



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y CONVERGENCIA  
DE MÉTODOS ITERATIVOS  
PARA RESOLVER  
ECUACIONES Y SISTEMAS NO LINEALES  
UTILIZANDO FUNCIONES PESO

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

SANTIAGO DE JESÚS ARTIDIELLO MORENO

Directores:

DRA. ALICIA CORDERO BARBERO

DR. JUAN RAMÓN TORREGROSA SÁNCHEZ

DRA. MARÍA PENKOVA VASSILEVA

Valencia, Octubre de 2014

---



Alicia Cordero, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, Juan Ramón Torregrosa, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia y María P. Vassileva, Profesora Investigadora del Instituto Tecnológico de Santo Domingo,

CERTIFICAN:

Que Don Santiago de Jesús Artidiello Moreno, Ingeniero de Transporte, ha realizado bajo nuestra dirección el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad Politécnica de Valencia.

Asimismo, autorizamos la presentación de este trabajo ante la Universidad Politécnica de Valencia para que cumpla los trámites correspondientes.

Y para que así conste a efectos legales presentan dicha Tesis, firmando este certificado en Valencia, a 11 de julio 2014.

Alicia Cordero

Juan Ramón Torregrosa

María P. Vassileva

---



## Resumen

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales figura entre los problemas más importantes, tanto desde un punto de vista teórico como práctico, de las matemáticas aplicadas, así como también de muchas ramas de las ciencias, la ingeniería, la física, la informática, la astronomía, las finanzas,.... Un vistazo a la bibliografía y la lista de grandes matemáticos que han trabajado en este tema pone de manifiesto un alto nivel de interés contemporáneo en el mismo. Aunque el rápido desarrollo de las computadoras digitales llevó a la aplicación efectiva de muchos métodos numéricos, en la realización práctica, es necesario analizar diferentes problemas tales como la eficiencia computacional basado en el tiempo usado por el procesador, el diseño de métodos iterativos que posean una rápida convergencia a la solución deseada, el control de errores de redondeo, la información sobre las cotas de error de la solución aproximada obtenida, las condiciones iniciales que garanticen una convergencia segura, etc. Dichos problemas constituyen el punto de partida de este trabajo.

El objetivo general de esta memoria es diseñar métodos iterativos eficientes para resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones no lineales. El esquema más conocido para resolver ecuaciones no lineales es el método de Newton, su generalización a sistemas de ecuaciones fue propuesta por Ostrowski.. En los últimos años, como muestra la amplia bibliografía, ha aumentado de manera considerable la construcción de métodos iterativos, tanto de un paso como multipaso, con el fin de conseguir una convergencia de orden óptimo así como una mejor eficiencia computacional. En general, en esta memoria hemos utilizado la técnica de funciones peso para diseñar métodos de resolución de ecuaciones y sistemas, tanto libres de derivadas como apareciendo éstas en su expresión iterativa.

En el Capítulo 2 introducimos los conceptos previos que sustentan el desarrollo de los distintos temas. Entre ellos, cabe destacar los relacionados con los métodos iterativos de resolución de problemas no lineales, en una y varias variables; el concepto de método óptimo (basado en la conjetura de Kung y Traub); las técnicas de demostración empleadas para probar el orden de convergencia local, así como también el operador diferencias divididas  $[x,y;F]$ , y los conceptos básicos de la dinámica compleja de funciones racionales que utilizaremos para analizar el comportamiento dinámico del operador asociado a cualquier método iterativo.

En los Capítulos 3 y 4 hemos desarrollado métodos iterativos óptimos de órdenes 4 y 8, con y sin derivadas, para la resolución de ecuaciones no lineales. En ambos capítulos comenzamos refiriéndonos al estado del arte, para mostrar a continuación los nuevos métodos diseñados, que incluyen familias conocidas pero también nuevos esquemas iterativos, posteriormente continuamos con el análisis de la convergencia de dichas clases de métodos, estableciendo algunos casos particulares, que son analizados en detalle y finalizamos con las pruebas numéricas relacionadas con los esquemas iterativos propuestos. Específicamente, en el Capítulo 3, se presentan los resultados obtenidos al modificar el método clásico de Gauss para la determinación de órbitas preliminares, de manera que incluya en su proceso esquemas iterativos de alto orden de convergencia. Por su parte, en el Capítulo 4 se muestran las propiedades dinámicas de algunos de los esquemas iterativos diseñados de orden 8, así como sus propiedades de estabilidad que son verificadas sobre diferentes funciones test.

En el Capítulo 5, presentamos métodos iterativos óptimos de alto orden, con operador derivada, para resolver ecuaciones no lineales. Tras el diseño de estos métodos y el análisis de su convergencia, se transforma dicha clase de esquemas iterativos en otra libre de derivadas, manteniendo su optimalidad. Finalmente, se muestran los resultados de algunas pruebas numéricas, que incluyen la determinación de órbitas preliminares de satélites.

El comportamiento dinámico del operador asociado a un método iterativo al ser aplicado sobre la función no lineal a resolver nos proporciona importante información acerca de la estabilidad y fiabilidad de éste. El análisis dinámico de un método iterativo se centra en el estudio del comportamiento asintótico de los puntos fijos (raíces, o no, de la ecuación) del operador, así como en las cuencas de atracción asociadas a los mismos. En el caso de familias paramétricas de métodos iterativos, el análisis de los puntos críticos libres nos permite seleccionar los miembros más estables de dichas familias. El análisis de la dinámica compleja de los métodos diseñados para ecuaciones no lineales se lleva a cabo en el Capítulo 6, donde nos centramos

en una de las familias de métodos óptimos presentada en capítulos anteriores. Así, una vez establecido el teorema del escalado, analizamos el comportamiento del operador racional asociado al método actuando sobre polinomios cuadráticos, calculando sus puntos fijos y críticos y analizando su estabilidad. Mostramos los planos de parámetros de los diferentes puntos críticos libres y estudiamos algunos casos particulares mediante planos dinámicos concretos en los que significamos algunas cuencas de atracción que no corresponden a las raíces.

A continuación, en el Capítulo 7 se extienden a sistemas las técnicas iterativas diseñadas en el caso escalar, si bien ahora utilizamos funciones peso matriciales. Así construimos métodos de cualquier orden añadiendo sucesivos pasos con la misma estructura. Finalmente, se utiliza el operador diferencias divididas para extender al caso multivariable algunos esquemas iterativos que, a priori, no pueden ser extendidos de forma directa. Todos estos métodos forman parte del estudio numérico que se presenta al final del capítulo, en el que se confirman los resultados teóricos.

Esta memoria termina con un capítulo dedicado a problemas abiertos y a líneas futuras de trabajo. Algunos de estos problemas han surgido como consecuencia de los avances obtenidos.

## Resum

La resolució d'equacions i sistemes d'equacions no lineals figura entre els problemes més importants, tant des d'un punt de vista teòric com a pràctic, de les matemàtiques aplicades, així com també de moltes branques de les ciències, l'enginyeria, la física, la informàtica, l'astronomia, les finances,.... Una ullada a la bibliografia i la llista de grans matemàtics que han treballat en aquest tema posa de manifest un alt nivell d'interès contemporani en el mateix. Encara que el ràpid desenvolupament de les computadores digitals va portar a l'aplicació efectiva de molts mètodes numèrics, en la realització pràctica, és necessari analitzar diferents problemes tals com l'eficiència computacional basat en el temps usat pel processador, el disseny de mètodes iteratius que posseïsquen una ràpida convergència a la solució desitjada, el control d'errors d'arrodoniment, la informació sobre les cotes d'error de la solució aproximada obtinguda, les condicions inicials que garantiscuen una convergència segura, etc. Aquests problemes constitueixen el punt de partida d'aquest treball.

