

# **METODOLOGÍA PARA LA IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS EN EXCAVACIONES PROFUNDAS AL ABRIGO DE MUROS PANTALLA MEDIANTE MÉTODOS ESPECTRALES ESTOCÁSTICOS.**

**Antonio Cañavate Grimal**



Tesis doctoral dirigida  
por:

Prof. Dr. Pedro A.  
Calderón García  
(ICITECH UPV)

Prof. Dr. Ignacio Payá  
Zaforteza  
(ICITECH UPV)

Prof. Dr. Antonio Falcó  
Montesinos  
(ESET CEU UCH)

**Julio 2014**



**UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA**



**METODOLOGÍA PARA LA IDENTIFICACIÓN DE  
PARÁMETROS EN EXCAVACIONES PROFUNDAS AL  
ABRIGO DE MUROS PANTALLA MEDIANTE MÉTODOS  
ESPECTRALES ESTOCÁSTICOS.**

**ANTONIO CAÑAVATE GRIMAL**

**2014**

**Tesis doctoral dirigida por:**

**Prof. Dr. Pedro Antonio Calderón García**

**Prof. Dr. Ignacio Payá Zaforteza**

**Prof. Dr. Antonio Falcó Montesinos**

**Universidad Politécnica de Valencia**

**Departamento de Ingeniería de la Construcción y de  
Proyectos de Ingeniería Civil**





*A mi familia*



*“Dans les champs de l’observation le hasard ne favorise que les esprits préparés”*

Louis Pasteur



## **Prefacio**

La presente Tesis Doctoral, que tiene por título “METODOLOGÍA PARA LA IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS EN EXCAVACIONES PROFUNDAS AL ABRIGO DE MUROS PANTALLA MEDIANTE MÉTODOS ESPECTRALES ESTOCÁSTICOS” ha sido elaborada por Antonio Cañavate Grimal y forma parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos en el programa de doctorado del Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil de la Universitat Politècnica de València.

Los trabajos han sido dirigidos por el Prof. Dr. Pedro A. Calderón García y por el Prof. Dr. Ignacio Payá Zaforteza, ambos del Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil de la Universidad Politécnica de Valencia y junto con el Prof. Dr. Antonio Falcó Montesinos del Departamento Ciencias Físicas, Matemáticas y de la Computación – Escuela Superior de Enseñanzas Técnicas (ESET) de la Universidad CEU Cardenal Herrera.



## **Agradecimientos**

Esta Tesis Doctoral ha sido posible gracias a la motivación, guía y sugerencias de mis directores de Tesis, los doctores Pedro Calderón, Ignacio Payá y Antonio Falcó. Con estas líneas quiero expresarles mi más profundo agradecimiento.

También quiero extender mi gratitud a Fernando Sánchez, director de la Escuela de Enseñanzas Técnicas de la Universidad CEU Cardenal Herrera por todo el apoyo que me ha proporcionado durante todo el tiempo que ha durado esta investigación.

Asimismo quiero reconocer el apoyo de mis vecinos de despacho, Javi y David que siempre han estado prestos a solucionarme acertadamente mis frecuentes dudas matemáticas. No quiero olvidarme en estos agradecimientos ni de Julio que me introdujo en el “maravilloso” mundo del “abaqus” ni de Luis que hizo lo mismo con el “matlab”. También quiero extender mi agradecimiento a todos aquellos que desinteresadamente me han echado una mano durante este tiempo.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia el cariño y apoyo que me han dado, especialmente a Laura por todo lo que me ha tenido que aguantar.





## **Resumen**

El objetivo de esta Tesis es desarrollar una metodología para estimar los parámetros de los modelos que simulan excavaciones profundas al abrigo de muros pantalla a partir de las observaciones que se obtienen durante la ejecución. Para realizar la calibración del modelo, se parte de una estimación inicial de los parámetros expresados como funciones de probabilidad. Además, se requiere conocer cuál es la incertidumbre de las predicciones del modelo junto con el error aparejado a las mediciones.

La metodología se basa en la combinación de la inferencia bayesiana y los elementos finitos estocásticos (SFEM) no intrusivos. Los SFEM permiten manipular los parámetros como variables aleatorias y la inferencia bayesiana explica como actualizar el conocimiento inicial de los parámetros a la luz de las observaciones. Además, Los SFEM no intrusivos son métodos espectrales con los que se puede sustituir el modelo que simula la excavación, que suele ser pesado numéricamente, por un modelo aproximado subrogado mucho más ligero computacionalmente. La subrogación facilita los cálculos estocásticos y permite obtener la estructura estadística del problema. La metodología permite determinar, a un coste numérico razonable, en condiciones de servicio, los valores más verosímiles de los parámetros junto con su fiabilidad, así como la sensibilidad del modelo a las variaciones de los diferentes parámetros. La metodología se ha validado con tres ejemplos, dos de ellos sintéticos (las observaciones se han generado directamente a partir de un modelo numérico) y otro real.

Palabras clave: *inferencia bayesiana, elementos finitos estocásticos, problema inverso, métodos espectrales y excavaciones profundas.*

## **Resum**

L'objectiu d'esta Tesi és desenvolupar una metodologia per a estimar els paràmetres dels models que simulen excavacions profundes a l'abric de murs pantalla a partir de les observacions que s'obtenen durant l'execució. Per a realitzar el calibratge del model, es partix d'una estimació inicial dels paràmetres expressats com a funcions de probabilitat. A més, es requereix conèixer quina és la incertesa de les prediccions del model junt amb l'error aparellat als mesuraments.

La metodologia es basa en la combinació de la inferència bayesiana i els elements finits estocàstics (SFEM) no intrusius. Els SFEM permeten manipular els paràmetres com a variables aleatòries i la inferència bayesiana explica com actualitzar el coneixement inicial dels paràmetres a la llum de les observacions. A més, Els SFEM no intrusius són mètodes espectrals amb els que es poden substituir el model que simula l'excavació, que acostuma a ser pesat numèricament, per un altre model subrogat aproximat molt més lleuger computacionalment, facilitant els càlculs estocàstics, amb el que es pot obtenir l'estructura estadística del problema. La metodologia permet determinar, a un cost numèric raonable, en condicions de servei, els valors més versemblants dels paràmetres junt amb la seva fiabilitat, així com la sensibilitat del model a les variacions dels diferents paràmetres. La metodologia s'ha validat amb tres exemples, dos d'ells sintètics (les observacions s'han generat directament a partir d'un model numèric) i un altre real.

*Paraules clau: inferència bayesiana, elements finits estocàstics, problema invers, mètodes espectrals i excavacions profundes.*

## **Abstract**

The main objective of this Thesis is to present a methodology to determine the model parameters from the observed response of a deep excavation. In order to calibrate the model, an initial estimation of the parameters in terms of a probability function is needed. In addition, the quantification of the uncertainty in the model predictions together with the error in measurements is required.

The methodology combines the Bayesian inference and non-intrusive stochastic finite element (SFEM). The SFEM allows for the manipulation of the parameters as random variables and the Bayesian inference explains how to update the initial knowledge of the parameters in the light of the observations. Furthermore, the non intrusive SFEM are spectral methods which enable to construct a numerically lighter surrogate model of the original excavation model, thus facilitating the stochastic calculations, and to obtain the statistical structure of the problem. The methodology has proven to obtain at a reasonable numerical cost for service situations the maximum-likelihood model parameters along with their reliability and sensitivity. The methodology has been validated with three examples, two synthetic ones (the observations have been generated directly from a numerical model) and one real.

*Keywords: Bayesian inference, stochastic finite elements, inverse problem, spectral methods and deep excavations.*



## Índice

Índice.....	i
Notación.....	vi
Acrónimos.....	viii
Relación de figuras.....	ix
Relación de cuadros.....	xiv



## Índice

<b>Capítulo 1</b>	<b>INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS DE LA TESIS .....</b>	<b>1</b>
1.1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.2	OBJETIVOS, ESTRUCTURA Y CONTRIBUCIONES DE LA TESIS.....	2
1.2.1	Objetivos .....	2
1.2.2	Estructura.....	4
1.2.3	Contribuciones de la tesis.....	5
<b>Capítulo 2</b>	<b>ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>9</b>
2.1	DISEÑO DE MUROS PANTALLA .....	9
2.1.1	Métodos de equilibrio límite.....	12
2.1.2	Método del módulo de balasto .....	14
2.1.3	Método de elementos finitos .....	15
2.1.4	Otros métodos .....	20
2.2	LA INCERTIDUMBRE EN GEOTECNIA .....	22
2.2.1	Incertidumbre y riesgo.....	22
2.2.2	La seguridad en el diseño.....	24
2.2.3	El método observacional.....	30
2.3	DEFINICIÓN DEL PROBLEMA INVERSO.....	31

2.4	MÉTODOS PROBABILÍSTICOS .....	33
2.4.1	Métodos de fiabilidad.....	34
2.4.2	Métodos muestrales.....	37
2.4.3	Elementos finitos estocásticos.....	40
2.5	TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN.....	45
2.5.1	Métodos enumerativos.....	47
2.5.2	Métodos deterministas.....	47
2.5.3	Métodos estocásticos .....	48
2.6	PROBLEMAS INVERSOS EN GEOTECNIA .....	53
2.6.1	Mínimos cuadrados.....	54
2.6.2	Máxima verosimilitud.....	55
2.6.3	Inferencia bayesiana .....	57
2.6.4	Filtros de Kalman.....	58
2.7	CONCLUSIONES DEL SEGUNDO CAPÍTULO .....	58
<b>Capítulo 3</b>	<b>FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS .....</b>	<b>61</b>
3.1	VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS.....	61
3.2	LA EXPANSIÓN DE KARHUNEN-LOÈVE (KL) .....	64
3.3	EXPANSIÓN DE POLINOMIOS CAÓTICOS (PCE).....	65
3.3.1	Caos homogéneo .....	66
3.3.2	Polinomios caóticos unidimensionales.....	69
3.3.3	Polinomios caóticos multidimensionales .....	70



3.3.4	Truncamiento de la serie .....	71
3.4	ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS INTRUSIVOS .....	72
3.5	ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS NO INTRUSIVOS.....	73
3.6	CONCLUSIONES DEL TERCER CAPÍTULO.....	78
<b>Capítulo 4</b>	<b>METODOLOGÍA .....</b>	<b>81</b>
4.1	INTRODUCCIÓN.....	81
4.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA INVERSO .....	84
4.3	ESTRATEGIA BAYESIANA .....	87
4.3.1	Planteamiento bayesiano adoptado .....	87
4.3.2	Caso A. Incertidumbre insignificante en modelo y observaciones ...	92
4.3.3	Caso B. Incertidumbre insignificante en el modelo.....	94
4.3.4	Caso C. Incertidumbre insignificante en las observaciones.....	96
4.3.5	Caso D. Incertidumbre apreciable en modelo y observaciones .....	98
4.3.6	Determinación de las marginales .....	99
4.4	CONSTRUCCIÓN DEL MODELO SUBROGADO .....	100
4.4.1	Introducción .....	100
4.4.2	Determinación analítica de la covarianza del modelo subrogado...	102
4.4.3	Determinación de la influencia de cada variable en la varianza .....	104
4.5	ERROR DE TRUNCAMIENTO .....	106
4.5.1	Estructura del error de truncamiento .....	106

4.5.2	Dificultad en la estimación del tamaño del error de truncamiento.....	108
4.5.3	Estimación del tamaño del error de truncamiento.....	110
4.6	SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO.....	114
4.7	DETERMINACIÓN DEL PUNTO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD.....	119
4.8	PARTICULARIZACIÓN A MODELO LINEAL.....	121
4.9	CONCLUSIONES DEL CUARTO CAPÍTULO .....	122
<b>Capítulo 5</b>	<b>CALIBRACIÓN ESTOCÁSTICA .....</b>	<b>125</b>
5.1	IDENTIFICACIÓN DE UN PARÁMETRO EN UN EJEMPLO SINTÉTICO .....	125
5.1.1	Planteamiento del problema inverso .....	126
5.1.2	Resolución directa.....	128
5.1.3	Resolución mediante modelo subrogado .....	130
5.2	IDENTIFICACIÓN DE CINCO PARÁMETROS EN UN EJEMPLO SINTÉTICO .....	138
5.2.1	Modelo sintético.....	138
5.2.2	Planteamiento del problema inverso .....	142
5.2.3	Resolución del problema inverso .....	144
5.3	IDENTIFICACIÓN DE NUEVE PARÁMETROS EN EJEMPLO REAL.....	152
5.3.1	Descripción de la excavación .....	152

5.3.2	Descripción del terreno.....	155
5.3.3	Modelo de cálculo empleado .....	157
5.3.4	Planteamiento del problema inverso .....	159
5.3.5	Resolución del problema inverso .....	162
5.4	CONCLUSIONES DEL QUINTO CAPÍTULO.....	173
<b>Capítulo 6 CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE</b>		
	<b>INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>177</b>
6.1	CONCLUSIONES.....	177
6.2	FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....	180
<b>REFERENCIAS .....</b>		<b>183</b>

## Notación

$\alpha^i$	Multi-índice para construir el funcional $\psi_i$ .
$\alpha_j^i$	Componente $j$ del multi-índice $\alpha^i$ .
$\beta$	Punto de diseño.
$\varepsilon_T$	Error de truncamiento.
$\varphi_{\xi_i}$	Influencia de la variable aleatoria $\xi_i$ en la varianza de un polinomio multidimensional.
$\theta(\mathbf{d} \mathbf{m})$	Función de distribución condicional.
$\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$	Función de distribución de probabilidad que relaciona los parámetros y las observaciones mediante el modelo.
$\xi$	Variable aleatoria arbitraria normalizada.
$\xi$	Vector de variables aleatorias arbitrarias normalizadas y ortogonales.
$\xi_i$	Componente del vector de variables aleatorias $\xi$ .
$\Phi(\cdot)$	Función normal estándar acumulada.
$\Gamma_p$	Polinomios caóticos de orden de $p$ .
$\psi_i$	Caos unidimensional de orden $i$ (expresión polinómica).
$\Psi_i$	Caos multidimensional de orden $i$ (expresión polinómica).
$\omega$	Suceso elemental.
$\Omega$	Espacio muestral de sucesos elementales.
$b_i$	Valor de la restricción.
$f(\mathbf{x})$	Distribución de probabilidad conjunta arbitraria.
$f_0$	Función objetivo.

$f_i$	Restricciones.
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -álgebra mínima.
$d$	Variable observación.
$d_i$	Componente $i$ del vector de variables de observación.
$\mathbf{d}$	Vector de variables observación.
$d_{obs}$	Observación.
$\mathbf{d}_{obs}$	Vector de observaciones.
$g(\mathbf{m})$	Modelo directo.
$m$	Parámetro.
$m_i$	Componente $i$ del vector de parámetros del modelo.
$\mathbf{m}$	Vector de parámetros del modelo.
$N$	Número de variables o parámetros a optimizar.
$p$	Grado de la expansión truncada
$P$	Número de términos menos uno de la expansión truncada
$p_f$	Probabilidad de fallo.
$\mathcal{P}$	Medida de probabilidad
$P(y_1, \dots, y_n)$	Función de comportamiento asociada a un determinado estado límite.
$Q$	Diseño experimental o número de realizaciones necesarias para definir una superficie de respuesta.
$u_i$	Coeficientes de los funcionales polinómicos $\psi_i$ o $\Psi_i$
$U$	Variable aleatoria arbitraria de varianza finita.
$\mathbf{U}$	Vector de variables aleatorias arbitrarias de varianza finita.

## **Acrónimos**

ANN	Redes neuronales artificiales ( <i>Artificial Neural Networks</i> )
CTE	Código técnico de la edificación.
EC7	Eurocódigo 7.
FEM	Método de los elementos finitos ( <i>Finite Element Method</i> ).
KL	Karhunen-Loève
LRFD	Método de factores de carga y resistencia ( <i>Load and Resistance Factor Design</i> ).
LSF	Ajuste por mínimos cuadrados ( <i>Least Square Fit</i> ).
MCMC	Cadena de Markov de Monte Carlo ( <i>Monte Carlo Markov chain</i> )
NISP	Proyección espectral no intrusiva ( <i>Non-Intrusive Spectral Projection</i> )
PCE	Expansión de polinomios caóticos ( <i>Polynomial Chaos Expansion</i> ).
SFEM	Elementos finitos estocásticos ( <i>Stochastic Finite Elements Methods</i> ).

## **Relación de figuras**

Figura 2-1 Imágenes de fases constructivas de un muro pantalla. ....	10
Figura 2-2 Proceso habitual para el diseño y supervisión de excavaciones profundas [2].....	11
Figura 2-3 Esquema de cálculo de la cimentación considerando o no la interacción suelo-estructura, (a) equilibrio límite, (b) balasto y (c) elementos finitos [23]. ....	12
Figura 2-4 Empujes al reposo, activo y pasivo de un suelo puramente friccional según Rankine en un plano de tensiones de Mohr-Coulomb. ....	13
Figura 2-5 Comportamiento del terreno, (a) esquema de múltiples superficies de fluencia, (b) ley tensión deformación y (c) evolución de la deformación plástica con la deformación total [38]. ....	16
Figura 2-6 Zona de pequeñas deformaciones en una excavación [22]. ....	17
Figura 2-7 Predicción de mediante método semi-empírico de deflexiones y asentos de una pantalla [47].....	19
Figura 2-8 Dos vistas del colapso de la excavación de la autopista de Nicoll en Singapur (a) daños en la excavación y (b) daños en la autopista [52].....	21
Figura 2-9 Tira cómica de Calvin y Hobbes [61].....	24
Figura 2-10 Clasificación de los métodos probabilísticos más habituales. ....	35

Figura 2-11 (a) Problema de fiabilidad general, (b) solución empleando FORM [74].....	36
Figura 2-12 Ejemplo del uso del muestreo de hipercubo latino para dos variables y cinco realizaciones [75]. .....	40
Figura 2-13 Esquema de los elementos finitos estocásticos. Como los parámetros $m$ : $E$ , $\nu$ , $\phi$ , $c$ son variables aleatorias representadas por sus correspondientes funciones de distribución, el modelo $g$ da los desplazamiento nodales $d_j$ como variables aleatorias.....	41
Figura 2-14 Esquema de los elementos finitos estocásticos no intrusivos. ....	43
Figura 2-15 Explicación gráfica del método de máxima verosimilitud, (a) representación de $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ y (b) determinación del punto de máxima verosimilitud (adaptado de [114]).....	56
Figura 4-1 Proceso de resolución de un problema inverso, (a) distribución <i>a priori</i> conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> conjunta con sus marginales (adaptado de Tarantola [3])......	90
Figura 4-2 Explicación gráfica del Caso A (incertidumbre insignificante en modelo y observaciones), (a) distribución <i>a priori</i> conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> conjunta con sus marginales.....	93



Figura 4-3 Explicación gráfica del Caso B (incertidumbre insignificante en el modelo), (a) distribución <i>a priori</i> conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> conjunta con sus marginales.....	95
Figura 4-4 Explicación gráfica del Caso C (incertidumbre insignificante en las observaciones), (a) distribución <i>a priori</i> conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> conjunta con sus marginales. ....	97
Figura 4-5 Explicación gráfica del Caso D (incertidumbre apreciable en modelo y observaciones), (a) distribución <i>a priori</i> conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> conjunta con sus marginales. ....	99
Figura 4-6 Evolución de la var s con el grado de la PCE.....	109
Figura 4-7 (a) acotación unidimensional de la varianza, (b) análisis en componentes principales de las varianzas.....	111
Figura 4-8 Ejes principales de los residuos.....	117
Figura 4-9 Proceso iterativo para la resolución del problema inverso.....	118
Figura 5-1 Modelo en voladizo del muro pantalla.....	126
Figura 5-2 Resolución bayesiana del problema inverso sin incertidumbres ni en las observaciones, ni en el modelo, (a) distribución <i>a priori</i> , (b) distribución modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> . ....	129
Figura 5-3 Primera iteración, (a) distribución <i>a priori</i> , (b) distribución modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> . ....	133
Figura 5-4 Segunda iteración, (a) distribución <i>a priori</i> , (b) distribución modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> .....	134

Figura 5-5 Tercera iteración, (a) distribución <i>a priori</i> , (b) distribución modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> .	134
Figura 5-6 Cuarta iteración, (a) distribución <i>a priori</i> , (b) distribución modelo, (c) distribución <i>a posteriori</i> .	135
Figura 5-7 Explicación gráfica del proceso de resolución por iteraciones sucesivas, sobre el rango inicial (a) y sobre un rango reducido (b).	136
Figura 5-8 Evolución de $\text{var } \varepsilon_t$ con las iteraciones, (a) escala logarítmica, (b) escala natural.	137
Figura 5-9 Malla de elementos finitos empleada y puntos en los que se toman medidas de desplazamiento. Sin colorear las arenas y en gris el muro.	139
Figura 5-10 Etapas de construcción, (a) imposición de tensiones iniciales, (b) excavación.	140
Figura 5-11 Desplazamientos horizontales del terreno muro y del muro (en metros) tras la excavación.	141
Figura 5-12 Evolución de las funciones de distribución de probabilidad marginal de los parámetros tras seis iteraciones (el punto indica en cada gráfico el parámetro “real”).	146
Figura 5-13 Puntos de máxima verosimilitud junto con intervalos de confianza del 95% de los parámetros por iteración.	147
Figura 5-14 Evolución de $\text{var } \varepsilon_t$ con las iteraciones, (a) escala logarítmica, (b) escala natural.	148
Figura 5-15 Movimientos registrados de la pantalla y predicciones del modelo en cada iteración junto intervalos de confianza al 95%.	149
Figura 5-16 Influencia relativa de cada parámetro del modelo en la varianza de la respuesta media según se itera.	150

Figura 5-17 (a) Sección y (b) planta de la pantalla experimental [7].....	153
Figura 5-18 Resultados de ensayos CPT e identificación de capas [153].....	156
Figura 5-19 Malla de elementos finitos empleada (en amarillo nivel seco, en ocre saturado). En trazo más grueso pantalla y puntal.....	158
Figura 5-20 Convergencia del modelo subrogado al modelo directo original....	164
Figura 5-21 Evolución de $\text{var} \varepsilon_i$ con las iteraciones, (a) escala natural, (b) escala logarítmica. ....	166
Figura 5-22 Evolución de la influencia de cada parámetro en la varianza de la respuesta total.....	167
Figura 5-23 Evolución de las distribuciones marginales de los parámetros.....	168
Figura 5-24 Evolución de los puntos de máxima verosimilitud junto con el intervalo de confianza del 95%.....	169
Figura 5-25 Comparación de los resultados obtenidos a partir de los parámetros más verosímiles de la calibración (Cuadro 5-15), los valores propuestos por Mestat y Arafati [56](Cuadro 5-9) y las lecturas obtenidas de la auscultación en a) etapa 5, excavación hasta 4.0 m b) etapa 6, excavación hasta 5.0 m y c) etapa 7, Aplicación carga en trasdós (llenado depósito).....	171

## Relación de cuadros

Cuadro 2-1 Principales factores de incertidumbre en la validación de un modelo [56] .....	23
Cuadro 2-2 Diferentes definiciones de la resistencia al levantamiento de una zapata y su influencia en el factor de seguridad [63].....	26
Cuadro 3-1 Correspondencia entre el tipo de polinomios caóticos y su variable aleatoria asociada [6].....	70
Cuadro 3-2 Número de evaluaciones aproximadas del modelo directo para generar un diseño experimental adecuado según la regla empírica [125].....	78
Cuadro 4-1 Casos a considerar en función del grado de incertidumbre en el modelo y en las observaciones.....	92
Cuadro 5-1 Propiedades determinar el desplazamiento en cabeza del muro .....	127
Cuadro 5-2 Intervalos de confianza del 95% tras cada iteración junto con el error de truncamiento y el punto de máxima verosimilitud (PMV). .....	135
Cuadro 5-3 Parámetros con los que se generan las observaciones.....	139
Cuadro 5-4 Movimientos horizontales empleados como observaciones $\mathbf{d}_{obs}$ calculados a partir de los parámetros recogidos en el Cuadro 5-3...	141
Cuadro 5-5 Rango típico de los parámetros buscados.....	142
Cuadro 5-6 Discretización de los parámetros buscados .....	151
Cuadro 5-7 Características resistentes de las tablestacas instaladas [152] .....	154
Cuadro 5-8 Etapas de construcción .....	155

Cuadro 5-9 Parámetros del modelo constitutivo de Mohr Coulomb propuestos por [56] para las arenas de Hochstetten.....	156
Cuadro 5-10 Etapas consideradas en el modelado.....	157
Cuadro 5-11 Características del modelo de elementos finitos.....	159
Cuadro 5-12 Movimientos horizontales empleados como observaciones $\mathbf{d}_{obs}$ para la calibración [7].....	160
Cuadro 5-13 Rango adoptado de los parámetros a determinar en el análisis inverso.....	160
Cuadro 5-14 Valores de los parámetros deterministas del modelo .....	161
Cuadro 5-15 Resumen del análisis.....	170
Cuadro 5-16 Discretización de los parámetros buscados.....	172



# Capítulo 1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS DE LA TESIS

## 1.1 INTRODUCCIÓN

El suelo es un material cuyo comportamiento mecánico es principalmente no lineal y en el que la rigidez junto con la resistencia depende de los niveles de tensión. Se han desarrollado un gran número de modelos constitutivos para simular las características más importantes de su comportamiento, aunque ninguno está universalmente aceptado. La elección del modelo del terreno depende de la información disponible y del objetivo del diseño. La determinación de los parámetros del suelo es una tarea difícil debido a diferentes circunstancias entre las que se destacan la heterogeneidad del terreno, las condiciones de contorno (estratificación, situación del nivel freático...), el remoldeo que sufren las muestras durante la extracción en la campaña geotécnica y la pequeña proporción de suelo muestreada en comparación con la cantidad de terreno afectado por la cimentación. Por lo tanto, la información bruta que se obtiene de un reconocimiento geotécnico debe ser interpretada por un ingeniero especialista, añadiendo más incertidumbre al proceso de elección de modelo y de

los parámetros geotécnicos [1]. Una práctica habitual en geotecnia, para confirmar la validez de los parámetros, es realizar análisis retrospectivos o inversos con la información que proporciona la instrumentación de obra. Resolver un problema inverso consiste en estimar unos parámetros de los que tenemos inicialmente una información limitada a partir de observaciones indirectas sujetas a error.

Este tipo de problemas no son disquisiciones académicas, sino que tienen una gran aplicación práctica. En esta Tesis se propone una metodología para llevar a cabo la identificación de los parámetros geotécnicos y estructurales a partir de los movimientos que se producen durante la construcción de un muro pantalla. El diseño de una excavación profunda al abrigo de muros pantalla es un problema de gran complejidad en el que intervienen un gran número de factores, algunos de los cuáles no son tenidos en cuenta habitualmente. Sin embargo, en ciertas circunstancias pueden tener una influencia importante en el comportamiento de la contención [2]. Por esa razón, el análisis retrospectivo de excavaciones es una herramienta que permite profundizar en el problema y entender los mecanismos que explican su comportamiento.

## **1.2 OBJETIVOS, ESTRUCTURA Y CONTRIBUCIONES DE LA TESIS**

### **1.2.1 Objetivos**

El diseño de excavaciones profundas al abrigo de muros pantalla es una labor compleja por la cantidad de incertidumbres que se manejan. La ejecución de la obra permite validar tanto las hipótesis de cálculo como los parámetros



empleados a partir de la interpretación de los resultados que se obtienen de la auscultación de control instalada. El proceso de validación y estimación de parámetros a partir de la respuesta de un sistema es lo que se conoce como problema inverso, calibración o análisis retrospectivo.

El problema que se plantea en la presente Tesis es la obtención de los parámetros del modelo que se han empleado en la fase de diseño a partir de observaciones del comportamiento de la excavación. Cabe destacar que como ni el modelo es perfecto (no es capaz de reproducir exactamente el comportamiento del fenómeno real), ni las observaciones están libres de error, no es razonable pretender obtener un conjunto de parámetros “óptimos”. Lo mejor que se puede conseguir son unos parámetros con el correspondiente error asociado. Por ese motivo para plantear el problema de manera consistente, se ha de conocer el error asociado al modelo y a las observaciones. En otras palabras, un análisis retrospectivo coherente sólo puede aspirar a acotar mejor la incertidumbre inicial que se tiene de los parámetros.

El objetivo principal de esta Tesis es presentar una metodología numérica eficiente que permita la resolución de los problemas de identificación de parámetros del terreno. A tal fin, se partirá de los desplazamientos registrados mediante auscultación durante excavaciones al abrigo de muros pantalla con el nivel de incertidumbre que se tiene. A tal efecto, es necesario cuantificar la confianza que se tiene inicialmente del modelo, de las observaciones y de los parámetros. En aras a alcanzar el objetivo principal citado, se adopta el siguiente guión:

- Estudiar las diferentes estrategias que otros autores han empleado para resolver este tipo de problemas;

- plantear el problema en un marco coherente que tenga en cuenta tanto las incertidumbres del modelo como de las observaciones;
- presentar un método de reducir el coste computacional que representa la resolución de un problema inverso y
- validar la metodología mediante ejemplos prácticos.

### 1.2.2 Estructura

El anterior guión se materializa en la estructura de la Tesis que se organiza en seis capítulos. El primero es la presente introducción y el último recoge las conclusiones de este trabajo.

El segundo capítulo presenta un estado del arte en el que se repasa sucintamente las diferentes metodologías disponibles para el diseño de muros pantalla. Se hace hincapié en la incertidumbre que lleva aparejado el cálculo de este tipo de estructuras y cuáles son las diferentes estrategias disponibles para incorporar la seguridad en el diseño. Como la resolución del problema inverso se aborda mediante una técnica probabilística espectral, se repasan los métodos probabilísticos más habituales para incorporar la incertidumbre al diseño. Finalmente, se examina cómo se ha encarado la resolución de los problemas inversos en estructuras de cimentación.

El tercer capítulo resume los fundamentos estadísticos que se emplean para la resolución de los problemas inversos. En este capítulo se hace un especial énfasis en las expansiones de polinomios caóticos (PCE). Ello se debe a que son la base de los elementos finitos estocásticos no intrusivos.

El cuarto capítulo es la aportación más importante de la presente Tesis. En este

capítulo se presenta un método novedoso que combina la inferencia bayesiana [3] con los elementos finitos estocásticos [4-6] para resolver los problemas inversos relacionados con excavaciones profundas. El método se fundamenta en la sustitución del modelo numérico original (pesado desde el punto de vista numérico) por otro aproximado basado en los elementos finitos estocásticos espectrales.

En el quinto capítulo, una vez establecido el marco del problema, se valida la metodología propuesta mediante la calibración de tres ejemplos de dificultad creciente. Los dos primeros son problemas sintéticos, es decir, son ejemplos en los que las observaciones se han generado numéricamente. Consecuentemente, las observaciones no tienen ningún tipo de ruido porque no hay error experimental. Asimismo, el modelo constitutivo describe perfectamente el comportamiento del terreno, la geometría se conoce de manera precisa y la discretización del dominio no afecta para nada. Como la solución “verdadera” es conocida de antemano, cuestiones tales como los efectos de realizar el análisis en el modelo subrogado se pueden resolver fácilmente. El tercer problema es el análisis de una excavación experimental profusamente instrumentada realizada en Hochstetten (Alemania) [7]. Se ha optado por estudiar este caso por la calidad de la información registrada. Al estudiar un caso real, se ha podido abordar cómo afrontar un problema inverso en el que inicialmente se esperan incertidumbres en el modelo y en los datos experimentales.

### **1.2.3 Contribuciones de la tesis**

La determinación de los parámetros de una excavación profunda a partir de la información que proporciona la auscultación no es un problema nuevo porque numerosos autores ya lo han estudiado ([8-16]). La mayoría de estos estudios [8,

10-13, 16] se plantean como problemas de optimización, en los que se pretende obtener el conjunto de parámetros que minimizan una función objetivo dada sin determinar la fiabilidad de los mismos, ni analizar la sensibilidad del modelo a las variaciones de estos parámetros. En la presente Tesis se ha optado por un enfoque diferente: la metodología bayesiana. Se ha adoptado una estrategia bayesiana porque es la más adecuada para resolver problemas inversos [3, 17]. La metodología bayesiana da la solución del problema en términos de función de probabilidad. Ello se debe a que incorpora las incertidumbres que se puedan tener tanto en la bondad del modelo como en la precisión de la respuesta observada.

En la actualidad, se observa un importante auge la teoría y práctica de los elementos finitos estocásticos [18]. Este tipo de métodos permite propagar la incertidumbre de los parámetros de entrada por todo el modelo y obtener una solución consistente en términos de función de probabilidad.

Algunos autores [6, 19] han sugerido recientemente aprovechar la potencia que brinda la combinación de la inferencia bayesiana con los elementos finitos estocásticos para resolver problemas inversos. En la presente tesis, se avanza en esa dirección empleando conjuntamente las técnicas bayesianas con una versión espectral de los elementos finitos estocásticos para calibrar modelos de excavaciones profundas.

Los modelos que se emplean en la simulación de excavaciones profundas son numéricamente muy exigentes. Para aligerar la carga numérica que conlleva un cálculo probabilístico, se sustituye el modelo original por otro aproximado construido a partir de técnicas espectrales de los elementos finitos estocásticos. La utilización de un modelo subrogado ha permitido obtener una serie de

expresiones analíticas originales que permiten entender mejor la estructura estadística del problema y, por ende, mejorar la comprensión del problema globalmente. Sin embargo, la subrogación del modelo original por otro aproximado conlleva incorporar a la modelación un error adicional. La forma de acotar este error a un coste numérico razonable es la aportación más importante de la presente Tesis.

En definitiva, se ha desarrollado una herramienta de trabajo que permite responder de manera natural y directa preguntas tales como las que se enuncian a continuación:

- Cuál es la fiabilidad de un determinado parámetro;
- cuál es la sensibilidad del modelo a la variación de un determinado parámetro;
- cuál es la influencia de un determinado parámetro en la respuesta del modelo;
- cuáles son los valores más verosímiles de los parámetros y
- de qué parámetros se podría prescindir en caso de una reducción de modelo.



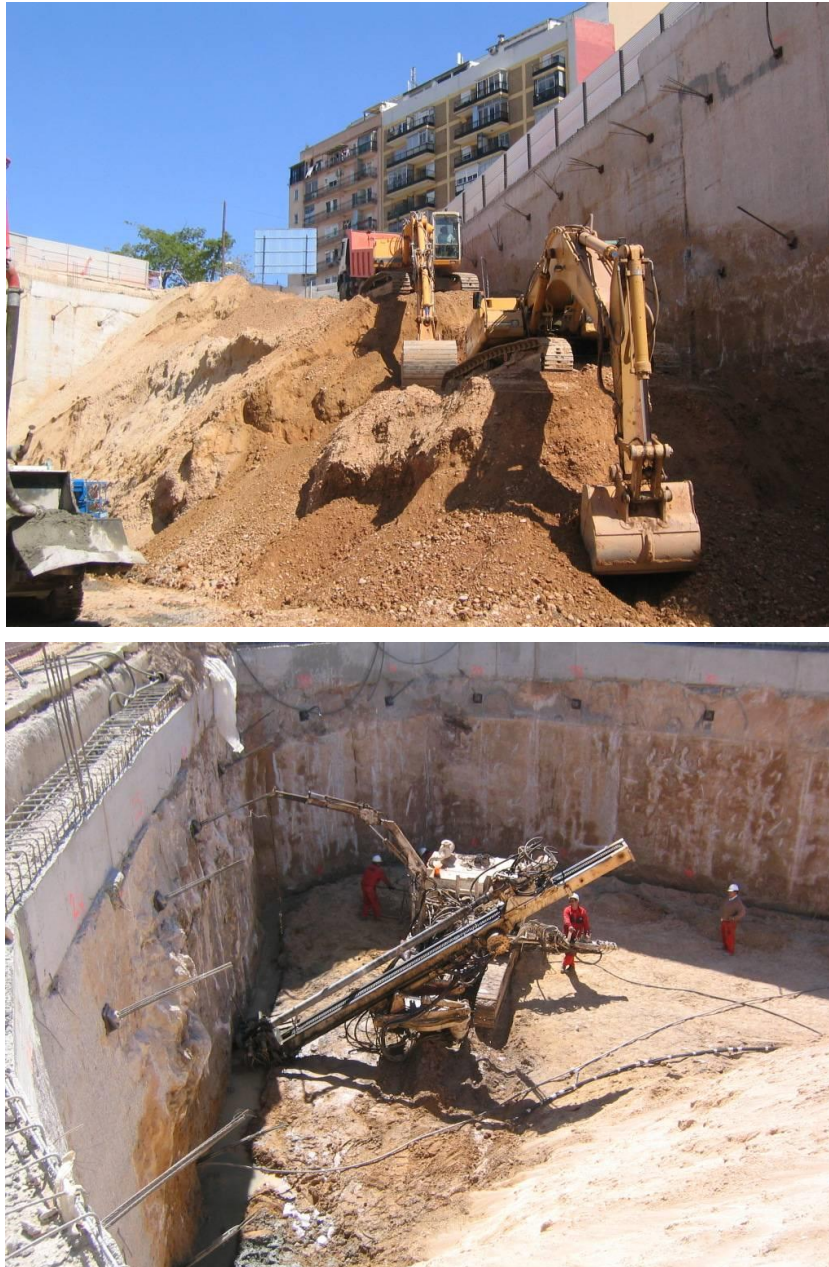
# Capítulo 2 ESTADO DEL ARTE

## 2.1 DISEÑO DE MUROS PANTALLA

El muro pantalla (Figura 2-1) es una técnica de contención de tierras que puede ser empleada en un gran número de tipos de suelos y condiciones geotécnicas. Ocupa espacios reducidos, limita los movimientos en el entorno de la obra y puede servir para limitar el flujo de agua hacia la excavación. Estas características hacen que sea la técnica más empleada en entornos urbanos [20, 21].

En el diseño de una pantalla, se han de considerar las condiciones geológico-geotécnicas del emplazamiento, las condiciones medioambientales, el plazo de ejecución, el presupuesto y la maquinaria de construcción disponible. Con todos esos condicionantes se debe plantear un plan acorde [22]. Por lo tanto, el diseño de un muro pantalla es un problema complejo en el que se combinan aspectos estructurales, geotécnicos y constructivos. El proyectista debe adoptar un gran número de decisiones, entre las cuales la primera es la elección del método constructivo que condicionará la metodología de cálculo. Si la excavación es de envergadura o existen construcciones colindantes sensibles a los movimientos debidos a la ejecución del muro pantalla, es necesario que la excavación esté convenientemente instrumentada para controlar su comportamiento y

comprobar que se ajusta a las previsiones de diseño.



**Figura 2-1** Imágenes de fases constructivas de un muro pantalla.

En la Figura 2-2, se muestra el proceso de diseño de una excavación profunda [2] y, tal y como se desprende de esa figura, el proceso no es secuencial sino iterativo e interactivo porque las diferentes fases están interrelacionadas.



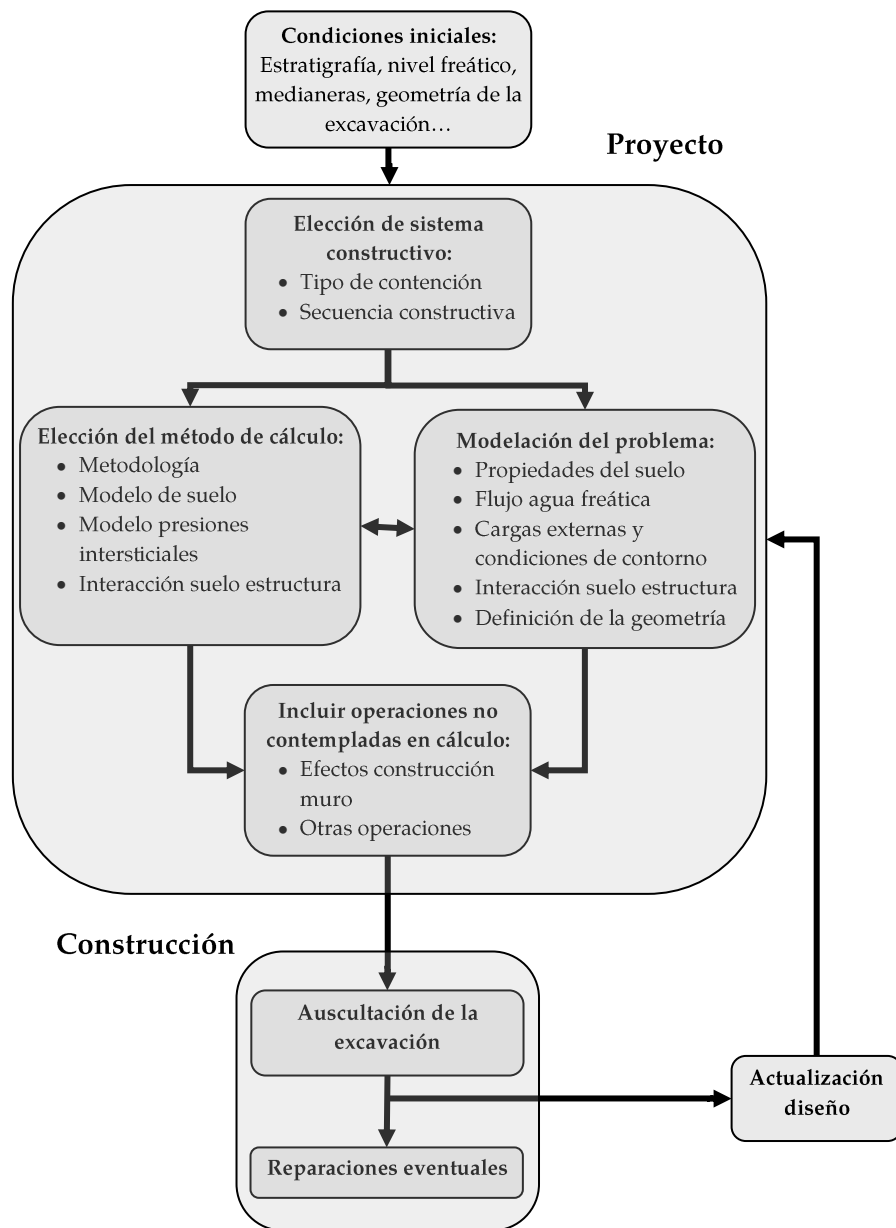


Figura 2-2 Proceso habitual para el diseño y supervisión de excavaciones profundas [2]

Los métodos más corrientes de cálculo de muros pantalla se pueden dividir en tres grupos ordenados por complejidad creciente [2]:

- Métodos de equilibrio límite;

- método del módulo de balasto y
- método de los elementos finitos o de las diferencias finitas.

Los métodos de equilibrio límite son metodologías simplificadas que permiten el cálculo manual, mientras que las demás son de carácter numérico y precisan del uso de ordenadores. En la Figura 2-3 se esquematizan las tres metodologías según su interacción con el entorno.

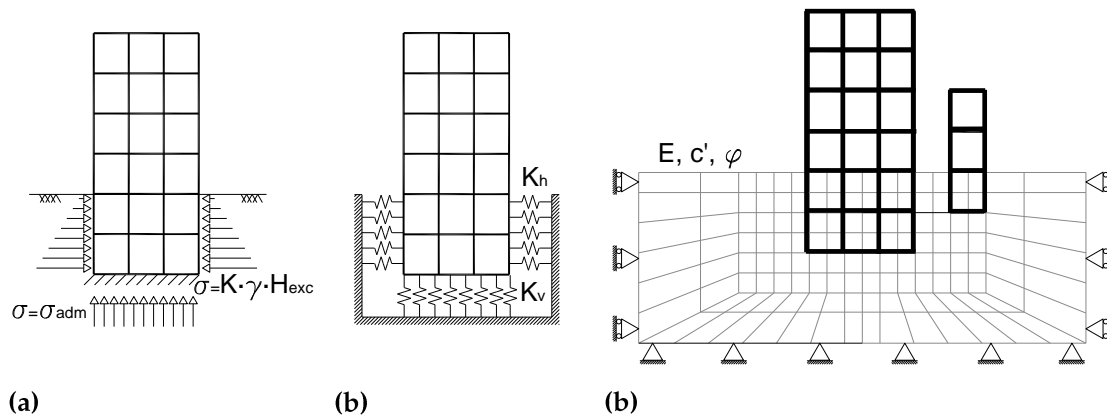


Figura 2-3 Esquema de cálculo de la cimentación considerando o no la interacción suelo-estructura, (a) equilibrio límite, (b) balasto y (c) elementos finitos [23].

### 2.1.1 Métodos de equilibrio límite

Las metodologías basadas en el equilibrio límite son métodos simplificados con los que se determinan las tensiones que actúan sobre el muro. En estas se tienen en cuenta los desplazamientos de éste sólo de forma cualitativa. Las teorías más habituales para estimar empujes sobre muros son las de Rankine, Coulomb o Caquot-Kerisel [22]. En estas teorías, el empuje sobre el muro no se determina de la relación tensión-deformación sino a partir de ciertas simplificaciones. Por ejemplo, la teoría de Rankine asume que todo el terreno en el trasdós está

plastificado, por lo que la mínima y la máxima tensión horizontal que puede actuar sobre el muro están condicionadas por el criterio de rotura. En la Figura 2-4, se muestra la máxima y mínima tensión horizontal que puede actuar sobre un muro perfectamente liso en un terreno puramente friccional según la teoría de Rankine.

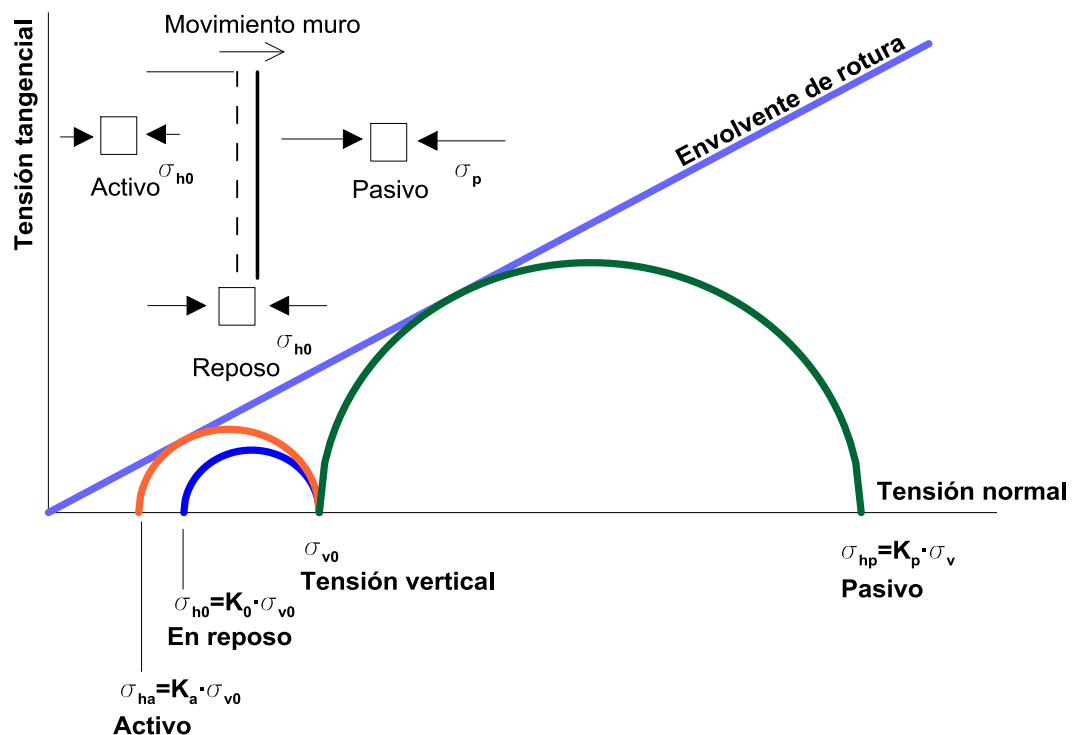


Figura 2-4 Empujes al reposo, activo y pasivo de un suelo puramente friccional según Rankine en un plano de tensiones de Mohr-Coulomb.

Este tipo de métodos fueron los primeros que se desarrollaron de ahí que cuentan con bastante experiencia acumulada. Sin embargo, presentan ciertas limitaciones. Una de las más importantes radica en que no se pueden calcular las variaciones en los desplazamientos del muro o de los anclajes durante el proceso constructivo. Además, en excavaciones complejas, este tipo de metodología carece del soporte teórico adecuado. En consecuencia, en la práctica habitual se

diseñan las pantallas mediante los otros dos tipos de metodologías numéricas.

### 2.1.2 Método del módulo de balasto

El método del módulo de balasto o de Winkler [24] es muy popular entre los ingenieros profesionales. Ello se debe a que es sencillo de implementar en programas de cálculo estructural y a que no requiere de una gran potencia de cálculo. Este método asume que el comportamiento del suelo es equivalente al de un lecho elástico o a un conjunto de muelles dispuestos generalmente en sentido perpendicular al elemento estructural. El suelo se asimila burdamente a una serie de soportes elásticos, aunque el comportamiento del elemento estructural se puede representar mediante elementos finitos o diferencias finitas.

Estos modelos pueden simular satisfactoriamente el comportamiento del elemento estructural, pero no arrojan ninguna información de la estabilidad global, ni de los movimientos en estructuras adyacentes. El módulo de balasto es un parámetro que no sólo depende del terreno, sino también de la rigidez del muro y la configuración de la excavación. Por esa razón, si se intenta modelar excavaciones complejas, los resultados pueden no ser razonables [22]. Aunque existen muchas reglas empíricas para determinar el coeficiente de balasto [22, 25], no se dispone de una metodología universalmente aceptada para la determinación de este parámetro. Entre otra serie de desventajas y limitaciones del método como puede ser no considerar ni flujos de agua ni subpresiones, Ou [22] advierte que un gran número de *software* comercial está programado sólo para un tipo de ley de empuje de tierras. Por consiguiente, su uso en ciertas condiciones geotécnicas puede ser discutible y el citado autor propone una serie de directrices para comprobar su aplicabilidad.

### 2.1.3 Método de elementos finitos

Bajo esta categoría, se incardinan en un sentido amplio los esquemas de diferencias finitas. Las formulaciones de elementos finitos (FEM, *finite element method*) [26] se ajustan a cualquier geometría y pueden incorporar cualquier ley de comportamiento de los materiales. Los FEM son capaces de describir satisfactoriamente tanto los movimientos que se producen en el muro pantalla como en el terreno adyacente.

