

Máster en Investigación Matemática.

Universitat Politècnica València.

Departamento de Matemática Aplicada.



Superficies Discretas en la Arquitectura

Autor: Mohamed Blanca Ruiz

Tutores: Alfred Peris Manguillot y Juan Monterde Garcia-Pozuelo

Valencia - Septiembre 2013

Resumen

El diseño y construcción de formas libres en la arquitectura se resuelve generalmente mediante la discretización con paneles triangulares, o paneles curvos de un mayor número de lados.

La construcción con paneles cuadrangulares o hexagonales presenta importantes ventajas respecto al uso de paneles triangulares: tienen un menor número de aristas, lo que implica un menor cantidad de acero en la estructura portante y por tanto menor coste. Además presentan una menor complejidad de los nodos, debido al menor número de aristas que convergen en cada vértice, ya que estos tienen menor índice.

En el presente trabajo se estudian diferentes métodos para la construcción de superficies discretas de doble curvatura con paneles cuadrangulares planos.

1. En primer lugar, se da un método constructivo para la construcción de superficies de traslación y revolución, utilizando un número limitado de paneles diferentes.
2. Después se estudian algoritmos para la construcción de superficies más complejas resueltas con cuadriláteros, en este caso todos los paneles son, en general, diferentes.

Por último se estudia la construcción de formas libres con paneles hexagonales planos. Estos métodos generan un mallado hexagonal plano a partir de un mallado triangular inicial. Damos un algoritmo para la discretización de un elipsoide con paneles hexagonales planos, utilizando los puntos de Fekete como mallado inicial. Se estudia también un algoritmo para la distribución de puntos de Fekete sobre la esfera unidad.

Abstract

The design and construction of free-form structures is generally accomplished through the use of either planar triangular facets or curved panels.

The construction with quadrilateral and hexagonal possesses a number of important advantages over triangular meshes: they have a smaller number of edges, resulting in a smaller number of supporting beams following the edges, less steel and less cost. Quadrilateral and hexagonal meshes also have a lower node complexity, because at each vertex there are a small number of edges, because vertices have less index.

In this master thesis, some methods for creating an almost unlimited multitude of shapes for double-curved surfaces with planar quadrangles are studied.

1. First we give a constructive method to build translation and revolution surfaces with planar quadrilateral meshes, using a limited number of different panels.
2. After that, we study algorithms to build more complex surfaces with planar quadrilateral meshes. All the resulting panels are usually different.

Finally, we study the panelization of free-form surfaces using planar hexagonal meshes. The methods generate planar hexagonal meshes from an initial triangular mesh. We give a method for the panelization of an ellipsoid with planar hexagonal meshes using the Fekete points as initial mesh. An algorithm to obtain Fekete points in the unit sphere is also studied.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Introducción	3
Capítulo 1. Superficies de traslación	13
Capítulo 2. Superficies de revolución	29
Capítulo 3. Superficies de revolución con eje de rotación libre	35
Capítulo 4. Superficies de traslación con escala	43
Capítulo 5. Paneles hexagonales planos	51
1. Resolución de cúpulas con paneles hexagonales planos.	53
Capítulo 6. Caso de estudio. Feria Valencia	61
1. Resolución como superficie de traslación	63
2. Resolución como superficie de revolución	65
3. Resolución como superficie de traslación con escala	67
4. Resolución con paneles hexagonales planos	68
Comparativa de las distintas panelizaciones	69
Apéndice A. Puntos de Fekete elípticos en la esfera	71
Bibliografía	75

Introducción



FIGURA 0.1. Museo Guggenheim, Bilbao, Arqto: F. Gehry.

En las últimas décadas, hemos visto la construcción de edificios singulares que presentan un cambio respecto a un tiempo atrás. Las características diferenciales que presentan estos edificios son formales y constructivas. A nivel formal encontramos la presencia de formas libres o de doble curvatura, y a nivel constructivo encontramos la presencia en estos edificios de dos materiales principales: el acero y el vidrio.

Una muestra de esto son el museo Guggenheim de Frank Gehry (Fig. 0.1), la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia (Fig. 0.2 izquierda), el Auditorio en Roma de Renzo Piano (Fig. 0.2 derecha), la Destilería Nardini de M. Fuksas (Fig. 0.3 izquierda), el Andel Building de Jean Nouvel (Fig. 0.3 centro), o el City Hall de Norman Foster (Fig. 0.3 derecha).



FIGURA 0.2. *Izda:* Ciudad de las Artes y las Ciencias, Valencia. Arqto: J. Calatrava. *Dcha:* Auditorio, Roma. Arqto: R. Piano.



FIGURA 0.3. *Izda:* Destilería Nardini, Vicenza. Arqto: M. Fuksas. *centro:* Andel Building, Praga. Arqto: J. Nouvel. *Dcha:* City Hall, Londres. Arqto: N. Foster.

Ahora bien el uso de superficies curvas no es algo nuevo de las últimas décadas. Bóvedas y cúpulas han estado presentes a lo largo de la historia de la arquitectura. La presencia de paredes curvas ya fue desarrollada por la arquitectura barroca.

Desde principios del siglo XX, gracias a la aparición y desarrollo del hormigón armado, la presencia de formas libres en la arquitectura se hace más visible. Ejemplos de esto son la capilla de Notre Dome du Haut en Ronchamp, Francia (Fig. 0.4 izquierda) obra del arquitecto suizo Le Corbusier en 1950, así como el restaurante Los Manantiales en Xochimilco, México (Fig. 0.4 derecha) construido en 1958 por el ingeniero Felix Candela.



FIGURA 0.4. *Izda:* Capilla de Notre Dome du Haut, Ronchamp. Arqto: Le Corbusier. *Dcha:* Restaurante Los Manantiales, Xochimilco. Arqto: F. Candela.

De igual manera, materiales como el acero y el vidrio, ya han sido utilizados a lo largo del siglo XX. Gran parte de la obra de Mies van der Rohe, se caracteriza por la combinación de estos dos materiales, si bien con una geometría completamente plana. La casa Farnsworth, Fox River, Illionis (Fig. 0.5 izquierda) construida en 1951, o el Neue Nationalgalerie de Berlin (Fig. 0.5 derecha) de 1968, ambos obra de Mies van der Rohe son dos buenos ejemplos de ello.



FIGURA 0.5. *Izda:* Casa Farnsworth, Illionis. Arqto: Mies van de Rohe. *Dcha:* Neue Nationalgalerie, Berlin. Arqto: Mies van de Rohe.

Algunos autores como Heinz Schmiedhofer en [15] han denominado la arquitectura contemporánea como *freeform-high-tech-Archiecture*. Este nombre recoge los dos aspectos esenciales de la arquitectura actual, la forma libre y la alta tecnología.

1. Por una parte, la construcción de formas de doble curvatura necesita en primer lugar un control del proceso de diseño. El control de este proceso lo ha permitido el desarrollo de las herramientas de diseño asistido por ordenador (CAD).

Estos programas permiten al arquitecto el diseño de superficies libres en tres dimensiones, permitiendo durante el proceso, la visualización del proyecto desde diferentes puntos de vista.

Esto ha supuesto un salto cualitativo importante. Antes, el diseño de formas libres se estudiaba mediante la construcción de maquetas a escala. Esto presentaba varios inconvenientes:

- a) El material de la maqueta limitaba las formas debido a las restricciones de la física.
- b) Además, cualquier modificación que se deseara realizar, implicaba la destrucción de una parte de la maqueta, o la construcción de otra nueva.
- c) Y por último, la construcción del edificio proyectado era compleja, debido a la falta de control de la forma construida.

En este aspecto, los programas CAD, al describir matemáticamente las formas libres permiten un control exhaustivo del proceso de puesta en obra. Este control matemático viene dado por el uso de superficies de Bézier, superficies definidas por B-splines y NURBS.

2. Por otra parte, el desarrollo del acero permitió el diseño y construcción de estructuras más ligeras. Esto, junto con el progreso de los sistemas constructivos, propició la independencia de la estructura respecto a la envolvente.

Al liberar a la envolvente de su función estructural, nuevos materiales más ligeros, que garantizan la estanqueidad y cumplen los requisitos de aislamiento térmico y acústico, han pasado a formar parte de las envolventes.

Hoy en día, gracias a la tecnología actual, materiales como el vidrio, plásticos, determinados metales (aluminio, zinc,...), están presentes en las envolventes de los edificios, cumpliendo todos los requisitos técnicos.

Los programas de CAD que han sido desarrollados por las industrias automovilísticas y aeronáuticas para la construcción de formas libres. Sin embargo las diferencias entre estas industrias y la arquitectura en aspectos estéticos, estructurales y de escala, dificultan el paso del diseño a la construcción.

La solución para la construcción de superficies geométricas complejas como se indica en [12], es dividir la superficie en elementos más pequeños llamados paneles. Este proceso se conoce como panelización, y es uno de los aspectos más importantes de la construcción de formas libres en la arquitectura según [18].

El proceso de panelización no lo resuelven hasta ahora los programas de diseño asistido por ordenador, como se indica en [12] las opciones son:

1. Utilizar superficies más simples, y renunciar al uso de formas libres.
2. Reproducir la forma de manera exacta, lo que implica costes muy elevados.
3. Recurrir a aproximaciones experimentales.

La investigación sobre la panelización de formas libres para su aplicación en la arquitectura ha experimentado un avance durante la última década. A continuación repasamos las líneas principales de investigación.

Las discretizaciones por medio de paneles triangulares, presentan la ventaja que pueden describir cualquier forma libre ofreciendo una buena aproximación a la superficie original. Pero su uso en arquitectura presenta varias desventajas respecto al uso de paneles con un mayor número de lados [11]:

1. Mayor complejidad estructural. En cada vértice convergen generalmente 6 aristas, lo que dificulta su ejecución.
2. El mayor número de aristas, hace que se precise más acero para la estructura portante, encareciendo el coste final. En estructuras cubiertas por vidrio, reduce la transparencia.

Entre los edificios que han utilizado paneles triangulares para la resolución de formas libres, tenemos el centro de eventos de Feria Valencia (Fig. 0.6 izquierda), obra de José Tomás y la Great Court del British Museum (Fig. 0.6 derecha) construida por Norman Foster.



FIGURA 0.6. *Izda:* Centro de eventos de Feria Valencia. Arqto: J. Tomás.
Dcha: Great Court del British Museum. Arqto: N. Foster.

El uso de paneles planos con un mayor número de lados, reduce el número de aristas y la complejidad estructural de los nudos. Sin embargo, al situar cuatro o más puntos sobre una superficie de doble curvatura generalmente estos no están contenidos en el mismo plano, es decir no son coplanarios.

La combinación de paneles triangulares y cuadrangulares ha sido utilizada por Massimiliano Fuksas en la Trade Fair Center, Milan (Fig 0.7 izquierda) y Frankfurt MyZeil (Fig. 0.7 derecha). Partiendo de una panelización triangular, en los lugares en donde dos triángulos contiguos son coplanarios se han sustituido por una panel cuadrangular.



FIGURA 0.7. *Izda:* Trade Fair Center. Arqto: M. Fuksas. *Dcha:* Frankfurt MyZeil. Arqto: M. Fuksas.

Una posible solución es el uso de paneles curvados. Ejemplos del uso de paneles de curvatura simple lo encontramos en la estación del TGV de Estrasburgo, (Fig. 0.8 izquierda) o las salidas de metro de Bilbao (Fig. 0.8 derecha) diseñadas por Norman Foster. La aproximación de superficies libres por medio de paneles de curvatura simple ha sido estudiada en [13].



FIGURA 0.8. *Izda:* Estación del TGV, Estrasburgo. *Dcha:* Salidas del Metro Bilbao. Arqto: N. Foster.

El uso de los paneles curvados, si bien, permiten una mayor fidelidad en la construcción, el costo de su fabricación es muy elevado. El coste de cada panel viene determinado por el coste de fabricación de su molde. La unicidad de cada panel no permite la reutilización de un molde para la fabricación de paneles del mismo tipo, lo cual encarece en mayor medida el costo final.

El uso de paneles de doble curvatura lo podemos observar en la Kunsthaus en Graz, Austria (Fig. 0.9 izquierda), obra de Peter Cook y Colin Fournier, y en la estación de St. Lazare en Paris (Fig. 0.9 derecha) construida por Jean Marie Charpentier. En estos ejemplos cada panel ha sido curvado individualmente. Una forma de reducir los costes sin renunciar al uso de paneles curvados, es la fabricación de un número mayor de paneles del mismo tipo, de modo que se reduzca el número de moldes necesarios como se propone y estudia en [4].



FIGURA 0.9. *Izda:* Kunsthaus, Graz. Arqtos: P. Cook y C. Fournier. *Dcha:* Estación de St. Lazare, Paris. Arqto: J. M. Charpentier

Los costes de los paneles de simple y doble curvatura, hacen que estos sean válidos para determinados edificios singulares. La fachada del edificio danzante o Ginger & Fred en Praga, República Checa (Fig 0.10), obra de Frank Gehry, presenta una solución con paneles cuadrangulares planos, sin embargo, en este caso deberíamos hablar de superficies superpuestas, ya que no hay coincidencia entre las aristas de las distintas filas de paneles.



FIGURA 0.10. *Izda:* Edificio danzante o Ginger & Fred. Praga: F. Gerhy. *Dcha:* Detalle del encuentro entre paneles

El uso de panelizaciones de superficies libres por medio únicamente de paneles cuadrangulares planos ha sido utilizado por Schlaich Bergermann & Partners en la cubierta del Museo de Historia de Hamburgo (Fig. 0.11 izquierda), y junto a Frank Gehry en los edificios del nuevo Campus Novartis Pharma AG en Basilea (Fig. 0.11 derecha).

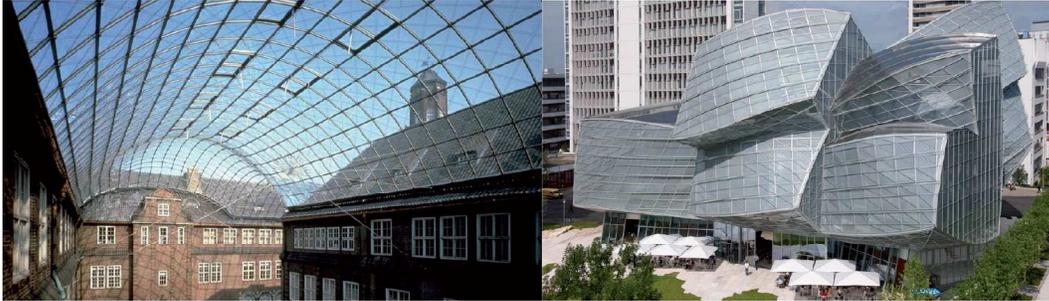


FIGURA 0.11. *Izda*: Cubierta del Museo de Historia de Hamburgo. Arqto: S. Bergermann. *Dcha*: Campus Novartis Pharma AG en Basilea. Arqto: F. Gehry.

A nivel de investigación hay varios frentes abiertos:

1. En [7], se estudia la panelizaciones con cuadriláteros, para determinadas superficies. Las superficies discretizables por este método son las superficies de traslación y superficies de traslación con escala. Los paneles generados son siempre planos, ya que tienen dos lados paralelos.
2. La obtención de estas panelizaciones a través de un método iterativo ha sido estudiada por [15] y [16]. A partir de un mallado inicial, en cada iteración se subdivide y después los paneles resultantes se transforman en paneles planos.
3. El estudio de las líneas principales de curvatura de una superficie, expuesto en [14], permite crear discretizaciones por medio de cuadriláteros.

Más reciente es la investigación sobre las posibilidades de discretización de las superficies libres por medio de paneles hexagonales planos. Las ventajas que presentan estos paneles respecto a los paneles triangulares son similares a los paneles cuadrangulares. Estas son: menor número de aristas, y mayor simplicidad de los nodos estructurales, por la intersección de un menor número de aristas.

Las líneas de investigación en este sentido, estudian esta panelización a partir de un mallado triangular inicial. Estos son los casos de [19] y de [20], en donde cada triángulo del mallado trinagular inicial nos genera un punto en el mallado hexagonal final. En [19] el punto se obtiene por medio de la intersección de los tres planos tangentes a la superficie

asociados los vértices del triángulo. En [20], cada punto del mallado hexagonal final viene generado por el centro de Dupin de cada triángulo del mallado inicial.

Es de destacar que en todas las panelizaciones de formas libres estudiadas hasta ahora, las dimensiones de los paneles resultantes son diferentes. La posibilidad de utilizar paneles planos de dimensiones predeterminadas permitiría la fabricación en serie de dichos paneles, abaratando los costes. Esto permitiría una mayor libertad a los arquitectos en las posibilidades de diseño, permitiendo el uso de superficies de doble curvatura en un mayor número de edificios.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que el problema de determinar qué superficies se pueden generar a partir de un conjunto predeterminado de paneles con dimensiones fijas es altamente difícil debido a las múltiples restricciones que aparecen en cada vértice y en cada arista.

En el presente trabajo partiendo del método expuesto en [7], vamos a desarrollar un algoritmo para discretizar la superficies de traslación, pero de modo que, los tipos de paneles a utilizar para la discretización de la superficie serán limitados.

En el segundo capítulo, nos centraremos en el estudio de las superficies de rotación. Basándonos en la generación de estas superficies, daremos un método para la panelización de estas superficies usando como en el caso anterior un número limitado de paneles diferentes.

En los dos siguientes capítulos, estudiaremos la panelización de formas más complejas estructuralmente, construyéndolas con paneles cuadrangulares planos. En estos casos las dimensiones (lados y ángulos) de cada panel serán, en general, únicas.

También serán únicos, generalmente, los paneles hexagonales obtenidos para la panelización con paneles hexagonales planos. En este capítulo profundizaremos en los métodos para obtener panelizaciones hexagonales, y desarrollaremos un algoritmo para determinadas superficies.

Por último, aplicaremos los diferentes algoritmos a la discretización del elisoide presente en la Feria de Muestras de Valencia, visualizando el resultado obtenido con cada proceso.

En el apéndice A, explicamos un algoritmo para el cálculo de los puntos de Fekete, basado en [1] y [2]. Los puntos de Fekete nos proporcionan la distribución uniforme de un número determinado de puntos en una esfera.

Comentar que el objetivo es proporcionar una herramienta para la construcción de superficies discretas, utilizando las superficies continuas como base para la construcción de éstas.

Superficies de traslación

Las panelizaciones con paneles de cuatro lados presentan numerosas ventajas respecto a las discretizaciones con mallas triangulares. Estas ventajas son:

1. Presentan una menor complejidad estructural. El número de aristas que convergen en cada vértice se reduce de 6 a 4. Esta mayor simplicidad de los nudos estructurales facilita la puesta en obra, lo que conlleva una reducción de los costes de mano de obra.
2. Por otra parte, el número de aristas es menor. Esto supone ventajas en dos aspectos:
 - a) A nivel estructural, la reducción del número de aristas, supone una reducción del acero utilizado, lo que reduce los costes de material.
 - b) En el aspecto estético, en estructuras con paneles de vidrio, la presencia de estructuras menos densas, permite una mayor transparencia, siendo este uno de los objetivos del uso de este material.

Como hemos comentado, el uso de paneles curvados frente a los paneles planos encarece sobremanera los costes de producción de estos, ya que generalmente hay que construir un molde por cada panel.

Además uno de los aspectos que puede permitir una mayor reducción de costes es el proceso de estandarización. Esto es la posibilidad de construir superficies libres con paneles de unas medidas determinadas, evitando que cada panel presente unas medidas únicas.

Generalmente 4 puntos situados sobre una superficie no son coplanarios. Es por ello que la situación de puntos en la superficie no genera paneles cuadrangulares planos como ocurre con las panelizaciones triangulares.

Se han desarrollado diversos métodos para la obtención de discretizaciones cuadrangulares planas para superficies de doble curvatura. Uno de estos métodos es el expuesto en [7], válido para determinadas superficies. El método se basa en el siguiente principio: *"un cuadrilátero en el espacio es plano siempre que dos de sus lados son paralelos"*.

Uno de los tipos de superficies discretizables con este método son la superficies de traslación.

Estas superficies surgen de la traslación en el espacio \mathbb{R}^3 , de una curva generatriz $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(t) = (g_x(t), g_y(t), g_z(t))$ a lo largo de una dirección, esta dirección viene definida por una curva que se denomina curva directriz $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(t) = (f_x(t), f_y(t), f_z(t))$.

La superficie resultante es

$$S_T : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, S_T(u, v) = (f_x(u) + g_x(v), f_y(u) + g_y(v), f_z(u) + g_z(v)).$$

Las curvas directriz y generatriz son intercambiables, es decir, dadas dos curvas f y g , la superficie obtenida por la traslación de f a lo largo de g es la misma que si trasladamos g a lo largo de f como se observa en la figura 1.1.

