Homomorfismos real valuados en álgebras de funciones continuas

Departamento de Matemática Aplicada

Trabajo Final de Máster en Investigación Matemática

Autor:

Carlos Manuel Berroa Liriano

Tutores: Pilar Rueda Segado y Manuel López Pellicer

Director: Alfredo Peris Miguellot

Septiembre 2013

Agradecimientos

Con este proyecto alcanzo el objetivo que me propuse lograr en el transcurso de este año, por lo que quiero agradecer a todas aquellas personas que de una forma u otra han aportado para que esto hoy sea posible.

Doy las gracias a mi tutora, a mis directores y al cuerpo docente en general; gracias a todos por su ayuda, apoyo, entrega, generosidad, atenciones y dedicación. La verdad es que son todos muy buenos profesionales y, sobre todo, excelentes como persona.

Quiero agraceder también a mis compañeros y compañeras por su gran acogida, por su ayuda y todo el cariño que me han brindado.

Índice general

Capítulo 0

Introducción

Los homomorfismos son funciones que preservan la estructura entre varias estructuras matemáticas de la misma categoría, en este trabajo estudiaré los homomorfismos real valuados en álgebras de funciones continuas.

El objetivo es demostrar cuándo estos homomorfismos son evaluaciones, es decir, sea X un espacio topológico, si tenemos un homomorfismo $\phi : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, denotamos $C(X)$ el álgebra de las funciones continuas, existe un α real tal que para todo $f \in C(X)$ se cumple que $\phi(f) = f(\alpha)$.

Si bien es conocido que este es el caso para X espacio real compacto, nuestra intención es estudiar una serie de pruebas que han sido resultado de trabajos de investigación relizados por varios autores, unas recientes y otras no tan recientes, de los casos sencillos como pueden ser para $X = \mathbb{R}$ o $X = \Omega$ un abierto no vacío de $\mathbb{R}$. Estas pruebas, válidas en estos casos particulares, contrastan con su sencillez con las que figuran en textos clásicos como el de Leonard Gillman y Meyer Jerison [6], por lo que resultan especialmente atractivas pese a que no son muy conocidas.

En un principio veremos una prueba realizada por Richard M. Aron y Ger H. Fricke

[2] en la que, siendo $C(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas, se demuestra que cada homomorfismo $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es el punto de evaluación en algún momento de $\mathbb{R}$, y un artículo en el que Lyle E. Pursell [9] hace referencia a la misma y en el que se prueba que un homomorfismo de anillos, bajo las condiciones que se describen, también es un homomorfismo de álgebra.

Más adelante se encuentra una prueba realizada por Z. Ercan y S. Onal [5] en la que, siendo $C(X)$ el álgebra de las funciones reales continuas definidas en un espacio topológico X, un homomorfismo distinto de cero en $C(X)$ está determinado por un punto.

Luego Karim Boulabiar [3] nos ofrece una prueba de que, siendo Ω un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$, un homomorfismo de anillos reales en $C(\Omega)$ es una evaluación en algún punto de Ω. Además nos describe unas condiciones con las cuales para cualquier anillo R de valor real en un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ funciona la prueba, y nos da como ejemplo el anillo $C^k(\Omega)$ de todas las funciones con valores reales $k-$diferenciables, por lo que también me extenderé hasta una prueba realizada por Arias-De-Reyna [1] para el álgebra de dichas funciones en $\mathbb{R}^n$.

En general son pruebas accesibles y que se desprenden de propiedades básicas, pero que al ser analizadas resultan de mucho interés, ya que su accesibilidad en combinación con los buenos resultados que se obtienen a partir de ellas, las hacen muy interesantes.

Capítulo 1

Conceptos generales

1.1. Anillo

Un conjunto A, con dos leyes de composición internas: $+$ (la suma) y $\cdot$ (el producto), tiene estructura de anillo cuando verifica los siguientes axiomas:

1. La suma es asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2. La suma es conmutativa: $a + b = b + c$.

3. Existe un elemento 0 en A tal que: $a + 0 = a$ (elemeto neutro).

4. Para cada elemto a de A existe otro elemento b tal que: $a + b = 0$ (existencia del elemento opuesto).

5. El producto es asociativo: $a(bc) = (ab)c$.

6. Distributividad del producto sobre la suma: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$.

7. Existe un elemento 1 en A tal que $a1 = 1a = a$ para todo a de A (existencia del elemento unitario).

Si además el producto es conmutativo, $ab = ba$, se dice que el anillo es conmutativo.

1.2. Espacio Vectorial

Para definir el concepto de álgebra nos vamos a basar en el de espacio vectorial.

Un espacio vectorial es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna (llamada suma, definida para los elementos del conjunto) y una operación externa (llamada producto por un escalar, definida entre dicho conjunto y otro conjunto, con estructura de cuerpo), con 8 propiedades fundamentales.

Concretamente, dado un conjunto no vacío V, una ley de composición interna $+ : V \times V \longrightarrow V$ y una ley de composición externa $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, se dice que la terna $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ si se cumple que:

• La suma:

$+ : V \times V \longrightarrow V$
$(u, v) \longrightarrow u + v$

Es una operación interna tal que:

1) Tenga la propiedad conmutativa, es decir:

$$u + v = v + u, \forall u, v \in V$$

2) Tenga la propiedad asociativa, es decir:

$$u + (v + w) = (u + v) + w,\ \forall u, v, w \in V$$

3) Tenga elemento neutro 0, es decir:

$$\exists 0 \in V : u + 0 = u,\ \forall u \in V$$

4) Tenga elemento opuesto, es decir:

$$\forall u \in V,\ \exists -u : u + (-u) = 0$$

• Producto por un escalar:

$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
$(a, u) \longrightarrow a \cdot u$

Es una operación externa tal que:

5) Tenga la propiedad asociativa:

$$a \cdot (b \cdot w) = (a \cdot b) \cdot w,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall u \in V$$

6) El 1 en $\mathbb{R}$ cumple que:

$$1 \cdot u = u,\ \forall u \in V$$

7) Tenga la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de vectores:

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in V$$

8) Tenga la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de escalares:

$$(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall u \in V$$

1.3. Álgebra

Un álgebra A es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de un producto algebraico para el cual dados $a, b, c \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(ab)c = a(bc)$ Asociatividad.

