  obtenemos:

$$n = \frac{\pm \cos^{-1} \left( \frac{1}{2T} [1 - (R^2 - T^2)] \right)}{kd} + \frac{2\pi m}{kd}, \quad (\text{D.3.7})$$

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{(1+R)^2 - T^2}{(1-R)^2 - T^2}}, \quad (\text{D.3.8})$$

donde  $m$  es una variable entera que aparece al invertir el coseno.

Nótese que cualquier combinación de signos de las ecuaciones D.3.7 y D.3.8 y para cualquier  $m$  el resultado presenta la misma reflectancia y transmitancia. Este problema se puede resolver imponiendo restricciones en las propiedades de los metamateriales. Los metamateriales pasivos requieren que la parte real  $\xi$  sea positiva, esta condición determina el signo en la ecuación D.3.8. Además, la componente imaginaria de la velocidad del sonido debe ser positiva, lo que obliga a que la parte imaginaria del índice de refracción sea negativa.

Vladimir Fokin [FASZ07] realizó un examen exhaustivo de las ecuaciones D.3.7 y D.3.8 y observó que los signos de esas ecuaciones son dependientes. Cuando  $Re(\xi)$  o  $Im(n)$  es cercana a cero, o mediante errores en las medidas, o errores en los cálculos de la transmitancia y reflectancia, puede causar combinaciones incorrectas de signos en las ecuaciones D.3.7 y D.3.8. Para resolver ese problema reescribió las ecuaciones D.3.7 y D.3.8 de la siguiente manera

$$\xi = \frac{r}{1 - 2R + R^2 - T^2}, \quad n = \frac{-i \log x + 2\pi m}{kd} \quad (\text{D.3.9})$$

donde

$$r = \pm \sqrt{(R^2 - T^2 - 1)^2 - 4T^2}, \quad x = \frac{1 - R^2 + T^2 + r}{2T} \quad (\text{D.3.10})$$

Para finalizar este apartado se indicarán los pasos para la obtención de los parámetros efectivos a partir de una medida experimental de la transmitancia y la reflectancia del metamaterial:

- 1.-Se calcula la reflectancia y la transmitancia usando las expresiones D.2.7 y D.2.10.
- 2.-Se introduce los valores de  $R$  y  $T$  y obtenemos los dos valores de  $r$  (ecuación D.2.7).
- 3.-Se selecciona cualquiera de los valores de  $r$  que obtengan una solución de  $\xi$  que verifique  $Re(\xi) > 0$ .
- 4.-Este valor de  $r$  se introduce en la expresión que permite calcular  $x$ , eliminando así la ambigüedad en la expresión de  $n$ .
- 5.-El signo y el valor de  $m$  viene determinado por la continuidad  $n$ . Se comienza fijando el valor  $m = 0$  y se aumenta de valor en el rango en frecuencia donde exista un salto o discontinuidad en  $n$

Mediante este proceso se obtienen resultados consistentes y permite despreciar las soluciones no físicas debido a la elección incorrecta del segundo signo en las ecuaciones D.3.7 y D.3.8.



# Apéndice E

## Producción Científica

### E.1. Artículos científicos

1. – Victor Manuel García, Rogelio Graciá, Daniel Torrent, Francisco Cervera y José Sánchez-Dehesa. *Quasi-Two-dimensional acoustic with negative bulk modulus*. Phys. Review. B. Vol. **85**, art. nro. 184102, pp.1 – 8, (2012)

2. – Rogelio Graciá, Daniel Torrent y José Sánchez-Dehesa. *Double-negative acoustic metamaterial based on quasi-two-dimensional fluid-like shells*. New J. Phys. Vol. **14**, art. nro. 103052, pp.1 – 15 (2012)

3. – Rogelio Graciá, Victor Manuel García, Daniel Torrent, and José Sánchez-Dehesa. *Negative mass density and  $\rho$ -near-zero quasi-two-dimensional metamaterials: Design and applications* Phys. Review. B. Vol. **88**, art. nro. 224305, pp.1 – 12 (2013).

4. – Daniel torrent, Victor Manuel García, Rogelio Graciá, Francisco Cervera, José sánchez-Dehesa. *Quasi-two-dimensional acoustic metamaterial for sound in ducts* SPIE Newsroom DOI: 10.1117/2.1201401.005265 (2014)

### E.2. Congresos nacionales o internacionales

1. – Rogelio Graciá, Daniel Torrent, José Sánchez-Dehesa *Refractive devices based on acoustic metamaterial*, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Denver, Colorado, USA 2011.



