UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda.

Parte IV: Cuando el mercado no es perfecto y existe especulación

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Sánchez Sánchez, Almudena; Villanueva Micó, Rafael Jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; alsncsnc@posgrado.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este trabajo se estudia una variación del modelo dinámico clásico de oferta y demanda con inventario que considera en su formulación la posibilidad de que los demandantes sean especuladores. El modelo está basado en la formulación de una ecuación diferencial ordinaria que describe la trayectoria temporal del precio a partir de una función de oferta estándar y una función de demanda que considera la posible existencia de compradores que actúen con fines especulativos. En el trabajo se interpreta económicamente el modelo, se obtiene su solución y analiza su comportamiento a largo plazo. Posteriormente, se relaciona la solución del modelo con la que proporciona el modelo clásico sin especulación. El trabajo permite transitar de forma natural desde el modelo dinámico clásico de oferta y demanda con condición de equilibrio (es decir, asumiendo que el mercado es perfecto) a una versión más compleja del mismo que permite interpretar la existencia de especuladores, lo cual creemos resulta muy instructivo desde el punto de vista formativo.

2 Introducción

Este trabajo viene a completar una serie de artículos previos sobre modelos dinámicos de oferta y demanda basados en ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s) que se han publicado ya en forma de objetos docentes (véase [1] y [2]) o que han sido enviados recientemente para su publicación [3]. Las contribuciones [1] y [2] se basan en e.d.o.'s lineales de primer orden, mientras que tanto [3] como el presente trabajo hacen uso de los resultados sobre e.d.o.'s lineales de segundo orden expuestos en [4].

Para comprender mejor las analogías y diferencias que existen en esta serie de trabajos sobre modelos dinámicos continuos de oferta y demanda, en primer lugar, resumiremos las ideas centrales desarrolladas en [1]-[3].

En [1], se estudió el modelo descrito en la Ec1. Para describir el precio, $p = p(t)$, de bien con funciones lineales de oferta, $q^S = q^S(t)$, y demanda, $q^D = q^D(t)$, estándar (demanda decreciente con el precio y oferta creciente con el precio) en un mercado imperfecto (sin condición de equilibrio) donde el ajuste del precio se realiza de forma instantánea y directamente proporcional al exceso de demanda (o equivalentemente, en función del inventario existente).

$$\left.\begin{array}{lcll} q^D(t) & = & a - bp(t) & , \quad a,b>0, \\ q^S(t) & = & -c + dp(t) & , \quad c,d>0, \\ p'(t) & = & \alpha\left(q^D(t) - q^S(t)\right) & , \quad \alpha>0. \end{array}\right\}$$

Ecuación 1. Modelo dinámico estándar de ajuste del precio dependiendo del exceso de demanda (modelo estudiado en la referencia [1]).

El modelo puede reescribirse en términos de una e.d.o. lineal de primer orden cuya solución determina la trayectoria temporal del precio (véase Ec.2).

$$\left.\begin{array}{rcl} p'(t) &=& -\alpha\left(b+d\right)p(t)+\alpha(a+c), \\ p(0) &=& p_0. \end{array}\right\} \Rightarrow p(t)=e^{-\alpha(b+d)t}\left(p_0-\frac{a+c}{b+d}\right)+\frac{a+c}{b+d}.$$

Ecuación 2. Ecuación diferencial y su solución para la dinámica del precio (modelo estudiado en la referencia [1]).

En [2], se generaliza el modelo descrito en [1] al considerar que la función de demanda puede depender de la velocidad del precio, $p'(t)$ (véase Ec.3). En función del signo del parámetro e que acompaña a $p'(t)$, el modelo permite describir un comportamiento especulador de los compradores.

$$\left.\begin{array}{rclcc} q^D(t) &=& a-bp(t)+ep'(t) & , & a,b>0, e\in IR \\ q^S(t) &=& -c+dp(t) & , & c,d>0, \\ p'(t) &=& \alpha\left(q^D(t)-q^S(t)\right) & , & \alpha>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lcl} e>0 & \Rightarrow & \text{hay especulación,} \\ e<0 & \Rightarrow & \text{no hay especulación.} \end{array}$$

Ecuación 3. Modelo dinámico de ajuste del precio con especulación en la demanda (modelo estudiado en la referencia [2]).