2. $a(b + c) = ab + ac$ Distributividad izquierda.

3. $(a + b)c = ac + bc$ Distributividad derecha.

4. $(\alpha a)b = \alpha(ab)$.

Un álgebra A es unitaria si existe un elemento 1 en el álgebra con la propiedad:

$1a = a1 = a$ para todo $a \in A$.

Notar que toda álgebra es anillo con la suma y el producto. Los ejemplos de anillo y álgebra que vamos a manejar son: $C(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}^n$, y más en general, $C(\Omega)$ siendo Ω un abierto de un espacio real compacto de X. Es claro que ambos espacios son álgebras con la suma y el producto puntual:

La suma de funciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

El producto de funciones:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

También estamos interesados en el espacio $C^k(\mathbb{R}^n)$ de las funciones $k-$diferenciales en $\mathbb{R}^n$.

1.4. Homomorfismo de Anillos

Si tenemos dos anillos, $(R, +, \cdot)$ y $(S, +, \cdot)$, se dirá que la aplicación $\phi : R \longrightarrow S$ es un homomorfismo de anillos si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$; $\forall x, y \in R$

- $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$; $\forall x, y \in R$

Así, un homomorfismo de anillos es una aplicación entre anillos que conserva las estructuras de ambos como anillos.

Ejemplo.

Si $c \in \mathbb{R}$, la aplicación evaluación $\delta_c : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de anillos.

En efecto, si $f, g \in C(\mathbb{R})$ tenemos que:

- $\delta_c(f+g) = \delta_c(f) + \delta_c(g)$

$\delta_c(f+g) = (f+g)(c) = f(c) + g(c)$

$\delta_c(f) + \delta_c(g) = f(c) + g(c)$

- $\delta_c(f \cdot g) = \delta_c(f) \cdot \delta_c(g)$

$\delta_c(f \cdot g) = (f \cdot g)(c) = f(c) \cdot g(c)$
$\delta_c(f) \cdot \delta_c(g) = f(c) \cdot g(c)$

Vemos como todo homomorfismo de anillos en $C(\mathbb{R})$ es una evaluación, es decir si $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de anillos, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi = \delta_c$.

1.5. Homomorfismo de Álgebra

Un homomorfismo entre dos álgebras A y B es una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ que cumple:

- $\phi(\alpha a + b) = \alpha\phi(a) + \phi(b)$

- $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

Notar que si denotamos por $\hat{r}$ la función constante igual a $r \in \mathbb{R}$, entonces todo homomorfismo no nulo $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que $\phi(\hat{1}) = 1$. En efecto:

- $\phi(\hat{1}) = \phi(\hat{1} \cdot \hat{1}) = \phi(\hat{1}) \cdot \phi(\hat{1})$ Igualamos a cero: $0 = \phi(\hat{1}) - \phi(\hat{1}) \cdot \phi(\hat{1}) = \phi(\hat{1}) \cdot (1 - \phi(\hat{1}))$

Como $\phi(\hat{1}) \neq 0$ entonces $1 - \phi(\hat{1}) = 0$; y por lo tanto $\phi(\hat{1}) = 1$.

Además $\phi(0) = 0$. En efecto:

- $\phi(0) = \phi(0 + 0) = \phi(0) + \phi(0)$ Igualamos a cero: $0 = \phi(0) - \phi(0) - \phi(0) = \phi(0) + \phi(0) - \phi(0) = \phi(0)$. Entonces $\phi(0) = 0$.

1.6. El espacio $\mathbb{R}^n$

Recordemos algunos hechos y conceptos básicos de $\mathbb{R}^n$ que nos serán de utilidad.

Formalmente, se define:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in R, i = 1, \ldots, n\}$$

como el conjunto formado por todas las n-uplas de números reales ordenados, cuyos elementos se pueden sumar componente a componente, y también se pueden multiplicar por un número real, multiplicando cada componente por dicho número.

Donde la primera operación es la ley de composición interna y se define como:

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)$

Donde $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

La segunda operación es ley de composición externa y se define como:

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$(\alpha, (x_1, \ldots, x_n)) \longrightarrow \alpha(x_1, \ldots, x_n)$

Donde $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

1.6.1. Bola abierta y cerrada

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Se define la bola abierta de centro a y radio r como el conjunto de los puntos cuya distancia al centro es estríctamente menor que el radio:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$$

Se define la bola cerrada de centro a y radio r como el conjunto de los puntos cuya distancia al centro es menor o igual que el radio:

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}$$

1.6.2. Puntos interiores, adherentes y frontera

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que $a \in A$ es un punto interior de A si existe alguna bola abierta centrada en a y contenida en A:

$$\exists r > 0 / B(a, r) \subset A$$

Denotamos por $Int(A)$ al conjunto de los puntos interiores de A.

Se dice que $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto adherente de A cuando toda bola abierta centrada en a contiene algún punto de A:

$$\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$$

El conjunto de todos los puntos adherentes a A se denomina clausura o adherencia de A y se denota por $\bar{A}$.

Se dice que $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto frontera de A cuando toda bola abierta centrada en a contiene al menos un punto de A y un punto que no es de A:

$$\forall r > 0,\ B(a, r) \cap A \neq \emptyset,\ B(a, r) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset$$

El conjunto de todos los puntos frontera de A se denota por $Fr(A)$.