L'objectiu general d'aquesta memòria és dissenyar mètodes iteratius eficients per a resoldre una equació o un sistema d'equacions no lineals. L'esquema més conegut per a resoldre equacions no lineals és el mètode de Newton, la seua generalització a sistemes d'equacions va ser proposada per Ostrowski. En els últims anys, com a mostra l'àmplia bibliografia, ha augmentat de manera considerable la construcció de mètodes iteratius, tant d'un pas com multipas, amb la finalitat d'aconseguir una convergència d'ordre òptim així com una millor eficiència computacional. En general, en aquesta memòria hem utilitzat la tècnica de funcions pese per a dissenyar mètodes de resolució d'equacions i sistemes, tant lliures de derivades com apareixent aquestes en la seua expressió iterativa.

En el Capítol 2 introduïm els conceptes previs que sustenten el desenvolupament dels diferents temes. Entre ells, cal destacar els relacionats amb els mètodes iteratius de resolució de problemes no lineals, en una i diverses variables; el concepte de mètode òptim (basat en la conjectura de Kung i Traub); les tècniques de demostració emprades per a provar l'ordre de convergència local, així com també l'operador diferenciació dividida  $[x,y;F]$ , i els conceptes bàsics de la dinàmica complexa de funcions racionals que utilitzarem per a analitzar el comportament dinàmic de l'operador associat a qualsevol mètode iteratiu.

En els Capítols 3 i 4 hem desenvolupat mètodes iteratius òptims d'ordres 4 i 8, amb i sense derivades, per a la resolució d'equacions no lineals. En tots dos capítols comencem referint-nos a l'estat de l'art, per a mostrar a continuació els nous mètodes dissenyats, que inclouen famílies conegudes però també nous esquemes iteratius, posteriorment continuem amb l'anàlisi de la convergència local, així com també l'operador diferenciació dividida, establint alguns casos particulars, que són analitzats detalladament i finalitzem amb les proves numèriques relacionades amb els esquemes iteratius proposats. Específicament, en el Capítol 3, es presenten els resultats obtinguts en modificar el mètode clàssic de Gauss per a la determinació d'òrbites preliminars, de manera que incloga en el seu procés esquemes iteratius d'alt ordre de convergència. Per la seua banda, en el Capítol 4 es mostren les propietats dinàmiques d'alguns dels esquemes iteratius dissenyats d'ordre 8, així com les seues propietats d'estabilitat que són verificades sobre diferents funcions test.

En el Capítol 5, presentem mètodes iteratius òptims d'alt ordre, amb operador derivada, per a resoldre equacions no lineals. Després del disseny d'aquests mètodes i l'anàlisi de la seua convergència, es transforma aquesta classe d'esquemes iteratius en una altra lliure de derivades, mantenint la seua optimalitat. Finalment, es mostren els resultats d'algunes proves numèriques, que inclouen la determinació d'òrbites preliminars de satèl·lits.

El comportament dinàmic de l'operador associat a un mètode iteratiu en ser aplicat sobre la funció no lineal a resoldre ens proporciona important informació sobre l'estabilitat i fiabilitat d'aquest. L'anàlisi dinàmica d'un mètode iteratiu se centra en l'estudi del comportament asimptòtic dels punts fixos (arrels, o no, de l'equació) de l'operador, així com en les conques d'atracció associades als mateixos. En el cas de famílies paramètriques de mètodes iteratius, l'anàlisi dels punts crítics lliures ens permet seleccionar els membres més estables d'aquestes

famílies. L'anàlisi de la dinàmica complexa dels mètodes dissenyats per a equacions no lineals es duu a terme en el Capítol 6, on ens centrem en una de les famílies de mètodes òptims presentada en capítols anteriors. Així, una vegada establert el teorema de l'escalat, analitzem el comportament de l'operador racional associat al mètode actuant sobre polinomis quadràtics, calculant els seus punts fixos i crítics i analitzant la seua estabilitat. Vam mostrar els plànols de paràmetres dels diferents punts crítics lliures i estudiem alguns casos particulars mitjançant plànols dinàmics concrets en els quals signifiquem algunes conques d'atracció que no corresponen a les arrels.

A continuació, en el Capítol 7 s'estenen a sistemes les tècniques iteratives dissenyades en el cas escalar, si ben ara utilitzem funcions pesse matricials. Així construïm mètodes de qualsevol ordre afegint successius passos amb la mateixa estructura. Finalment, s'utilitza l'operador diferencials dividides per a estendre al cas multivariable alguns esquemes iteratius que, a priori, no poden ser estesos de forma directa. Tots aquests mètodes formen part de l'estudi numèric que es presenta al final del capítol, en el qual es confirmen els resultats teòrics.

Aquesta memòria acaba amb un capítol dedicat a problemes oberts i a línies futures de treball. Alguns d'aquests problemes han sorgit com a conseqüència dels avanços obtinguts.

## Abstract

Solving nonlinear equations and systems is one of the most important problems of applied mathematics, from both a theoretical and practical point of view, as well as many branches of science, engineering, physics, computing, astronomy, finance, .... a look at the bibliography and the list of great mathematicians who have worked on this issue reveals a high level of contemporary interest in it. Although the rapid development of digital computers led to the effective implementation of many numerical methods, in the practice is necessary to analyze different problems such as computational efficiency based on the time spent by the processor, the design of iterative methods that have a rapid convergence to the desired solution, the rounding error control, information about the error bounds of the approximate solution obtained, the initial conditions that guarantee safe convergence, etc.. These problems are the starting point for this work.

The overall objective of this memory is to design efficient iterative methods to solve an equation or a system of nonlinear equations. The best known scheme for solving nonlinear equations is Newton's method, whose generalization to systems of equations was proposed by Ostrowski. In recent years, as shown in extensive literature, the construction of iterative methods has increased considerably, both one point as multipoint, in order to achieve optimal order of convergence and better computational efficiency. In general, in this memory we have used the technique of weight functions to design methods for solving equations and systems, both derivative-free as with derivatives in their iterative expression.

In Chapter 2 we introduce the previous concepts underpinning the development of the different topics. Among them we have included those related to iterative methods for solving nonlinear problems in one and several variables; the concept of optimal method (based on Kung-Traub's conjecture); demonstration techniques used to test the local order of convergence as well as the divided differences operator  $[x, y; F]$ , and the basics of the complex dynamics of rational functions that we will use to analyze the dynamical behavior of the operator associated with any iterative method.

In Chapters 3 and 4 we have developed optimal iterative methods of orders 4 and 8, with and without derivatives for solving nonlinear equations. In both chapters we start referring to the state of the art, to show then designed new methods, which include known families but also new iterative schemes, then continue with the analysis of the convergence of these kinds of methods, establishing some particular cases, which are analyzed in detail and we finish with the numerical evidence relating to the proposed iterative schemes. Specifically, in Chapter 3, the results obtained by modifying the classical Gauss method for determining preliminary orbits, to include in the process iterative schemes of high order of convergence are presented. Meanwhile, in Chapter 4 the dynamic properties of some eighth-order iterative schemes as well as their stability properties which are verified on different test functions.

In Chapter 5, we present optimal higher-order iterative methods with derivatives to solve nonlinear equations. After the development of these methods and the analysis of their convergence, that class of iterative schemes becomes another derivative-free, maintaining its optimality. Finally, results of some numerical tests, including the determination of preliminary orbits of satellites are showed.

The dynamical behavior of the operator associated with an iterative method when applied on a nonlinear function provides important information about its stability and reliability. Dynamical analysis of an iterative method focuses on the study of the asymptotic behavior of the fixed points (roots, or not, of the equation) operator and in the basins of attraction associated with them. For parametric families of iterative methods, the analysis of free critical points allows to select the most stable of these family members. The analysis of the complex dynamics of methods designed for nonlinear equations is carried out in Chapter 6, where we focus on one family of optimal methods presented in previous chapters. Thus, once established scaling theorem, we analyze the behavior of rational operator associated with the method acting on quadratic polynomials, calculating its fixed

and critical points and analyzing their stability. We show the parameter planes associated to the different free critical points and study some particular cases by means of the dynamical planes which include some basins of attraction that do not correspond to the roots.

Then, in Chapter 7 we extend to systems the iterative techniques defined in the scalar case, but using matrix weight functions. So we construct methods of any order by adding successive steps with the same structure. Finally, we use the divided difference operator to extend to the multivariable case some iterative schemes that, a priori, cannot be extended directly. All these methods are part of the numerical study presented at the end of the chapter, in which the theoretical results are confirmed.