El método de los elementos finitos es el que mejor describe el comportamiento global de la excavación. Por ese motivo, se emplea habitualmente para modelar interacciones suelo-estructura complejas como pueden ser las excavaciones profundas entibadas [27]. Duncan y Bentler [20, 28] hacen una recopilación de algunas excavaciones profundas significativas en la que se ha empleado este método. Muchos autores [27, 29-31] han verificado la fiabilidad de este método en excavaciones profundas pese, a que la complejidad del problema se incrementa debido a los modelos constitutivos empleados. Consecuentemente, uno de los mayores problemas al que se enfrenta la modelación por elementos finitos, además de la elección de los modelos constitutivos, es la obtención de parámetros del terreno realistas así como conseguir una adecuada simulación de las técnicas y secuencias de construcción [21]. Por esa razón, el análisis retrospectivo o inverso cobra gran importancia en las excavaciones profundas. Un análisis retrospectivo adecuado ha de responder si el modelo que se está empleando explica convenientemente el comportamiento de la excavación. Si los parámetros estimados quedan fuera de un rango razonable, el modelo probablemente sea incorrecto y no deba ser empleado para realizar ninguna predicción [32].

Aunque existe un elevado número de modelos constitutivos, no hay consenso en qué modelo es mejor para cada tipo de suelo. En general, la modelación mediante FEM consigue una buena predicción de los movimientos de la pantalla. Sin embargo la determinación del campo de asientos a su alrededor no es tan afinada [33]. De hecho, tras una revisión de experiencias publicadas, Gens [34] apunta que los movimientos laterales de la pantalla no son muy sensibles al tipo de modelo constitutivo empleado, especialmente en excavaciones en terrenos duros. De cualquier manera, existen numerosos estudios [16, 35-37] en los que se constata una mejora de la predicción de los asientos en el trasdós de la pantalla, empleando formulaciones que tienen en cuenta las pequeñas deformaciones.

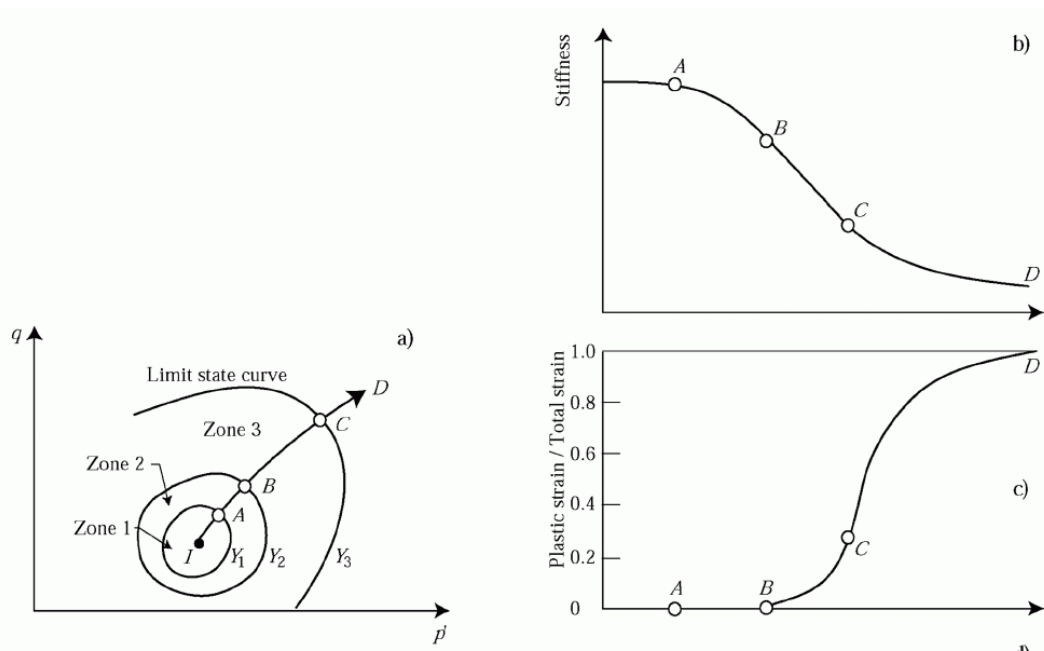


Figura 2-5 Comportamiento del terreno, (a) esquema de múltiples superficies de fluencia, (b) ley tensión deformación y (c) evolución de la deformación plástica con la deformación total [38].

El terreno es un material no lineal cuyo módulo de elasticidad depende de la historia de deformaciones, de manera que el módulo de elasticidad se reduce a

medida que el suelo acumula deformación tal y como se muestra en la Figura 2-5. Ou [22] presenta un método simplificado de base empírica que valora las pequeñas deformaciones empleando un modelo habitual. Como se muestra en la Figura 2-6, el terreno se divide en dos zonas, la más cercana al muro que se caracteriza con el módulo de deformación secante y la más alejada (cuyas deformaciones son menores) a la que se le asigna un módulo de elasticidad tres veces mayor.

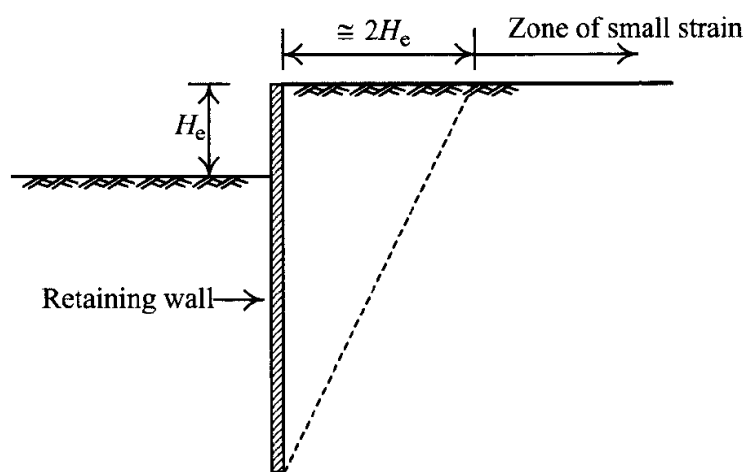


Figura 2-6 Zona de pequeñas deformaciones en una excavación [22].

En la mayoría de casos, desde un punto de vista práctico, no es posible modelar de manera precisa ciertos aspectos constructivos (secuencia de excavación, tesado de anclajes, sobrecargas...) resultando en discrepancias entre los resultados del análisis numérico y la realidad [21]. Además, existen otros aspectos que por su complejidad no se incluyen en los cálculos como pueden ser los efectos de la construcción del muro pantalla en el terreno o los de inyecciones auxiliares [2]. Se han realizado varias investigaciones para intentar cuantificar estos efectos [39-41], aunque aún no han alcanzado todavía el suficiente desarrollo.

En estudios comparativos o *benchmarking* [42, 43], se han observado grandes

discrepancias en los resultados obtenidos por diferentes técnicos para un mismo problema. Este hecho se puede explicar en parte por el gran número de hipótesis que ha de adoptar el proyectista. Otra razón radica en la implementación de los modelos y los procedimientos de resolución en programas comerciales geotécnicos varían y a veces no están totalmente explicados [42]. Como precaución, Ou [22] recomienda contrastar los resultados obtenidos mediante FEM con otros métodos para asegurar resultados razonables.

Uno de los inconvenientes que pueden presentar los FEM es que el dominio que se analiza no está siempre claramente definido. La extensión horizontal del modelo tiene un efecto relevante en la magnitud de las deflexiones del muro [44]. De cualquier manera, la máxima diferencia entre los movimientos del muro apenas se modifica con el tamaño de la malla [21]. A tal efecto, existen varias reglas para determinar las dimensiones de la malla de elementos finitos. Faheem *et al.* [45] consideran que la distancia entre el muro y el borde de la malla debe ser por lo menos el doble de la excavación máxima aunque Ou [22] lo aumenta al triple si sólo se están estudiando las deflexiones del muro y al cuádruple si además, se pretende determinar los asentos del terreno. En cuanto a la distancia vertical Faheem *et al.* [45] recomiendan que al menos haya seis filas de elementos bajo el muro.

Para reducir el tamaño de la malla, es práctica habitual aprovechar las simetrías de la geometría y reducir un problema tridimensional a otro bidimensional de deformación plana. Esta última hipótesis requiere que haya una gran distancia en dirección perpendicular al plano estudiado sin cambios apreciables ni en la geometría, ni en las cargas. Sin embargo, en entornos urbanos densamente contruidos, las condiciones necesarias para admitir la deformación plana son difíciles de conseguir. Esto conlleva que pueda ser más apropiado un estudio



tridimensional [46]. En la Figura 2-7, se muestra la forma de los desplazamientos horizontales de una pantalla mediante un método semi-empírico propuesto por Roboski y Finno [47]. Ese método impone que los movimientos se deben ajustar a una función de error complementaria.

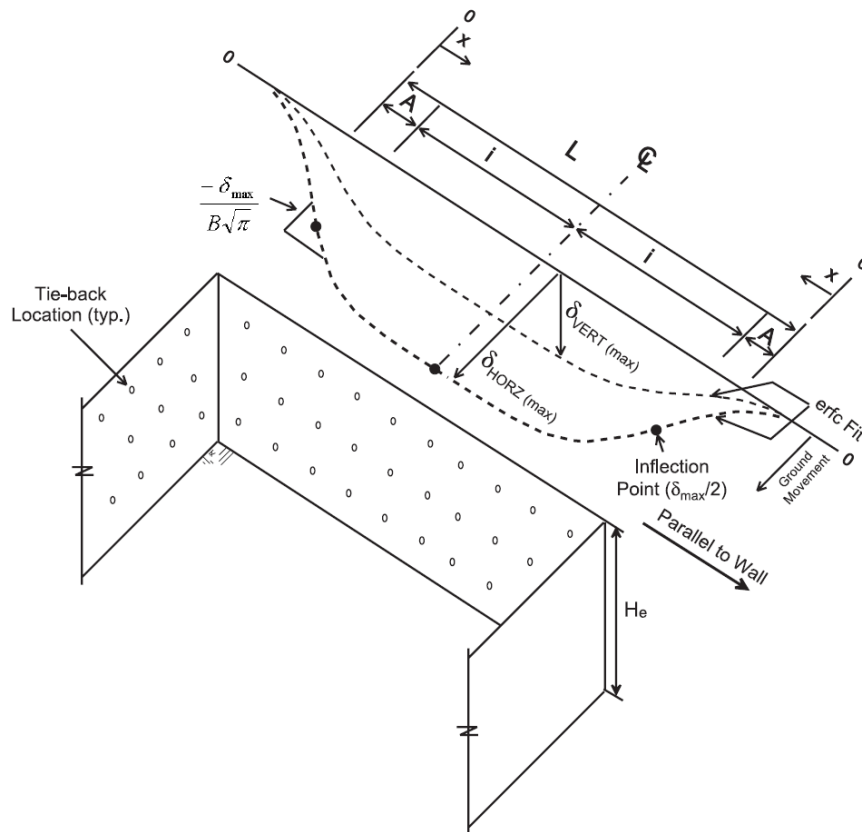


Figura 2-7 Predicción de mediante método semi-empírico de deflexiones y asentamientos de una pantalla [47].

La interacción suelo-estructura es importante y puede acarrear ciertos problemas numéricos. En geotecnia, para simular la interfaz entre dos materiales es bastante habitual emplear los elementos de grosor nulo (*zero thickness elements*) [48, 49]. No obstante, este tipo de elemento puede provocar problemas por mal condicionamiento de la matriz de rigidez, lo que provoca grandes oscilaciones en

las tensiones, cuando existen grandes diferencias de rigidez entre los elementos que están en contacto y/o hay importantes gradientes de tensiones/deformaciones [50]. En el estudio de losas pilotadas, Reul y Randolph [51] optan por prescindir de los elementos especiales para simular la interacción entre el fuste de los pilotes y el terreno. En cualquier caso, cuando no se incorporan elementos de interfaz al modelo, si los elementos entre el terreno y el pilote no son lo suficientemente finos se puede sobrestimar la resistencia por fuste [42].

En la Figura 2-8, se presentan dos vistas del colapso de una gran excavación *cut & cover* en la autopista Nicoll en Singapur en el año 2004. Se trata de un caso paradigmático en el que el empleo de un modelo constitutivo inadecuado del terreno, junto con una mala interpretación de los datos que provenían de la instrumentación instalada para monitorizar el comportamiento produjeron el fallo de todo el sistema de contención [32, 52].

### 2.1.4 Otros métodos

Tal y como recoge Calderón [2], recientemente, se han empleado métodos de inteligencia artificial para el diseño de muros pantalla [9, 53-55]. Pese las similitudes en los métodos utilizados, el enfoque entre los distintos autores se atisba muy diferente. Generalmente, como las aplicaciones para un determinado problema se desarrollan a partir de observaciones experimentales, estos métodos presentan un importante componente fenomenológico. En consecuencia, no es necesario comprender en su totalidad los mecanismos que explican el comportamiento del problema modelado. Sin embargo, por la misma razón, el uso de una aplicación concreta en condiciones diferentes de las que fue desarrollada puede despertar ciertas dudas. En el apartado 2.5.3 de esta Tesis, se

describen algunas de estas técnicas con más detalle.



Figura 2-8 Dos vistas del colapso de la excavación de la autopista de Nicoll en Singapur (a) daños en la excavación y (b) daños en la autopista [52]

## **2.2 LA INCERTIDUMBRE EN GEOTECNIA**

El diseño de un muro pantalla requiere el uso de modelos generalmente imperfectos en el que el conocimiento de los parámetros tanto del terreno como de la estructura puede no ser completo, especialmente si se emplea un método de elementos finitos. Asimismo, durante la ejecución de una excavación instrumentada, se recoge información procedente del sistema de auscultación sujeta a error. En atención a lo expuesto, la incertidumbre está presente desde el momento de la concepción hasta la finalización de la obra. En este apartado, se repasan los diferentes enfoques planteados para tener en cuenta el conocimiento impreciso de los modelos y parámetros empleados en el diseño geotécnico. En la presente Tesis, el manejo de la incertidumbre es crucial para estimar los parámetros del modelo.

### **2.2.1 Incertidumbre y riesgo**

Se define incertidumbre como la falta de conocimiento seguro y claro de algo. En ingeniería, mediante la modelación se intenta representar fenómenos físicos y emplear sus resultados para el diseño. En general, las causas de discrepancia entre los modelos numéricos y el sistema físico representado se pueden dividir en las siguientes categorías [3]:

- Incertidumbres en la modelación e
- incertidumbre experimental.

Los principales factores de incertidumbre en ingeniería geotécnica, agrupados en las anteriores categorías, se sintetizan en el Cuadro 2-1.

**Cuadro 2-1 Principales factores de incertidumbre en la validación de un modelo [56]**

Incertidumbre ligada a la modelación	Incertidumbre ligada a la experimentación
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hipótesis de medio continuo y discretización en capas.</li> <li>• Simplificación geométrica.</li> <li>• Hipótesis sobre las discontinuidades.</li> <li>• Tipo de elemento y densidad de la malla de elementos finitos.</li> <li>• Elección del modelo constitutivo.</li> <li>• Determinación de los parámetros a partir de los ensayos de campo y laboratorio.</li> <li>• Variabilidad de los parámetros.</li> <li>• Estado de tensiones inicial.</li> <li>• Comportamiento hidráulico (acoplado o no).</li> <li>• Comportamiento de las interfaces suelo – estructura.</li> <li>• Desarrollo de los trabajos y secuencia de carga.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Variabilidad de las propiedades del suelo.</li> <li>• Representatividad de los ensayos in situ.</li> <li>• Variación del nivel freático.</li> <li>• Precisión de las medidas.</li> <li>• Situación y densidad de los aparatos de medida.</li> <li>• Representatividad de las muestras a ensayar.</li> <li>• Tipo de ensayos de laboratorio a realizar (trayectoria de tensiones).</li> <li>• Desarrollo de los trabajos.</li> </ul>

En geotecnia, tradicionalmente, se ha concedido mucha importancia a la detección de las incertidumbres para su consideración en el diseño [57]. Casagrande [58] no tenía grandes esperanzas en que el riesgo se pudiese calcular o por lo menos cuantificar. Lamentablemente, no hay una definición de riesgo universalmente reconocida. De hecho, Fell [59] comenta que una comisión de la sociedad americana para el análisis del riesgo (SRA, *society for risk analysis*) tras más de tres años de trabajo, sólo consiguió publicar una lista con catorce definiciones posibles y recomendar que ya que no se podía establecer una definición universal que cada uno la estableciese según sus necesidades. Whitman [57], sin llegar a proponer una definición explícita de riesgo, distingue

entre dos términos que en español tienden a confundirse, *hazard* y *risk* que podrían traducirse como peligro y riesgo respectivamente. Peligro (*hazard*) expresaría lo probable que es que algún evento –como una avenida o un deslizamiento- pueda ocurrir. Sin embargo, riesgo (*risk*) expresaría lo probable que es que se produzca algún daño cuando un determinado peligro (*hazard*) ocurre. La siguiente definición de riesgo recogida por Rychlik y Rydâen [60] distingue entre peligro (*hazard*) y riesgo (*risk*) pero admite que en muchos contextos son conceptos intercambiables.

*“A quantity derived both from the probability that a particular hazard will occur and the magnitude of the consequence of the undesirable effects of that hazard. The term risk is often used informally to mean the probability of a hazard occurring.”*

En la presente Tesis, no se distingue entre peligro (*hazard*) y riesgo (*risk*). Únicamente se habla de riesgo (*risk*).

### 2.2.2 La seguridad en el diseño



Figura 2-9 Tira cómica de Calvin y Hobbes [61]

En la tira cómica de la Figura 2-9, Calvin plantea una buena (y difícil) pregunta, ¿cómo se sabe que un diseño es seguro?, su padre le da una contestación no

exenta de lógica que satisface la curiosidad de Calvin, pero que no convence a su madre. Posiblemente por motivos económicos, la madre de Calvin sospecha que debe haber alguna forma mejor de cuantificar la seguridad sin necesidad de hacer dos veces la misma obra. De hecho, no hay una sino varias. En los diseños geotécnicos, debido a la cantidad de incertidumbre, según Poulos *et al.* [62], las estrategias más habituales para incorporar la seguridad en el diseño son las siguientes:

- Factor de seguridad global;
- método de los coeficientes parciales de seguridad;
- método de factores de carga y resistencia (LRFD) y
- métodos probabilísticos

#### **2.2.2.1 Factor de seguridad global**

El factor de seguridad global es el método tradicional de encarar la seguridad en geotecnia. El coeficiente de seguridad global es la relación entre la resistencia última (determinada a partir de una estimación prudente de los parámetros del terreno) y el efecto de las cargas aplicadas. Para cada modo de fallo, procedimiento de cálculo, situación de dimensionado y combinación de acciones, se ha de determinar el coeficiente de seguridad resultante. La seguridad será suficiente cuando el coeficiente global supere los valores establecidos para cada modo de fallo y método de cálculo. Los diferentes coeficientes están establecidos a partir de la experiencia y lo resume muy bien el refrán americano “Si no se ha roto, no lo arregles (*If it ain't broke, don't fix it*)”. A pesar de lo anterior, uno de los puntos débiles más relevantes de este método radica en que la definición de

factor de seguridad puede no ser única.

**Cuadro 2-2 Diferentes definiciones de la resistencia al levantamiento de una zapata y su influencia en el factor de seguridad [63]**

Hipótesis diseño	Ecuación	$Q_{ud}$ para $FS = 3$	$Q_u / Q_{ud}$
1	$Q_{ud} = (Q_{su} + Q_{tu} + W) / FS$	170.7	3.0
2	$Q_{ud} = (Q_{su} + Q_{tu}) / FS + W$	214.2	2.4
3	$Q_{ud} = (Q_{su} + W) / FS$	108.9	4.7
4	$Q_{ud} = Q_{su} / FS + W$	152.4	3.4
5	$Q_{ud} = W / FS$	21.8	23.5

$Q_{su} = 261.8kN$  resistencia lateral,  $Q_{tu} = 184.4kN$  resistencia al levantamiento por succión en la base,  $W = 65.3kN$  peso de la zapata,  $Q_u = Q_{su} + Q_{tu} + W$  resistencia última,  $Q_{ud}$  resistencia de diseño,  $FS$  factor de seguridad

A modo de ejemplo, Kulhawy y Phoon [63] muestran que para determinar el factor de seguridad al levantamiento de una zapata se pueden tener cinco hipótesis de diseño diferentes con cinco factores de seguridad que pueden variar mucho (Cuadro 2-2). Como esta metodología no deja de ser una medida indirecta de la seguridad, puede existir cierta ambigüedad en la relación entre el factor de seguridad y el riesgo asociado. Un factor de seguridad alto no significa un mayor nivel de seguridad si existe una gran incertidumbre en los parámetros empleados para determinarlo.

La determinación de la seguridad mediante un factor global es muy conveniente cuando se utilizan métodos simplificados de análisis. Sin embargo, cuando se emplean métodos numéricos, se obtiene el campo de tensiones y deformaciones a los que está sometido el suelo; pero, a menos que rompa, no se conoce cuál es el



nivel de seguridad alcanzado. Para subsanar este inconveniente se ha desarrollado el método de reducción de resistencia al cortante (SSR, *shear strength reduction*). Una vez alcanzada la situación de equilibrio, este método consiste en proceder a reducir los parámetros resistentes hasta que se provoca la rotura. Como los parámetros resistentes corrientes son el ángulo de rozamiento y la cohesión, este método también se le conoce como *c-phi reduction*. El multiplicador que provoca la rotura es el factor de seguridad global. Este método ha dado resultados excelentes en la estabilidad de taludes. No obstante, en el diseño de cimentaciones no hay demasiada experiencia acumulada y se recomienda su uso con ciertas reservas.

#### **2.2.2.2 Método de los coeficientes parciales de seguridad**

El método de los coeficientes parciales de seguridad, junto con los siguientes métodos, es un intento de abordar la seguridad de una manera más explícita. Es el método que recoge el Eurocódigo 7 (EC7) [64] y el código técnico de la edificación (CTE) [65]. Permite una integración más racional del diseño geotécnico con el estructural. Este método consiste en comprobar que en cada situación de dimensionado se satisfacen los requisitos estructurales (o según terminología del CTE [65], no se produce un determinado estado límite) tras haber aplicado los correspondientes coeficientes parciales de seguridad (es decir tras haber mayorado acciones y minorado resistencias).

En ingeniería geotécnica, este método no cuenta con la experiencia acumulada de los métodos del coeficiente global de seguridad. Por ello, se recomienda comprobar los cálculos con el método de seguridad global tal y como indica la excelente Guía de Cimentaciones en Obras de Carreteras [66].

### **2.2.2.3 Método de factores de carga y resistencia (LRFD)**

El método de factores de carga y resistencia, LRFD (*Load and Resistance Factor Design*), consiste en calcular los efectos de las acciones y las resistencias utilizando los valores característicos, sin ningún tipo de mayoración o minoración. Para comprobar los estados límites, se mayoran los efectos de las acciones calculadas y se minoran las resistencias. Mientras que el método de los coeficientes parciales obtiene el efecto de las acciones a partir de acciones mayoradas.

En caso que los coeficientes de mayoración de los efectos de cualquier acción y los de reducción de cualquier resistencia fuesen constantes, el LRFD conduciría a un coeficiente de seguridad global. Si bien dicha circunstancia no es así porque los coeficientes de seguridad parciales varían según la situación de diseño.

Es conveniente valorar el concepto de valor característico aplicado a los parámetros geotécnicos, debido a que tanto el método de los coeficientes parciales como el LRFD lo utilizan. En términos generales, el valor característico de un parámetro se define por su valor medio o por un fractil superior o inferior [65]. En un reconocimiento geotécnico, el volumen de terreno examinado es reducido en comparación del volumen afectado por la cimentación. Como orden de magnitud, un pequeño edificio de 200 m<sup>2</sup> en planta cimentado sobre losa afecta a un volumen aproximado de terreno de  $2 \cdot 10^3$  m<sup>3</sup> y se muestrean del orden de 0.5 m<sup>3</sup> de suelo. Además, a diferencia de los materiales artificiales utilizados en construcción, el suelo presenta una variabilidad natural inherente. En consecuencia, a partir del reconocimiento del terreno es difícil hacer determinaciones estadísticas fiables de los parámetros del suelo y la definición habitual de valor característico pierde sentido. Por esa razón, tanto el CTE [65]

como el EC7 [64] dejan una puerta abierta y consideran a una estimación prudente de un determinado parámetro geotécnico en el contexto del estado límite que se considere como valor característico. El valor adoptado como característico debe ser muy similar al que tradicionalmente (coeficientes globales) se ha venido usando en los cálculos geotécnicos [66].

#### **2.2.2.4 Métodos probabilísticos**

Tanto los métodos basados en el factor de seguridad total, como en factores parciales (coeficientes parciales y LFRD) son determinísticos. Así, todos los parámetros del modelo se consideran conocidos y dichos factores se emplean para acotar la respuesta o los parámetros consiguiendo un diseño seguro.

La aproximación probabilística consiste en asegurar que la probabilidad de fallo no supere un cierto umbral. Los métodos probabilísticos tienen una aceptación desigual. Mientras que estos métodos son relativamente habituales en la ingeniería sísmica, medioambiental y en algunos aspectos de la geotecnia *off shore*, en el diseño de cimentaciones y estructuras de contención su uso no está tan extendido aunque van ganando paulatinamente aceptación [67-69]. En cualquier caso, es práctica habitual entre los ingenieros profesionales realizar análisis de sensibilidad de los resultados cuando la incertidumbre en ciertos parámetros es alta. Los métodos probabilísticos permiten evaluar el efecto de la variabilidad de los parámetros, valorando el impacto del conocimiento impreciso de los datos de entrada en la predicción de la respuesta así como validar simulaciones, analizar la varianza y cuantificar el riesgo y la incertidumbre [5]. Si bien conviene apuntar que con estas metodologías se asume que el modelo caracteriza adecuadamente el sistema, lo que supone considerar que las ecuaciones del modelo son deterministas. En el apartado 2.4, se repasan los métodos probabilísticos más

frecuentes en geotecnia.

### 2.2.3 El método observacional

Cabe destacar el método observacional por su importancia histórica en el diseño geotécnico. Si en una obra geotécnicamente comprometida, el proyectista no va a interactuar con el contratista y no se prevé ningún tipo de instrumentación, ni la posibilidad de modificar el proyecto, el proyectista puede optar por una de estas estrategias para asegurar la seguridad: (i) adoptar un coeficiente de seguridad alto; o (ii) emplear la experiencia ganada en proyectos previos similares. Evidentemente, la primera estrategia no es económica y la segunda puede resultar temeraria [70]. Para evitar esos problemas, en obras de envergadura, Terzaghi [71] propuso un procedimiento alternativo, conocido como el método observacional, en el que se requiere una cooperación entre el proyectista geotécnico y el contratista. El método observacional se basa en emplear la información que proporciona la instrumentación *in situ* para modificar el diseño según alternativas establecidas de antemano. Este método presenta como ventaja que el diseño final es más económico, pero sin conocer *a priori* el coste exacto de lo que se va a ejecutar. Además, hay que tener en cuenta que el método observacional no es adecuado en el caso que se prevean mecanismos de rotura frágiles. Peck [72] sistematiza el método en los siguientes pasos:

1. Reconocimiento del terreno suficiente para determinar la naturaleza, propiedades y patrón de comportamiento general, no necesariamente en detalle;
2. determinación de las condiciones más probables y las desviaciones más desfavorables de éstas. En esta determinación, la geología juega un papel

relevante;

3. establecimiento del diseño basado en las hipótesis de comportamiento bajo las condiciones más probables de trabajo;
4. selección de los parámetros que se han de observar y estimación de su valor basándose en las hipótesis de trabajo;
5. determinación de los valores de esos mismos parámetros bajo las condiciones más desfavorables compatible con los datos obtenidos;
6. previsión de qué medidas se han de adoptar incluso cambios en el diseño para ajustarse a cualquier desviación previsible de las condiciones de trabajo más probables;
7. medidas de los parámetros a ser observados y evaluación de las condiciones reales de construcción y
8. modificación del diseño para ajustarse a las condiciones reales.

Una aplicación típica del método observacional es el nuevo método austriaco de excavación de túneles, en el que se deciden los diferentes revestimientos a utilizar en cada tramo a medida que se excava el túnel.

### **2.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA INVERSO**

El problema directo - o modelación o simulación- consiste en la predicción del comportamiento de un determinado sistema caracterizado por ciertos parámetros a partir de teorías físicas. Es el problema más habitual en la práctica

ingenieril. Por otro lado, el problema inverso – calibración, análisis retrospectivo o retroanálisis- consiste en determinar los parámetros que caracterizan al sistema a partir de la respuesta del mismo. El problema directo, en física determinista, tiene solución única. Por el contrario, el problema inverso no [3]. La resolución de problemas inversos ha sido de uso corriente en la ingeniería geotécnica y cuenta con experiencia acumulada de décadas [70-73]. Tal y como se apunta en el apartado 2.2.3, el análisis retrospectivo constituye una parte fundamental del método observacional. Es, además, una herramienta que permite comprender cómo se está comportando el terreno ante las modificaciones provocadas por la ejecución de una obra. Gioda y Sakurai [70] definen el análisis retrospectivo o problema inverso en geotecnia como la determinación de los parámetros con los que se alcanzan los resultados más parecidos a las medidas *in situ* cuando se introducen en el modelo de comportamiento. En la presente Tesis, el problema inverso que se aborda es la determinación de los parámetros del terreno y de la estructura a partir de los movimientos de una pantalla de contención registrados mediante auscultación. Es un tema que suscita interés porque numerosos autores ya lo han estudiado ([8-16]). El retroanálisis no es una técnica rutinaria sino que se aplica a excavaciones importantes o en condiciones difíciles. Las excavaciones profundas se realizan por etapas. Así, desde el principio se analiza retrospectivamente la respuesta para aquilatar los parámetros y validar las hipótesis de partida. El análisis de los primeros estadios de la excavación no tiene por qué dar necesariamente una buena estimación de los parámetros del modelo. Esto se debe a diversos motivos como pueden ser la calidad de la mano de obra, factores ambientales o la interacción suelo-estructura [15]. También es importante tener en cuenta que la fiabilidad de los parámetros determinados en las primeras etapas dependerá de la influencia que tengan en la respuesta medida, de manera que los parámetros que jueguen un papel importante en la etapa que se está

analizando se determinarán mejor que otros con menor importancia.

Whittle *et al.* [16] estudian las virtudes y defectos de la modelación mediante elementos finitos a partir de los resultados de una excavación de una aparcamiento subterráneo de siete sótanos en Boston. En este tipo de excavaciones, como la complejidad del modelo es alta [16] recomiendan realizar una exhaustiva investigación con ensayos de calidad para mejorar el conocimiento inicial del suelo. Durante la ejecución, las medidas no se han de limitar a los movimientos de la pantalla, sino también a los asientos y la presión de poro alrededor de la excavación. Además, [16] sugieren que el empleo de modelos constitutivos que tengan en cuenta las pequeñas deformaciones puede mejorar las predicciones. Indican que la retracción tanto de los forjados, como la expansión de la losa superior por cambios de temperatura influye en gran medida en las deflexiones del muro pantalla.

## 2.4 MÉTODOS PROBABILÍSTICOS

Como la metodología de resolución de problemas inversos desarrollada en esta Tesis se basa en métodos probabilísticos, en concreto, en los elementos finitos estocásticos no intrusivos, en este apartado se resumen los más habituales en geotecnia.

El método de los elementos finitos o FEM (*Finite Elements Methods*) [26] es un método determinístico, porque a partir de unos parámetros que se consideran totalmente conocidos se obtiene una única solución. Esta técnica no tiene en cuenta de manera rigurosa la incertidumbre intrínseca ni de las acciones ni de las propiedades del material. Tal y como se muestra en el apartado 2.2.2, para

conseguir un diseño seguro y cubrir la incertidumbre, se emplean factores de seguridad que se aplican a la respuesta, a las resistencias de los materiales y a las cargas. Sin embargo, con los métodos deterministas, no se puede alcanzar un diseño “óptimo” mientras que con los probabilistas sí, aunque a costa de incrementar el esfuerzo computacional [18]. Si la incertidumbre en los parámetros del modelo se puede expresar mediante funciones de probabilidad, la respuesta debería darse en los mismos términos. Evaluar la incertidumbre en los parámetros de diseño de un modelo tiene como fin último estimar la incidencia de los mismos en la respuesta del modelo [74]. Los métodos probabilísticos permiten la propagación de las incertidumbres en el modelo y cuantificar estadísticamente la respuesta.

Los métodos probabilísticos pueden dividirse en tres grandes categorías [75]:

- Métodos de fiabilidad;
- métodos muestrales y
- elementos finitos estocásticos.

En la Figura 2-10, se muestran diferentes técnicas que existen en cada categoría.

### **2.4.1 Métodos de fiabilidad**

Los análisis de fiabilidad se centran en la estimación de la probabilidad de fallo asociada a un determinado estado límite. Además, permiten determinar las funciones de distribución junto con los intervalos de confianza de las diferentes respuestas del modelo [75].



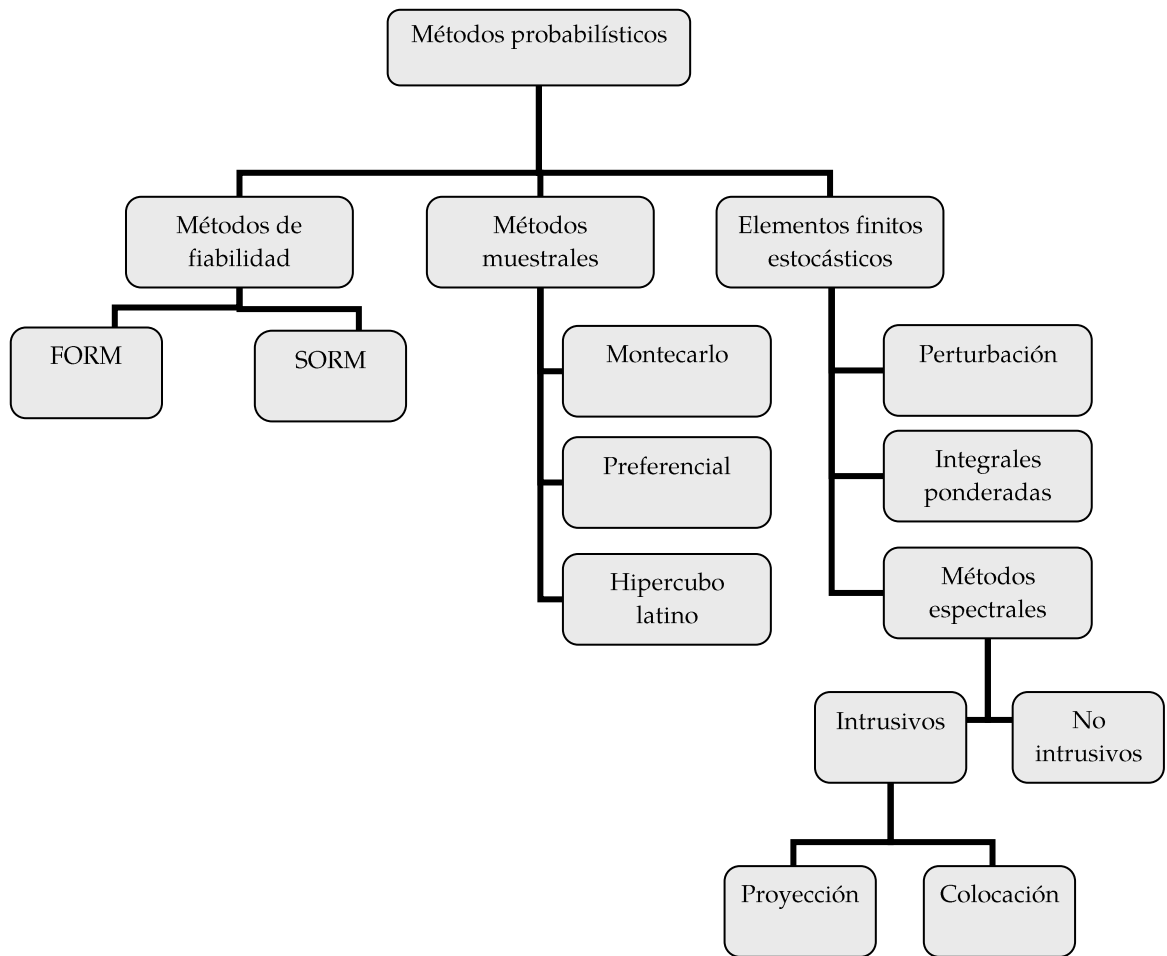


Figura 2-10 Clasificación de los métodos probabilísticos más habituales.

Para unos parámetros  $y_1, \dots, y_n$ , la función de comportamiento  $P(y_1, \dots, y_n)$  presenta un valor nulo cuando se alcanza un determinado estado límite, siendo éste negativo cuando falla y positivo en caso contrario. Los parámetros de la función de comportamiento están representados estadísticamente por la función de densidad de probabilidad conjunta  $f(y_1, \dots, y_n)$ . El objetivo del análisis de fiabilidad es calcular la probabilidad de fallo, que se puede expresar formalmente como [74]:

$$p_f = \int_{P < 0} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \quad (2.1)$$

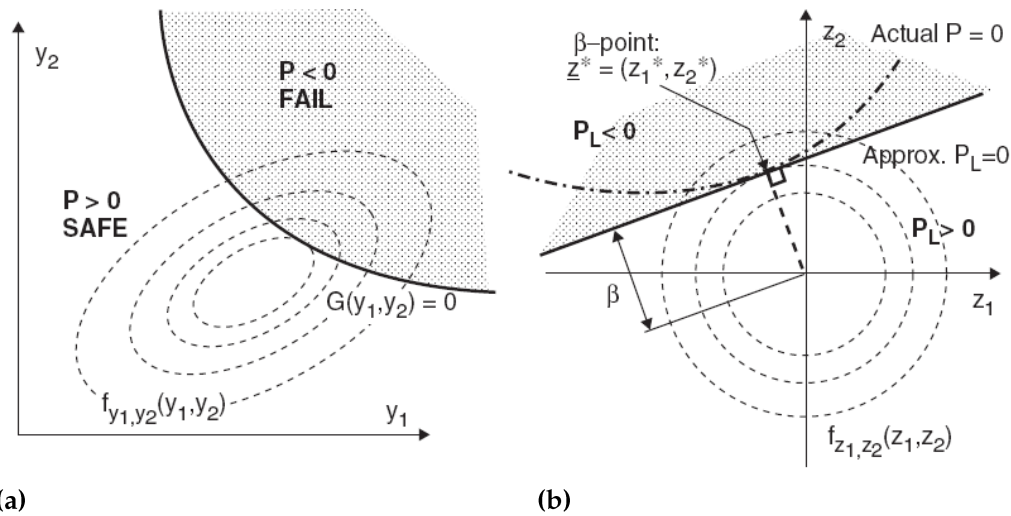


Figura 2-11 (a) Problema de fiabilidad general, (b) solución empleando FORM [74].

En la Figura 2-11a, se ejemplifica gráficamente con una distribución bivalente el problema de fiabilidad general. La única manera general de resolver el problema que encierra la ecuación (2.1) son las técnicas de Monte Carlo [76]. Dichas herramientas pueden requerir un número tal de evaluaciones de la función de comportamiento que las hacen inviables numéricamente para probabilidades de fallo pequeñas [74]. Para aligerar la carga computacional, Hasofer y Lind [77] desarrollaron teóricamente los métodos de fiabilidad de primer orden o FORM (*first order reliability methods*). Éstos no requieren de una gran potencia numérica.

El FORM, representado en la Figura 2-11b, se basa en realizar un cambio de variable de manera que se sustituyen las variables aleatorias  $[y_1, \dots, y_n]$  por otras variables aleatorias normales estándar  $[z_1, \dots, z_n]$  independientes. Asumiendo que con una recta se puede aproximar la curva que define la función de estado límite  $G(z_1, \dots, z_n)$  que se corresponde con  $P(y_1, \dots, y_n) = 0$ , el punto de rotura más probable, lo que se denomina punto de diseño o punto  $\beta$ , es el que está más cerca del origen. En ese caso la probabilidad de fallo vendría dada por:

$$p_f \approx \Phi(\beta) \quad (2.2)$$

Siendo  $\Phi(\cdot)$  la función normal estándar acumulada. Por lo que resolver la ecuación (2.1), se reduce a solucionar el siguiente problema de minimización:

$$\beta = \min \sqrt{\mathbf{z}'\mathbf{z}} \quad \text{para} \quad G(\mathbf{z}) \leq 0 \quad (2.3)$$

Los FORM se presentan como métodos simples que satisfacen las necesidades prácticas del 90% de las aplicaciones [78]. Wu y Phoon [79] ofrecen varias aplicaciones de los FORM para medir la fiabilidad en la estabilidad de laderas. Los FORM también son empleados por Juang *et al.* [80] para evaluar el potencial de licuefacción de los suelos. En el diseño de excavaciones, Boone *et al.* [81, 82] aplican este tipo de métodos.

Pese a la amplia aplicación de los métodos anteriormente expuestos, cuando la función de comportamiento es altamente no lineal o pueden existir varios puntos de diseño, los FORM pueden resultar bastante imprecisos. Por esa razón, se han desarrollado los métodos de fiabilidad de segundo orden o SORM (*second order reliability methods*) [83, 84].

### 2.4.2 Métodos muestrales

Los métodos muestrales más representativos se pueden agrupar en atención a las siguientes categorías [75]:

- Métodos de Monte Carlo;
- muestreo por importancia y
- muestreo por hipercubo latino.

Son métodos con los que se puede obtener solución estadística a problemas matemáticos cuya resolución por medios convencionales no es sencilla.

### 2.4.2.1 Métodos de Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo fueron desarrollados modernamente por Stanislaw Ulam y John von Neumann durante el proyecto Manhattan [85]. Debido a su carácter aleatorio (o pseudo aleatorio) y de manera jocosa, estos métodos fueron denominados desde el principio así en honor a un famoso casino en Las Vegas.

Al igual que en el anterior apartado, la función de comportamiento  $P(y_1, \dots, y_n)$  tiene valor nulo cuando se alcanza un determinado estado límite, negativo cuando falla y positivo en caso contrario.  $f(y_1, \dots, y_n)$  es la distribución de probabilidad conjunta de parámetros. La estimación de la probabilidad de fallo dada por la ecuación (2.1) mediante métodos de Monte Carlo se resolvería según se expone seguidamente:

1. Generación de  $Q$  muestras a partir de la distribución  $f(y_1, \dots, y_n)$ ;
2. evaluación de la función  $P(y_1, \dots, y_n)$  en los puntos generados;
3. determinación de las  $Q_f$  evaluaciones que han fallado, es decir en las que  $P(y_1, \dots, y_n) \leq 0$  y
4. determinación de la probabilidad aproximada de fallo a partir de la expresión:

$$p_f = Q_f / Q \quad (2.4)$$

Wang [86] presenta una aplicación de los métodos de Monte Carlo para estimar

la capacidad portante de cimentaciones superficiales.

#### **2.4.2.2 Muestreo por importancia**

De la ecuación (2.4), se deduce que cuando se requiere evaluar probabilidades de fallo reducidas es necesaria una muestra de gran tamaño. El muestreo por importancia es una modificación del método de Monte Carlo que supone una reducción de varianza propuesto por Rackwitz [78] para ganar eficiencia. En la determinación de la probabilidad de fallo, el muestreo se ha de intensificar en las colas de la distribución más que distribuirlo uniformemente. A tal efecto, se ha de emplear una distribución que favorezca el muestreo en la zona de interés. El uso de distribuciones sesgadas resultaría en estimadores sesgados si no se emplease factores de ponderación.

#### **2.4.2.3 Muestreo por hipercubo latino**

El muestreo mediante hipercubo latino o técnica de muestreo estratificado, inicialmente propuesta por McKay *et al.* [87], es un método de muestreo que asegura que no se repitan evaluaciones. En la Figura 2-12, se describe el método que se puede sintetizar en los siguientes pasos:

1. Se divide la distribución de cada variable en intervalos de igual probabilidad que no se solapen;
2. en cada uno de los intervalos, se escoge un valor al azar;
3. se repiten los anteriores pasos para cada variable hasta que se hayan elegido valores de todas las variables y
4. se cruzan al azar los valores obtenidos para cada variable para generar

muestras para evaluar.

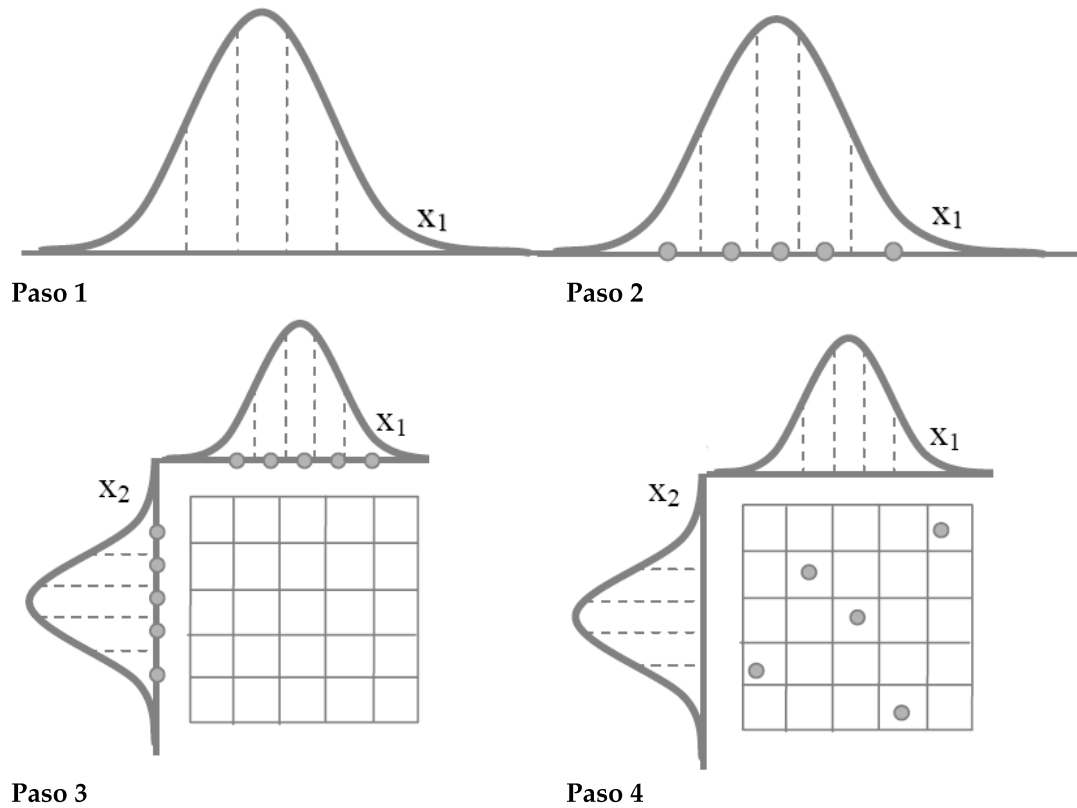


Figura 2-12 Ejemplo del uso del muestreo de hipercubo latino para dos variables y cinco realizaciones [75].

### 2.4.3 Elementos finitos estocásticos

Los elementos finitos estocásticos (SFEM, *Stochastic Finite Elements Methods*) resuelven problemas en los que los parámetros son variables aleatorias y no valores deterministas. Por lo tanto, tal y como se muestra en la Figura 2-13, la respuesta del modelo, en este caso los desplazamientos nodales, deben ser variables aleatorias representadas por su respectiva función de distribución.

Stefanu [18] hace una magnífica recopilación de las diferentes variantes que presenta esta técnica. Los SFEM pueden clasificarse en los siguientes grupos [75]:

- Método de la perturbación;
- método de la expansión de Neumann;
- integrales ponderadas y
- métodos espectrales.

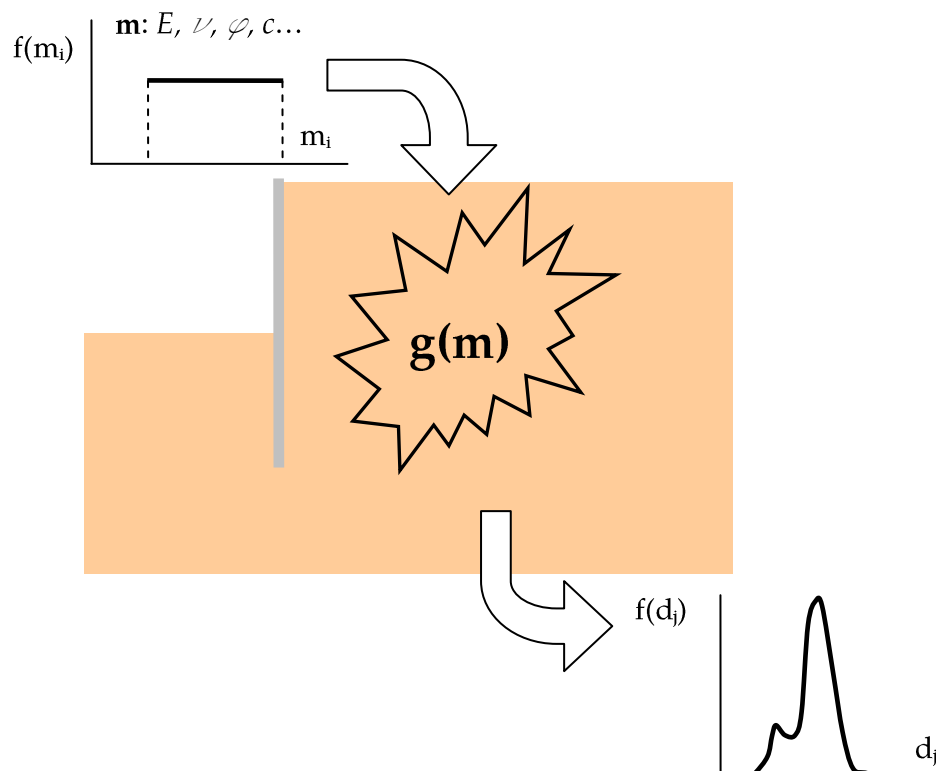


Figura 2-13 Esquema de los elementos finitos estocásticos. Como los parámetros  $m: E, \nu, \varphi, c$  son variables aleatorias representadas por sus correspondientes funciones de distribución, el modelo  $g$  da los desplazamiento nodales  $d_j$  como variables aleatorias.