2.— Rogelio Graciá, Daniel Torrent, José Sánchez-Dehesa *Acoustic metamaterials based on cavities drilled in two dimensional waveguides* 6th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics, San Petersburgo, Rusia 2012.

3.— José Sánchez-Dehesa, Victor Manuel García, Rogelio Graciá, Francisco Cervera, Daniel Torrent, *Acoustic metamaterials with negative parameters: a multiple scattering approach with examples* ACOUSTICS 2012. 163rd meeting of the Acoustical Society of America (ASA). 9th meeting of the Acoustical Society of China (ASC). 11th Western Pacific Acoustics Conference (WESPAC), Hong Kong, China 2012.

4.— **Charla invitada** Victor Manuel García, Rogelio Graciá, Francisco Cervera, Daniel Torrent, José Sánchez-Dehesa *A quasi two-dimensional acoustic metamaterial with negative bulk modulus* 3rd International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics (META 2012), París, Francia 2012.

5.— José Sánchez-Dehesa, Francisco Cervera, Victor Manuel García, Rogelio Graciá, Daniel Torrent *Advances in Acoustic Cloaking and Metamaterials with Negative Parameters* 2nd International Conference on Phononic Crystals/Metamaterials, Phonon Transport and Optomechanics, Sharm El-Sheikh, Egypt 2013.

6.— Victor Manuel García, Rogelio Graciá, Daniel Torrent, José Sánchez-Dehesa *Negative and density-near-zero acoustic metamaterials based on quasi-two-dimensional phononic crystals* 21st International Congress on Acoustics (ICA). 165th Meeting of the Acoustical Society of America. 52nd Meeting of the Canadian Acoustical Association, Montreal, Canada 2013.

7.— Rogelio Graciá, Daniel Torrent, José Sánchez-Dehesa *Metamaterial acústico cuasi-2D doblemente negativo* XXXIV Reunión Biental de la Real Sociedad Española de Física, Valencia, Spain 2013.

8.— **Charla invitada** Daniel Torrent, Rogelio Graciá-Salgado, Victor Manuel García, Francisco Cervera and José Sánchez-Dehesa *Quasi-two-dimensional acoustic metamaterials*, SPIE Photonics West, San Francisco, California, USA 2014.



# Bibliografía

- [AE05] A. Alu and N. Engheta. Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings. *Phys. Rev. E.*, 72:016623, 2005.
- [AFSZ07] M. Ambati, N. Fang, C. Sun, and X. Zhang. Surface resonant states and superlensing in acoustic metamaterials. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 75:195447, 2007.
- [ASSE07] A. Alu, M. G. Silveirinha, A. Salandrino, and N. Engheta. Epsilon-near-zero metamaterials and electromagnetic sources: Tailoring the radiation phase pattern. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 75:155410, 2007.
- [Ber80] J.G Berryman. Long-wavelength propagation in composite elastic media. i. spherical inclusions. *J. Acoustics. Soc. Am.*, 68(1809), 1980.
- [BLM10] F. Bongard, H. Lissek, and J. R. Mosig. Acoustic transmission line metamaterial with negative/zero/positive refractive index. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 82:094306, 2010.
- [Bre] L. Brekhovskikh. Waves in layered media. (*Academic, New York 1980*).
- [CGW<sup>+</sup>02] X. Chen, T. M. Grzegorzcyk, B. I. Wu, J. Pacheco, and J. A. Kong. Robust method to retrieve the constitutive effective parameters of metamaterials. *Phys. Rev. E.*, 70:016608, 2002.

- [Chr10] J. Christensen. *Acoustical wave-phenomena: enhanced transmission, guiding, attenuation and focousing*. PhD thesis, Departamento de Física Teórica De La Materia Condensada, 2010.
- [CLHL07] F. Cail, F. Liu, Z. He, and Z. Liu. High refractive-index sonic metamaterial based on periodic subwavelength structure. *Appl. Phys. Lett.*, 91:203515, 2007.
- [CLX10] D. Chanling, H. Limei, and Z. Xiaopeng. Two-dimensional acoustic metamaterial with negative modulus. *J. Appl. Phys.*, 108:074911, 20010.
- [CS07] S.A. Cummer and D. Schurig. one path to acoustic cloaking. *New. J. Phys.*, 9:45, 2007.
- [CSSP<sup>+</sup>01] F. Cervera, L. Sanchis, J. V. Sánchez-Pérez, R. Martinez-Sala, C. Rubio, F. Meseguer, C. López, D. Caballero, and J. Sánchez-Dehesa. Refractive acoustic devices for airborne sound. *Phys. Rev. Lett.*, 88:023902, 2001.
- [CTSD10] A. Climente, D. Torrent, and J. Sánchez-Dehesa. Sound focusing by gradient index sonic lenses. *Appl. Phys. Lett.*, 97:104103, 2010.
- [CXL08] Y. Cheng, J. Y. Xu, and X. J. Liu. One-dimensional structured ultrasonic metamaterials with simultaneously negative dynamic density and modulus. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 77:045134, 2008.
- [DDH<sup>+</sup>09] K Deng, Y. Ding, Z. He, H. Zhao, J. Shi, and Z. Liu. Graded negative index lens with designable focal length by phononic crystal. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 42:185505, 2009.
- [DLQS07] Y. Ding, Z. Liu, X. Qiu, and J. Shi. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Phys. Rev. Lett.*, 99:093404, 2007.
- [EASE09] B. Edwards, A. Alu, M. Silveirinha, and N. Engheta. Reflectionless sharp bends and corners in waveguides using epsilon-near-zero effects. *J. Appl. Phys.*, 105:044905, 2009.