1.6.3. Conjunto abierto, cerrado, acotado y compacto

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, si no contiene ningún punto de su frontera, es decir, si $x \in Fr(A) \Rightarrow x$ no está en A; es decir que todos sus puntos son interiores: $A = Int(A)$.

Como ejemplo de conjunto abierto tenemos las bolas abiertas.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado, si contiene la totalidad de su frontera, es decir, si $x \in Fr(A) \Rightarrow x \in A$.

Un conjunto cerrado es el complementario de uno abierto. Como ejemplo de conjunto cerrado tenemos las bolas cerradas.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si existe una bola que lo contenga, es decir, $\exists a \in \mathbb{R}^n$ y $\exists r > 0$ tales que $A \subseteq B(a, r)$.

Como ejemplo de conjunto acotado tenemos las bolas.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ decimos que es compacto, si es cerrado y acotado.

1.7. Filtro

Sea E cualquier conjunto. Un conjunto no vacío F de subconjuntos no vacíos de E se llama filtro si satisface:

- Si $A \in F$ y $B \in F$, entonces $A \cap B \in F$.

• Si $A \in F$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in F$.

1.7.1. Base de filtro

Un conjunto no vacío B de subconjuntos no vacíos del conjunto E se llama una base de filtro si satisface:

• Si $A \in G$ y $B \in G$, hay algún $C \in G$ con $C \subseteq A \cap B$.

El conjunto F de todos los conjuntos de un conjunto G es entonces un filtro, llamado filtro generado por por G.

1.8. Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos es una relación de orden que resulta en otro conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados que pueden formarse tomando el primer elemento del par del primer conjunto, y el segundo elemento del segundo conjunto.

El producto cartesiano de A y B es el conjunto $A \times B$ cuyos elementos son los pares ordenados (a, b), donde a es un elemento de A y b un elemento de B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

1.8.1. Caso infinito

El producto cartesiano de una familia indexada de conjuntos es el conjunto de las aplicaciones $f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ cuyo dominio es el conjunto índice I y sus imágenes son elementos de algún A_i; que cumplen que para cada $i \in I$ se tiene $f(i) \in A_i$:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i| \text{ para cada } i \in I,\ f(i) \in A_i\}$$

Donde $\bigcup_{i\in I} A_i$ denota la unión de todos los A_i. Dado un $j \in I$, la proyección sobre la coordenada j es la aplicación:

$$\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j,\ \pi_j(f) = f(j)$$

1.9. Espacio real compacto

Más adelante en la prueba de Z. Ercan y S. Onal [5] veremos que aparecen algunos conceptos referentes a los espacios topológicos, como son los espacios real compactos, por lo que a continuación recordaremos las definiciones básicas, con la finalidad de manejar su concepto al momento de estudiar dicha prueba. En esta sección empezaremos definiendo un espacio topológico.

Un espacio topológico es un conjunto E de elementos, junto con T, una colección de subconjuntos de E que satisfacen las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío y E están en T.

$$\phi \in T,\ E \in T$$

2. La intersección de cualquier colección finita de conjuntos de T está también en T.

$$(O_1 \in T, O_2 \in T) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in T)$$

3. La unión de toda colección de conjuntos de T está también en T.

$$(\forall i \in I, O_i \in T) \Rightarrow (\cup O_{i \in I} O_i \in T)$$

Los conjuntos en T son los conjuntos abiertos, y sus complementos en E son los conjuntos cerrados.

La colección T es llamada topología en E. Los elementos de E suelen llamarse puntos, aunque pueden ser cualquiera de los objetos matemáticos.

Un espacio topológico X se dice T_1 si y sólo si para cualquier par de puntos x, y de X hay un par de conjuntos abiertos A_1, A_2, tal que x esté A_1, pero no en A_2; y además y esté A_2, pero no en A_1.

Una equivalencia importante es que X es T_1 si y sólo si los subconjuntos de X formados por un único punto son cerrados.

Se dice que un espacio topológico es un espacio de Hausdorff si todo par de puntos distintos del espacio verifican la propiedad de Hausdorff.

Se dice que dos puntos x e y de un espacio topológico X cumplen la propiedad de Hausdorff si existen dos entornos U_x de x y U_y de y tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Así, un espacio de Hausdorff, separado o T_2 es un espacio topológico en el que puntos distintos tienen entornos disjuntos.

Un espacio topológico X es completamente regular de Hausdorff si es T_1 y para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subset X$ tal que x no pertenece a F existe una función continua $f : F \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.

Un espacio topológico Hausdorff X es llamado real compacto si es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto $\prod_{i\in I} \mathbb{R}$ para algún conjunto de índices I. Para cada $j \in I$, $P_j : \prod_{i\in I} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define por $P_j((x_i)) = x_j$ y $e_i = (x_i)$ con $x_j = 1$ y $x_i = 0$ si $i \neq j$.

1.9.1. Homeomorfismo

En topología, un homeomorfismo es una biyección entre dos espacios topológicos por una aplicación biyectiva que es continua y cuya inversa es continua. En este caso, los dos espacios topológicos se dicen homeomorfos. Las propiedades de estos espacios que se conservan bajo homeomorfismos se denominan propiedades topológicas.

La definición de homeomorfismo es entonces la siguiente:

Sean X e Y espacios topológicos, y f una función de X a Y; entonces, f es un homeomorfismo si se cumple que:

- f es una biyección.

- f es continua.

- La inversa de f es continua.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, X se dice homeomorfo a Y. Si dos espacios son homeomorfos entonces tienen exactamente las mismas propiedades topológicas.

1.10. Función característica

La función característica o función indicatriz de un subconjunto $A \subseteq X$ es una función definida en el conjunto X, y que indica la pertenencia, o no, de cada elemento de X al subconjunto A, al asignar el valor 1 a todos los elementos de A y el valor 0 a todos los elementos de $X \setminus A$ (no incluidos en A).