El método de la perturbación permite la determinación del valor medio y de la varianza de la respuesta del sistema, de manera que se obtiene una estimación de la parte central de la función de densidad de la respuesta [88, 89].

El método de la expansión de Neumann ha sido empleado dentro del marco de las simulaciones de Monte Carlo [75, 90].

El método de la integral ponderada es un método estocástico propuesto por Deodatis y Shinozuka [91, 92]. Según Matthies *et al.* [90], este método requiere aproximadamente diez veces más tiempo computacional que el anterior método.

Los métodos espectrales son una extensión de la teoría clásica de los elementos finitos al marco estocástico. Comenzaron a tomar cuerpo con el trabajo de Ghanem y Spanos [4]. Este tipo de métodos se divide en dos grandes grupos, intrusivos y no intrusivos. Como la metodología desarrollada en este trabajo se basa en métodos espectrales, en los siguientes apartados se presentan con algo más de detalle que el resto de grupos de SFEM.

### **2.4.3.1 Métodos espectrales intrusivos**

Los métodos estocásticos intrusivos se basan en la minimización del residuo de las ecuaciones de equilibrio en el sentido de Galerkin [4]. De manera similar a los elementos finitos deterministas, la solución requiere calcular una serie de coeficientes en la base adecuada. Como esta estrategia exige construir un sistema de ecuaciones *ad hoc*, se le denomina intrusiva. En el apartado 3.4, se ilustra esta metodología planteando un problema mecánico lineal. La aplicación de la metodología intrusiva cuando el modelo mecánico es lineal es relativamente sencilla. Por otro lado, debe destacarse que la aplicación a problemas no lineales no está totalmente madura, aunque han habido diferentes propuestas [93, 94].



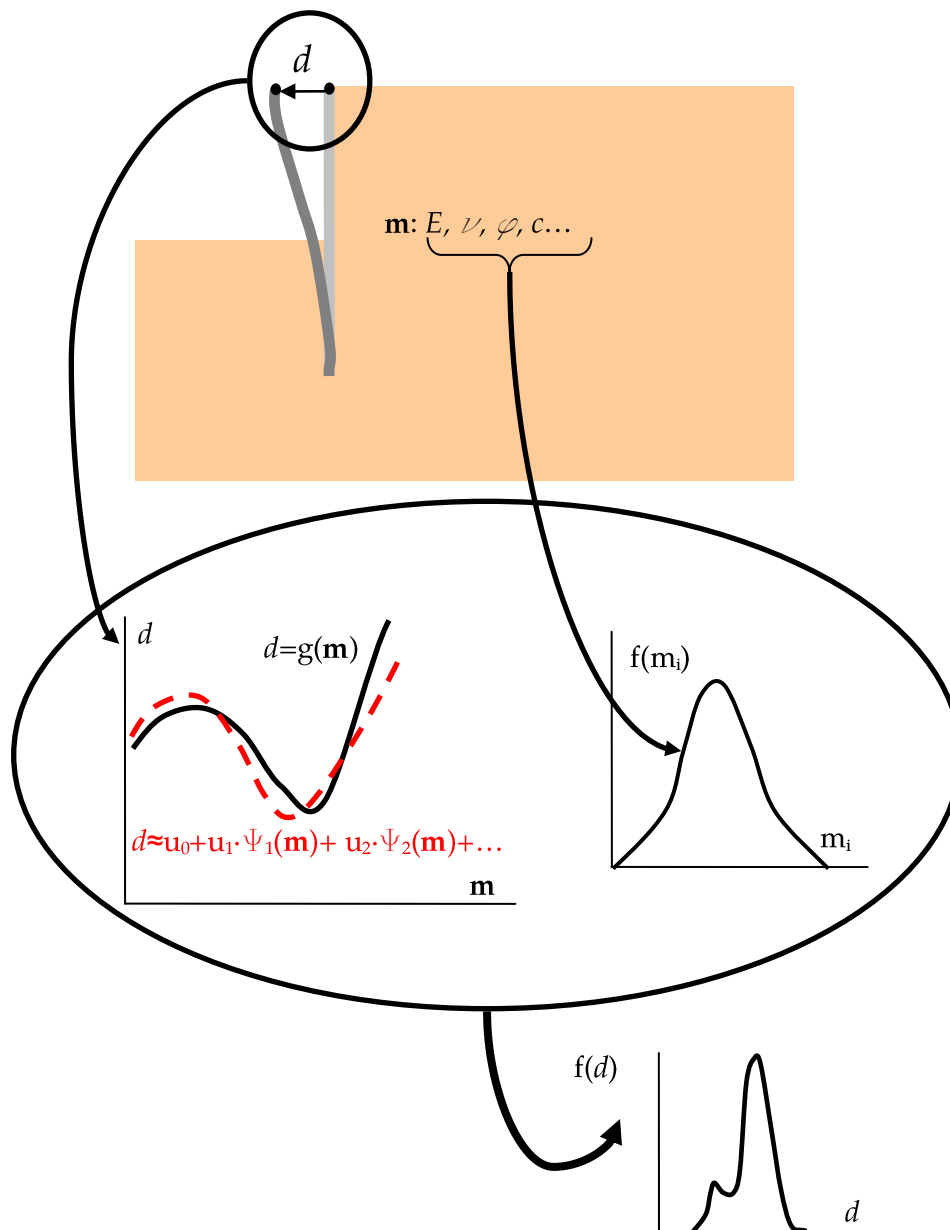


Figura 2-14 Esquema de los elementos finitos estocásticos no intrusivos.

#### 2.4.3.2 Métodos espectrales no intrusivos

Con esta metodología, la respuesta del modelo se aproxima a una función construida sobre una base de funciones adecuada. Una elección habitual son las

bases polinómicas. Así, la solución del problema consiste en determinar los coeficientes de estos polinomios a partir de realizaciones del modelo directo. Por esa razón, a estas técnicas se les denomina no intrusivas, ya que el modelo aparece como una especie de caja negra que genera información para determinar los coeficientes de la solución aproximada. Por lo tanto, los métodos intrusivos sirven para cualquier tipo de modelo. Lo que hay que tener en cuenta es que los parámetros del modelo son variables aleatorias y que la respuesta aproximada será un funcional de dichas variables. En el apartado 3.5, se presenta detalladamente esta metodología.

En la Figura 2-14, se esquematiza el proceso. La variable que se quiere representar es el desplazamiento en cabeza de una pantalla,  $d$ . El modelo depende de un conjunto de parámetros que se denominan  $\mathbf{m}$ . La relación entre  $d$  y  $\mathbf{m}$  viene dada por el modelo directo  $d = g(\mathbf{m})$ . Generalmente, tratar  $g(\mathbf{m})$  como una variable aleatoria es complejo. Sin embargo, cuando  $g(\mathbf{m})$  se escribe como una función de polinomios, el manejo estadístico se simplifica significativamente, lo que permite una sencilla estimación de la distribución de probabilidad de  $d$ .

Le Maître y Knio [5] clasifican los métodos no intrusivos en dos categorías, las proyecciones espectrales no intrusivas (NISP, *Non-Intrusive Spectral Projection*) - que a su vez se dividen en varias clases según el método que se emplee en la determinación de los coeficientes de la expansión; y los métodos de colocación:

- Proyecciones espectrales no intrusivas (NISP):
  - Métodos de Monte Carlo;
  - estrategias de muestreo mejoradas;

- integración determinística;
  - cubaturas de malla dispersa y
  - ajuste de mínimos cuadrados.
- Métodos de colocación

Las metodologías NISP pretenden obtener los coeficientes de la proyección en un subespacio estocástico de dimensión finita. Por el contrario, los métodos de colocación no buscan la proyección sino que se basan en interpolaciones. En esta Tesis, en aras a simular la respuesta de la excavación, se adopta una estrategia no intrusiva en la que los coeficientes de la expansión se determinan por mínimos cuadrados. Tal y como se expone en el apartado 3.5, se ha optado por esta metodología, porque permite valerse de formulaciones no lineales y el número de realizaciones del modelo necesarias para determinar los coeficientes de la expansión es considerablemente menor que en otras estrategias no intrusivas [95].

## 2.5 TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

Es habitual que la resolución de problemas inversos en geotecnia se base en la obtención de los parámetros a partir de una minimización de una función objetivo. Además, aunque la solución de la inferencia bayesiana no es un conjunto de parámetros sino un conjunto de distribuciones de probabilidad, es frecuente calcular el punto de máxima verosimilitud. Por todas estas razones, a continuación, se repasan las técnicas de optimización más habituales y su aplicación en la resolución de análisis retrospectivos en geotecnia.

Un problema de optimización matemáticamente se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_0(\mathbf{m}) \\ &\text{sujeto a} && f_i(\mathbf{m}) \leq b_i \quad i = 1, \dots, l \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donde  $\mathbf{x}$  representa el vector que contiene las  $N$  variables o parámetros a optimizar, la función real  $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la función objetivo y las funciones  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son las restricciones limitadas por  $b_1, \dots, b_l$ . Un vector  $\mathbf{m}^*$  se le denomina óptimo si entre todos los posibles valores de  $\mathbf{m}$  que cumplen las restricciones el valor mínimo de la función objetivo se presenta en  $f_0(\mathbf{m}^*)$ .

Si tanto la función objetivo  $f_0(\mathbf{m})$  como las restricciones  $f_i(\mathbf{m})$  son funciones lineales, entonces se tiene un programa lineal. En caso contrario, se denomina un programa no lineal. La ventaja de la programación lineal es que existen algoritmos muy eficientes que permiten resolver problemas de optimización de varios cientos de variables.

Existe una categoría de problemas que incluyen los programas lineales y parte de los no lineales que se conocen como problemas de optimización convexa. En este tipo de problemas, tanto la función objetivo como las restricciones cumplen la siguiente condición:

$$f_i(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \leq \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}) \quad i = 0, \dots, l, \tag{2.6}$$

La optimización convexa también dispone de algoritmos eficientes que pueden resolver problemas de gran dimensión [96].

En general, sin entrar en si el problema es convexo o no, las técnicas para resolver

un problema de programación no lineal se pueden dividir en los siguientes grupos [97]:

- Métodos enumerativos;
- deterministas y
- estocásticos.

### **2.5.1 Métodos enumerativos**

Los métodos enumerativos se pueden aplicar cuando el espacio de búsqueda es discreto y finito. Consiste en la evaluación de la función objetivo en todos los puntos por lo que es un método infalible. Ahora bien, el tamaño del espacio de búsqueda aumenta exponencialmente al incrementar su dimensión. Por consiguiente, el número de realizaciones necesarias para hallar el óptimo puede acabar siendo impracticable. Por ese motivo, este método sólo se puede emplear en problemas de optimización con un número muy reducido de variables.

### **2.5.2 Métodos deterministas**

Los métodos deterministas pueden alcanzar una solución óptima con un número limitado de evaluaciones de la función objetivo. En su gran mayoría, este tipo de métodos hace uso del gradiente de la función objetivo, por lo que en ocasiones a este tipo de métodos se les denomina también de gradiente [98]. En problemas en los que no se pueda determinar el gradiente o que presenten muchas discontinuidades, este tipo de métodos puede no funcionar bien y existe la posibilidad de atoramiento en un óptimo local.

Los métodos de optimización multidimensional se pueden dividir en tres grandes grupos: (i) lo que emplean el gradiente calculado a partir de la forma analítica de la función objetivo, (ii) los que emplean un gradiente estimado por medio de diferencias finitas y (iii) los que no emplean para nada el gradiente [98].

El método de gradientes conjugados emplea el gradiente de la función objetivo. Es apropiado cuando la función objetivo es aproximadamente cuadrática y la búsqueda se inicia en las proximidades del mínimo [98].

Los métodos de quasi-Newton se basan en el método de Newton. No necesitan de la expresión analítica del gradiente. Este último método asume que la función en las cercanías del punto estacionario se puede aproximar por una función cuadrática y para determinarlo requiere el gradiente y la matriz hessiana. Como no se calcula la matriz hessiana, los métodos de quasi-Newton son una generalización del método de la secante a múltiples dimensiones. Multidimensionalmente, el método de la secante da un sistema indeterminado. Los diferentes métodos de quasi-Newton se diferencian en cómo se pasa de un sistema indeterminado a otro determinado.

El algoritmo de Nelder-Mead, también conocido como *Downhill Simplex Method* [99], es un método muy eficiente para la optimización mono-objetivo que no requiere de la determinación del gradiente. Puede ser mucho más lento que los anteriores, pero se trata de un algoritmo muy robusto. Para ganar rapidez en la determinación del óptimo, en caso que la función objetivo sea suave, el método de Powell se advierte como un buen candidato [98].

### 2.5.3 Métodos estocásticos

Los métodos estocásticos son métodos robustos y flexibles que no requieren de la

expresión del gradiente. Pueden requerir la realización de un gran número de simulaciones. Generalmente no alcanzan el óptimo sino un valor cercano al mismo. Las técnicas más habituales dentro de esta categoría son los métodos de:

- Monte Carlo;
- técnicas heurísticas y metaheurísticas y
- las redes neuronales.

A las anteriores, habría que añadir una cuarta técnica de optimización que se está desarrollando recientemente en la que se aprovecha la potencia que tienen los elementos finitos estocásticos:

- Optimización o programa estocástico

#### **2.5.3.1 Métodos de Monte Carlo**

El método de Monte Carlo básicamente consiste en generar muestras aleatorias según una función de distribución predeterminada, valorar la función en cada una de las muestras y quedarse con el menor valor [76]. Se trata de un método muy robusto y de fácil implementación, pero de lenta convergencia. Si la dimensión del vector de parámetros es alta, el coste numérico que acarrea este método puede resultar inasumible. Para solventar este problema se puede emplear el algoritmo de Metropolis-Hastings [100, 101]. Este algoritmo es una cadena de Markov de Monte Carlo (*MCMC, Monte Carlo Markov chain*), porque es aleatorio (Monte Carlo) y no tiene memoria, en el sentido que sólo depende del paso previo (cadena de Markov) [3]. Este algoritmo permite hacer un muestreo sobre una distribución de probabilidad  $f(\mathbf{x})$ . Para la optimización, se puede emplear una función de error de tipo exponencial de manera que penalice

los puntos alejados del óptimo. El algoritmo realiza un camino aleatorio (*random walk*). Se fija un punto inicial –se reduce el tiempo de convergencia cuanto más cerca se esté de la solución real–, se propone aleatoriamente un nuevo punto de acuerdo con una distribución dada y se acepta el movimiento si se cumple cierta regla (la regla se establece para que sea más probable aceptar el movimiento si se pasa a una región de mayor probabilidad). Los pasos anteriores se repiten iterativamente. La clave del método es que si se repite el anterior proceso, en las condiciones adecuadas, un número suficiente de veces, los puntos muestreados se distribuirán con una frecuencia proporcional a su probabilidad  $f(\mathbf{x})$ .

### **2.5.3.2 Técnicas heurísticas y metaheurísticas**

Las técnicas heurísticas y metaheurísticas, según Payá [102], constituyen métodos aproximados e intuitivos basados en técnicas de la inteligencia artificial y en la emulación de estrategias de la naturaleza. Se trata de algoritmos sencillos e intuitivos, pero que requieren un gran esfuerzo computacional pues precisan que la función objetivo y las restricciones del problema sean evaluadas un gran número de veces. Las técnicas más habituales son la cristalización simulada (*simulated annealing*), los algoritmos genéticos (*genetic algorithms*), la búsqueda tabú (*tabu search*) y las colonias de hormigas (*ant colony*).

La cristalización simulada es una técnica propuesta por Kirkpatrick *et al.* [103] a partir de los métodos de Monte Carlo de Metropolis *et al.* [101]. El método de la cristalización simulada no deja de ser un caso del algoritmo de Metropolis-Hastings [3]. Establece una analogía entre la energía de un sistema termodinámico y la función objetivo del problema de optimización [102].

Goldberg [97] define los algoritmos genéticos como algoritmos de exploración



basados en los mecanismos de selección natural de Darwin. Los algoritmos genéticos establecen unos criterios de supervivencia de las soluciones, junto con un intercambio de datos aleatorio para explorar el espacio de parámetros, de una manera que recuerda al proceso de evolución de las especies.

La búsqueda tabú fue propuesta por Glover y Laguna [104]. Se articula guiando la búsqueda hacia zonas del espacio de soluciones que no han sido exploradas. A tal fin, la búsqueda tabú clasifica como prohibidos algunos de los movimientos más recientes que no se pueden repetir durante un cierto número de iteraciones.

La optimización por colonias de hormigas [105] se inspira en cómo las hormigas consiguen encontrar el camino más corto entre el hormiguero y el alimento. Las hormigas buscan la comida aleatoriamente. Ahora bien, en el momento en que una encuentra alimento vuelve al hormiguero desprendiendo a su paso una feromona. Esta señal anima a más miembros de la colonia a seguir este camino. Así cuando estos miembros encuentran la comida vuelven desprendiendo más feromonas de forma que a medida que pasan más hormigas se va reforzando la intensidad de la señal e incrementando el número de hormigas que van a por la comida. Cuando la comida desaparece, el tránsito de hormigas disminuye y la intensidad de la señal disminuye.

### **2.5.3.3 Redes neuronales artificiales**

Las redes neuronales artificiales (ANN, *Artificial Neural Networks*) son sistemas de procesamiento de la información altamente complejos, no lineales y en paralelo inspirados en el cerebro humano. La topología de un modelo ANN consiste en un número de elementos de proceso simple, llamado nodos, que se encuentran interconectados entre sí para producir un estímulo de salida. Sus propiedades

más destacadas son la capacidad de aprendizaje y procesamiento automático que las hacen útiles en un gran número de aplicaciones como puede ser la clasificación, el reconocimiento de patrones, la aproximación de funciones, optimización, predicción y control automático. Jan *et al.* [54] se sirven de redes neuronales artificiales para predecir tanto la magnitud como la localización de la máxima deflexión en un muro pantalla. Para llevar a cabo la predicción, este método se basa en los resultados de las fases de excavación previas. Con este método, Jan *et al.* [54] apuntan que no es necesario comprender completamente los mecanismos que determinan el comportamiento del problema modelado. Rumelhart *et al.* [55] emplean simulaciones de elementos finitos con un modelo que tiene en cuenta el comportamiento a pequeñas deformaciones para desarrollar una red neuronal. La red neuronal demostró poder predecir satisfactoriamente las deflexiones del muro en casos reales. De los distintos modelos existentes, el de retropropagación (BP, *Back-Propagation*) [106] es el más empleado. Sin embargo, para evitar alguna de las carencias del anterior algoritmo, Chua y Goh [9] utilizan una técnica híbrida que combina algoritmos genéticos con aprendizaje bayesiano que denominan EBBP (*Evolutionary Bayesian Back-Propagation*). A partir de casos generados mediante métodos de elementos finitos y algunos casos reales, consiguen un modelo sencillo capaz de predecir con bastante fiabilidad la máxima deflexión de un muro para realizar diseños preliminares. Hashash *et al.* [53] emplean redes neuronales para construir una solución exacta de la matriz de rigidez de un material plástico que es única, independientemente del material, de manera que, dependiendo del proceso de aprendizaje, captura comportamientos que a los modelos constitutivos tradicionales se les puede escapar. Hashash *et al.* [11] comparan los resultados que se obtienen de una modelación de elementos finitos a partir de parámetros obtenidos mediante algoritmos genéticos y los resultados a partir de un método

de auto-aprendizaje basado en redes neuronales. Observan que los resultados de la modelación de elementos finitos están condicionados a las limitaciones del modelo, mientras que la metodología basada en las redes neuronales puede servir para descubrir nuevos aspectos del comportamiento del material, tal y como se apunta por Hashash *et al.* [107].

#### **2.5.3.4 Optimización o programa estocástico**

Choi *et al.* [108] proponen combinar los métodos optimización tradicionales con las técnicas de cuantificación de incertidumbre para la optimización estructural. De esa manera, pese al incremento de la carga computacional, se consiguen diseños más robustos y menos sensibles a ciertas incertidumbres. En concreto, plantean sustituir la respuesta estructural por una respuesta subrogada construida a partir de un método espectral no intrusivo que emplea una base de polinomios (de manera similar a lo que se expuesto en el apartado 3.5). El método que utilizan para determinar los coeficientes de la expansión polinómica es un muestreo mediante hipercubo latino (*vid* apartado 2.4.2.3).

## **2.6 PROBLEMAS INVERSOS EN GEOTECNIA**

Para el análisis geotécnico inverso, Ledesma *et al.* [109] indican que generalmente se puede recurrir a las siguientes metodologías:

- Mínimos cuadrados;
- máxima verosimilitud;
- inferencia bayesiana y

- filtros de Kalman.

Aunque existen diferencias conceptuales entre estos métodos, la formulación matemática final es muy parecida. Así, algunos de estos métodos en ciertas condiciones pueden ser considerados casos particulares de otros [109]. Por ejemplo, el método de los mínimos cuadrados y el método de la máxima verosimilitud son exactamente iguales cuando se considera que los errores son variables aleatorias gaussianas idénticamente distribuidas.

### 2.6.1 Mínimos cuadrados

En este caso, el problema inverso se reduce a resolver un problema de optimización en el que la función objetivo  $f_0(\mathbf{x})$  es la suma de la diferencia al cuadrado de las observaciones y los resultados del modelo [110]:

$$f_0(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^n (g_i(\mathbf{m}) - d_{obs\ i})^2 \quad (2.7)$$

Donde  $\mathbf{m}$  son los parámetros del modelo,  $g_i(\mathbf{m})$  es el modelo directo que predice una determinada observación  $d_{obs\ i}$ . La fiabilidad de los parámetros que se obtienen de tal minimización es generalmente desconocida [111].

Calvello y Finno [8] ajustan las deflexiones de la pantalla mediante un método de mínimos cuadrados. Para resolver el problema de optimización, se sirven de un método de gradiente tal y como está implementado en el programa UCODE [112]. Estos autores subrayan la importancia de entender el problema para definir correctamente el problema inverso. Además, la interpretación estadística de los parámetros puede ayudar a reducir el tamaño de este problema. Rechea *et al.* [13] mediante una metodología similar a la anterior estudian una excavación sintética

–generada numéricamente– y otra real. Para resolver el problema de optimización emplean el mismo método que los anteriores autores y un algoritmo genético [113]. El resultado de la optimización fue similar con ambos métodos, si bien el método de gradiente requirió de menos iteraciones para llegar a la solución.

Tang y Kung [14] proponen una función objetivo ligeramente diferente a la de la siguiente expresión (2.7):

$$f(m) = \sum_{i=1}^n \left( g_i(\mathbf{m}) / d_{obs\ i} - 1 \right)^2 \quad (2.8)$$

Esta expresión tiene la ventaja que puede mezclar diferentes tipos de mediciones (v.g. desplazamientos, fuerzas...).

### 2.6.2 Máxima verosimilitud

En el método de máxima verosimilitud, se considera que los parámetros son variables aleatorias. Para inferir los parámetros, se dispone de un modelo que relaciona los parámetros  $\mathbf{m}$  con las observaciones  $\mathbf{d}$ . Generalmente, este modelo no es perfecto, en el sentido que los valores predichos no son idénticos a los observados (suponiendo observaciones sin error). Por ello existirá una función de distribución de probabilidad  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  que relacione el modelo con los parámetros y las observaciones (Figura 2-15a). En el caso que se asuma que todos los parámetros tienen la misma probabilidad de suceder y que las observaciones son perfectas, tal y como se representa en la Figura 2-15b, cortando  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  por un hiperplano que contenga el valor observado de  $\mathbf{d}$  y sea paralelo a  $\mathbf{m}$ , se genera una curva o función que se denomina de verosimilitud. El máximo de esa

curva es lo que se conoce como el punto de máxima verosimilitud. Con independencia de lo anterior, para distribuciones complejas  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  puede darse una función de verosimilitud multimodal y dificultar la elección del punto más verosímil.

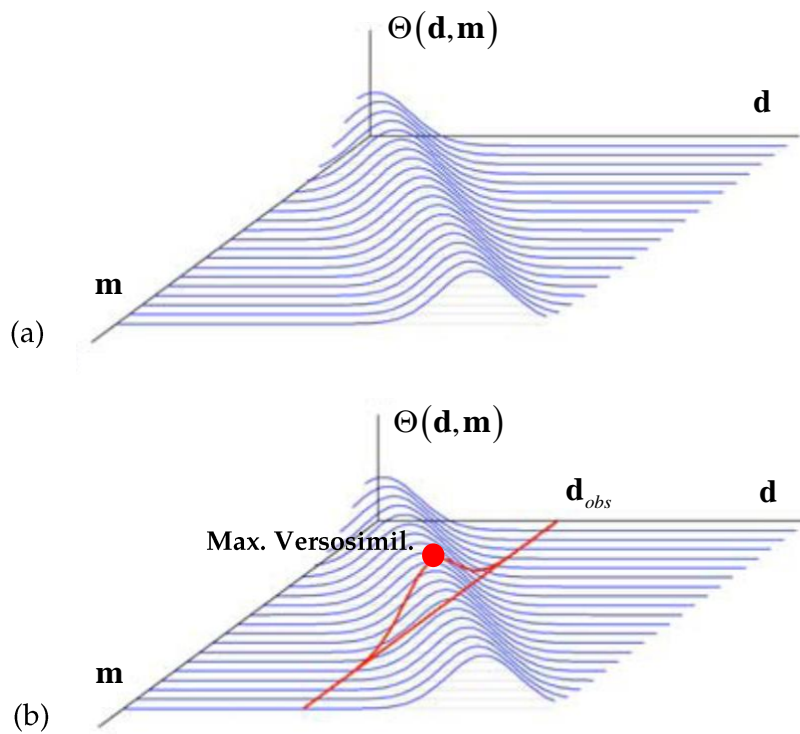


Figura 2-15 Explicación gráfica del método de máxima verosimilitud, (a) representación de  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  y (b) determinación del punto de máxima verosimilitud (adaptado de [114])

Gens *et al.* [115] emplean un método de máxima verosimilitud para estimar el coeficiente de empuje al reposo y el módulo de elasticidad del terreno en la excavación de un túnel real. Para afinar la predicción, establecen una correlación *a priori* entre las diferentes lecturas a partir de consideraciones sobre el tipo de auscultación (en su caso inclinómetros y extensómetros).

### 2.6.3 Inferencia bayesiana

Tal y como se ha puesto de relieve anteriormente, la ingeniería geotécnica tiene que lidiar con un gran número de incertidumbres. Éstas, además, se incrementan cuando se emplea el método de los elementos finitos. Por esta razón, la inferencia bayesiana es la herramienta más apropiada para resolver problemas inversos [3, 17]. Mientras que la estadística tradicional considera los parámetros como unas variables determinísticas desconocidas, la formulación bayesiana considera que los parámetros son variables aleatorias en sí mismas. Al definir los parámetros como variables aleatorias, éstos tienen unas funciones de distribución de probabilidad asociada inicialmente. La clave de la inferencia bayesiana es cómo se pasa de la distribución de probabilidad inicial (*a priori*) de los parámetros a una distribución de probabilidad nueva (*a posteriori*) tras conocer la respuesta del sistema que se está estudiando. En el Capítulo 4, aborda con mayor detalle toda la metodología bayesiana empleada en la presente Tesis para la resolución del problema inverso. Conviene indicar que pese que la solución del problema es formalmente sencilla, cuando los modelos que se emplean no tienen solución exacta se plantean algunos problemas de índole práctica. Para aliviar este problema algunos autores [6, 19], sugieren el empleo de modelos subrogados basado en las expansiones polinómicas de los métodos espectrales no intrusivos.

Juang *et al.* [15] realizan una estimación bayesiana de parámetros de una excavación profunda empleando un modelo semi-empírico denominado KJHH planteado por Kung *et al.* [116]. Observan que el resultado de la calibración del modelo debe darse como una función de distribución de probabilidad porque, aunque a medida que avanzan las etapas y se reduce la incertidumbre en los parámetros, todavía quedan fuentes de incertidumbre que el modelo no puede capturar. Además, constatan que la varianza de los parámetros se reduce cuando

emplean conjuntamente las observaciones de deflexión y asentos.

#### **2.6.4 Filtros de Kalman**

Son técnicas empleadas en el procesamiento de datos con las que se separan la señal deseada del ruido [117]. Hoshiya y Sutoh [118] desarrollan una metodología para identificar parámetros en análisis por elementos finitos en geotecnia.

### **2.7 CONCLUSIONES DEL SEGUNDO CAPÍTULO**

En este capítulo se ha puesto de relieve que el diseño de excavaciones profundas al abrigo de pantallas conlleva manejar un gran número de incertidumbres. Estas incertidumbres provienen tanto de la dificultad para caracterizar el terreno como de la complejidad aparejada a la modelación. Asimismo, durante el control de la ejecución mediante auscultación las mediciones están sujetas a error.

Para conseguir un diseño seguro, se pueden adoptar varias estrategias. La más habitual y más contrastada en geotecnia es la de conseguir un cierto factor de seguridad ante diferentes modos de fallo. La normativa más reciente propugna diseñar aplicando factores de seguridad parciales en diferentes fases del diseño a parámetros y respuestas. Sin embargo, la única aproximación que permite tratar la incertidumbre de manera explícita es la probabilística. Los métodos probabilísticos permiten obtener la respuesta de un modelo como una función de probabilidad y evaluar la incidencia de los parámetros en la respuesta.

Además de incorporar la seguridad durante el diseño, en excavaciones



profundas de cierta relevancia es preciso instalar instrumentación de control. En este contexto, la estimación de parámetros a partir de las observaciones procedentes de la obra (también conocido como, análisis inverso o retroanálisis) es una herramienta fundamental para entender y predecir el comportamiento de la excavación, una vez se ha iniciado. Un análisis retrospectivo debe servir para comprobar si las hipótesis de partida son adecuadas y si los modelos empleados describen adecuadamente el comportamiento de la excavación.

La resolución del problema inverso se puede abordar de varias maneras. La inferencia bayesiana es la estrategia más adecuada, porque permite obtener una estimación de los parámetros en forma de función de probabilidad coherente con los errores asociados tanto al modelo como a las observaciones. Sin embargo, el retroanálisis se suele plantear habitualmente como un problema de optimización en el que se ha de determinar el conjunto de parámetros que proporciona la solución del modelo más cercana a la observada sin estimar ni la fiabilidad de los resultados, ni la influencia en el resultado de cada parámetro. En el marco de la inferencia bayesiana, los parámetros son considerados como variables aleatorias cuyas distribuciones iniciales se actualizan a la luz de las observaciones del fenómeno que se está estudiando. Por esa razón, los elementos finitos estocásticos se postulan como una herramienta adecuada de modelación. En esta Tesis, en concreto, para caracterizar la respuesta estadísticamente, se emplea la metodología espectral no intrusiva. Se ha optado por esta técnica porque permite abordar la resolución de problemas no lineales que habitualmente se dan en el diseño de excavaciones profundas y el número de realizaciones del modelo necesarias para determinar los coeficientes de la expansión es menor que en otras estrategias no intrusivas. La ventaja de la técnica no intrusiva es que el modelo numérico se puede aproximar mediante una expresión analítica numéricamente

más ligera. El uso de elementos finitos no intrusivos para la resolución de problemas inversos ha sido planteado por algunos autores [6, 19]. Pese a ello, no se han encontrado referencias en los que se empleen para resolver problemas inversos geotécnicos.

En atención a lo expuesto, como se va a plantear la resolución del problema inverso con un enfoque bayesiano, diferente del habitual, y con ayuda de una técnica que permite la cuantificación de la incertidumbre, se considera que la investigación que se desarrolla en la presente Tesis, va a suponer una aportación original al actual estado del conocimiento.

# Capítulo 3    FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS

## 3.1    VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Un experimento, o de manera más general un evento, se considera aleatorio cuando su resultado no es predecible, porque aparece de acuerdo con un mecanismo que es demasiado complejo para ser entendido. La forma de tratar matemáticamente este tipo de experimentos aleatorios es asignar un número a cada resultado posible. Por ejemplo, cuando se tira un dado, se asigna un número del 1 al 6 a cada cara del mismo. Así pues, se define una variable aleatoria  $U = U(\omega) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , donde  $\omega$  es un elemento que pertenece al espacio de los resultados  $\Omega = \{\square, \blacksquare, \boxtimes, \boxplus, \boxminus, \boxdiv\}$ . En un sentido amplio,  $\Omega$  puede ser considerado un espacio abstracto que contiene todos los posibles resultados de un determinado experimento. Entonces, la variable aleatoria  $U = U(\omega)$  es una variable real definida sobre  $\Omega$ .

Para estudiar los problemas asociados con la variable aleatoria  $U$ , los subconjuntos relevantes de  $\Omega$ , los sucesos, se recogen en la clase  $\mathcal{F}$  que se

denomina un  $\sigma$ -campo o una  $\sigma$ -álgebra. La clase  $\mathcal{F}$  (en  $\Omega$ ) es una colección de subconjuntos de  $\Omega$  que satisfacen las siguientes condiciones:

- No está vacío  $\emptyset \in \mathcal{F}$  y  $\Omega \in \mathcal{F}$  ;
- si  $A \in \mathcal{F}$  , entonces  $A^c \in \mathcal{F}$  , donde  $A^c$  denota el conjunto complementario de  $A$  y
- si  $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$  , entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  y  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Intuitivamente, se requiere el uso de la clase  $\mathcal{F}$  para asegurar que cualquier operación elemental (es decir intersección  $\cap$ , unión  $\cup$  o complementariedad  $^c$ ) se efectúa sobre los sucesos pertenecientes a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  y que el resultado recae en un suceso de  $\mathcal{F}$  .

El concepto de probabilidad se emplea para medir la verosimilitud de que ciertos sucesos ocurran. Por ejemplo, continuando con el ejemplo del dado y asumiendo que no está trucado, basado en la evidencia empírica, una probabilidad de 1/6 se asigna a cada cara del dado, es decir:

$$P(\{\omega: U(\omega) = 1\}) = \dots = P(\{\omega: U(\omega) = 6\}) = 1/6$$

Un espacio de probabilidad está formado por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , donde  $\Omega$  es el espacio muestral de sucesos elementales,  $\mathcal{F}$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima de  $\Omega$  y  $\mathcal{P}$  es una medida de probabilidad que cumple las siguientes condiciones:

- $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$  ;
- $P(\Omega) = 1$  y

- para  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  y  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ ,  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

Una variable aleatoria real  $U$  puede ser considerada como una función que mapea cada punto del espacio muestral a la recta real según la medida de probabilidad. Por lo tanto,  $U$  se puede expresar como  $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Por comodidad en la notación, la anterior expresión se puede escribir como  $U(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$  es un vector aleatorio de dimensión  $n$  cuando sus componentes  $U_1, \dots, U_n$  son variables aleatorias reales unidimensionales.

La aleatoriedad puede ocurrir de manera discreta o continua sobre un espacio y/o sobre el tiempo en numerosos sistemas físicos. El modelo matemático que describe esta variación sobre el espacio o el tiempo se denomina un proceso estocástico o aleatorio. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $(U_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in M) = (U_{\mathbf{x}}(\omega), \mathbf{x} \in M \subseteq \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega)$  definidas en un espacio muestral  $\Omega$ . En este caso  $\mathbf{x}$  es el índice de la variable aleatoria  $U$ . Este índice puede expresar tanto tiempo como posición. Si el conjunto de los índices  $M$  es finito o infinito numerable, entonces  $U_{\mathbf{x}}$  es un proceso discreto. Si  $M$  es un conjunto continuo,  $U_{\mathbf{x}}$  es un proceso continuo. Por lo tanto, un proceso estocástico  $U_{\mathbf{x}}$  puede ser considerado como una función de dos variables. Es decir que fijando un índice  $\mathbf{x} \in M$ ,  $U_{\mathbf{x}} = U_{\mathbf{x}}(\omega)$  para cualquier  $\omega \in \Omega$ . De manera semejante, fijando un suceso aleatorio  $\omega \in \Omega$ ,  $U_{\mathbf{x}} = U_{\mathbf{x}}(\omega)$  para cualquier  $\mathbf{x} \in M$ .

Trabajar con procesos aleatorios es más complicado que con vectores aleatorios. Una simplificación corriente a efectos prácticos, consiste en representar un proceso como un vector aleatorio. De esta manera, las distribuciones finitas del

proceso estocástico  $U_{\mathbf{x}}$  son definidas como las distribuciones finitas de las componentes del vector  $(U_{\mathbf{x}_1}, \dots, U_{\mathbf{x}_n})$  para  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \in M$ .

La representación estocástica espectral expresa una variable o un proceso aleatorio como una especie de expansión generalizada de Fourier. El marco estocástico espectral se planteó originalmente a partir de las ideas de Wiener [119] sobre caos homogéneo y se desarrolla muy posteriormente en el trabajo de Ghanem y Spanos [4]. Dos técnicas espectrales habituales son la expansión de Karhunen-Loève (KL) y la expansión de polinomios caóticos (PCE, *Polynomial Chaos Expansion*).

La expansión de Karhunen-Loève (KL) y la expansión de polinomios caóticos (PCE) son dos formas de representar un mismo proceso aleatorio empleando dos bases distintas del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  [120]. La ventaja de la PCE es que se puede utilizar para modelar procesos que no son gaussianos. En la presente Tesis, se emplea la PCE para representar las variables aleatorias.

### 3.2 LA EXPANSIÓN DE KARHUNEN-LOÈVE (KL)

Debido a la importancia que la expansión Karhunen-Loève tiene dentro de los elementos finitos estocásticos, en este apartado se presenta sucintamente. La descomposición de Karhunen-Loève [4] de un proceso estocástico  $U(\mathbf{x}, t, \omega)$ , donde  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  son coordenadas espaciales y  $t_1$  y  $t_2$  son coordenadas temporales, es conocida también como una descomposición ortogonal propia (POD, *proper orthogonal decomposition*) o análisis de componentes principales (PCA, *principal component analysis*) en el caso de dimensión finita. Esta descomposición emplea

los autovalores  $\lambda_i$  y las autofunciones  $h_i(\mathbf{x}, t)$  de la función de covarianza del proceso  $\mathcal{R}(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2)$  tal y como se indica en la siguiente expresión:

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{R}(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2) h_n(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1 = \lambda_n h_n(\mathbf{x}_2, t_2) \quad (3.1)$$

Donde  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{T}$  son los dominios espaciales y temporales de interés. Por su definición, la función de covarianza es una función simétrica real definida positiva, de ahí, que todas sus autofunciones son mutuamente ortogonales y generan el espacio al que  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, t_1, \mathbf{y}, t_2)$  pertenece.

La expansión KL se puede escribir como:

$$U(\mathbf{x}, t, \omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\omega) h_i(\mathbf{x}, t) + \bar{U}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

$\bar{U}(\mathbf{x}, t)$  es la media del proceso estocástico y  $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$  forma un conjunto de variables aleatorias independientes que generan todo el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . La expansión KL tiene una propiedad interesante, de todas las posibles descomposiciones, la expansión KL es óptima en un sentido cuadrático medio. En cualquier caso, el hecho que la función de covarianza deba ser conocida *a priori* limita significativamente su uso.

### 3.3 EXPANSIÓN DE POLINOMIOS CAÓTICOS (PCE)

La representación espectral de una variable aleatoria  $U$  de varianza finita consiste en expresarla como una expansión del tipo [5, 74, 95, 121]:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \psi_k(\xi) \quad (3.3)$$

Donde  $\psi_k$  son funcionales de las variables aleatorias conocidas  $\xi$  y  $u_k$  son coeficientes determinísticos. Un proceso aleatorio con una dependencia espacial y temporal se expresaría de la siguiente manera:

$$U(\mathbf{x}, t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\mathbf{x}, t) \psi_k(\xi) \quad (3.4)$$

### 3.3.1 Caos homogéneo

Se consideran las variables aleatorias reales  $U$  definidas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}), U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y se denota por  $L_2(\Omega, \mathcal{P})$  el conjunto de funciones aleatorias de segundo orden. Siendo  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$  una secuencia de variables aleatorias mutuamente ortogonales, se hacen las siguientes definiciones:

- Se denomina  $\hat{\Gamma}_p$  al espacio de polinomios de  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$  cuyo grado es menor o igual a  $p$ ;
- se denota por  $\Gamma_p$  al conjunto de polinomios que pertenecen a  $\hat{\Gamma}_p$  y son ortogonales a  $\hat{\Gamma}_{p-1}$  y
- se denomina  $\tilde{\Gamma}_p$  al espacio generado por  $\Gamma_p$  mediante suma directa  $(\oplus)$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_p &= \hat{\Gamma}_{p-1} \oplus \tilde{\Gamma}_p \\ L_2(\Theta, P) &= \oplus_{i=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i \end{aligned}$$

El subespacio de  $\tilde{\Gamma}_p$  de  $L_2(\Theta, P)$  se denomina el caos homogéneo de grado  $p$ , mientras que  $\Gamma_p$  son los polinomios caóticos de orden de  $p$ . Entonces los



polinomios caóticos de orden  $p$  consisten en todos los polinomios de orden  $p$ , teniendo en cuenta todas las combinaciones posibles de variables aleatorias  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ . Se hace notar que como las variables aleatorias son funciones. Los polinomios caóticos son funcionales al ser funciones de funciones.

Por lo tanto, toda variable aleatoria de segundo orden  $U \in L_2(\Theta, P)$  se puede expresar mediante polinomios caóticos de la siguiente manera [122]:

$$\begin{aligned}
 u(\omega) = & a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) + \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) + \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)) + \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega), \xi_{i_4}(\omega)) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

La anterior representación es convergente en media cuadrática [123]:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E \left[ \left( a_0 \Gamma_0 + \dots + \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 \dots i_p} \Gamma_p(\xi_{i_1}(\omega), \dots, \xi_{i_p}(\omega)) - U \right)^2 \right] = 0 \tag{3.6}$$

La esperanza o valor medio de una variable aleatoria individual  $U$  cuya función de densidad  $f_U(x)$  se define como:

$$\mu_U = E[U] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_U(x) dx \tag{3.7}$$

Como la esperanza del primer término de la serie (3.5) no es nula, debido a la ortogonalidad de los polinomios caóticos, la esperanza de los polinomios caóticos de orden  $p > 0$  debe ser nula:

$$E\left[\Gamma_{p>0}\right]=0 \quad (3.8)$$

La ortogonalidad de los polinomios caóticos facilita en gran medida el cálculo de los momentos estadísticos de la variable que se está representando.

La ecuación (3.5) se puede describir de manera más compacta como:

$$u(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i(\xi(\omega)) \quad (3.9)$$

Así se aprovecha una relación biunívoca entre los polinomios caóticos  $\Gamma$  y los funcionales  $\psi$ . Los coeficientes  $u_i$  se denominan coeficientes PC. Se acostumbra a adoptar la convención  $\psi_0 = \Gamma_0$  y se asume que los funcionales  $\psi_i$  están ordenados de manera creciente con el orden de los polinomios.

Por cuestiones numéricas, en vez trabajar con  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ , se limita la representación a un conjunto finito  $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ . Por lo que la expansión tiene una dimensión finita y la expresión (3.5) se reducirá a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} u(\omega) = & a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^N a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) + \\ & + \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) + \\ & + \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)) + \\ & + \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega), \xi_{i_4}(\omega)) + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.3.2 Polinomios caóticos unidimensionales

El caso unidimensional, una única variable aleatoria  $\xi_1$ , la ecuación (3.10) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 u(\omega) &= a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^1 a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) + \\
 &+ \sum_{i_1=1}^1 \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) + \\
 &+ \sum_{i_1=1}^1 \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)) + \\
 &+ \sum_{i_1=1}^1 \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega), \xi_{i_4}(\omega)) + \dots \\
 &= a_0 \Gamma_0 + a_1 \Gamma_1(\xi_1) + a_{11} \Gamma_2(\xi_1, \xi_1) + a_{111} \Gamma_3(\xi_1, \xi_1, \xi_1) + a_{1111} \Gamma_4(\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_1) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Expresando (3.11) en función de  $\psi_i$ , se tiene:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \psi_k(\xi_1) \tag{3.12}$$

Se denota por  $\psi_p(\xi)$  el caos unidimensional de orden  $p$ , imponiendo que  $\psi_0(\xi) = 1$ . Las variables aleatorias  $\xi_i$  tienen asociada una determinada función de densidad de probabilidad, de manera que la condición de ortogonalidad se expresa como:

$$\begin{aligned}
 E[\psi_i(\omega) \psi_j(\omega)] &= \int_{\Omega} \psi_i(\omega) \psi_j(\omega) dP(\omega) = \langle \psi_i(\omega), \psi_j(\omega) \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \psi_i(x) \psi_j(x) f_{\xi}(x) dx = \delta_{ij} \langle \psi_i, \psi_i \rangle \\
 &= \delta_{ij} \langle \psi_i^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para que los polinomios  $\psi_i$  resulten mutuamente ortogonales se ha de cumplir la expresión (3.13) en la que se incluye la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $\xi$ . Por consiguiente, el tipo de polinomios  $\psi_i$  a emplear para que se cumpla la anterior expresión dependerá variable aleatoria  $\xi$  subyacente. En el Cuadro 3-1, se recoge la correspondencia entre el tipo de polinomios  $\psi_k$  y la distribución de la variable aleatoria  $\xi$  [6].

**Cuadro 3-1 Correspondencia entre el tipo de polinomios caóticos y su variable aleatoria asociada [6]**

	Distribución de $\xi$	Base polinomios caóticos	Soporte
Continua	Gaussiana	Hermite	$(-\infty, \infty)$
	Gamma	Laguerre	$[-\infty, \infty)$
	Beta	Jacobi	$[a, b]$
	Uniforme	Legendre	$[a, b]$
Discreta	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$
	Binomial negativa	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Hipergeométrica	Hahn	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$

$N \geq 0$  es un entero

### 3.3.3 Polinomios caóticos multidimensionales

Se necesita una base de polinomios caóticos multidimensional cuando se requieren  $N$  variables aleatorias independientes  $\xi_i$  para representar una variable aleatoria real  $U$ . Ante esa situación, la representación espectral de  $U$  queda tal y como se escribe a continuación:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Psi_k(\xi_1, \dots, \xi_N) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Psi_k(\xi) \quad (3.14)$$

Una forma sencilla de construir polinomios caóticos  $N$ -dimensionales es la tensorización parcial de los polinomios unidimensionales [5]. En otras palabras, cada polinomio multidimensional  $\Psi_i$  se construye como producto de  $N$  polinomios unidimensionales  $\psi_i$ . El subíndice  $i$  indica el “multi-índice” asociado. Un multi-índice es un vector de dimensión  $N$  cuyas componentes son el grado del polinomio unidimensional asociado a esa variable:

$$\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_N^i) \quad (3.15)$$

Por eso se puede representar un polinomio caótico multidimensional  $\Psi_i$  como producto de polinomios unidimensionales  $\psi_i$ :

$$\Psi_i(\xi_1, \dots, \xi_N) = \prod_{k=1}^N \psi_{\alpha_k^i}(\xi_k) \quad (3.16)$$

### 3.3.4 Truncamiento de la serie

Por motivos prácticos, la expresión (3.14) debe ser truncada hasta un determinado grado de polinomio, de manera que al truncar aparece un error de truncamiento  $\varepsilon_T$ :

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Psi_k(\xi) = \sum_{k=0}^P u_k \Psi_k(\xi) + \varepsilon_T(N, p) \approx \sum_{k=0}^P u_k \Psi_k(\xi) \quad (3.17)$$

El número de términos que tendrá la expansión truncada (3.17) será:

$$P+1 = \binom{N+p}{p} = \frac{(N+p)!}{N!p!} \quad (3.18)$$

### 3.4 ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS INTRUSIVOS

Tal y como se recoge en el apartado 2.4.3, los SFEM espectrales se dividen en dos grandes grupos, intrusivos y no intrusivos. La metodología intrusiva se ilustra en este apartado mediante un problema de estática lineal [95]. En el caso determinístico, tras la discretización mediante elementos finitos, este problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineal:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.19)$$

donde la incógnita son los desplazamientos nodales  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez y  $\mathbf{F}$  el vector de fuerzas nodales.

En el caso que tanto las propiedades del material como las cargas, recogidas en  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{F}$  respectivamente, sean variables aleatorias, los desplazamientos  $\mathbf{U}$  también serán variables aleatorias. Expresando la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales en una base de polinomios caóticos:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{K}_j \Psi_j \\ \mathbf{F} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j \Psi_j \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\mathbf{K}_j$  y  $\mathbf{F}_j$  son matrices y vectores deterministas respectivamente. La aleatoriedad viene dada por la base de polinomios caóticos  $\Psi_j$ . Por lo tanto, el vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{U}$  es aleatorio y puede ser representado en la misma base que  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{F}$  tal y como indica la siguiente expresión:

$$\mathbf{U} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{U}_j \Psi_j \quad (3.21)$$

En la que el vector  $\mathbf{U}_j$  es un vector de coeficientes. Si las expansiones (3.20) y (3.21) se truncan y se sustituyen en la ecuación (3.19), el residuo en la ecuación de equilibrio estocástico queda como:

$$\varepsilon = \left( \sum_{j=0}^P \mathbf{K}_j \Psi_j \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^P \mathbf{U}_j \Psi_j \right) - \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j \Psi_j \right) \quad (3.22)$$

Minimizando la expresión (3.22), se obtienen los coeficientes de  $\mathbf{U}_j$ . Esta minimización impone que el residuo debe ser ortogonal al subespacio que generan los polinomios caóticos  $\{\Psi_j\}_{j=0}^P$  lo que equivale a:

$$E(\varepsilon \cdot \Psi_j) = 0 \quad (3.23)$$

Tras operar convenientemente, la versión estocástica de (3.19) es:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{0,0} & \cdots & \mathbf{K}_{0,P} \\ \mathbf{K}_{1,0} & \cdots & \mathbf{K}_{1,P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{P,0} & \cdots & \mathbf{K}_{P,P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_P \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

En la que  $\mathbf{K}_{j,k} = \sum_{i=0}^P \mathbf{d}_{ijk} \mathbf{K}_j$  y  $\mathbf{d}_{ijk} = E[\Psi_i \Psi_j \Psi_k]$ .