Este modelo puede reescribirse en términos de una e.d.o. lineal de primer orden cuya resolución proporciona la trayectoria temporal del precio (véase Ec.4).

$$\left.\begin{array}{rcl} p'(t) &=& -\dfrac{\alpha\left(b+d\right)}{1-\alpha e}p(t)+\dfrac{\alpha(a+c)}{1-\alpha e}, \\ p(0) &=& p_0. \end{array}\right\} \Rightarrow p(t)=e^{-\frac{\alpha(b+d)}{1-\alpha e}t}\left(p_0-\frac{a+c}{b+d}\right)+\frac{a+c}{b+d}.$$

Ecuación 4. Ecuación diferencial para la dinámica del precio (modelo estudiado en la referencia [2]).

La conexión de estos modelos también tiene lugar en el largo plazo, ya que, en ambos casos convergen al mismo precio de equilibrio. En el caso del modelo dado en la Ec.1 esta convergencia es incondicional, es decir, no requiere imponer ninguna condición a los parámetros del modelo para que se dé la convergencia. En el segundo caso, dicha convergencia se produce cuando se cumpla la siguiente restricción $e<1/\alpha$. Obsérvese a partir de la Ec.3 que por tanto la convergencia al precio de equilibrio tiene lugar para cierta región de variación del parámetro e donde se presenta especulación, pues $\alpha>0$. El valor de precio de equilibrio al cual convergen ambos modelos, es precisamente el valor del modelo estático clásico de oferta y demanda en un mercado perfecto o con condición de equilibrio (véase Ec. 5).

$$\left.\begin{array}{rclcl} Q^D &=& a-bP & , & a,b>0, \\ Q^S &=& -c+dP & , & c,d>0, \\ Q^D &=& Q^S & , & \text{(condición de equilibrio).} \end{array}\right\} \Rightarrow P^e=\frac{a+c}{b+d}.$$

Ecuación 5. Modelo estático lineal de equilibrio de oferta y demanda y su precio de equilibrio.

En el trabajo [3] se estudia un modelo dinámico de oferta y demanda en un mercado perfecto donde se permite que la función de demanda pueda representar en ciertos casos la existencia de especulación por parte de los compradores. Existen dos diferencias fundamentales entre este modelo y el estudiado en la referencia [2]: el mercado es ahora perfecto (i.e., contiene una condición de equilibrio) y se introduce en la función demanda no solo la primera derivada del precio, que representa la velocidad del precio, si no también la segunda derivada, que representa la aceleración del precio (véase Ec.6). Asumiendo que el precio crece, $P'(t)>0$, si $m>0$ el modelo representa un comportamiento especulador de los compradores.

$$\left.\begin{array}{lcll} Q^D(t) & = & a-bP(t)+mP'(t)+nP''(t) & , \quad a,b>0,\ m,n\in \mathbb{R}, \\ Q^S(t) & = & -c+dP(t) & , \quad c,d>0, \\ Q^D(t) & = & Q^S(t) & , \quad \text{(condición de equilibrio).} \end{array}\right\}$$

Ecuación 6. Modelo dinámico lineal de equilibrio con expectativas en la demanda (modelo estudiado en la referencia [3]).

Esto hace que el modelo que representa la variación del precio sea genuinamente diferente del modelo [2] pues conduce a una e.d.o. lineal de segundo orden (véase Ec.7). Las soluciones de dicha e.d.o. son más ricas desde el punto de vista de su comportamiento matemático y ello permite describir nuevos comportamientos de los precios del mercado, incluyendo la oscilación de los precios. Debido a que las expresiones que se obtienen en este análisis son más complejas que las mostrados en las Ecs.2 y 4 anteriores, no mostramos aquí las diferentes soluciones del modelo y remitimos al lector a la referencia [3]. Si cabe señalar que bajo determinados supuestos sobre los parámetros, el modelo a largo plazo sigue convergiendo al valor $P^e=(a+c)/(b+d)$ del modelo estático clásico incluyo en situaciones que permiten considerar un comportamiento especulador tal y como por otra parte también sucedía con el modelo estudiado en [2], como hemos señalado anteriormente.

$$\left.\begin{array}{rcl} P''(t)+\dfrac{m}{n}P'(t)-\dfrac{b+d}{n}P(t) & = & -\dfrac{a+c}{n}, \\ P(0) & = & P_0, \\ P'(0) & = & P_1. \end{array}\right\}$$

Ecuación 7. Ecuación diferencial para la dinámica del precio demanda (modelo estudiado en la referencia [3]).