Entonces, la función caraterística del subconjunto A del conjunto X es una función:

$$1_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

Definida como:

$1_A(x) = 1$ si x está en A, y 0 si x no está en A.

Capítulo 2

Homomorfismos real valuados en álgebras de funciones continuas

Muchas son las pruebas que se han venido realizando, desde hace ya un tiempo hasta la actualidad, en las que se demuestra que estos homomorfismos son evaluaciones; pero nuestro interés se centra en estudiar una serie de pruebas acerca de ello que se caracterizan por su sencillez, pero que a su vez ofrecen muy buenos resultados y no son muy conocidas.

La importancia principal de este tipo de pruebas radica en que al ser simples, accesibles y utilizar propiedades básicas para su realización, se encuentran aptas para un público de lectores más generalizado, es decir que los recursos utilizados para la realización de las mismas pueden ser más fácilmente entendidos por un mayor número de lectores.

Veremos como llevando a cabo un seguimiento de las metodologías descritas en estas pruebas se pueden realizar las demostraciones de forma simple y directa, sin la necesidad de utilizar las pruebas usuales de las mismas que se desprenden de campos de estudio más complejos, tales como la compactación, la teoría del ideal máximo, el axioma de elección y otras propiedades derivadas de la topología (Ver [6]).

Los buenos resultados obtenidos a través de estas pruebas y las herramientas básicas utilizadas para obtenerlos las hacen, más que interesantes, muy importantes.

2.1. Homomorfismos reales en $C(\mathbb{R})$

En este apartado estudiaremos una prueba realizada por Richard M. Aron y Gerd H. Fricke [2] acerca de los homomorfismos en $C(\mathbb{R})$, así como también una observación realizada por Lyle E. Pursell [9] que permite trabajar únicamente con las propiedades de anillo. Estas pruebas, aunque no son ampliamente conocidas, pueden resultar de mucho interés a causa de que son simples, accesibles y se desprenden de propiedades básicas, como por ejemplo del campo de los números reales.

$C(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $\mathbb{R}$. Un homomorfismo sobre $C(\mathbb{R})$ es una asignación diferente de cero $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

- $\phi(af + bg) = a\phi(f) + b\phi(g)$
- $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C(\mathbb{R})$

El resultado de que cada homomorfismo $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es el punto de evaluación en algún momento de $\mathbb{R}$.

2.1.1. Teorema

Teorema. Si $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo, entonces existe algún número real $c \in \mathbb{R}$ de tal manera que $\phi(f) = f(c)$ para todo $f \in C(\mathbb{R})$.

2.1.2. Estudio de la prueba de Aron y Fricke

Recordemos que $\phi(\hat{1}) = 1$.

Sea $\phi(Id) = c$, donde $Id \in C(\mathbb{R})$ es la función identidad dada por $Id(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Vemos que $\phi(f) = f(c)$ para todo $f \in C(\mathbb{R})$. Para $f \in C(\mathbb{R})$, sea $k(t) = f(t) - f(c)$. Entonces $k(c) = 0$ y $\phi(k) = \phi(f) - \phi(f(c)) = \phi(f) - f(c)$.

En efecto, sea $f \in C(\mathbb{R})$ y queremos ver que $\phi(f) = f(c)$, tenemos que:

$k(t) = f(t) - f(c)$ por lo tanto $k = f - f(c)\hat{1}$

$k(c) = 0 : k(c) = f(c) - f(c) = 0$

Entonces $\phi(k) = \phi(f - f(c)\hat{1}) = \phi(f) - f(c)\phi(\hat{1}) = \phi(f) - f(c)$

Por lo tanto $\phi(k) = 0$ si y sólo sí $\phi(f) = f(c)$, y por lo tanto sólo tenemos que demostrar que $\phi(f) = 0$ siempre que $f(c) = 0$.

Supongamos primero que f es idénticamente 0 en un intervalo abierto que contiene c. Definiendo $g(t)$ por:

$$g(c) = 0 \text{ y } g(t) = \tfrac{f(t)}{t-c} \text{ para todo } f \neq c$$

Entonces $g \in C(\mathbb{R})$ y $\phi(f) = \phi(g) \cdot \phi(t - c) = 0$

En efecto, si tenemos que $(t-c)\cdot g(t) = f(t)$ para $f \neq c$ entonces:

$\phi(t-c)\cdot g(t) = \phi f(t)$ igual a $\phi(t-c)\cdot \phi g(t) = \phi f(t)$, entonces $\phi f = \phi(t-c)\cdot \phi g = 0$ para $f \in C(R)$ y $f(c) = 0$.

Supongamos también que hay una cierta función $f \in C(\mathbb{R})$ que satisface $f(c) = 0$ pero $\phi(f) \neq 0$, y puesto que ϕ es lineal, se puede suponer que $\phi(f) = 1$. Usando la continuidad de f, vemos que hay algún $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ en el que $|f(t)| < \frac{1}{2}$.

Definimos $h \in C(\mathbb{R})$ por $h(t) = f(t)$ en $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, así tenemos:

- $h(t) = f(c+\varepsilon)$ para $t \geq c+\varepsilon$, y
- $h(t) = f(c-\varepsilon)$ para $t \leq c-\varepsilon$.

Entonces h y f están cerca de c, y así por nuestra observación inicial, $\phi(f-h) = 0$. Finalmente ya que $(1-h)^{-1} \in C(\mathbb{R})$, $1 = \phi((1-h)^{-1})\phi(1-h) = 0$. Esta contradicción demuestra que no existe tal f, y el teorema anterior se establece.