### 3.5 ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS NO INTRUSIVOS

Los elementos finitos estocásticos no intrusivos consisten en expresar la respuesta del modelo directo como un funcional de las variables aleatorias que

abarca todo el dominio de los parámetros. Al respecto, a modo de ejemplo se expone el siguiente supuesto, un modelo de excavación que dependiese únicamente de dos parámetros, todos los desplazamientos posibles de la cabeza de la pantalla estarían recogidos en una “superficie” dependiente de ambos parámetros. Estos métodos se denominan espectrales porque la mencionada superficie se aproxima mediante una base de polinomios. En otras palabras, son espectrales, porque el modelo directo es expresado sobre todo el dominio como una suma de polinomios caóticos multidimensionales (PCE), cuyos coeficientes son elegidos para que se ajusten al modelo lo mejor posible. La base de polinomios caóticos tiene en cuenta la parte aleatoria del proceso mientras que los coeficientes la parte determinística. Estos métodos se denominan no intrusivos, porque el modelo directo es empleado como una especie de caja negra que sirve para generar las realizaciones en ciertos puntos que sirven para calcular los coeficientes de la expansión.

Tal y como se indica en el apartado 2.4.3.2, existen varias técnicas para determinar los coeficientes de la expansión PCE que aproxima la respuesta del modelo. El método que se ha empleado en la presente Tesis para determinar los coeficientes de la expansión (3.17) es un ajuste mediante mínimos cuadrados (LSF, *Least Squares Fit*). Se ha optado por esta técnica porque según Sudret y Berveiller [95], el número de realizaciones del modelo es sensiblemente inferior al de las demás técnicas.

Según la ecuación (3.18), los  $(P+1)$  coeficientes de expansión se determinan minimizando la suma  $R$  de los residuos determinados en  $Q$  puntos  $\xi^{(i)}, i = 1, \dots, Q$ :



$$R(\tilde{s}) = \sum_{i=1}^Q \left( r^{(i)} \right)^2 = \sum_{j=1}^Q \left( s\left(\xi^{(i)}\right) - \tilde{s}\left(\xi^{(i)}\right) \right)^2 \quad (3.25)$$

Para que los coeficientes  $u_k$  de la expansión minimicen  $R$  se debe cumplir:

$$\frac{\partial R}{\partial u_k} = -2 \sum_{i=1}^Q \left( s\left(\xi^{(i)}\right) - \tilde{s}\left(\xi^{(i)}\right) \right) \Psi_k\left(\xi^{(i)}\right) = 0, \quad 0 \leq k \leq P \quad (3.26)$$

La expresión (3.26) genera un sistema de  $Q$  ecuaciones y  $(P+1)$  incógnitas que se puede escribir de forma matricial en función de la matriz  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{10} & \cdots & Z_{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Q0} & \cdots & Z_{QP} \end{pmatrix}, \quad Z_{ij} = \Psi_j\left(\xi^{(i)}\right) \quad (3.27)$$

Denominando  $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_P]^T$  al vector de  $(P+1)$  coeficientes de la expansión (3.17) por determinar y  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_Q]^T$  al vector de  $Q$  realizaciones del modelo directo, la solución a la ecuación (3.26) sería:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})\mathbf{u} &= \mathbf{Z}'\mathbf{s} \\ \mathbf{u} &= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{s} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$  es una matriz cuadrada que se denomina matriz de información. La matriz  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$  puede estar mal condicionada. Por ello, hay que acudir a un método como la descomposición de valor singular [98]. El método de ajuste de mínimos cuadrados, según Sudret [121], es comparable al método de la superficie de respuesta (*response surface method*) [124]. En este contexto el conjunto de puntos  $\xi^{(i)}, i=1, \dots, Q$  que se emplean para definir la superficie de respuesta se denominan diseño experimental. Según Berveiller y Sudret [125, 126], un buen

diseño experimental puede ser construido a partir de las raíces de los polinomios sobre los que se ha construido la expansión (3.17). El procedimiento para definir el diseño experimental es el que sigue:

1. Se calculan las raíces de los polinomios de grado  $p+1$  que forman la expansión siendo  $p$  el grado máximo de la expansión (3.17). Se denomina  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  al conjunto de raíces (incluyendo el 0 aunque no sea raíz) siendo  $m$  el tamaño del conjunto;
2. como la expansión (3.17) es  $N$  dimensional, se generan todas las combinaciones posibles de  $N$ -elementos, tuplas, con el anterior conjunto de raíces, de manera que  $r^k = (r_{i_1}, \dots, r_{i_N})$ ,  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_N \leq m$ ,  $k = 1, \dots, m^N$ ;
3. se ordenan las combinaciones anteriores según cercanía al origen porque los puntos del diseño experimental que se encuentran más cerca del origen, los de menor norma, corresponden a los puntos que explican más varianza y
4. se escogen los  $Q$  puntos de  $r^k$  más cercanos al origen que conforman el diseño experimental  $\{\xi^1 \dots \xi^Q\}$ .

Desarrollando la definición de la matriz de información  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$  :

$$\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \Psi_0(\xi^{(1)}) & \dots & \Psi_0(\xi^{(Q)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_p(\xi^{(1)}) & \dots & \Psi_p(\xi^{(Q)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_0(\xi^{(1)}) & \dots & \Psi_p(\xi^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(\xi^{(Q)}) & \dots & \Psi_p(\xi^{(Q)}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}'\mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} Z_{10} & \cdots & Z_{Q0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{1P} & \cdots & Z_{QP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{10} & \cdots & Z_{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{Q0} & \cdots & Z_{QP} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Z_{10} \\ \vdots \\ Z_{1P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{10} & \cdots & Z_{1P} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} Z_{Q0} \\ \vdots \\ Z_{QP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{Q0} & \cdots & Z_{QP} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}^1 + \cdots + \mathbf{A}^Q
\end{aligned} \tag{3.29}$$

De la expresión (3.29), se observa que la matriz de información  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$  es la suma de  $Q$  matrices básicas  $\mathbf{A}^i$ . Las matrices básicas son matrices cuadradas  $(1+P) \times (1+P)$  de rango unidad. Tal y como se apuntado anteriormente, se pueden llegar a tener  $m^N$  puntos. Explotar todos los puntos disponibles puede llegar a ser numéricamente muy costoso. Por dicha razón, para escoger el tamaño  $Q$  del diseño experimental, Berveiller [125] propuso la siguiente regla empírica deducida a partir de un gran número de experimentos:

$$Q = (N-1)P \tag{3.30}$$

La regla (3.30) es lo suficientemente sencilla para identificar el tamaño del diseño experimental para generar el modelo subrogado. Sin embargo, Sudret [121] propuso el siguiente procedimiento que en general arroja diseños experimentales de menor tamaño basado en la invertibilidad de la matriz de información. Se articula en ir añadiendo puntos del diseño experimental  $\xi^i$  (ordenados según norma creciente) hasta que el rango de la matriz resultante de añadir las sucesivas matrices básicas  $\mathbf{A}^i$  sea invertible, es decir, que sea de rango  $P+1$ .

En el Cuadro 3-2, a modo ilustrativo, se presenta el número de evaluaciones del modelo directo, según la regla dada por la expresión (3.30), para generar un diseño experimental del tamaño adecuado. Se puede observar que mientras el

grado máximo de los polinomios empleados para simular la respuesta sea bajo, el número de evaluaciones para construir la representación de la respuesta mediante polinomios caóticos es razonable.

**Cuadro 3-2 Número de evaluaciones aproximadas del modelo directo para generar un diseño experimental adecuado según la regla empírica [125]**

	Grado de la expansión				
	1	2	3	4	5
<b>1</b>	3	3	5	5	7
<b>2</b>	3	6	10	15	21
<b>3</b>	8	20	40	70	112
<b>4</b>	15	45	105	210	378
<b>5</b>	24	84	224	504	1008
<b>6</b>	35	140	420	1050	2310
<b>7</b>	48	216	720	1980	4752
<b>8</b>	63	315	1155	3465	9009
<b>9</b>	80	440	1760	5720	16016
<b>10</b>	99	594	2574	9009	27027
<b>11</b>	120	780	3640	13650	43680
<b>12</b>	143	1001	5005	20020	68068

### 3.6 CONCLUSIONES DEL TERCER CAPÍTULO

Cuando las propiedades de los materiales y las acciones son de carácter aleatorio, la respuesta del modelo debe ser aleatoria. Los elementos finitos estocásticos (SFEM) representan una mejora respecto los elementos finitos deterministas (FEM), los más habituales en la práctica actual. Los SFEM permiten propagar la incertidumbre de los datos de entrada a través del modelo. Existen dos tipos de SFEM, intrusivos y no intrusivos.

La estrategia intrusiva requiere construir una nueva matriz de rigidez de mayor

orden, con ello, gran parte del software comercial existente no puede ser empleado. Además, su empleo en problemas no lineales aún está en fase de desarrollo.

El enfoque no intrusivo consiste en construir una superficie de respuesta que depende de los parámetros aleatorios. Esta superficie se construye con polinomios caóticos, de manera que el problema consiste en determinar los coeficientes que multiplican a dichos polinomios. Los coeficientes se obtienen a partir de un cierto número de realizaciones del modelo directo. A partir de los resultados obtenidos de las realizaciones se ajusta la superficie, es decir, el modelo directo se emplea como una suerte de caja negra para generar la información necesaria para construir la superficie. En consecuencia, el abanico de problemas que se puede resolver es mayor que el de la metodología intrusiva y no es necesario utilizar software especial.

En esta Tesis se ha optado por los SFEM no intrusivos en la que los coeficientes de las expansiones polinómicas se determinan mediante un ajuste de mínimos cuadrados. El principal motivo de esta elección es que la estrategia no intrusiva permite el uso de los modelos no lineales comunes en el diseño de excavaciones profundas. No obstante, tomando como orden de magnitud la información recogida en el Cuadro 3-2, la estrategia no intrusiva puede llegar a requerir un número de evaluaciones prohibitivo cuando se tiene un número de parámetros que es alto ( $N > 12$ ) o cuando se quiere emplear una base de polinomios de grado alto. Por lo tanto, para poder representar variables aleatorias a un coste computacional razonable o se reduce el número de parámetros que intervienen en la respuesta o se emplean expansiones de grado bajo. En el siguiente capítulo, para poder calibrar modelos con un número de parámetros moderado,  $N \approx 9$ , se presenta una metodología que se sirve de aproximaciones de grado bajo para

mantener el esfuerzo numérico en unos límites aceptables.

# Capítulo 4    METODOLOGÍA

## 4.1 INTRODUCCIÓN

La aportación más significativa de esta Tesis es la metodología que se presenta en este capítulo para la resolución de los problemas inversos aplicados a excavaciones al abrigo de muros pantalla. Para desarrollar esta metodología, se han combinado de manera original diferentes técnicas y se han obtenido resultados novedosos. Este apartado, además de servir de guía del capítulo, pretende aclarar que partes de la metodología provienen de resultados previos y cuáles son aportaciones originales.

En el apartado 4.2, se define el problema inverso que se va a resolver, se indican los datos necesarios y el rango de aplicabilidad. Se enumeran las diferentes estrategias concebidas para resolver este tipo de problema. Para la resolución del problema inverso, se aprovechará la potencia que brindan los métodos espectrales no intrusivos (*vid* apartado 3.5) tal y como sugieren Marzouk y Xiu [6, 19]. Los autores citados previamente presentan algunos ejemplos de validación sin relación con la ingeniería geotécnica, ni con la exigencia numérica que se presenta en el diseño de las excavaciones profundas.

Como se ha apuntado en capítulos anteriores y se concreta en el apartado 4.3, se opta por una estrategia de resolución bayesiana, porque la solución que proporciona, una función de probabilidad, es coherente con el nivel de incertidumbre que se tiene tanto en las observaciones como en el modelo. De los diferentes enfoques bayesianos existentes, se ha escogido el de Tarantola [3]. Éste autor llega a la solución del problema de forma más natural. En ese apartado, a partir del trabajo de Tarantola [3], se dan las diferentes expresiones generales de la solución en función del grado de incertidumbre tanto en el modelo como en las observaciones.

Considerar los parámetros del modelo que se calibra como variables aleatorias favorece el uso de los elementos finitos estocásticos (SFEM). En el apartado 4.4, se justifica el empleo de la técnica espectral no intrusiva. También se desarrollan las expresiones analíticas que permiten determinar la matriz de covarianza de las respuestas del modelo junto con la influencia de cada variable en la varianza de las diferentes respuestas. Se considera que estas expresiones analíticas constituyen una aportación original de la presente Tesis en tanto en cuanto no se ha encontrado ninguna referencia explícita a las mismas en la revisión bibliográfica efectuada. Estas expresiones son de una gran potencia, porque permiten caracterizar estadísticamente de manera analítica la respuesta sin tener que recurrir a métodos de Monte Carlo. Asimismo, permiten profundizar en el conocimiento de la estructura estadística del problema.

Tal y como se apunta en el apartado 4.2, para reducir la carga numérica en vez utilizar el modelo directo original se emplean expresiones polinómicas a modo de modelos subrogados, porque son computacionalmente más ligeros. Aproximar el modelo original por otro modelo construido con una técnica espectral no intrusiva implica que se está introduciendo un error en la



modelación. La acotación del error debido a la subrogación puede ser una labor computacionalmente exigente. Por esa razón, en el apartado 4.5, se propone un novedoso método para acotar el error que se observa al subrogar el modelo original por una expansión polinómica. Esta cuestión es clave para obtener una solución coherente desde el punto de vista bayesiano.

En el apartado 4.6, se particularizan las soluciones presentadas previamente en el apartado 4.2 a la metodología presentada en esta Tesis. Si el modelo que se emplea para subrogar el original es burdo, el error que se está introduciendo en la modelación puede ser acabar siendo muy relevante. Asimismo, construir modelos subrogados muy ajustados al original puede acarrear un gran coste computacional porque la aproximación intrusiva requiere realizaciones del pesado modelo original. Esta situación ponía en cuestión la ventaja de emplear modelos subrogados para representar las respuestas. Para solventar este problema se plantea una estrategia iterativa. Esta estrategia está inspirada en el trabajo de El Moselhy y Marzouk [127], si bien estos autores resuelven el problema inverso de manera diferente.

La determinación del valor más verosímil de los parámetros (punto de máxima verosimilitud) es un dato que puede resultar de gran interés para el diseño de las excavaciones profundas. Las lecturas procedentes de la auscultación de una pantalla pueden estar muy correlacionas. Este hecho puede generar inestabilidades desde un punto de vista numérico en la determinación del punto más verosímil. En el apartado 4.6, se presenta una forma de mitigar este problema. Para facilitar el cálculo del punto de máxima verosimilitud, en los siguientes apartados 4.7 y 4.8, se sugieren diferentes estrategias.

## 4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA INVERSO

El diseño de excavaciones profundas al abrigo de muros pantalla es una labor compleja, porque existe incertidumbre tanto en los parámetros que se manejan como el en los modelos de cálculo empleados. La ejecución de la excavación es un ensayo a escala real que puede servir para comprobar la validez de los parámetros empleados y de las predicciones del modelo. La determinación de los parámetros a partir de los datos con los que se ha instrumentado la excavación se conoce como problema inverso, calibración o análisis retrospectivo.

En general, los análisis inversos se plantean como problemas de optimización en los que se busca el conjunto de parámetros del modelo que minimiza una función objetivo, generalmente, la suma del cuadrado de los residuos. Sin embargo, en esta Tesis, la calibración se abordará mediante una metodología bayesiana que es la más apropiada para resolver los problemas inversos [3, 17]. La estadística frecuentista o clásica considera que los parámetros de un modelo tienen un valor desconocido a averiguar a partir de las observaciones disponibles. En la estadística bayesiana, los parámetros del modelo son variables aleatorias de las que mejoramos lo que sabemos de ellas a medida que se tienen observaciones. La metodología bayesiana requiere una caracterización estadística de la información de partida para resolver el problema. En este caso, tales requisitos se identifican a continuación:

- Una estimación inicial de los parámetros expresada como función de probabilidad. En geotecnia, habitualmente, es complejo caracterizar de manera precisa la distribución de probabilidad de un parámetro por la escasa cantidad de terreno que se muestrea. Sin embargo, no resulta

especialmente arduo establecer un rango de valores en el que se tenga una confianza muy alta que esté el valor buscado.

- Un modelo que represente razonablemente bien el fenómeno que se pretende estudiar. Por “razonablemente bien” se entiende que se conozca el error que puedan tener los resultados del modelo. Por ejemplo, muchos modelos constitutivos del terreno, cuando se aplican al estudio de excavaciones profundas, predicen muy bien las deflexiones del muro, pero los asientos alrededor de la obra son menos precisos [33]. Asimismo, las situaciones que se van de estudiar son de servicio, porque la técnica escogida para la resolución del problema no capta bien las situaciones en las que se produce una inestabilidad numérica cuando se está en rotura o próxima a ella.
- Unas observaciones de las que se conozca su error.

Además, se asume que los parámetros a determinar son independientes entre ellos. Esto es debido a que la metodología que se desarrolla no permite establecer correlaciones entre los diferentes parámetros. Si se conoce que entre determinados parámetros existe cierta correlación, esta información puede servir para valorar la bondad de la calibración.

La solución del problema son unas nuevas distribuciones de probabilidad de los parámetros que mejoran las que se tenían inicialmente. Estas distribuciones se han obtenido mediante un modelo del que se sabe la precisión a partir de unas observaciones de las que se conoce su error. Por lo tanto, la metodología propuesta en la presente Tesis permite una caracterización estadística completa de los parámetros a determinar, a diferencia de otras metodologías que consisten en obtener unos parámetros de una manera *ad hoc* cuya fiabilidad es

generalmente desconocida [111]. De manera simplificada, se podría apuntar que el resultado del problema no va a ser el “valor óptimo” de los parámetros, sino una acotación más precisa que la que se tenía inicialmente de los mismos. Así, en todo momento se tiene la fiabilidad de los parámetros que se están buscando.

La resolución del anterior tipo de problema requiere un gran esfuerzo computacional, debido principalmente al gran número de parámetros que se pueden manejar. Generalmente, se tienen problemas de alta dimensión que requieren varios miles de ejecuciones del modelo directo para llegar a caracterizar los parámetros mediante un método de Monte Carlo. Adicionalmente, evaluar un caso puede llevar fácilmente varios minutos, porque los modelos empleados acostumbran a ser no lineales y la simulación puede requerir varias etapas [128].

Los métodos para reducir la carga computacional en la resolución de problemas inversos se pueden clasificar en las siguientes tres categorías [128]:

1. Reducción del coste de la simulación directa mediante el empleo de modelos subrogados: modelos que sustituyen al original y cuya evaluación representa un menor esfuerzo numérico. Estos modelos se construyen a partir de una serie de evaluaciones del modelo original antes de acometer la resolución del problema inverso. Frangos *et al.* [129] dividen esta categoría en tres grupos, ajustes del modelo a datos [130, 131], modelos de orden reducido [132-135] y modelos jerárquicos [136, 137].
2. Reducción de la dimensión del espacio de parámetros valiéndose del conocimiento que se tenga de su estructura para usar una base que lo represente mejor mediante expansiones de Karhunen-Loève [138].

3. Reducción del muestreo. En la resolución de problemas inversos una de las técnicas disponibles son las cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC) [139]. Una manera de mejorar su eficiencia es emplear modelos simplificados que dirijan el muestreo hacia las zonas de mayor probabilidad [140, 141].

Como los modelos numéricos empleados en el diseño de excavaciones profundas son computacionalmente muy pesados, de las tres estrategias enumeradas anteriormente, el empleo de modelos subrogados que son computacionalmente más ligeros ofrece la opción más apropiada. La respuesta del modelo directo se representa en una base de polinomios caóticos y todos los cálculos que requiere la optimización se llevan a cabo sobre el modelo subrogado.

### 4.3 ESTRATEGIA BAYESIANA

#### 4.3.1 Planteamiento bayesiano adoptado

En la estadística no bayesiana o clásica la respuesta de un sistema físico es una variable aleatoria  $U$  cuya función de probabilidad es  $f(u, \mathbf{m})$ , siendo  $\mathbf{m}$  un conjunto o vector de parámetros fijos cuyo valor es desconocido. En la estadística bayesiana,  $\mathbf{m}$  es un vector de variables aleatorias con una función de densidad  $\rho_M(\mathbf{m})$  que se denomina *a priori* porque codifica toda la información disponible del sistema antes de saber cómo se comporta. La inferencia bayesiana explica como la distribución inicial de los parámetros desconocidos  $\mathbf{m}$  se actualiza a una nueva distribución  $\sigma_M(\mathbf{m})$ , llamada *a posteriori* tras conocer la respuesta del sistema físico. El concepto de probabilidad condicional junto con el teorema de

Bayes es lo que conduce a la nueva función de densidad  $\sigma_M(\mathbf{m})$  [142]. Tarantola [3] sugiere una metodología ligeramente diferente al planteamiento bayesiano tradicional que se articula a partir del concepto de “combinación de estados de información” por medio de las operaciones de conjunción y disyunción de distribuciones de probabilidad. Esta forma de enfocar el problema no es la más habitual, pero permite alcanzar la solución de una manera más intuitiva y efectiva. La metodología desarrollada en la presente Tesis se basa en las ideas de Tarantola [3] sobre la resolución de problemas inversos.

Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos distribuciones de probabilidad sobre una variedad de dimensión finita. Para cualquier evento  $A$ , la definición de la operación de disyunción ( $P_1 \vee P_2$ ) y conjunción ( $P_1 \wedge P_2$ ) es:

$$\begin{aligned} P_1(A) \neq 0 \text{ o } P_2(A) \neq 0 &\Rightarrow (P_1 \vee P_2)(A) \neq 0 \\ P_1(A) = 0 \text{ o } P_2(A) = 0 &\Rightarrow (P_1 \wedge P_2)(A) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ambas operaciones deben ser conmutativas:

$$\begin{aligned} P_1 \vee P_2 &= P_2 \vee P_1 \\ P_1 \wedge P_2 &= P_2 \wedge P_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

La distribución homogénea  $M$  debe ser neutral para la operación de conjunción con cualquier otra distribución  $P$  por lo que debe cumplir:

$$P \wedge M = P \quad (4.3)$$

Si  $f_1(\mathbf{x})$ ,  $f_2(\mathbf{x})$  y  $\mu(\mathbf{x})$  son las funciones de densidad de probabilidad representando  $P_1$ ,  $P_2$  y  $M$  respectivamente, entonces dados los siguientes axiomas:

$$\begin{aligned}
(P_1 \vee P_2)(A) &= \int_A (f_1 \vee f_2)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
(P_1 \wedge P_2)(A) &= \int_A (f_1 \wedge f_2)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Las soluciones más simples de las expresiones recogidas en (4.4) son:

$$\begin{aligned}
(f_1 \vee f_2)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})) \\
(f_1 \wedge f_2)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\nu} \frac{f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})} \\
\nu &= \int_{\Omega} \frac{f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})} d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

El objetivo de un problema inverso es inferir los  $N$  parámetros del modelo contenidos en el vector  $\mathbf{m}$  a partir de las  $n$  componentes del vector de observaciones imperfectas,  $\mathbf{d}$  [143]. En la aproximación bayesiana,  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{d}$  son vectores de variables aleatorias cuyas funciones de densidad de probabilidad son  $\rho_M(\mathbf{m})$  y  $\rho_D(\mathbf{d})$  respectivamente.  $\rho_M(\mathbf{m})$  encierra todo el conocimiento previo que se posee de los parámetros, es decir, representa de manera estadística la información disponible sobre los parámetros antes de conocer las observaciones. La clave de la inferencia bayesiana es la manera en que la distribución *a priori*  $\rho_M(\mathbf{m})$  se actualiza a la distribución *a posteriori*  $\sigma_M(\mathbf{m})$  tras conocer unas determinadas observaciones  $\mathbf{d}_{obs}$ . Pasar de  $\rho_M(\mathbf{m})$  a  $\sigma_M(\mathbf{m})$  representa remplazar el estado de información inicial por otro nuevo a la luz de las nuevas observaciones. Se asume que las variables de los vectores aleatorios  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{d}$  son independientes. Por lo tanto, la función de distribución de probabilidad conjunta  $\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  y se cuantifica con la siguiente expresión (Figura 4-1a):

$$\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \rho_D(\mathbf{d}) \cdot \rho_M(\mathbf{m}) \tag{4.6}$$

El modelo directo determinista  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$  liga los parámetros  $\mathbf{m}$  con las observaciones  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \quad (4.7)$$

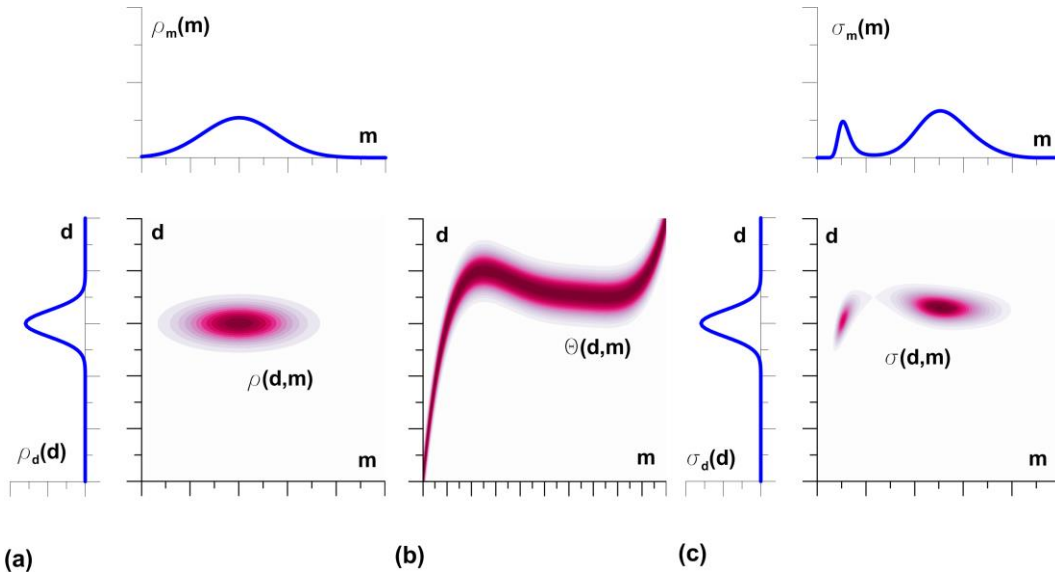


Figura 4-1 Proceso de resolución de un problema inverso, (a) distribución *a priori* conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución *a posteriori* conjunta con sus marginales (adaptado de Tarantola [3]).

Como norma, los valores que predice el modelo no son idénticos a los observados. Ellos se debe tanto a los errores en las observaciones como en el mismo modelo. Si el modelo directo fuese perfecto, es decir, si representase sin ningún tipo de error el fenómeno observado, cada vector de parámetros daría un solo vector de observaciones. Sin embargo, en muchísimas ocasiones, la teoría no consigue explicar todo el fenómeno físico estudiado o no se consigue una parametrización perfecta. Por esa razón, se precisa de una distribución de probabilidad conjunta  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  que explique la correlación entre parámetros y



observaciones, así como la inherente incertidumbre de la teoría (*vid* Figura 4-1b). Tal y como se representa en la Figura 4-1c, la conjunción de la información contenida en  $\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  y en  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  resulta en la función de distribución conjunta actualizada o *a posteriori*  $\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  que se calcula según:

$$\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \propto \frac{\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})}{\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})} \quad (4.8)$$

donde  $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  es la distribución homogénea de probabilidad.

La información *a posteriori* de los parámetros viene dada por su densidad de probabilidad marginal:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = \int_{\mathcal{D}} \sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) d\mathbf{d} \quad (4.9)$$

Cuando la dependencia entre  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{m}$  es moderadamente no lineal, la distribución  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  puede ser escrita como el producto de la función de probabilidad condicional  $\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})$  y la distribución marginal homogénea de los parámetros  $\mu_M(\mathbf{m})$  [3]:

$$\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})\mu_M(\mathbf{m}) \quad (4.10)$$

Combinando las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10), la distribución de probabilidad marginal de los parámetros *a posteriori* que es la solución del problema viene dada por:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) \propto \rho_M(\mathbf{m}) \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_D(\mathbf{d})\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})}{\mu_D(\mathbf{d})} = \rho_M(\mathbf{m})L(\mathbf{m}) \quad (4.11)$$

Donde  $L(\mathbf{m})$  es lo que se denomina la función de verosimilitud. La condición que debe cumplir el punto de máxima verosimilitud es:

$$\mathbf{m}^* := \arg \max_{\mathbf{m}} \frac{\sigma_M(\mathbf{m})}{\mu_M(\mathbf{m})} \quad (4.12)$$

Si la distribución de probabilidad es gaussiana, normalmente resulta más eficiente encontrar el máximo en el logaritmo natural de  $\sigma_M(\mathbf{m})/\mu_M(\mathbf{m})$ . Se ha de caer en la cuenta que  $\sigma_M(\mathbf{m})$  puede ser multimodal y que la selección del punto de máxima verosimilitud puede requerir cierto criterio [3].

Tal y como se indica en el apartado 2.2.1, sólo se consideran dos tipos de incertidumbres, las debidas a la modelación y a la experimentación (observación). Por esa razón, en función de lo significativa que es la incertidumbre de un tipo respecto al otro, la ecuación (4.11) puede ser adaptada a las cuatro situaciones que se enumeran en el Cuadro 4-1. Además, se asume que los errores se distribuyen de manera gaussiana.

**Cuadro 4-1 Casos a considerar en función del grado de incertidumbre en el modelo y en las observaciones**

Caso	Incertidumbre	
	Modelo	Observaciones
A	Insignificante	Insignificante
B	Insignificante	Apreciable (gaussiana)
C	Apreciable (gaussiana)	Insignificante
D	Apreciable (gaussiana)	Apreciable (gaussiana)

#### 4.3.2 Caso A. Incertidumbre insignificante en modelo y observaciones

En este caso se tiene plena certeza en que las observaciones están libres de error y

que el modelo directo  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$  es capaz de reproducir perfectamente el fenómeno observado. Bajo esas premisas, toda la probabilidad de ocurrencia de las observaciones se concentrará en  $\mathbf{d}_{obs}$ . En otras palabras, la probabilidad de hallar alguna observación diferente a  $\mathbf{d}_{obs}$  es nula. La distribución de probabilidad de las observaciones *a priori* se muestra en la Figura 4-2a y viene dada por:

$$\rho_D(\mathbf{d}) = \delta[\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}] \quad (4.13)$$

Donde  $\delta$  es la delta de Dirac. La distribución conjunta *a priori* de parámetros y observaciones es:

$$\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \rho_m(\mathbf{m}) \delta[\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}] \quad (4.14)$$

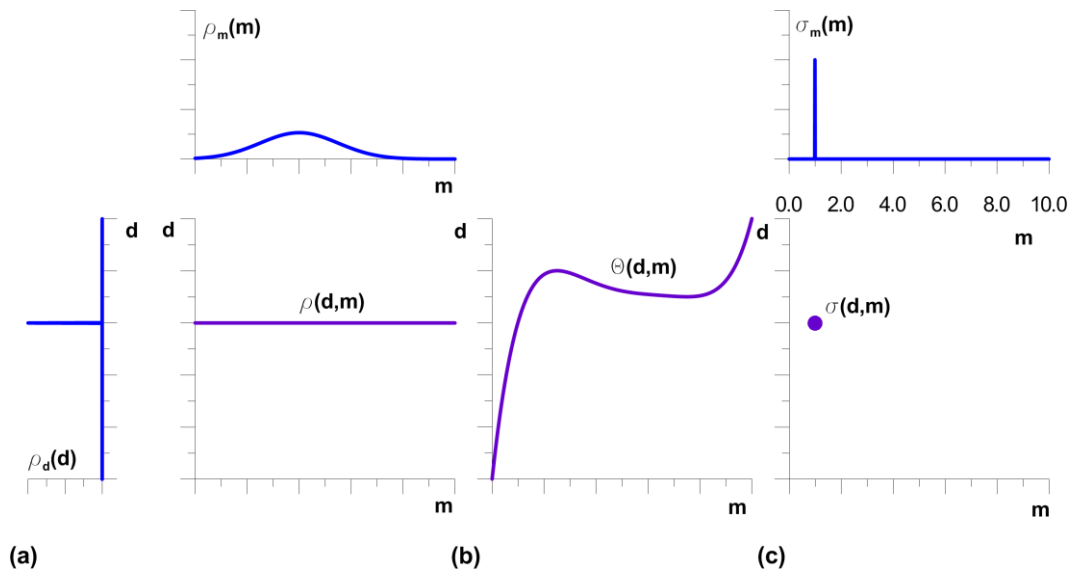


Figura 4-2 Explicación gráfica del Caso A (incertidumbre insignificante en modelo y observaciones), (a) distribución *a priori* conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución *a posteriori* conjunta con sus marginales.

De manera semejante, el modelo directo es perfecto, por lo que a cada conjunto

de parámetros  $\mathbf{m}$  le corresponde sólo un vector de observaciones  $\mathbf{d}$ , tal y como se representa en la Figura 4-2b y se expresa mediante la siguiente distribución condicional:

$$\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \delta[\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m})] \quad (4.15)$$

Por lo tanto, la solución del problema vendría dado por la ecuación (4.16), una función delta de Dirac que concentra toda la probabilidad en el único vector de parámetros  $\mathbf{m}_{real}$ , que puede reproducir las observaciones  $\mathbf{d}_{obs}$  registradas (Figura 4-2c).

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = \delta(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{real}) \quad (4.16)$$

### 4.3.3 Caso B. Incertidumbre insignificante en el modelo

En este caso, la incertidumbre en las observaciones supera con creces a la del modelo. De ahí que se considera a éste último como perfecto.

Los residuos de las observaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}_D$  son la diferencia entre el valor real  $\mathbf{d}$  y el observado  $\mathbf{d}_{obs}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_D = \mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs} \quad (4.17)$$

En la presente Tesis, se asume que los residuos de las observaciones se distribuyen de gaussianamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{d}_{obs} + \boldsymbol{\varepsilon}_D \\ \boldsymbol{\varepsilon}_D &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_D) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Donde  $\mathbf{C}_D$  es la matriz de covarianza de las observaciones que indica la

correlación existente entre los residuos de las diferentes observaciones y el tamaño de los mismos. Al considerar los residuos gaussianos, se tiene que:

$$\rho_D(\mathbf{d}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d})^t \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d})\right] \quad (4.19)$$

En consecuencia, la distribución *a priori* conjunta de parámetros y observaciones, representada en la Figura 4-3a, viene dada por:

$$\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \propto \rho_m(\mathbf{m}) \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d})^t \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d})\right] \quad (4.20)$$

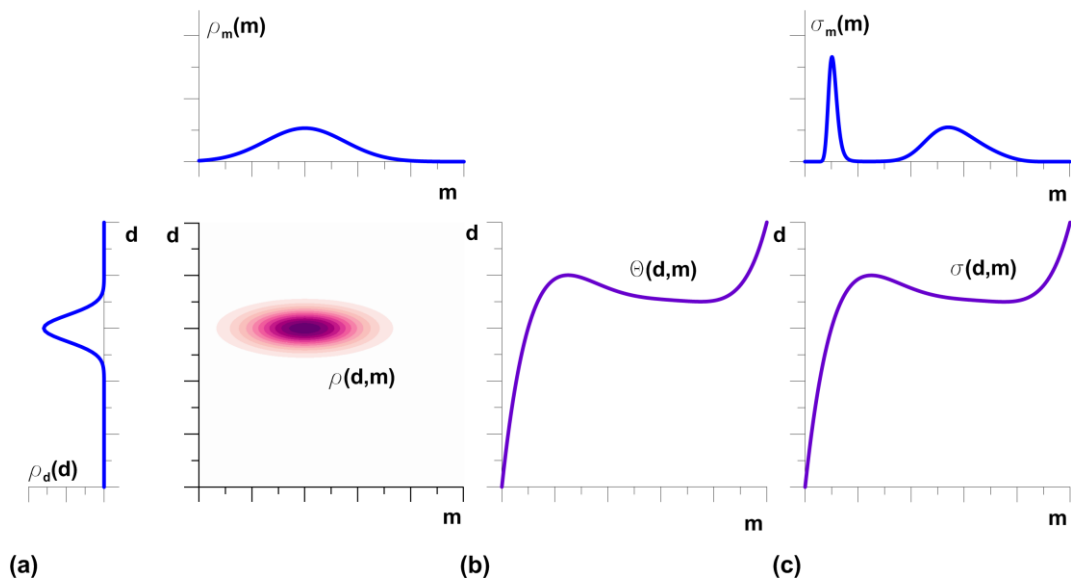


Figura 4-3 Explicación gráfica del Caso B (incertidumbre insignificante en el modelo), (a) distribución *a priori* conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución *a posteriori* conjunta con sus marginales.

Como el modelo directo predice a la perfección el fenómeno observado, cuando se tiene un conjunto de parámetros  $\mathbf{m}$  determinado, la probabilidad de ocurrencia de una observación  $\mathbf{d}$  diferente de  $g(\mathbf{m})$  es nula. Al igual que en el

caso anterior, su expresión parte de la ecuación (4.15) (*vid* Figura 4-3b). Particularizando la ecuación (4.11) a este caso, la solución al problema inverso es:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) \propto \rho_m(\mathbf{m}) \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - g(\mathbf{m}))^t \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - g(\mathbf{m})) \right] \quad (4.21)$$

En la Figura 4-3c se representa la solución.

#### 4.3.4 Caso C. Incertidumbre insignificante en las observaciones

Cuando la incertidumbre en el modelo es muy superior a la observacional, esta última puede considerarse despreciable. La distribución *a priori* conjunta, al igual que en el caso A (incertidumbre insignificante en modelo y observaciones), viene dada por la ecuación (4.14).

Se denomina residuo  $\boldsymbol{\varepsilon}_G$  a la diferencia entre los valores que resultarían del modelo perfecto (desconocido)  $\mathbf{g}_{real}$  y el modelo imperfecto (conocido)  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$  (Figura 4-4b):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G(\mathbf{m}) = \mathbf{g}_{real} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) \quad (4.22)$$

Asumiendo que el residuo se comporta como un ruido gaussiano aditivo, entonces el modelo se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{g}(\mathbf{m}) + \boldsymbol{\varepsilon}_G \\ \boldsymbol{\varepsilon}_G &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_G) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Donde  $\mathbf{C}_G$  es la matriz de covarianza de los residuos del modelo que proporciona información tanto de su tamaño como de la correlación entre ellos.

La función de probabilidad condicional  $\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})$  sería:

$$\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{d}-\mathbf{g}(\mathbf{m}))^t \mathbf{C}_G^{-1}(\mathbf{d}-\mathbf{g}(\mathbf{m}))\right] \quad (4.24)$$

Como la única observación posible es  $\mathbf{d}_{obs}$  (Figura 4-4a), la solución al problema inverso particularizando la ecuación (4.11), tal y como se muestra en la Figura 4-4c, es:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) \propto \rho_M(\mathbf{m}) \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{d}_{obs}-\mathbf{g}(\mathbf{m}))^t \mathbf{C}_G^{-1}(\mathbf{d}_{obs}-\mathbf{g}(\mathbf{m}))\right] \quad (4.25)$$

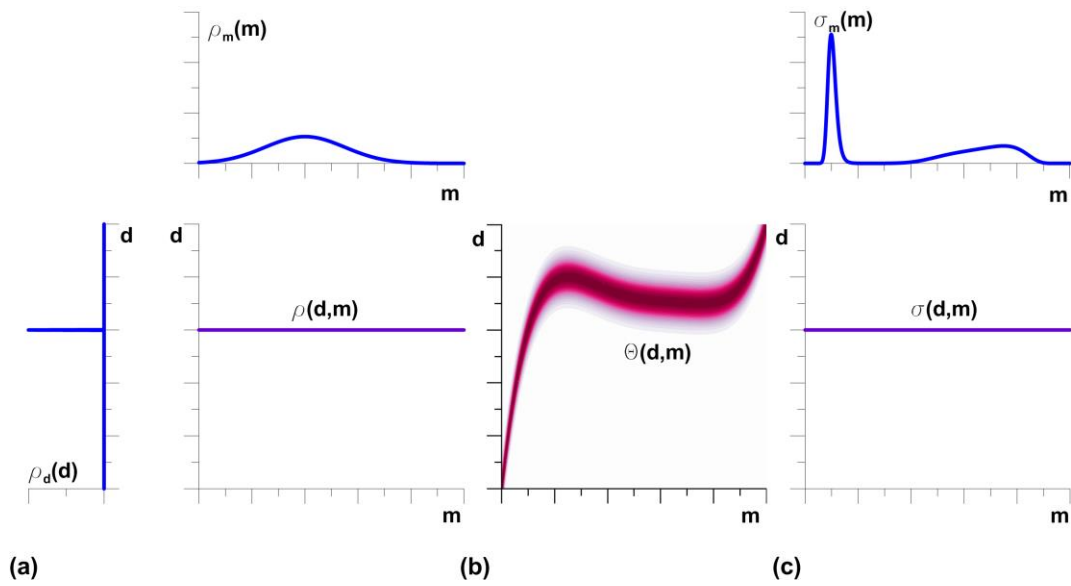


Figura 4-4 Explicación gráfica del Caso C (incertidumbre insignificante en las observaciones), (a) distribución *a priori* conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución *a posteriori* conjunta con sus marginales.

#### 4.3.5 Caso D. Incertidumbre apreciable en modelo y observaciones

Este es el supuesto más común. La incertidumbre es comparable entre las observaciones y el modelo. Los residuos de las observaciones y del modelo se definen de igual manera que en los casos anteriores:

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \mathbf{g}(\mathbf{m}) + \boldsymbol{\varepsilon}_G \\ \mathbf{d} &= \mathbf{d}_{obs} + \boldsymbol{\varepsilon}_D\end{aligned}\tag{4.26}$$

Asumiendo que ambos residuos son ruido gaussiano aditivo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_T &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_G) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_D &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_D)\end{aligned}\tag{4.27}$$

Donde  $\mathbf{C}_D$  y  $\mathbf{C}_G$  son las matrices de covarianza de observaciones y de modelo respectivamente.

En este caso, al detectarse incertidumbre en las observaciones, la distribución *a priori* conjunta de parámetros y observaciones vendría dada por la ecuación (4.20) (Figura 4-5a). La función de probabilidad condicional  $\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})$  se define igual que en el caso anterior mediante la ecuación (4.24), tal y como se representa en la Figura 4-5b.

Por lo que resolviendo la integral (4.11) tal y como se ilustra en [3], la solución al problema inverso es(Figura 4-5c):

$$\sigma_M(\mathbf{m}) \propto \rho_M(\mathbf{m}) \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))^t [\mathbf{C}_D + \mathbf{C}_G]^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m})) \right] \tag{4.28}$$



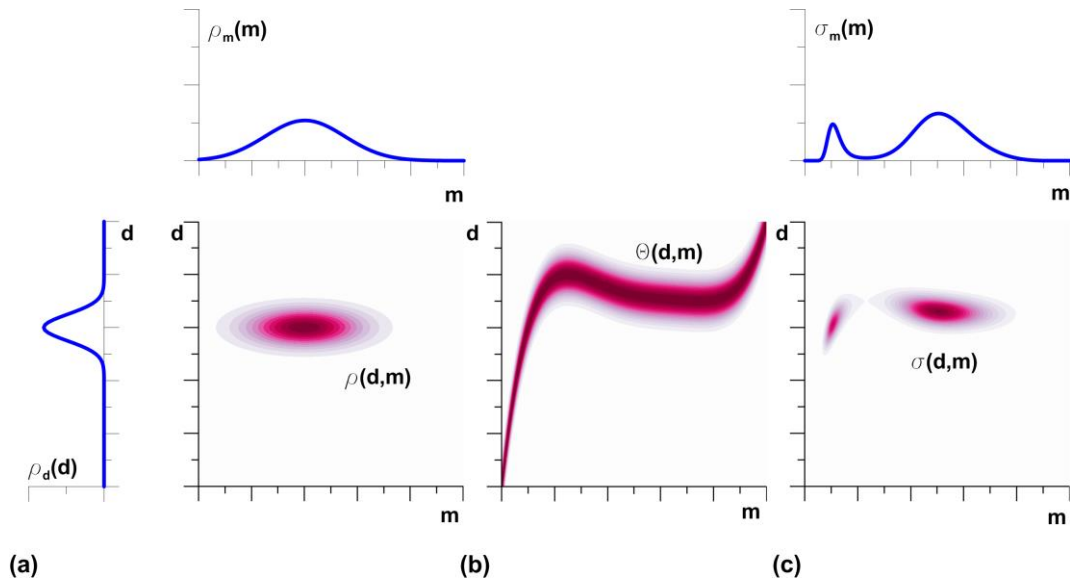


Figura 4-5 Explicación gráfica del Caso D (incertidumbre apreciable en modelo y observaciones), (a) distribución *a priori* conjunta de parámetros y observaciones con sus marginales, (b) distribución conjunta del modelo, (c) distribución *a posteriori* conjunta con sus marginales.

#### 4.3.6 Determinación de las marginales

La solución al problema inverso es la distribución de probabilidad conjunta de los parámetros  $\sigma_M(\mathbf{m})$ , tal y como se indica en las ecuaciones (4.16), (4.21), (4.25) y (4.28). En la mayoría de los casos, esta distribución es multivariante y resulta interesante determinar la distribución marginal de cada parámetro:

$$\sigma(m_i) = \int_{\mathcal{D}_1} \dots \int_{\mathcal{D}_{i-1}} \int_{\mathcal{D}_{i+1}} \dots \int_{\mathcal{D}_N} \sigma_M(\mathbf{m}) dm_1 \dots dm_{i-1} dm_{i+1} \dots dm_N \quad (4.29)$$

La integración de la expresión (4.29) no es trivial y requiere el empleo de técnicas numéricas avanzadas porque la dimensión del espacio es grande y la probabilidad se concentra en una región pequeña del espacio de parámetros.

Debido a la forma de campana de Gauss de  $\sigma_M(\mathbf{m})$ , la integración mediante métodos de malla dispersa [144] puede no resultar muy satisfactoria. Por lo que para dimensiones moderadas  $N < 12$ , se recomienda acudir a técnicas de Monte Carlo [76]. En esa línea, Beck y Au [145] proponen evaluar dicha integral mediante una cadena de Markov de Monte Carlo (MCMC).

## 4.4 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO SUBROGADO

### 4.4.1 Introducción

El modelo directo  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$  genera predicciones del vector de observaciones  $\mathbf{d}$ . Se considera que a cada componente  $d_i$  del vector de observaciones  $\mathbf{d}$  le corresponde un modelo directo  $g_i(\mathbf{m})$ . Como los  $N$  parámetros  $\mathbf{m}$  del modelo son variables aleatorias, los pronósticos  $g_i(\mathbf{m})$  de cada componente  $d_i$  también son variables aleatorias. Si se normalizan los parámetros  $\mathbf{m}$  a  $\xi$  para facilitar el tratamiento estadístico:

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) = \mathbf{s}(\xi) = [s_1(\xi) \quad \cdots \quad s_n(\xi)]^t \quad (4.30)$$

Por ejemplo, si uno de los parámetros es el módulo de elasticidad de un nivel,  $m_1$ , y se estima que está comprendido entre 5000 kPa y 10000 kPa,  $m_1$  se transformaría en  $\xi_1$ , que es una variable adimensional comprendida entre -1 y 1. Los modelos  $s_i(\xi)$  son variables aleatorias que dependen de las variables aleatorias  $\xi$  conocidas. Así, tal y como se indica en el apartado 3.3,  $s_i(\xi)$  se puede representar espectralmente:

$$s_i(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij} \Psi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \quad (4.31)$$

Para poder manipular numéricamente la expresión (4.31), ésta se trunca hasta el polinomio de grado  $p$ , de manera que:

$$s_i \approx \tilde{s}_i = \sum_{j=0}^p u_{ij} \Psi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \quad (4.32)$$

Donde  $\Psi_j(\xi_1, \xi_2, \dots)$  es la base de polinomios caóticos multidimensionales que se obtiene a partir de polinomios unidimensionales según lo expuesto en el apartado 3.3.3.

Al poner el modelo en términos de expresiones polinómicas, el esfuerzo numérico se reduce en gran medida. Por lo tanto, al expresar espectralmente la respuesta del modelo, se está creando un modelo subrogado más ligero numéricamente y que, tal y como se muestra en los siguientes puntos, permite una computación analítica de los momentos estadísticos. Obviamente, al tener que truncar la serie (4.31) se está introduciendo un error en la modelación que se tendrá que acotar.

El método de ajuste de mínimos cuadrados empleado para construir el modelo subrogado precisa que se evalúe previamente el modelo directo original. El método empleado para generar el modelo subrogado es comparable al método de la superficie de respuesta [124], tal y como se muestra en el apartado 3.5. Los  $Q$  puntos que se emplean para definir la superficie de respuesta se denominan diseño experimental. Para escoger el tamaño  $Q$  del diseño experimental, Berveiller [125] propuso la regla empírica recogida en la expresión (3.30) a partir de un gran número de experimentos. Sin embargo, Sudret [121] propuso el

procedimiento indicado en el apartado 3.5 para generar diseños experimentales de menor tamaño y que ha sido el empleado en la presente Tesis.