- [EAY<sup>+</sup>08] B. Edwards, A. Alu, M.E. Young, M. Silveirinha, and N. Engheta. Experimental verification of epsilon-near-zero metamaterial coupling and energy squeezing using a microwave waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 100:033903, 2008.
- [FASZ07] V. Fokin, M. Ambati, C. Sung, and X. Zhang. Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterial. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 76:144302, 2007.
- [FR11] J. Fey and W. M. Robertson. Compact acoustic bandgap material based on a subwavelength collection of detuned helmholtz resonator. *J. Appl. Phys.*, 109(114903), 2011.
- [FXA<sup>+</sup>06] N. Fang, D. Xi, J. Ambati, Sun C. Srituravanich, M.W. and, and X. Zhang. Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nat. mat.*, 5:452–456, 2006.
- [FZ11] L. Fok and X. Zhang. Negative acoustic index metamaterial. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 83:214304, 2011.
- [GY03a] B. C. Gupta and Z. Ye. Theoretical analysis of the focusing of acoustic waves by two-dimensional sonic crystals. *Phys. Rev. E.*, 67:036603, 2003.
- [GY03b] B. G. Gupta and Z. Ye. Theoretical analysis of the focusing of acoustics waves by two-dimensional sonic cristal. *Phys. Rev. E.*, 67(26):036603, 2003.
- [HC05] X. Hu and C.T Chan. Refraction of water waves by periodic cylinder arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 95:154501, 2005.
- [HSD04] A. Håkansson and J. Sánchez-Dehesa. Acoustics lens design by genetic algorithms. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 70:214302, 2004.
- [Ito76] T. Itoh. Inverted strip dielectric waveguide for milimeter wave integrated circuits. *IEEE*, 24(11):821–827, 1976.

- [KAG03] A.A. Krokhin, J. Arriaga, and L.N. Gumen. Speed of sound in periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, 91(26):264302, 2003.
- [KHDDR93] M.S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, 71(13):2022–2025, 1993.
- [KT70] R.M. Knox and P.P. Toullis. Integrated circuits for the millimeter through optical frequency range. *Symposium on Millimeter Waves, New York, March 1970*, 1970.
- [KWB85] D. Kother, I. Wolff, and A. Beyer. A field theoretical analysis of ferrite-loaded image line isolaters for the ka-band. *15th Europ. Microw. Conf. Paris, 1985*, pages 831–836, 1985.
- [LC04] J. Li and C. T. Chan. Double-negative acoustic metamaterials. *Phys. Rev. E.*, 70:055602, 2004.
- [LCH<sup>+</sup>08] R. Liu, Q. Cheng, T. Hand, J.J. Mock, T. J. Cui, S.A. Cummer, and D. R. Smith. Experimental demonstration of electromagnetic tunneling through an epsilon-near-zero metamaterial at microwave frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, 100:023903, 2008.
- [LFY<sup>+</sup>09] J. Li, L. Fok, X. Yin, G. Bartal, and X. Zhang. Experimental demonstration of an acoustic magnifying hyperlens. *New. J. Phys.*, 8:931–934, 2009.
- [LHSW09] S.C.S. Lin, T. J. Huang, J. H. Sun, and T. T. Wu. Gradient-index phononic crystals. *Phys. Rev. E.*, 79:094302, 2009.
- [LL12] Z. Liang and J. Li. Extreme acoustic metamaterial by coiling up space. *Phys. Rev. Lett.*, 108:114301, 2012.
- [LLQ06] J. Li, Z. Liu, and C. Qiu. Negative refraction imaging of acoustic waves by a two-dimensional three-component phononic crystal. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 73:054302, 2006.