Así vemos como Aron y Fricke [2] dan una demostración elemental de que si $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo distinto de cero, entonces ϕ es una evaluación, es decir, para un cierto c en $\mathbb{R}$, $\phi(f) = f(c)$ para todo f en $C(\mathbb{R})$.

2.1.3. Estudio de la prueba de Pursell

Si $F(X)$ es un anillo de funciones definidas en un conjunto X y con valores en $\mathbb{R}$, que contiene a las funciones constantes $\hat{R}(X)$, entonces $F(X)$ es un álgebra con la operación $r \cdot f = \hat{r} \cdot f$, para todo $r \in \mathbb{R}$ y para todo $f \in F(X)$.

En este contexto tiene sentido plantearse que si $\phi : F(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de anillos también lo es de álgebra. En su observación Pursell [9] demuestra que efectivamente si $\phi : F(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de anillos lo es de álgebras.

Para demostrarlo recordemos el siguiente lema:

Lema 1. El único homomorfismo distinto de cero del cuerpo real en sí mismo es la asignación de la identidad.

Sea $F(X)$ cualquier anillo con funciones reales definidas en un conjunto no vacío X que contiene al anillo $\hat{R}(X)$ de constantes reales en X. Sea $\phi : F(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ un homomorfismo de anillos distinto de cero. Si r es un número real, ello nos denota la función correspondiente constante en X por $\hat{r}$, es decir, $\hat{r}(x) = r$ para todo x de X. Luego (como Aron y Fricke [2] demostraron utilizando solo las propiedades del anillo) $\phi(\hat{1}) = 1$. Y puesto que $\hat{R}(X)$ es una copia isomorfa de $\mathbb{R}$, por el lema anterior tenemos que $\phi(\hat{r}) = r$ para todo r en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, $\phi(rf) = \phi(\hat{r}f) = \phi(\hat{r})\phi(f) = r\phi(f)$ para todo r en $\mathbb{R}$ y f en $F(X)$. Así, nuestro homomorfismo de anillos $\phi : F(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ también es un homomorfismo de álgebra.

Observemos que en la prueba se hace uso de la propiedad $\phi(\alpha f) = \alpha\phi(f)$, propia de los homomorfismos de álgebra.

Así, Lyle E. Pursell [9] nos dice que ello es suficiente para suponer que ϕ es un homomorfismo de anillos.

Prueba del Lema 1. Esta prueba se basa en la dada en el libro de Leonard Gillman y Meyer Jerison [6], y contiene una ampliación detallada de la misma.

Un número real es no negativo si y sólo si es un cuadrado. Dado que cualquier homomorfismo toma cuadrados de cuadrados, toma números no negativos de números no negativos, y por lo tanto preserva el orden. Ahora, si ϕ es un homomorfismo distinto de cero, entonces, debido a que $\phi r = (\phi r)(\phi 1)$ para todo r, se debe tener

$\phi 1 = 1$. De ello se deduce que f es la identidad en $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y ϕ preserva el orden, ϕ es también la identidad en $\mathbb{R}$.

Dicho esto con más detalles si tenemos un homomorfismo $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tenemos que:

Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0 \iff$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 = x$. Entonces:

$\phi(x) = \phi(y^2) = \phi(y \cdot y) = \phi(y) \cdot \phi(y) = \phi(y)^2 \geq 0$. Entonces $\phi(x) \geq 0$.

Si $x \geq y \Longrightarrow \phi(x) \geq \phi(y)$.

Si $x - y \geq 0 \Longrightarrow \phi(x - y) \geq 0 \Longrightarrow \phi(x) - \phi(y) \geq 0$.

Si ϕ es un homomorfismo no nulo entonces $\phi(x) = \phi(x \cdot 1) = \phi(x)\phi(1) \Longrightarrow \phi(1) = 1$. De ello se deducimos que:

Si $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) = \phi(1 + 1 + \cdots + 1) = \phi(1) + \phi(1) + \cdots + \phi(1) = n\phi(1) = n$.

Si $m \in \mathbb{Z}$, tenemos dos casos. Primero si $m \in \mathbb{N} \Longrightarrow \phi(m) = m$; y segundo si $-m \in \mathbb{N} \Longrightarrow -\phi(m) = \phi(m) = -m \Longrightarrow \phi(m) = m$.

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ entonces $1 = \phi(1)\phi(n \cdot \frac{1}{n}) = \phi(n) \cdot \phi(\frac{1}{n}) = n \cdot \phi(\frac{1}{n}) \Longrightarrow \phi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$

Si $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{n}{m}$, con $n, m \in Z$ y $m \neq 0$, $\phi(r) = \phi(\frac{n}{m}) = \phi(n)\phi(\frac{1}{m}) = n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m} = r$.

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, si $x \in R$, $x = \lim_n r_n \in Q \Longrightarrow \phi(x) = \phi(\lim_n r_n) = \lim_n \phi(r_n) = \lim_n r_n = x \Longrightarrow \phi$ es Id_R.

2.2. Homomorfismos en $C(X)$

En esta sección se estudiará una prueba simple y directa hecha por Z. Ercan y S. Onal [5] de que, siendo X un espacio real compacto, un homomorfismo distinto de cero en $C(X)$ está determinado por un punto.

$C(X)$ representa el álgebra de las funciones reales continuas valoradas en un espacio topológico X bajo las operaciones punto a punto, es decir, que para cada $f, g, h \in C(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ y } (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

La aplicación $\phi : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de álgebra si cumple que para cada $f, g, h \in C(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ cumple que:

$$\phi(fg + \alpha h) = \phi(f)\phi(g) + \alpha\phi(h)$$

En la prueba de Pursell [9] vimos que se demuestra que la aplicación $\phi : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de álgebra si y sólo si es un homomorfismo de anillos, es decir:

$$\phi(fg + h) = \phi(f)\phi(g) + \phi(h), \text{ para cada } f, g, h \in C(X).$$

Para cada $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es definida por $\mathbf{r}(x) = r$. La función característica de $A \subset X$ se denota por χ_A.