#### 4.4.2 Determinación analítica de la covarianza del modelo subrogado

Una de las ventajas de representar espectralmente la respuesta del modelo directo se halla en la posibilidad de calcular analíticamente la varianza de cada respuesta y la covarianza entre ellas. Según lo expuesto en el apartado 3.3.3, los polinomios caóticos multidimensionales que se obtienen a partir de polinomios unidimensionales:

$$\Psi_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \prod_{i=1}^N \psi_{\alpha_i^k}(\xi_i) \quad (4.33)$$

Escribiendo la ecuación (4.32) en función de los polinomios unidimensionales, se tiene que:

$$\tilde{s}_i(\xi) = \sum_{j=0}^P u_{ij} \Psi_j(\xi) = \sum_{j=0}^P u_{ij} \prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^j}(\xi_m) \quad (4.34)$$

La esperanza de cualquier polinomio caótico es el término independiente:

$$E[\tilde{s}_i(\xi)] = u_{i0} \quad (4.35)$$

Aplicando la definición de varianza a la expresión (4.34):

$$\begin{aligned} \text{var}[\tilde{s}_i(\xi)] &= E\left(\left(\tilde{s}_i(\xi) - E[\tilde{s}_i(\xi)]\right)^2\right) = E\left(\left[\tilde{s}_i(\xi) - u_{i0}\right]^2\right) \\ &= E\left(\left[\tilde{s}_i(\xi)\right]^2\right) - 2u_{i0}E(\tilde{s}_i(\xi)) + u_{i0}^2 \\ &= E\left(\left[\tilde{s}_i(\xi)\right]^2\right) - u_{i0}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{var}[\tilde{s}_i(\xi)] &= E\left(\left[\sum_{k=0}^P u_{ik} \prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}(\xi_m)\right]\left[\sum_{l=0}^P u_{il} \prod_{n=1}^N \psi_{\alpha_n^l}(\xi_n)\right]\right) - u_{i0}^2 \\
&= E\left(\left[\sum_{k=0}^P u_{ik}^2 \prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m)\right]\right) - u_{i0}^2 \\
&= \sum_{k=0}^P u_{ik}^2 E\left(\prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m)\right) - u_{i0}^2
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Como los polinomios caóticos son mutuamente ortogonales, de todos los términos cruzados que se adivinan en la cuarta línea de la expresión (4.36), sólo tendrán valor no nulo los productos en los que ambos multi-índices sean iguales:

$$\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_N^k) = \alpha^l = (\alpha_1^l, \alpha_2^l, \dots, \alpha_N^l) \tag{4.37}$$

Quedando tal y como se indica en la expresión (4.36):

$$\text{var}[\tilde{s}_i(\xi)] = E\left(\left[\sum_{k=0}^P u_{ik}^2 \prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m)\right]\right) - u_{i0}^2 \tag{4.38}$$

Análogamente para la expresión de la covarianza:

$$\begin{aligned}
\text{cov}[\tilde{s}_i(\xi), \tilde{s}_j(\xi)] &= E\left(\left[\tilde{s}_i(\xi) - u_{i0}\right]\left[\tilde{s}_j(\xi) - u_{j0}\right]\right) \\
&= E\left[\tilde{s}_i(\xi) \cdot \tilde{s}_j(\xi)\right] - u_{i0} E\left[\tilde{s}_j(\xi)\right] - u_{j0} E\left[\tilde{s}_i(\xi)\right] + u_{i0} u_{j0} \\
&= E\left[\tilde{s}_i(\xi) \cdot \tilde{s}_j(\xi)\right] - u_{i0} u_{j0} \\
&= E\left(\left[\sum_{k=0}^P u_{ik} \prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}(\xi_m)\right]\left[\sum_{l=0}^P u_{jl} \prod_{n=1}^N \psi_{\alpha_n^l}(\xi_n)\right]\right) - u_{i0} u_{j0} \\
&= E\left(\left[\sum_{k=0}^P u_{ik} u_{jk} \prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m)\right]\right) - u_{i0} u_{j0} \\
&= \sum_{k=0}^P u_{ik} u_{jk} E\left(\prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m)\right) - u_{i0} u_{j0}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Resultando:

$$\text{cov}[\tilde{s}_i(\xi), \tilde{s}_j(\xi)] = \sum_{k=0}^P u_{ik} u_{jk} E \left( \prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m) \right) - u_{i0} u_{j0} \quad (4.40)$$

A partir de la expresión (4.40), se puede construir analíticamente la matriz de covarianza  $\tilde{\mathbf{C}}_s$  de las diferentes respuestas subrogadas  $\tilde{s}_i(\xi)$ .

Una de las ventajas de expresar espectralmente  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$  es que su estructura estadística se queda al desnudo. La determinación de la matriz de covarianza de las diferentes observaciones  $\mathbf{d}$  requeriría miles de realizaciones de  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$  por el método de Monte Carlo. Sin embargo, las expresiones (4.38) y (4.40) muestran que la matriz de covarianza del modelo subrogado  $\tilde{\mathbf{s}}(\xi)$  de  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$  se puede calcular analíticamente. Este resultado es muy importante no sólo por el ahorro numérico sino que permite una mejor comprensión de las relaciones de los parámetros con las observaciones.

#### 4.4.3 Determinación de la influencia de cada variable en la varianza

La respuesta subrogada del modelo,  $\tilde{s}_i(\xi)$  tiene una varianza que depende únicamente de los parámetros normalizados  $\xi$ . Al representar espectralmente, se puede valorar analíticamente la influencia de cada parámetro en la varianza total de la respuesta. Es decir se puede determinar analíticamente cuál es la sensibilidad de la respuesta a cada parámetro de manera que se puede valorar qué parámetros son los más representativos. Esta información puede ser muy interesante cara a plantear una reducción de modelo porque cuantifica la cantidad de información que se pierde al prescindir de un parámetro en concreto.

Tanto la expresión (4.38) como la (4.40), emplean la varianza de un polinomio

multidimensional de grado  $k \geq 1$  que se obtiene como:

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\Psi_k(\xi)) &= E\left(\left[\prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m)\right]\right) \\
 &= \int \psi_{\alpha_1^k}^2(\xi_1) f_{\xi_1}(\xi_1) d\xi_1 \cdots \int \psi_{\alpha_N^k}^2(\xi_N) f_{\xi_N}(\xi_N) d\xi_N \\
 &= \text{var}(\psi_{\alpha_1^k}(\xi_1)) \cdots \text{var}(\psi_{\alpha_N^k}(\xi_N))
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Tal y como se recoge en la ecuación (4.41) la varianza de un polinomio multidimensional  $\Psi_k(\xi)$  se puede expresar como producto de las varianzas de los polinomios unidimensionales que lo forman. Tomando el logaritmo de la expresión (4.41), se puede convertir el anterior producto en una suma y con ello determinar la influencia de cada término en la varianza de cada polinomio multivariante. Así:

$$\begin{aligned}
 \log[\text{var}(\Psi_k(\xi))] &= \log\left[E\left(\left[\prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m)\right]\right)\right] \\
 &= \log[\text{var}(\psi_{\alpha_1^k}(\xi_1)) \cdots \text{var}(\psi_{\alpha_N^k}(\xi_N))] \\
 &= \log[\text{var}(\psi_{\alpha_1^k}(\xi_1))] + \cdots + \log[\text{var}(\psi_{\alpha_N^k}(\xi_N))]
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Multiplicando la anterior expresión por  $\text{var}(\Psi_k(\xi))$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\Psi_k(\xi)) &= E\left(\left[\prod_{m=1}^N \psi_{\alpha_m^k}^2(\xi_m)\right]\right) \\
 &= \frac{\log[\text{var}(\psi_{\alpha_1^k}(\xi_1))]}{\log[\text{var}(\Psi_k(\xi))]} \text{var}(\Psi_k(\xi)) + \cdots \\
 &\quad + \frac{\log[\text{var}(\psi_{\alpha_N^k}(\xi_N))]}{\log[\text{var}(\Psi_k(\xi))]} \text{var}(\Psi_k(\xi)) \\
 &= \varphi_{\xi_1} \text{var}(\Psi_k(\xi)) + \cdots + \varphi_{\xi_N} \text{var}(\Psi_k(\xi))
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

El coeficiente  $\varphi_{\xi_i}$  se puede interpretar como la influencia de la variable aleatoria  $\xi_i$  en la varianza  $\text{var}(\Psi_k(\xi))$ .

A partir de las ecuaciones (4.40) y (4.43), la matriz de covarianza  $\tilde{\mathbf{C}}_s$  del modelo subrogado se puede descomponer en la suma de las matrices de covarianza de cada parámetro:

$$\tilde{\mathbf{C}}_s = \tilde{\mathbf{C}}_s^{\xi_1} + \dots + \tilde{\mathbf{C}}_s^{\xi_N} \quad (4.44)$$

## 4.5 ERROR DE TRUNCAMIENTO

El error de truncamiento aparece cuando se aproxima una expansión infinita, (4.31), por otra finita, (4.32). Como se ha puesto en relieve al principio de este capítulo, la metodología de estimación necesita saber la incertidumbre que presenta el modelo. Como para aligerar la carga numérica, se sustituye el modelo original por otro subrogado construido sobre una base de polinomios caóticos, es crucial estimar el error de la que se comete al subrogar.

### 4.5.1 Estructura del error de truncamiento

El error de truncamiento o residuo,  $\varepsilon_T$ , se define como la diferencia entre el resultado del modelo directo y del modelo subrogado, ecuación (3.17) por lo que el vector de residuos se define como:

$$\varepsilon_T(\xi) = \mathbf{s}(\xi) - \tilde{\mathbf{s}}(\xi) = \begin{bmatrix} s_1(\xi) - \tilde{s}_1(\xi) \\ \vdots \\ s_n(\xi) - \tilde{s}_n(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{T1}(\xi) \\ \vdots \\ \varepsilon_{Tn}(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$



Por consiguiente:

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{m}) = s_i(\xi) &= \sum_{j=0}^P u_{ij} \Psi_j(\xi_1, \dots, \xi_N) + \sum_{k=P+1}^{\infty} u_{ik} \Psi_k(\xi_1, \dots, \xi_N) \\ &= \tilde{s}_i(\xi) + \varepsilon_{Ti}(\xi) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Como los polinomios multidimensionales son ortogonales el error de truncamiento  $\varepsilon_{Ti}(\xi)$  es independiente de  $\tilde{s}_i(\xi)$  y se debe cumplir la siguiente relación:

$$\text{var } s_i = \text{var } \tilde{s}_i + \text{var } \varepsilon_{Ti} \quad (4.47)$$

De la expresión (4.46), y sabiendo que el error de truncamiento es independiente de la respuesta subrogada, se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_S &= \begin{bmatrix} \text{var}(s_1) & \cdots & \text{cov}(s_1, s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(s_1, s_n) & \cdots & \text{var}(s_n) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{var}(\tilde{s}_1) & \cdots & \text{cov}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_n) & \cdots & \text{var}(\tilde{s}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{var}(\varepsilon_1) & \cdots & \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_n) & \cdots & \text{var}(\varepsilon_n) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{C}}_S + \mathbf{C}_T \end{aligned} \quad (4.48)$$

Se define la varianza total de las observaciones como la traza de la matriz de covarianza, por lo que la varianza total del modelo directo, la del subrogado y la del error de truncamiento será:

$$\begin{aligned} \text{var } \mathbf{s} &= \text{tr}(\mathbf{C}_S) \\ \text{var } \tilde{\mathbf{s}} &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}_S) \\ \text{var } \boldsymbol{\varepsilon}_T &= \text{tr}(\mathbf{C}_T) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Como la traza de las matrices de covarianza es un invariante, se cumplirá:

$$\text{var} \mathbf{s} = \text{var} \tilde{\mathbf{s}} + \text{var} \boldsymbol{\varepsilon}_T \quad (4.50)$$

Mediante la ecuación (4.40), se puede construir analíticamente la matriz de covarianza de las variables  $\tilde{s}_i$  del modelo subrogado  $\tilde{\mathbf{C}}_s$  con la que determinar  $\text{var} \tilde{\mathbf{s}}$ .

La matriz de covarianza de los residuos,  $\mathbf{C}_T$ , se aproxima a partir de los matriz de covarianza muestral  $\hat{\mathbf{C}}_T$ , es decir, la que se construye a partir de los  $Q$  residuos disponibles de la generación del modelo subrogado. Se ha observado que  $\hat{\mathbf{C}}_T$  capta razonablemente bien la estructura de la matriz pero minusvalora el tamaño de la misma, de ahí que la traza de  $\hat{\mathbf{C}}_T$  resulta bastante inferior al valor real de la varianza del error de truncamiento. Esto se debe a que el método de ajuste de mínimos cuadrados empleado para estimar los coeficientes de la expansión es un método que minimiza la varianza. Así, el residuo en esos puntos es mínimo y consecuentemente la varianza. En el siguiente epígrafe, se detalla el procedimiento a seguir para acotar el error.

#### 4.5.2 Dificultad en la estimación del tamaño del error de truncamiento

El coste de sustituir un modelo directo por otro subrogado más ligero numéricamente es el error de truncamiento anteriormente definido. La determinación de este error es de suma importancia porque la metodología bayesiana empleada para la solución al problema inverso incorpora a la solución la incertidumbre que se tiene tanto en las observaciones como en el modelo.

El número de términos que presenta la expansión truncada viene dado por la

ecuación (3.18). Al tratarse de una expresión combinatoria, al aumentar el número de variables  $\xi_i$  o el grado de los polinomios, el número de términos de la expansión aumenta de una manera pseudo-exponencial. Además, tal y como se recoge en la expresión (3.6), la serie que se emplea para aproximar las respuestas aleatorias es convergente en media cuadrática. En esas condiciones parece razonable asumir que la relación expresada en la ecuación (4.51) entre la varianza del modelo subrogado  $\text{var}\tilde{s}$  y el grado máximo de los polinomios  $p$ .

$$\text{var}\tilde{s}(p) \approx \alpha_v (1 - e^{-\alpha_\varepsilon p}) \quad (4.51)$$

Donde  $\alpha_v$  y  $\alpha_\varepsilon$  son los coeficientes de ajuste. El factor  $(1 - e^{-\alpha_\varepsilon p})$  tiende a uno al aumentar el grado de la expansión  $p$ . Cuando  $p \rightarrow \infty$ ,  $\text{var}\tilde{s} \rightarrow \text{vars}$ . Por lo tanto, el coeficiente  $\alpha_v$  es una aproximación de  $\text{vars}$ :

$$\text{vars} \approx \alpha_v \quad (4.52)$$

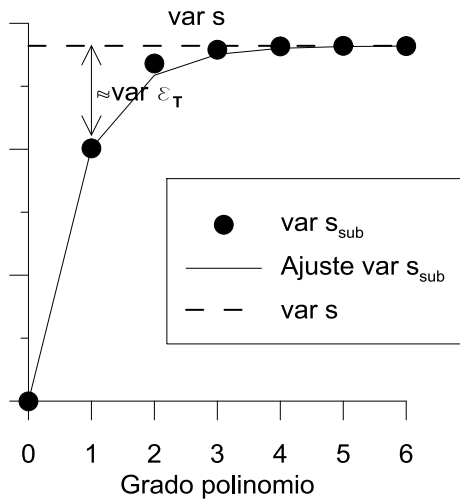


Figura 4-6 Evolución de la  $\text{var } s$  con el grado de la PCE.

Tal y como se representa en la Figura 4-6, aplicando las ecuaciones (4.50), (4.51) y

(4.52), la varianza del error de truncamiento se puede aproximar según la siguiente expresión:

$$\text{var } \boldsymbol{\varepsilon}_T(p) \approx \alpha_v e^{-\alpha_\varepsilon p} \quad (4.53)$$

Para poder determinar los parámetros  $\alpha_v$  y  $\alpha_\varepsilon$  de la curva (4.51), sería necesario como mínimo evaluar las expansiones para dos grados diferentes. Es tentador emplear las expansiones de menor grado ( $p=1$  y  $p=2$ ). Ahora bien, en esta estrategia se advierten dos inconvenientes: (i) si el número  $N$  de variables independientes  $\xi_i$  es alto la evaluación de esa expansión puede ser muy costosa y (ii) para obtener los coeficientes de las expansiones se utiliza un método de mínimos cuadrado que emplea muy pocas realizaciones para hacer el ajuste, se ha observado que el valor de las varianzas  $\text{var}\tilde{\mathbf{s}}$  no es muy bueno sobre todo cuando se trabaja con expansiones de grado bajo.

### 4.5.3 Estimación del tamaño del error de truncamiento

Como la estimación del error de truncamiento puede ser numéricamente muy intensa, tal y como se apunta en el apartado anterior, en la presente Tesis se ha desarrollado la siguiente metodología que aprovecha la posibilidad de determinar la contribución de cada variable  $\xi_i$  en la varianza.

Debido a que los polinomios de menor grado son los que tienen una mayor influencia en la varianza, independientemente del grado de la expansión, la contribución de cada variable  $\xi_i$  a  $\text{var}\tilde{\mathbf{s}}$  es muy similar. La estimación de  $\text{var}\tilde{\mathbf{s}}$  a partir de los puntos con los que se obtiene la aproximación del vector aleatorio  $\tilde{\mathbf{s}}$  minusvalora la varianza pero, como contrapartida, consigue captar muy bien su estructura (el método de los mínimos cuadrados en un método que minimiza la

varianza). Por lo que se asume que la contribución de cada variable al error de truncamiento será la misma independientemente del grado de la expansión. El número de realizaciones para generar un modelo directo aumenta con el número de variables independientes y con el grado. No obstante, si sólo se cuenta con una variable con pocas realizaciones del modelo directo se pueden alcanzar grados en la expansión altos tal y como se puede ver en el Cuadro 3-2.

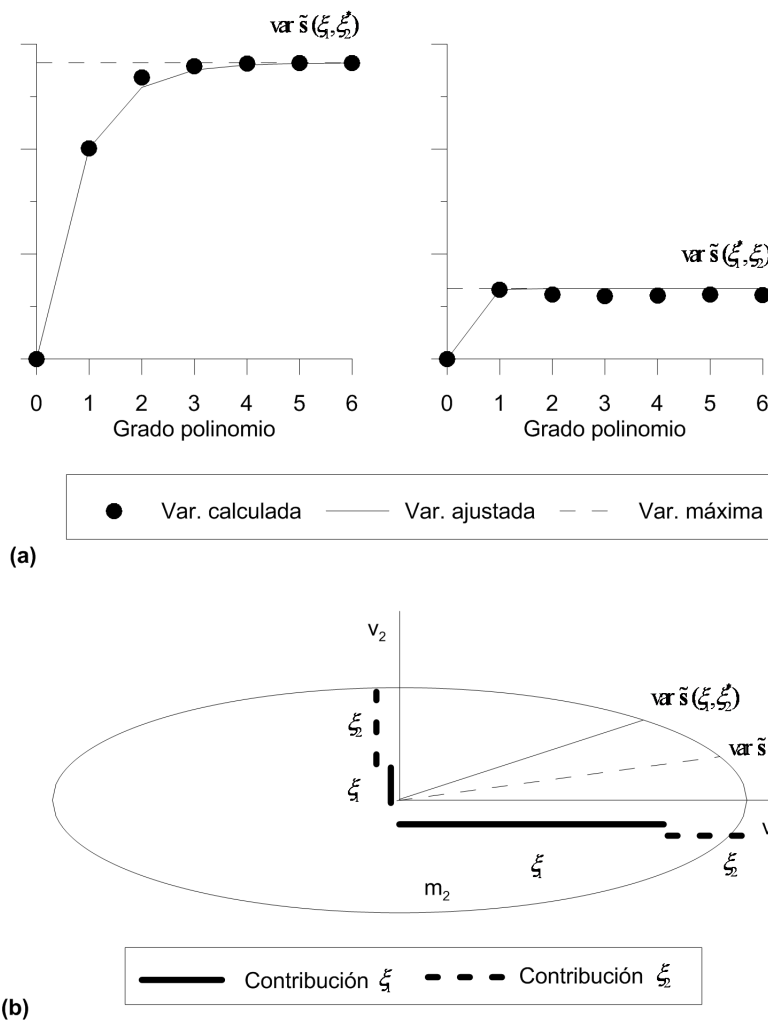


Figura 4-7 (a) acotación unidimensional de la varianza, (b) análisis en componentes principales de las varianzas.

A continuación, se expone el procedimiento aproximado desarrollado en la presente Tesis. Con éste se consigue acotar el tamaño del error por truncamiento, aprovechando que se conoce la influencia de cada variable en  $\tilde{\mathbf{C}}_s$  y que las expansiones de grado alto unidimensionales presentan un coste numérico reducido. Así, se sintetiza a continuación dicho procedimiento:

1. Una vez se tiene el modelo subrogado, se descompone la matriz de covarianza  $\tilde{\mathbf{C}}_s$  en la suma de las matrices de covarianza de cada parámetro, tal y como se indica en el apartado 4.4.3:

$$\tilde{\mathbf{C}}_s = \tilde{\mathbf{C}}_s^{\epsilon_1} + \dots + \tilde{\mathbf{C}}_s^{\epsilon_N} \quad (4.54)$$

2. Por otro lado, para tener una estimación de la varianza máxima asociada a cada variable, se toma un parámetro y se fijan el resto y se calculan los modelos subrogados hasta un grado alto. Como se trata de modelos unidimensionales el esfuerzo numérico es asequible. Para cada uno de los modelos subrogados, se obtiene la varianza y, tal y como se muestra en la Figura 4-7a, se estima la máxima varianza asociada a cada parámetro. A resultados de dicha operación, se consigue una estimación aproximada de la máxima varianza que puede aportar cada parámetro.
3. De la matriz de covarianza  $\tilde{\mathbf{C}}_s$ , se obtienen los autovalores y autovectores. El autovalor y autovector  $i$  se denominan  $\lambda_i$  y  $\mathbf{v}_i$  respectivamente. Como se está tratando con modelos, las únicas fuentes de incertidumbre son los parámetros. Por consiguiente, en el caso en que el número de observaciones  $n$  sea superior al de parámetros  $N$ , sólo los  $n$  autovalores mayores tendrán sentido físico y el resto se pueden considerar ruido numérico.

4. El siguiente producto representa la contribución del parámetro  $\xi_j$  en la dirección al autovalor  $i$ :

$$v_i^t \cdot \tilde{C}_S^{\xi_j} \cdot v_i \quad (4.55)$$

5. Realizando el anterior producto para todos los autovalores y parámetros, se puede construir una matriz que se denomina  $\mathbf{Q}$ . En dicha matriz, cada columna  $j$  representa la contribución de cada parámetro a la varianza del autovector  $j$ . Es decir, cada fila de  $\mathbf{Q}$  indica cuánto contribuye un determinado parámetro a la varianza de cada dirección principal (Figura 4-7b).
6. Como se está intentando acotar superiormente la varianza real del modelo empleando el modelo subrogado, se procede de la siguiente manera,
- De cada fila de la matriz  $\mathbf{Q}$  se obtiene el valor máximo y se compara con la varianza máxima obtenida para la variable correspondiente al modelo subrogado unidimensional.
  - Si el valor máximo es inferior a la varianza máxima de la fila, se calcula el cociente. En caso contrario, se le da un valor unidad.
  - Se obtiene la media de los valores obtenidos que se denomina  $\mu$ .
7. Una vez determinada la media, la varianza de las observaciones se aproxima mediante la siguiente expresión:

$$\text{var}(\mathbf{s}) \approx \mu \cdot \text{tr}(\tilde{C}_S) \quad (4.56)$$

Aplicando la expresión (4.50), la varianza del residuo es aproximadamente:

$$\begin{aligned}
 \text{var } \mathbf{\varepsilon}_T &= \text{var } \mathbf{s} - \text{var } \tilde{\mathbf{s}} \\
 &= \text{var } \mathbf{s} - \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}_s) \\
 &\approx \mu \cdot \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}_s) - \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}_s) \\
 \text{var } \mathbf{\varepsilon}_T &\approx (\mu - 1) \cdot \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}_s)
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

## 4.6 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Como se ha descrito con más detalle en el apartado 4.2, el objetivo de esta Tesis es evaluar los parámetros de un modelo imperfecto, a partir de observaciones sujetas a error, obtenidas de la instrumentación instalada en una excavación profunda para monitorizar su comportamiento. Para poder abordar este problema mediante una metodología bayesiana, se ha de cuantificar inicialmente la incertidumbre que se observa tanto en los parámetros, como en el modelo y observaciones. Por lo tanto, partiendo de una estimación inicial de los parámetros expresada como distribución de probabilidad, la pretensión más honesta es conseguir una reducción de la incertidumbre inicial.

El conocimiento inicial de los parámetros se condensa en la distribución de probabilidad *a priori* cuya función de densidad se ha denominado  $\rho_M(\mathbf{m})$ . Los errores tanto en las observaciones como en el modelo se asumen que son ruido gaussiano. La incertidumbre en las observaciones y en el modelo se cuantifica mediante las matrices de covarianza  $\mathbf{C}_D$  y  $\mathbf{C}_G$  respectivamente. Los errores en las observaciones son relativamente sencillos de acotar, dada la experiencia acumulada en el uso de los diferentes equipos de medida. En la práctica, es



corriente considerar  $\mathbf{C}_D$  como una matriz diagonal, porque se considera que los errores en las observaciones son independientes los unos de los otros y que la magnitud de cada uno de ellos depende únicamente del aparato con el que se ha medido. Los errores de modelación o epistemológicos son más difíciles de determinar porque este tipo de errores dependen del problema que se esté estudiando. Por consiguiente, la casuística resulta prácticamente infinita. Por esa razón, la valoración de  $\mathbf{C}_G$  es más compleja y requiere ciertas dosis de juicio.

Los modelos empleados para simular el comportamiento de terreno llevan aparejados una gran carga numérica. Esto puede complicar la caracterización estadística de los parámetros *a posteriori*. En la presente Tesis se ha optado por reducir carga computacional sustituyendo el modelo original por uno subrogado. La desventaja de esta estrategia es que añadimos un cierto error al modelo caracterizado por la matriz de covarianza  $\mathbf{C}_T$ . Si efectuamos un cambio de variable de  $\mathbf{m}$  a  $\xi$  para facilitar el manejo de las expresiones, tal y como se ha realizado anteriormente, las soluciones al problema inverso recogidas en el apartado 4.3 se modifican de la manera que se muestra a continuación.

La expresión (4.16), errores insignificantes tanto en modelo como en observaciones (caso A), se convierte en:

$$\sigma_{\xi}(\xi) \propto \rho_{\xi}(\xi) \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{C}_T^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi)) \right] \quad (4.58)$$

La expresión (4.21), errores apreciables en las observaciones pero no en el modelo (caso B), se transforma en:

$$\sigma_{\xi}(\xi) \propto \rho_{\xi}(\xi) \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t [\mathbf{C}_D + \mathbf{C}_T]^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi)) \right] \quad (4.59)$$

La expresión (4.25), errores apreciables en el modelo pero no en las observaciones (caso C), se formula como:

$$\sigma_{\xi}(\xi) \propto \rho_{\xi}(\xi) \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^T [\mathbf{C}_G + \mathbf{C}_T]^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi)) \right] \quad (4.60)$$

La expresión (4.28), errores apreciables tanto en modelo como en observaciones (caso D), se expresa como:

$$\sigma_{\xi}(\xi) \propto \rho_{\xi}(\xi) \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^T [\mathbf{C}_D + \mathbf{C}_G + \mathbf{C}_T]^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi)) \right] \quad (4.61)$$

De manera general, se denomina  $\mathbf{C}$  a la suma de matrices de covarianza de los residuos:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_D + \mathbf{C}_G + \mathbf{C}_T, \quad (4.62)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  puede estar mal condicionada debido a la fuerte correlación que puede existir entre los diferentes residuos. Como un muro pantalla es un elemento constructivo relativamente rígido, las lecturas de desplazamiento cercanas no difieren mucho entre ellas y, por lo tanto, tampoco los residuos. Una manera de evitar problemas numéricos asociados a matrices con alto número de condición [146], es proceder a hacer una descomposición en componentes principales [98], tal y como se indica en la siguiente expresión:

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}_C \cdot \mathbf{D}_C \cdot \mathbf{V}_C^T \quad (4.63)$$

Esta diagonalización representa un cambio de sistema de referencia. En la Figura 4-8 se representa lo que significa pasar el vector de residuos a componentes principales.

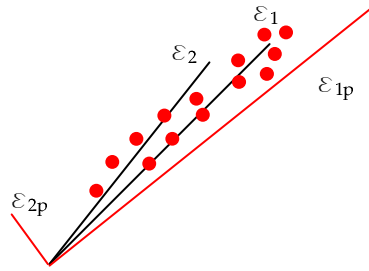


Figura 4-8 Ejes principales de los residuos

Al efectuar la descomposición en componentes principales, se puede prescindir de los autovalores menores, que apenas aportan información y aproximar la matriz  $\mathbf{C}$  a partir de los mayores autovalores. Con dicha operación, se reduce el mal condicionamiento de la matriz  $\mathbf{C}$ . Tomando únicamente los autovectores asociados a los autovalores mayores, podemos trabajar con una matriz  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{C}}$ , de manera que:

$$\mathbf{C} \approx \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{C}}^t \quad (4.64)$$

Por lo tanto las expresiones (4.58), (4.59), (4.60) y (4.61), se formularían como:

$$\sigma_{\xi}(\xi) \propto \rho_{\xi}(\xi) \exp \left[ -\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{C}} \right] \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{C}}^{-1} \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{C}} \right]^t \right] \quad (4.65)$$

En el caso que sólo haya errores de modelación, tanto  $\mathbf{C}_G$  como  $\mathbf{C}_T$ , la única fuente de aleatoriedad en el modelo son los  $N$  parámetros del mismo. Por consiguiente, en caso que la matriz de covarianza tenga una dimensión superior a  $N \times N$ , sólo los  $N$  (número de variables independientes) mayores autovalores tienen sentido físico. El resto de autovalores pueden ser considerados ruido numérico.

La solución que se obtiene con la ecuación (4.65) incorpora el error que se ha cometido al sustituir el modelo original por uno subrogado. Si el error de truncamiento resulta importante, el incremento en la varianza de la solución que supone emplear un modelo subrogado puede desvirtuarla. Para reducir el error que se comete al subrogar el modelo original, en esta Tesis se propone una estrategia de resolución iterativa inspirada en el trabajo de El Moselhy y Marzouk [127].

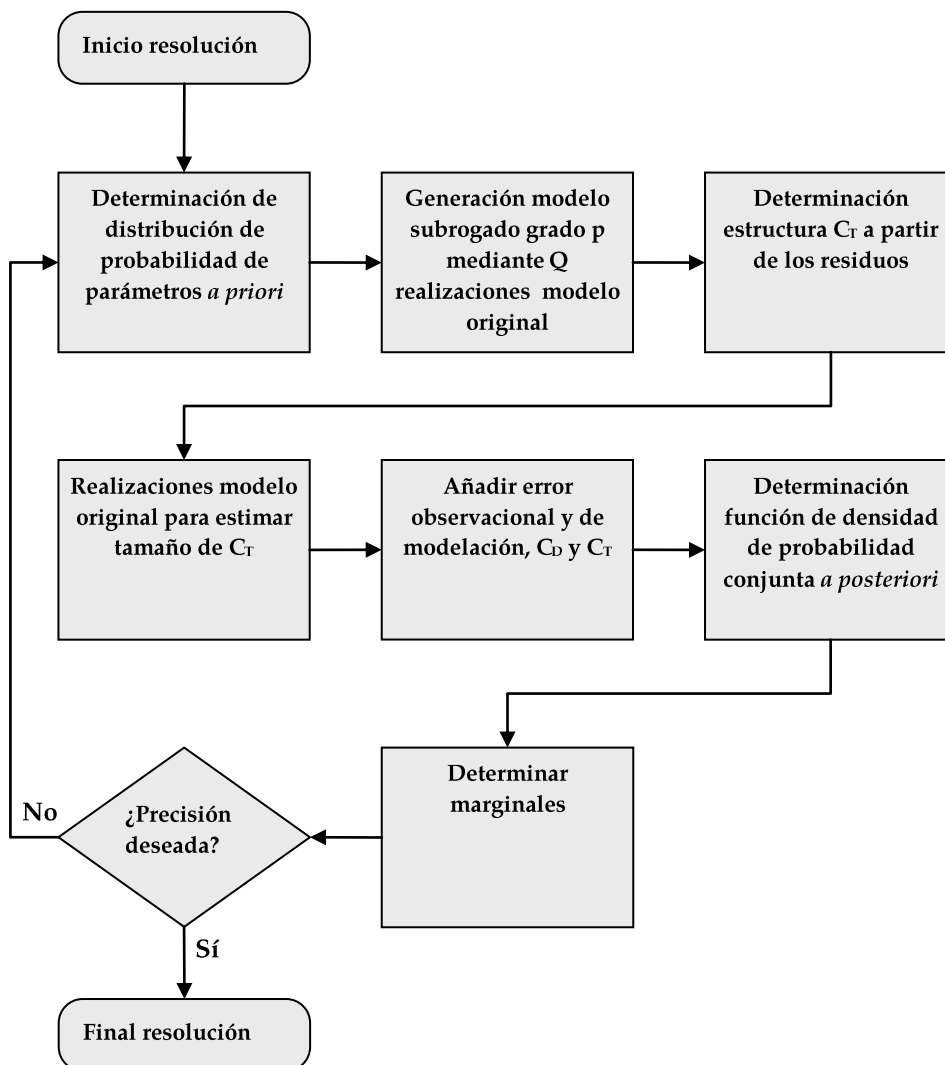


Figura 4-9 Proceso iterativo para la resolución del problema inverso.

En la Figura 4-9, se ilustra el procedimiento. En la primera iteración, con la información *a priori* inicial, se construye el modelo subrogado y la matriz de covarianza  $\mathbf{C}_T$  con la que se obtiene la distribución *a posteriori*, es decir la solución del problema. Cuando el error que representa  $\mathbf{C}_T$  es superior al que aporta  $\mathbf{C}_G$  y  $\mathbf{C}_D$ , se efectúa una segunda iteración, empleando como distribución *a priori* la distribución *a posteriori* de la primera iteración. El proceso se repite hasta que se estime que la subrogación del modelo no sea una fuente de error significativa.

## 4.7 DETERMINACIÓN DEL PUNTO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

El punto de máxima verosimilitud es el punto que maximiza cualquiera de las siguientes expresiones [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^* &:= \arg \max_{\mathbf{m}} \frac{\sigma_M(\mathbf{m})}{\mu_M(\mathbf{m})} \\ \xi^* &:= \arg \max_{\xi} \frac{\sigma_{\xi}(\xi)}{\mu_{\xi}(\xi)} \end{aligned} \tag{4.66}$$

Donde  $\sigma_M(\mathbf{m})$  y  $\sigma_{\xi}(\xi)$  son la solución al problema inverso (la distribución de probabilidad conjunta de los parámetros) expresados en función de los parámetros originales  $\mathbf{m}$  o normalizados  $\xi$ .  $\mu_M(\mathbf{m})$  y  $\mu_{\xi}(\xi)$  son las distribuciones de probabilidad homogénea. En la presente Tesis, se asume que la función homogénea es constante sobre el dominio de los parámetros, por lo que el punto de máxima verosimilitud se obtiene de maximizar la expresión (4.65) o, lo que es lo mismo:

$$\left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{V}_c \right] \mathbf{D}_c^{-1} \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{V}_c \right]^t \quad (4.67)$$

Escribiendo (4.67) en función de los residuos:

$$\left[ \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{V}_c \right] \mathbf{D}_c^{-1} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{V}_c \right]^t \quad (4.68)$$

La expresión (4.68) es una forma cuadrática definida positiva. Como es una función convexa, el mínimo absoluto se encuentra en  $\boldsymbol{\varepsilon}(\xi) = \mathbf{0}$ . En la presente Tesis, se está trabajando con distribuciones uniformes *a priori* de manera que:

$$-1 \leq \xi_i \leq 1 \quad (4.69)$$

Si los puntos  $\xi$  que hacen  $\boldsymbol{\varepsilon}(\xi) = \mathbf{0}$  no están en  $-1 \leq \xi_i \leq 1$ , entonces el mínimo se encuentra en la frontera:

$$\begin{aligned} \min f = & \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{V}_c \right] \mathbf{D}_c^{-1} \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{V}_c \right]^t \\ & -1 \leq \xi_i \leq 1 \end{aligned} \quad (4.70)$$

La frontera se puede aproximar con la siguiente expresión [147]:

$$g(\xi) = e^{w(\xi_1-1)} + e^{w(-\xi_1-1)} + \dots + e^{w(\xi_N-1)} + e^{w(-\xi_N-1)} = 1 \quad (4.71)$$

Donde  $w$  es un valor que controla la curvatura en las esquinas.

Por lo tanto, el problema de minimización se puede formular alternativamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min f = & \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{V}_c \right] \mathbf{D}_c^{-1} \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{V}_c \right]^t \\ & g(\xi) = e^{w(\xi_1-1)} + e^{w(-\xi_1-1)} + \dots + e^{w(\xi_N-1)} + e^{w(-\xi_N-1)} = 1 \end{aligned} \quad (4.72)$$

La función lagrangiana del problema de optimización será:

$$L(\xi, \lambda) = \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{V}_C \right] \mathbf{D}_C^{-1} \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \mathbf{V}_C \right]^t + \lambda \left( 1 - \left[ e^{w(\xi_1 - 1)} + e^{w(-\xi_1 - 1)} + \dots + e^{w(\xi_N - 1)} + e^{w(-\xi_N - 1)} \right] \right) \quad (4.73)$$

## 4.8 PARTICULARIZACIÓN A MODELO LINEAL

El vector de residuos se ha definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi) \quad (4.74)$$

En el caso que se considere un modelo subrogado lineal, se tiene que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi) &= \begin{bmatrix} d_{obs\ 1} \\ \vdots \\ d_{obs\ n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n0} & u_{n1} & \cdots & u_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} \\ &= [d_{obs\ 1} \quad \cdots \quad d_{obs\ n}]^t - \mathbf{M}_d [1 \quad \xi_1 \quad \cdots \quad \xi_N]^t \end{aligned} \quad (4.75)$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi) = \begin{bmatrix} d_{obs\ 1} - u_{10} & -u_{11} & \cdots & -u_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{obs\ n} - u_{n0} & -u_{n1} & \cdots & -u_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

Renombrando los términos de la matriz resulta:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & \cdots & b_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} = \mathbf{M}_\varepsilon \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix}^t \quad (4.77)$$

Si sustituimos la expresión (4.77) en el problema (4.70), éste queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min f &= \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{V}_C \mathbf{D}_C^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{V}_C \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix}^t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{V}_C \mathbf{D}_C^{-1} \mathbf{V}_C^t \mathbf{M}_\varepsilon^t \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix}^t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0N} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N0} & h_{N1} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix}^t \quad (4.78) \\ \min f &= \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix}^t \\ &-1 \leq \xi_i \leq 1 \end{aligned}$$

La matriz  $\mathbf{H}$  es una matriz simétrica por lo que el problema de minimización (4.78) es un programa cuadrático, porque se tiene que minimizar una función cuadrática convexa sobre un poliedro. A tal efecto, existen algoritmos de resolución muy eficientes [96].

## 4.9 CONCLUSIONES DEL CUARTO CAPÍTULO

El problema a resolver es la estimación de los parámetros de un modelo que simula una determinada excavación profunda a partir de las observaciones registradas durante la obra. En este capítulo, se muestra que la metodología bayesiana es la más adecuada para resolver este tipo de problemas inversos



porque es capaz de dar una solución coherente con el nivel de incertidumbre inicial. No es razonable pretender que la solución al problema inverso se reduzca a determinar un valor óptimo si las observaciones comportan error y el modelo es imperfecto. La solución al problema debe incluir el “desconocimiento” que se tiene en la precisión de las observaciones y en la bondad del modelo. Por esa razón, se debe caracterizar estadísticamente el error que se tiene del modelo y de las observaciones. Además, mediante una distribución de probabilidad se ha de expresar el conocimiento inicial que se tiene de los parámetros. El resultado del problema será una nueva distribución de probabilidad que reducirá la ignorancia inicial.

El método bayesiano considera la respuesta del modelo (observaciones) y los parámetros como variables aleatorias. El modelo directo u original se representa de manera espectral mediante una base de polinomios caóticos. Este tipo de representación presenta dos ventajas importantes: (i) el aligeramiento sustancial de la carga numérica y (ii) el poder desentrañar la estructura estadística de la respuesta. La representación mediante polinomios caóticos ha permitido obtener dos fórmulas analíticas originales (no se han encontrado referencias previas), la determinación de la matriz de covarianza y la influencia de cada variable en la respuesta subrogada. Estas fórmulas pueden servir para valorar la conveniencia de una reducción de modelo. Otra ventaja de trabajar con PCE es que los parámetros se han de normalizar según unas determinadas funciones de distribución. Esta operación adimensionaliza el modelo, mejorando su comportamiento durante el posterior proceso de optimización. El inconveniente que presenta esta técnica es que se ha de ceñir a problemas moderadamente no lineales. En el caso de las excavaciones profundas, “moderadamente no lineal” significa que se ha de estar alejado de la rotura, entendiendo rotura como la

inestabilidad numérica que se produce cuando el sistema de ecuaciones que se intenta resolver está mal condicionado. La metodología tal y como está planteada resulta adecuada para estimar parámetros en situaciones de servicio.

Para reducir carga numérica, se sustituye el modelo directo original por otro subrogado más ligero. El modelo subrogado no deja de ser una aproximación por lo que añade un cierto error al modelo original. En la presente Tesis, se ha desarrollado un método para acotar superiormente el error que se comete al subrogar el modelo sin incrementar mucho la carga numérica. Sin embargo, el proceso de subrogación puede suponer un esfuerzo numérico considerable si se intenta aproximar el modelo mediante polinomios de grado alto. Por esa razón, para reducir al mínimo el número de realizaciones necesarias, se emplean aproximaciones de orden bajo con mucho error de truncamiento. Evidentemente, la solución obtenida incorpora el error de truncamiento, por lo que tiene una varianza superior a la que debería. Por esa razón se adopta un esquema iterativo para encontrar la solución. Las distribuciones *a posteriori* de la una iteración son las distribuciones *a posteriori* de la siguiente. Es decir, se mejora el conocimiento de los parámetros y con las nuevas distribuciones se repite el proceso iterativamente hasta que el error de truncamiento es despreciable respecto los otros errores y no se observan mejoras sustanciales. Si se realiza una aproximación lineal, no solo el número de realizaciones para generar el modelo directo es mínimo sino que el problema de la obtención del punto de máxima verosimilitud se simplifica de forma significativa.

# Capítulo 5    CALIBRACIÓN ESTOCÁSTICA

En este capítulo, se resuelven tres problemas inversos de dificultad creciente para validar la metodología desarrollada en la presente Tesis. El primer problema es un problema sintético, un problema generado numéricamente que asegura que las observaciones están libres de error y que el modelo es capaz de reproducir el fenómeno perfectamente. El primer ejemplo es extremadamente simple, pero su sencillez permite clarificar las ideas desarrolladas en capítulos anteriores. En el segundo problema, también sintético, se incrementa la dificultad al aumentar el número de parámetros a determinar. El tercer problema es un caso real en el que, además, se estiman más parámetros que en los anteriores ejemplos.

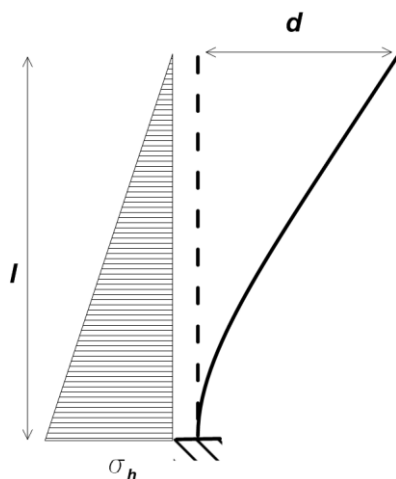
## 5.1 IDENTIFICACIÓN DE UN PARÁMETRO EN UN EJEMPLO SINTÉTICO

Con el fin de asentar las ideas desarrolladas en el capítulo anterior, en este apartado se plantea la resolución de un problema inverso que consiste en

identificar un parámetro a partir de una única observación. Emplear sólo una observación y un parámetro facilita la exposición porque se puede representar gráficamente la solución. En este primer ejemplo, las observaciones se generan mediante un modelo extremadamente simplificado de manera sintética para evitar errores de modelación y de observación.

### 5.1.1 Planteamiento del problema inverso

Se pretende identificar la rigidez del alzado de un muro de contención de cuatro metros de altura dado el desplazamiento horizontal en cabeza. La zapata del muro y el terreno de apoyo son lo suficientemente rígidos para asumir que existe un empotramiento perfecto entre la cimentación y el alzado. Por lo tanto, el alzado del muro se simula como una viga en voladizo sometida al empuje activo de las tierras (Figura 5-1).



**Figura 5-1 Modelo en voladizo del muro pantalla.**

La rigidez a flexión del muro que es el producto de la inercia y del módulo de elasticidad del hormigón,  $EI$  según la nomenclatura habitual, en adelante, se le denominará  $m$  para mantener la consistencia de la notación. El objetivo del

problema consiste en determinar la rigidez  $m$  teniendo en cuenta que:

- Inicialmente, se estima que la rigidez del muro  $m$  puede adoptar un valor entre  $8 \cdot 10^4$  y  $3.5 \cdot 10^5$  kN·m<sup>2</sup>;
- se ha medido un desplazamiento horizontal en cabeza  $d = 1.75$  mm. La medida se ha tomado con un aparato de alta precisión y a efectos de este problema se considera que está libre de error y
- se asume que el modelo para predecir el desplazamiento en cabeza es perfecto (es capaz de reproducir el fenómeno sin error). El modelo, tras particularizar con los datos recogidos en el Cuadro 5-1, viene dado por la siguiente expresión:

$$d = \frac{\sigma_h \cdot l^4}{30 \cdot EI} = \frac{\sigma_h \cdot l^4}{30 \cdot m} = \frac{227.55}{m} \quad (5.1)$$

**Cuadro 5-1 Propiedades determinar el desplazamiento en cabeza del muro**

Parámetro	
Altura ( $l$ )	4.0 m
Densidad del terreno ( $\gamma$ )	20 kN/m <sup>3</sup>
Ángulo de rozamiento ( $\phi'$ )	30°
Coeficiente de empuje activo ( $K_a$ )	0,333
Tensión horizontal máxima ( $\sigma_h$ )	26,7 kPa

Obviamente, este problema se puede resolver manualmente al despejar la rigidez de la ecuación (5.1) y obtener  $m = 1,3 \cdot 10^5$  kN·m<sup>2</sup>. Sin embargo, por su simplicidad, la resolución de este ejemplo ilustra convenientemente la metodología bayesiana presentada en el capítulo anterior. El problema inverso se solucionará de dos formas. En primer lugar, se solucionará el ejemplo directamente asumiendo que

se dispone de suficiente potencia numérica para abordar el proceso de optimización, como de hecho es. En segundo lugar, se resolverá el problema suponiendo que la potencia de cálculo es reducida y es necesario simplificar el modelo directo por otro subrogado más sencillo, con ello se podrá abordar con los recursos computacionales disponibles.

### 5.1.2 Resolución directa

Se estima que la rigidez de la pantalla varía entre  $8 \cdot 10^4$  y  $3,5 \cdot 10^5$  kN·m<sup>2</sup> y se asume que el modelo que predice el desplazamiento en cabeza es perfecto ya que es capaz de reproducir la observación sin error. Desde un punto de vista bayesiano, el objetivo es ver cómo mejora el conocimiento del parámetro del modelo a la luz de una observación, en este caso en particular libre de error. La resolución de este problema se muestra gráficamente en la Figura 5-2.

Desde un punto de vista estocástico, considerar que la rigidez se sitúa en un rango conocido significa que la distribución de probabilidad marginal de los parámetros inicial o *a priori*  $\rho_m(m)$ , es una función de densidad uniforme:

$$\rho_m(m) = \begin{cases} \frac{1}{3,5 \cdot 10^5 - 1,0 \cdot 10^5} & m \in [1,0 \cdot 10^5, 3,5 \cdot 10^5] \\ 0 & m \notin [1,0 \cdot 10^5, 3,5 \cdot 10^5] \end{cases} \quad (5.2)$$

Una observación sin error,  $d_{obs} = 2,75 \cdot 10^{-3} m$ , se caracteriza estadísticamente como una función de densidad  $\rho_d(d)$  tipo delta de Dirac que concentra toda su probabilidad en un punto:

$$\rho_d(d) = \delta(d - d_{obs}) = \delta(d - 2,75 \cdot 10^{-3}) \quad (5.3)$$

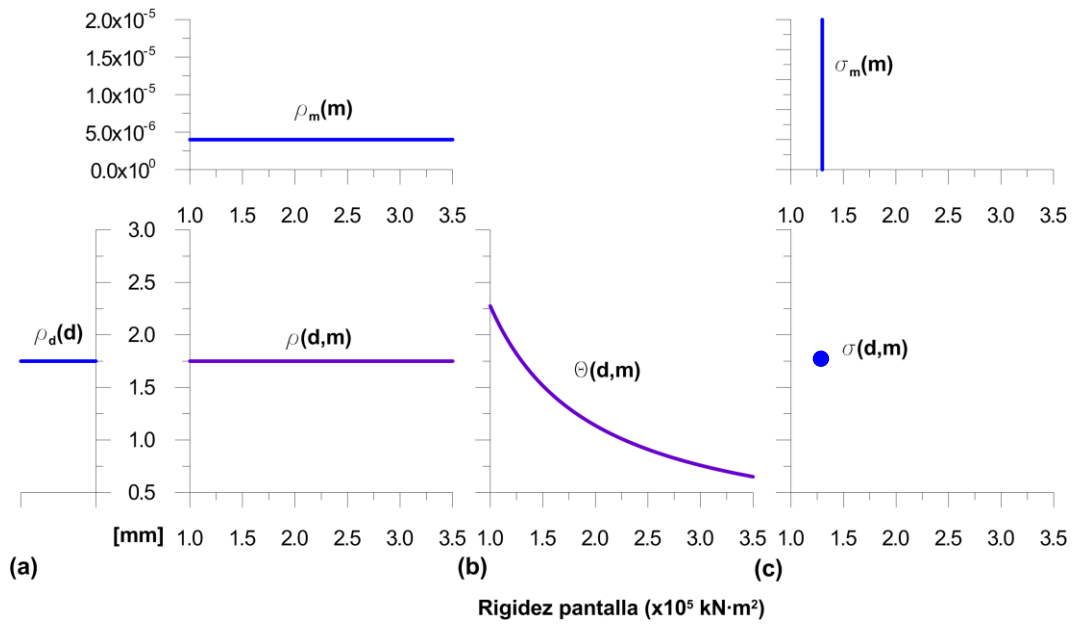


Figura 5-2 Resolución bayesiana del problema inverso sin incertidumbres ni en las observaciones, ni en el modelo, (a) distribución *a priori*, (b) distribución modelo, (c) distribución *a posteriori*.