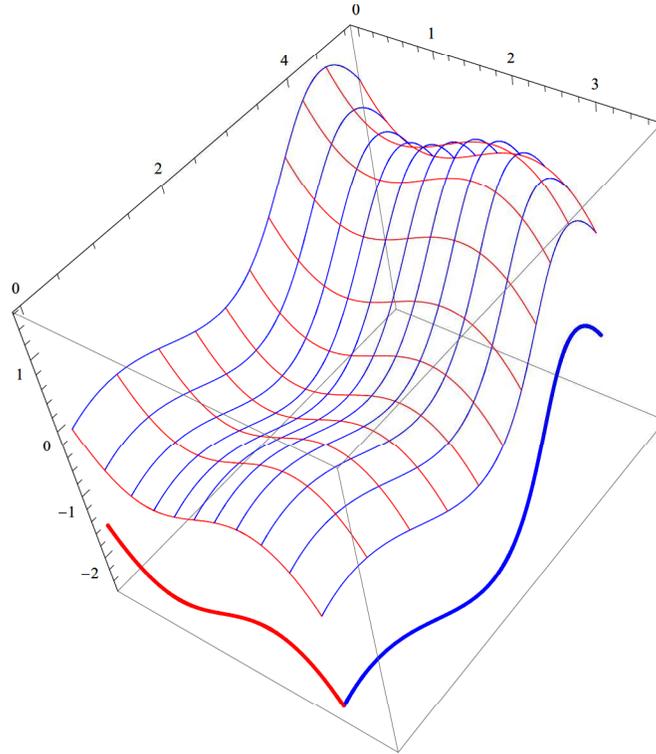


FIGURA 1.1. Superficie de traslación. Las curvas generatriz (roja) y directriz (azul) son intercambiables.

La traslación de un segmento, a lo largo de otro segmento, nos generará siempre una superficie plana cuadrangular. La superficie generada será además un paralelogramo. Las características del paralelogramo vendrán definidas únicamente por los vectores directores de los segmentos.

El algoritmo que usaremos para discretizar las superficies de traslación será el siguiente:

1. Obtención de las curvas f y g , que nos definirán la superficie de traslación.

Para la creación de curvas ajustadas a las necesidades del diseñador, los programas de diseño asistido por ordenador (CAD) incorporan las curvas de Bézier para la creación de curvas libres. Las curvas directriz f y generatriz g , las definiremos como curvas de Bézier por medio de sus polígonos de control.

En la figura 1.2 izquierda, tenemos la curva de Bézier generada por el polígono de control

$$((0, 0, 0), (1, 0, -2), (2, 0, 1), (3, 0, -1)),$$

contenida en el plano XZ , mientras que la curva de la figura 1.2 derecha está generada por el polígono de control

$$((0, 0, 0), (0, 2, 1), (2, 1, -1), (-1, 4, 3), (0, 5, 1)).$$

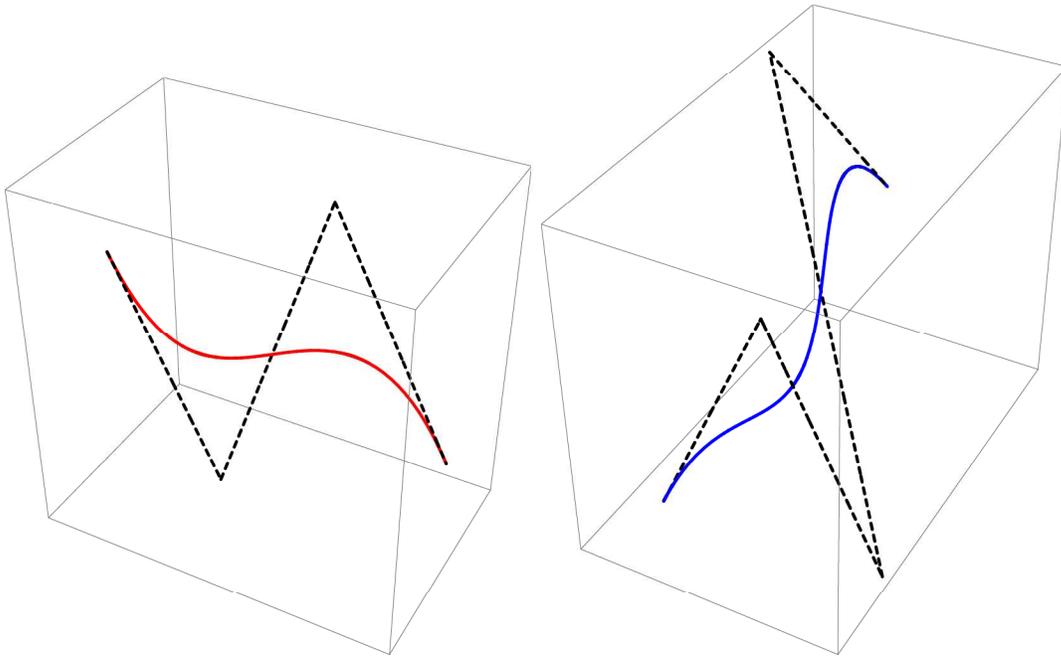


FIGURA 1.2. Curvas de Bézier y polígonos de control que las generan (líneas discontinuas).

Las curvas de la figura 1.2 generan la superficie de traslación de la figura 1.3.

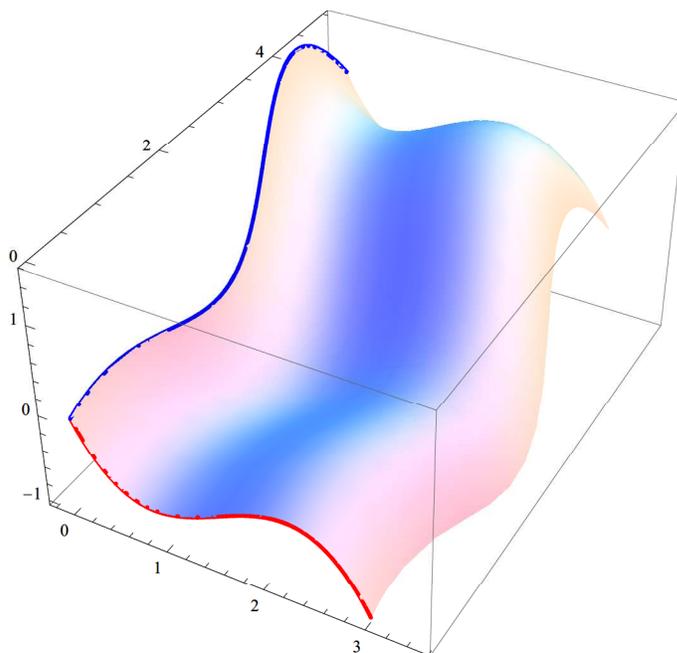


FIGURA 1.3. Superficie de traslación generada por las curvas de la figura 1.2.

2. Dadas f y g , obtener $f_D = \{f_0, \dots, f_n\}$ y $g_D = \{g_0, \dots, g_m\}$ poligonales equiláteras que aproximan las curvas f y g respectivamente.

Para la aproximación por medio de una poligonal equilátera, existen varias opciones. Optamos por una discretización que, si bien no es la que presenta una mejor optimización, sí que es la que permite un cálculo más sencillo. En este caso, buscamos que la poligonal equilátera tenga sus vértices sobre la curva original.

A partir de un punto inicial, y dado el lado de la poligonal equilátera, el siguiente punto se calcula hallando la intersección entre la curva parametrizada y la esfera de centro el punto anterior de la curva, y radio el lado deseado. De forma iterativa se van calculando los siguientes puntos. Si el último punto queda fuera del intervalo en que está definida la función (que suele ser lo habitual), pasa a tomar el valor del extremo final de la curva (siendo por tanto el último lado de menor dimensión).

Dados:

- Curva a discretizar $c : [t_{min}, t_{max}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (c_x(t), c_y(t), c_z(t))$,
- Lado de la poligonal discreta l que queremos obtener,
- Y un punto inicial, generalmente

$$p_0 = c(t_0 = t_{min}) = (c_x(t_0 = t_{min}), c_y(t_0 = t_{min}), c_z(t_0 = t_{min})).$$

Los puntos sucesivos se obtienen

$$p_n = c(t_n) = (c_x(t_n), c_y(t_n), c_z(t_n)),$$

tomando t_n los valores

$$t_n = s_n, \quad \text{si } s_n \leq t_{max}$$

$$t_n = t_{max}, \quad \text{si } s_n > t_{max},$$

siendo s_n la solución de la ecuación

$$\|c(s_n) - p_{n-1}\|^2 = l^2; \quad s_n > t_{n-1}.$$

En las figuras 1.4 y 1.5 vemos la discretización equilátera para la curvas de la figura 1.2, tomando como lados los valores: $0,8ud.$ en la izquierda, $0,4ud.$ las centrales y $0,2ud.$ las situadas a la derecha.



FIGURA 1.4. Discretización equilátera de la curva de la figura 1.2 izquierda, tomando como lado los valores $0,8ud.$, $0,4ud.$ y $0,2ud.$ respectivamente.

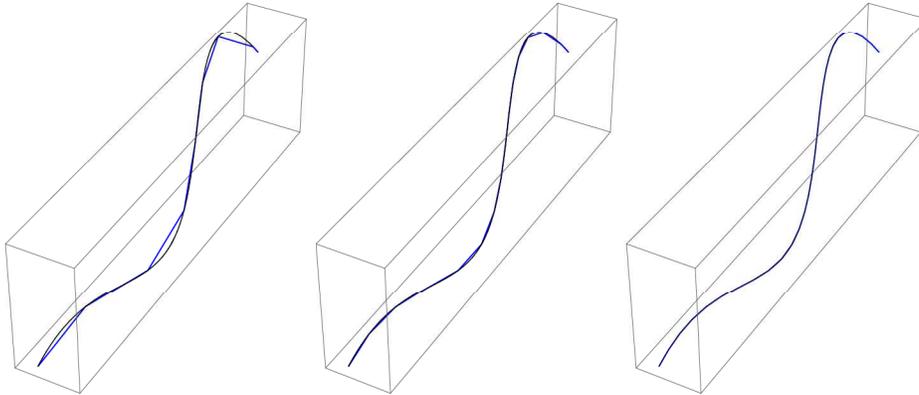


FIGURA 1.5. Discretización equilátera de la curva de la figura 1.2 derecha, para valores del lado $0,8ud.$, $0,4ud.$ y $0,2ud.$ respectivamente.

En las figuras 1.4 y 1.5, se observa que la elección del lado de la poligonal discreta, es la que determinará un mejor o peor ajuste respecto a la curva original. Mayor longitud del lado proporcionará, una mayor distancia de la poligonal equilátera a la curva original, así como mayor diferencia entre los ángulos contiguos.

Es de notar, que en el caso de un proyecto real, la materialidad de los paneles suele estar determinada. Esta materialidad nos determinará un intervalo de dimensiones, en función de los posibles tipos de paneles de dicha materialidad. Serán estas posibles medidas de los paneles las que habrá que estudiar para descartar aquellas que no determinen un buen ajuste entre la poligonal y la curva.

La superficie de traslación discreta, obtenida mediante las poligonales f_D y g_D , estará formada por paralelogramos (rombos en caso de utilizar misma longitud de lado en las discretizaciones de ambas curvas). Esto nos garantiza una panelización por medio de cuadriláteros planos, pero cada panel obtenido es diferente al resto. En la figura 1.6 observamos la panelización de la superficie de traslación de la figura 1.3 utilizando como lados para la discretización de ambas curvas los valores: $0,8ud.$ en la izquierda, $0,4ud.$ las centrales y $0,2ud.$ las situadas a la derecha.

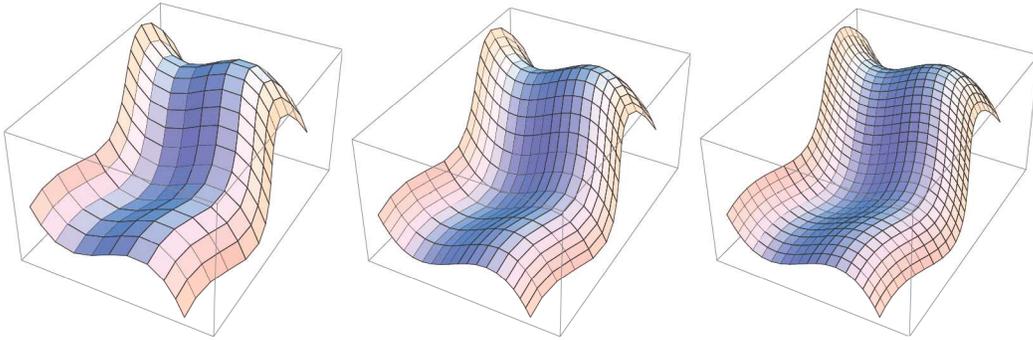


FIGURA 1.6. Panelización de la superficie de traslación de la figura 1.3, para valores de los lado $0,8ud.$, $0,4ud.$ y $0,2ud.$ en las dos curvas que definen la superficie.

3. Limitar los lados de las curvas discretas obtenidas f_D y g_D , a un número k de direcciones en el espacio dadas.

En función de si la curva es plana (entendemos por una curva plana, aquella que esta contenida en un plano) o no, las k direcciones en el espacio a las que ajustar cada uno de sus lados serán diferentes.

Por tanto para determinar las k direcciones posibles distinguiremos dos casos:

- a) En el caso de las curvas planas, necesitamos un número de direcciones diferentes en el plano, lo que equivale a las direcciones obtenidas de distribuir uniformemente k puntos en la circunferencia unidad situada en un plano paralelo al plano que contiene a la curva.

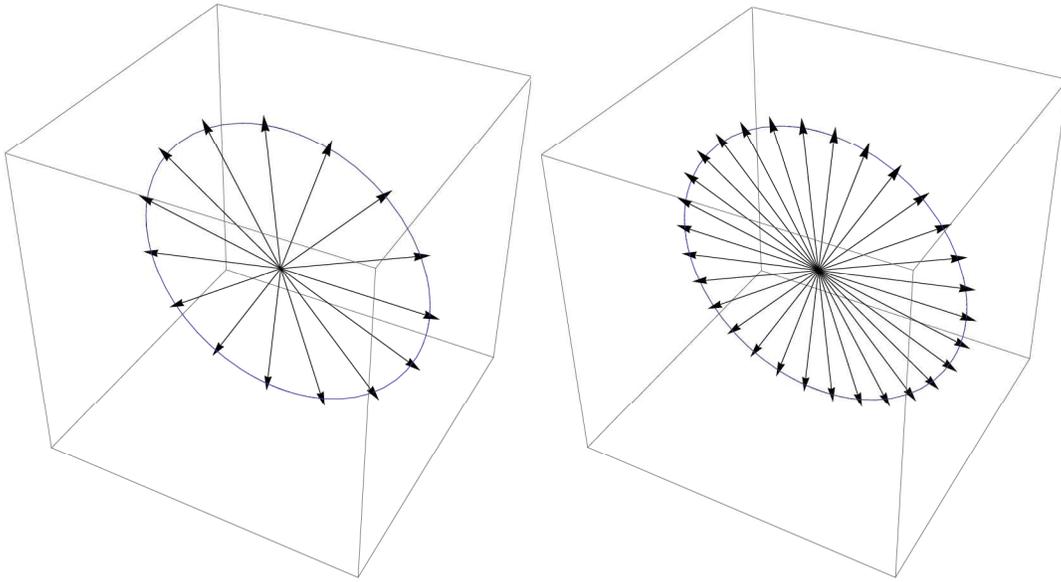


FIGURA 1.7. Posibles direcciones en el plano para valores $k = 15$ y $k = 30$.

En la figura 1.8, observamos como varía el ajuste para la curva de la figura 1.2 izquierda, discretizada con la longitud del lado $0,2ud.$, y ajustandola a un número k de direcciones en el plano igual a $k = 15$ y $k = 30$, de arriba a abajo respectivamente.

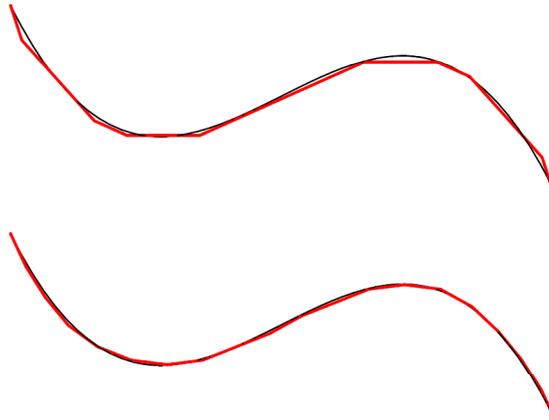


FIGURA 1.8. Ajuste de la curva de la figura 1.2 izquierda, con lado $0,2ud.$, y para los valores (de arriba a abajo) $k = 15$ y $k = 30$.

- b) Para el caso de las curvas no planas, la distribución de k puntos en el espacio presenta algunas dificultades.

Al igual que buscar k direcciones en el plano equivale a distribuir uniformemente los k puntos sobre la circunferencia, en el espacio equivale a distribuir los k puntos uniformemente en la esfera.

Para valores pequeños de k , para algunos valores conocemos estas distribuciones, que nos las proporcionan los distintos poliedros regulares y casi regulares. Para otros valores, no es posible encontrar una solución exacta, por lo que se recurre a la distribución más uniforme posible.

El problema de distribución de número k de puntos sobre una esfera se originó en un artículo de Michael Fekete el año 1923. Este es considerado como un ejemplo de problema de optimización altamente no trivial y con restricciones no lineales.

El problema de Fekete tiene el siguiente enunciado: Dado un número natural n y un número real $s \geq 0$, encontrar los puntos x_1, \dots, x_n en la esfera 2-dimensional para los cuales la s -energía, definida por

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^{-s}, \quad \text{si } s > 0$$

o por

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln \|x_i - x_j\|^{-1}, \quad \text{si } s = 0$$

es mínima. Para $s > 0$, tales puntos se denominan s -puntos de Fekete, y para $s = 0$, puntos de Fekete logarítmicos.

Debido a la complejidad del problema, presentamos en la figura 1.9 los resultados obtenidos para $k = 40$ y $k = 100$. En el Apéndice A, explicaremos el algoritmo de cálculo basado en [2] que hemos utilizado.

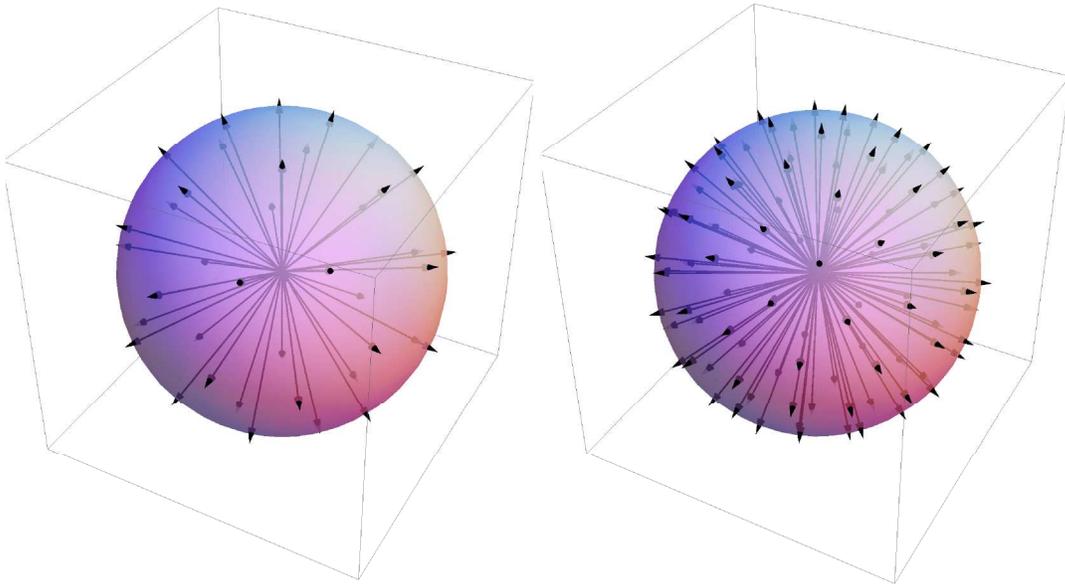


FIGURA 1.9. Posibles direcciones en el espacio para valores $k = 40$ y $k = 100$.

En la figura 1.8, observamos como varía el ajuste para la curva de la figura 1.2 izquierda, discretizada con la longitud del lado $0,2ud.$, y ajustandola a un número k de direcciones en el espacio igual a $k = 15$, $k = 30$ y $k = 50$, de izquierda a derecha respectivamente.