This memory concludes with a chapter on open problems and future work lines. Some of these problems have arisen as a result of the progress made.

# Agradecimientos

Es un placer tener la oportunidad para poder expresar en este espacio mi gratitud a todas aquellas personas que con su valiosa colaboración contribuyeron, de una u otra manera, en el desarrollo de esta investigación y que sin su aporte hubiese sido imposible llevarlo a un feliz término.

Quedo especialmente agradecido a las Dras. Alicia Cordero y María P. Vassileva y al Dr. Juan Ramón Torregrosa, mis directores de Tesis. Les agradezco sinceramente su confianza y todo el apoyo, por sus recomendaciones, sugerencias, su asesoramiento científico su predisposición permanente a aclarar mis dudas y sus substanciales sugerencias durante la redacción de la Tesis y paciente labor de su corrección. Por su amistad,....

A Dios por haberme dado una esposa maravillosa, por su comprensión, apoyo incondicional y estar siempre a mi lado.

Finalmente, a quienes siempre me apoyaron, mis padres, hermanas, sobrinas y sobrinos.

A todos, . . . . . gracias!!

Valencia, octubre 2014



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Conceptos previos</b>	<b>7</b>
2.1. Ecuaciones no lineales . . . . .	7
2.2. Sistemas de ecuaciones no lineales . . . . .	11
2.2.1. Análisis del operador $[x,y;F]$ . . . . .	17
2.3. Conceptos básicos de la dinámica compleja . . . . .	18
2.3.1. Clases de conjugación . . . . .	19
<b>3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales</b>	<b>24</b>
3.1. Estado del arte . . . . .	24
3.2. Diseño de los métodos . . . . .	28
3.3. Análisis de la convergencia . . . . .	30
3.4. Pruebas numéricas . . . . .	45
3.4.1. Aplicación a la determinación preliminar de órbitas . . . . .	55
3.5. Anexo . . . . .	59
<b>4. Métodos iterativos multipunto óptimos de tipo Steffensen para ecuaciones no lineales</b>	<b>64</b>
4.1. Estado del arte . . . . .	64
4.2. Diseño de los métodos . . . . .	66
4.3. Análisis de la convergencia . . . . .	67
4.4. Pruebas numéricas . . . . .	77
4.5. Comparativa entre métodos con y sin derivadas . . . . .	85

4.5.1. Análisis de la estabilidad . . . . .	85
4.5.2. Análisis numérico . . . . .	87
<b>5. Métodos iterativos multipunto óptimos de orden alto para ecuaciones no lineales</b>	<b>91</b>
5.1. Estado del arte . . . . .	91
5.2. Diseño de los métodos . . . . .	92
5.3. Análisis de la convergencia . . . . .	93
5.4. Pruebas numéricas . . . . .	105
5.5. Aplicación a la determinación de órbitas preliminares . . . . .	106
<b>6. Análisis de la dinámica compleja de algunos métodos diseñados para ecuaciones no lineales</b>	<b>109</b>
6.1. Introducción . . . . .	109
6.1.1. Cálculo de puntos fijos y críticos . . . . .	109
6.1.2. Dinámica asociada a MED43 sobre $p(z) = z^2 - c$ . . . . .	111
6.1.3. Órbitas periódicas . . . . .	112
6.1.4. Dinámica asociada a MED44 sobre $p(z) = z^2 - c$ . . . . .	113
6.2. Planos de parámetros . . . . .	117
<b>7. Métodos iterativos de alto orden con operador derivada para sistemas de ecuaciones no lineales</b>	<b>122</b>
7.1. Estado del arte . . . . .	122
7.2. Diseño de los métodos y análisis de la convergencia . . . . .	125
7.3. Extensión a órdenes superiores . . . . .	133
7.4. Pruebas numéricas . . . . .	137
7.5. Extensión a sistemas de métodos iterativos unidimensionales sin traslación directa a sistemas . . . . .	141
7.5.1. Diseño de la técnica y análisis de la convergencia . . . . .	142
7.5.2. Pruebas numéricas . . . . .	148
<b>8. Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>153</b>
<b>9. Anexos</b>	<b>156</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El problema de la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales figura entre los más importantes en la teoría y la práctica, no sólo de las matemáticas aplicadas, sino también de muchas ramas de las ciencias, la ingeniería, la física, la informática, la astronomía, las finanzas,...

Un vistazo a la bibliografía y la lista de grandes matemáticos que han trabajado en este tema muestran un alto nivel de interés contemporáneo. Aunque el rápido desarrollo de las computadoras digitales llevó a la aplicación efectiva de muchos métodos numéricos, en la realización práctica, es necesario resolver varios problemas tales como la eficiencia computacional basado en el tiempo usado por el procesador, el diseño de métodos iterativos que posean una rápida convergencia a la solución deseada, el control de errores de redondeo, la información sobre los límites de error de la solución aproximada obtenida, indicando las condiciones iniciales de cómputo verificables que garantiza una convergencia segura, etc. Dichos problemas constituyen el punto de partida de esta memoria.

Un caso particular de este problema es la aproximación de las raíces de un polinomio. Desde tiempos muy remotos se encontraban con éxito las raíces de polinomios de primer y segundo grado. En 1540 los matemáticos Scipione, Tartaglia y Cardano resolvieron la ecuación cúbica. En 1545 Ferrari resolvió la ecuación de cuarto grado. Muchos matemáticos de los siglos posteriores trataron de resolver ecuaciones de quinto grado y superior. A principios del siglo XIX Abel y Galois demostraron que es imposible obtener solución por radicales de una ecuación de grado mayor que cuatro. En consecuencia, para calcular las raíces de polinomios de grado mayor que cuatro se usan técnicas numéricas. A partir de este momento, la construcción de métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales ha atraído la atención de matemáticos puros y aplicados. En los últimos años se están volviendo a utilizar los polinomios de bajo grado en el plano complejo para estudiar el comportamiento dinámico del operador racional asociado a cualquier método iterativo actuando sobre dicho polinomio.

Los métodos numéricos que tratan de resolver problemas no lineales son, en general, procesos iterativos que partiendo de una aproximación inicial  $x_0$ , construyen una sucesión  $\{x_n\}$  que bajo ciertas condiciones converge a la solución del problema. El análisis de la convergencia puede ser de tres tipos: local, semilocal y global, dependiendo de cuáles sean las condiciones que se impongan; sobre la solución, sobre la aproximación inicial  $x_0$ , o simplemente sobre la función que define la ecuación o sistema que se pretende resolver, respectivamente. En esta memoria abordaremos únicamente el análisis de la convergencia local de los métodos diseñados.

El objetivo general de esta memoria es resolver el problema de encontrar un cero de la función de

naturaleza no lineal  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , es decir, una solución  $\xi \in D$  del problema no lineal

$$f(x) = 0. \quad (1.1)$$

El método más conocido para resolver ecuaciones no lineales es el método de Newton, dado por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Su generalización a sistemas de ecuaciones fue propuesta por Ostrowski [90] y a operadores entre espacios de Banach por L.V.Kantorovič [76]. Los resultados en espacios de Banach han sido profusamente estudiados y extendidos por diferentes autores. En los últimos años, cabe destacar la tesis doctoral de D. González [66] en la que podemos encontrar una extensa bibliografía sobre este tema y otros trabajos como [8, 56, 57]. Todos estos estudios proporcionan herramientas poderosas para investigaciones teóricas y numéricas sobre ecuaciones definidas mediante operadores no lineales.

Otras cuestiones que se plantean sobre el comportamiento de un esquema iterativo son la velocidad de convergencia con la que la sucesión converge a una solución y el error cometido al aproximar esa solución. Existen distintos indicadores para medir la velocidad de convergencia de una sucesión como son el orden de convergencia teórico y la tasa de convergencia numérica. Al estudiar un método iterativo es muy importante considerar dos aspectos: la velocidad de convergencia y el coste computacional del mismo. Los métodos de un sólo paso como, por ejemplo, el método de Newton, Chebyshev, ... pueden ser eficaces por su simplicidad, pero su convergencia es lenta y su utilidad en problemas prácticos es limitada.