Como se asume que la observación y el parámetro son independientes, la función de probabilidad conjunta  $\rho(d, m)$  es un segmento de recta que concentra toda la probabilidad de ocurrencia (Figura 5-2a):

$$\rho(d, m) = \begin{cases} \frac{1}{3.5 \cdot 10^5 - 1.0 \cdot 10^5} & m \in [1.0 \cdot 10^5, 3.5 \cdot 10^5] \text{ y } d = 2.75 \cdot 10^{-3} \\ 0 & m \notin [1.0 \cdot 10^5, 3.5 \cdot 10^5] \text{ o } d \neq 2.75 \cdot 10^{-3} \end{cases} \quad (5.4)$$

Como el modelo  $g(m)$  -recogido en la ecuación (5.1)- es perfecto, es decir, una vez definida la rigidez, se conoce sin ningún tipo de incertidumbre el desplazamiento, la distribución  $\Theta(d, m)$  concentra toda la probabilidad en la curva que relaciona rigidez con desplazamiento (Figura 5-2b), de acuerdo con lo expuesto en el apartado 4.3.2, la probabilidad condicional vendrá dada por:

$$\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \delta(d - g(m)) \quad (5.5)$$

Combinando toda esa información, la función de distribución de probabilidad a posteriori  $\sigma(d, m)$  se reduce a un punto que acumula toda posibilidad de ocurrencia (Figura 5-2c). Por lo tanto, la función de distribución marginal del parámetro a posteriori es una delta de Dirac que concentra toda la probabilidad en  $m = 1,3 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ :

$$\sigma_m(m) = \delta(m - 1.3 \cdot 10^5) \quad (5.6)$$

No es difícil darse cuenta que este ejemplo se corresponde con un problema de optimización clásica en el que se desea minimizar la siguiente función objetivo:

$$f_{obj}(m) = (d_{obs} - g(m))^2 = \left( 2.75 \cdot 10^{-3} - \frac{227.55}{m} \right)^2 \quad (5.7)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$1.0 \cdot 10^5 \leq m \leq 3.5 \cdot 10^5 \quad (5.8)$$

### 5.1.3 Resolución mediante modelo subrogado

Cuando el problema presenta una mayor dimensión y el modelo directo original es más complejo, resolver el problema anterior como un caso de optimización clásico puede llegar a requerir una gran potencia de cálculo. Para subsanar el problema, se plantea sustituir el modelo directo original por un modelo subrogado más sencillo que requiere un menor coste computacional en su evaluación. El inconveniente que presenta esta estrategia es que el modelo subrogado incorpora un error fruto de la simplificación. Por lo tanto, con la



metodología desarrollada en esta Tesis no es posible obtener la solución de manera directa, sino que se ha de iterar hasta converger en la solución buscada.

En el caso que se está estudiando, las distribuciones de probabilidad del parámetro y de la observación, tanto marginales como conjunta (representadas en la Figura 5-3a), son las mismas que en el anterior apartado (ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4)).

El desplazamiento en cabeza  $d$  se considera como una variable aleatoria que depende del parámetro aleatorio  $m$  por medio del modelo directo  $g(m)$  - ecuación (5.1)-. Para facilitar el manejo de las expresiones, la variable  $m$  se normaliza de  $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$  a  $\xi \in [-1, 1]$  según la siguiente transformación:

$$\xi = -1 + 2 \frac{m - m_{\min}}{m_{\max} - m_{\min}} \quad (5.9)$$

Por lo tanto, aplicando la ecuación (3.3), el modelo directo  $g(m)$  se puede expresar como una suma de polinomios caóticos unidimensionales,  $s(\xi)$ . Como se muestra en el apartado 3.3.2, el tipo de polinomios utilizados en la expansión depende del tipo de función de distribución empleada para caracterizar  $\xi$ . En este caso, como se están caracterizando estadísticamente el parámetro mediante una distribución uniforme, la expansión que es la base del modelo subrogado se construirá con polinomios de Legendre, tal y como muestra el Cuadro 3-1.

Para poder abordar numéricamente el problema, la expansión infinita  $s(\xi)$  se trunca a  $\tilde{s}(\xi)$ . Para aligerar al máximo la carga computacional, se adopta un modelo lineal:

$$s(\xi) \approx \tilde{s}(\xi) = u_0 + u_1 \xi \quad (5.10)$$

En este caso, el único error de modelación proviene del truncamiento de la expansión  $s(\xi)$ . Este error está representado por la matriz de covarianza  $\mathbf{C}_T$  tal y como indica la ecuación (4.58). Además, cómo sólo hay una variable la matriz de covarianza  $\mathbf{C}_T$  se convierte en la  $\text{var}(\varepsilon_i)$  y como se asume que los residuos que se producen al generar el modelo subrogado son gaussianos, la expresión (4.24) se transforma en:

$$\theta(d|\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \text{var}(\varepsilon_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(d - \tilde{s}(\xi))^2}{\text{var}(\varepsilon_i)}\right) \quad (5.11)$$

Por consiguiente, la distribución de probabilidad conjunta del modelo que relaciona  $d$  con  $\xi$  (Figura 5-3b) es:

$$\Theta(d, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \text{var}(\varepsilon_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(d - \tilde{s}(\xi))^2}{\text{var}(\varepsilon_i)}\right) & \xi \in [-1, 1] \\ 0 & \xi \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (5.12)$$

Por lo que expresando el modelo subrogado  $\tilde{s}(\xi)$  en términos de  $m$ :

$$\tilde{g}(m) = u_0 + u_1 \left( -1 + 2 \frac{m - m_{\min}}{m_{\max} - m_{\min}} \right), \quad (5.13)$$

La solución al problema es:

$$\sigma_m(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \text{var}(\varepsilon_i)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(d_{obs} - \tilde{g}(m))^2}{\text{var}(\varepsilon_i)}} & m \in [10^5, 3.5 \cdot 10^5] \\ 0 & m \notin [10^5, 3.5 \cdot 10^5] \end{cases} \quad (5.14)$$

Tal y como se muestra en la Figura 5-3c, se obtiene una campana de Gauss truncada. Si se elimina la cola y se toma el intervalo que concentra el 95% de probabilidad de ocurrencia, el intervalo donde se encuentra la solución pasa de  $[10^5, 3.5 \cdot 10^5]$  a  $[10^5, 1.82 \cdot 10^5]$ . Con esta aproximación, se ha mejorado sustancialmente el conocimiento inicial pero aún se está alejado de la solución.

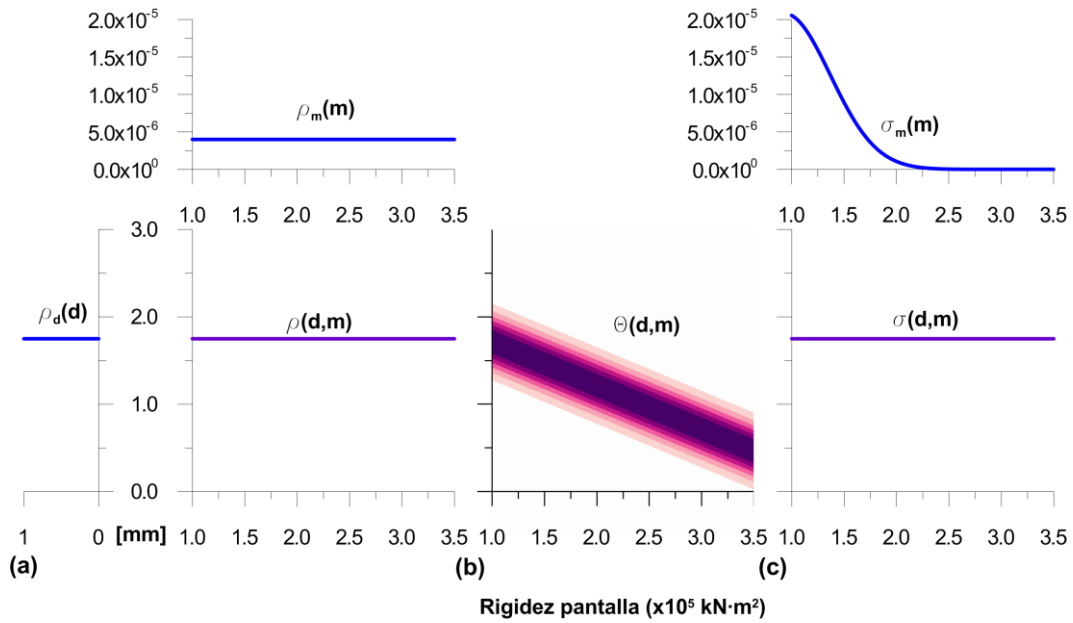


Figura 5-3 Primera iteración, (a) distribución *a priori*, (b) distribución modelo, (c) distribución *a posteriori*.

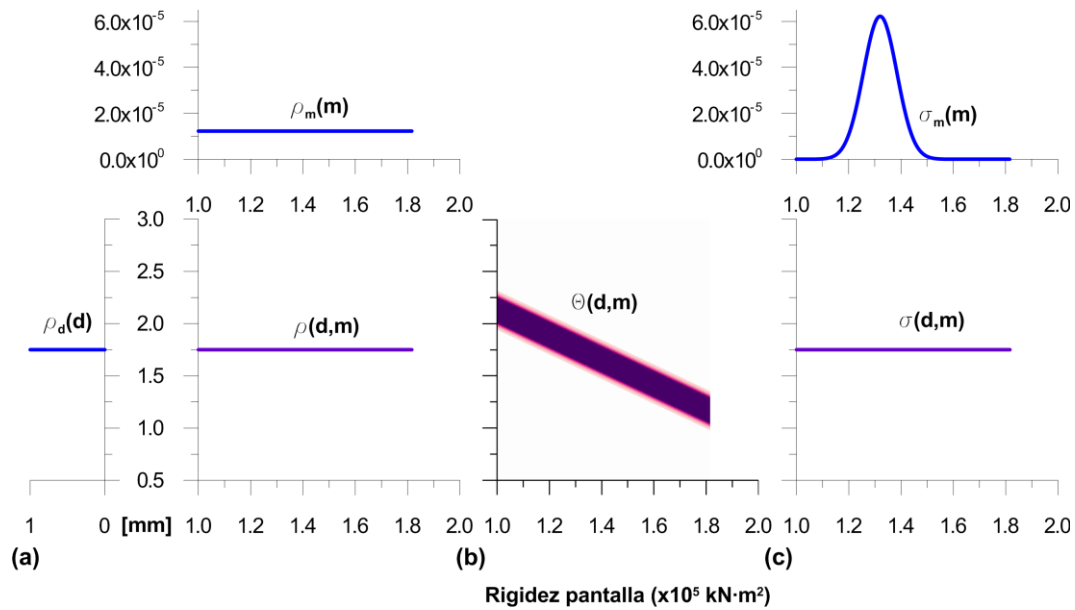


Figura 5-4 Segunda iteración, (a) distribución *a priori*, (b) distribución modelo, (c) distribución *a posteriori*.

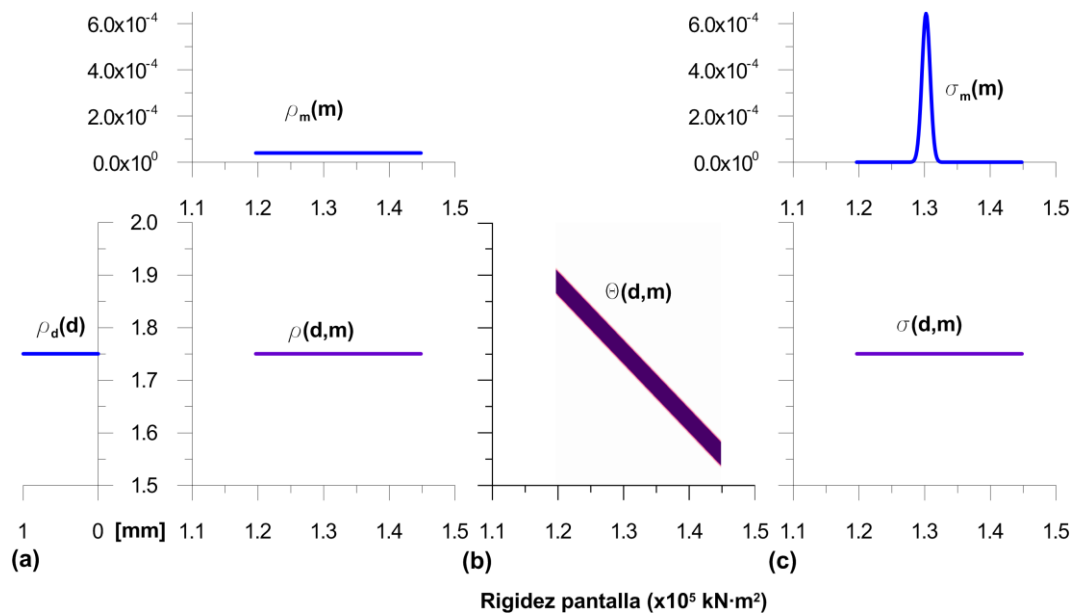


Figura 5-5 Tercera iteración, (a) distribución *a priori*, (b) distribución modelo, (c) distribución *a posteriori*.

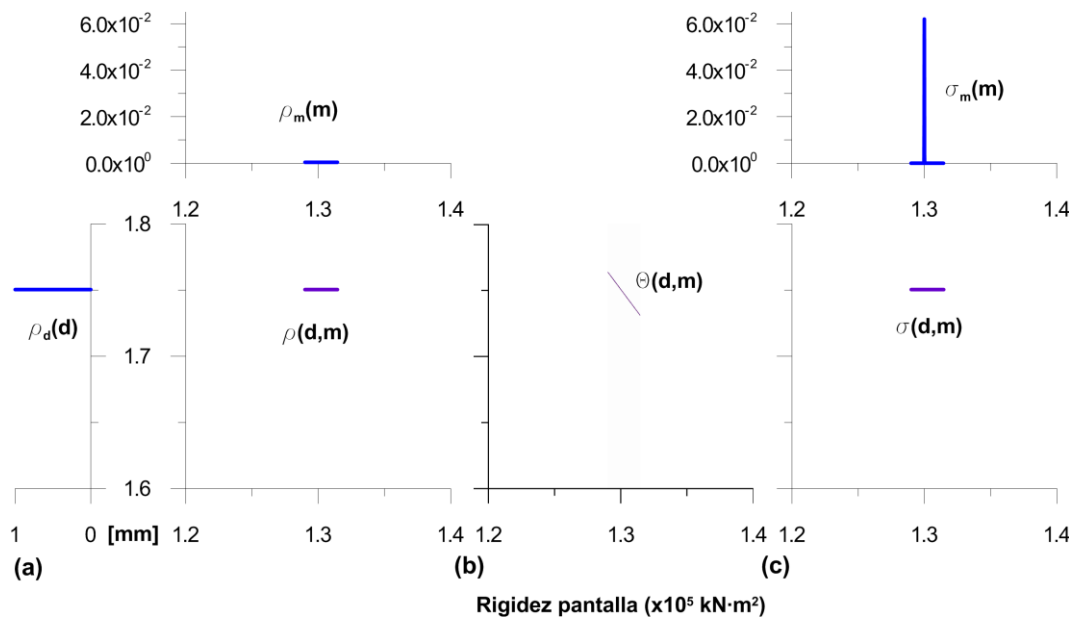


Figura 5-6 Cuarta iteración, (a) distribución *a priori*, (b) distribución modelo, (c) distribución *a posteriori*.

Si se repite todo el proceso anterior con el nuevo intervalo, tal y como se muestra en la Figura 5-4, se mejora la aproximación. La Figura 5-5 y la Figura 5-6 representan la tercera y la cuarta iteración respectivamente. En el Cuadro 5-2 se muestran los resultados de cada iteración. En la cuarta iteración, las campanas gaussianas truncadas han convergido a una delta de Dirac que es el resultado del problema inverso  $m = 1,3 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ .

Cuadro 5-2 Intervalos de confianza del 95% tras cada iteración junto con el error de truncamiento y el punto de máxima verosimilitud (PMV).

Iteración	Intervalo 95% ( $\text{kN} \cdot \text{m}^2$ )	$\text{var}(\varepsilon_t)$	PMV ( $\text{kN} \cdot \text{m}^2$ )
Inicial	$10^5 - 3.5 \cdot 10^5$	-	-
1 <sup>a</sup>	$10^5 - 1.82 \cdot 10^5$	$4.85 \cdot 10^{-8}$	$10^5$
2 <sup>a</sup>	$1.20 \cdot 10^5 - 1.45 \cdot 10^5$	$5.72 \cdot 10^{-9}$	$1.32 \cdot 10^5$
3 <sup>a</sup>	$1.29 \cdot 10^5 - 1.31 \cdot 10^5$	$6.56 \cdot 10^{-11}$	$1.30 \cdot 10^5$
4 <sup>a</sup>	$1.30 \cdot 10^5 - 1.30 \cdot 10^5$	$6.38 \cdot 10^{-15}$	$1.30 \cdot 10^5$

Desde un punto de vista gráfico, el método consiste en sustituir la curva que se obtiene del modelo directo por una recta que proporciona el modelo subrogado. Como el intervalo en que se está buscando la solución es muy amplio, la aproximación que proporciona el modelo subrogado no es satisfactoria. Ahora bien, aplicando la metodología bayesiana, se acota la parte del intervalo en la que la probabilidad que se encuentre la solución es mayor. Con el nuevo intervalo reducido, se vuelve a construir el modelo subrogado. Esta vez al ser el rango menor, la aproximación es mejor. Repitiendo el proceso varias veces, finalmente el rango es tan pequeño que la recta del modelo subrogado se confunde con la tangente de la curva del modelo directo en la solución. Por ello, el modelo directo y el subrogado son indistinguibles en el intervalo considerado y se puede obtener la solución exacta de este problema. La Figura 5-7 ilustra gráficamente la explicación.

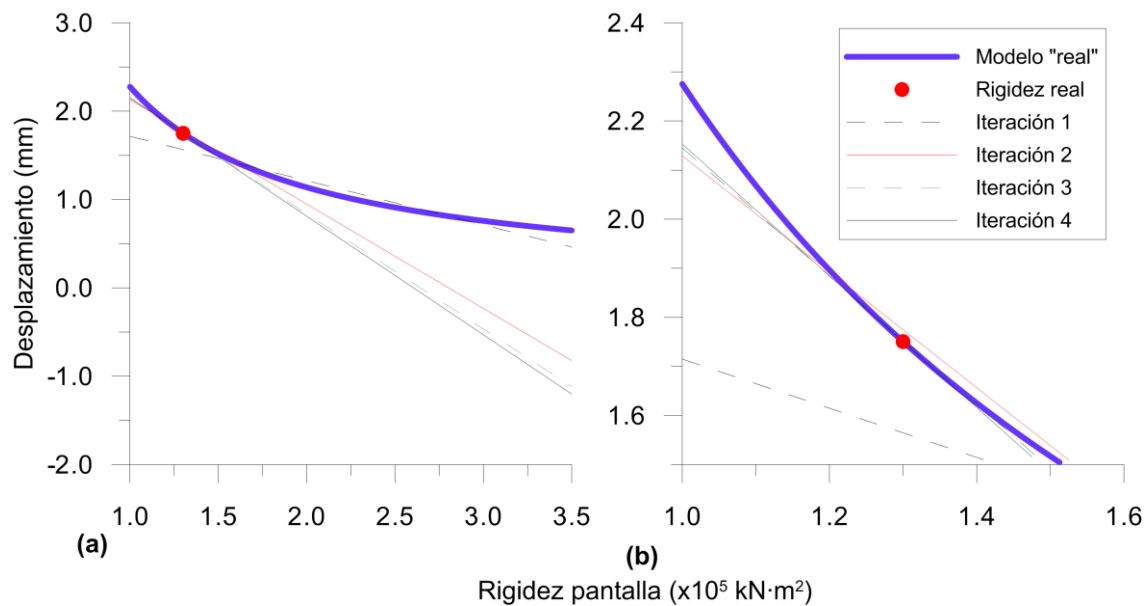


Figura 5-7 Explicación gráfica del proceso de resolución por iteraciones sucesivas, sobre el rango inicial (a) y sobre un rango reducido (b).

A medida que el modelo subrogado se asemeja cada vez más al original, el error en los residuos se reduce en cada iteración, tal y como se muestra en la Figura 5-8. En dicha figura, se representa el error estimado mediante la metodología presentada en el anterior capítulo como el real. Como el modelo directo original es extremadamente sencillo, se ha podido calcular fácilmente el error real. Se observa que la estimación de la varianza resulta razonablemente buena y que la acota superiormente. El hecho que el método de estimación de la varianza proporcione una cota superior puede reducir la velocidad de convergencia, pero por otro lado dificulta que se descarten soluciones al disponer de una varianza holgada.

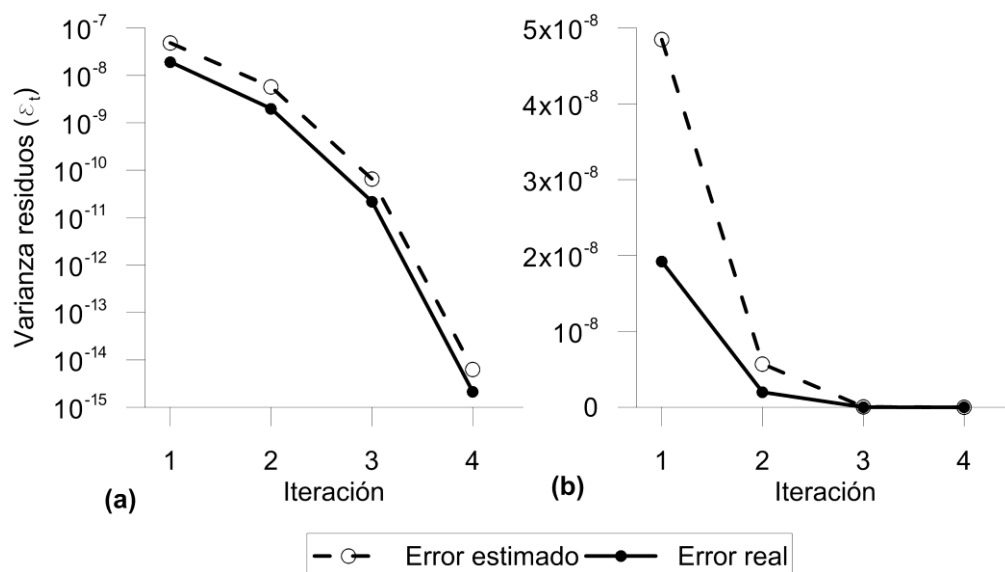


Figura 5-8 Evolución de  $\text{var } \varepsilon_i$  con las iteraciones, (a) escala logarítmica, (b) escala natural

Para generar el modelo subrogado,  $\tilde{s}(\xi)$ , ha sido necesario ejecutar el modelo directo tres veces. Para acotar el error en el que se incurre cuando se sustituye el modelo directo original, es decir, para aproximar la varianza de los residuos, se

ha tenido que correr el modelo directo siete veces. Como han sido necesarias cuatro iteraciones, el modelo directo se ha tenido que evaluar 40 ( $4 \times 3 + 4 \times 7$ ) veces para alcanzar la solución del problema planteado.

## 5.2 IDENTIFICACIÓN DE CINCO PARÁMETROS EN UN EJEMPLO SINTÉTICO

### 5.2.1 Modelo sintético

El objetivo de este caso es identificar cinco parámetros del terreno. Se realiza a partir de las observaciones sintéticas que se generan con un modelo que representa un muro pantalla en voladizo que sirve de contención de una excavación de 4,0 m. La pantalla alcanza 12,0 m de profundidad y tiene 0,60 m de espesor. El problema se resuelve mediante el método de los elementos finitos. A tal fin, se utiliza el programa ABAQUS CAE 6.11-1. Para reducir el esfuerzo de cálculo, el suelo se ha simulado mediante elementos cuadrilaterales de cuatro nodos de deformación plana con funciones de interpolación lineales. En el muro, para captar bien el comportamiento a flexión del mismo, se ha optado por emplear elementos cuadrilaterales de ocho nodos con funciones de interpolación cuadráticas. En la Figura 5-9 se muestra la malla de elementos finitos empleada en este ejemplo.

El terreno es un potente depósito de arenas medias que se modelan como un medio isótropo elástico-plástico perfecto con criterio de plastificación de Mohr-Coulomb. El muro de hormigón constituye un material isótropo perfectamente elástico. La situación de los dos materiales se muestra en la Figura 5-9. La caracterización de los materiales se recoge en el Cuadro 5-3. No se considera



nivel freático.

Cuadro 5-3 Parámetros con los que se generan las observaciones

Material		$E$ (kPa)	$\nu$	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	$\varphi'$ (°)	$c'$ (kPa)	$K_0$	$\mu$
Arenas	1	20000	0.30	18	32	0	0.47	0.35
Hormigón	2	$1.8 \cdot 10^7$	0.20	25	-	-	-	-

$E$ , módulo de Young,  $\nu$ , coeficiente de Poisson,  $\gamma$  densidad,  $\varphi'$  ángulo de rozamiento,  $c'$  cohesión  $K_0$ , coeficiente de empuje al reposo  $\mu$  coeficiente rozamiento pantalla-terreno

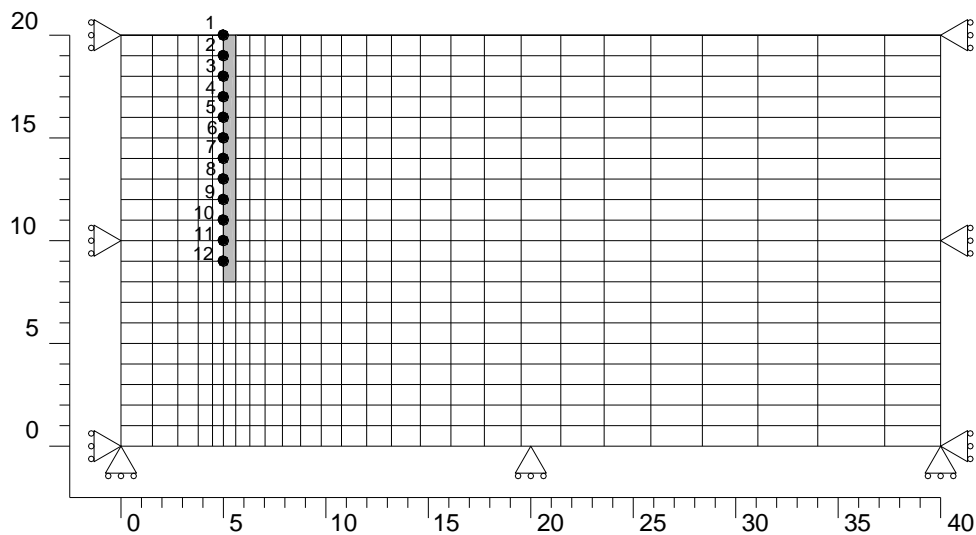


Figura 5-9 Malla de elementos finitos empleada y puntos en los que se toman medidas de desplazamiento. Sin colorear las arenas y en gris el muro.

Los cálculos se realizan en dos etapas: (i) generación de tensiones iniciales; y (ii) excavación. Las tensiones iniciales se generan imponiendo un coeficiente de empuje al reposo  $K_0$ , Figura 5-10a. La excavación se simula, eliminando los elementos que se indican en la Figura 5-10b. Se ha establecido una interacción en la que la fricción entre la pantalla y el terreno se ha simulado mediante una formulación tipo *penalty* que se requiere un coeficiente de rozamiento  $\mu$ . Debido

a la simetría del problema, sólo se modela mediante elementos finitos la mitad de la estructura. En puridad, no hay simetría cuando se representa el material mediante campos aleatorios [121]. No obstante, en este caso no se tiene un campo aleatorio sino materiales homogéneos cuyas propiedades dependen de variables aleatorias. Por lo tanto, esta simplificación resulta es aceptable.

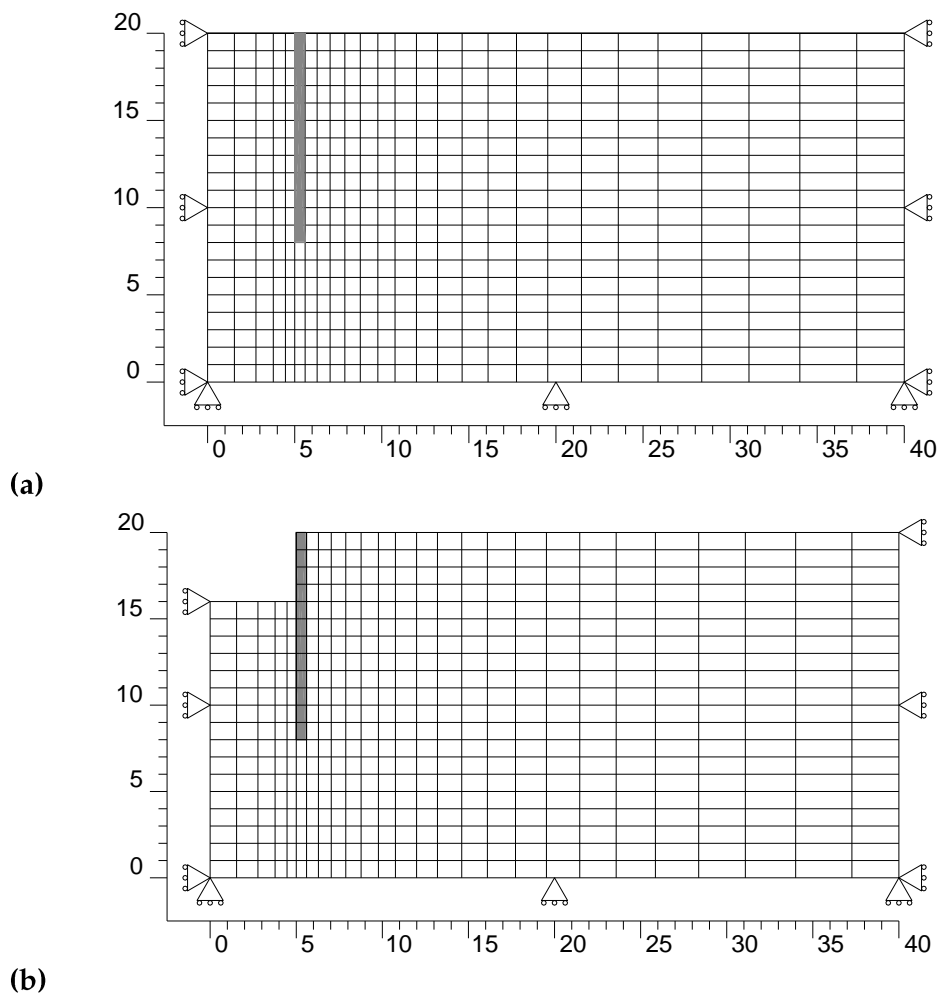


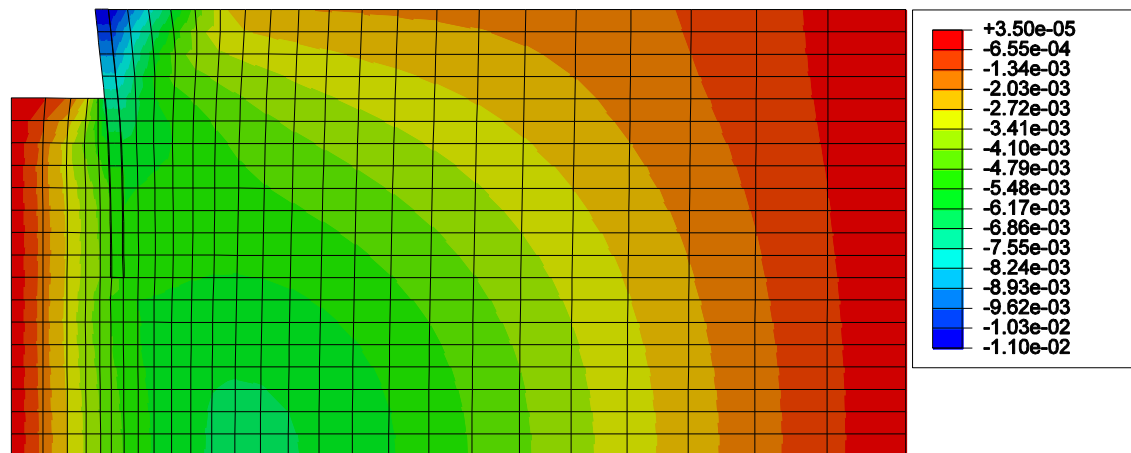
Figura 5-10 Etapas de construcción, (a) imposición de tensiones iniciales, (b) excavación.

La Figura 5-9 muestra la situación de los doce nodos empleados como puntos de medida. En el Cuadro 5-4, se listan los  $n=12$  desplazamientos nodales horizontales obtenidos a partir de los parámetros del terreno y del muro

recogidos en el Cuadro 5-3. Estos movimientos del muro se emplean como observaciones ( $\mathbf{d}_{obs}$ ) en el proceso de calibración. En un caso real, podrían representar las lecturas obtenidas mediante una sonda inclinométrica tras la excavación. Los movimientos de todo el terreno se representan en la Figura 5-11.

**Cuadro 5-4 Movimientos horizontales empleados como observaciones  $\mathbf{d}_{obs}$  calculados a partir de los parámetros recogidos en el Cuadro 5-3.**

Punto	Desplazamiento (mm)	Punto	Desplazamiento (mm)
1	-10.9	7	-5.9
2	-10.0	8	-5.5
3	-9.0	9	-5.2
4	-8.1	10	-5.1
5	-7.2	11	-5.0
6	-6.4	12	-4.9



**Figura 5-11 Desplazamientos horizontales del terreno muro y del muro (en metros) tras la excavación.**

### 5.2.2 Planteamiento del problema inverso

Se pretende identificar cinco de los parámetros a partir de  $n = 12$  observaciones libres de error  $\mathbf{d}_{obs}$  y sabiendo que se dispone de un modelo perfecto. La estimación se efectúa en un marco de inferencia bayesiana en el que la distribución de probabilidad de los parámetros *a priori* se actualiza a partir de las observaciones realizadas. Los  $N = 5$  parámetros a determinar son los módulos de elasticidad de las arenas y del hormigón ( $E_s$  y  $E_c$  respectivamente), el ángulo de rozamiento del terreno ( $\varphi'$ ), el coeficiente de empuje al reposo ( $K_0$ ) y el coeficiente de fricción entre el terreno y el muro ( $\mu$ ). Por consistencia con la notación empleada en este trabajo, el conjunto de parámetros a identificar se denomina  $\mathbf{m}$ .

Cuando los datos son escasos, es práctica habitual en geotecnia definir en qué rango se pueden mover los diferentes parámetros. Para este ejemplo en particular, se emplearán los rangos indicados en el Cuadro 5-5. Los rangos que se han adoptado provienen de la literatura geotécnica [148, 149]. Son intervalos muy amplios y seguramente en un caso real quedarían algo más acotados.

**Cuadro 5-5 Rango típico de los parámetros buscados**

Parámetro	Rango
Módulo de elasticidad del hormigón ( $E_c$ )	$1.5 \cdot 10^7 - 3.5 \cdot 10^7$ kPa
Módulo de elasticidad de las arenas ( $E_s$ )	8000 – 30000 kPa <sup>(*)</sup>
Ángulo de rozamiento ( $\varphi$ )	30-40° <sup>(*)</sup>
Coeficiente de empuje al reposo ( $K_0$ )	0.35 – 1.00 <sup>(*)</sup>
Coeficiente de fricción muro-terreno ( $\mu$ )	0.20- 0.40 <sup>(**)</sup>
Fuente (*) [148] (**) [149]	

Definir los parámetros en rangos significa estadísticamente considerar la

siguiente distribución uniforme de probabilidad conjunta *a priori*,

$$\rho_M(\mathbf{m}) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot 10^7 \cdot 22000 \cdot 10 \cdot 0.65 \cdot 0.2} & \begin{aligned} &E_c \in [1.5 \cdot 10^7, 3.5 \cdot 10^7], \\ &E_s \in [8000, 30000], \\ &\varphi \in [30, 40], \\ &K_0 \in [0.35, 1] \leq 1.0, \\ &\mu \in [0.2, 0.4] \end{aligned} \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \quad (5.15)$$

Cuando el soporte de los parámetros  $m_i$ , se normaliza a  $\xi_i \in [-1, 1]$  aplicando la transformación (5.9), la distribución *a priori* queda como:

$$\rho_\xi(\xi) = \begin{cases} 1/2^5 & \xi_i \in [-1, 1] \\ 0 & \xi_i \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (5.16)$$

Al caracterizar los parámetros mediante una distribución uniforme, el modelo subrogado de respuesta se construye sobre una base de polinomios de Legendre (Cuadro 3-1). Como el error observacional es nulo por haber sido generado sintéticamente a partir del modelo, la distribución de probabilidad conjunta *a priori* viene dada por:

$$\rho(\xi, \mathbf{d}) = \begin{cases} 1/2^5 & \xi_i \in [-1, 1] \text{ y } \mathbf{d} = \mathbf{d}_{obs} \\ 0 & \xi_i \notin [-1, 1] \text{ o } \mathbf{d} \neq \mathbf{d}_{obs} \end{cases} \quad (5.17)$$

### 5.2.3 Resolución del problema inverso

Como las observaciones están libres de error y el modelo constitutivo predice perfectamente los movimientos de la pantalla, tal y como se muestra en el apartado 4.3.2, existe un conjunto de parámetros único que reproduce la respuesta. Por consiguiente, este problema podría abordarse como un problema de optimización clásica. Sin embargo, la dimensión del espacio de búsqueda (en este caso cinco parámetros), junto con el tiempo de evaluación del modelo directo original (aproximadamente 30'' por realización), dificulta la obtención del conjunto de parámetros que dan la solución óptima mediante las técnicas habituales de optimización. Para aliviar la carga numérica, se procede a sustituir el modelo directo original por una serie de modelos subrogados que paulatinamente converjan a la solución del problema.

Aproximar el modelo directo  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$  por una secuencia de polinomios de grado bajo ha mostrado ser más efectivo que intentar emplear un único polinomio de alto grado [127]. En este caso, se ha empleado una aproximación lineal ( $p = 1$ ). Como, el modelo subrogado proviene del truncamiento de la expansión de polinomios caóticos que representa la variable aleatoria, se introduce un error en el modelo. Es decir, se pasa de un modelo que representa perfectamente el comportamiento de la excavación a otro que no. Por lo tanto, una vez se determina el error que produce el truncamiento  $\mathbf{C}_T$  en cada iteración y particularizando a este caso la ecuación (4.58), la distribución de parámetros *a posteriori* viene dada por:

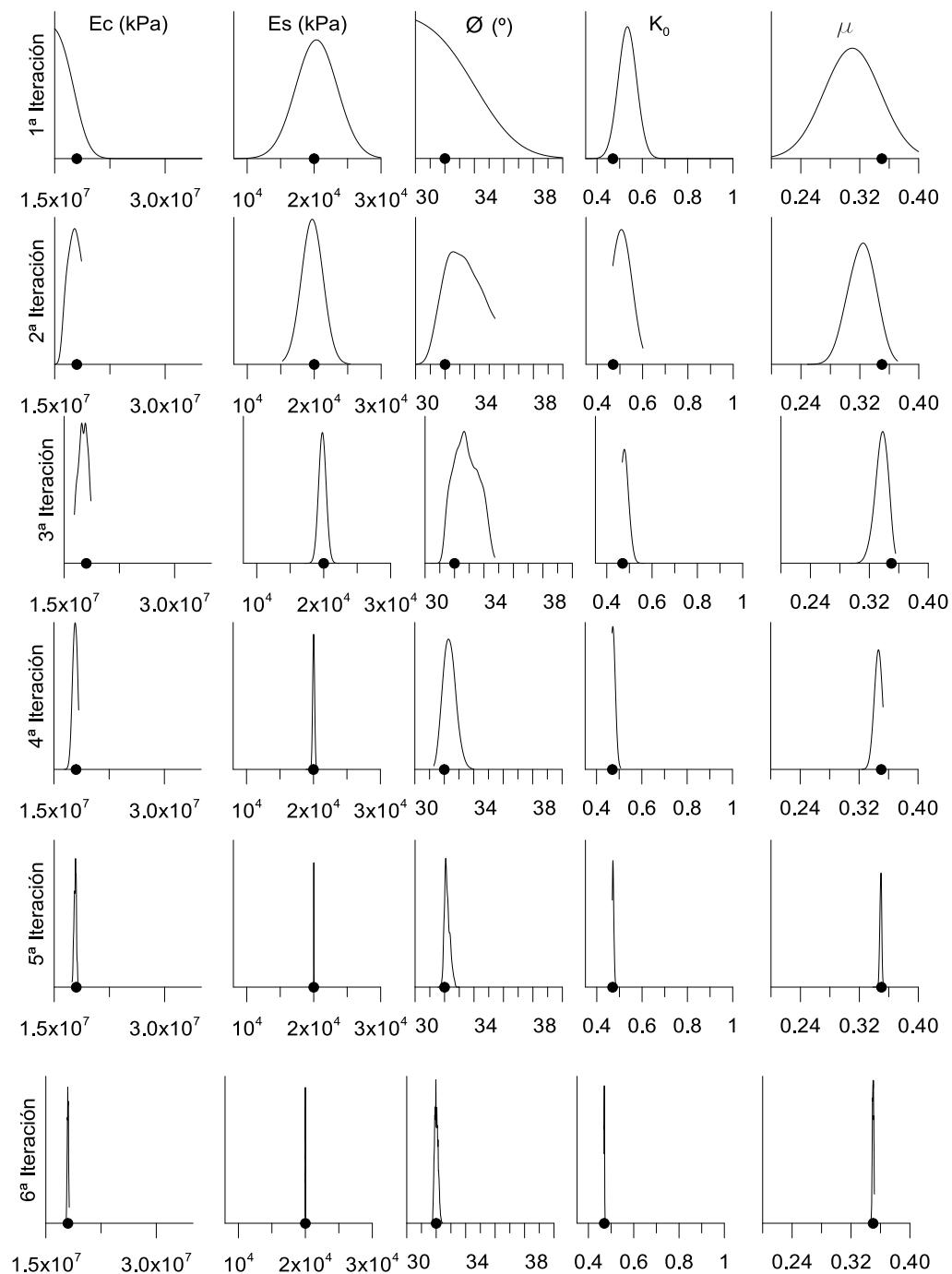
$$\sigma_{\xi}(\xi) = \begin{cases} k_2 \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi)]^t \mathbf{C}_T^{-1} [\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi)]\right) & \xi_i \in [-1, 1] \\ 0 & \xi_i \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (5.18)$$

En este caso,  $\mathbf{C}_T$  es una matriz mal condicionada, porque existen fuertes correlaciones entre los movimientos de la pantalla. La única fuente de incertidumbre que tiene el modelo son precisamente los cinco parámetros del modelo considerados aleatorios. Por esa razón, sólo los cinco mayores autovalores tienen sentido físico y el resto se consideran ruido numérico. Tras una descomposición de componentes principales de la matriz de covarianza  $\mathbf{C}_T$ , la ecuación (5.18) se transforma en:

$$\sigma_{\xi}(\xi) \propto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \tilde{\mathbf{V}}\right] \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \left[(\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \tilde{\mathbf{V}}\right]^t\right) & \xi_i \in [-1,1] \\ 0 & \xi_i \notin [-1,1] \end{cases} \quad (5.19)$$

La expresión (5.19) es la distribución conjunta de los parámetros. La integración de (5.19) para obtener las marginales no es trivial porque la dimensión del espacio es grande y la probabilidad se concentra en una región pequeña del espacio de parámetros (*vid* apartado 4.3.6). Debido a la forma de campana de Gauss de  $\sigma_{\xi}(\xi)$ , en este ejemplo, la integración mediante métodos de malla dispersa [144] no resultó muy satisfactoria.

Tras la determinación de las marginales de los parámetros, a partir de la integración de la expresión (5.19), de la distribución de parámetros a priori inicial, ecuación (5.15), se pasa a las distribuciones que se representan en la primera fila de la Figura 5-12. Al aproximar el modelo original por un hiperplano no da la solución óptima, sino que se pasa de una distribución uniforme a una distribución de campana de Gauss truncada. No se ha obtenido la solución, pero sí que se acota las zonas en la que es más probable obtener la solución. De esa manera, para cada parámetro se determinan los intervalos en los que existe una probabilidad del 95% de hallar la solución, se repite el proceso.



**Figura 5-12 Evolución de las funciones de distribución de probabilidad marginal de los parámetros tras seis iteraciones (el punto indica en cada gráfico el parámetro “real”).**

En la Figura 5-12, se representa cómo evolucionan las distribuciones de

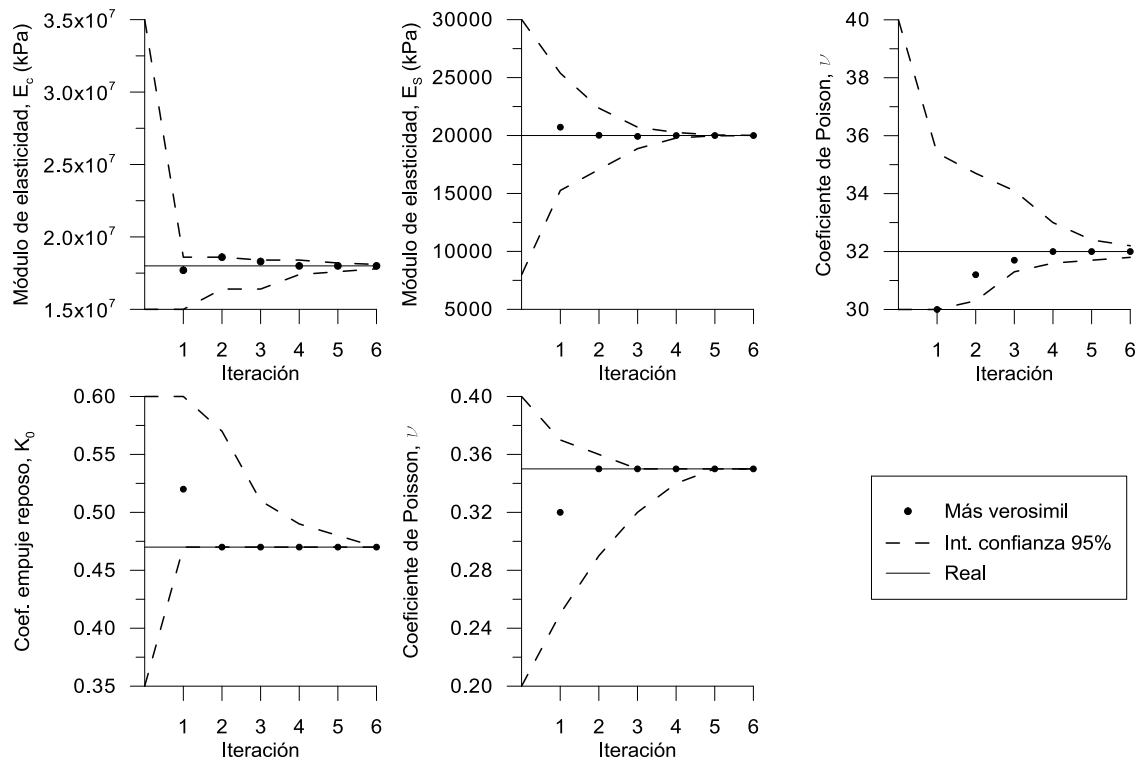


probabilidad tras cada iteración. Tras una rápida progresión, en seis iteraciones, todas las distribuciones prácticamente han convergido a una delta de Dirac.

El punto de máxima verosimilitud, se calcula minimizando el exponente de la ecuación (5.19):

$$\left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \tilde{\mathbf{V}} \right] \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \left[ (\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi))^t \tilde{\mathbf{V}} \right]^t \quad (5.20)$$

La expresión (5.20), que tal y como se indica en el apartado 4.8, se trata de un programa cuadrático para el cual existen algoritmos de solución muy eficientes.



**Figura 5-13 Puntos de máxima verosimilitud junto con intervalos de confianza del 95% de los parámetros por iteración**

La Figura 5-13 muestra los puntos de máxima verosimilitud, tras cada iteración

junto con los rangos en los que es más probable que se encuentre la solución “real”.

