UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Representació de nombres enters: el conveni "excés Z"

Cognoms, nom	Martí Campoy, Antonio (amarti@disca.upv.es)
Departament	Informàtica de Sistemes i Computadors
Centre	Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Informàtica

UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

1 Resum de les idees clau

En aquest article es tracta la problemàtica de la representació dels nombres enters en els computadors. També es presentarà una possible solució a aquest problema, que rep el nom de "representació en excés Z". Els coneixements previs que necessites per treballar aquest article es presenten en la taula 1.

Taula 1. Coneixements previs

Coneixements previs
1. Sistemes de numeració posicionals
2. Sistema de numeració binari
3. Canvis de base, especialment binari
4. Aritmètica bàsica en base 2

2 Objectius

Quan acabes de llegir aquest article docent i reproduïsques els exemples presentats, hauràs de ser capaç de **representar** nombres enters en binari **aplicant** el conveni anomenat "excés Z". A més a més, podràs **calcular** el rang de representació per a una grandària de bits determinada. També seràs capaç de **realitzar** operacions aritmètiques de suma i resta de nombres enters en binari i d'extensió de signe utilitzant la representació en excés Z. Finalment, podràs raonar sobre els avantatges i desavantatges d'aquest conveni de representació de nombres enters.

3 Introducció

En la vida quotidiana els nombres enters es representen mitjançant els deu símbols (del 0 al 9) de la base decimal, juntament amb els símbols "+" i "-" per identificar els nombres positius i negatius, respectivament.

Quan es representen nombres enters en un computador (per emmagatzemar-los, operar-los o comunicar-los) el problema que hi apareix és que en els circuits digitals només es poden utilitzar dos valors, normalment representats pels símbols 0 i 1. No hi ha cap possibilitat de representar un tercer símbol ni un quart per distingir-ne els nombres positius dels nombres negatius.

D'aquesta manera sorgeix la necessitat de crear i definir convenis per a codificar el signe d'un nombre enter emprant únicament els símbols 0 i 1 disponibles en els circuits digitals.

Abans d'explicar el conveni excés Z, tema central d'aquest article, vull recordar-te que els nombres s'emmagatzemen en circuits digitals anomenats registres, i que la grandària és fixa. És a dir, quan parlem d'un nombre enter representat en binari o excés Z cal indicar el nombre total de bits utilitzats.

4 El conveni excés Z

Aquest conveni s'anomena així perquè s'hi utilitza una constant, Z, per a sumar-la als nombres que es volen representar. El valor d'aquesta constant és arbitrari, és a dir, és possible utilitzar qualsevol constant. Però, en la pràctica, s'utilitzen valors de Z relacionats amb el nombre de bits emprats per a la representació. Els valors de Z més comuns són: $Z = 2^{n-1}$ i $Z = 2^{n-1} - 1$. Així, per exemple, si utilitzem 8 bits per a representar els nombres enters, els valor de Z més adients són Z = 128 o Z = 127. Amb aquests valors aconseguim un rang de representació quasi simètric, com veurem més endavant.

4.1 Definició

En aquest conveni tots els nombres es representen de la mateixa manera, no importa si són positius o negatius. Si considerem que utilitzem *n* bits i un excés Z, tenim que:

- Un nombre enter A es representa pel binari natural de A + Z, utilitzant *n* bits.

Exemple. Utilitzant 8 bits (n = 8) i $Z = 2^{n-1} - 1 = 127$ representa el nombre +31 seguint el conveni excés Z.

Realitzem la suma de +31 + 127 = +158 i el representem en binari natural amb 8 bits, i completem amb zeros els bits de major pes si és necessari: $158 = 10011110_2$. D'aquesta manera tenim que +31 en excés 127 es representa per:

$$+31_{10} = 10011110_2$$

Exemple. Utilitzant 8 bits (n = 8) i $Z = 2^{n-1} - 1 = 127$ representa el nombre -34 seguint el conveni excés Z.

Realitzem la suma de -34 + 127 = +93 i el representem en binari natural amb 8 bits, i completem amb zeros els bits de major pes si és necessari: $93 = 01011101_2$. D'aquesta manera tenim que -34 en excés 127 es representa per:

$$-34_{10} = 01011101_2$$

Exemple. Obtín el valor decimal corresponent a 010010_2 tenint en compte que està representat en excés 31 utilitzant 6 bits (n = 6).

$$010010_2 = 18_{10},$$

$$18_{10} - 31_{10} = -13_{10}$$

Per tant, 010010_2 en excés 31 representa el valor -13_{10}.

Exemple. Obtín el valor decimal corresponent a 101000_2 tenint en compte que està representat en excés 31 utilitzant 6 bits (n = 6).

$$101000_2 = 40_{10},$$

$$40_{10} - 31_{10} = +9_{10}$$

Per tant, 101000_2 en excés 31 representa el valor $+9_{10}$.

Vull que recordes una cosa molt important. En excés Z el bit de major pes, el de l'esquerra, pot representar, però no sempre, el signe del nombre enter. En altres convenis de representació d'enters això és cert sempre, però en la representació en excés Z no sempre ho és, de manera que no et refies.

4.2 Rang

El rang d'un sistema o conveni de representació és el conjunt de valors diferents que es poden representar.

La representació en excés Z utilitza binari natural i, per tant, la representació més petita és 000···000, que correspon al nombre enter 0 – Z = -Z. La representació més gran possible és 111···111 que correspon a l'enter (2^n-1) – Z. D'aquesta manera el rang queda:

$$\text{Rang en binari:} \quad [000\cdots000\,, \quad 111\cdots111]$$
$$\text{Rang en decimal:} \quad [-Z\,, \quad +(2^n - 1) - Z]$$

Podem veure un exemple amb 4 bits i Z = 7:

0000_2	-7	+1	1000_2
0001_2	-6	+2	1001_2
0110_2	-1	+7	1110_2
0111_2	0	+8	1111_2

Si pares atenció, veuràs que el valor enter 0 es representa pel binari natural corresponent a Z. També pots veure que hi ha només un zero.