Sin embargo, los métodos punto a punto tienen ciertas limitaciones: para que alcancen orden de convergencia  $p$  han de evaluarse las derivadas de la función no lineal  $f$  hasta orden  $p - 1$ . Además, se ha demostrado (ver [111]) que un esquema punto a punto con  $k$  evaluaciones funcionales puede alcanzar, como máximo, orden  $k$ . Por otra parte, Kung y Traub en [84] conjeturaron que el orden de convergencia de cualquier método iterativo sin memoria es, como máximo,  $2^{d-1}$ , donde  $d$  es el número de evaluaciones funcionales por iteración, llamando óptimo al método que alcanza esta cota. De este modo, para generar métodos óptimos de órdenes superiores a dos, era necesario trascender los esquemas punto a punto. Así, los métodos multipunto aparecieron en la literatura a finales del siglo pasado. Podemos encontrar en [95] una interesante recopilación de estos esquemas multipunto.

Generalmente, el aumento del orden de un método iterativo conlleva un aumento del número de evaluaciones funcionales por paso. El índice de eficiencia es una medida del equilibrio entre las dos cantidades: el número de evaluaciones funcionales por iteración y el orden de convergencia del método. Por lo tanto, el orden óptimo de un método con tres evaluaciones funcionales por paso es 4. La familia de métodos de King [79], de la que el método de Ostrowski [91] es un caso particular, el método de Jarratt [74] y algunas familias de métodos multipaso estudiados extensamente en el libro de Traub [111] son algunos de los métodos óptimos de cuarto orden. En los últimos años, como muestra la amplia bibliografía, ha aumentado de nuevo el interés en la búsqueda de métodos multipaso con el fin de conseguir una convergencia de orden óptimo y así una mejor eficiencia.

En general, en esta memoria presentamos los resultados obtenidos en el diseño de métodos eficientes para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales, utilizando la técnica de funciones peso. De forma más esquemática, entre los resultados alcanzados en esta Tesis, destacamos los siguientes:

- Hemos diseñado algoritmos computacionalmente eficientes para la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales a partir de la técnica de funciones peso.

- Se ha procedido al análisis de la convergencia de los métodos diseñados, así como su eficiencia computacional y su comparación con otros existentes.
- Se ha estudiado la dinámica compleja de los métodos diseñados, así como se han utilizado las herramientas que la dinámica compleja proporciona para seleccionar aquellos esquemas más estables dentro de las familias propuestas.
- A partir del operador diferencias divididas en el caso escalar o en el caso vectorial, se han generado métodos iterativos libres de derivadas.
- Se han llevado a cabo pruebas numéricas con diferentes problemas no lineales académicos, tanto escalares como vectoriales, para contrastar sus resultados con los teóricos.
- Se han aplicado esquemas iterativos obtenidos a partir de una familia de métodos de órdenes ocho y dieciséis óptimos, en la determinación de órbitas.

En el Capítulo 2 de esta memoria abordamos los conceptos previos que sustentan el desarrollo de los distintos temas. Entre ellos, cabe destacar los relacionados con los conceptos básicos de métodos iterativos de resolución de problemas no lineales, en una y varias variables; el concepto de método óptimo (basado en la conjetura de Kung y Traub [84]); las técnicas de demostración empleadas para probar el orden de convergencia local, así como también el análisis del operador diferencias divididas  $[x, y; F]$ , y los conceptos básicos de la dinámica compleja y las funciones racionales que surgen de aplicar los operadores asociados a los métodos iterativos sobre polinomios.

En el Capítulo 3 hemos desarrollado métodos iterativos óptimos de órdenes óptimos 4 y 8, con derivadas, para la resolución de ecuaciones no lineales. Comenzamos refiriéndonos inicialmente al estado del arte, para mostrar a continuación los nuevos métodos diseñados, que incluyen amplias familias conocidas pero también nuevos esquemas iterativos. Continuamos con el análisis de la convergencia de dichas clases de métodos, estableciendo algunos casos particulares, que son analizados en detalle. Finalizamos con las pruebas numéricas relacionadas con los esquemas iterativos propuestos. Tras algunas pruebas sobre problemas académicos, se presentan los resultados de modificar el método clásico de Gauss para la determinación de órbitas preliminares, de manera que incluya en su proceso esquemas iterativos de alto orden de convergencia y se presentan los resultados obtenidos al utilizar algunos de los métodos diseñados, así como esquemas conocidos previamente.

El Capítulo 4 está dedicado a los métodos iterativos multipuntos óptimos de tipo Steffensen para resolver ecuaciones no lineales. En el mismo diseñamos clases de métodos que no utilizan evaluaciones funcionales de la derivada de la función no lineal en los distintos pasos del proceso iterativo. Posteriormente, analizamos su convergencia y establecemos las condiciones bajo las cuales dichos esquemas son óptimos, de órdenes 4 y 8. Finalmente, se contrastan los resultados teóricos con algunas pruebas numéricas.

En el Capítulo 5, presentamos métodos iterativos óptimos de alto orden, con operador derivada, para resolver ecuaciones no lineales. Tras el diseño de estos métodos y el análisis de su convergencia, se transforma dicha clase de esquemas iterativos en otra libre de derivadas, manteniendo su optimalidad. Finalmente, se muestran los resultados de algunas pruebas numéricas, que incluyen la determinación de órbitas preliminares de satélites.

El comportamiento dinámico del operador asociado a un método iterativo al ser aplicado sobre la función no lineal a resolver nos proporciona importante información acerca de la estabilidad y fiabilidad de éste. El análisis dinámico de un método iterativo se centra en el estudio del comportamiento asintótico de los puntos fijos (raíces, o no, de la ecuación) del operador, así como en las

cuencas de atracción asociadas a los mismos. En el caso de familias paramétricas de métodos iterativos, el análisis de los puntos críticos libres (puntos donde la derivada del operador se anula, que no son raíces de la función no lineal) nos permite seleccionar los miembros más estables de dichas familias. El análisis de la dinámica compleja de los métodos diseñados para ecuaciones no lineales se lleva a cabo en el Capítulo 6, donde nos centramos en una de las familias de métodos óptimos presentada en capítulos anteriores. Así, una vez establecido el teorema del escalado, analizamos el comportamiento del operador racional asociado al método actuando sobre polinomios cuadráticos, calculando sus puntos fijos y críticos y analizando su estabilidad. Mostramos los planos de parámetros de los diferentes puntos críticos libres y estudiamos algunos casos particulares mediante planos dinámicos concretos en los que significamos algunas regiones atractoras extrañas y órbitas periódicas atractoras.

A continuación, en el Capítulo 7 se presenta la extensión a sistemas de ecuaciones no lineales de la técnica de las funciones peso que nos ha permitido generar los resultados en el caso escalar. Trabajando con dichas funciones peso, pero esta vez con variables matriciales, se diseñan clases de esquemas iterativos de órdenes 4 y cinco para sistemas de ecuaciones no lineales. Posteriormente, se extienden dichas clases de métodos a órdenes superiores, mediante su composición con una modificación del método de Newton, lo que nos permitirá alcanzar órdenes de convergencia tan altos como deseemos. Finalmente, se utiliza el operador diferencias divididas para extender al caso multivariable algunos esquemas iterativos que, a priori, no pueden ser extendidos de forma directa. Todos estos métodos forman parte del estudio numérico que se presenta al final del capítulo, en el que se confirman los resultados teóricos.

Esta memoria termina con un capítulo dedicado a problemas abiertos y a líneas futuras de trabajo. Algunos de estos problemas han surgido como consecuencia de los avances obtenidos.