En este trabajo vamos a completar los trabajos [1]-[3] estudiando un modelo de oferta y demanda en un mercado imperfecto, es decir, sin equilibrio (a diferencia de l modelo presentado en [3]) donde la función de demanda (a semejanza del modelo presentado en [3]) depende de la velocidad y de la aceleración del precio. Veremos como dicho modelo puede reescribirse en términos de una e.d.o. lineal de segundo orden (a semejanza del modelo estudiado en [3]) y usando los resultados presentados en [4] determinaremos la trayectoria temporal del precio. Estudiaremos cómo ambos modelos se relacionan en el largo plazo.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Completar el estudio de otros modelos dinámicos de oferta y demanda en mercados imperfectos y basado en una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.
- Resolver modelos dinámicos continuos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes y estudiar su comportamiento asintótico.

3.1 Un modelo dinámico de oferta y demanda en un mercado imperfecto y con expectativas en la demanda: Planteamiento del modelo

Como hemos indicado en la Introducción, vamos a continuación a considerar un modelo dinámico continuo de oferta y demanda en un mercado imperfecto y donde permitimos que la función de demanda depende de la velocidad, de $P'(t)$, y de la aceleración, $P''(t)$, del precio lo cual permite considerar la existencia de compradores que toman sus decisiones con fines especulativos. En la Ec.8 se explicita el modelo. Para la función de oferta, al igual que en los modelos anteriormente presentados, se asumirá una función lineal que solo depende del precio $P(t)$.

$$\left.\begin{array}{lcll} Q^D(t) & = & a-bP(t)+mP'(t)+nP''(t) & , \quad a,b>0,\ m,n\in \mathrm{IR}, \\ Q^S(t) & = & -c+dP(t) & , \quad c,d>0, \\ P'(t) & = & j(Q^D(t)-Q^S(t)) & , \quad j>0, \quad \text{(ley de ajuste de precios).} \end{array}\right\}$$

Ecuación 8. Modelo dinámico lineal en un mercado imperfecto equilibrio con expectativas en la demanda.

La función de demanda puede interpretarse exactamente igual que se hizo en la referencia [3] en términos de los signos de los parámetros m y n. Del mismo modo, la interpretación de la ley de ajuste de precios puede encontrarse en [1], [2], por lo que, aún siendo importante en la descripción del modelo, no redundaremos en ello.

Para calcular la trayectoria temporal del precio sustituimos las funciones de demanda y oferta en la ley de ajuste de precios dado en la Ec.3. A continuación, ordenamos los términos de la expresión resultante de modo que siga el patrón de una e.d.o. lineal no homogénea o completa a coeficientes constantes de segundo orden (véase [4]). Asumiendo $n\neq 0$, esto nos conduce al modelo expresado en la Ec.9. En dicha ecuación se asume que el precio observado en el instante inicial $(t=0)$ es P_0 y que en dicho instante la tendencia o velocidad a la cual varía el precio está dado por P_1, es decir, $P(0)=P_0$ y $P'(0)=P_1$.

$$\left.\begin{array}{rcl} P''(t)+\dfrac{mj-1}{nj}P'(t)-\dfrac{b+d}{n}P(t) & = & -\dfrac{a+c}{n}, \\ P(0) & = & P_0, \\ P'(0) & = & P_1. \end{array}\right\}$$

Ecuación 9. Ecuación diferencial para la dinámica del precio.

3.2 Determinación de la trayectoria temporal del precio

En este apartado se calculará cómo varía el precio en cada instante, en otras palabras, daremos una solución *P(t)* del problema de valor inicial dado en la Ec.9.

Para ello utilizaremos los resultados teóricos expuestos en [4]. Según la teoría de las e.d.o.'s lineales completas (o no homogéneas) de segundo orden a coeficientes constantes, $P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=b$, la solución general de dicha ecuación, que denotaremos por $P^{gc}(t)$, se describe como suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada $P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=0$ (esto es, aquella cuyo término independiente es nulo, $b=0$) y, que denotaremos por $P^{gh}(t)$ y, una solución particular de la ecuación completa, $P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=b$, y que denotaremos por $P^{pc}(t)$. Resumiendo: $P^{gc}(t)=P^{gh}(t)+P^{pc}(t)$.