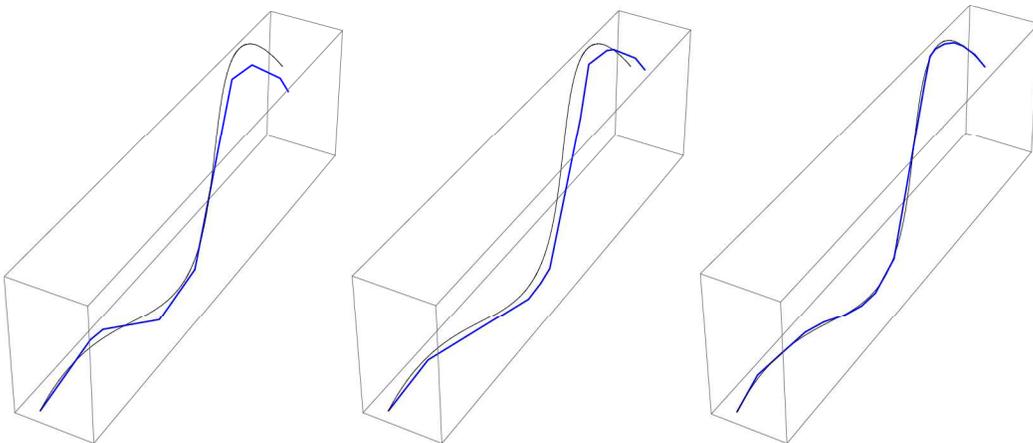


FIGURA 1.10. Ajuste de la curva de la figura 1.2 derecha, con lado $0,2ud.$, y para los valores (de izquierda a derecha) $k = 40$, $k = 100$ y $k = 200$.

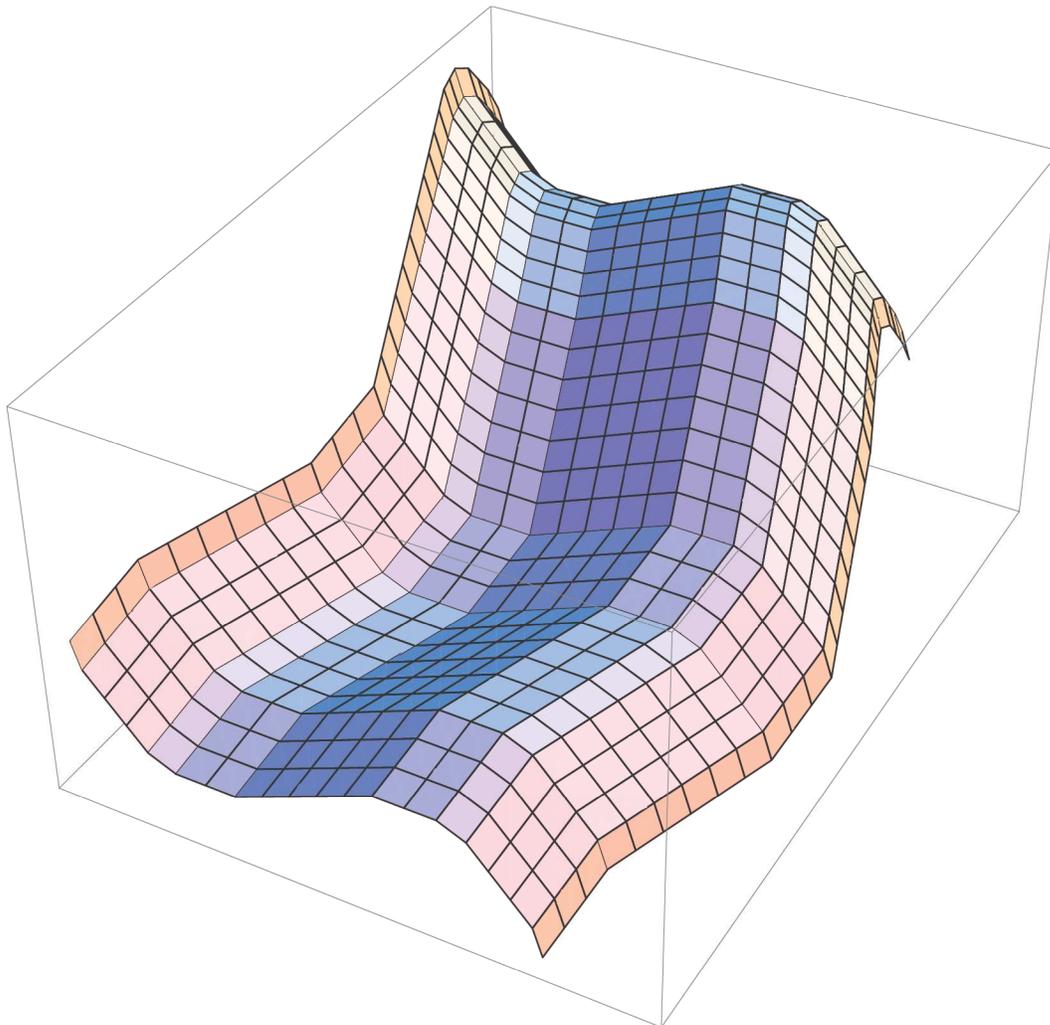
En este algoritmo, dada una curva c , la poligonal equilátera resultante del proceso de discretización $c_D(c, l, n)$ dependerá de dos parametros adicionales, l y k , longitud de los segmentos que compondrán la curva en el espacio, y número de direcciones posibles de los segmentos respectivamente.

Como se puede observar al aumentar el valor de k , aumentan las posibles direcciones, mejorando el ajuste de la curva y dando como resultado curvas más suaves, con angulos menos marcados.

Como resultado final obtendremos dos poligonales equiláteras, f'_D y g'_D , de n y m lados respectivamente. Estas dos poligonales nos generarán la superficie de traslación discreta S'_T . Esta superficie estará formada por la familia de paneles $P = \{P_{1,1}, \dots, P_{n,m}\}$. El número de paneles totales será $n \cdot m$, y el número de tipos de paneles dependerá del valor de k .

Dos paneles pertenecen al mismo tipo si teienen las mismas dimensiones. Por construcción sabemos que todos los paneles tienen las mismas dimensiones de los lados, por tanto la medida de las diagonales de un panel es la que nos permitira clasificar los diferentes tipos de paneles.

A continuación presentamos la panelización de la superficie de traslación de la figura 1.3, para valores de $l = 0,2ud.$ y variando los valores de k . Teniendo en cuenta que de las dos curvas de la figura 1.2 que definen la superficie de traslación, una de ellas es plana, los valores de k en cada curva serán distintos. Junto a la superficie de traslación discreta obtenida, indicamos los tipos de paneles utilizados y el número de paneles que la conforman.



Tipos de paneles diferentes	40
Número total de paneles	600

FIGURA 1.11. Panelización de la superficie de traslación generada por las curvas de la figura 1.2 con los siguientes valores: lados $l_1 = l - 2 = 0,2ud.$, y direcciones $k_1 = 15$ y $k_2 = 40$.

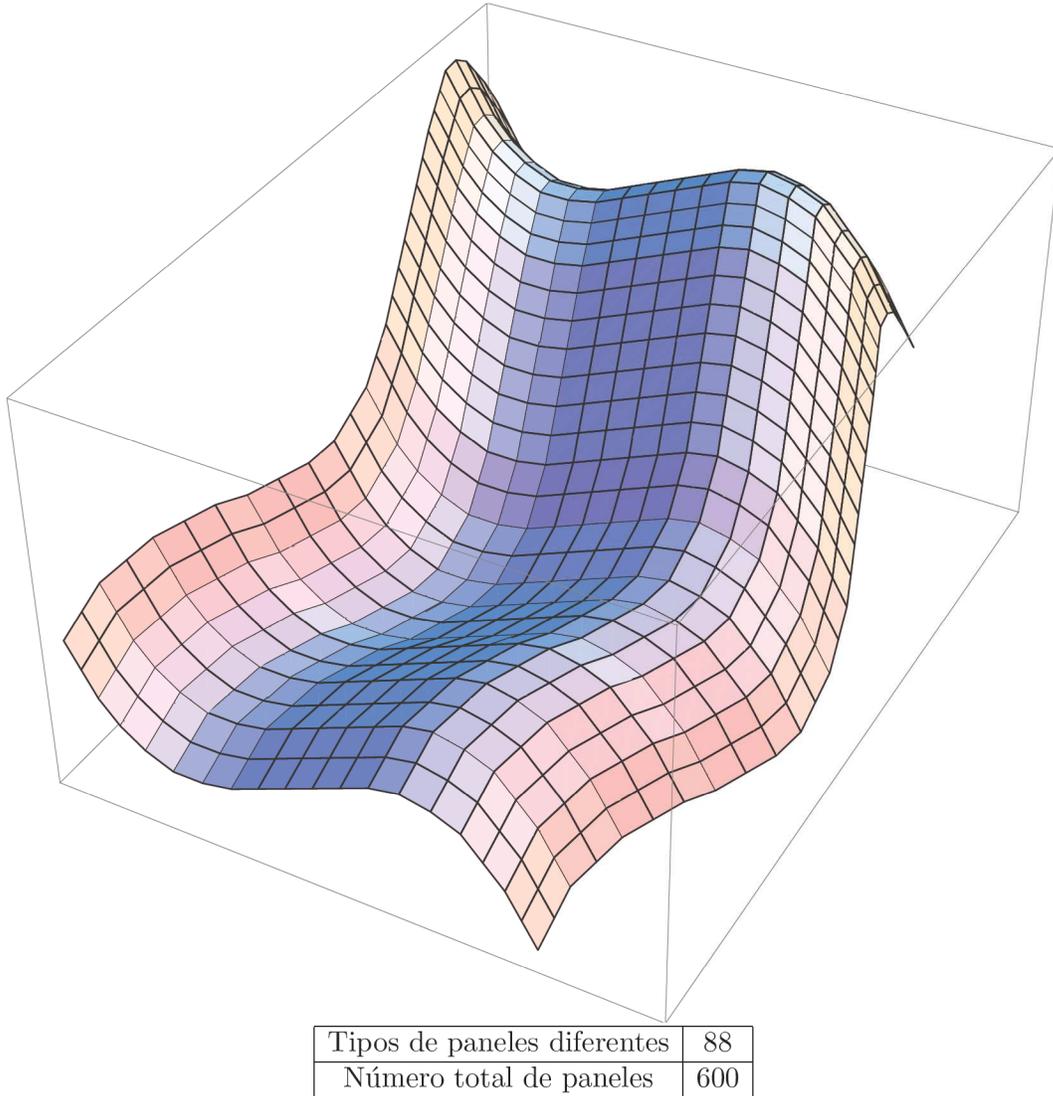
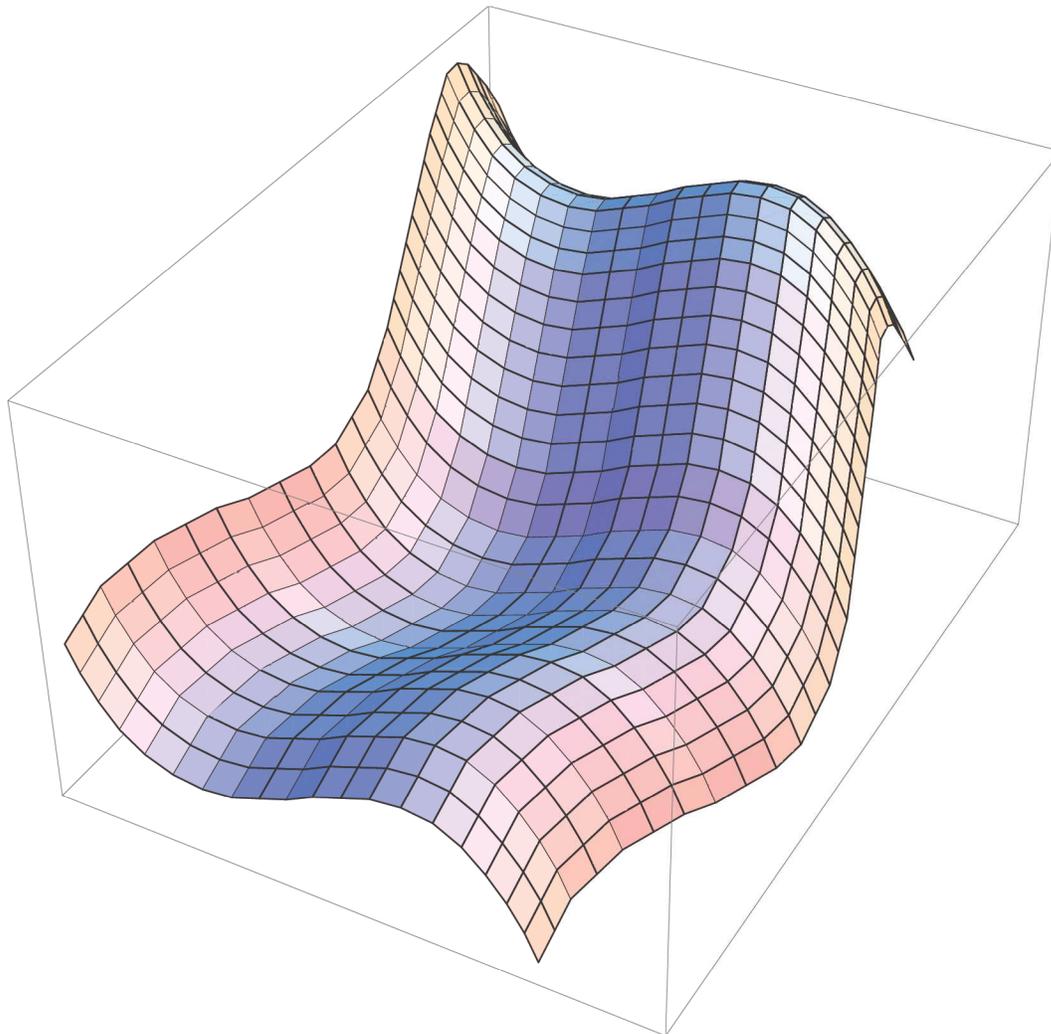


FIGURA 1.12. Panelización de la superficie de traslación generada por las curvas de la figura 1.2 con los siguientes valores: lados $l_1 = l - 2 = 0,2ud.$, y direcciones $k_1 = 30$ y $k_2 = 100$.

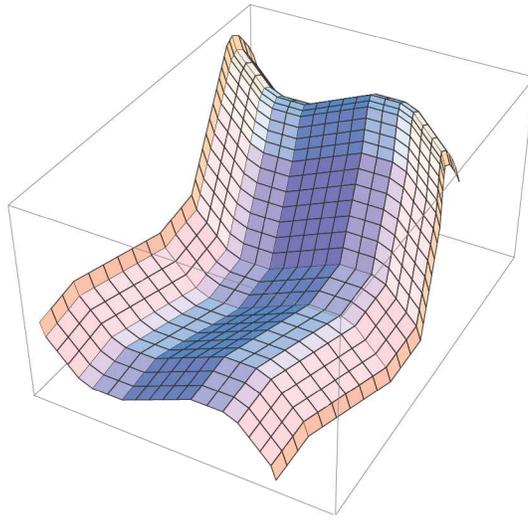


Tipos de paneles diferentes	121
Número total de paneles	600

FIGURA 1.13. Panelización de la superficie de traslación generada por las curvas de la figura 1.2 con los siguientes valores: lados $l_1 = l - 2 = 0,2ud.$, y direcciones $k_1 = 50$ y $k_2 = 200$.

El programa diseñado genera además de la superficie discreta, una lista con el número de paneles de cada tipo. Al ser los paneles paralelogramos, sus ángulos serán: θ y $\pi - \theta$ con $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. El programa nos identifica cada panel por su ángulo.

En la figura 1.14, podemos ver la panelización de la superficie de traslación generada por las curvas de la figura 1.2 con los siguientes valores: lados $l_1 = l - 2 = 0,2ud.$, y direcciones $k_1 = 15$ y $k_2 = 100$, junto con el número de paneles de cada tipo necesarios para dicha panelización.



Tipo de paneles (ángulo)		24,10°	26,60°	43,87°	49,73°				
Cantidad de paneles		8	2	4	12				
50,94°	54,10°	56,51°	59,68°	64,98°	65,05°	66,25°	66,54°	66,64°	67,28°
16	48	4	4	16	8	2	30	24	24
67,50°	69,32°	69,48°	69,52°	72,00°	72,76°	73,00°	73,13°	75,96°	77,22°
16	20	8	12	8	8	6	20	5	32
77,35°	77,45°	78,92°	78,97°	79,44°	79,72°	82,40°	83,25°	83,53°	84,34°
2	16	24	6	36	2	2	4	12	4
86,12°	86,56°	87,02°	87,21°	88,20°	88,31°	88,57°	88,73°	88,75°	89,03°
5	5	4	4	10	8	10	40	12	8

FIGURA 1.14. *Arriba:* Panelización de la superficie de traslación generada por las curvas de la figura 1.2 con los siguientes valores: lados $l_1 = l - 2 = 0,2ud.$, y direcciones $k_1 = 15$ y $k_2 = 100$. *Abajo:* Tabla con la cantidad de paneles de cada tipo de la superficie de traslación discreta de la parte superior de la figura.

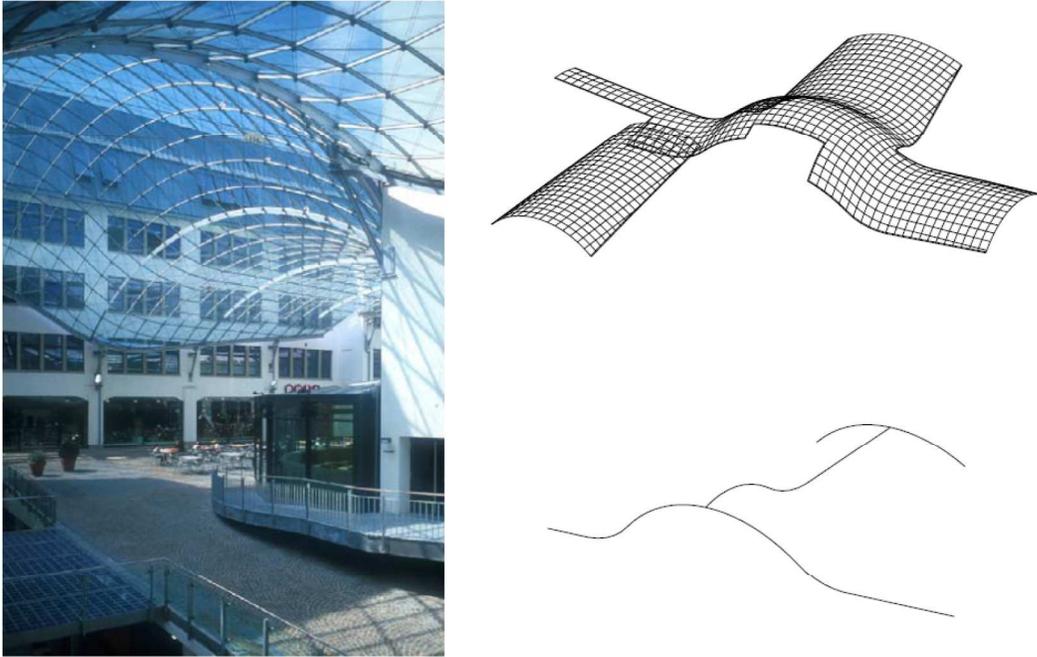


FIGURA 1.15. Ajuste de la curva de la figura 1.2 derecha, con lado $0,2ud.$, y para los valores (de izquierda a derecha) $k = 40$, $k = 100$ y $k = 200$.

Uno de los estudios de arquitectura que ha utilizado las superficies de traslación, para la resolución de cubiertas acristaladas, mediante paneles cuadriláteros son el estudio Schlaich Bergermann & Partners.

En la figura 1.15 izquierda, podemos ver una fotos de la cubierta del patio de Bosch Area, en Stuttgart, Alemania. En la misma figura 1.15 derecha arriba vemos la panelización utilizada para la resolución de la cubierta, mientras que abajo observamos las curvas directriz y generatriz que forman la superficie de traslación.

Otra de las obras, es la cubierta del Zoo de Berlin construida por Schlaich Bergermann & Partners. En la figura 1.16 izquierda podemos ver la geometría de la superficie de traslación, la panelización utilizada la observamos en la figura 1.15 derecha. En la figura 1.17 observamos fotos de la superficie construida. Señalar que los paneles son cuadriláteros, lo que se observa en la foto interior (Fig. 1.17 derecha) son los tirantes de acero para rigidizar los cuadriláteros.