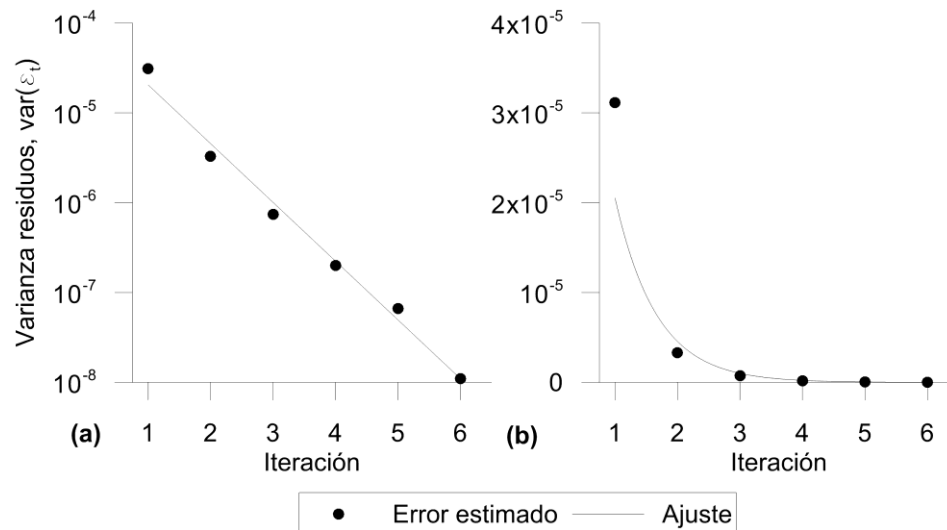
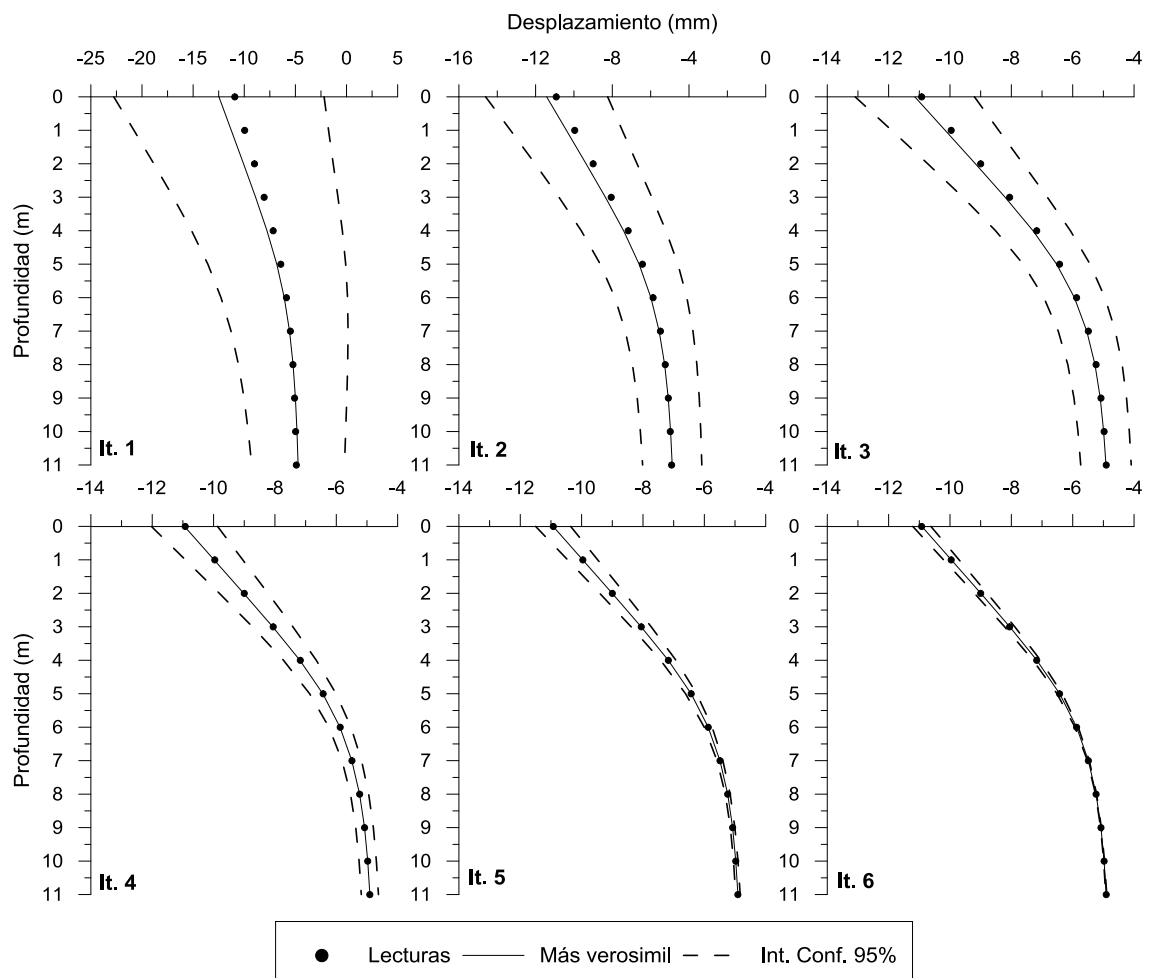


Figura 5-14 Evolución de  $\text{var} \varepsilon_i$  con las iteraciones, (a) escala logarítmica, (b) escala natural.

La Figura 5-14 muestra la reducción del error a medida que se va iterando. Como se ha apuntado anteriormente, la dependencia entre **d** y **m** debe ser moderadamente no lineal. En esas condiciones un polinomio de grado bajo es suficiente para capturar las principales características del modelo directo original. En las proximidades de la solución, al igual que en el caso anterior, la tangente a la hipersuperficie que representa el modelo directo original se confunde con el hiperplano con el que se construye el modelo subrogado.

En la Figura 5-15, en la que se representa el movimiento que predice el modelo a partir de los parámetros más verosímiles en cada iteración junto con los intervalos de confianza al 95%. En dicha figura, se puede observar que prácticamente desde la primera iteración, se tiene una predicción de los movimientos de la pantalla razonablemente buena. No obstante, si se empleasen

los rangos de los parámetros de la primera iteración para determinar el intervalo de confianza del 95% de cada lectura, se observaría que este es muy amplio. De cualquier manera, a medida que las iteraciones avanzan, el intervalo se reduce drásticamente. Tal y como sugiere la Figura 5-14, la reducción de la varianza de los errores es exponencial.

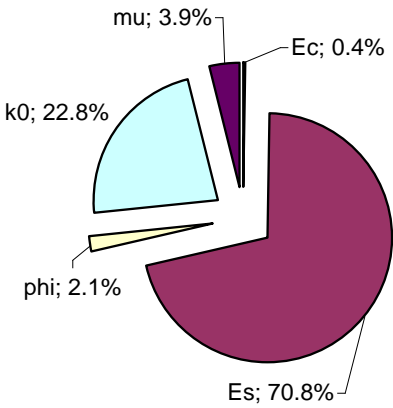


**Figura 5-15** Movimientos registrados de la pantalla y predicciones del modelo en cada iteración junto intervalos de confianza al 95%.

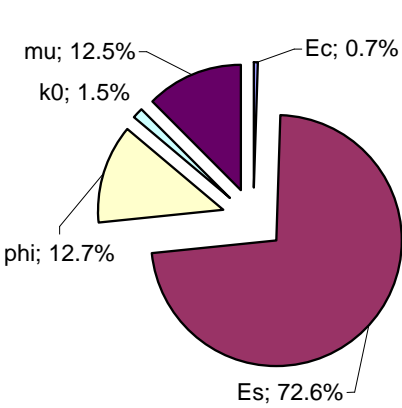
La metodología que se presenta permite determinar la influencia de cada parámetro en la varianza de la respuesta media. En la Figura 5-16 se advierte

cómo evoluciona la influencia de cada parámetro a medida que se va iterando.

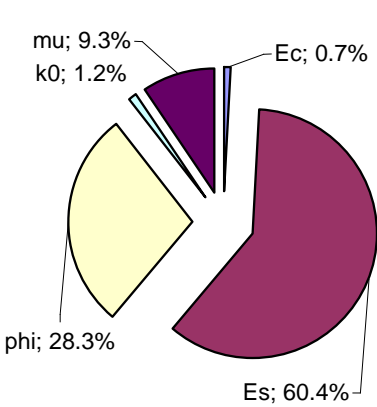
1ª iteración



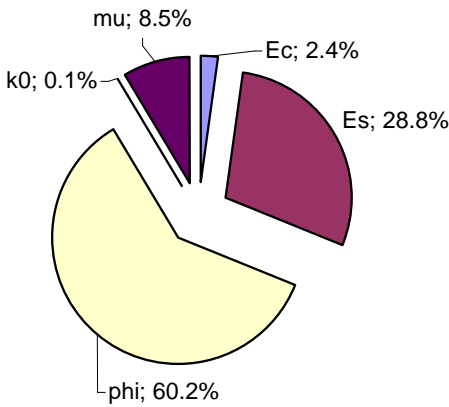
2ª iteración



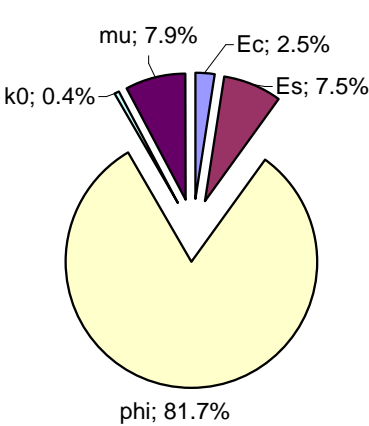
3ª iteración



4ª iteración



5ª iteración



6ª iteración

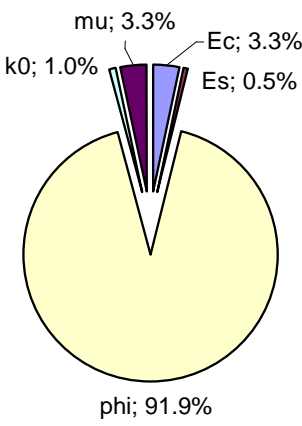


Figura 5-16 Influencia relativa de cada parámetro del modelo en la varianza de la respuesta media según se itera

Como las posibles rigideces de la pantalla son muy superiores al del terreno, la pantalla prácticamente se comporta como un sólido rígido y, como es de esperar, la contribución a la varianza de la respuesta total es apenas relevante. En las primeras iteraciones, la influencia del módulo de elasticidad del terreno tiene una contribución muy significativa. Ésta se torna despreciable en la última iteración. Esto indica que la influencia de cada parámetro en la respuesta depende no sólo del modelo en sí sino también de la incertidumbre que se tiene de ese parámetro. De manera que a medida que se reduce la incertidumbre, se reduce la influencia.

En cada iteración, para generar el modelo subrogado, han sido necesarias 24 realizaciones del modelo directo y, para estimar el error que produce emplear el modelo subrogado, se ha tenido que correr 80 (5x16) veces el modelo directo. Por tanto, cada iteración requería efectuar 104 simulaciones con el modelo directo original. Como han sido necesarias 6 iteraciones, se ha corrido el modelo directo 624 veces.

**Cuadro 5-6 Discretización de los parámetros buscados**

Parámetro	Rango	Incr.	Nº Incr.
Módulo de elasticidad del hormigón ( $E_c$ )	$1.5 \cdot 10^7$ - $3.5 \cdot 10^7$ kPa	500 kPa	40001
Módulo de elasticidad de las arenas ( $E_s$ )	8000 – 30000 kPa	25 kPa	881
Ángulo de rozamiento ( $\varphi$ )	30-40°	0.50°	21
Coeficiente de empuje al reposo ( $K_0$ )	0.35 – 1.0	0.05	14
Coeficiente de fricción muro-terreno ( $\mu$ )	0.20- 0.40	0.01	21

Para valorar si el número de realizaciones del modelo directo es razonable, se ha discretizado el espacio de búsqueda, tal y como se destaca en el Cuadro 5-6 para acotar el número de soluciones. Con la discretización propuesta, el número de posibles soluciones sería de  $2.18 \cdot 10^{11}$ . Por lo que es inmediato comprobar que con

un número ínfimo de realizaciones del modelo directo se pueden construir varios modelos subrogados y estimar el error que acarrea la sustitución por el modelo directo. Este número de evaluaciones es pequeño también en comparación con el número máximo de iteraciones ( $3000N$ , siendo  $N$  el número de variables a optimizar) que la rutina de optimización mediante recocido simulado incluida en MATLAB® [150] tiene definida por defecto. Aunque no se conoce una regla universal para estimar las iteraciones en una heurística, el ejemplo presentado ofrece una idea del patente ahorro numérico.

### 5.3 IDENTIFICACIÓN DE NUEVE PARÁMETROS EN EJEMPLO REAL

En este caso, se identifican nueve parámetros del terreno a partir de datos procedentes de un ensayo a escala real que llevó a cabo la Universidad de Karlsruhe en Hochstetten (Alemania) en el año 1993. Antes de llevar a cabo el experimento, se convocó un concurso de predicción o *benchmarking* entre organismos europeos relacionados con la ingeniería civil [43, 56, 151]. Los detalles de la instalación y la información de la instrumentación fueron recogidos por von Wolffersdorff [7].

#### 5.3.1 Descripción de la excavación

El ensayo consistió en una excavación en un terreno arenoso por etapas hasta una profundidad de 5.0 m (sólo medio metro por encima del nivel freático) y 4.0 m de ancho al abrigo de tablestacas apuntaladas tal y como se muestra en la Figura 5-17. Para asegurar condiciones bidimensionales, la excavación tenía 7.0 m de

ancho en sentido transversal.

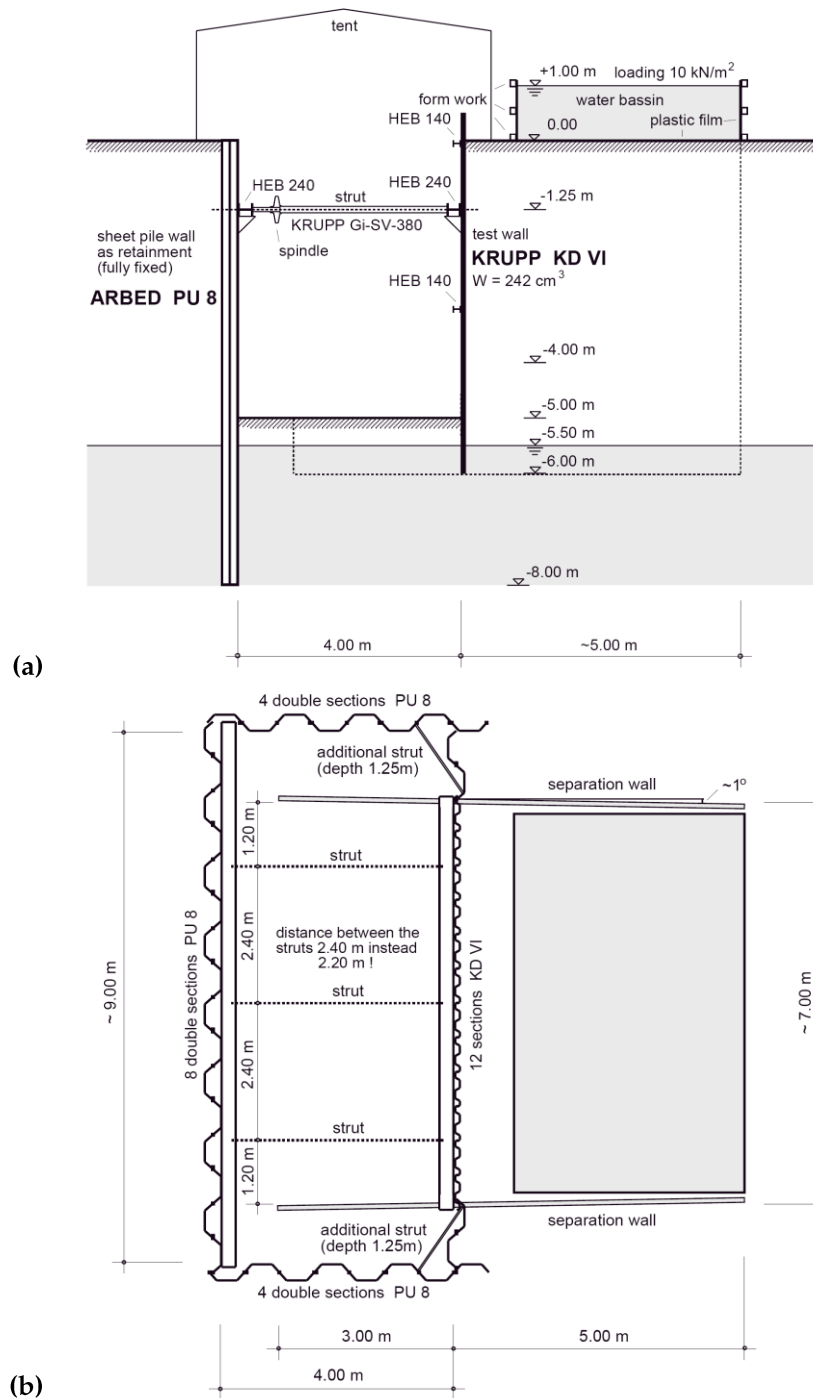


Figura 5-17 (a) Sección y (b) planta de la pantalla experimental [7]

El sistema de contención era asimétrico porque en un lado se empleó una

tablestaca muy flexible tipo KD VI mientras que en otro se utilizó una tablestaca muy rígida tipo ARBED PU8. La pantalla más rígida se empotró a una profundidad de 8.0 m mientras que la otra se dejó a 6.0 m. Se pretendía que los movimientos en la pantalla rígida fuesen despreciables en comparación con los que se produjeran en la pantalla flexible. Como el empotramiento de la pantalla más flexible era de apenas 1.0 m, se colocó un puntal a 1.25 m de profundidad para asegurar la estabilidad. Las características tanto de las tablestacas como del puntal se resumen en el Cuadro 5-7.

En primer lugar, se excavó en dos etapas hasta una profundidad de 1.75 m. A una profundidad de 1.25 m se instalaron puntales separados 2.40 m. Se aplicó a estos puntales un esfuerzo de tesado para asegurar que entrasen en carga inmediatamente. Tras el apuntalamiento, se llegó al fondo de la excavación en tres etapas y se llenó un depósito de agua situado en el trasdós de la pantalla flexible como sobrecarga. Por último, se redujo progresivamente la tensión del puntal hasta movilizar todo el empuje activo. En el Cuadro 5-8, se enumeran todas las etapas.

**Cuadro 5-7 Características resistentes de las tablestacas instaladas [152]**

<b>Tablestaca KRUPP KD VI</b>	
Rigidez a tracción ( $EA$ )	$2.2 \cdot 10^6$ kN/m
Rigidez a flexión ( $EI$ )	$2.0 \cdot 10^3$ kN·m <sup>2</sup> /m
Peso ( $w$ )	0
Coeficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.30
<b>Tablestaca ARBED PU8</b>	
Rigidez a tracción ( $EA$ )	$2.2 \cdot 10^6$ kN/m
Rigidez a flexión ( $EI$ )	$24.4 \cdot 10^3$ kN·m <sup>2</sup> /m
Peso ( $w$ )	0
Coeficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.30
<b>Puntales</b>	
Rigidez a tracción ( $EA$ )	$4.2 \cdot 10^6$ kN/m
Rigidez a flexión ( $EI$ )	$1.0 \cdot 10^5$ kN·m <sup>2</sup> /m



Cuadro 5-8 Etapas de construcción

Etapa	Descripción
I	Excavación hasta 1.00 m
II	Excavación hasta 1.75 m
III	Instalación de puntales y puesta en carga a 4.5 kN/m
IV	Excavación hasta 3.00 m
V	Excavación hasta 4.00 m
VI	Excavación hasta 5.00 m
VII	Aplicación carga en trasdós (llenado depósito)
VIII	Reducción tensión del puntal hasta fallo

### 5.3.2 Descripción del terreno

Las pantallas se instalaron en un depósito arenoso en el que el nivel freático se situaba a 5.50 m de profundidad. Los parámetros necesarios para describir el terreno dependen del modelo constitutivo que se vaya a emplear. En general, cuanto más complejo es el modelo, más parámetros son necesarios para caracterizar su comportamiento. En este caso, como se trata de un suelo eminentemente arenoso, al igual que [56, 153] cuando estudiaron esta misma excavación, se emplea un modelo elasto-plástico de tipo Mohr-Coulomb [50]. Este tipo de modelo constitutivo precisa de cinco parámetros para definir el suelo: (i) módulo de elasticidad, (ii) coeficiente de Poisson, (iii) cohesión y (iv) ángulo de rozamiento y de (v) dilatancia. Para analizar el mismo caso, [43, 152, 154, 155] han recurrido a otros modelos constitutivos más complejos. Dichos modelos son capaces de capturar el diferente comportamiento del suelo en carga y en descarga como por ejemplo el modelo HSM (*hard soil model*) [156].

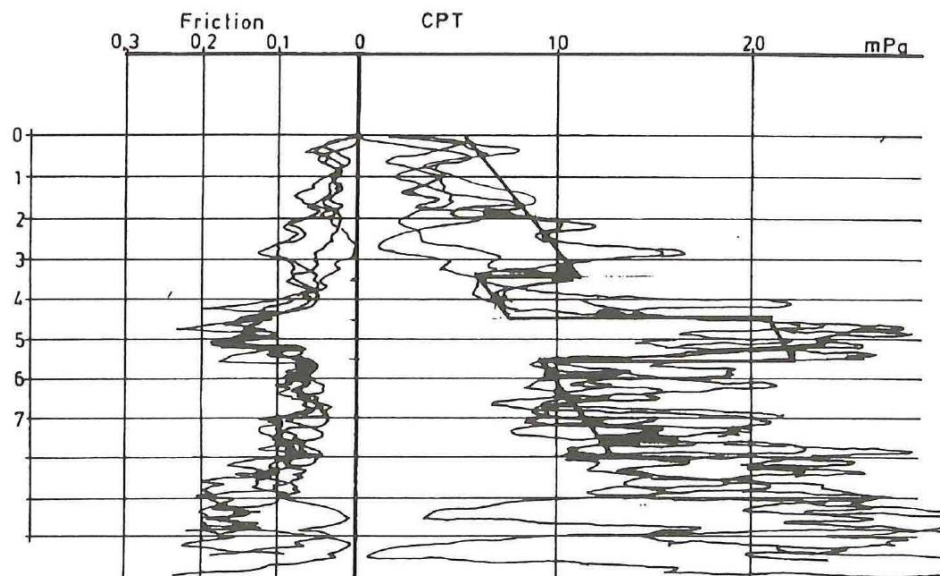


Figura 5-18 Resultados de ensayos CPT e identificación de capas [153]

Bakker [153] identifica cinco capas de suelo a partir de ensayos CPT (Figura 5-18). Sin embargo, Mestat y Arafati junto Levasseur [56, 152] simplifican el perfil estratigráfico a dos niveles: (i) las arenas por encima del nivel freático y (ii) las arenas por debajo. En la presente Tesis, se adopta la estratigrafía de sólo dos niveles arenosos porque no se dispone de la información geotécnica necesaria para proceder a una caracterización del terreno más detallada.

Cuadro 5-9 Parámetros del modelo constitutivo de Mohr Coulomb propuestos por [56] para las arenas de Hochstetten

Parámetro	Capa no saturada	Capa saturada
Módulo de elasticidad ( $E$ )	30000 kPa	45000 kPa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.25	0.25
Cohesión ( $c'$ )	0	3 kPa
Ángulo de rozamiento ( $\phi'$ )	41.6°	41.6°
Ángulo de dilatación ( $\psi$ )	11.6°	11.6°
Coefficiente de empuje al reposo ( $K_0$ )	0.336	0.336

Tal y como se recoge en el Cuadro 5-9, según Mestat y Arafati [56], los dos niveles arenosos considerados sólo se distinguen por su módulo de elasticidad y por su cohesión. El coeficiente de Poisson y el ángulo de rozamiento son comunes a ambos estratos. La dilatación se estimó a partir de la siguiente expresión:

$$\psi = \varphi' - 30^\circ \quad (5.21)$$

El coeficiente de empuje al reposo se determinó con la conocida fórmula de Jaky [157]:

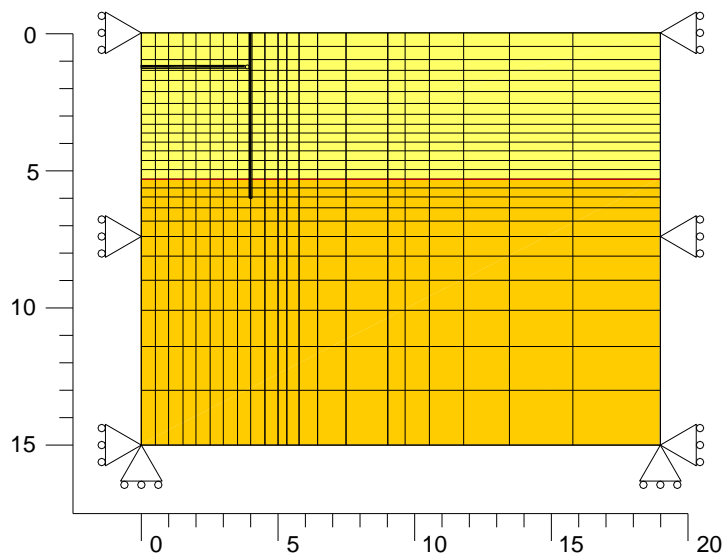
$$K_0 = 1 - \sin(\varphi') \quad (5.22)$$

### 5.3.3 Modelo de cálculo empleado

Para resolver el problema se utiliza el método de los elementos finitos mediante el programa ABAQUS CAE 6.11-1. En la Figura 5-19, se muestra la malla de elementos finitos empleada junto con los materiales considerados. Se ha establecido una interacción en la que la fricción entre la pantalla y el terreno se ha simulado mediante una formulación tipo *penalty* que se requiere un coeficiente de rozamiento  $\mu$ . En el Cuadro 5-10, se indica la secuencia de etapas seguida.

**Cuadro 5-10 Etapas consideradas en el modelado**

<b>Etapas</b>	<b>Descripción</b>
0	Generación de tensiones iniciales
1	Excavación hasta 1.00 m
2	Excavación hasta 1.75 m
3	Instalación de puntales y puesta en carga a 4.5 kN/m
4	Excavación hasta 3.00 m
5	Excavación hasta 4.00 m
6	Excavación hasta 5.00 m
7	Aplicación carga en trasdós (llenado depósito)



**Figura 5-19** Malla de elementos finitos empleada (en amarillo nivel seco, en ocre saturado). En trazo más grueso pantalla y puntal.

Las tensiones iniciales se generan imponiendo un coeficiente de empuje al reposo  $K_0$ . La excavación se simula eliminando los elementos correspondientes hasta alcanzar la profundidad de cada fase constructiva. La metodología presentada precisa que los fenómenos que se modelen sean moderadamente no lineales. Por esa razón, no se ha simulado la descarga del puntal para movilizar el empuje activo porque se podrían producir problemas de convergencia numérica. Además, no considerar el afloje del puntal ha reducido el tiempo de computación.

El terreno se define en un dominio rectangular que se ha discretizado mediante elementos cuadrilaterales de cuatro nodos de deformación plana. En el modelo se considera que la pantalla de mayor rigidez no se deforma por lo que esa parte del modelo se simula como una condición de contorno de desplazamiento lateral nulo aligerando la carga numérica del modelo. Para modelar la pantalla se han

empleado elementos tipo viga y el puntal se ha resuelto con elementos tipo barra. En el Cuadro 5-11, se resumen a continuación las características del tipo de elemento empleado.

**Cuadro 5-11 Características del modelo de elementos finitos**

Terreno	Terreno	Pantalla	Puntal
Integración	Implícita	Implícita	Implícita
Orden geométrico	Lineal	Cuadrático	Linear
Tipo de elemento	CPE4 Def. plana	B22 Viga (Beam)	T2D2 Barra (Truss)
Número de nodos	4	3	2
Número de elementos	525	12	8

### 5.3.4 Planteamiento del problema inverso

En el caso sometido a examen, se pretende identificar nueve de los parámetros del terreno de la excavación descrita a partir de catorce observaciones de los desplazamientos horizontales de la pantalla, todos ellos recogidos en el Cuadro 5-12,  $\mathbf{d}_{obs}$ . Sin embargo, a diferencia de los casos anteriores, en los que se tenía la certeza que tanto el modelo como las observaciones estaban libres de error, en este caso, existe incertidumbre tanto en la exactitud del modelo como en la precisión de las medidas.

Los  $N = 9$  parámetros a determinar son los módulos de elasticidad de las arenas secas y saturadas ( $E_1$  y  $E_2$  respectivamente), la cohesión de ambas capas ( $c_1$  y  $c_2$ ), el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), el ángulo de rozamiento del terreno ( $\phi'$ ), el coeficiente de empuje al reposo ( $K_0$ ) y el coeficiente de fricción entre el terreno y la pantalla ( $\mu$ ). Los últimos cinco parámetros se consideran comunes a ambos estratos.

**Cuadro 5-12 Movimientos horizontales empleados como observaciones  $d_{obs}$  para la calibración [7].**

Prof. (m)	Desplazamiento (mm)	Prof. (m)	Desplazamiento (mm)
0.0	2.14	3.1	-3.36
0.1	1.97	3.6	-3.15
0.6	1.23	4.1	-2.43
1.1	0.31	4.6	-1.57
1.6	-0.72	5.1	-0.69
2.1	-2.04	5.6	0.00
2.6	-3.07	6.0	0.00

**Cuadro 5-13 Rango adoptado de los parámetros a determinar en el análisis inverso.**

Parámetro	Rango
Módulo de elasticidad capa seca ( $E_1$ )	$10^4 - 4 \cdot 10^4$ kPa
Módulo de elasticidad capa saturada ( $E_2$ )	$2 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^4$ kPa
Coeficiente de Poisson de ambas capas ( $\nu$ )	0.15 – 0.40
Coeficiente de empuje al reposo ( $K_0$ )	0.20 – 0.60
Ángulo de rozamiento de ambas capas ( $\varphi'$ )	30-45°
Ángulo de dilatación de ambas capas ( $\psi$ )	5 – 20°
Cohesión capa seca ( $c_1$ )	0.30 – 10 kPa
Cohesión capa saturada ( $c_2$ )	0.30 – 10 kPa
Coeficiente de fricción muro-terreno ( $\mu$ )	0.20- 1.50

Siguiendo la práctica habitual en geotecnia, se definen unos rangos iniciales en los que se estima que se encontrarán los parámetros a identificar. Lamentablemente, no se disponía de información de primera mano de los ensayos de caracterización del terreno. Ahora bien, a tenor de lo que se ha podido extraer de diferentes fuentes [56, 113, 152, 153, 155], se considera que los rangos de los parámetros a determinar mediante análisis inverso recogidos en el Cuadro 5-13 resultan razonables. Las propiedades del acero como la densidad del terreno se consideran parámetros deterministas y sus valores se reflejan en el

Cuadro 5-14.

**Cuadro 5-14 Valores de los parámetros deterministas del modelo**

Parámetros del suelo	Valor
Densidad aparente de la capa seca ( $\gamma_1$ )	16.5 kN/m <sup>3</sup>
Densidad aparente de la capa seca ( $\gamma_2$ )	19.8 kN/m <sup>3</sup>
Parámetros del acero	Valor
Módulo de elasticidad capa seca ( $E_s$ )	2.1·10 <sup>8</sup> kPa
Coeficiente de Poisson $\nu_s$ )	0.30
Densidad ( $\gamma_s$ )	-

Según los datos recogidos en el Cuadro 5-13, la función de densidad de probabilidad conjunta de los parámetros *a priori* es la siguiente distribución uniforme,

$$\rho_M(\mathbf{m}) = \begin{cases} \frac{1}{3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 0.4 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 9.7 \cdot 9.7 \cdot 1.3} & \begin{aligned} &E_1 \in [10^4, 4 \cdot 10^4], \\ &E_2 \in [2 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^4], \\ &\nu \in [0.15, .40], \\ &K_0 \in [0.2, .6], \\ &\varphi \in [30, 45], \psi \in [5, 20] \\ &\mu \in [0.2, 1.5], \\ &c_1 \in [.3, 10], c_2 \in [.3, 10] \end{aligned} \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \quad (5.23)$$

Normalizando los parámetros  $m_i$  a  $\xi_i \in [-1 \ 1]$  de acuerdo a la transformación (5.9), la distribución (5.23) *a priori* queda como:

$$\rho_\xi(\xi) = \begin{cases} 1/2^9 & \xi_i \in [-1, 1] \\ 0 & \xi_i \notin [-1, 1]_i \end{cases} \quad (5.24)$$

### 5.3.5 Resolución del problema inverso

Al igual que en los casos anteriores, el modelo directo original se sustituye por un modelo subrogado, construido a partir de polinomios de primer grado (modelo lineal). De la misma manera, al caracterizar los parámetros mediante una distribución uniforme, el modelo subrogado de respuesta se construye sobre una base de polinomios de Legendre (Cuadro 3-1). La resolución de este problema se efectuará mediante iteraciones sucesivas, de manera que el espacio de búsqueda se irá reduciendo paulatinamente y el modelo subrogado convergerá al modelo original.

La diferencia con los anteriores casos es que éste es real. Por consiguiente, se tiene incertidumbre en la precisión de las observaciones y en la exactitud del modelo. Consecuentemente, para poder resolver el problema, se ha de cuantificar la incertidumbre que aportan los errores en la observación junto con la imperfección del modelo directo y a eso hay que añadir el error que aparece al sustituir el modelo original por otro subrogado. Según Gens [34], deflexiones de la pantalla muestran poca sensibilidad al modelo constitutivo especialmente en terrenos firmes. Por esta razón, se asume que las diferencias entre las predicciones del modelo y las observaciones se deben a errores observacionales. En los siguientes apartados, se comprueba lo acertado de la decisión.

Como todas las medidas se tomaron con un mismo aparato, se considera que todos los errores tienen una distribución gaussiana idéntica y que son independientes entre ellos. En consecuencia, la función de densidad de probabilidad es:



$$\rho_D(\mathbf{d}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}/\sigma_D)^n} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs})^t \left[ \frac{1}{\sigma_D^2} \mathbf{I} \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}) \right] \quad (5.25)$$

Donde  $\sigma_D^2$  es la varianza del error observacional y  $n$  el número de observaciones. Dado el tipo de instrumentación empleado y el modelo constitutivo que se utiliza para modelar el terreno, se asume que el intervalo de confianza del 95% en el que se encontrará el desplazamiento real es de  $\pm 1$  mm. Este valor viene a representar una desviación típica de 0.5 mm, lo que se traduce en una varianza de  $\sigma_D^2 = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ .

Por lo que la distribución de probabilidad conjunta *a priori* viene dada por:

$$\rho(\xi, \mathbf{d}) \propto \begin{cases} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs})^t \left[ \frac{1}{\sigma_D^2} \mathbf{I} \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}) \right] & \xi_i \in [-1, 1] \\ 0 & \xi_i \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (5.26)$$

Una vez se determina el error que produce el truncamiento  $\mathbf{C}_T$  en cada iteración y particularizando a este caso la ecuación (4.59), se tiene:

$$\sigma_\xi(\xi) \propto \begin{cases} \exp \left( -\frac{1}{2} [\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi)]^t (\sigma_D^2 \mathbf{I} + \mathbf{C}_T)^{-1} [\mathbf{d}_{obs} - \tilde{\mathbf{s}}(\xi)] \right) & \xi_i \in [-1, 1] \\ 0 & \xi_i \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (5.27)$$

La distribución conjunta *a posteriori*, expresión (5.27), es la solución al problema inverso. Integrando la ecuación (5.27), se determinan las distribuciones marginales de cada parámetro. Tras calcular los intervalos de confianza del 95% de cada parámetro, se repite el proceso con el nuevo intervalo.

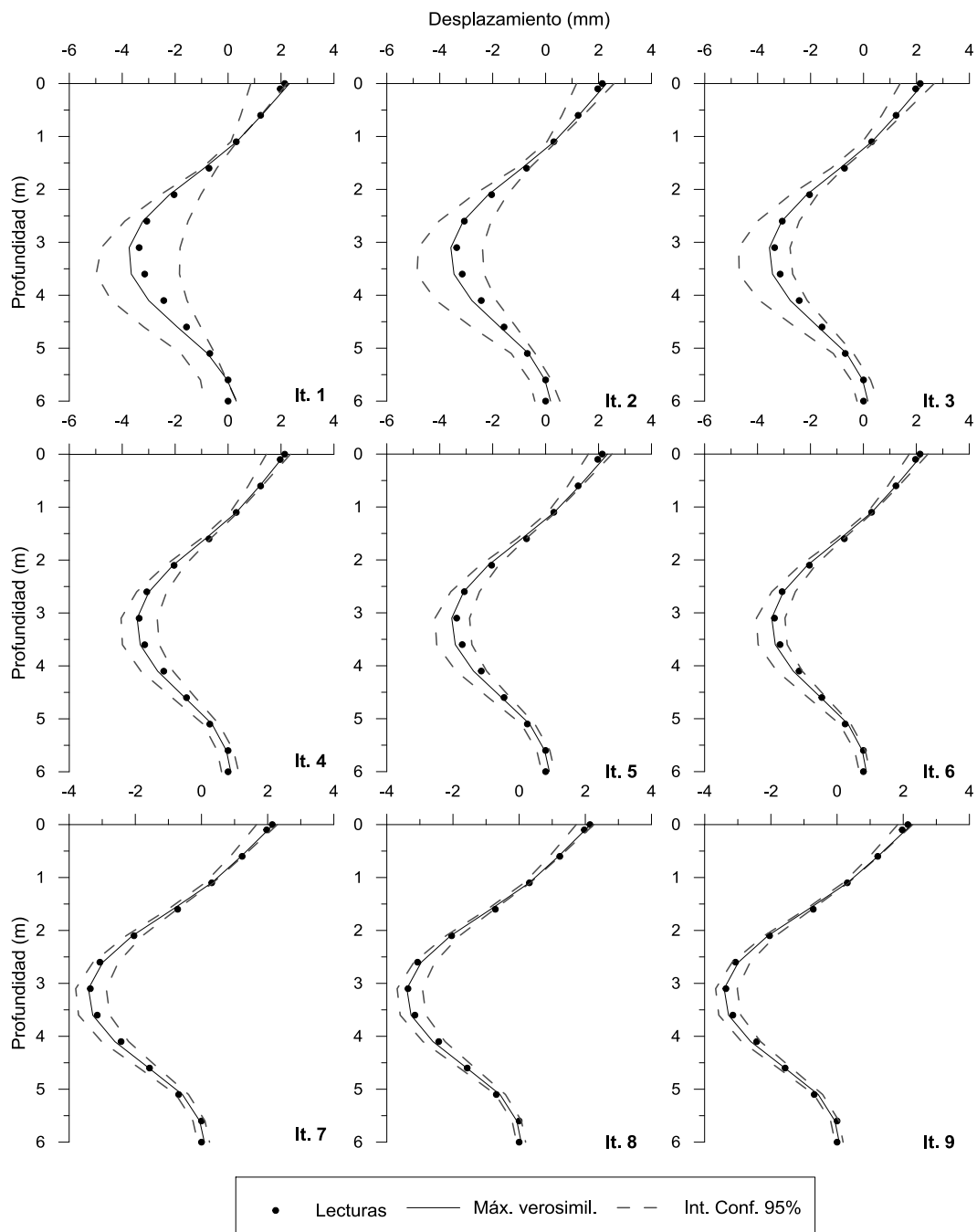


Figura 5-20 Convergencia del modelo subrogado al modelo directo original.

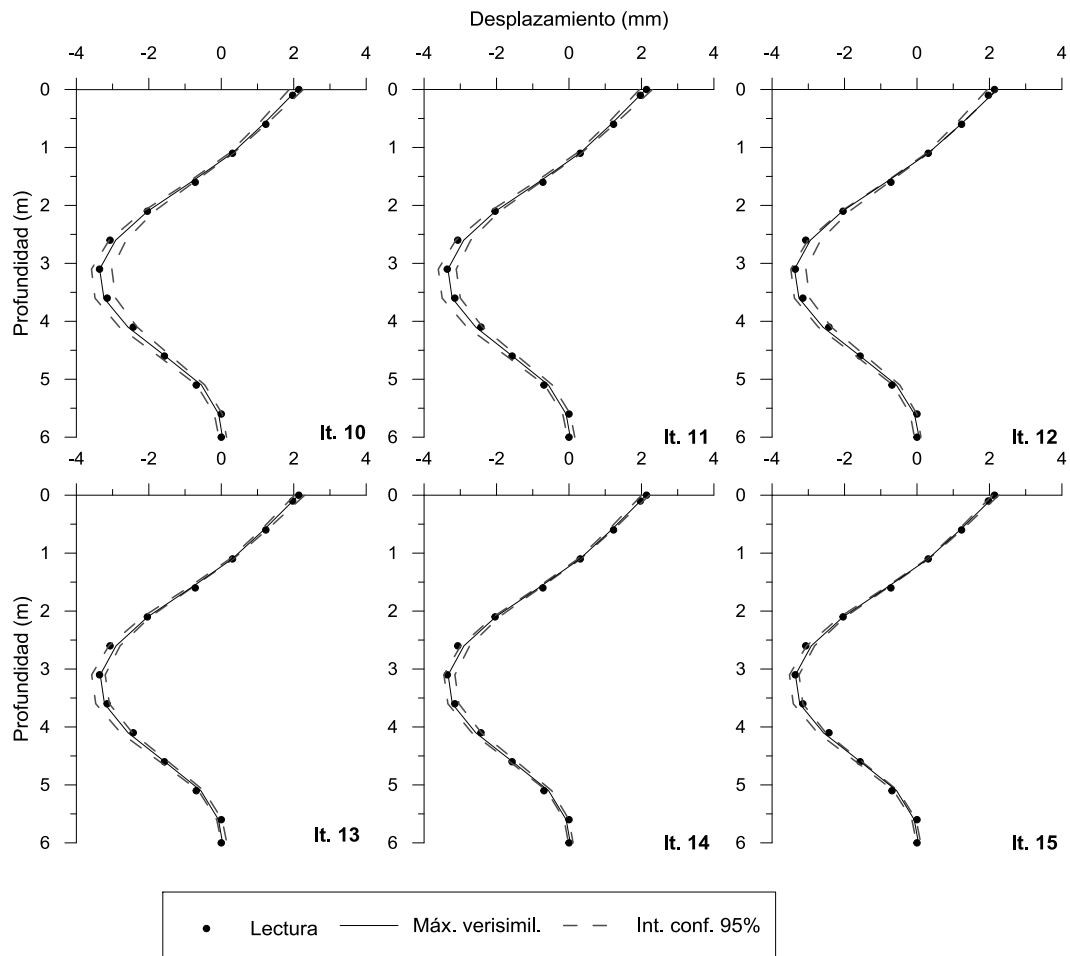


Figura 5 20 (cont.) Convergencia del modelo subrogado al modelo directo original.

Se han llevado a cabo quince iteraciones para conseguir unos rangos de parámetros en los que el modelo subrogado se confunda con el original. El proceso de convergencia se constata gráficamente en la Figura 5-20 en la que se representa la respuesta más verosímil del modelo subrogado junto con los intervalos de confianza del 95%. Se puede observar que desde las primeras iteraciones, los valores de máxima verosimilitud son capaces de reproducir adecuadamente las deflexiones medidas. Asimismo, en la Figura 5-20, se observa claramente cómo a medida que avanzan las iteraciones, la varianza en el modelo subrogado se reduce, estrechándose los intervalos de confianza. Como el

dominio en el que se buscan los parámetros se reduce, el modelo subrogado, que es un hiperplano en este caso, se va pareciendo cada vez más a la hipersuperficie que representa el modelo directo original.

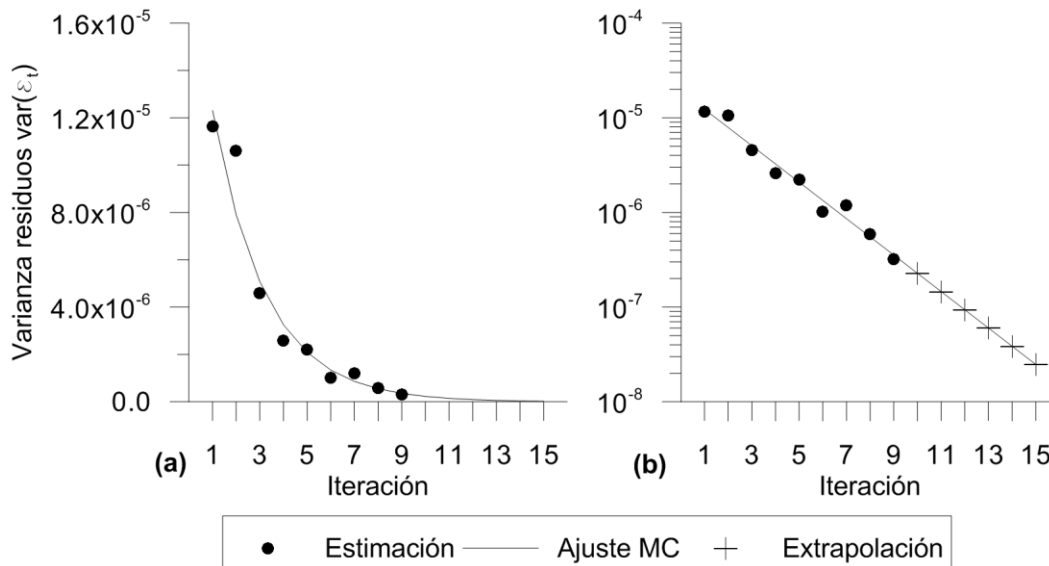
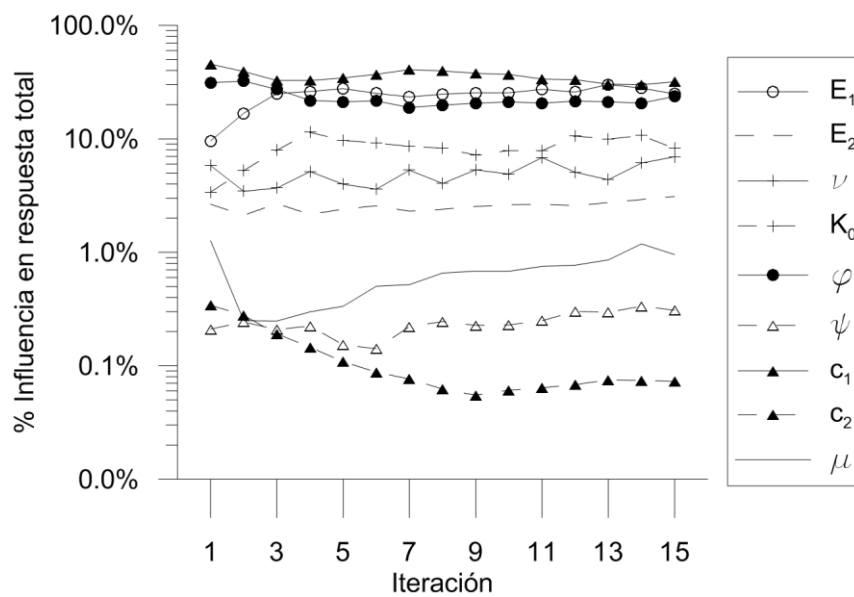


Figura 5-21 Evolución de  $\text{var} \varepsilon_i$  con las iteraciones, (a) escala natural, (b) escala logarítmica.

En la Figura 5-21a, se representa la evolución del error de truncamiento a medida que se itera. Al igual que en el caso anterior, se observa un descenso exponencial. Al representar el eje de ordenadas a escala logarítmica (Figura 5-21b), se puede ajustar una recta. De esa manera, a partir de los errores de truncamiento computados en las primeras iteraciones se pueden estimar los de las últimas. Para reducir la carga numérica, sólo se evaluó el error de truncamiento conforme al procedimiento descrito en el apartado 4.5 en las nueve primeras iteraciones. En el resto de iteraciones se realizó una extrapolación tal y como muestra la Figura 5-21b.

El análisis de la varianza del modelo representado en la Figura 5-22 muestra que

los parámetros  $E_1$ ,  $\varphi$  y  $c_1$  explican el 80% de la varianza, los parámetros  $E_2$ ,  $\nu$  y  $K_0$  justifican el 19% de la varianza, mientras que los parámetros  $\psi$ ,  $c_2$  y  $\mu$  apenas explican el 1%. Desde la primera iteración, la importancia relativa de cada variable se mantiene por lo que hubiese sido posible no considerar las variables que apenas tienen influencia en la varianza y así se habrían aligerado los cálculos.



**Figura 5-22 Evolución de la influencia de cada parámetro en la varianza de la respuesta total.**

En la Figura 5-23, se muestra la evolución de las distribuciones marginales de los parámetros. Al imponer la normalidad de los residuos, las distribuciones marginales son campanas de Gauss truncadas, porque fuera del intervalo definido inicialmente, la probabilidad de ocurrencia es nula. Se observa que la forma de la campana es muy definida para los parámetros que más influyen en la varianza ( $E_1$ ,  $\varphi$  y  $c_1$ ); mientras que para los parámetros que apenas explican la varianza, la forma de la campana es tan aplanada que se puede asimilar a una distribución uniforme.