La solución $P^{gh}(t)$ se calcula ensayando soluciones de la forma $P^{gh}(t)=e^{rt}$, lo cual conduce a que el parámetro r debe ser solución de la denominada ecuación característica, que es la ecuación algebraica, $r^2+a_1r+a_2=0$, asociada la e.d.o. homogénea. En la Ec.10 se resume la obtención de $P^{gh}(t)$. Se observa que esta solución tiene tres expresiones distintas dependiendo del carácter real (simple o doble) o complejo de las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica. Además, como se trata de una solución general de una e.d.o. lineal de orden dos, ésta depende de dos constantes libres, c_1 y c_2, que se determinan a partir de las dos condiciones iniciales $P(0)=P_0$ y $P'(0)=P_1$.

Por otro lado, una solución particular $P^{pc}(t)$ de la e.d.o. completa $P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=b$ se obtiene por ensayo de, primero funciones constantes, después, cuando éstas no son posibles, funciones lineales afines y, cuando éstas últimas no son posibles, cuadráticas puras, no siendo necesario el uso de funciones más complicadas porque se trata de determinar "una" solución particular y con estos tres tipos de funciones polinómicas se cubren todas las posibles casuísticas. En la Ec.11 se resumen las diferentes expresiones que se obtienen para $P^{pc}(t)$.

$$P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=0 \overset{P(t)=e^{rt}}{\Rightarrow} r^2+a_1r+a_2=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \\ r_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \end{cases}$$

$$P^{gh}(t)=\begin{cases} c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t} & \text{si} \quad r_1\neq r_2\in IR, \quad r_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \quad r_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \\ c_1e^{rt}+c_2te^{rt} & \text{si} \quad r_1=r_2=r\in IR, \quad r=\dfrac{-a_1}{2}, \\ e^{\alpha t}\left[c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t)\right] & \text{si} \quad r_1=\alpha+i\beta, r_2=\overline{r_1}=\alpha-i\beta \quad \alpha=\dfrac{-a_1}{2}, \quad \beta=\dfrac{\sqrt{4a_2-(a_1)^2}}{2}. \end{cases}$$

Ecuación 10. Resumen de la obtención de la solución general $P^{gh}(t)$ de una e.d.o. lineal homogénea (o no completa) a coeficientes constantes de segundo orden.

$$P^{pc}(t)=\begin{cases}\dfrac{b}{a_2}=P_e & \text{si} \quad a_2\neq 0,\\ \dfrac{b}{a_1}t & \text{si} \quad a_2=0, a_1\neq 0,\\ \dfrac{b}{2}t^2 & \text{si} \quad a_1=a_2=0.\end{cases}$$

Ecuación 11. Resumen de la obtención de una solución particular $P^{pc}(t)$ de una e.d.o. lineal no homogénea (o completa) a coeficientes constantes de segundo.

Para aplicar de forma directa los resultados generales mostrados en las Ecs.10-11, primero necesitamos identificar los datos del modelo de precios dado en la Ec.9 con los del patrón general. Esta identificación se explicita en la Ec.12.

$$a_1=\frac{mj-1}{nj}, \quad a_2=-\frac{b+d}{n}\neq 0 \quad , \quad b=-\frac{a+c}{n}.$$

Ecuación 12. Identificación de los datos del modelo con los del patrón que proporciona la solución.

Obsérvese que a_2 y b coinciden con los valores del modelo estudiado en [3], y ambos modelos solo difieren en el coeficiente a_1 por lo que el análisis que a continuación realizaremos es muy similar al presentado allí.

En primer lugar observemos que la solución particular está dada por la expresión que aparece en la Ec.13. ya que como por hipótesis $b>0$ y $d>0$ (véase Ec.8), entonces $a_2\neq 0$.

$$P^{pc}(t)=\frac{-\frac{a+c}{n}}{-\frac{b+d}{n}}=\frac{a+c}{b+d}.$$

Ecuación 13. Expresión de la solución particular del modelo.

Es interesante observar que esta solución coincide con la del modelo estático clásico de oferta y demanda dada en la Ec.1. como ya señalamos anteriormente.