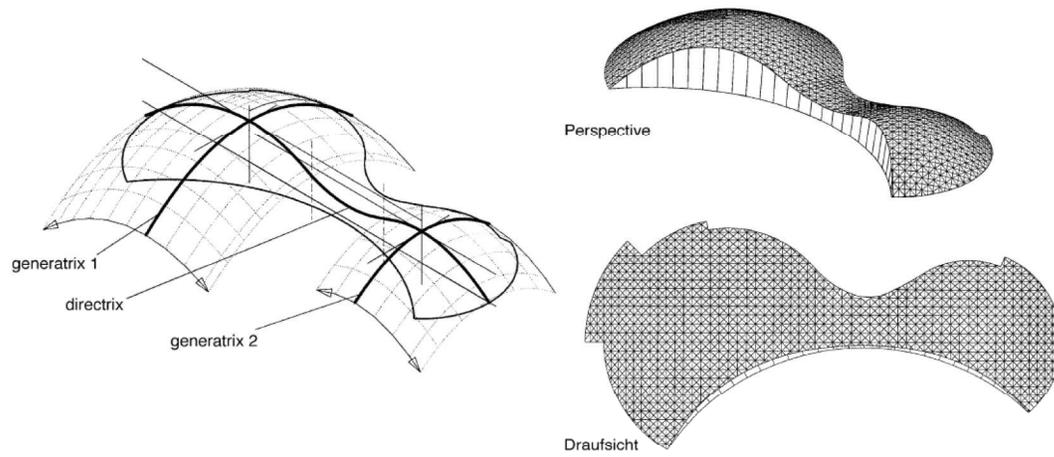


FIGURA 1.16. Ajuste de la curva de la figura 1.2 derecha, con lado $0,2ud.$, y para los valores (de izquierda a derecha) $k = 40$, $k = 100$ y $k = 200$.

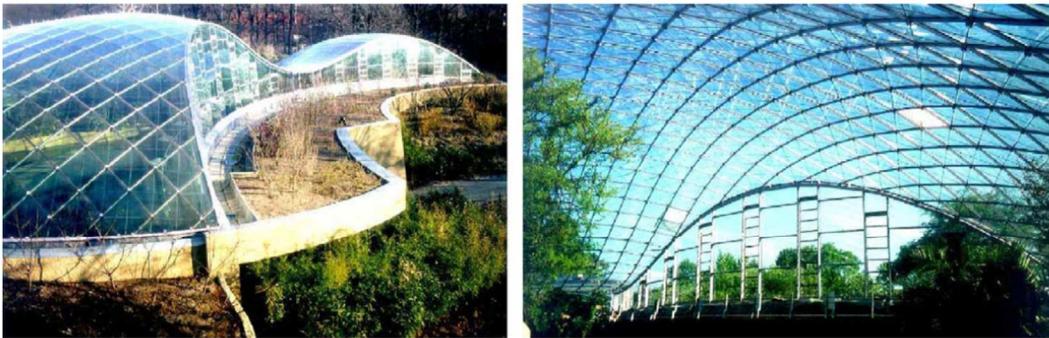


FIGURA 1.17. Ajuste de la curva de la figura 1.2 derecha, con lado $0,2ud.$, y para los valores (de izquierda a derecha) $k = 40$, $k = 100$ y $k = 200$.

Superficies de revolución

Las superficies de revolución, son otras de las superficies que por sus características permiten una discretización por medio de cuadriláteros planos, basandonos en el mismo principio.

Recordemos primero la geometría de las superficies de revolución.

Como indica su nombre, estas superficies se generan a partir de la rotación en el espacio \mathbb{R}^3 , de una curva plana $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (c_x(t), 0, c_z(t))$ sobre el eje X .

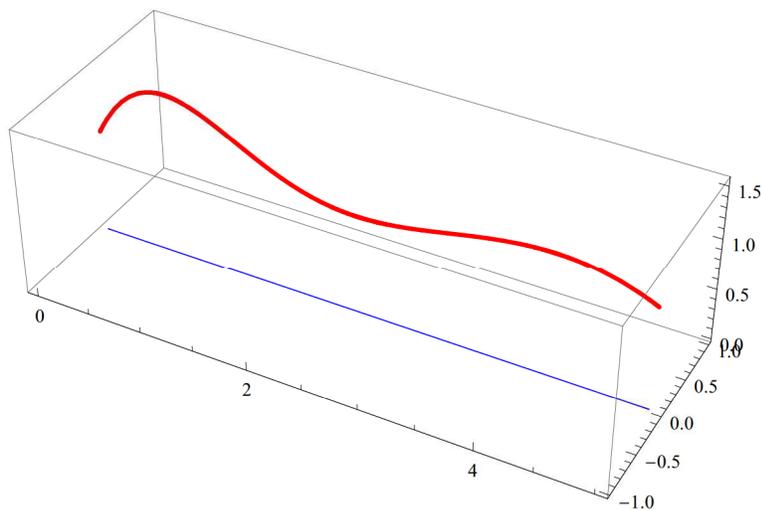


FIGURA 2.1. Curva plana contenida en el plano XZ (rojo) y eje X (azul).

La superficie resultante es

$$S_R : [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3, S_R(u, \theta) = (c_x(u), c_z(u) \cdot \sin(\theta), c_z(u) \cdot \cos(\theta))$$

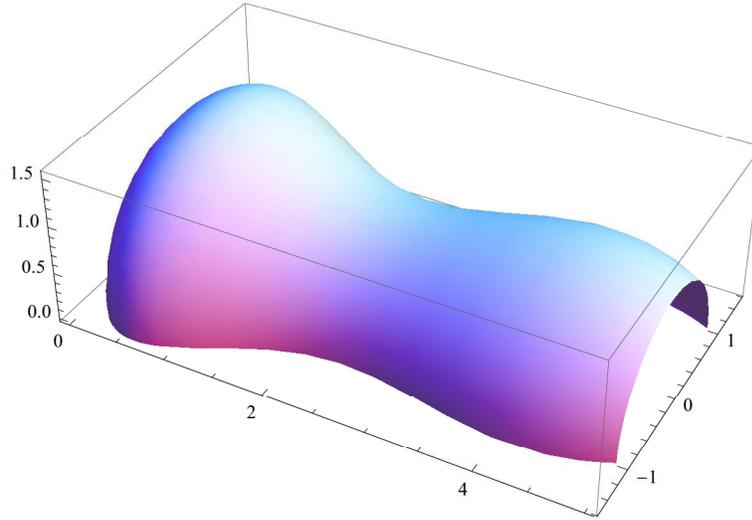


FIGURA 2.2. Superficie generada por la rotación de la curva roja de la Fig. 2.1 sobre el eje X .

La rotación respecto el eje X de un segmento \overline{AB} , un cierto ángulo θ , generara un nuevo segmento $\overline{A'B'}$. El cuadrilátero $ABB'A'$, formado por la unión del segmento \overline{AB} con el segmento $\overline{A'B'}$ será siempre un cuadrilátero plano. En este caso, será un trapecio isósceles con los lados iguales $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Los lados $\overline{A'A}$ y $\overline{B'B'}$, vendrán determinados por la distancia de los puntos A y B al eje X , y por el ángulo de rotación θ .

Para obtener una superficie de revolución discreta utilizaremos el siguiente algoritmo:

1. Definición de los elementos que definen la superficie de revolución:
 - a) El eje de rotación por medio de su vector director y un punto por el que pasa.
 - b) La curva c , por medio de su polígono de control.
2. Obtener a partir de c , la poligonal equilátera $c_D = \{c_0, \dots, c_n\}$ que aproxima la curva anterior, tal como se ha hecho en el capítulo anterior, para la discretización de las curvas que definían la superficie de traslación.
3. Construcción de la superficie de revolución discreta.

Primero giramos la curva discreta c_D sobre el eje, un ángulo $\theta_i = \frac{i \cdot (\beta - \alpha)}{m}$, $i = 0, 1, \dots, m$ siendo m el número de lados en que dividimos el arco de rotación. Cada panel $P_{j,k}$, $j = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$ estará definido por los lados de la curva c_i , en los giros θ_{j-1} y θ_j .

La superficie quedará conformada por una familia de paneles $P = \{P_{1,1}, \dots, P_{n,m}\}$. El número de paneles totales será $n \cdot m$, siendo el número de paneles diferentes n , que viene determinado por el número de lados de la curva discreta.

En la figura 2.3 presentamos una tabla con la panelización obtenida de la aplicación del algoritmo a la superficie de revolución de la figura 2.2 para diferentes valores de l y m . En la figura 2.3 observamos como mejora la aproximación de la superficie discreta, al disminuir el valor del lado l de la poligonal equilátera, o aumentar el número de divisiones m del ángulo de rotación θ . Comprobar como es habitual en todas las superficies discretas, que el aumento de la fidelidad en la descripción de la superficie discreta, conlleva un aumento del número de paneles, y una disminución del tamaño de estos.

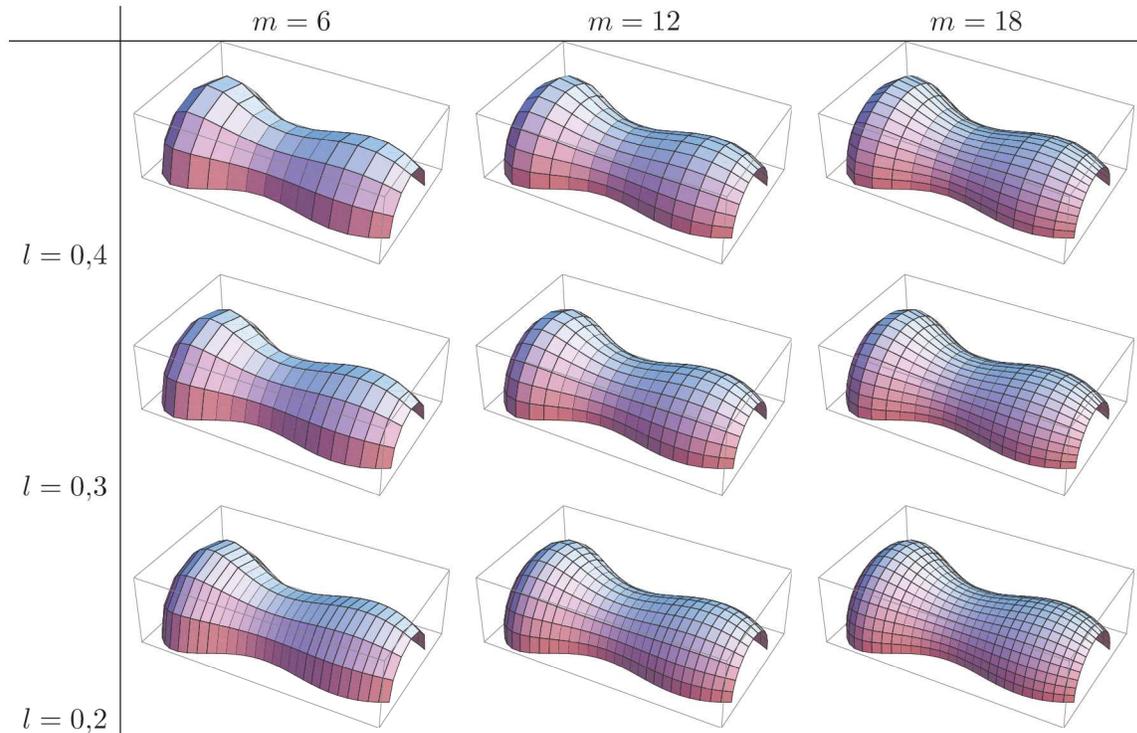


FIGURA 2.3. Panelización de la superficie de revolución de la figura 2.2 para diferentes valores de l y de m .

Siendo que las posibilidades de diseño por medio de superficies de revolución son menores que las posibilidades que presentan las superficies de traslación, el uso de las superficies de revolución en el diseño de cubiertas singulares presenta una ventaja respecto a las superficies de traslación. Y es el hecho de que los paneles de un mismo tipo se sitúan en bandas, lo que facilita su puesta en obra y reduce los costes.

Ejemplos de uso de superficies de revolución para la resolución de cúpulas los tenemos en la Universidad Libre de Berlín (Fig. 2.4 y fig. 2.5), Alemania, obra del estudio de arquitectura Foster + Partners Ltd.



FIGURA 2.4. Universidad Libre de Berlin. Arqto: N. Foster.



FIGURA 2.5. Universidad Libre de Berlin. Arqto: N. Foster. *Izda:* Vista superior. *Dcha:* Vista desde el interior.

Otro edificio del mismo estudio en el que se usan las superficies de revolución es The Sage, en Gateshead, Reino Unido (Fig. 2.6 y fig. 2.7). En este edificio la superficie de rotación resuelve gran parte de la envolvente del edificio, no solamente la cubierta. En ella se combinan los paneles opacos metálicos, y los paneles de vidrio.



FIGURA 2.6. The Sage, Gateshead. Arqto: N. Foster. Vista exterior nocturna.



FIGURA 2.7. The Sage, Gateshead. Arqto: N. Foster. *Izda:* Vista exterior diurna. *Dcha:* Vista desde el interior.

Superficies de revolución con eje de rotación libre

En las superficies de revolución, vistas en el capítulo anterior, todos los puntos de la curva rotan sobre el mismo eje. Si consideramos la rotación de un segmento \overline{AB} respecto a un eje recto, obtenemos una porción de cono circular (Fig. 3.1). Esta porción de cono circular es fácilmente discretizable.

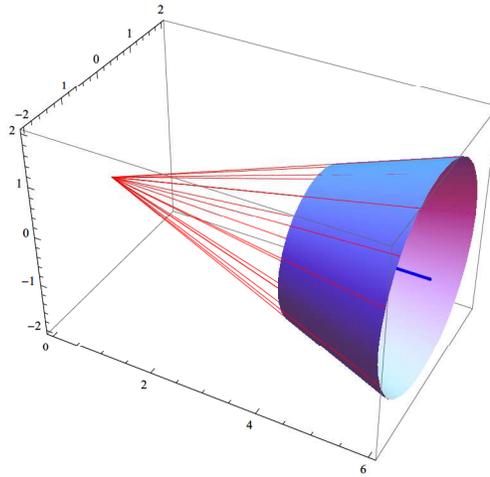


FIGURA 3.1. Porción de un cono circular. Secciones perpendiculares al eje X de rotación.

Podemos entender el proceso de panelización de las superficies de revolución en dos pasos.

1. Aproximación de la superficie de rotación por un número n de porciones de conos circulares.
2. De cada una de las porciones de cono, obtenemos m paneles iguales.

Considerando que el objetivo no es discretizar superficies, sino proveer al arquitecto de herramientas para el diseño de superficies discretas que puedan ser construidas. Planteamos la posibilidad de estudiar superficies, cuya aproximación sean porciones de un cono oblicuo, siendo las secciones obtenidas circunferencias. En la figura 3.2 podemos observar una de estas secciones.

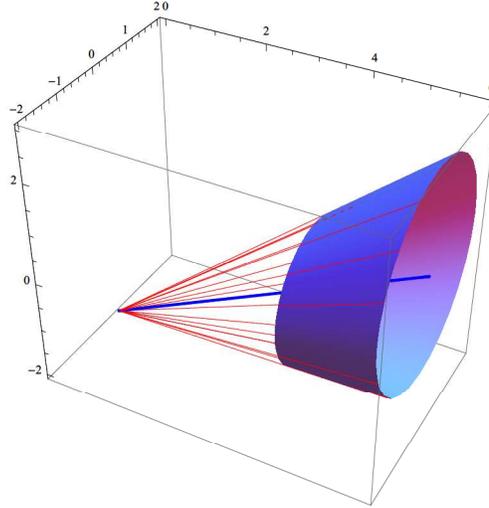


FIGURA 3.2. Porción de un cono oblicuo. Las secciones por planos paralelos al plano YZ son circunferencias.

Mediante secciones de espesor infinitesimal, podríamos obtener superficies continuas a las que denominamos **superficies de revolución con eje de rotación libre**.

Los elementos que generan las superficies de revolución con eje de rotación libre son:

1. La curva $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (c_x(t), c_y(t), c_z(t))$.
2. El eje de rotación. Este consta de dos elementos:
 - a) Vector director del eje de rotación. En este caso trabajemos con el vector $(1, 0, 0)$ como en el capítulo anterior.
 - b) Un punto del eje de rotación. En este caso, este punto ya no es fijo, se desplazará sobre el plano YZ , generando para cada punto de c un eje de rotación propio. El movimiento del punto lo podemos describir $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $d(t) = (d_x(t), d_y(t), d_z(t))$, tal que $d_x(t) = c_x(t)$.

La superficie de revolución con eje libre tendrá la siguiente parametrización:

$$S_{R'} : [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$S_R(u, \theta) = (c_x(u), \|c(u) - d(u)\| \cdot \sin(\theta) + d_y(u), \|c(u) - d(u)\| \cdot \cos(\theta) + d_y(u))$$

El proceso para discretizar estas superficies, es similar al anterior, introduciendo las siguientes modificaciones.

1. Para cada uno de los puntos c_i , $i = 0, 1, \dots, n$ de la poligonal equilátera $c_D = \{c_0, \dots, c_n\}$, calcularemos la intersección entre el plano de rotación que contiene dicho punto y la curva $d(t) = (d_x(t), d_y(t), d_z(t))$.
De esta forma obtendremos $d_D = \{d_0, \dots, d_n\}$, una poligonal de la curva d .

2. El giro ya no se puede realizar sobre el eje, para cada uno de los puntos de la curva discreta c_i , el giro se realizara respecto al punto d_i según el plano de rotación.

De la misma forma que las superficies de rotación simples. La superficie discreta quedara conformada por una familia de paneles $P = \{P_{1,1}, \dots, P_{n,m}\}$.

El número de paneles totales será $n \cdot m$. Pero en estas superficies, las dimensiones de cada uno de los paneles son distintas. Esto es debido a que la discretización de una porción de cono oblicuo (Fig. 3.2) al presentar un plano de simetría, no generará parejas de paneles iguales, el número de tipos de paneles será la mitad del número total de paneles. Pero en un diseño arquitectónico, generalmente el ángulo a rotar será menor de 2π .

Por lo tanto, en la panelización de una superficie de revolución con eje de rotación libre, los paneles serán generalmene todos de distinto tipo, pudiendo encontrarse algunas parejas de paneles del mismo tipo en función del ángulo de giro.

A continuación mostramos un ejemplo del funcionamiento del algoritmo de discretización.

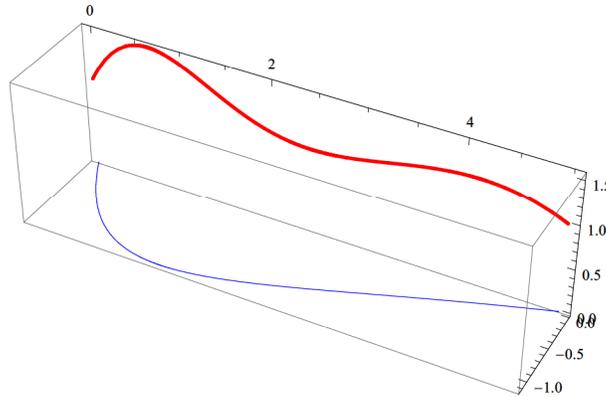


FIGURA 3.3. Elementos que definen una superficie de revolución con eje de rotación libre: curvas c (en rojo) y d (en azul), plano de rotación YZ .

La superficie de revolución con eje de rotación libre generada por los elementos de la figura 3.3: curva c (en rojo), desplazamiento del eje de rotación a lo largo de la curva d (en azul), y siendo el plano de rotación el plano YZ , la observamos en las figuras 3.4 y 3.5.

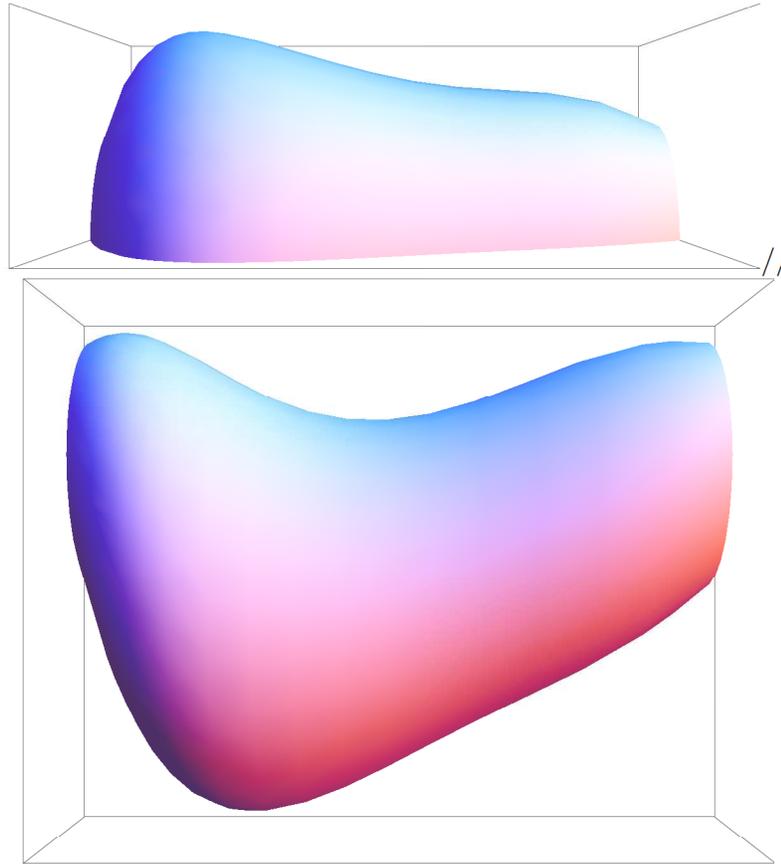


FIGURA 3.4. *De arriba a abajo:* Vistas frontal y superior de la superficie de revolución con eje de rotación libre generada por los elementos de la figura 3.3.