- [LPCS09] S.H. Lee, C.M. Park, N.H. Chan, and P. Sheng. Acoustic metamaterial with negative modulus. *J. Phys. Condens. Matter.*, 21:175704, 2009.
- [LPY<sup>+</sup>10] H.S. Lee, C.M. Park, M. S. Yong, G.Z. Wang, and K.C. Koo. Composite acoustic medium with simultaneously negative density and modulus. *J. Appl. Phys.*, 108:054301, 2010.
- [LXC<sup>+</sup>12] J. Luo, P. Xu, H. Chen, B. Hou, L. Gao, and Y. Lai. Realizing almost perfect bending waveguides with anisotropic epsilon-near-zero metamaterials. *Appl. Phys. Lett.*, 100:221903, 2012.
- [MLWS06] J. Mei, Z. Liu, W. Wen, and P. Sheng. Effective mass density of fluid-solid composites. *Phys. Rev. Lett.*, 96:264302, 2006.
- [MN72] E. Meyer and G. E. Neumann. *Physical and Applied (Acoustics Academic, New York)*, 1972.
- [MNO<sup>+</sup>10] T. P. Martin, M. Nicholas, G. J. Orris, L. W. Cai, D. Torrent, and J. Sánchez-Dehesa. Sonic gradient index lens for aqueous applications. *Appl. Phys. Lett.*, 97:113503, 2010.
- [Mun] M. L. Munjal. *Acoustics of ducts and mufflers. (Wiley, New York, 1987)*.
- [OMP13] A. Ourir, A. Maurel, and V. Pagneux. Tunneling of electromagnetic energy in multiple connected leads using  $\epsilon$ -near-zero materials. *Optics Letter*, 38:2098, 2013.
- [Pen00] J.B Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Review. Letter*, 85(18):3966–3969, 2000.
- [PHJ<sup>+</sup>10] S. Peng, Z. He, H. Jia, A. Zhang, C. Qiu, M. Ke, and Z. Liu. Acoustic far-field focusing effect for two-dimensional graded negative refractive-index sonic crystals. *J. Appl. Phys.*, 96:263502, 2010.
- [PHRS99] J.B Pendry, A.J Holden, D.J Robbins, and W.J Stewart. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE*, 47(11):2075–2084, 1999.



- [PHSY96] J.B Pendry, A.J Holden, W.J Stewart, and I. Youngs. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys. Review. Letter*, 76:4773–4773, 1996.
- [PL08] J.B Pendry and J. Li. An acoustic metafluid: realizing a broadband acoustic cloak. *New. J. Phys*, 10:115032, 2008.
- [PPL<sup>+</sup>11] C. M. Park, J. J. Park, S. H. Lee, Y. M. Seo, C. K. Kim, and S. H. Lee. Amplification of acoustic evanescent waves using metamaterial slabs. *Phys. Rev. Lett.*, 107:194301, 2011.
- [QZL05] C. Qiu, X. Zhang, and Z. Liu. Far-field imaging of acoustic waves by a two dimensional sonic cristal. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 71:054302, 2005.
- [RCSP<sup>+</sup>99] C. Rubio, D. Caballero, J.V. Sánchez-Pérez, R. Martínez-Sala, J. Sánchez-Dehesa, F. Meseguer, and F. Cervera. The existence of full gaps and deaf bands in two-dimensional sonic crystals. *Journal of Lightwave technology*, 17(11):2202–2206, 1999.
- [RGP] E. Rubio, J.L. García, and A. Prieto. Estudio de guías dieléctricas t y n. *Anales de Física serie B* 78, 28.
- [Ri76] R. Rudokas and T. ithoh. Pasive milimeter wave ic components made of inverted strip dielectric waveguides. *IEEE*, 24(12):978–981, 1976.
- [RP87] J. Rodríguez and A. Prieto. Wide-band directional couplers in dielectric waveguide. *IEEE*, 35, 1987.
- [RSP89] J. Rodríguez, M.A. Solano, and A. Prieto. Characterization of discontinuities in dielectric waveguides using schelkunoff’s method. *Int. J. Electronics.*, 66, 1989.
- [SE06] M. Silveirinha and N. Engheta. Tunneling of electromagnetic energy through subwavelength channels and bends using  $\epsilon$ -near-zero materials. *Phys. Rev. Lett.*, 97:157403, 2006.