## Capítulo 2

# Conceptos previos

En este capítulo introduciremos las herramientas matemáticas que utilizaremos a lo largo de toda la memoria. En primer lugar, consideramos los métodos iterativos de punto fijo para determinar las raíces de una ecuación no lineal y de un sistema no lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas. Tras el planteamiento del problema, se exponen resultados clásicos acerca de la convergencia y velocidad de convergencia del método de Newton, introduciendo para ello los términos orden de convergencia, índice de eficiencia e índice de eficiencia computacional. Asimismo, se describe el concepto de método óptimo para la resolución de ecuaciones no lineales. Tras establecer las nociones básicas en el caso multidimensional, presentamos algunos resultados clásicos acerca de la convergencia del método de Newton en  $\mathbb{R}^n$  y se describe la notación a utilizar en las demostraciones de convergencia local de los métodos desarrollados. Además, se introducirá el operador de diferencias divididas multidimensional, que nos permitirá, no sólo diseñar métodos para sistemas, sino también transformar algunos esquemas iterativos, que normalmente no son considerados aplicables a sistemas de ecuaciones no lineales, de manera que ésto sea posible. Por último, se establecen las nociones básicas de dinámica compleja que nos permitirán, en los capítulos correspondientes, no sólo analizar la estabilidad de un método iterativo en particular, sino también establecer cuáles de los distintos métodos de una misma familia son más estables y fiables, desde un punto de vista numérico.

### 2.1. Ecuaciones no lineales

A lo largo de esta memoria consideramos métodos iterativos multipunto para encontrar una raíz simple  $\xi$  de una ecuación no lineal  $f(x) = 0$ , donde  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  para un intervalo abierto  $I$ . La mayoría de los métodos multipunto diseñados en los últimos años son, en mayor o menor medida, modificaciones del método de Newton y con ellos se pretende mejorar el orden local de convergencia y/o el índice de eficiencia del método original.

En los últimos años, se ha desarrollado una gran cantidad de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales. La esencia de estos métodos es la siguiente: si se conoce un entorno suficientemente pequeño que contiene sólo a una raíz  $\xi$  de la ecuación  $f(x) = 0$  y seleccionamos una estimación inicial de la raíz  $x_0$ , lo suficientemente cerca de la raíz buscada  $\xi$ , generamos mediante una función de punto fijo  $g(x)$  una sucesión de iterados  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ , que converge a la raíz  $\xi$ . La convergencia de la sucesión se garantiza con la elección apropiada de la función  $g$  y de la aproximación inicial  $x_0$ .

El método descrito por la función de iteración  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

partiendo de una estimación inicial  $x_0$  dada, incluye una gran cantidad de esquemas iterativos. Éstos difieren entre sí por la forma de definir la función de iteración  $g$ . El dominio de definición de  $g$  también puede elegirse en otros espacios, como  $\mathbb{R}^n$  por ejemplo, lo que da origen a métodos de resolución de sistemas de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, que trataremos en la siguiente sección.

Para el estudio de la convergencia de los métodos iterativos, así como para probar la existencia de la raíz de la ecuación  $f(x) = 0$  se usan extensamente las llamadas funciones contractivas.

**Definición 2.1.1** Consideramos  $\mathbb{R}$  un espacio métrico y  $g(x)$  una función definida en este espacio, que transforma  $\mathbb{R}$  en sí mismo:  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces,  $g$  será una función lipschitziana si existe un número positivo  $L > 0$ , tal que para cualquier par de elementos  $x, y \in I$ , se cumple la desigualdad

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|. \quad (2.2)$$

En particular, las funciones contractivas son funciones lipschitzianas para las cuales  $L$  toma valores  $0 < L < 1$ .

**Definición 2.1.2** Un punto fijo de una función  $g(x)$  es un número real  $\xi$  tal que  $\xi = g(\xi)$  y representa geoméricamente el punto de intersección de la curva  $y = g(x)$  con la recta  $y = x$ .

**Teorema 2.1.1** (Teorema de punto fijo, Kolmogorov y Fomin [82]). Toda función contractiva definida en el espacio métrico completo de los números reales  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un único punto fijo.

En la práctica si  $g$  tiene un punto fijo  $\xi$ , entonces  $f(x) = g(x) - x$  tiene un cero en  $\xi$ . Del mismo modo, si  $f$  tiene una raíz  $\xi$ , entonces  $g(x) = x - f(x)$  tiene un punto fijo en  $\xi$ .

Los siguientes resultados aseguran la existencia y unicidad del punto fijo, bajo ciertas condiciones.

**Teorema 2.1.2** (Existencia y unicidad del punto fijo, [22]). Sea  $g \in C[a, b]$  tal que  $g(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces,

- a)  $g$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ .
- b) Si, además,  $g'$  existe en  $(a, b)$  y  $|g'(x)| \leq L$  tal que  $L \in (0, 1)$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces el punto fijo de  $g$  en  $[a, b]$  es único.

El resultado que sigue establece bajo qué hipótesis está asegurada la convergencia global de (2.1) y proporciona una cota del error.

**Teorema 2.1.3** (Ostrowski [90]) Supongamos que  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es contractiva en el intervalo  $[a, b]$  tal que  $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ . Sea  $L$  la constante de Lipschitz para  $g$  en  $[a, b]$ . Bajo estas condiciones, (2.1) es globalmente convergente en  $[a, b]$  al único punto fijo  $\xi \in (a, b)$  de  $g$ . Además, se tienen las siguientes estimaciones de error:

$$|x_k - \xi| \leq L^k |x_0 - \xi|, \quad \text{para todo } k \geq 0, \quad x_0 \in [a, b] \quad (2.3)$$

$$|x_k - \xi| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|, \quad \text{para todo } k \geq 0, \quad x_0 \in [a, b]. \quad (2.4)$$

*Observación:* De la cota del error (2.3) se deduce que (2.1) converge más rápidamente cuanto más próxima a cero es la cota  $L$  de la derivada.

Un concepto muy importante de los métodos iterativos es su orden de convergencia, que proporciona una medida de la velocidad de convergencia de la sucesión de iterados.

**Definición 2.1.3** Sea  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  una sucesión de números reales tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ . La convergencia se llama:

- a) lineal, si existen  $M$ ,  $0 < M < 1$  y  $k_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $|x_{k+1} - \xi| \leq M|x_k - \xi|$ , para todo  $k \geq k_0$ ;
- b) de orden  $p$ , si existen  $M > 0$  y  $k_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $|x_{k+1} - \xi| \leq M|x_k - \xi|^p$ , para todo  $k \geq k_0$ .

Denotamos por  $e_k = x_k - \xi$  el error de la  $k$ -ésima iteración. La ecuación  $e_{k+1} = Me_k^p + O(e_k^{p+1})$ , se llama ecuación del error, donde  $p$  es el orden de la convergencia.

**Teorema 2.1.4** (Convergencia local del método de punto fijo, Ostrowski [90]). Sean  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\rho > 0$  y  $g : [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \rightarrow \mathbb{R}$  una función contractiva en el intervalo  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ . Sea  $L \in (0, 1)$  la constante de Lipschitz para  $g$  en  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ , y supongamos que  $|x_0 - g(x_0)| \leq (1 - L)\rho$ . Entonces,

- i) existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ , tal que  $\xi$  es punto fijo de  $g(x)$ , es decir,  $g(\xi) = \xi$ , y además,  $|x_k - \xi| \leq L^k \rho$  para todo  $k \geq 0$ ,
- ii)  $\xi$  es la única solución en el intervalo  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$  de  $g(x) = x$ .

Sea la función  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces continuamente derivable en el intervalo  $I = [a, b]$  y  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Si la ecuación  $f(x) = 0$  tiene una única solución  $x = \xi$  en  $(a, b)$  y la función  $g(x)$  es continua en un entorno de  $x = \xi$ , entonces la ecuación

$$g(x) = x - \varphi(x)f(x) \quad (2.5)$$

también tiene un punto fijo en  $x = \xi$ , para cualquier función  $\varphi \in C^1([a, b])$ .