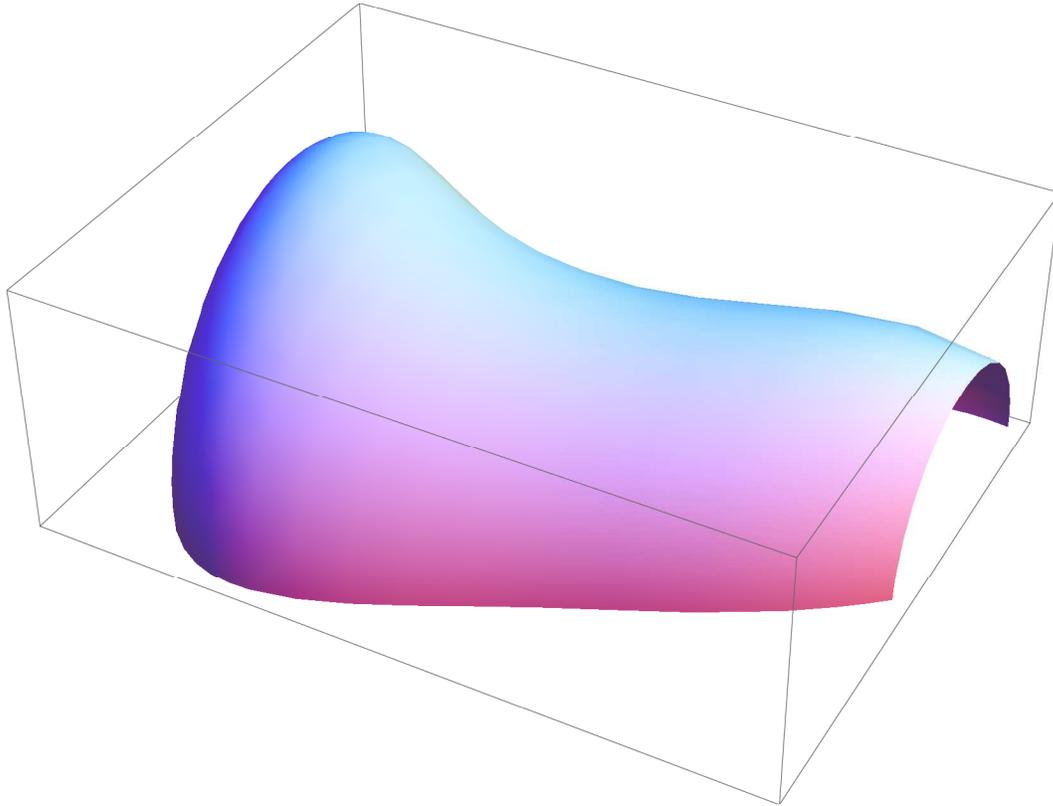


FIGURA 3.5. Superficie de revolución con eje de rotación libre generada por los elementos de la figura 3.3.

La panelización de la superficie de revolución con eje de rotación libre generada por los elementos de la 3.3, obtenida con el programa para unos valores de $l = 0,2ud.$ y $m = 12,$ la presentamos en las figuras 3.6 y 3.7.

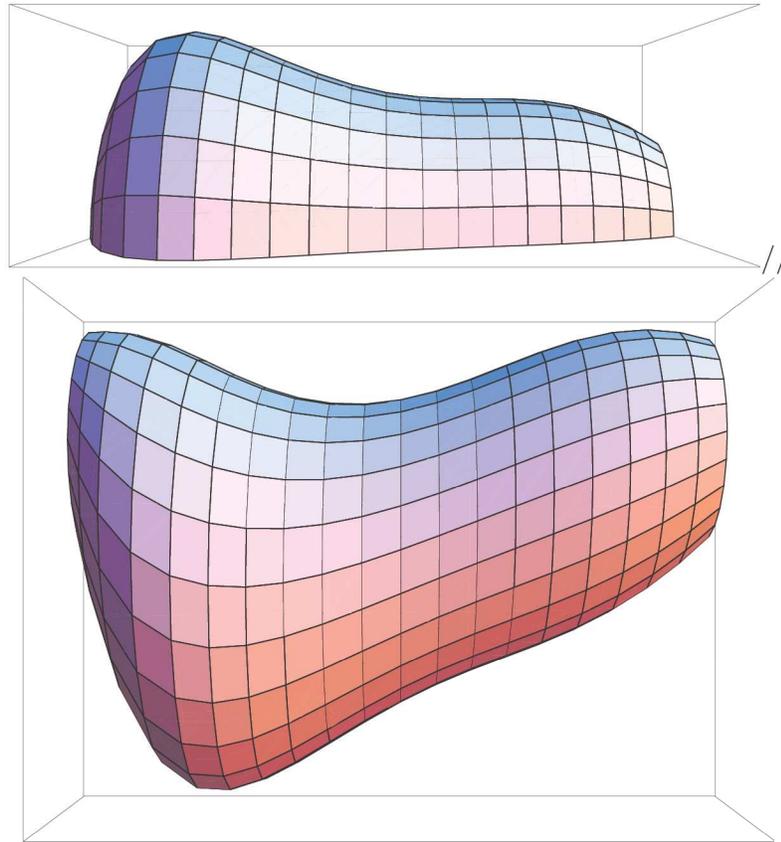


FIGURA 3.6. *De arriba a abajo:* Vistas frontal y superior de la panelización de la superficie de revolución con eje de rotación libre de las figuras 3.4 y 3.5.

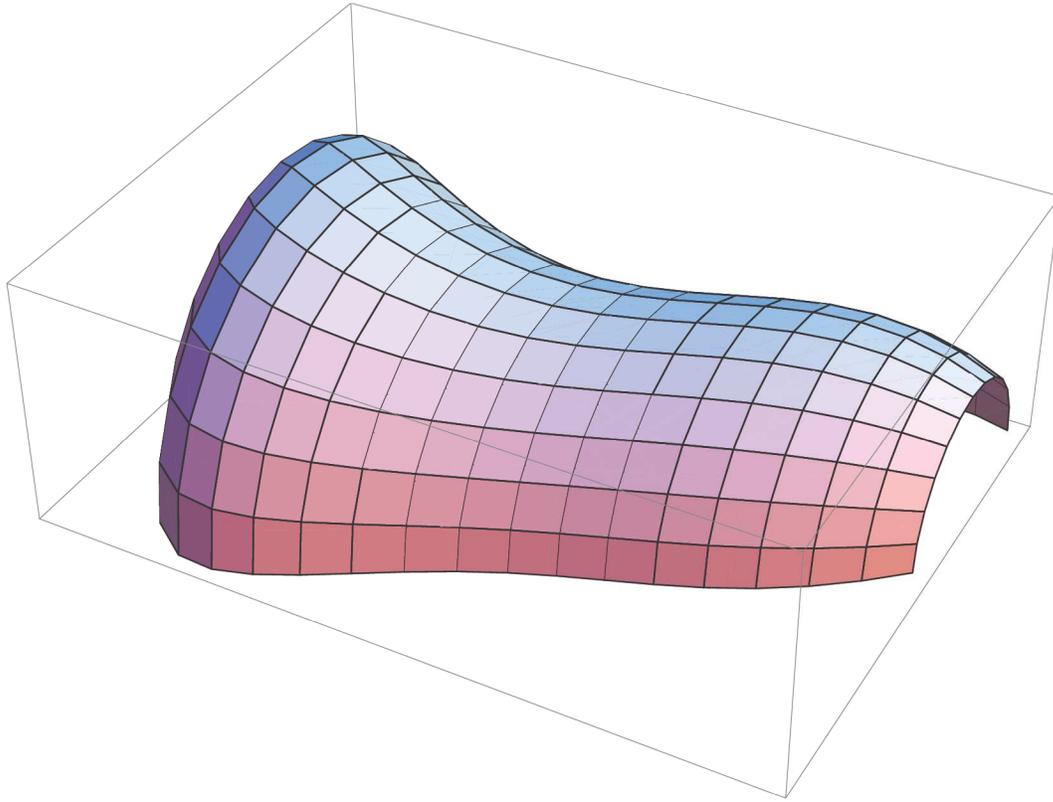


FIGURA 3.7. Panelización de la superficie de revolución con eje de rotación libre de las figuras 3.4 y 3.5.

Superficies de traslación con escala

Las superficies de revolución con eje de rotación libre estudiadas en la sección anterior se pueden entender como la traslación de un arco de circunferencia a lo largo de una curva aplicando en cada punto de avance un factor de escala. Si en lugar de trasladar un arco de circunferencia, trasladamos una curva cualquiera obtenemos lo que en [7] denominan superficie de traslación con escala.

Las superficies de traslación con escala, se generan a partir de la traslación en el espacio \mathbb{R}^3 , de una curva generatriz plana $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(t) = (g_x(t), g_y(t), g_z(t))$ a lo largo de la curva directriz $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ al que $f(t) = (f_x(t), f_y(t), f_z(t))$, afectada por un factor de escala $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $e(t)$ una función continua.

La ecuación paramétrica de la superficie de traslación con escala es:

$$S_{Tesc} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$S_{Tesc}(u, v) = (f_x(u) + g_x(v) \cdot e(u), f_y(u) + g_y(v) \cdot e(u), f_z(u) + g_z(v) \cdot e(u)).$$

El proceso para el diseño de superficies de traslación con escala será el que sigue:

1. En primer lugar obtendremos los elementos que definen la superficie, las curvas f y g y la función escalar e .

Como en capítulos anteriores las curvas f y g , vendrán definidas por sus polígonos de control. Hay que garantizar que la curva g sea plana.

La función escalar e , para garantizar su continuidad, y para un mayor control de la variación de la escala, la calcularemos como la distancia de una curva plana al eje X (véase la figura 4.1).



FIGURA 4.1. Representación de $(t, 0, e(t))$, en donde $e(t)$ es la función escalar.

2. Calculamos la discretización equilátera, según los lados deseados l_f y l_g de las curvas f y g respectivamente tal y como hemos visto en el primer capítulo. Obtenemos las poligonales discretas $f_D = \{f_0, \dots, f_n\}$ y $g_D = \{g_0, \dots, g_m\}$.
3. A partir de la curva discretizada $f_D = \{f_0, \dots, f_n\}$, obtenemos para cada punto f_i el factor de escala e_i .
4. La superficie de traslación con escala discreta, la construimos, para cada punto de la curva directriz discreta f_i , como la familia de puntos $g_{i,j} = g_j \cdot e_i + (f_i - f_0)$ con $i = 0, 1, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$. El superficie vendrá definida por la familia de paneles $P = \{P_{1,1}, \dots, P_{n,m}\}$, en donde cada panel $P_{i,j}$ tiene por vértices los puntos

$$g_{i,j}, g_{i-1,j}, g_{i-1,j-1}, g_{i,j-1}.$$

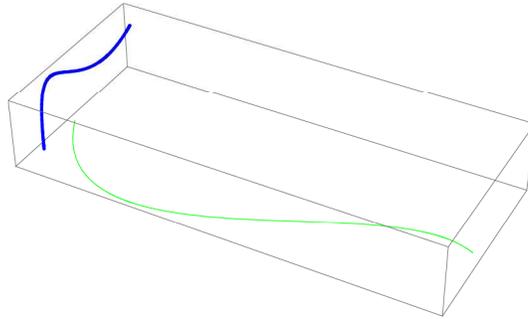


FIGURA 4.2. Elementos que definen una superficie de traslación con escala: curvas generatriz (en azul) y directriz (en verde), con la función de escala de la figura 4.1.

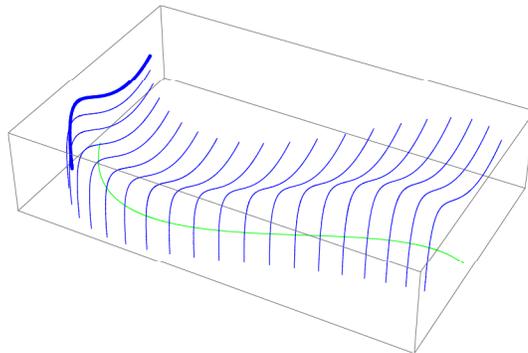


FIGURA 4.3. Traslación de la curva generatriz (en azul) a lo largo de la curva directriz (en verde), escalada según la función de escala de la figura 4.1.

En la figura 4.3 se puede visualizar como la traslación de la curva generatriz (azul), a lo largo de la curva directriz (verde), definidas en la figura 4.2, utilizando la función de escala de la figura 4.1 genera la superficie de traslación con escala de las figuras 4.4 y 4.5.

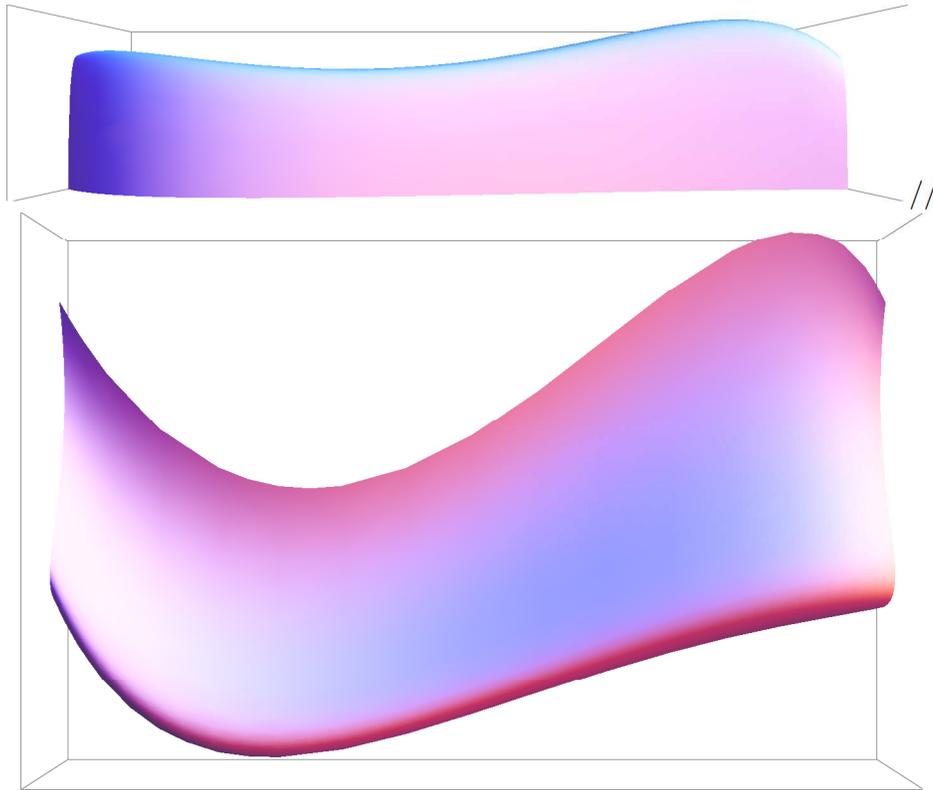


FIGURA 4.4. *De arriba a abajo*: Vistas frontal y superior de la superficie de taraslación con escala generada por las curvas generatriz y directriz de la figura 4.2, y el factor de escala de la figura 4.1.

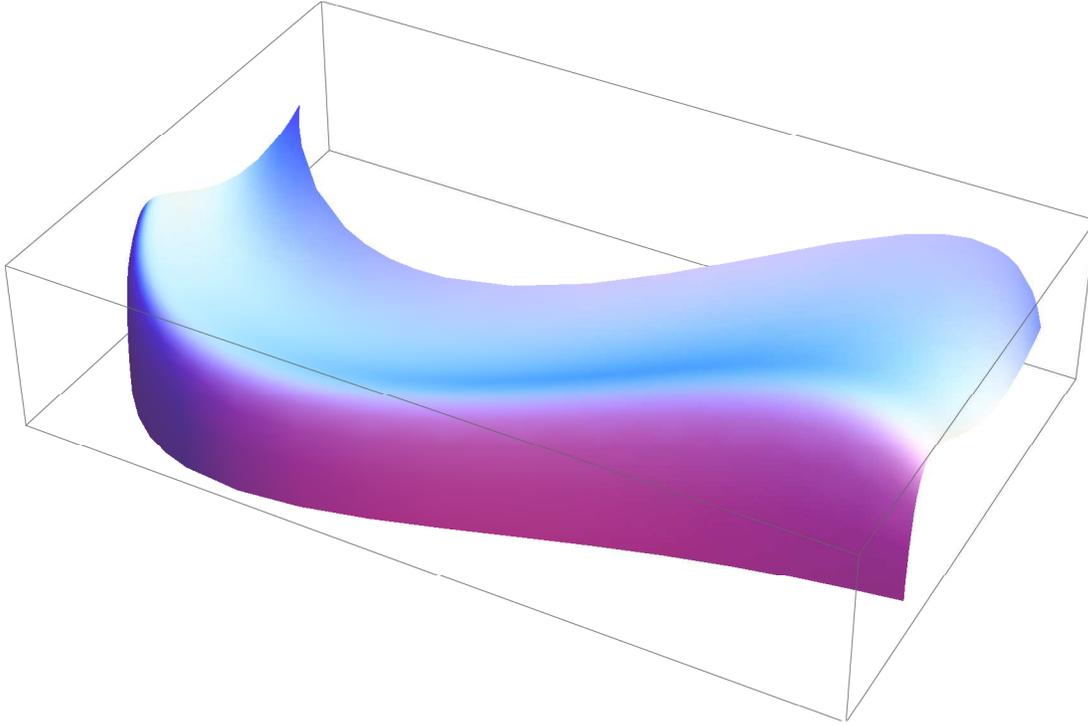


FIGURA 4.5. Superficie de taraslación con escala generada por las curvas generatriz y directriz de la figura 4.2, y el factor de escala de la figura 4.1.

La discretización de la superficie de traslación con escala descrita en las figuras 4.4 y 4.5, realizada con el algoritmo expuesto, para unos valores de $l_g = 0,15ud.$ y $l_f = 0,30ud.$, nos da la panelización expuesta en las figuras 4.6 y 4.7.

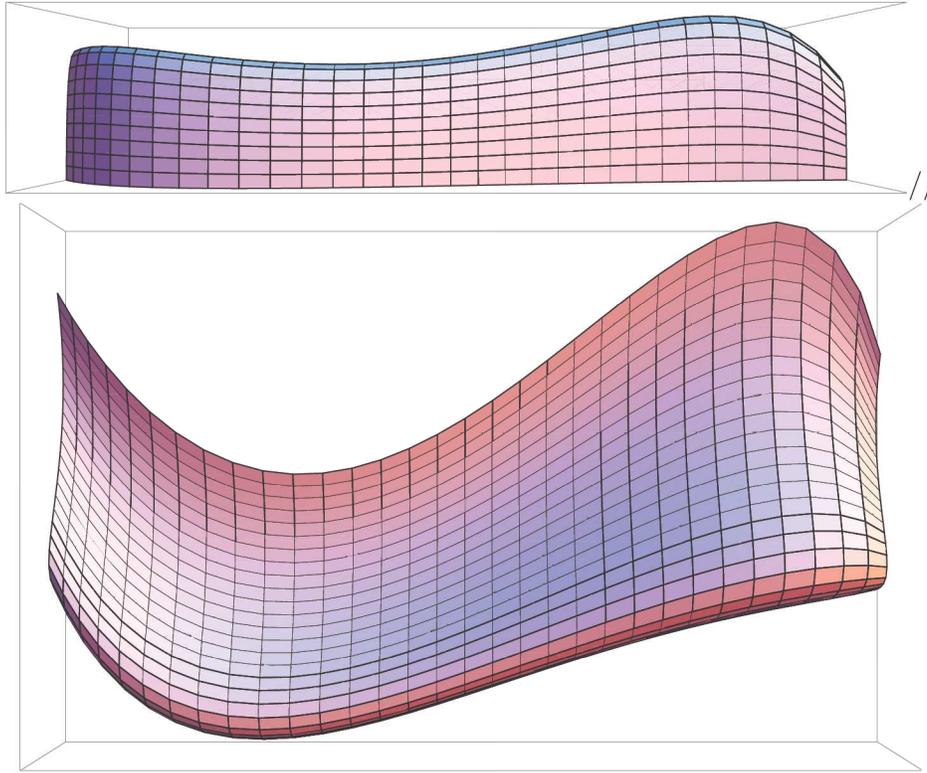


FIGURA 4.6. *De arriba a abajo:* Vistas frontal y superior de la panelización de la superficie de traslación con escala de las figuras 4.4 y 4.5.