Recordemos que un espacio topológico Hausdorff X es llamado real compacto si es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto $\prod_{i\in I} \mathbb{R}$ para algún conjunto de índices I. Para cada $j \in I$, $P_j : \prod_{i\in I} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define por $P_j((x_i)) = x_j$ y $e_i = (x_i)$ con $x_j = 1$ y $x_i = 0$ si $i \neq j$.

2.2.1. Teorema

Teorema. Sea X un espacio real compacto y sea $\phi : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación distinta de cero. Entonces ϕ es un homomorfismo si y sólo si existe un único $c \in X$ tal que $\phi(f) = f(c)$ para cada $f \in C(X)$.

En una de las secciones anteriores ya hemos visto una prueba de este teorema cuando $X = \mathbb{R}$, para decirlo de una manera mas precisa: vimos que Aron y Fricke [2] demostraron que $\phi(f) = f(\phi(i))$. Donde $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación identidad, es decir que $i(x) = x$. Siguiendo la misma metodología se puede demostrar el teorema de forma simple y directa, sin utilizar las pruebas usuales del mismo que se desprenden de la compactación o teoría del ideal máximo.

2.2.2. Estudio de la prueba de Ercan y Onal

En primer lugar se prueba el teorema para $X = \prod\limits_{i \in I} \mathbb{R}$.

Para cada $c_i = \phi(P_i)$ y sea $c = (c_i)_{i \in I}$.

Vemos que para cada $f \in C(X)$

$$\phi(f) = f(c)$$

Para cada $f \in C(X)$ sea $k_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $k_f = f - f(c)\hat{1}$.

Entonces:

$$\phi(k_f) = \phi(f - f(c)\hat{1}) = \phi(f) - f(c)\phi(\hat{1}) = \phi(f) - f(c)$$

Como $k_f(c) = f(c) - f(c)\hat{1}(c) = f(c) - f(c) = 0$ se sigue que $\phi(k_f) = 0$

Por lo tanto es suficiente que si $f(c) = 0$ entonces $\phi(f) = 0$.

Veamos que si $f|_U \equiv 0$ para algún conjunto abierto U que contiene c, entonces $\phi(f) = 0$. Por definición de topología producto existe una familia $(U_i)_{i\in I}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tal que:

$$c \in \prod_{i\in I} U_i = V \subset U \text{ y } F = \{i \in I : U_i \neq \mathbb{R}\} \text{ es finito.}$$

Sea

$$h = \sum_{i\in F} (P_i - c_i)^2$$

Es claro que $h(x) \neq 0$ siempre que x no está en V.

Se define:

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \tfrac{f(x)}{h(x)} \chi_{X\setminus V}$$

Entonces, como $V \subset U$ y $f|_U \equiv 0$, se sigue que $g \in C(X)$ y $f = gh$.

Esto implica que:

$\phi(f) = \phi(g)\phi(h) = \phi(g)\phi(\sum_{i\in F}(P_i - c_i)^2) = \phi(g)(\sum_{i\in F}\phi((P_i - c_i)^2)) = \phi(g)(\sum_{i\in F}(\phi(P_i) - \phi(c_i))^2) = 0$

Ahora supongamos que existe $f \in C(X)$ con $\phi(f) = 2$ y $f(c) = 0$. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define por:

$$g(x) = -\chi_{(-\infty,-1]}(x) + x\chi_{(-1,1]}(x) + \chi_{(1,\infty)}(x).$$

Entonces $g \in C(\mathbb{R})$. Sea $U = f^{-1}(-1,1)$. Entonces $c \in U$ y $f - g \circ f = 0$ en U.

En efecto, por definición de $g(x)$ si $x \in U$ entonces $f(x) \in (-1,1)$, por lo que $g(f(x)) = f(x)$. Entonces $(f - g \circ f)(x) = f(x) - g \circ f(x) = f(x) - g(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$.

Partiendo de la observación anterior $2 = \phi(f) = \phi(g \circ f)$. Esto implica que:

$$1 = \phi((2 - g \circ f)^{-1}(2 - g \circ f)) = \phi((2 - g \circ f)^{-1})(\phi(2) - \phi(g \circ f)) = 0$$

Lo que es una contradicción, lo que demuestra que $\phi(f) = 0$ siempre que $f(c) = 0$.

Ahora suponemos que X es homeomorfo a un subconjunto cerrado $Y = \prod_{i \in I} \mathbb{R}$ para algún conjunto I.

Sea:

$$\psi : C(Y) \longrightarrow C(X), \text{ definida por } \psi(f) = f|_X$$

Donde $f|_X$ denota la restricción de f a X. Entonces existe $c \in Y$ tal que:

$$\phi \circ \psi(f) = f(c) \text{ para cada } f \in C(Y).$$

Supongamos que c no está en X. Como Y es un espacio completamente regular de Hausdorff, entonces existe $f \in C(Y)$ tal que $f(c) = 1$ y $f|_X \equiv 0$.

Esto implica que:

$$1 = f(c) = \phi \circ \psi(f) = \phi(f|_X) = 0, \text{ lo que es una contradicción.}$$

La prueba de los siguientes colorarios siguen inmediatamente del teorema.

Colorario 1. Sea $F(\mathbb{N})$ el álgebra de la función de valor real en $\mathbb{N}$ con respecto a las operaciones punto a punto. Para cada homomorfismo distinto de cero $\phi : F(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ existe un único punto $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(f) = f(\mathbb{N})$ para cada $f \in \mathbb{N}$.