- [SMJ<sup>+</sup>06] D. Schuring, J.J Mock, B.J Justice, S.A Cummer, J.B Pendry, and D.R. Smith. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314(5801):977–980, 2006.
- [SPCMS<sup>+</sup>98] J.V Sánchez-Pérez, D. Caballero, R. Martínez-Sala, C. Rubio, J. Sánchez-Dehesa, F. Meseguer, J. Llinares, and F. Gálvez. Sound attenuation by two-dimensional array of rigid cylinders. *Phys. Rev. Lett.*, 80(24):5325–5328, 1998.
- [SPV<sup>+</sup>00] D.R Smith, Willie J. Padilla, D.C Vier, S.C Nemat-Nasser, and Schultz S. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Review. Letter*, 84(18):4184–4187, 2000.
- [SSMS02] D. R. Smith, S. Schultz, P. Marko, and C. M. Soukoulis. Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients. *Phys. Rev. B. (Condensed matter and Materials Physics)*, 65:195104, 2002.
- [SSS01] R.A Shelby, D.R Smith, and Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 292(5514):77–79, 2001.
- [STSD11] I. Spiousas, D. Torrent, and J. Sánchez-Dehesa. Experimental realization of broadband tuneable resonators based on anisotropic metafluid. *Appl. Phys. Lett.*, 98:244102, 2011.
- [SXG08] Y. Shanshan, Z. Xiaoming, and H. Gengkai. Experimental study on negative effective mass in a 1d massspring system. *New J. Phys.*, 10:043020, 2008.
- [THCSD06] D. Torrent, A. Håkansson, F. Cervera, and J. Sánchez-Dehesa. Homogenization of two-dimensional cluster of rigid rods in air. *Phys. Rev. Lett.*, 96:204302, 2006.
- [TP83] S. Tedjini and E. Pic. New analysis of semiconductor isolators: The modified spectral domain analysis. *IEEE*, 33, 1983.

- [TSD06] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. Effective parameters of clusters of cylinders embedded in a nonviscous fluid or gas. *Phys. Rev. B(Condensed matter and Materials Physics)*, 74:224305,, 2006.
- [TSD07a] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. Acoustic metamaterials for new two-dimensional sonic devices. *New. J. Phys.*, 9:323, 2007.
- [TSD07b] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. Evidence of two-dimensional magic clusters in the scattering of sound. *Phys. Rev. B(Condensed matter and Materials Physics)*, 75:241404, 2007.
- [TSD08] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. Anisotropic mass density by two-dimensional acoustic metamaterials. *New. J. Phys*, 10:023004, 2008.
- [TSD11a] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. Anisotropic mass density by radially periodic fluid structures. *Phys. Rev. Lett.*, 105:174301, 2011.
- [TSD11b] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. Multiple scattering formulation of two-dimensional acoustic and electromagnetic metamaterials. *New. J. Phys*, 13:093018, 2011.
- [Ves68] V.G Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Soviet Physics Uspekhi*, 10(4):509–514, 1968.
- [WCL13] Q. Wei, Y. Cheng, and X. J. Liu. Acoustic total transmission and total reflection in zero-index metamaterials with defects. *Appl. Phys. Lett.*, 102:174104, 2013.
- [WL13] Y. Wu and J. Li. Total reflection and cloaking by zero index metamaterials loaded with rectangular dielectric defects. *Appl. Phys. Lett.*, 102:183105, 2013.
- [YMY<sup>+</sup>08] Z. Yang, J. Mei, M. Yang, N. H. Chang, and P. Sheng. Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass density. *Phys. Rev. Lett.*, 101:204301, 2008.

- [YPL<sup>+</sup>04] S Yang, J.H Page, Z. Liu, M.L Cowan, C.T Chan, and P. Sheng. Focusing of sound in a 3d phononic crystal. *Phys. Rev. Lett.*, 93(2):024301, 2004.
- [YZH10] S. Yao, X. Zhou, and G. Hu. Investigation of the negative-mass behaviors occurring below a cut-off frequency. *New. J. Phys.*, 12:103025, 2010.
- [ZL04] X. Zhang and Z. Liu. Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals. *Appl. Phys. Lett.*, 85:341–343, 2004.
- [ZSC<sup>+</sup>08] G.W. Zhi, H.L. Sam, K. K. Chul, M. P. Choom, and N. Kyun. Acoustic wave propagation in one-dimensional phononic crystals containing helmholtz resonator. *J. Appl. Phys.*, 103:064907, 2008.
- [ZXY<sup>+</sup>11] L. Zhengyou, Z. Xixiang, M. Yiwei, Y. Y. Zhu, Y. Zhiyu, C. T. Chan, and S. Ping. Locally resonant sonic materials. *Science*, 289:1734–1736, 2011.
- [ZYF09] S. Zhang, L. Yin, and N. Fang. Focusing ultrasound with acoustic metamaterial network. *Phys. Rev. Lett.*, 102:194301, 2009.

Printed with L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X