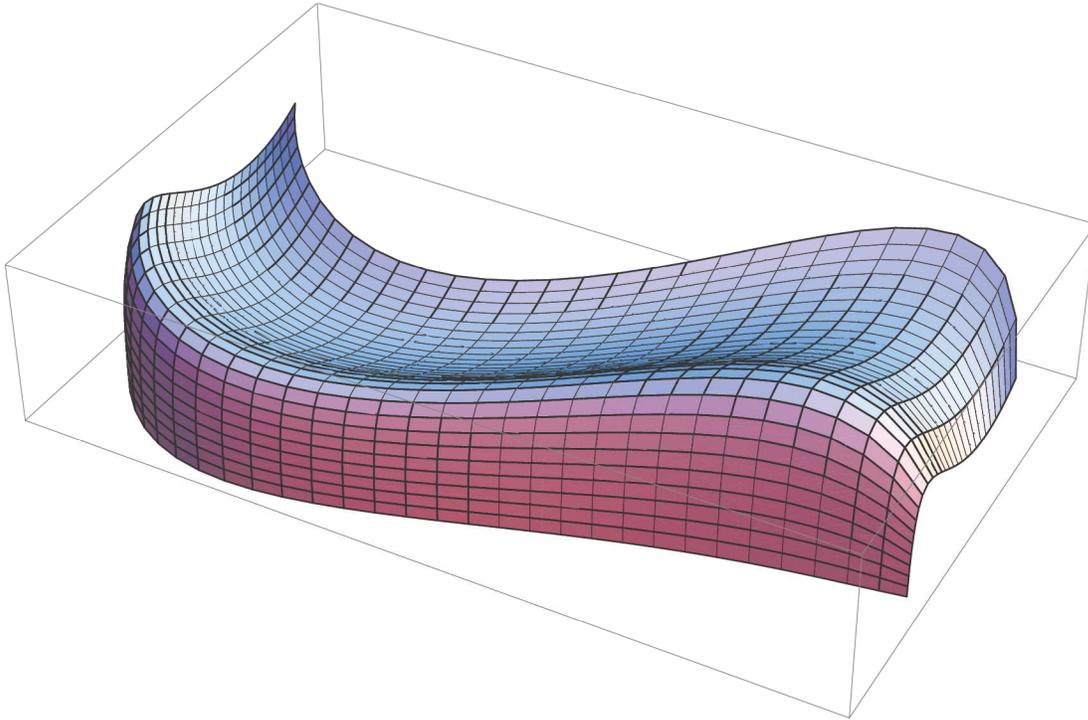


FIGURA 4.7. Panelización de la superficie de revolución con eje de rotación libre de las figuras 3.4 y 3.5.

Hay que destacar que, igual que ocurre en la discretización de superficies de revolución con eje de rotación libre, la panelización de una superficie de traslación con escala da lugar a paneles distintos entre sí. Al mismo tiempo la planitud de los paneles queda garantizada, ya que los cuadriláteros generados, tienen dos lados paralelos. Es decir dado un panel $P_{i,j}$ con vértices $g_{i,j}, g_{i-1,j}, g_{i-1,j-1}, g_{i,j-1}$, los lados $g_{i,j}, g_{i,j-1}$ y $g_{i-1,j}, g_{i-1,j-1}$ son paralelos, ya que los movimientos que se han efectuados no destruyen el paralelismo, al no incluirse ni giros ni simetrías axiales.

Si se utiliza como factor de escala una función constante, obtendremos una superficie de traslación. Pero los paneles obtenidos en este caso, serán en general todos distintos. A diferencia de los paneles resultantes de aplicar el algoritmo específico para las superficies de traslación expuesto en el primer capítulo.

El proyecto para la estación de tren de Berlín (Fig. 4.8 izquierda), propone una cubierta de cristal, panelizada por medio de cuadriláteros planos, con variaciones de escala de la curva generatriz durante su traslación a lo largo de la curva directriz. En la figura 4.8 derecha abajo se explica las expansiones producidas en la curva generatriz a lo largo de su traslación sobre la curva directriz.

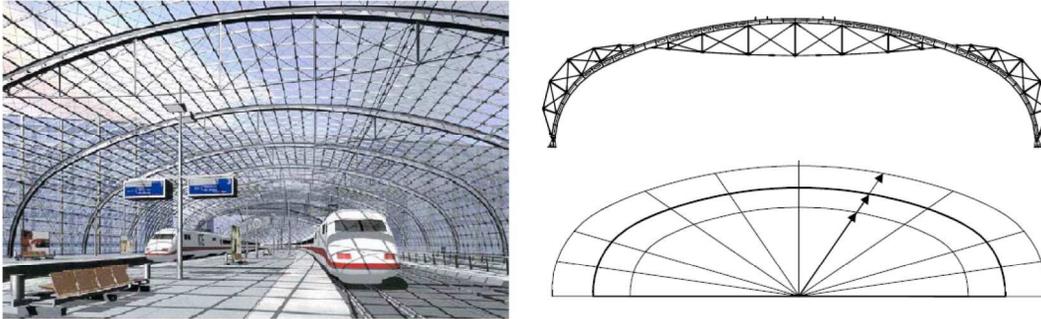


FIGURA 4.8. Proyecto para la estación de tren de Berlin. *Dcha arriba:* Esquema de la estructura principal. *Dcha abajo:* Secciones de la curva generatriz a lo largo de su recorrido.

Paneles hexagonales planos

La panelización por medio de hexágonos planos presenta respecto a los paneles triangulares similares ventajas que los paneles cuadrangulares planos.

Entre las ventajas que presentan, hay que destacar el menor número de caras, así como mayor simplicidad de los vértices, debido a la intersección de un menor número de aristas en cada vértice. Lo que se traduce en menores costes, debido a la menor cantidad de acero necesario, así como mayor simplicidad constructiva que se traduce en menos mano de obra. Destacar que, en general, los paneles son todos distintos.

Los hexágonos resultantes, variarán en función de la curvatura gaussiana K . Como se observa en la figura 5.1, se pueden clasificar los paneles en tres tipos, en función de si los puntos son elípticos, hiperbólicos o parabólicos.

1. En las áreas elípticas, con curvatura gaussiana positiva, $K > 0$, obtendremos paneles convexos (Fig. 5.1 abajo izquierda).
2. Para las zonas hiperbólicas, con curvatura negativa $K < 0$, los paneles resultantes tienen dos ángulos interiores mayores de πrad (Fig. 5.1 abajo derecha).
3. Los puntos parabólicos con curvatura nula $k = 0$, dan lugar a un panel con dos parejas de lados paralelos.

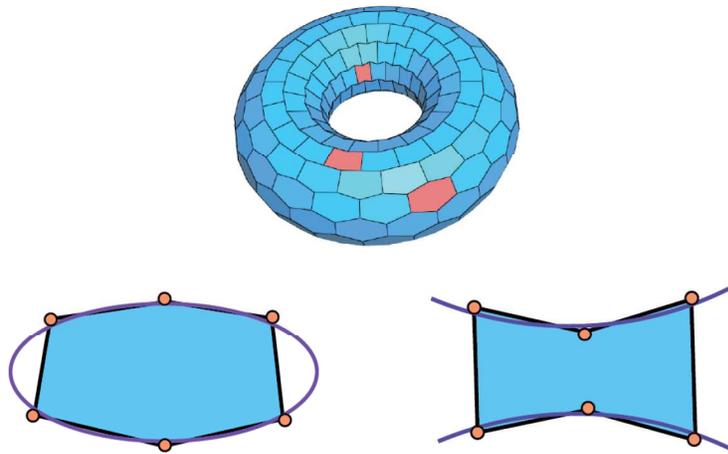


FIGURA 5.1. Tipos de paneles hexagonales resultantes en función de la curvatura Gaussiana K . Abajo izquierda: $K > 0$. Abajo derecha: $k < 0$.

En [19] se estudia como obtener una panelización por medio de paneles hexagonales planos a partir de una discretización triangular.

Partiendo de un mallado triangular inicial, se genera un mallado hexagonal plano, calculando la intersección de los planos tangentes asociados a cada uno de los puntos iniciales.

A cada punto p_i inicial, se le asocia un hexágono H_i . Este hexágono, estará contenido en el plano tangente a la superficie en dicho punto p_i , y cada uno de sus lados vendrán definidos por la intersección de este plano con los planos tangentes asociados a los puntos adyacentes.

La discretización final depende del mallado triangular inicial. Una correcta elección del mallado inicial es esencial en este método, para obtener una panelización aceptable.

En [19] se dan unas pautas para la obtención de un mallado triangular que genere una panelización hexagonal adecuada. Los pasos a seguir son:

1. Cálculo de líneas de mínima curvatura sobre la superficie dada.
2. Distribución de los puntos a lo largo de estas líneas.

La distribución y separación de los puntos, es la que determinara el tamaño de los paneles así como la longitud de los lados del hexagono.

Otro método para obtener una discretización hexagonal es el expuesto en [20] basado en la dual de Dupin. Los pasos a seguir son:

1. Se parte de una triángulación válida T de la superficie S .

Para que la triangulación sea válida, se ha de cumplir que el centro de Dupin (que depende de la curvatura) asociado a cada triángulo sea interno a este (figura 5.2). Una vez determinadas estas condiciones se proponen varios métodos iterativos para hallar un mallado triangular adecuado.

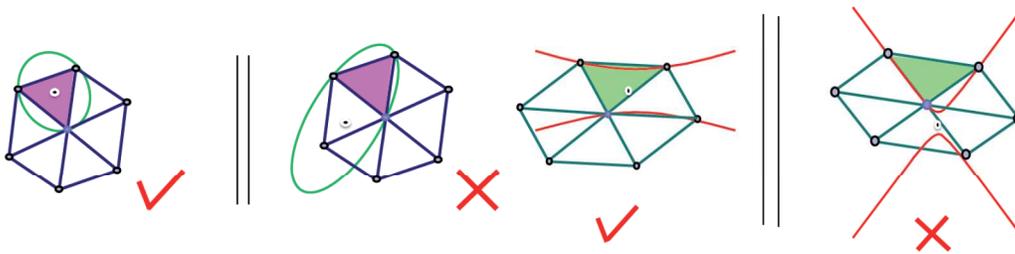


FIGURA 5.2. *Izquierda:* Para $K > 0$, posición del centro de Dupin de un triángulo y criterio de validez. *Derecha:* Para $k < 0$, posición del centro de Dupin de un triángulo y criterio de validez.

2. Calculando el dual Dupin de T se obtiene un mallado hexagonal H' que será casi plano.
3. Optimizando H' obtenemos el mallado hexagonal plano H .

Para los tipos de superficies estudiados en las secciones anteriores (superficies de traslación y rotación), podemos hallar un mallado triangular adecuado con los siguientes pasos:

1. Hallamos un mallado cuadrangular plano con los algoritmos expuestos.
2. Se produce un deslizamiento de las bandas alternas, una distancia de media lado.
3. Se transforman los cuadriláteros en hexagones, dividiendo los lados y cerrando la superficie.
4. Los paneles resultantes son casi planos. Aplicando el proceso de optimización, se obtiene el mallado final plano.

En la figura 5.3 podemos visualizar el proceso para una superficie de traslación.

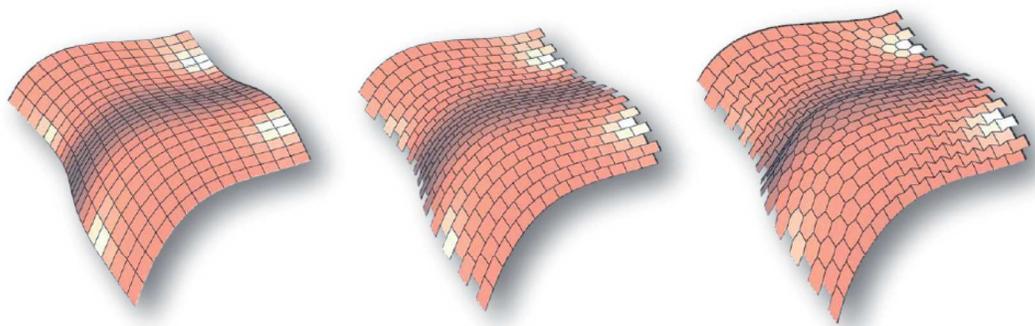


FIGURA 5.3. De izquierda a derecha Proceso de transformación de un mallado por medio de cuadriláteros en un mallado hexagonal plano en una superficie de traslación.

1. Resolución de cúpulas con paneles hexagonales planos.

A continuación exponemos un algoritmo para la panelización de un elipsoide con paneles hexagonales planos. Esta herramienta nos permitirá la resolución de un variado número de cúpulas, y otras soluciones arquitectónicas formadas por porciones de elipsoide, mediante paneles hexagonales planos.

El algoritmo es el siguiente:

1. Hallamos un mallado triangular de la esfera. Para ello:

- a) En primer lugar necesitamos una distribución uniforme de n puntos en la esfera.

Como hemos visto en el primer capítulo, esto equivale a hallar los puntos de Fekete sobre la esfera. La resolución de este problema la explicamos en el apéndice A. Recordar que el resultado obtenido es la mejor distribución de puntos posibles sobre la esfera.

Destacar que el número de puntos a distribuir sobre la esfera, n , será el número final de caras hexagonales que tendrá la panelización final.

- b) Determinar la triangulación. Esto equivale a determinar que puntos de la esfera están conectados.

Para determinar los puntos contiguos a uno dado, se calcula el diagrama de Voronoi asociado al conjunto de puntos. Esto se lleva a cabo trasladando los puntos de Fekete, que están en una esfera, a un plano mediante la proyección estereográfica. Una vez calculado para este conjunto de puntos en el plano su diagrama de Voronoi, se traslada el resultado de nuevo a la esfera mediante la inversa de la proyección estereográfica.

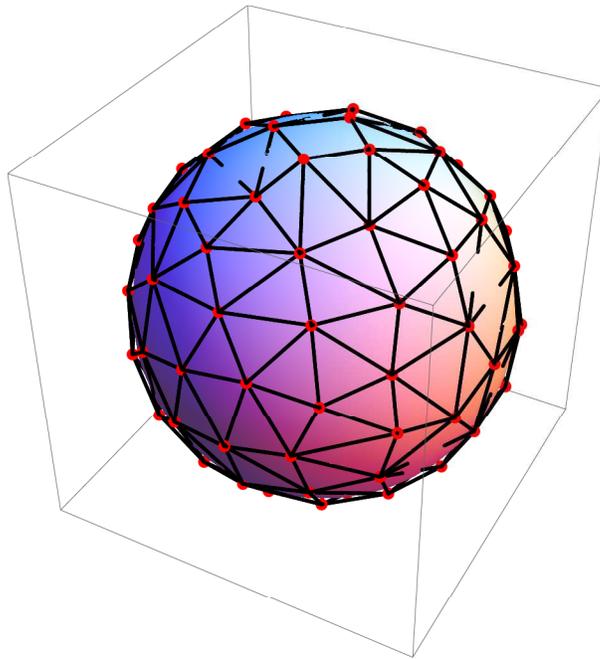


FIGURA 5.4. Triangulación de Delauney asociada al diagrama de Voronoi para la esfera, con $n = 100$ puntos.

2. Traslación de la triangulación de la esfera unidad, al elipsoide.

La ecuación paramétrica del elipsoide es

$$e(u, v) = (a \cdot \cos(u) \cdot \cos(v), b \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), c \cdot \sin(v)).$$

en la esfera se cumple $a = b = c$.

A partir de la lista de puntos $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, con $i = 1, \dots, n$, sobre la esfera unidad. Los puntos sobre el elipsoide vendrá definidos por

$$V_i = e \left(\text{ArcTan} \left(\frac{y_i}{x_i} \right), \text{ArcSin}(z_i) \right).$$

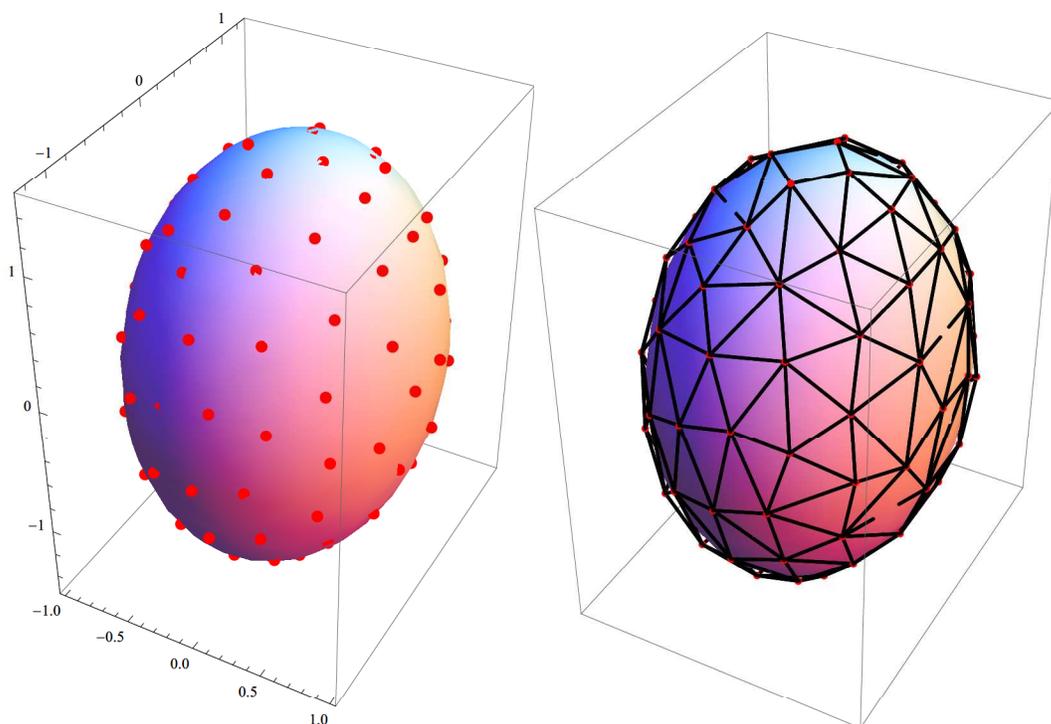


FIGURA 5.5. *Izquierda:* Distribución de puntos sobre el elipsoide obtenidos a partir de los puntos de Fekete. *Derecha:* Triangulación de Delauney sobre el elipsoide.

3. Vamos a explicar a continuación cómo se calcula el trozo de plano tangente que servirá de aproximación a la superficie. Cada punto del elipsoide tiene un vector normal y un plano tangente. Véase figura 5.6.

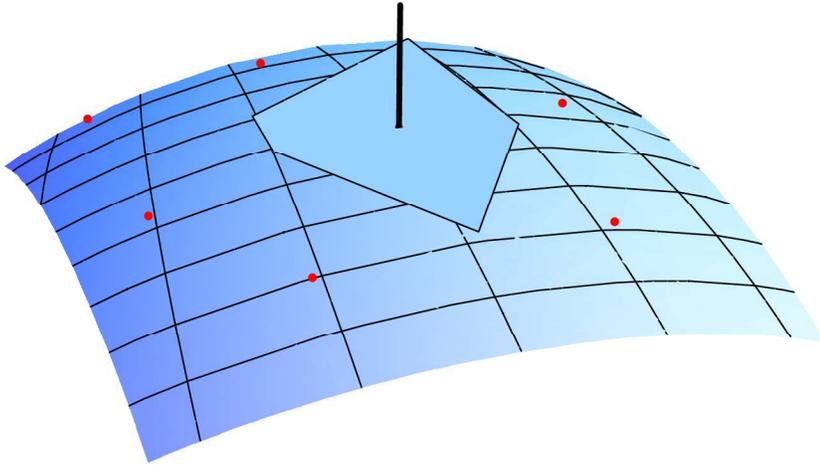


FIGURA 5.6. Trozo del plano tangente al elipsoide en uno de los puntos obtenidos en el algoritmo de Fekete adaptado a esta superficie

La intersección de los planos tangentes al elipsoide en puntos contiguos da lugar a una recta (figura 5.7). Esto es así porque en el elipsoide nunca obtendremos, para un par de puntos cercanos pero distintos, vectores normales iguales.

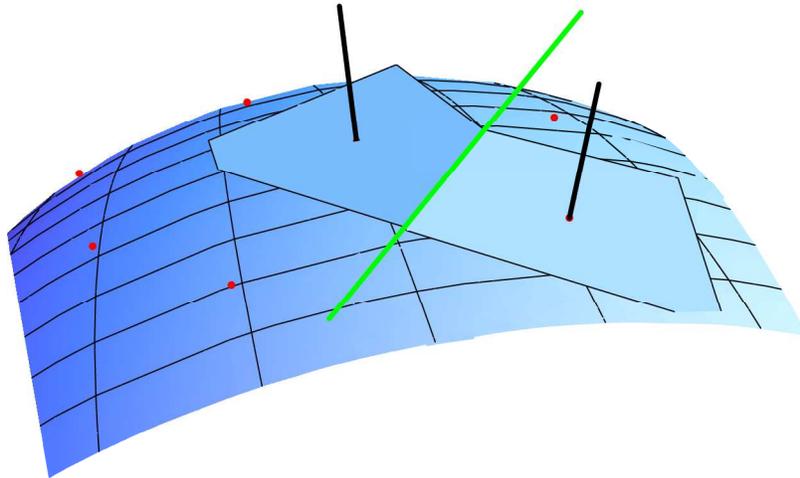


FIGURA 5.7. Recta intersección de dos planos tangentes al elipsoide en puntos contiguos

Dado que los planos tangentes en los tres vértices de un triángulo de la triangulación de Delauney asociada al diagrama de Voronoi siempre están en posición genérica, entonces la intersección de esos tres planos da lugar a un único punto. Véase Fig. 5.8.