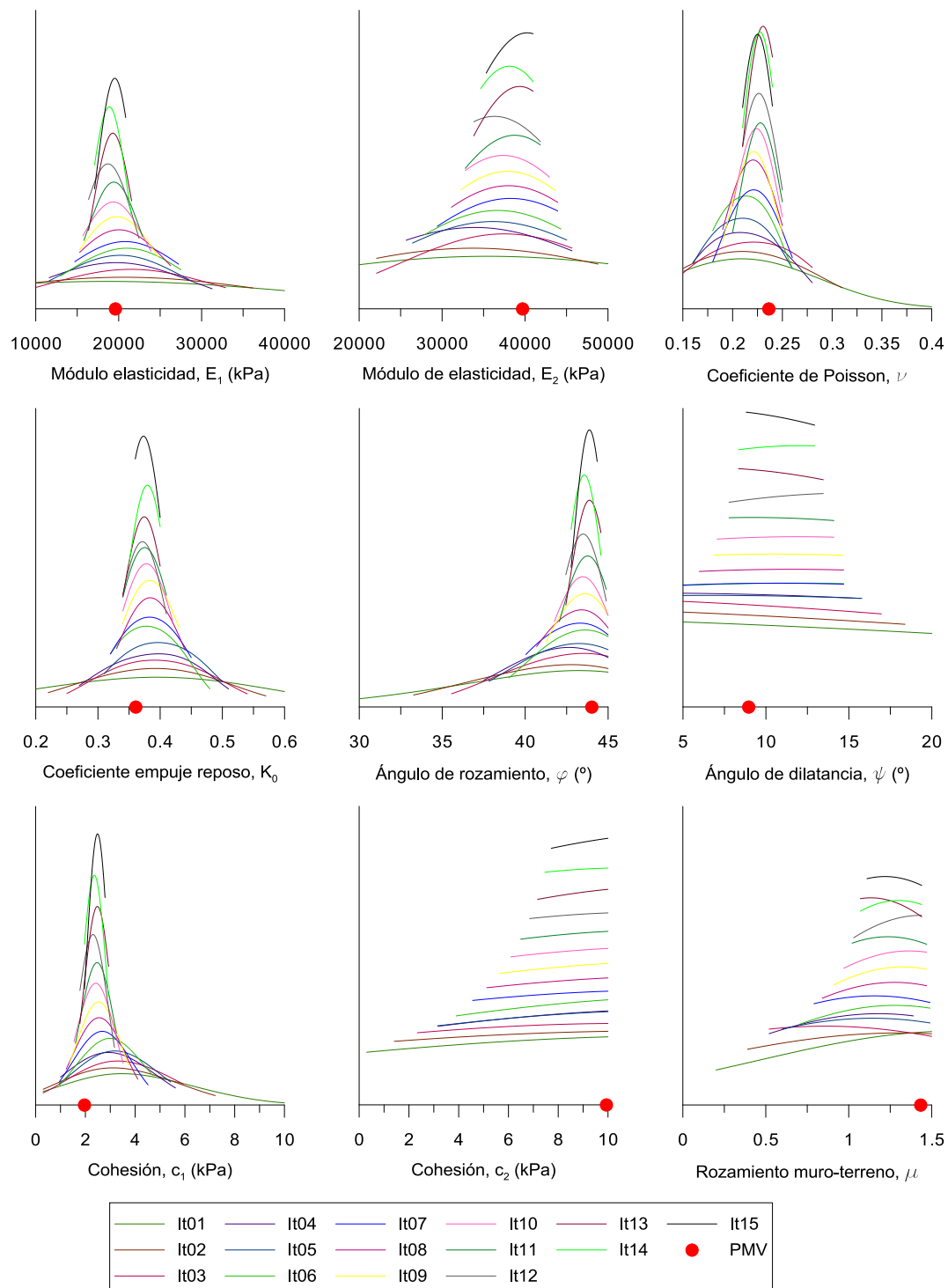


Figura 5-23 Evolución de las distribuciones marginales de los parámetros

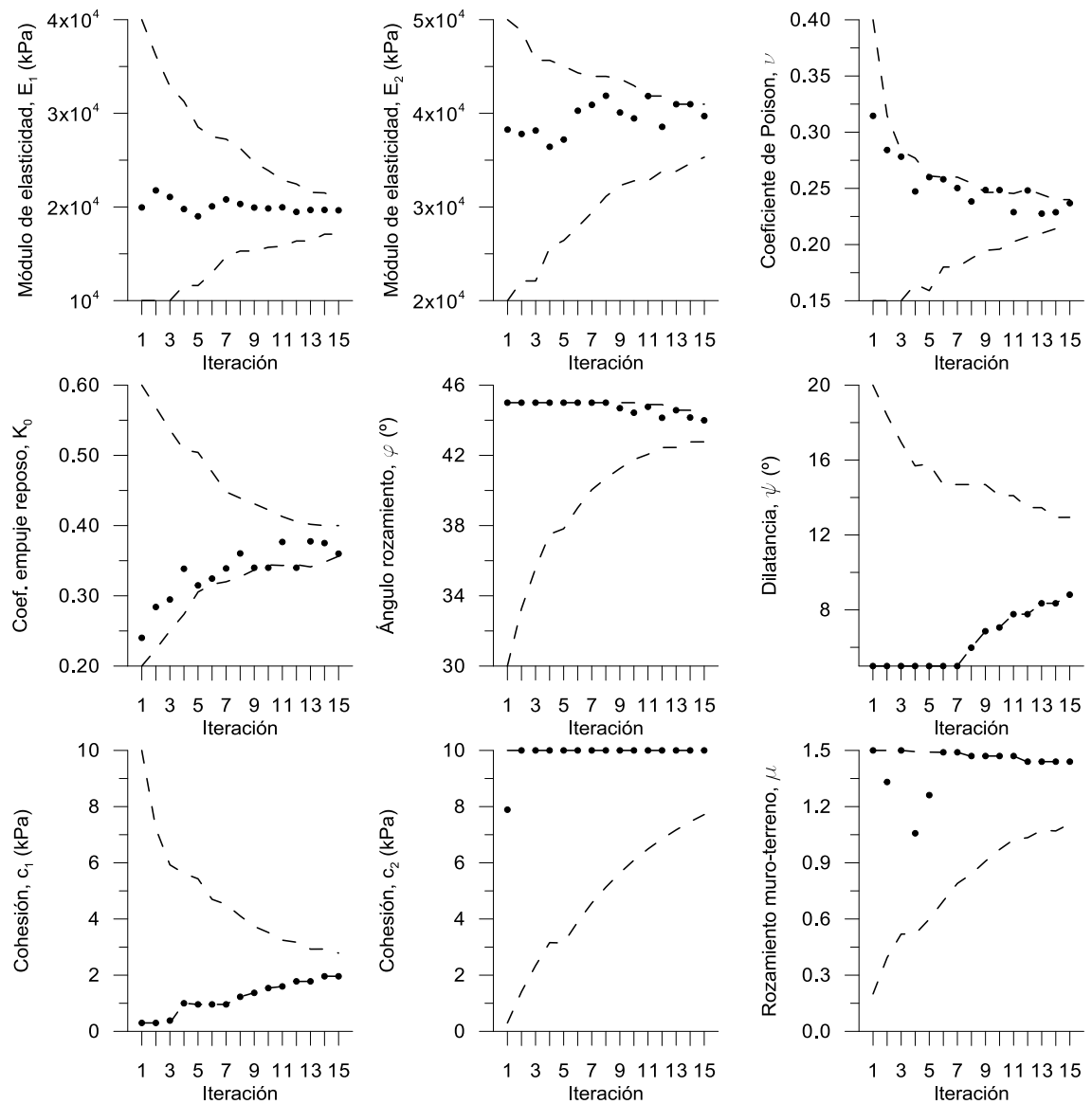


Figura 5-24 Evolución de los puntos de máxima verosimilitud junto con el intervalo de confianza del 95%

En la Figura 5-24, se representa para cada iteración, el valor más verosímil de cada parámetro, así como el intervalo de confianza asociado. Los valores más verosímiles tienden a estabilizarse. En consonancia con la reducción de la varianza del error por subrogar el problema (Figura 5-21), los intervalos de confianza sufren una disminución exponencial a medida que se itera congruente

con la disminución de varianza del error de truncamiento.

**Cuadro 5-15 Resumen del análisis**

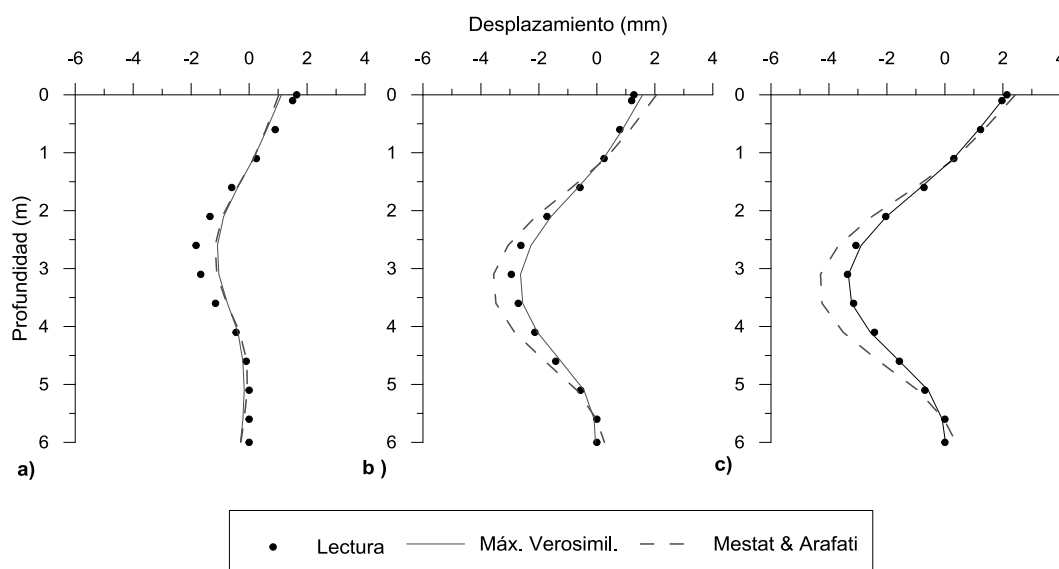
Parámetro	Valor más verosímil	Intervalo confianza 95%		Influencia en la respuesta
$E_1$ (kPa)	19640	17095	20850	24.9 %
$E_2$ (kPa)	39705	35315	40970	3.1 %
$\nu$	0.24	0.21	0.24	7.0 %
$K_0$	0.36	0.36	0.40	8.2 %
$\varphi$ (°)	44.0	42.8	44.3	23.6 %
$\psi$ (°)	8.8	8.8	12.9	0.3 %
$c_1$ (kPa)	2.0	2.0	2.8	31.9 %
$c_2$ (kPa)	10.0	7.7	10.0	0.1 %
$\mu$	1.4	1.1	1.4	1.0 %

En el Cuadro 5-15, se hace un resumen del análisis en el que se incluyen los valores más verosímiles de los parámetros, los intervalos de confianza del 95% y la influencia de cada parámetros a la respuesta total. Se observa que ha habido una importante reducción en los rangos de los parámetros. Tal y como se ha apuntado anteriormente, los parámetros  $E_1$ ,  $\varphi$  y  $c_1$  explican el 80%; o lo que es lo mismo, el modelo es extremadamente sensible a las variaciones de estos tres parámetros. Sorprende que pese la importante reducción del intervalo de confianza de la cohesión del primer nivel, ésta juegue un papel tan importante en todo el proceso de optimización.

En la Figura 5-25, se representan, junto con los resultados que da el modelo para los parámetros de la calibración (Cuadro 5-15) y los propuestos por Mestat y Arafati [56](Cuadro 5-9), las lecturas correspondientes –*vid* Cuadro 5-10- a la etapa 5 (excavación hasta 4.0 m), a la etapa 6 (excavación hasta 5.0 m) y a la etapa 7 (Aplicación carga en trasdós, llenado depósito). En la Figura 5-25, se puede



observar que el ajuste obtenido con los parámetros de la calibración resulta muy bueno en la última etapa pero no tan ajustado en las demás etapas. Este resultado era de esperar porque, para determinar los valores de máxima verosimilitud, recogidos Cuadro 5-15, sólo se han empleado las observaciones de la etapa en la que se procede a aplicar una carga en el trasdós. Si se hubiesen considerado las otras etapas u otras variables (asientos en el trasdós, esfuerzo en el puntal...) los resultados de la calibración no hubieran sido los mismos y el ajuste con los desplazamientos no hubiese sido tan ajustado.



**Figura 5-25 Comparación de los resultados obtenidos a partir de los parámetros más verosímiles de la calibración (Cuadro 5-15), los valores propuestos por Mestat y Arafati [56](Cuadro 5-9) y las lecturas obtenidas de la auscultación en a) etapa 5, excavación hasta 4.0 m b) etapa 6, excavación hasta 5.0 m y c) etapa 7, Aplicación carga en trasdós (llenado depósito).**

En cada iteración, para generar el modelo subrogado, han sido necesarias 80 realizaciones del modelo directo y, para estimar el error que produce emplear el modelo subrogado, se ha tenido que correr 144 (5x16) veces el modelo directo. En

principio, cada iteración requería efectuar 224 simulaciones con el modelo directo original. No obstante, tal y como se muestra en la Figura 5-21, de las 15 iteraciones que se han realizado, sólo en las 9 primeras se ha corrido el modelo directo para generar el modelo directo y la acotación del error de truncamiento. El error de truncamiento en las 6 últimas iteraciones se ha estimado a partir de los resultados anteriores. Por ese motivo, en la optimización ha sido necesario correr el modelo directo 2496 veces ( $9 \times 224 + 6 \times 80$ ). Al igual que en el ejemplo anterior, se compara el número de evaluaciones requerido con el tamaño del espacio de búsqueda discretizado. Según la discretización propuesta en el Cuadro 5-16, el número posible de soluciones es de  $2.45 \cdot 10^{17}$ . Es inmediato comprobar que el número de realizaciones es ínfimo en comparación del tamaño del espacio de búsqueda.

**Cuadro 5-16 Discretización de los parámetros buscados.**

Parámetro	Rango	Incr.	Nº Incr.
Módulo de elasticidad capa seca ( $E_1$ )	$10^4 - 4 \cdot 10^4 \text{ kPa}$	25 kPa	1201
Módulo de elasticidad capa saturada ( $E_2$ )	$2 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^4 \text{ kPa}$	25 kPa	1201
Coeficiente de Poisson de ambas capas ( $\nu$ )	0.15 – 0.40	0.01	26
Coeficiente de empuje al reposo ( $K_0$ )	0.20 – 0.60	0.01	41
Ángulo de rozamiento de ambas capas ( $\varphi'$ )	$30-45^\circ$	$0.25^\circ$	61
Ángulo de dilatación de ambas capas ( $\psi$ )	$5 - 20^\circ$	$0.25^\circ$	61
Cohesión capa seca ( $c_1$ )	0.30 – 10 kPa	0.25 kPa	40
Cohesión capa seca ( $c_2$ )	0.30 – 10 kPa	0.25 kPa	40
Coeficiente de fricción muro-terreno ( $\mu$ )	0.20- 1.50	0.05	27

En cualquier caso, se hace notar que este problema se ha resuelto con una estrategia de “fuerza bruta”, es decir se ha ido ejecutando el algoritmo sin aprovechar la información que se iba generando durante la optimización. Desde el principio de la optimización, era palmario que tres de las nueve variables

apenas tenían peso en el resultado. Si, tras dos o tres iteraciones, se hubiese asignado unos valores verosímiles a las tres variables que era notorio que apenas influían en la respuesta, el número de realizaciones por iteración hubiese pasado de 224 a 131 ( $35+6 \times 16$ ). Así, el número de ejecuciones del modelo directo hubiese pasado de 2496 a 1668 ( $3 \times 224 + 6 \times 131 + 6 \times 35$ ), lo que supone una reducción de un tercio del tiempo de computación inicial.

## 5.4 CONCLUSIONES DEL QUINTO CAPÍTULO

En este capítulo se valida la metodología presentada con tres ejemplos, los dos primeros son sintéticos y el segundo es un caso real obtenido de la bibliografía geotécnica. La metodología propuesta en la presente Tesis, se basa en subrogar el modelo directo original por una expansión de polinomios caóticos. Para reducir el tiempo de cálculo, el proceso de optimización se realiza sobre el modelo subrogado y no sobre el modelo directo. Si, por ejemplo, se representa el desplazamiento en cabeza de un muro pantalla mediante una expresión polinómica, evaluar este desplazamiento apenas requiere unas décimas de segundo; mientras que si se tiene que evaluar a partir del modelo completo puede llevar varios minutos. Además, la representación de la respuesta del modelo mediante polinomios caóticos permite desvelar la estructura estadística de cada observación, la correlación que existe entre las diferentes observaciones, y estimar la influencia de cada parámetro en la varianza de la respuesta.

Cuanto mayor sea el grado de los polinomios empleados en la expansión, mejor será la aproximación al modelo directo. Pese a ello, intentar generar una expansión de grado alto puede ser numéricamente inabordable. Por dicha razón,

se opta por una estrategia de aproximaciones sucesivas mediante expansiones de grado bajo. La metodología ha proporcionado resultados satisfactorios en los tres ejemplos estudiados.

Al aproximar el modelo original por una expansión polinómica, aparece un nuevo error: el error de truncamiento. En la metodología presentada, la carga numérica se divide en dos partes: (i) la necesaria para generar el modelo subrogado y (ii) la que se precisa para acotar el error de truncamiento. En los casos estudiados, se ha observado que el error de truncamiento se reduce de manera exponencial a medida que se itera. Por consiguiente, en los ejemplos estudiados, se puede establecer una ley que relaciona el error de truncamiento con el número de iteración. De esa manera, se pueden emplear los valores del error de truncamiento determinados en las primeras iteraciones para estimar las de las siguientes. Para aligerar la carga numérica, en la tercera calibración, se ha estimado esa ley y en las últimas iteraciones sólo se ha ejecutado el modelo directo para estimar construir el modelo subrogado.

Como la metodología presentada permite evaluar la influencia de cada parámetro en la respuesta, ha sido muy interesante comprobar la evolución de dicha influencia tras cada iteración. En los casos sintéticos (libres de error de modelación y de observación), la influencia de un parámetro se reducía a medida que se constriñe la acotación alrededor de su valor “verdadero”. Sin embargo, en el caso real la influencia de cada parámetro se mantenía más o menos constante durante el proceso de iteración. Se considera que este hecho se debe a la presencia o no de errores en observaciones y modelo. En los ejemplos sintéticos, tanto las observaciones como el modelo están libres de error, por lo que existe un conjunto de parámetros y de observaciones “verdaderos”. En el límite, cuando se alcancen los parámetros “verdaderos”, la varianza de la solución será nula. Por

consiguiente, a medida que el valor de un parámetro se acota mejor, su influencia en la varianza disminuirá; asimismo la importancia relativa de los diferentes parámetros irá variando de iteración en iteración. En el ejemplo real se ha considerado que las observaciones de partida tienen cierto error. El modelo ha de reflejar dicho error en los parámetros. Una vez el modelo subrogado proporcione una varianza similar a la de las observaciones no es de esperar mejoras en los resultados. Por lo tanto, la influencia relativa de cada parámetro ha de ser más o menos constante.

En los ejemplos sintéticos, primero y segundo, se alcanza la solución “verdadera” a un coste numérico razonable. En el tercer ejemplo, el caso real, es coste numérico es más significativo. Ahora bien, la carga numérica se debe a que en todas las iteraciones se ha construido un modelo subrogado de nueve parámetros cuando desde el principio se ha evidenciado que tres de esos parámetros tenían una influencia despreciable en la respuesta. Por lo que la metodología que se ha desarrollado puede servir como herramienta para una reducción de modelo.

El técnico que lleva a cabo la resolución del problema inverso tiene un papel muy importante en todo el proceso. Merece la pena que el responsable de la optimización dedique tiempo a procesar la información disponible. Con ello acotará de manera precisa los parámetros de partida no sólo por la reducción del tiempo de cálculo, sino permitiendo también comprender mejor el problema que se está estudiando. Además, un proceso de calibración o de resolución de un problema inverso no debe limitarse a buscar un conjunto de parámetros que se ajusten de manera más o menos satisfactoria a las observaciones. Un proceso de calibración ha de servir para entender mejor el proceso físico que produce unos resultados concretos y responder si el modelo que se está empleando explica convenientemente el comportamiento de la excavación. Asimismo, se ha de tener

en cuenta que, principalmente debido a la imperfección del modelo de comportamiento, los parámetros que se obtienen tras un proceso de calibración dependen en gran medida de las observaciones que se han empleado en la misma. Por ejemplo, en el caso de las excavaciones profundas, unos parámetros que reproduzcan bien los desplazamientos en pantalla no necesariamente tiene que reproducir adecuadamente otras observaciones (asientos en el trasdós, esfuerzos en elementos de arriostramiento, etc...). La metodología presentada genera muchos resultados que pueden facilitar la toma de decisión al técnico que está supervisando la excavación. Por consiguiente, a tenor de lo expuesto, esta metodología constituye una herramienta de gran utilidad práctica.

# Capítulo 6    CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

## 6.1 CONCLUSIONES

El diseño de un muro pantalla se presenta como un problema de gran complejidad en el que intervienen un gran número de factores, cuyo grado de conocimiento puede ser muy dispar. Para comprobar que las hipótesis realizadas durante la fase de diseño se ajustan a la realidad, la estimación de parámetros es una herramienta fundamental para entender y predecir el comportamiento de la excavación una vez se ha iniciado. A este tipo de problemas se les denomina de manera general análisis inversos, calibraciones o retroanálisis.

En esta Tesis se presenta una metodología que resuelve de una manera coherente problemas inversos basada en métodos bayesianos. Para poder resolver el problema se requiere contar con los siguientes elementos:

- Un modelo directo con una estimación de la incertidumbre en sus

predicciones;

- ciertas medidas con su error aparejado y
- la descripción estadística de los parámetros.

De todos los datos de entrada, se requiere una cuantificación de la incertidumbre aparejada. La metodología resulta eficiente para calibraciones que impliquen un número moderadamente alto de parámetros ( $N \approx 12$ ). Asimismo, los problemas deben quedar alejados de la rotura (entendiendo rotura como una situación en la que el modelo numérico no converge). De ahí que los problemas a resolver se deben referir preferentemente a condiciones de servicio.

El hecho de trabajar con mediciones sujetas a error, modelos imperfectos y parámetros inciertos favorece plantear el problema en términos de variables aleatorias. De todas las alternativas disponibles para propagar las incertidumbres en todo el modelo, se ha optado por los métodos espectrales estocásticos no intrusivos. Este tipo de métodos expresan la respuesta del modelo que representa el comportamiento de la excavación como una especie de serie de Fourier estocástica por medio de la expansión de polinomios caóticos (PCE). Este tipo de representación es la base de los elementos finitos estocásticos (SFEM) no intrusivos. En definitiva, los SFEM no intrusivos permiten sustituir el modelo directo original por uno subrogado.

La principal ventaja de la subrogación no es sólo la reducción del esfuerzo numérico, sino también la obtención de una manera sencilla la estructura estadística del problema. En la presente Tesis se presentan dos resultados originales (no se tiene constancia de su publicación) que permiten obtener la matriz de covarianza del modelo subrogado de manera analítica y, además,



determinar la influencia de cada parámetro en la respuesta del modelo. Estos dos resultados proporcionan una información de gran utilidad para interpretar el modelo. Además, pueden servir para proceder a una reducción de modelo prescindiendo de los parámetros que tienen menor influencia.

El principal inconveniente que presenta la subrogación es que para conseguir una buena aproximación se necesita emplear una expansión con polinomios de alto grado. Construir una expansión así puede requerir un coste numérico inasumible. Por ello, para construir un modelo que sea numéricamente asequible, hay que valerse de expansiones de grado bajo. Las aproximaciones mediante polinomios de grado bajo pueden tener un importante error de truncamiento. Uno de los resultados más importantes de esta Tesis es haber logrado un procedimiento para acotar superiormente el error que se produce al subrogar el modelo original sin incrementar en exceso el número de realizaciones del modelo directo original.

El uso de modelos subrogados de bajo orden implica iterar para alcanzar la solución. Es decir, con la primera iteración, a la luz de las observaciones disponibles, se actualiza la distribución de probabilidad *a priori* a una *a posteriori* que acota mejor los parámetros. En la siguiente iteración, la distribución *a posteriori* de la primera iteración es la distribución *a priori* de la segunda y así sucesivamente, hasta alcanzar el nivel de precisión deseado. En cada iteración, el modelo directo original se tiene que correr con dos propósitos: (i) construir el modelo subrogado y (ii) acotar el error de truncamiento. En los casos estudiados se ha observado que el error de truncamiento disminuye exponencialmente de manera regular. Por lo tanto, con los errores de truncamiento calculados inicialmente, se pueden estimar los del resto de iteraciones ahorrándose correr modelo directo original para estimar el error de truncamiento.

En definitiva, las aportaciones más importantes de la presente Tesis son las siguientes:

- Presentar un marco de resolución de los problemas inversos coherente con la incertidumbre que se tiene tanto en el modelo como en las observaciones.
- Desarrollar una metodología de cálculo que reúne las siguientes características de gran relevancia:
  - permite resolver problemas inversos que impliquen un número moderadamente alto de parámetros ( $N \approx 12$ ) a un coste numérico asequible y
  - desvela la estructura estadística del problema.

La información que se genera durante el proceso de calibración sirve al técnico que realiza la calibración para entender mejor el modelo que está empleando. Además, ofrece una respuesta efectiva a la pregunta si ese modelo es el adecuado para simular la excavación que está analizando.

## 6.2 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En esta Tesis se presenta una metodología eficiente para resolver problemas inversos. Se comentan seguidamente las líneas por las que la investigación puede seguir avanzando:

- La metodología desarrollada facilita los estudios de sensibilidad porque arroja los resultados como funciones de probabilidad. Sería muy

interesante emplear la metodología para valorar la aptitud de diferentes modelos constitutivos del terreno para representar excavaciones profundas. Además, podría resultar de utilidad valorar si se pueden establecer patrones generales de la influencia en la respuesta global de los diferentes parámetros que intervienen en el modelo.

- La metodología presentada permite estudiar situaciones de servicio ya que las respuestas del modelo se pueden considerar moderadamente no lineales. Esta situación no sucede cuando se está cerca de la rotura porque, los modelos se vuelven numéricamente inestables. Se propone la extensión de la metodología a situaciones próximas a la rotura.
- Para la validación de la metodología se ha empleado un modelo constitutivo que es capaz de reproducir muy bien las deflexiones de la pantalla, pero no los asientos en el trasdós de la misma o los esfuerzos en los elementos de arriostramiento. Los ejemplos estudiados en esta Tesis han consistido en calibrar el modelo a partir de los desplazamientos asumiendo que los errores de observación y del modelo eran iguales entre todas las respuestas consideradas. Por lo que se plantea como futura línea de investigación la calibración o resolución del problema inverso cuando las respuestas que se consideran tienen una fiabilidad muy dispar.
- En la presente Tesis se han empleado distribuciones uniformes para caracterizar los parámetros. Al considerar los errores gaussianos, las distribuciones de probabilidad resultantes han sido campanas de Gauss truncadas. Para poder continuar iterando, se han convertido las distribuciones resultantes en uniformes, tomando el intervalo que acumulase el 95% de probabilidad de ocurrencia. Se considera de interés

explorar el efecto del empleo de otro tipo de distribuciones a medida que se itera.

- Uno de los problemas que adolecen las técnicas espectrales, tal y como han sido planteadas en la presente Tesis, nace de la conocida “maldición de la dimensionalidad” (*dimensionality curse*) que es el incremento del tamaño del problema de manera exponencial cuando los parámetros aumentan de manera lineal. Los polinomios multidimensionales con los que se genera la respuesta subrogada se construyen tensorialmente a partir de polinomios multidimensionales. Esta circunstancia invita a considerar que el uso de técnicas basadas en la PGD (*Proper Generalized Decompositions*) [158] pueden ser una buena alternativa construir modelos subrogados a un coste numérico sensiblemente inferior.

# REFERENCIAS

- [1] Kulhawy FH, Phoon K-K. Observations on geotechnical reliability-based design development in North America. In: Honjo Y, Kusakabe O, Matsui K, Pokharel G, editors. Proceedings International Workshop on Foundation Design Codes and Soil Investigation in view of International Harmonization and Performance Based Design. Tokyo: Balkema; 2002. p. 31-48.
- [2] Calderon PA. On the use of numerical methods for the design of deep excavations with diaphragm walls in urban areas: possibilities and limitations. In: Topping BHV, Adam JM, Pallarés FJ, Bru R, Romero ML, editors. Developments and applications in Computational Structures Technology. Stirlingshire, UK: Saxe-Coburg Publications; 2010. p. 329-50.
- [3] Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. Philadelphia: SIAM; 2005.
- [4] Ghanem RG, Spanos PD. Stochastic finite elements: a spectral approach. New York: Springer; 1991.
- [5] Le Maître OP, Knio OM. Spectral Methods for Uncertainty Quantification with Applications to Computational Fluid Dynamics. New York: Springer; 2010.
- [6] Xiu D. Numerical methods for stochastic computations: A spectral method approach. Princeton: Princeton University Press; 2010.
- [7] von Wolffersdorff P-A. Results of field test and evaluation of the predictions and subsequent calculations. Workshop Sheet Pile Test Karlsruhe: Technical University of Delft; 1994.
- [8] Calvello M, Finno RJ. Selecting parameters to optimize in model calibration by inverse analysis. Computers and Geotechnics. 2004;31:411-25.
- [9] Chua CG, Goh ATC. Estimating wall deflections in deep excavations using Bayesian neural networks. Tunnelling and Underground Space Technology.

2005;20:400-9.

[10] Finno RJ, Calvello M. Supported excavations: Observational method and inverse modeling. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2005;131:826-36.

[11] Hashash YMA, Levasseur S, Osooli A, Finno RJ, Malécot Y. Comparison of two inverse analysis techniques for learning deep excavation response. *Computers and Geotechnics*. 2010;37:323-33.

[12] Hsiao E, Schuster M, Juang CH, Kung GT-C. Reliability Analysis and Updating of Excavation-Induced Ground Settlement for Building Serviceability Assessment. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2008;134:1448-58.

[13] Rechea C, Levasseur S, Finno RJ. Inverse analysis techniques for parameter identification in simulation of excavation support systems. *Computers and Geotechnics*. 2008;35:331-45.

[14] Tang Y-G, Kung GT-C. Application of nonlinear optimization technique to back analyses of deep excavation. *Computers and Geotechnics*. 2009;36:276-90.

[15] Juang CH, Luo Z, Atamturktur S, Huang H. Bayesian updating of soil parameters for braced excavations using field observations. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2012;139:395-406.

[16] Whittle AJ, Hashash YMA, Whitman RV. Analysis of deep excavation in Boston. *Journal of geotechnical engineering*. 1993;119:69-90.

[17] Kitanidis P. Bayesian and geostatistical approaches to inverse problems. In: Biegler L, Biros G, Ghattas O, Heinkenschloss M, Keyes D, Mallick B, et al., editors. *Large-scale inverse problems and quantification of uncertainty*. Chichester, UK: John Wiley & Sons; 2011. p. 71-85.

[18] Stefanou G. The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009;198:1031-51.

[19] Marzouk Y, Xiu D. A stochastic collocation approach to Bayesian inference in inverse problems. *Communications in Computational Physics*. 2009;6:826-47.

[20] Duncan J, Bentler D. Evolution of deep excavation technology. In: Katzenbach R, Arslan U, editors. *International Conference on Soil-Structure Interaction in Urban Civil Engineering*. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt; 1998.

[21] Kempfert H-G, Gebreselassie B. *Excavations and foundations in soft soils*. Berlin: Springer-Verlag; 2006.

- 
- [22] Ou C-Y. Deep excavation: Theory and practice. London: Taylor & Francis; 2006.
- [23] Asociación Científico-Técnica del Hormigón Estructural (ACHE). Monografía 20-21, Proyecto de Edificios Altos. Madrid: ACHE; 2013.
- [24] Bowles JE. Foundation analysis and design. 5th ed. New York: McGraw Hill; 1997.
- [25] Muzás Labad F. Consideraciones sobre la elección de coeficientes de balasto. *Revista de Obras Publicas*. 2003; 3427:45-51.
- [26] Zienkiewicz OC. El método de los elementos finitos. Madrid: Editorial Reverte; 1981.
- [27] Kung GT-C. Finite element analysis of wall deflection and ground movements caused by braced excavations. In: Moratal D, editor. *Finite Element Analysis*: Sciyo; 2012. p. 611-36.
- [28] Duncan J. The role of advanced constitutive relations in practical applications. In: Publications Committee XIII ICSMFE, editor. *Proceedings of the 13th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. New Delhi: Taylor & Francis; 1994. p. 31-48.
- [29] Finno RJ, Harahap IS. Finite element analyses of HDR-4 excavation. *Journal of geotechnical engineering*. 1991;117:1590-609.
- [30] Hashash YMA, Whittle AJ. Ground movement prediction for deep excavations in soft clay. *Journal of geotechnical engineering*. 1996;122:474-86.
- [31] Ng CWW, Yan RWM. Three-dimensional modelling of a diaphragm wall construction sequence. *Geotechnique*. 1999;49:825-34.
- [32] Puzrin AM, Alonso EE, Pinyol NM. *Geomechanics of failures*. Dordrecht: Springer; 2010.
- [33] Burland J. Ninth Laurits Bjerrum Memorial Lecture: "Small is beautiful"-the stiffness of soils at small strains. *Canadian Geotechnical Journal*. 1989;26:499-516.
- [34] Gens A. General report: Prediction, performance and design. In: Shibuya S, Mitachi T, Miura S, editors. *Symposium on Pre-Failure Deformation Characteristics of Geomaterials*. Rotterdam: Balkema; 1995. p. 1233-47.
- [35] Kung GT-C, Ou C-Y, Juang CH. Modeling small-strain behavior of Taipei clays for finite element analysis of braced excavations. *Computers and Geotechnics*. 2009;36:304-19.
- [36] Simpson B. Development and application of a new soil model for prediction

of ground movements. In: Houlsby GT, Schofield AN, editors. Predictive soil mechanics Proceedings of the Worth memorial symposium. Oxford: Thomas Telford; 1992. p. 628-43.

[37] Stallebrass S, Taylor R. The development and evaluation of a constitutive model for the prediction of ground movements in overconsolidated clay. *Geotechnique*. 1997;47:235-53.

[38] Leroueil S, Hight D. Behaviour and properties of natural soils and soft rocks. In: Tan TS, Phoon KK, Leroueil S, Hight DW, editors. Characterisation and engineering properties of natural soils. Lisse, the Netherlands: Swets & Zeitlinger; 2003. p. 29-254.

[39] Hsieh H-S, Wang C-C, Ou C-Y. Use of jet grouting to limit diaphragm wall displacement of a deep excavation. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2003;129:146-57.

[40] Ng CWW, Lings ML. Effects of modeling soil nonlinearity and wall installation on back-analysis of deep excavation in stiff clay. *Journal of geotechnical engineering*. 1995;121:687-95.

[41] Poh TY, Goh ATC, Wong IH. Ground movements associated with wall construction: Case histories. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2001;127:1061-9.

[42] Co-operation in Science and Technology (COST) Action C7. Guidelines for the Use of Advanced Numerical Analysis. London: Thomas Telford; 2002.

[43] von Wolffersdorff P-A. Verformungsprognosen für Stützkonstruktionen [PhD]. Karlsruhe: Universität Karlsruhe; 1997.

[44] Alonso EE, Gens A, Alcoverro J, Ortuño L. Unexpected behaviour of a large excavation in saturated sands. In: Cuéllar V, Dapena E, Alonso E, Echave JM, Gens A, de Justo JL, et al., editors. Proceedings of the 14th European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. Madrid: Millpress Science Publishers; 2007. p. 495-502.

[45] Faheem H, Cai F, Ugai K, Hagiwara T. Two-dimensional base stability of excavations in soft soils using FEM. *Computers and Geotechnics*. 2003;30:141-63.

[46] Finno RJ, Roboski JF. Three-dimensional responses of a tied-back excavation through clay. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2005;131:273-82.

[47] Roboski J, Finno RJ. Distributions of ground movements parallel to deep excavations in clay. *Canadian Geotechnical Journal*. 2006;43:43-58.



- 
- [48] Bfer G. An isoparametric joint/interface element for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1985;21:585-600.
- [49] Carol I, Alonso EE. A new joint element, for the analysis of fractured rock. In: *Australian Geomechanical Society, editor. Proceedings of 5th ISRM Congress*. Melbourne: ISRM; 1983.
- [50] Potts D, Zdravković L. *Finite element analysis in geotechnical engineering: Theory*. London: Thomas Telford; 1999.
- [51] Reul O, Randolph M. Piled rafts in overconsolidated clay: comparison of in situ measurements and numerical analyses. *Geotechnique*. 2003;53:301-15.
- [52] COI Report, Magnus R, Teh CI, Lau JM. Report on the incident at the MRT Circle Line worksite that led to the collapse of the Nicoll Highway on 20 April 2004. Singapore: Ministry of Manpower; 2005.
- [53] Hashash YMA, Jung S, Ghaboussi J. Numerical implementation of a neural network based material model in finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004;59:989-1005.
- [54] Jan JC, Hung S-L, Chi SY, Chern JC. Neural network forecast model in deep excavation. *Journal of Computing in Civil Engineering*. 2002;16:59-65.
- [55] Kung GT-C, Hsiao ECL, Schuster M, Juang CH. A neural network approach to estimating deflection of diaphragm walls caused by excavation in clays. *Computers and Geotechnics*. 2007;34:385-96.
- [56] Mestat P, Arafati N. Modélisation par éléments finis du comportement du rideau de palplanches expérimental de Hochstetten. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussée*. 1998;216:19-39.
- [57] Whitman RV. Organizing and evaluating uncertainty in geotechnical engineering. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2000;126:583-93.
- [58] Casagrande A. Role of the "calculated risk" in earthwork and foundation engineering. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1965;91:1-40.
- [59] Fell R. Landslide risk assessment and acceptable risk. *Canadian Geotechnical Journal*. 1994;31:261-72.
- [60] Rychlik I, Rydâen J. *Probability and risk analysis: An Introduction for Engineers*. Berlin: Springer; 2006.
- [61] Watterson B. *The Complete Calvin and Hobbes*. Kansas City: Andrews McMeel Publishing; 2005.

- [62] Poulos H, Carter J, Small J. Foundations and retaining structures-Research and practice. Proceedings of the 15th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. Istanbul: Balkema; 2002. p. 2527-606.
- [63] Kulhawy FH, Phoon K-K. Engineering judgment in the evolution from deterministic to reliability-based foundation design. In: Shackelford CD, Nelson PP, Roth MJS, editors. Uncertainty in the Geologic Environment-From Theory to Practice. Madison, US: ASCE; 1996. p. 29-48.
- [64] European Committee for Standardization. EN 1997-1:2004 Eurocode 7-Geotechnical design. Part 1: general rules. Brussels: CEN; 2004.
- [65] Ministerio de Fomento. Código Técnico de la Edificación. Documento Básico SE Seguridad estructural – Bases de cálculo. Madrid: Ministerio de Fomento; 2009.
- [66] Dirección General de Carreteras. Guía de cimentaciones en obras de carretera. 3rd ed. Madrid: Ministerio de Fomento; 2009.
- [67] Castaldo P, Calvello M, Palazzo B. Probabilistic analysis of excavation-induced damages to existing structures. Computers and Geotechnics. 2013;53:17-30.
- [68] Juang CH, Schuster M, Ou C-Y, Phoon K-K. Fully probabilistic framework for evaluating excavation-induced damage potential of adjacent buildings. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2010;137:130-9.
- [69] Schuster M, Juang CH, Roth M, Rosowsky D. Reliability analysis of building serviceability problems caused by excavation. Geotechnique. 2008;58:743-9.
- [70] Gioda G, Sakurai S. Back analysis procedures for the interpretation of field measurements in geomechanics. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1987;11:555-83.
- [71] Bjerrum L. Some notes on Terzaghi's method of working. In: Terzaghi K, editor. From Theory to Practice in Soil Mechanics. New York: John Wiley & Sons; 1960. p. 22-5.
- [72] Peck R. Advantages and limitations of the observational method in applied soil mechanics. Geotechnique. 1969;19:171-87.
- [73] Cividini A, Maier G, Nappi A. Parameter estimation of a static geotechnical model using a Bayes' approach. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. 1983;20:215-26.
- [74] Phoon K-K. Reliability-based design in geotechnical engineering: Computations and applications. New York: Taylor & Francis; 2008.
- [75] Choi S-K, Grandhi RV, Canfield RA. Reliability-based structural design.

Berlin: Springer; 2006.

[76] Niederreiter H. Quasi - Monte Carlo Methods: Wiley Online Library; 1992.

[77] Hasofer AM, Lind NC. Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1974;100:111-21.

[78] Rackwitz R. Reliability analysis—a review and some perspectives. *Structural safety*. 2001;23:365-95.

[79] Wu TH, Phoon K. Reliability analysis of slopes. *Reliability-Based Design in Geotechnical Engineering-Computations and Applications*. 2008:385-412.

[80] Juang CH, Fang SY, Li DL. Reliability analysis of liquefaction potential of soils using standard penetration test. In: Phoon KK, editor. *Reliability-based design in geotechnical engineering: computations and applications*. New York: Taylor & Francis; 2008. p. 498-526.

[81] Boone SJ, Westland J, Nusink R. Comparative evaluation of building responses to an adjacent braced excavation. *Canadian Geotechnical Journal*. 1999;36:210-23.

[82] Boone SJ. Ground-movement-related building damage. *Journal of geotechnical engineering*. 1996;122:886-96.

[83] Breitung K. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*. 1984;110:357-66.

[84] Der Kiureghian A, Lin H-Z, Hwang S-J. Second-order reliability approximations. *Journal of Engineering Mechanics*. 1987;113:1208-25.

[85] Sobol IM. *A primer for the Monte Carlo method*. Boca Raton: CRC press; 1994.

[86] Wang Y. Reliability-based design of spread foundations by Monte Carlo simulations. *Geotechnique*. 2011;61:677-85.

[87] McKay MD, Beckman RJ, Conover WJ. Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*. 1979;21:239-45.

[88] Beacher GB, Ingra TS. Stochastic FEM in settlement predictions. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. 1981;107:449-63.

[89] Phoon K-K, Quek S, Chow Y, Lee S. Reliability analysis of pile settlement. *Journal of geotechnical engineering*. 1990;116:1717-34.

[90] Matthies HG, Brenner CE, Bucher CG, Guedes Soares C. Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids-stochastic finite elements.

Structural safety. 1997;19:283-336.

[91] Deodatis G, Shinozuka M. Stochastic FEM analysis of nonlinear dynamic problems. *Stochastic Mechanics*. 1988;3:27-54.

[92] Deodatis G, Shinozuka M. Weighted integral method. II: Response variability and reliability. *Journal of Engineering Mechanics*. 1991;117:1865-77.

[93] Matthies HG, Keese A. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005;194:1295-331.

[94] Nouy A. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations: invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008;197:4718-36.

[95] Sudret B, Berveiller M. Stochastic finite element methods in geotechnical engineering. In: Phoon KK, editor. *Reliability-based design in geotechnical engineering: computations and applications*. New York: Taylor & Francis; 2008. p. 260-97.

[96] Boyd SP, Vandenberghe L. *Convex optimization*. Cambridge: Cambridge University Press; 2004.

[97] Goldberg DE, Holland JH. Genetic algorithms and machine learning. *Machine learning*. 1988;3:95-9.

[98] Press WH. *Numerical recipes: The art of scientific computing*. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2007.

[99] Nelder JA, Mead R. A simplex method for function minimization. *The computer journal*. 1965;7:308-13.

[100] Hastings WK. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*. 1970;57:97-109.

[101] Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN, Teller AH, Teller E. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*. 1953;21:1087-92.

[102] Payá I. Optimización heurística de pórticos de edificación de hormigón armado [PhD]. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia; 2007.

[103] Kirkpatrick S, Jr. DG, Vecchi MP. Optimization by simulated annealing. *science*. 1983;220:671-80.

[104] Glover F, Laguna M. *Tabu search*. Boston: Kluwer academic publishers; 1997.

- 
- [105] Dorigo M, Stützle T. The ant colony optimization metaheuristic: Algorithms, applications, and advances. In: Glover F, Kochenberger GA, editors. Handbook of metaheuristics. Berlin: Springer; 2003. p. 250-85.
- [106] Rumelhart DE, Hintont GE, Williams RJ. Learning representations by back-propagating errors. *Nature*. 1986;323:533-6.
- [107] Hashash YMA, Marulanda C, Ghaboussi J, Jung S. Systematic update of a deep excavation model using field performance data. *Computers and Geotechnics*. 2003;30:477-88.
- [108] Choi S-K, Grandhi RV, Canfield RA. Robust design of mechanical systems via stochastic expansion. *International Journal of Materials and Product Technology*. 2006;25:127-43.
- [109] Ledesma A, Gens A, Alonso EE. Parameter and variance estimation in geotechnical backanalysis using prior information. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1996;20:119-41.
- [110] Wolberg JR. Data analysis using the method of least squares: Extracting the most information from experiments. Berlin: Springer; 2006.
- [111] Ledesma A, Gens A, Alonso EE. Estimation of parameters in geotechnical backanalysis - I. Maximum likelihood approach. *Computers and Geotechnics*. 1996;18:1-27.
- [112] Poeter EP, Hill MC. Documentation of UCODE: A computer code for universal inverse modeling. Denver: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations; 1998.
- [113] Levasseur S, Malécot Y, Boulon M, Flavigny E. Soil parameter identification using a genetic algorithm. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2008;32:189-213.
- [114] Bolstad WM. Understanding computational Bayesian statistics. Chichester, UK: John Wiley & Sons; 2011.
- [115] Gens A, Ledesma A, Alonso EE. Estimation of parameters in geotechnical backanalysis - II. Application to a tunnel excavation problem. *Computers and Geotechnics*. 1996;18:29-46.
- [116] Kung GT-C, Juang CH, Hsiao E, Hashash Y. Simplified Model for Wall Deflection and Ground-Surface Settlement Caused by Braced Excavation in Clays. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2007;133:731-47.
- [117] Eykhoff P. System identification: Parameter and state estimation. London: Wiley-Interscience; 1974.

- [118] Hoshiya M, Sutoh A. Kalman Filter—Finite Element Method in Identification. *Journal of Engineering Mechanics*. 1993;119:197-210.
- [119] Wiener N. The Homogeneous Chaos. *American Journal of Mathematics*. 1938;60:897-936.
- [120] Narayanan VAB, Zabaras N. Stochastic inverse heat conduction using a spectral approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004;60:1569-93.
- [121] Sudret B. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*. 2008;93:964-79.
- [122] Cameron RH, Martin WT. The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. *The Annals of Mathematics*. 1947;48:385-92.
- [123] Babuska I, Tempone R, Zouraris GE. Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2004;42:800-25.
- [124] Myers RH, Anderson-Cook CM. Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments. New Jersey: John Wiley & Sons; 2009.
- [125] Berveiller M. Éléments finis stochastiques: Approaches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité [PhD]. Clermont-Ferrand: Université Blaise Pascal; 2005.
- [126] Sudret B, Berveiller M, Lemaire M. Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponse stochastiques: une approche unifiée. 17ème Congrès Français de Mécanique (CFM17). Troyes 2005.
- [127] El Moselhy TA, Marzouk YM. Bayesian inference with optimal maps. *Journal of Computational Physics*. 2012;231:7815-50.
- [128] Frangos M, Marzouk Y, Willcox K, van Bloemen Waanders B. Surrogate and reduced-order modeling: A comparison of approaches for large-scale statistical inverse problems. In: Biegler L, Biros G, Ghattas O, Heinkenschloss M, Keyes D, Mallick B, et al., editors. Large-scale inverse problems and quantification of uncertainty. Chichester, UK: John Wiley & Sons; 2011. p. 123-49.
- [129] Eldred M, Giunta A, Collis S, Alexandrov N, Lewis R. Second-order corrections for surrogate-based optimization with model hierarchies. *Proceedings of the 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. Albany, USA2004.

- 
- [130] Blizniouk N, Ruppert D, Shoemaker C, Regis R, Wild S, Mugunthan P. Bayesian Calibration of Computationally Expensive Models Using Optimization and Radial Basis Function Approximation. *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 2008;17:270-94.
- [131] Kennedy MC, O'Hagan A. Bayesian calibration of computer models. *Journal of the Royal Statistical Society*. 2001;63:425-64.
- [132] Falcó A, Hackbusch W. On minimal subspaces in tensor representations. *Foundations of Computational Mathematics*. 2012;12:765-803.
- [133] Falcó A, Nouy A. Proper generalized decomposition for nonlinear convex problems in tensor Banach spaces. *Numerische Mathematik*. 2012;121:503-30.
- [134] Galbally D, Fidkowski K, Willcox K, Ghattas O. Non - linear model reduction for uncertainty quantification in large - scale inverse problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2010;81:1581-608.
- [135] Wang J, Zabaras N. Using Bayesian statistics in the estimation of heat source in radiation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2005;48:15-29.
- [136] Arridge S, Kaipio J, Kolehmainen V, Schweiger M, Somersalo E, Tarvainen T, et al. Approximation errors and model reduction with an application in optical diffusion tomography. *Inverse Problems*. 2006;22:175-95.
- [137] Balakrishnan S, Roy A, Ierapetritou MG, Flach GP, Georgopoulos PG. Uncertainty reduction and characterization for complex environmental fate and transport models: An empirical Bayesian framework incorporating the stochastic response surface method. *Water Resources Research*. 2003;39.
- [138] Marzouk YM, Najm HN. Dimensionality reduction and polynomial chaos acceleration of Bayesian inference in inverse problems. *Journal of Computational Physics*. 2009;228:1862-902.
- [139] Kaipio JP, Somersalo E. *Statistical and computational inverse problems*. New York: Springer; 2005.
- [140] Higdon D, Lee H, Holloman C. Markov chain Monte Carlo-based approaches for inference in computationally intensive inverse problems. In: Berger J, Bernardo M, JO B, Dawid A, Smith D, AFM H, et al., editors. *Bayesian Statistics 7: Proceedings of the Seventh Valencia International Meeting*. Valencia: Oxford Science Publications; 2003. p. 181-98.
- [141] Efendiev Y, Hou T, Luo W. Preconditioning Markov chain Monte Carlo simulations using coarse-scale models. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2006;28:776-803.

- [142] Young GA, Smith RL. Essentials of statistical inference. Cambridge: Cambridge University Press; 2005.
- [143] Biegler L, Biros G, Ghattas O, Heinkenschloss M, Keyes D, Mallick B, et al. Large-scale inverse problems and quantification of uncertainty. Chichester, UK: John Wiley & Sons; 2011.
- [144] Klimke A. Sparse grid interpolation toolbox–user’s guide. V5.1 ed. Stuttgart: IANS Universität Stuttgart; 2008.
- [145] Beck J, Au S. Bayesian Updating of Structural Models and Reliability using Markov Chain Monte Carlo Simulation. Journal of Engineering Mechanics. 2002;128:380-91.
- [146] Cheney W, Kincaid D. Numerical mathematics and computing. 6th ed. Belmont, USA: Thomson Brooks/Cole; 2012.
- [147] Gesto Beiroa JM, Gens A, Vaunat J. Smoothing of yield surfaces and a reformulation of multi-surface plasticity. In: Oñate E, Owen DRJ, Peric D, Suárez B, editors. XI International Conference on Computational Plasticity Fundamentals and Applications. Barcelona: CIMNE; 2011. p. 921-31.
- [148] Look B. Handbook of geotechnical investigation and design tables. London: Taylor & Francis; 2007.
- [149] Naval Facilities Engineering Command (NavFac). Design Manual 7.02. Foundations & Earth Structures. Alexandria, USA: US Navy; 1986.
- [150] The MathWorks I. Matlab & optimization toolbox. R2010a ed2010. p. Computer Program.
- [151] Bakker K, Beem R. Modelling of the sheet pile wall test in Karlsruhe 1993. In: Smith IM, editor. Proceedings of Third European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering - ECONMIG 94. Manchester: Taylor & Francis; 1994.
- [152] Levasseur S. Analyse inverse en géotechnique: développement d’une méthode à base d’algorithmes génétiques [PhD]. Grenoble: Université Joseph Fourier; 2007.
- [153] Bakker K. Soil retaining structures: development of models for structural analysis. 2000.
- [154] Bakker K. Backanalysis of Sheetpile Wall Test Karlsruhe (1993) Applying Inverse Analysis. In: Cividini A, editor. Proceedings of the Fourth European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering - NUMGE 98. Udine: Springer; 1998. p. 67-76.



- [155] Levasseur S, Malécot Y, Boulon M, Flavigny E. Statistical inverse analysis based on genetic algorithm and principal component analysis: Applications to excavation problems and pressuremeter tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2010;34:471-91.
- [156] Schanz T, Vermeer P, Bonnier P. The hardening soil model: formulation and verification. In: Brinkgreve RBJ, editor. *Proceedings of the International Symposium beyond 2000 in Computational Geotechnics*. Amsterdam: Balkema; 1999. p. 281-96.
- [157] Jaky J. Pressure in silos. *Proceedings of the 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Rotterdam 1948. p. 103-7.
- [158] Chinesta F, Leygue A, Bordeu F, Aguado J, Cueto E, Gonzalez D, et al. Pgd-based computational vademecum for efficient design, optimization and control. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2013;20:31-59.