Corolario 2. Sea X un verdadero espacio de Hausdorff real compacto y sea Y un espacio completamente regular de Hausdorff. Sea $\phi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ un homomorfismo distinto de cero. Entonces existe una función continua $\sigma : Y \longrightarrow X$ tal que:

$$\phi(f) = f \circ \sigma$$

Prueba. Tenemos la aplicación: $C(X) \xrightarrow{\phi} C(Y) \xrightarrow{\delta_y} \mathbb{R}$. Para cada $y \in Y$ $\exists x \in X$: $\delta_y \circ \phi = \delta_x$. Para la función continua $\sigma : Y \longrightarrow X$, $y \longrightarrow x = \sigma(y)$. Así tenemos que:

$$\phi(f)(y) = \sigma_y \circ \phi(f) = \delta_{\sigma(y)}(f) = f(\sigma(y)), \forall f \in C(X) \text{ y } \forall y \in Y.$$

Entonces $\phi(f) = f \circ \sigma$.

El corolario que presentaré a continuación es uno de los clásicos del análisis funcional, y cuya prueba también sigue inmediatamente del teorema anterior, y se conoce como el teorema de Banach-Stone.

Corolario 3. Sean X e Y espacios real compactos. Entonces $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos si y sólo si X e Y son homeomorfos.

2.3. Homomorfismos de anillos reales en $C(\Omega)$

En esta parte estudiaremos una prueba con relación a los homomorfismos de anillos reales en $C(\Omega)$, siendo Ω un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$, realizada por Karim Boulabiar [3]. Nos ofrece una prueba simple y accesible, pero que a su vez puede resultar muy interesante, acerca de los resultados de que cada homomorfismo de anillos de valor real en $C(\Omega)$ es una evaluación en algún punto de Ω. No hay falta de prueba de este resultado, pues este se prueba también en lo anteriormente visto en la prueba de Aron y Fricke [2], cuando $\Omega = \mathbb{R}$.

Primero, siendo n un entero positivo y Ω un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, recordemos que nos referimos a un homomorfismo de anillos en $C(\Omega)$ a una asignación diferente de cero $\phi : C(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ para la cual:

$$\phi(f + gh) = \phi(f) + \phi(g)\phi(h) \text{ para todo } f, g, h \in C(\Omega)$$

Ahora bien, lo que queremos ver es la prueba de que cada homomorfismo de anillos $\phi : C(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una evaluación en algún momento de Ω, es decir, que existe $w \in \Omega$ tal que:

$$\phi(f) = f(w) \text{ para todo } f \in C(\Omega).$$

2.3.1. Teorema

Teorema. Si $\phi : C(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de anillos, entonces hay algún punto $w \in \Omega$ para el que:

$$\phi(f) = f(w) \text{ para todo } f \in C(\Omega).$$

2.3.2. Estudio de la prueba de Boulabiar

En primer lugar recordemos que $\phi(0) = 0$ y que $\phi(\hat{1}) = 1$.

Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces $\frac{1}{f} \in C(\Omega)$ y así:

$$1 = \phi(1) = \phi(f)\phi(\tfrac{1}{f})$$

De ello se deduce que si $f \in C(\Omega)$ y $\phi(f) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para algún $x \in \Omega$, es decir, si tenemos una función que anule $\phi(f)$ entonces la función se tiene que anular en algún punto de Ω. Ahora para cada $k \in \{1, ..., n\}$ definimos $p_k \in C(\Omega)$ por:

$$p_k(x_1, ..., x_n) = x_k \text{ para todo } (x_1, ..., x_n) \in \Omega$$

A continuación ponemos a $w = (\phi(p_1), ..., \phi(p_n))$ y seleccionamos $f \in C(\Omega)$. Y definimos:

$$g = (f - \phi(f))^2 + \sum_{k=1}^{n} (p_k - \phi(p_k))^2 \in C(\Omega)$$

Entonces tenemos que:

$$\phi(g) = \phi((f - \phi(f))^2) + \phi(\sum_{k=1}^{n} (p_k - \phi(p_k))^2)$$

$$= \phi(f - \phi(f))^2 + \phi(\sum_{k=1}^{n} (p_k - \phi(p_k))^2$$

$$= (\phi(f) - \phi(f))^2 + \sum_{k=1}^{n} (\phi(p_k) - \phi(p_k))^2 = 0$$

Puesto que ϕ es automáticamente lineal, obtenemos que $\phi(g) = 0$.

De ello se deduce que $g(x) = 0$ para algún $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$.

Ahora bien:

$$f(x) = \phi(f) \text{ y } p_k(x) = \phi(p_k) \text{ para todo } k \in \{1, ..., n\}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\phi(p_k) = x_k \text{ para todo } k \in \{1, ..., n\}$$

Por lo que tenemos que:

$$x = (\phi(p_1), ..., \phi(p_n)) = w$$

Llegando finalmente a que $\phi(f) = f(w)$.

El enfoque que se ha estado analizando hasta ahora se limita a las condiciones de homomorfimos de anillos y de álgebra ya anteriormente descritas, pero esta prueba se puede extender a una amplia clase de anillos clásicos de valores reales. De hecho la prueba funciona para cualquier anilllo R de valor real en un subconjunto no vacío X de $\mathbb{R}^n$ siempre que verifique las siguientes condiciones:

1. Si $p_k \in R$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$.

2. Si R contiene las funciones constantes.

3. Si R es la inversión de cerrado, es decir, si $f \in R$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ entonces $\frac{1}{f} \in R$.

Por ejemplo, el anillo $C^k(\Omega)$ de todas las funciones con valores reales $k-$diferenciables en Ω con $k \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ de todas las funciones reales de los números naturales $\mathbb{N}$ cumplen estas tres condiciones.