Se puede determinar una función  $\varphi(x)$  de modo que la sucesión generada por (2.5) converja a  $\xi$  cuadráticamente. A vista del Teorema 2.1.4, parece natural pedir que  $g \in C^2[\xi - \rho, \xi + \rho]$  (con  $\rho > 0$  tal que  $[\xi - \rho, \xi + \rho] \subseteq [a, b]$ ) y  $g'(\xi) = 0$ . Entonces, derivando (2.5) obtenemos

$$g'(x) = 1 - \varphi(x)'f(x) - \varphi(x)f'(x)$$

y teniendo en cuenta que  $f(\xi) = 0$ , deducimos que  $\varphi$  debe satisfacer la condición:  $\varphi(\xi)f'(\xi) = 1$ . Si  $f'(x) \neq 0$  para cualquier  $x \in [a, b]$ , un enfoque razonable es suponer que  $\varphi(x) = \frac{1}{f'(x)}$  y entonces, el procedimiento natural para conseguir la convergencia cuadrática será

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Esta fórmula iterativa se conoce como el método de Newton.

Dicho método tiene una interpretación geométrica sencilla, que en realidad está en el origen histórico del mismo. En efecto, en cada etapa  $k$ , el valor  $x_{k+1}$  corresponde a la abscisa del punto de corte con el eje  $OX$  de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x_k, f(x_k))$ . Esta interpretación geométrica justifica que este método reciba también el nombre de método de la tangente.

Una condición para conseguir convergencia de orden dos en el método (2.6) es que el valor de la estimación inicial esté suficientemente cerca de la solución  $\xi$ . El siguiente resultado especifica explícitamente un intervalo en el que puede ser tomada la primera aproximación y describe las condiciones que garantizan la convergencia cuadrática del método (2.6).

Como ya se ha mencionado en la Introducción, la convergencia de un método iterativo se puede analizar de manera local, semilocal o global, en función de si las condiciones se imponen sobre la solución, sobre la aproximación inicial o sobre la función no lineal, respectivamente. A continuación, mostramos algunos resultados clásicos sobre la convergencia de Newton desde los tres puntos de vista, cuyas pruebas encontraremos en textos clásicos como el de Ortega y Rheinboldt [89] o el de Ostrowski [91] en espacios más generales, como  $\mathbb{R}^n$  o espacios de Banach.

**Teorema 2.1.5** (Convergencia local del método de Newton [22]). *Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^2([a, b])$  en un entorno del número  $\xi$  para el cual  $f(\xi) = 0$ ,  $f'(\xi) \neq 0$ . Si  $x_0$  se selecciona suficientemente cerca de  $\xi$ , entonces, existe un  $\delta$  tal que las iteraciones del método de Newton generan una sucesión  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  que converge a  $\xi$  para cualquier aproximación inicial  $x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$  con orden de convergencia  $p = 2$ :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\xi - x_{k+1}|}{(\xi - x_k)^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right|.$$

El siguiente resultado clásico proporciona las condiciones (conocidas como condiciones de Newton-Kantorovich), bajo las cuales está asegurada la convergencia semilocal del método de Newton en espacios de Banach. Esta generalización es muy útil, ya que puede utilizarse tanto en el caso real como en  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.1.6** (Convergencia semilocal del método de Newton) *Sea  $F : \Omega_0 \subset X \rightarrow Y$  un operador entre espacios de Banach dos veces continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío  $\Omega_0$ . Supongamos que se verifican las condiciones*

- $\|F'(x_0)^{-1}\| \leq \beta$ ,
- $\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$ ,
- $\|F''(x)\| \leq k$ , para todo  $x \in \Omega_0$ ,
- $k\beta\eta \leq \frac{1}{2}$ ,
- $B(x_0, s^* - s_0) \subseteq \Omega_0$ , siendo  $s^* = s_0 + \frac{1 - \sqrt{1 - 2k\beta\eta}}{k\beta}$ .

*Entonces, la sucesión de iterados generada por el método de Newton converge a la solución  $\xi$  verificándose que  $x_n, \xi \in B(x_0, s^* - s_0)$  para todo  $n$ .*

A continuación mostraremos un resultado clásico sobre la convergencia global del método de Newton en el intervalo  $[a, b]$ . Se tiene:

**Teorema 2.1.7** (Convergencia global del método de Newton). Sea  $f \in C^2([a, b])$  tal que verifica

i)  $f(a)f(b) < 0$ ,

ii)  $f'(x) \neq 0$ , para  $x \in [a, b]$ ,

iii)  $f''(x) \leq 0$  ó  $f''(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ ,

iv) Si  $c$  denota el extremo de  $[a, b]$  para el que  $|f'(x)|$  es más pequeño, entonces

$$\left| \frac{f(c)}{f'(c)} \right| \leq b - a$$

Entonces, el método de Newton converge a la única solución  $\xi \in [a, b]$  de  $f(x) = 0$ , para cualquier elección de  $x_0 \in [a, b]$ . Además, la convergencia es al menos cuadrática.

Nótese que la expresión iterativa de Newton (2.6) es aplicable no sólo para encontrar las raíces reales de una ecuación  $f(x) = 0$ , sino también sus raíces complejas. Partiendo de la base de que es posible definir la derivada sobre funciones de variable compleja del mismo modo que se realiza con funciones de variable real, el método de Newton se puede expandir al campo complejo. Profundizaremos en estos aspectos en la Sección 2.3, en la que introduciremos los conceptos de dinámica compleja básicos a utilizar en esta memoria.

Por otra parte, para comparar los métodos iterativos entre sí, es ampliamente utilizado el índice de eficiencia, introducido por Ostrowski en [90] como  $I = p^{1/d}$  donde  $p$  es el orden de convergencia y  $d$  el número de evaluaciones funcionales por iteración. En este sentido, Kung y Traub en su conjetura (véase [84]) establecen cuál es el mayor orden de convergencia que puede alcanzar un esquema iterativo multipunto sin memoria. Los esquemas multipunto que alcanzan este límite se denominan métodos óptimos.

**Conjetura de Kung-Traub:** El orden de convergencia de cualquier método multipaso sin memoria no puede superar  $2^{d-1}$  (llamado orden óptimo), donde  $d$  es el número de evaluaciones funcionales por iteración, con índice de eficiencia  $2^{(d-1)/d}$  (llamado índice óptimo).

Por otra parte, Traub en [111] utiliza el índice operacional definido como  $IO = p^{1/op}$ , donde  $op$  es el número de operaciones (producto/cociente) por iteración. Este índice mide la complejidad de la expresión iterativa, que es un factor a tener en cuenta, sobre todo en sistemas de ecuaciones no lineales.

El análisis de la convergencia de los métodos diseñados en esta memoria se llevará a cabo fundamentalmente mediante desarrollos de Taylor. Si bien existen otras técnicas de demostración, los desarrollos de Taylor permiten determinar el orden de convergencia local de manera relativamente sencilla.

## 2.2. Sistemas de ecuaciones no lineales

Consideremos el problema de encontrar un cero real de una función  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , esto es, una solución  $\xi \in D$  del sistema no lineal de ecuaciones  $F(x) = 0$ . Así,  $F$  es una función vectorial de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  que tiene como funciones coordenadas  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T. \quad (2.7)$$

Los conceptos y la demostración de los resultados que se muestran a continuación pueden encontrarse en los textos de Ortega y Rheinboldt [89] y [98].

La búsqueda de la solución del sistema  $F(x) = 0$  es un problema mucho más complejo que el de encontrar una solución de una ecuación escalar  $f(x) = 0$ . Al igual que en el caso escalar, podemos transformar el sistema original en un sistema equivalente de la forma:

$$x = G(x), \quad (2.8)$$

para una determinada función vectorial  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cuyas funciones coordenadas las vamos a denotar por  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Partiendo de una aproximación inicial  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$ , podemos generar una sucesión de vectores de  $\mathbb{R}^n$  mediante la fórmula iterativa

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

donde  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$ .

Decimos que el proceso es convergente si  $\{x^{(k)}\} \rightarrow \xi$ , cuando  $k \rightarrow \infty$  donde  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$  será, bajo ciertas condiciones de la función  $G$ , una solución del sistema  $x = G(x)$ . Al vector  $\xi$  se le llama punto fijo de la función  $G$  y al algoritmo descrito por la ecuación (2.9) método de punto fijo.