Para el cálculo de $P^{gh}(t)$ distinguiremos tres casos en función de la naturaleza de las raíces de la ecuación característica, lo cual depende del signo del discriminante $\Delta=(a_1)^2-4a_2=\left(\frac{mj-1}{nj}\right)^2+4\left(\frac{b+d}{n}\right)$:

- Caso 1: Si $\Delta>0\equiv\left(\frac{mj-1}{nj}\right)^2>-4\left(\frac{b+d}{n}\right)$. Esto significa que las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica son reales y distintas y, por tanto, según la Ec.10 y la identificación dada en la Ec.12 se obtiene la primera expresión dada en la Ec.14.

- Caso 2: Si $\Delta = 0 \equiv \left(\frac{mj-1}{nj}\right)^2 = -4\left(\frac{b+d}{n}\right)$. Esto significa que las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica son reales e iguales ($r_1 = r_2 = r$) y, por tanto, según la Ec.10 y la identificación dada en la Ec.12 se obtiene la segunda expresión dada en la Ec.14.

- Caso 3: Si $\Delta < 0 \equiv \left(\frac{mj-1}{nj}\right)^2 < -4\left(\frac{b+d}{n}\right)$. Esto significa que las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica son complejas y conjugadas y, por tanto, según la Ec.10 y la identificación dada en la Ec.12 se obtiene la tercera expresión dada en la Ec.14.

$$P^{gh}(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} & \text{donde } r_1 = \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{mj-1}{nj}\right) + \sqrt{\left(\frac{mj-1}{nj}\right)^2 + 4\left(\frac{b+d}{n}\right)}\right), r_2 = \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{mj-1}{nj}\right) - \sqrt{\left(\frac{mj-1}{nj}\right)^2 + 4\left(\frac{b+d}{n}\right)}\right) \quad \text{si } \Delta > 0, \\ c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} & \text{donde } r_1 = r_2 = r = -\frac{mj-1}{2nj} \quad \text{si } \Delta = 0, \\ e^{\alpha t}\left[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\right] & \text{donde } r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta, \alpha = -\frac{mj-1}{2nj}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-4\left(\frac{b+d}{n}\right) - \left(\frac{mj-1}{nj}\right)^2} \quad \text{si } \Delta < 0. \end{cases}$$

Ecuación 14. Expresión de la solución general de la e.d.o. homogénea asociada al modelo.

A partir de las Ecs.13-14 y la relación $P^{gc}(t) = P^{gh}(t) + P^{pc}(t)$ se obtiene la solución general del modelo dado en la Ec.9, la cual dependerá de dos constantes libres c_1 y c_2 (véase Ec.14) que, como se ha señalado anteriormente, se determinan a partir de las condiciones iniciales $P(0) = P_0$ y $P'(0) = P_1$. Debido a que las expresiones teóricas son muy farragosas evitamos expresar la solución del modelo dado en la Ec.9 en términos de los datos.

A continuación, daremos a modo de ilustración algunos resultados de interés económico que pueden obtenerse a partir del estudio realizado hasta el momento.

- Si $n > 0$ entonces $-4\left(\frac{b+d}{n}\right) < 0$, ya que, $b > 0$ y $d > 0$ por hipótesis. En consecuencia estaremos ante el Caso 1: $\Delta > 0 \equiv \left(\frac{mj-1}{nj}\right)^2 > -4\left(\frac{b+d}{n}\right)$, es decir, las raíces de la ecuación característica son reales y distintas. Además, la expresión bajo el signo de la raíz excede necesariamente a $((mj-1)/(nj))^2$ y entonces la raíz cuadrada será mayor que $|(mj-1)/(nj)|$ y, con independencia del signo de la magnitud $mj-1$, la raíz r_1 será positiva (salvo que $c_1 = 0$). En este caso el valor del precio de equilibrio a largo plazo (también denominado equilibrio intertemporal) tenderá a infinito. Si $c_1 = 0$, como $r_2 < 0$ (con independencia del signo de $mj-1$), $P^{gh}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, y por tanto la trayectoria temporal del precio tenderá al valor $(a+c)/(b+d)$ de la solución particular de la e.d.o. completa.