Capítulo 3

Homomorfismo de valor real de las álgebras de funciones diferenciables

Además de las estructuras descritas en un principio, hemos visto como para otras estructuras que se encuentren bajo las condiciones descritas por Karim Boulabiar [3] para las cuales este tipo de pruebas también son aplicables, es decir que estas pruebas pueden ser extendidas aún más allá de las álgebras de funciones continuas, y nos mostró como ejemplo las funciones con valores reales $k-$diferenciables siendo k un número natural.

Por lo tanto, en esta sección nos extenderemos a estudiar el documento de una prueba realizada por Arias-De-Reyna [1], en el que se demuestra que para cada homomorfismo A de $C^k(\mathbb{R}^n)$ existe un x en $\mathbb{R}^n$ tal que $A(f) = f(x)$ para $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, en donde $C^k(\mathbb{R}^n)$ con $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$ denota el álgebra de las funciones reales k-veces diferenciables.

Puesto que $C^k(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de funciones, tiene sentido preguntarse si para cada homomorfismo distinto de cero $A : C^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ corresponde $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $A(f) = f(x)$ para todo $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, dicho de otra manera si A es una evaluación.

3.1. Filtro asociado a un homomorfismo real

Sea $A : C^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ un homomorfismo no nulo. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $\hat{\alpha}$ la función constante que relaciona el valor de α para cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$. Luego $A(\hat{\alpha}) = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. En efecto, $A(\hat{1}) \neq 0$ porque $A \neq 0$. Entonces $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $B(\alpha) = A(\hat{\alpha})$ es un homomorfismo no nulo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto B es el homomorfismo identidad, es decir $A(\hat{\alpha}) = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.1.1. Proposición 1

Sea $A : C^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ un homomorfismo no nulo. Para cada $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : A(f) = f(x)\}$ es no vacío.

Prueba. Supongamos que $\{x \in \mathbb{R}^n : A(f) = f(x)\}$ es vacío. Entonces $f - \widehat{A(f)}$ es una función real, que no toma el valor 0. Entonces $(f - \widehat{A(f)})^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y vemos que:

$$1 = A(\hat{1}) = A((f - \widehat{A(f)})(f - \widehat{A(f)})^{-1}) = A(f - \widehat{A(f)})A(f - \widehat{A(f)})^{-1})$$

Lo que contradice: $A(f - \widehat{A(f)}) = A(f) - A(f) = 0$.

3.1.2. Proposición 2

Sea $A : C^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ un homomorfismo no nulo. Denotemos por $S(f_1, \cdots, f_n)$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : A(f_i) = f_i(x), i = 1, 2, \ldots, n\}$. La colección G de todos los conjuntos $S(f_1, \cdots, f_n)$ donde $f_1, \cdots, f_n \in C^k(\mathbb{R}^n)$ es una base de filtro de $\mathbb{R}^n$.

Prueba. Puesto que $S(f_1, \ldots, f_n) \cap S(g_1, \ldots, g_m) = S(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m)$, es suficiente para demostrar que $S(f_1, \ldots, f_n) \neq \emptyset$ para todo $f_1, \ldots, f_n \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Considere la función $g = \sum_{i=1}^{n}(f_i - \widehat{A(f_i)})^2 \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Por la proposición 1, existe un $x \in R^n$ tal que $A(g) = g(x)$.

Entonces tenemos que:

$$A(g) = A(\sum_{i=1}^{n}(f_i - \widehat{A(f_i)})^2) = \sum_{i=1}^{n} A(f_i - \widehat{A(f_i)})^2 = \sum_{i=1}^{n}(A(f_i) - A(f_i))^2 = 0$$

Así, a partir de la definición de g obtenemos que $A(g) = 0$.

Por lo tanto $\sum(f_i(x) - \widehat{A(f_i)})^2 = 0$, lo que obliga a $f_i(x) = A(f_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición. Sea $A : C^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ un homomorfismo no nulo. Diremos que el filtro F generado por la base de filtro G, por la proposición 2, es el filtro asociado a A.

3.1.3. Proposición 3

Sea $A : C^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ un homomorfismo no nulo. Entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que para cada $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $A(f) = f(x)$.

Prueba. Sea $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ la función definida por $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. El filtro F asociado a A contiene el conjunto $K = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : A(f) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\}$. Dado que K es compacto, existe $x \in \mathbb{R}^n$ adherente a F.

Para todo $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ vemos que $X \in \overline{\{y \in \mathbb{R}^n : A(g) = g(y)\}} = \{y \in \mathbb{R}^n : A(g) = g(y)\}$. Por lo tanto $A(g) = g(x)$.

Bibliografía

[1] Juan Arias-De-Reyna, A real valued homomorphism on algebras of differentiable functions, American Mathematical Society, 104 (1988), 1054-1058.

[2] Richard M. Aron y Gerd H. Fricke, Homomorphism on $C(R)$, American Mathemathical Monthly, 93 (1986), 555.

[3] Karim Boulabiar, Real-valued ring homomorphisms on $C(\Omega)$. Preprint.

[4] Ryszard Engelking, General Topology, Helderman Verlag, Berlín, 1989.

[5] Z. Ercan y S. Onal, A remark on the homomorphism on $C(X)$, American Mathematical Society, 133 (2005), 3609-3611.

[6] Leonard Gillman y Meyer Jerison, Rings of continuous functions, Reimpresión de la edición de 1960. Springer-Verlag, New York, 1976.

[7] José L. González Llanova y Jesús A. Jaramillo Aguado, Homomorphisms between algebras of continuous functions, Can. J. Math., LXI, No. 1(1989), 132-162.

[8] Jesús A. Jaramillo Aguado, Álgebras de funciones continuas y diferenciables, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Departamento de Análisis Matemático.

[9] Lyle E. Pursell, Comments on Homomorphisms on $C(R)$, American Mathemathical Monthly, 94 (1987), 646.

[10] A.P. Robertson y Wendy Robertson, Topological Vector Spaces, Cambridge University Press, 1973.