Un concepto muy importante de los métodos iterativos es su orden de convergencia, que proporciona una medida de la velocidad de convergencia de la sucesión de iterados. A continuación mostramos la extensión al caso multivariable de los conceptos relacionados con el orden de convergencia.

**Definición 2.2.1** Sea  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  una sucesión de vectores de  $\mathbb{R}^n$  tales que tienden a la solución del sistema no lineal  $\xi$  cuando  $k$  tiende a infinito. La convergencia de dicha sucesión se dice que es

i) lineal, si existen  $M$ ,  $0 < M < 1$  y  $k_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $\|x^{(k+1)} - \xi\| \leq M\|x^{(k)} - \xi\|$  para todo  $k \geq k_0$ ;

ii) de orden  $p$ , si existen  $M > 0$  y  $k_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $\|x^{(k+1)} - \xi\| \leq M\|x^{(k)} - \xi\|^p$  para todo  $k \geq k_0$ .

Denotamos por  $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$  al error en la iteración  $k$ -ésima y llamamos ecuación del error a la expresión  $e^{(k+1)} = Le^{(k)p} + O(e^{(k)p+1})$ , donde  $L$  es una función  $p$ -lineal  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , y  $p$  es el orden de convergencia del método.

Con el fin de comprobar numéricamente los resultados teóricos, Weerakoon y Fernando introdujeron en [114] el concepto de orden de convergencia computacional (COC) para ecuaciones, ampliamente utilizado en la literatura.

$$p \approx \rho = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - \xi\|) / (\|x^{(k)} - \xi\|)}{\ln(\|x^{(k)} - \xi\|) / (\|x^{(k-1)} - \xi\|)}. \quad (2.10)$$

Uno de los principales inconvenientes del COC es que utiliza la solución exacta del sistema no lineal, lo que en la práctica resulta inviable. Para evitar esto, en [36] los autores introdujeron el concepto de orden de convergencia computacional aproximado, ACOC, válido tanto para ecuaciones como para sistemas, obtenido a partir de la siguiente expresión

$$p \approx \rho = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|) / (\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|) / (\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|)}. \quad (2.11)$$

Con el fin de comparar los diferentes métodos, utilizaremos (al igual que en el caso unidimensional) el índice de eficiencia,  $IE = p^{1/d}$  (ver [90]), donde  $p$  es el orden de convergencia y  $d$  es el número de evaluaciones funcionales que requiere el método, por iteración. Éste es el índice más utilizado, pero no es el único. Utilizaremos también el llamado índice de eficiencia computacional  $IEC = p^{1/(d+op)}$  (véase [33]), donde  $op$  es el número de operaciones (productos y cocientes) por iteración. Observamos que cada iteración del método de Newton (2.14) se reduce al cálculo del vector  $h = x^{(k+1)} - x^{(k)}$  correspondiente y éste no es más que la solución del sistema de ecuaciones lineales:  $F'(x^{(k)})h + F(x^{(k)}) = 0$ . Recordamos que el número de productos y cocientes que necesitamos para resolver un sistema lineal, mediante la eliminación de Gauss, es  $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$  donde  $n$  es el tamaño del sistema.

A continuación daremos algunas definiciones de términos utilizados frecuentemente más adelante.

**Definición 2.2.2** Decimos que la función  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es Fréchet diferenciable en un punto  $x$  en el interior de  $\Omega$  si existe una aplicación lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que verifique, para cualquier  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|F(x+h) - F(x) - A(h)\| \quad (2.12)$$

donde  $\|\cdot\|$  norma vectorial en  $\mathbb{R}^n$ . La aplicación lineal  $A$  es una matriz  $n \times n$  que depende del punto  $x$ , es decir,  $A = A(x)$ , y recibe el nombre de derivada de Fréchet de  $F$  en  $x$ , denotándose por  $F'(x)$ .

Consideremos de nuevo que las funciones coordenadas de  $F$ ,  $f_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$  tienen derivadas parciales primeras continuas en  $\Omega$ . Denotamos por  $a_{ij}(x)$  el  $i, j$ -ésimo elemento de  $A$ . Dado que la convergencia en norma implica la convergencia componente a componente, podemos reescribir (2.12) con  $h = te_j$ , donde  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  es el  $j$ -ésimo vector unitario,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} |f_i(x + te_j) - f_i(x) - ta_{ij}| = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq n. \quad (2.13)$$

Sin embargo,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_i(x + te_j) - f_i(x)) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ . Por lo tanto, (2.13) implica que  $a_{ij}(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Así,  $A$  es una matriz  $n \times n$  cuyas componentes son las derivadas parciales primeras de la función  $F$  en  $x$ . Esta matriz es conocida como matriz Jacobiana y la denotamos por  $F'(x)$ .

Teniendo en cuenta que el concepto de punto fijo se extiende directamente al caso  $n$ -dimensional, diremos que una función  $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tiene un punto fijo  $\xi \in \Omega$  si  $G(\xi) = \xi$ .

Los siguientes resultados establecen no sólo las condiciones bajo las cuales el método iterativo (2.9) es convergente sino también de la unicidad del punto fijo, así como algunas propiedades técnicas necesarias para su demostración. Las pruebas de estos resultados pueden encontrarse en textos clásicos como el de Ortega y Rheinboldt [89].

**Lema 2.2.1** ([92]) Supongamos que  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable Fréchet en un conjunto convexo  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$  con funciones coordenadas  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces, para cualesquiera  $x, y \in \Omega_0$ , se verifica:

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'(x + t(y-x))(y-x) dt.$$

**Teorema 2.2.1** ([92]). Sea  $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una contracción sobre un conjunto cerrado  $\Omega_0 \subset \Omega$  tal que  $G(\Omega_0) \subset \Omega_0$ . Entonces, podemos afirmar que  $G$  tiene un único punto fijo  $\xi \in \Omega_0$ . Por otro lado, para cualquier  $x^{(0)} \in \Omega_0$ , la sucesión  $\{x^{(k)}\}$  definida por (2.9) converge a  $\xi$ . Además el error cometido en la  $k$ -ésima iteración está acotado por la desigualdad  $\|x^{(k)} - \xi\| \leq \frac{L}{1-L} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$  y además,  $\|x^{(k)} - \xi\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$  donde  $L$  es la misma constante de Lipschitz de  $G$ .

**Teorema 2.2.2** Si  $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una contracción sobre un espacio cerrado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , el método de punto fijo converge hacia una solución de  $F(x) = 0$ .

*Observación:* Si  $G$  es una contracción de constante  $L$ , designando por  $\xi$  a su punto fijo, se tiene que:

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| = \|G(x^{(k)}) - G(\xi)\| \leq L \|x^{(k)} - \xi\|$$

por lo que el método presenta al menos convergencia lineal.

**Lema 2.2.2** Supongamos que  $G : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua. Entonces,  $\left\| \int_a^b G(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|G(t)\| dt$ .

**Teorema 2.2.3** Sean las funciones  $G(x)$  y  $G'(x)$  continuas en el dominio  $\Omega$  (convexo, cerrado y acotado), cumpliéndose la desigualdad

$$\|G'(x)\| = \max_{x \in \Omega} \left( \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g^i(x)}{\partial x_j} \right| \right) \leq L < 1$$

donde  $L$  es una constante. Si las aproximaciones sucesivas  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ , donde  $k = 0, 1, 2, \dots$  están contenidas en  $\Omega$ , el proceso iterativo converge y el vector límite  $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$  es la única solución del sistema  $x = G(x)$  en el dominio  $\Omega$ .

De manera análoga que al caso unidimensional, buscamos métodos de orden de convergencia al menos dos, lo que nos lleva a buscar una nueva forma de aproximar  $\xi$ . Si denotamos por  $e^{(k)} = \xi - x^{(k)}$  y hacemos uso del desarrollo de Taylor hasta orden uno, asumiendo que  $F$  es diferenciable Fréchet, obtenemos que:  $0 = F(\xi) \approx F(x^{(k)}) + e^{(k)} F'(x^{(k)})$  con  $F'(x^{(k)})$  no singular, de donde  $e^{(k)} \approx \xi - x^{(k)} = -[F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)})$  y, por tanto,  $\xi \approx x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)})$ .