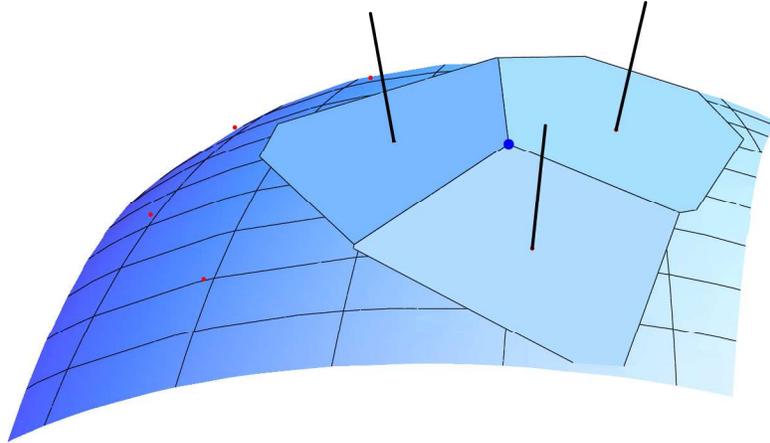


FIGURA 5.8. Punto intersección en los tres planos tangentes al elipsoide asociados a los tres vértices de un triángulo.

Si repetimos el proceso para todos los triángulos de la triangulación de Delauney que tengan un mismo vértice en común V_i , se obtiene entonces el conjunto de vértices que definen uno de los paneles H_i . Si repetimos el proceso para todos los puntos del elipsoide, obtendremos el conjunto de paneles hexagonales que discretizan el elipsoide (figura 5.9).

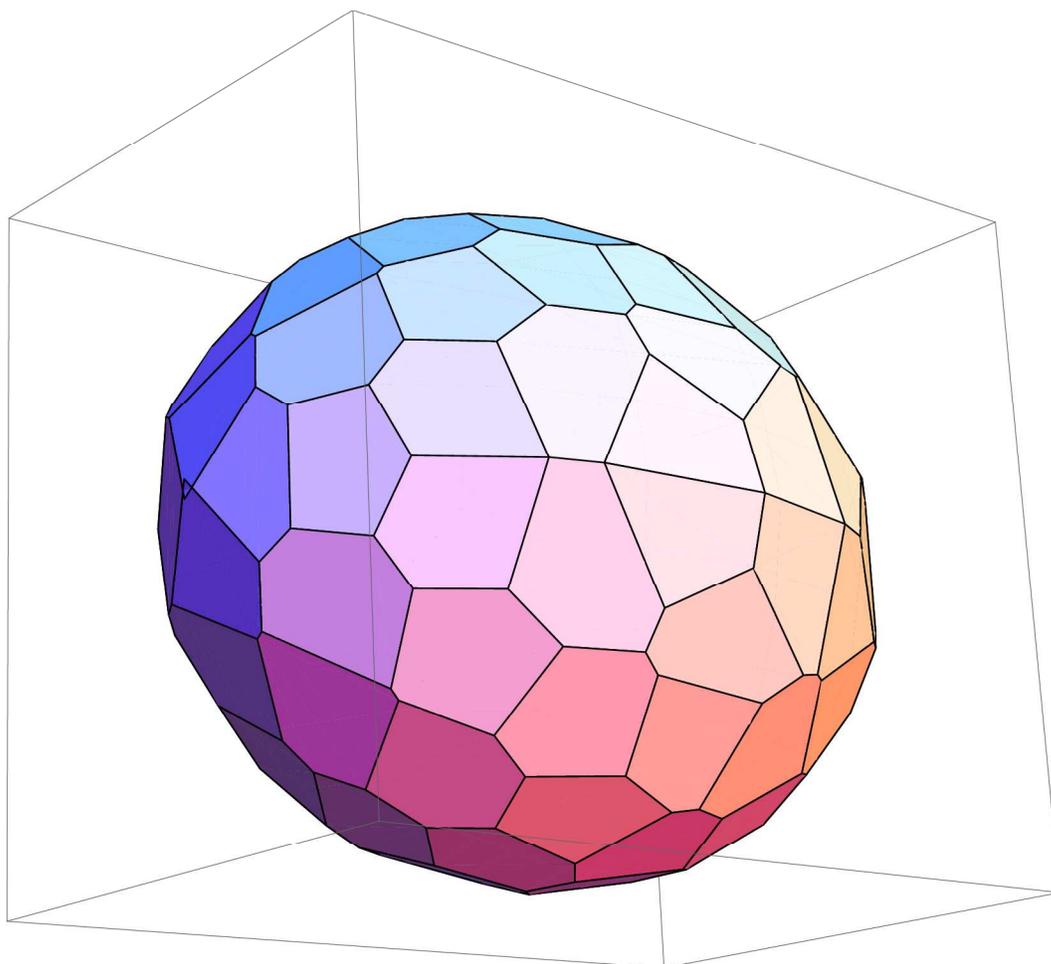


FIGURA 5.9. Discretización del elipsoide por medio de caras planas hexagonales.

Como la distribución de los puntos de Fekete busca una uniformidad, en general cada punto de Fekete tendrá 6 puntos contiguos y, por lo tanto, el panel asociado será de tipo hexagonal. Cuanto mayor es el número de puntos iniciales, menor es el número de paneles pentagonales o heptagonales que aparecen.

La utilización de la proyección estereográfica para trasladar los puntos de Fekete desde la esfera al plano para poder calcular ahí el diagrama de Voronoi presenta el siguiente problema: en un entorno del punto de la esfera utilizado para definir la proyección estereográfica las distancias se deforman considerablemente. En la aplicación que estamos planteando aquí esto se resuelve porque el punto de proyección se escoge en la parte del elipsoide que no se representa.

A pesar de que las investigaciones con mallados hexagonales planos son muy recientes, un ejemplo construido, es el proyecto Eden en Cornualles, Reino Unido, (Fig. 5.10 y 5.11) diseñado por Nicholas Grimshaw & Partners. El edificio consta de un conjunto de cúpulas de 38 m. a 125 m. de diámetro. La estructura de acero resuelta por MERO, forma una malla hexagonal plana, en donde se anclan los paneles hexagonales de material plástico.



FIGURA 5.10. Proyecto Eden, Cornualles. Arqto: N. Grimshaw. Vista general del conjunto.

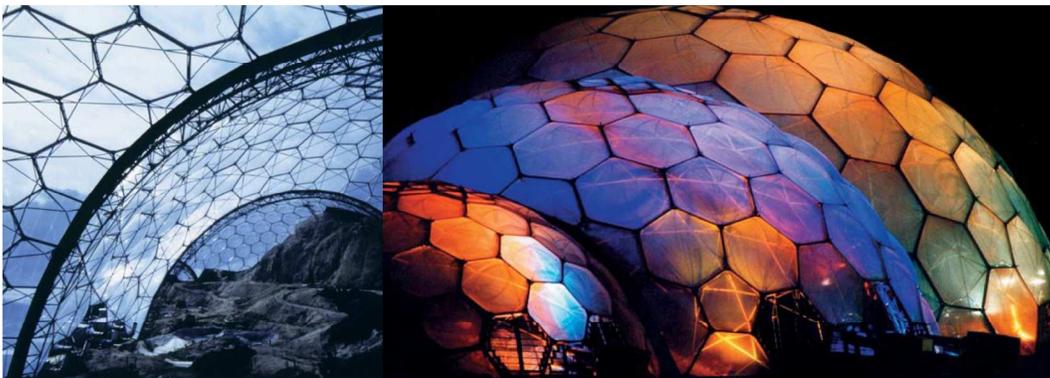


FIGURA 5.11. Proyecto Eden, Cornualles. Arqto: N. Grimshaw. *Izquierda:* Detalles de interior y de estructura. *Derecha:* Vista exterior nocturna.

Caso de estudio. Feria Valencia



FIGURA 6.1. Centro de eventos de Feria Valencia. Vista general.

En esta sección vamos a centrarnos en un edificio construido, el cual discretizaremos con los distintos programas expuestos. De esta forma comprobamos su funcionamiento sobre un edificio real.

El edificio escogido es el centro de eventos de Feria Valencia, en Benimàmet. El centro de eventos fue diseñado y construido por José María Tomás en la última ampliación del recinto, llevado a cabo entre 2003 y 2007.

La principal razón de la elección de este edificio, se debe a su geometría, que nos permite aplicar casi todos los métodos aquí expuestos para su discretización.

Podemos definir geoméricamente la cubierta del centro de eventos de Feria Valencia como una porción de elipsoide, panelizado con paneles triangulares. La materialidad de

estos paneles es el vidrio, lo que permite una gran iluminación natural del interior del centro de eventos.



FIGURA 6.2. Centro de eventos de Feria Valencia. *Izquierda:* Detalle de la panelización del elipsoide. *Derecha:* Vista general de la terraza.



FIGURA 6.3. Centro de eventos de Feria Valencia. Vista de la transparencia del elipsoide.

Supondremos que la ecuación paramétrica del elipsoide de Feria Valencia es:

$$El : [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$El(u, \theta) = (\text{Cos}(u) \cdot \text{Cos}(v), 2,5 \cdot \text{Sin}(v), \text{Sin}(u) \cdot \text{Cos}(v)).$$

1. Resolución como superficie de traslación

En primer lugar, tenemos que resolver el elipsoide como una superficie de traslación. Para ello escogemos dos curvas sobre elipsoide, que serán nuestras curvas directriz y generatriz.

Estas curvas, son las curvas de Bézier definidas por los siguientes polígonos de control:

$$((0, -2,5, 0), (0,7, -2,5, 0), (1, -0,2, 0), (1, 0, 0))$$

y

$$((0, -2,5, 0), (0, -2,5, 0,7), (0, -0,2, 1), (0, 0, 1)).$$

La superficie de traslación generada por estas curvas, nos proporcionará una cuarta parte del clipsoide. Combinando cuatro superficies de traslación obtendremos clipsoide completo.

En la figura 6.4, se puede visualizar el elipsoide original en rojo y su aproximación como superficie de traslación en azul.

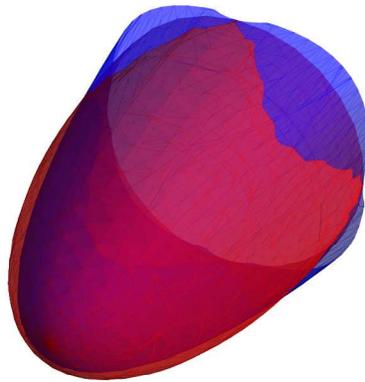
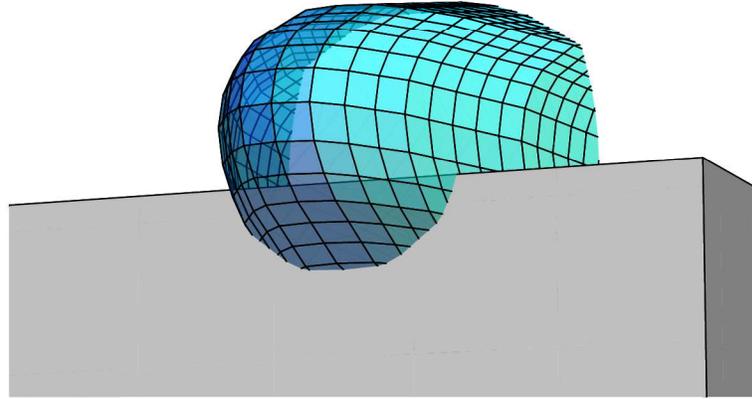


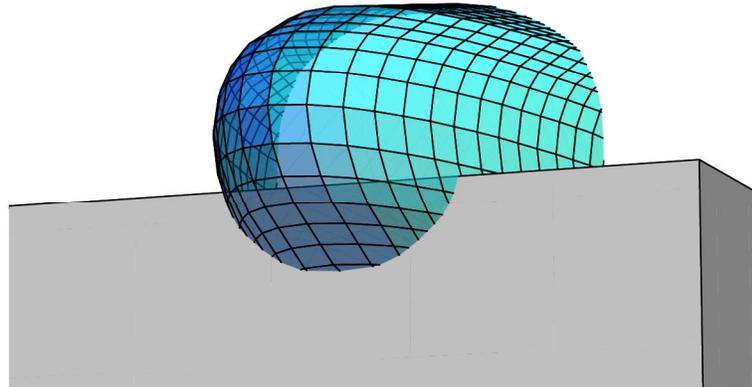
FIGURA 6.4. Diferencia entre el elipsoide (rojo) y su aproximación como superficies de traslación (azul).

Una vez definida la superficie de traslación, y podemos aplicar el algoritmo para la discretización de superficies de traslación visto en el capítulo 1. Los resultados obtenidos para una longitud de lado $l_1 = l - 2 = 0,2 \text{ ud.}$, y valores $k = 30$ y $n = 60$ lo observamos en las figuras 6.5 y 6.6 respectivamente, junto con la cantidad de tipos de paneles y el número total de paneles.



Tipos de paneles diferentes	15
Número total de paneles	450

FIGURA 6.5. Panelización del elipsoide como superficie de traslación para: $l_1 = l - 2 = 0,2 ud.$, y $k_1 = k_2 = 30$.



Tipos de paneles diferentes	19
Número total de paneles	450

FIGURA 6.6. Panelización del elipsoide como superficie de traslación para: $l_1 = l - 2 = 0,2 ud.$, y $k_1 = k_2 = 60$.

2. Resolución como superficie de revolución

Este elipsoide lo podemos resolver como la rotación de una elipse respecto al eje Y . Para ello aproximaremos la elipse como curva de Bézier. Los puntos de control serán:

$$((0, -2,5, 0), (0,5, -2,5, 0), (1, -1,5, 0), (1, 0, 0)).$$

La diferencia entre el elipsoide original en rojo y su aproximación obtenida por la rotación de la curva de Bézier genreada por el polígono de control la observamos en la figura 6.7.

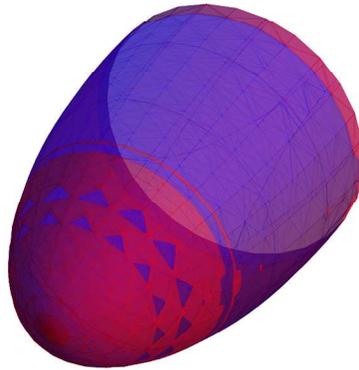
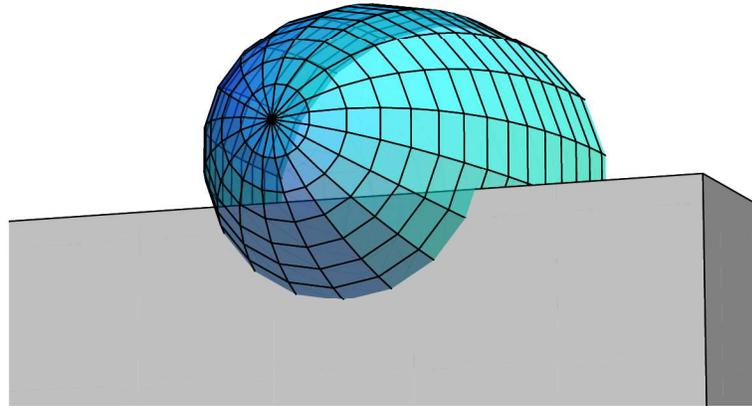


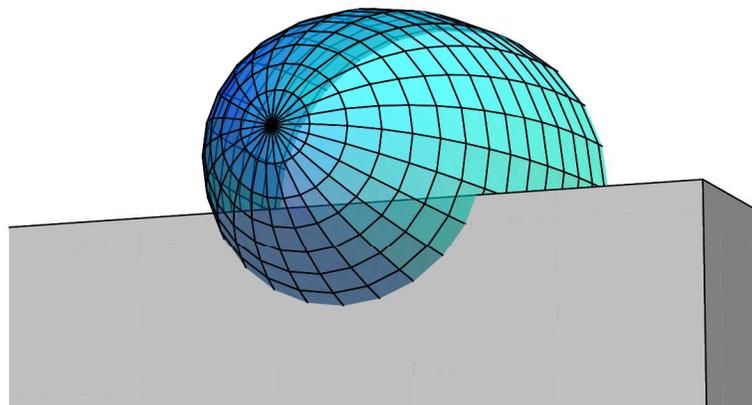
FIGURA 6.7. Diferencia entre el elipsoide (rojo) y su aproximación como superficies de revolución (azul).

En las figuras 6.8 y 6.9, visualizamos los resultados obtenidos de la discretización de la superficie de revolución definida con el algoritmo expuesto en el capítulo 2 para los valores $l = 0,2ud.$ y $n = 18$ y $n = 24$ respectivamente, indicando así mismo los diferentes tipos de paneles, y el número total de paneles.



Tipos de paneles diferentes	14
Número total de paneles	280

FIGURA 6.8. Panelización del elipsoide como superficie de revolución para: $l = 0,2 \text{ ud.}$, y $n = 18$.



Tipos de paneles diferentes	14
Número total de paneles	336

FIGURA 6.9. Panelización del elipsoide como superficie de revolución para: $l = 0,2 \text{ ud.}$, y $n = 24$.

3. Resolución como superficie de traslación con escala

Es este caso, la aproximación del elipsoide como superficie de traslación con escala vendrá definida por:

1. La curva generatriz, definida por el polígono de control

$$((0, -2,5, 0), (0,5, -2,5, 0), (1, -1,5, 0), (1, 0, 0)).$$

2. La curva directriz, definida por $((0, 0, 1), (0, 0, -1))$.
3. La función escalar vendrá definida para cada punto de la curva directriz por la distancia de esta a la circunferencia.

$$esc(t) = Sin(ArcCos(-2 \cdot t + 1)).$$

El elipsoide así definido es el mismo que hemos obtenido como superficie de revolución en la sección anterior. En la figura 6.10 presentamos los resultados para la panelización de la superficie de traslación con escala según el algoritmo visto en el capítulo 4, en función de la longitud de los lados de las curvas directriz l_d y generatriz l_g .

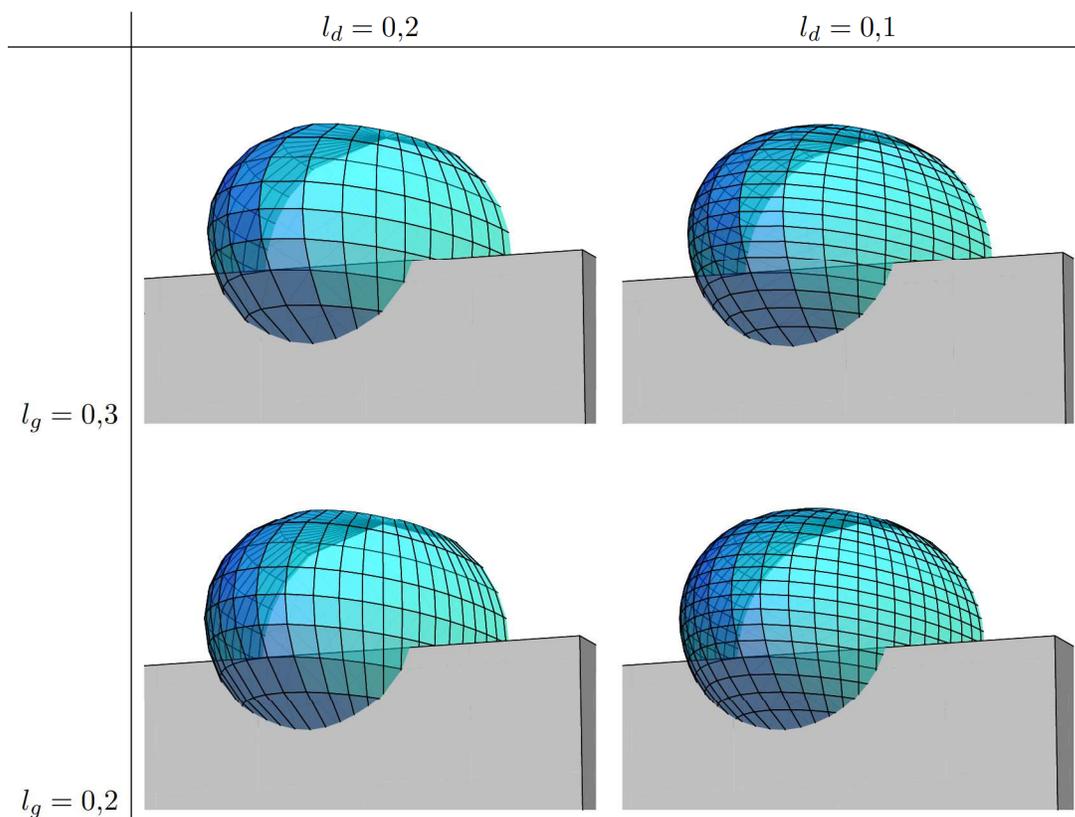


FIGURA 6.10. Panelización del elipsoide como superficie de traslación con escala, en función de l_d y l_g .