I una altra cosa important, els nombres enters estan tots ordenats. És a dir, el negatiu de major magnitud té la representació menor en binari natural, i el positiu de major magnitud té la major representació en binari natural. Això fa molt útil aquest conveni de representació quan es tracta de comparar nombres enters.

4.3 Suma i resta

Per a la suma de dos nombres enters representats en excés Z se segueixen les regles de la suma en binari natural, independentment del signe dels operands. Però cal que tingues en compte que, en sumar dos nombres representats en excés Z, el resultat estarà expressat en excés 2*Z. És fàcil veure-ho: si A i B són dos nombres enters representats en excés Z, tindrem que A = a + Z i que B = b + Z. Si realitzem l'operació A + B, el que realment estem fent és a + Z + b +Z = a + b + Z + Z.

Això té dues implicacions. La primera és que, en fer la suma en binari, cal mantenir el bit de *carry* final, perquè pot ser significatiu. La segona és que una vegada feta la suma és necessari restar-li Z per obtenir el resultat correcte representat en excés Z.

La resta també es realitza fent ús de les regles de la resta en binari natural (intercanviant els operands si és necessari), però succeeix exactament el contrari que en la suma. En fer A – B, el que realment estem fent és a + Z – (b +Z) = a + Z – b – Z = a – b.

És a dir, el resultat no està en excés Z i, per tant, cal sumar-li Z *a posteriori*.

Però en la pràctica aquesta característica de la resta és un avantatge perquè l'excés Z se sol utilitzar per comparar nombres, i la resta ens diu exactament quantes unitats de diferència hi ha entre el minuend i el subtrahend. Per això, aquest conveni no s'utilitza per fer aritmètica amb enters, però sí per a comparar-los.

4.1 Desbordament en la suma i la resta

Quan realitzem una suma o una resta de nombres enters és possible que el resultat excedisca el rang de representació. En aquest cas es diu que no hi ha resultat o que el resultat no és representable.

Amb operands representats en excés Z es produeix desbordament o sobreeiximent si, en corregir el resultat (restar-li Z després d'una suma o sumar-li Z després d'una resta) es produeix o es manté el bit de *carry* final.

4.2 Extensió de signe

En alguns casos cal operar amb dades de diferent grandària. Per a augmentar el nombre de bits amb què es representa una dada es realitza l'operació anomenada "extensió de signe".

En el cas de la representació en excés Z no és possible realitzar cap extensió de signe. Si és necessari canviar el nombre de bits utilitzats per a la representació, cal eliminar de primer l'excés i afegir-hi després el nou excés.

5 Exercicis

A continuació tens uns quants exercicis. És molt important que agafes llapis i paper i els resolgues. Recorda que estàs aprenent i que, per tant pots, i encara diria més, cal que consultes les seccions anteriors d'aquest document per resoldre els exercicis. També tens les solucions dels exercicis, però et demane amb fermesa que tractes de resoldre tots els exercicis abans i no les consultes.

5.1 Enunciats

1. Representa el nombre -63_{10} en binari excés 127 amb 8 bits.
2. Representa el nombre $+93_{10}$ en binari excés 127 amb 8 bits.
3. Indica la representació decimal de 10110011_2 tenint en compte que està representat en excés 127 amb 8 bits.
4. Indica la representació decimal de 01101001_2 tenint en compte que està representat en excés 127 amb 8 bits.
5. Quin és el rang de representació en excés 1023 amb 11 bits? Expressa'n el rang en decimal.

5.2 Solucions

1. Representa el nombre -63_{10} en binari excés 127 amb 8 bits. Sol: 01000000_2
2. Representa el nombre $+93_{10}$ en binari excés 127 amb 8 bits. Sol: 11011100_2
3. Indica la representació decimal de 10110011_2 tenint en compte que està representat en excés 127 amb 8 bits. Sol: 52_{10}
4. Indica la representació decimal de 01101001_2 tenint en compte que està representat en excés 127 amb 8 bits. Sol: -22_{10}
5. Quin és el rang de representació de excés 1023 amb 11 bits? Expressa el rang en decimal. Sol: [-1023, +1024]

6 Conclusions

Els circuits digitals només poden emmagatzemar dos símbols, per la qual cosa és necessari establir un acord o conveni per a utilitzar aquests dos símbols, el 0 i l'1, per tal de representar el signe dels nombres enters. El conveni anomenat "representació en excés Z" és senzill, però l'aritmètica no és eficient, ja que per a cada operació que volem realitzar cal fer-ne una segona per ajustar el resultat.

Malgrat això, és molt útil quan el que necessitem és comparar valors i determinar la distància entre aquests. Així, per exemple, aquest conveni de representació s'utilitza per representar els exponents en l'estàndard IEE754 per a la representació de nombres reals.

7 Bibliografia

7.1 Llibres

[1] Anasagasti, Pedro de Miguel. *Fundamentos de los computadores*, 9a ed. Madrid. Thomson-Paraninfo. 2004, 2007

[2] Wakerly, John F. *Diseño digital: principios y prácticas*. Madrid. Pearson Educación. 2001

7.2 Recursos electrònics

[3] Martí Campoy, Antonio. *Representación de enteros: Exceso Z*. Universitat Politècnica de València, 2011. http://hdl.handle.net/10251/10112