- Si $n<0$, los tres casos presentados en la Ec.14 son posibles. Si además $mj<1$, en el Caso 1 el radicando es menor que $((mj-1)/(nj))^2$ y por tanto la raíz es menor que $|(mj-1)/(nj)|=(mj-1)/(nj)$. Por tanto $r_1<0$ como $r_2<0$. Como las exponenciales que definen la solución tienen exponente negativo ambas tienden a cero cuando $t\to\infty$ y la solución del modelo dado en la Ec.9 tiende a la solución particular de la e.d.o. completa dada en la Ec.13, a saber, $(a+c)/(b+d)$. Lo mismo sucede en el Caso 2 ya que claramente $r=-(mj-1)/(2nj)<0$ y el término te^{rt} de la solución tiende a cero cuando $t\to\infty$ como puede comprobarse aplicando la regla de L'Hôpital (véase Ec.15). Finalmente, en el Caso 3 de nuevo se tiene que $\alpha=-(mj-1)/(2nj)<0$ y tanto como el término $c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t)$ está acotado y $e^{\alpha t}\to 0$ cuando $t\to\infty$, la solución también tiende a $(a+c)/(b+d)$. Resumiendo en cualquiera de los casos si $n<0$ y $mj<1$ (condición que en particular se cumple si $m<0$) la estabilidad dinámica del equilibrio está asegurada. Esta situación permite conectar el comportamiento a largo plazo del modelo dinámico dado en la Ec.9 con el precio de equilibrio del modelo estático de oferta y demanda clásico de la Ec.5. De este modo, podemos interpretar que en cada instante arbitrario, pero fijo, el precio de equilibrio de un modelo de oferta y demanda de un bien en un mercado imperfecto con ajuste de precios en función del exceso de la demanda puede interpretarse como el precio intertemporal o a largo plazo de un modelo dinámico que alcanza su estabilidad en el "*presente*".

$$\text{Si } r<0:\ \lim_{t\to\infty} te^{rt}=\{\infty\times 0\}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{-rt}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\overset{\text{L`Hôpital}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{(t)'}{\left(e^{-rt}\right)'}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{-r\,e^{-rt}}=-\frac{1}{r}\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{rt}}_{=0}=0.$$

Ecuación 15. Comprobación del valor del límite en el Caso 2 usando la regla de L'Hôpital.

Obsérvese que a diferencia de lo que sucede con el comportamiento de la demanda en los modelos dinámicos estudiados en las referencias [1] y [2], basados en e.d.o.'s de primer orden, ahora en virtud del Caso 3 (véase Ec.14) se presentan nuevos comportamientos de los consumidores debido a la aparición de funciones trigonométricas (seno y coseno) en la trayectoria temporal del precio que producen oscilaciones cuando la expresión del precio se sustituye en la función de demanda.

4 Cierre

En este trabajo se ha estudiado un modelo dinámico de mercado imperfecto (sin condición de equilibrio) que permite introducir nuevos comportamientos de los consumidores. Los resultados obtenidos se han conectado con los estudiados en otros modelos donde el mercado es también imperfecto e incluso con los correspondientes a modelos de oferta y demanda con condición de equilibrio. El estudio realizado permite ilustrar la potencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en el estudio de modelos dinámicos en Economía para obtener resultados más complejos y conectarlos con su correspondiente interpretación económica. Este estudio puede completarse con otros modelos que pueden hallarse en las referencias [5] y [6].

5 Bibliografía

[1] Cortés, J.C., Romero J.V. y Roselló Mª.D.: "Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte I: Cuando el ajuste del precio depende únicamente del exceso de demanda y del inventario". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia (http://hdl.handle.net/10251/16535) .

[2] Cortés, J.C., Romero J.V. y Roselló Mª.D.: "Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte II: Cuando el ajuste del precio depende del inventario y existe especulación". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE (http://hdl.handle.net/10251/17061).

[3] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D., Sánchez-Sánchez A. y Villanueva R.J.: "Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte III: Cuando el mercado es perfecto y existe especulación". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes.

[4] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D., Sánchez-Sánchez A. y Villanueva R.J.: "Modelos dinámicos continuos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden a coeficientes constantes". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE.

[5] Shone, R.: "Economic Dynamics", 2nd edition, Ed. Cambridge, 2002.

Este excelente texto presenta el estudio de diferentes modelos económicos que aparecen en Microeconomía y en Macroeconomía con el denominador común de ser todos ellos de tipo de dinámico. Combina la exposición de los modelos con la presentación de software para analizarlos.

[6] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en economía.