4. Resolución con paneles hexagonales planos

El algoritmo para discretizar un elipsoide por medio de paneles hexagonales planos, lo hemos expuesto en el capítulo 5. En las figuras 6.11 y 6.12 visualizamos los resultados para un número de caras $n = 200$ y $n = 300$ respectivamente.

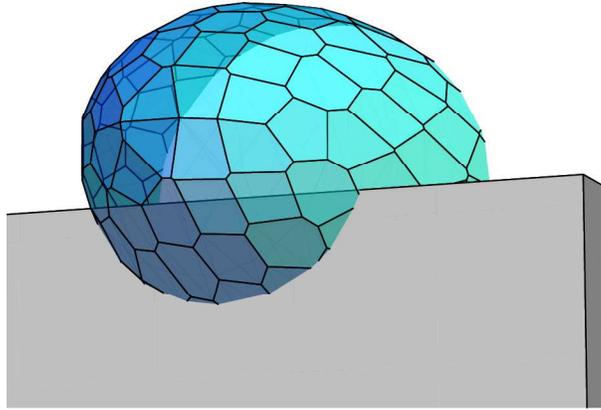


FIGURA 6.11. Panelización del elipsoide por medio de paneles hexagonales planos para $n = 200$.

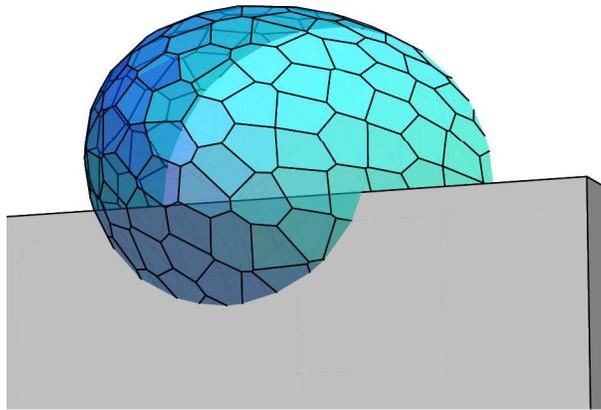


FIGURA 6.12. Panelización del elipsoide por medio de paneles hexagonales planos para $n = 300$.

Comparativa de las distintas panelizaciones

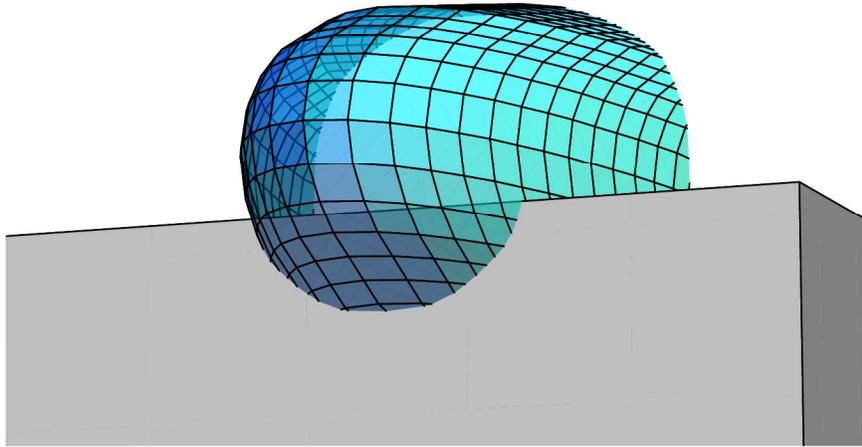


FIGURA 6.13. Panelización del elipsoide de Feria Valencia como superficie de traslación.

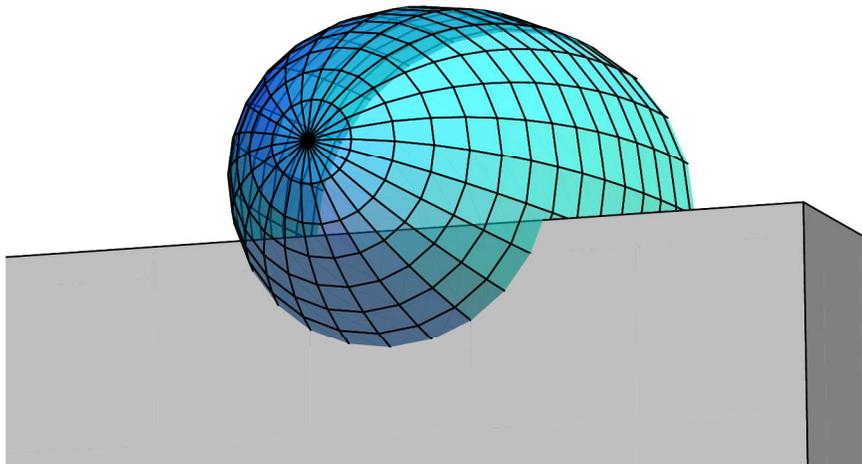


FIGURA 6.14. Panelización del elipsoide de Feria Valencia como superficie de revolución.

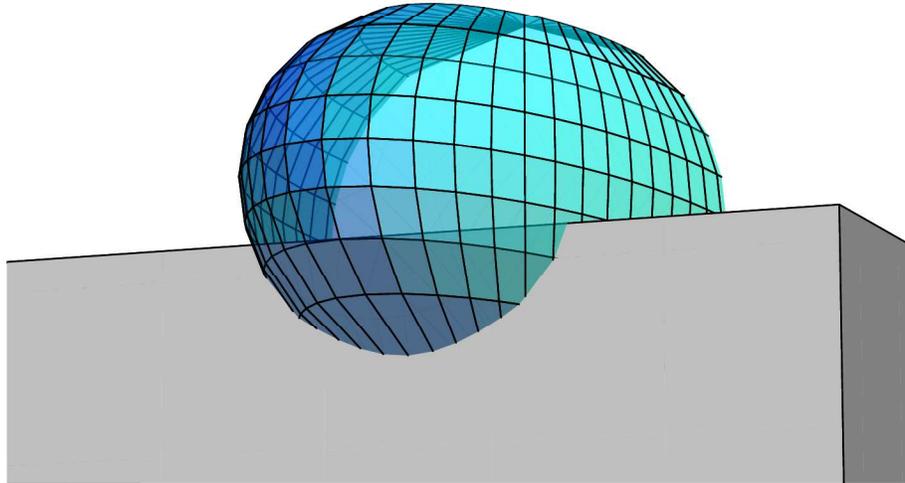


FIGURA 6.15. Panelización del elipsoide de Feria Valencia como superficie de traslación con escala.

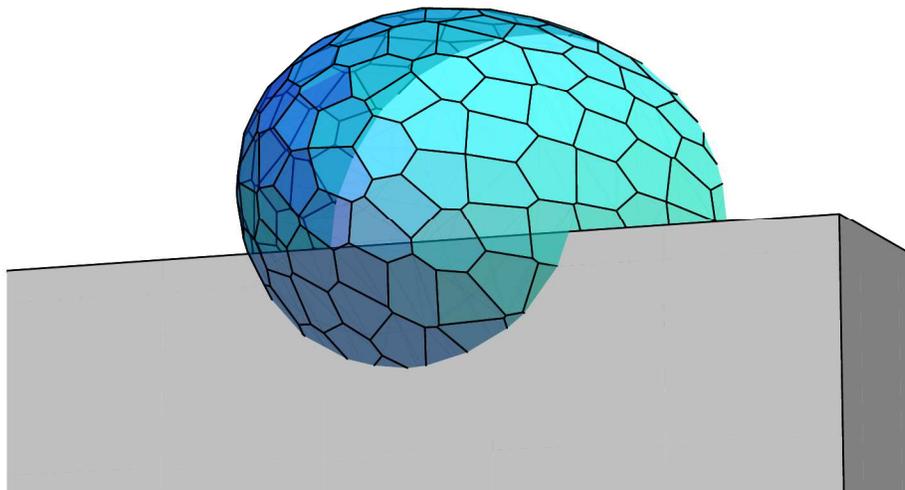


FIGURA 6.16. Panelización del elipsoide de Feria Valencia con paneles hexagonales planos.

Puntos de Fekete elípticos en la esfera

En el algoritmo propuesto en el capítulo 1 para la discretización de superficies de traslación surge la necesidad de calcular los puntos de Fekete. Esto surge debido a la necesidad de limitar los vectores en el espacio a un número limitado, y repartido uniformemente en todas las direcciones del espacio.

Esto equivale a la distribución uniforme de un número de puntos sobre la esfera, lo que resulta en el cálculo de los puntos de Fekete elípticos en la esfera.

La distribución de los puntos de Fekete en la esfera vuelve a surgir en el capítulo 6, para la discretización de elipsoides con paneles hexagonales planos.

El problema de Fekete tiene el siguiente enunciado: Dado un número natural n y un número real $s \geq 0$, encontrar los puntos x_1, \dots, x_n en la esfera 2-dimensional para los cuales la s -energía, definida por

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^{-s}, \quad \text{si } s > 0$$

o por

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln \|x_i - x_j\|^{-1}, \quad \text{si } s = 0$$

es mínima. Para $s > 0$, tales puntos se denominan s -puntos de Fekete, y para $s = 0$, puntos de Fekete logarítmicos.

En general, se puede considerar el mismo problema pero en una esfera d -dimensional, o en una variedad Riemanniana en cuyo caso $\|x_i - x_j\|$ representa la distancia Riemanniana o intrínseca entre los puntos x_i y x_j .

El problema se originó en un artículo de Michael Fekete el año 1923. Esta considerado com un ejemplo de problema de optimización altamente no trivial y con restricciones no lineales.

La versión algorítmica del problema de Fekete es el problema número 7 en la lista de problemas del Siglo XXI elaborada por Stephen Smale [17].

Aquí hemos implementado el algoritmo propuesto en [2] basado en la interpretación física del comportamiento de un sistema de partículas.

Este algoritmo parte de una configuración inicial y calcula para cada punto la dirección de movimiento tangencial que producen sobre él el resto de puntos. Una vez calculadas todas las direcciones, desplaza cada punto en la dirección correspondiente. Así obtiene una segunda configuración para la cual la energía del sistema es menor.

Iterando este proceso las configuraciones obtenidas van convergiendo a la de energía mínima.

En la figura A.2 izquierda se pueden observar las geodésicas que unen uno de los puntos (en color rojo) con todos los otros. Esto permite calcular las distancias entre ellos, y por lo tanto, la dirección y magnitud de la fuerza repulsora que cada punto ejerce sobre el otro. Estas fuerzas están representadas en la figura A.2 derecha como líneas de color negro, mientras que la fuerza resultante de todas ellas es representada en color verde.

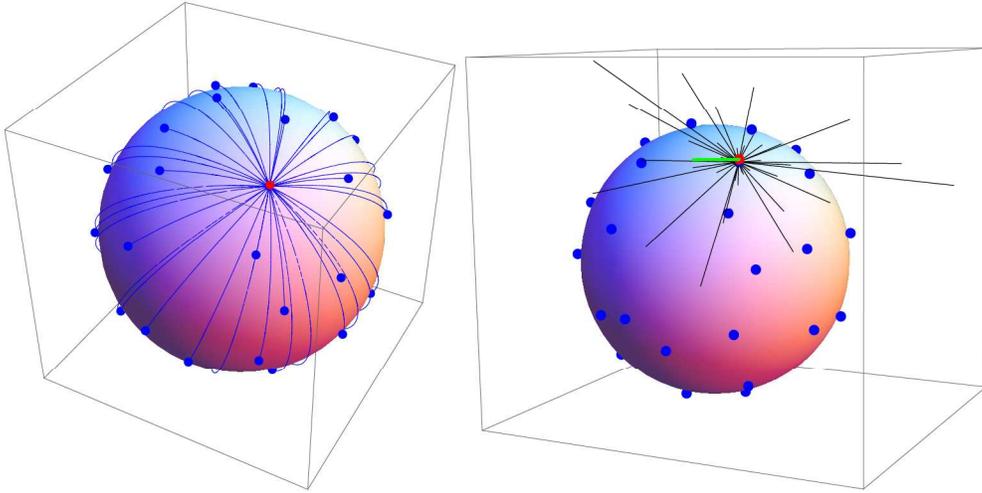


FIGURA A.1. *Izquierda:* Líneas geodésicas que unen uno de los puntos (en color rojo) con todos los otros. *Derecha:* Fuerza resultante (color verde) de las fuerzas repulsoras ejercidas por el resto de los puntos (color negro) sobre un punto.

En la implementación hemos introducido dos modificaciones respecto al algoritmo propuesto en [2]:

1. Hemos utilizado la distancia intrínseca en la esfera en lugar de la distancia euclídea en \mathbb{R}^3 .

Concretamente, hemos utilizado la métrica propia de la esfera: la distancia entre dos puntos $p, q \in S^2$ es el ángulo que forman los radios de la esfera definidos por dichos puntos, equivalentemente, la longitud del menor de los arcos del círculo máximo que pasa por ambos puntos.

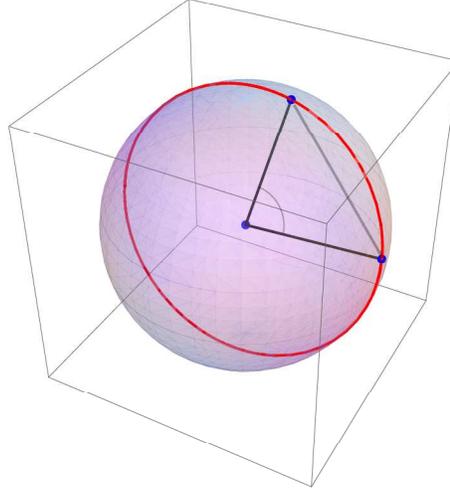


FIGURA A.2. Distancia entre dos puntos en la métrica propia de la esfera.

Este ángulo, cuando la esfera es la de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas, se puede calcular como

$$d(p, q) = \arccos(p \cdot q)$$

donde \cdot denota el producto escalar. Así, la energía a minimizar será:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln \|x_i - x_j\|^{-1} = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln (\arccos(x_i \cdot x_j)).$$

Esta modificación se complementa con el hecho de que el desplazamiento de un punto es también siguiendo el círculo máximo (es decir, la geodésica) que pasa por ese punto en la dirección tangencial determinada por el algoritmo. En el artículo [2], el movimiento era en el plano tangente y luego se normalizaba el resultado para que el nuevo punto volviera a ser un punto de la esfera. Desplazándose a lo largo de círculos máximos no es necesario hacer esta operación.

2. Como configuración inicial hemos tomado las que se aconsejan en el artículo [1].

En este artículo se demuestra que las raíces, en el plano complejo, de polinomios aleatorios propocionan una buena aproximación a los puntos de Fekete elípticos. Concretamente, se construye primero un polinomio de grado el número de puntos de Fekete, n :

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i.$$

Los coeficientes c_i se eligen como sigue:

$$\sqrt{\binom{n}{k}} \left(d_i - \frac{1}{2} \right),$$

donde $d_i \in [0, 1]$ és aleatorio.

Si las raíces del polinomio son $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$, entonces la configuración inicial de puntos en la esfera es la producida por aplicar a cada raíz la inversa de la proyección estereográfica.

Si la proyección estereográfica es:

$$p_{est} : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$p_{est}(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z},$$

entonces la inversa está dada por :

$$p_{est}^{-1}(a + ib) = \frac{(2a, 2b, a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2 + 1}.$$

En la figura A.3 izquierda se puede observar parte de una configuración inicial con 40 puntos:

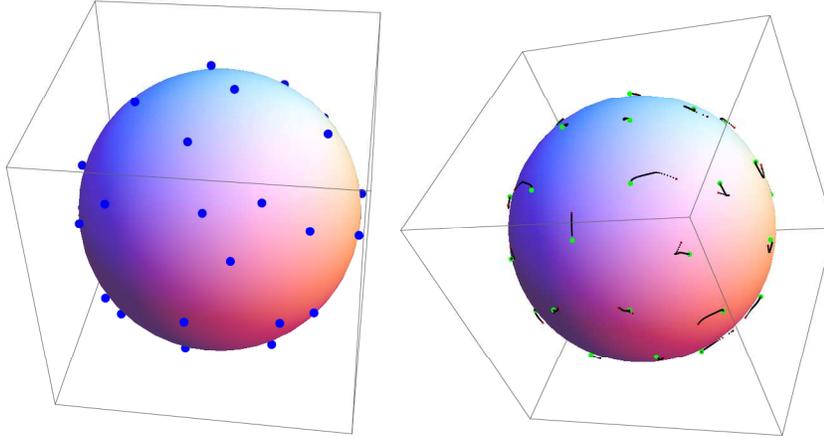


FIGURA A.3. *Izquierda:* Configuración inicial con 40 puntos en la esfera. *Derecha:* Configuración final (verde) después de 400 iteraciones del algoritmo, y camino seguido desde la configuración inicial (rojo).

mientras que en la figura A.3 derecha se observa la configuración después de 400 iteraciones del algoritmo aplicada a esa configuración inicial. La configuración inicial está formada por los puntos de color rojo. La configuración después de las iteraciones está formada por los puntos de color verde. Se visualiza también el camino seguido por cada punto.

Bibliografía

- [1] Armentano, D., Beltrán, C., Shub, M. *Minimizing the discrete logarithmic energy on the sphere: The role of random polynomials*, Transactions of the American Mathematical Society 363 (6) , pp. 2955-2965.
- [2] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M., Gesto, J.M., *Estimation of Fekete points*, Journal of Computational Physics 225 (2) , pp. 2354-2376.
- [3] do Carmo, M. P., *Differential Geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall Inc., (1976).
- [4] Eigensatz, M., Kilian, M., Schiftner, A., Mitra N.J., Pottmann, H., Pauly, M., *Paneling Architectural Freeform Surfaces*, ACM Transaction on Graphics 27 (3), (2008).
- [5] Farin, G., *Curves and surfaces for computer aided geometric design. A practical guide*, Morgan Kaufmann, 5th. ed., (2001).
- [6] Frampton, K., *Historia crítica de la arquitectura moderna* Gustavo Gili, (2005)
- [7] Glymph, G., Shelden, D., Ceccato, C., Mussel, J., Schober, H., *A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets*, Automotion in Construction 13, (2004), pp. 187-202.
- [8] Gonzalez, F., *Método de Adaptación de Formas de Doble Curvatura Mediante Superficies Desarrollables*, Tesis Doctoral, Universidad del Pais Vasco, (2012).
- [9] Liu, Y., Pottmann, H., Wallner, J., Yang, Y., Wang, W., *Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces*, ACM Transaction on Graphics 25 (3), pp 681-689.
- [10] Monterde, J., *Geometria Diferencial Clásica*, Universitat de Valencia, (2012).
- [11] Pottmann, H., Brell-Cokan, S., Wallner, J., *Discrete Surface for Architectural Design*, Curves and Surface Design: Avignon 2006, pp. 213-234.
- [12] Pottmann, H., Schiftner, A., Wallner, J., *Geometry of Architectural Freeform Structures*, Internat. Math. Nachrichten, Nr. 209 (2008), pp. 15-28
- [13] Pottmann, H., Schiftner, A., Bo, P., Schmiedhofer, H., Wang, W., Baldassini, N., Wallner, J., *Freeform surfaces from single curved panels*, ACM Transaction on Graphics, (2010)
- [14] Schiftner, A., *Planar quad meshes from relative principal curvature lines*, Diploma Thesis, Vienna University of Technology (2007).
- [15] Schiemdhofer, H., *Discrete Freeform-Surfaces for Architecture*, Diploma Thesis, Vienna University of Technology (2007).
- [16] Heinz Schmiedhofer, H., Brell-Cokcan, S., Schiftner, A., Ziegler, R., *Design and Panelization of Architectural Freeform-Surfaces by Planar Quadrilateral Meshes*, Advances in Architectural Geometry 2008, pp 112-115.
- [17] Smale, S., *Mathematical problems for the next century*, Mathematical Intelligencer 20 (2) , pp. 7-15 (1998).
- [18] Spuybroeck, L., *NOX: Machining Architecture* Thames & Hudson, (2004).
- [19] Troche, C., *Planar hexagonal meshes by tangent plane intersection*, Advances in Architectural Geometry 2008, pp 57-60.
- [20] Wang, W., Liu, Y., Yan, D., Chan, B., Ling, R., Sun, F., *Hexagonal Meshes with Planar Faces*, HKU CS Technical Report, TR-2008-13.
- [21] Warren, J., Weimer, H., *Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach*, Morgan Kaufman Publishers, (2002).