De esta manera, surge la expresión iterativa del método de Newton,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}). \quad (2.14)$$

Éste método, de segundo orden de convergencia, constituye uno de los procedimientos básicos para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. En fechas recientes se han propuesto una serie de métodos, variantes del esquema de Newton, con el objetivo de mejorar el orden de convergencia de éste. En esta memoria nosotros hemos diseñado algunos métodos, con órdenes de convergencia cuatro y cinco, que pretendemos comparar con métodos ya conocidos y estudiados de orden igual a los nuestros, pues los resultados de ésta comparación nos darán idea de cuán robustos y estables son nuestros métodos.

Es sencillo mostrar que el método de Newton se puede considerar como un método de punto fijo

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) = G(x^{(k)}). \quad (2.15)$$

De la expresión (2.15) podemos deducir la siguiente interpretación geométrica: cada componente  $f_i$  de  $F$  puede aproximarse por  $f_i(x) \approx f_i(x^{(k)}) + f'_i(x^{(k)})(x - x^{(k)})$ , expresión que describe el hiperplano tangente de  $f_i$  en  $x^{(k)}$  y por tanto estamos considerando el iterado  $x^{(k+1)}$  como la intersección de los  $n$  hiperplanos definidos por las componentes de  $F$  con el hiperplano  $x = 0$ .

Respecto a la convergencia local del método de Newton, Ortega [92] establece los siguientes resultados previos al teorema de convergencia local del método de Newton.

**Lema 2.2.3** (Banach) Sea  $A$  una matriz no singular. Supongamos que  $B$  es una matriz tal que  $\|A^{-1}\| \|B\| < 1$ . Entonces,  $A + B$  es no singular, y

$$\|(A + B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|}. \quad (2.16)$$

**Teorema 2.2.4** Supongamos que  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable Fréchet en  $\xi \in \Omega$  tal que  $F(\xi) = 0$ . Sea  $A : \Omega_0 \subset \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  una aplicación definida en el entorno abierto  $\Omega_0$  de  $\xi$ , continua en  $\xi$  y con imagen en el conjunto de matrices reales de orden  $n$ . Supongamos, además, que  $A(\xi)$  es no singular. Entonces, existe la bola cerrada  $\Omega^* = \{x \in \Omega_0 / \|x - \xi\| \leq \delta\} \subset \Omega_0$ ,  $\delta > 0$  sobre la cual la aplicación  $G : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$G(x) = x - [A(x)]^{-1} F(x)$$

está bien definida en un entorno de  $\xi$  y es diferenciable en  $\xi$ , verificandose:

$$G'(\xi) = I - [A(\xi)]^{-1} F'(\xi).$$

**Teorema 2.2.5** (Ostrowski) Supongamos que  $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable Fréchet en el punto fijo  $\xi$  en el interior de  $\Omega$  y que  $\rho(G'(\xi)) = \sigma < 1$ . Entonces,  $\xi$  es punto de atracción de  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

*Observación:* Un caso especial, en el que  $\rho(G'(\xi)) = 0$ , es cuando  $A(x) = F'(x)$ . Esto corresponde a la iteración  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)})$  para  $k = 0, 1, \dots$  que es precisamente el método de Newton.

**Teorema 2.2.6** Supongamos que  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable Fréchet en el entorno abierto  $\Omega_0 \subset \Omega$  del punto  $\xi \in \Omega_0$  para el que  $F(\xi) = 0$ . Además, supongamos que  $F'(x)$  es continua en  $\xi$  y que  $F'(\xi)$  es no singular. Entonces,  $\xi$  es un punto de atracción del método de Newton.

**Lema 2.2.4** Supongamos que  $F : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $F$ -diferenciable en el conjunto convexo  $\Omega_0 \subset \Omega$  y supongamos que existe una constante  $\alpha \geq 0$ , tal que  $F'(x)$  satisface

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq \alpha \|u - v\| \quad \text{para todo } u, v \in \Omega_0.$$

Entonces, para cualesquiera  $x, y \in \Omega_0$

$$\|F(y) - F(x) - F'(x)(y - x)\| \leq \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2.$$

Los resultados anteriores permiten establecer el siguiente teorema de convergencia.

**Teorema 2.2.7** (Convergencia local del método de Newton) *Supongamos que las hipótesis del Teorema 2.2.6 se satisfacen. Entonces,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \xi\|}{\|x^{(k)} - \xi\|} = 0. \quad (2.17)$$

Además, si  $F'(x)$  verifica la condición de Lipschitz

$$\|F'(x) - F'(\xi)\| \leq \alpha \|x - \xi\|, \quad (2.18)$$

para todo  $x$  en algún entorno de  $\xi$ , entonces, existe una constante  $c$  positiva tal que

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \leq c \|x^{(k)} - \xi\|^2. \quad (2.19)$$

para todo  $k \geq k_0$ , donde  $k_0$  depende de la elección de  $x_0$ .

En los capítulos siguientes, diseñaremos esquemas iterativos, variantes del método de Newton en mayor o menor medida, de los que estudiaremos su orden de convergencia. Algunos autores (véase, por ejemplo, [36]) utilizan el siguiente resultado para probar el orden de convergencia local de métodos iterativos para sistemas.

**Teorema 2.2.8** (Traub, [111]) *Sea  $G(x)$  una función de punto fijo continuamente diferenciable hasta orden  $p$ . El método iterativo  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$  es de orden  $p$  si*

- i)  $G(\xi) = \xi$ ;
- ii)  $\frac{\partial^{(k)} g_i(\xi)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}} = 0$ , para todo  $1 \leq k \leq p-1$ ,  $1 \leq i, j_1, \dots, j_k \leq n$ ;
- iii)  $\frac{\partial^{(p)} g_i(\xi)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_p}} \neq 0$ , al menos para un valor de  $i, j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, n\}$

donde  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , son las funciones coordenadas de  $G$ .

En esta memoria probaremos la convergencia local de los métodos iterativos diseñados mediante la técnica del desarrollo en serie de Taylor en varias variables. A continuación, introducimos la notación necesaria para estas demostraciones (véase [30]).

Sea  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  suficientemente Fréchet diferenciable en  $\Omega$ . La  $q$ -ésima derivada de  $F$  en  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $q \geq 1$ , es la función  $q$ -lineal  $F^{(q)}(u) : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^n$ . Es fácil observar que

1.  $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_{q-1}, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .
2.  $F^{(q)}(u)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q)$ , para toda permutación  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, q\}$ .

Partiendo de las propiedades anteriores podemos introducir la siguiente notación:

$$(a) F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) = F^{(q)}(u)v_1 \dots v_q,$$

$$(b) F^{(q)}(u)v^{q-1}F^{(p)}v^p = F^{(q)}(u)F^{(p)}v^{q+p-1}.$$

Por otro lado, para  $\xi + h \in \mathbb{R}^n$  acotado en un entorno de la solución  $\xi$  de  $F(x) = 0$ , podemos aplicar el desarrollo de Taylor y suponiendo que la matriz Jacobiana  $F'(\xi)$  sea no singular, tenemos

$$F(\xi + h) = F'(\xi) \left[ h + \sum_{q=2}^{p-1} C_q h^q \right] + O(h^p), \quad (2.20)$$

donde  $C_q = \frac{1}{q!} [F'(\xi)]^{-1} F^{(q)}(\xi)$ ,  $q \geq 2$ . Observamos que  $C_q h^q \in \mathbb{R}^n$  ya que  $F^{(q)}(\xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y  $[F'(\xi)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Además, podemos expresar  $F'(\xi + h)$  como:

$$F'(\xi + h) = F'(\xi) \left[ I + \sum_{q=2}^{p-1} q C_q h^{q-1} \right] + O(h^p), \quad (2.21)$$

donde  $I$  es la matriz identidad. Por lo tanto,  $q C_q h^{q-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

### 2.2.1. Análisis del operador $[x, y; F]$

La extensión a sistemas de ecuaciones de algunos de los métodos iterativos diseñados para ecuaciones necesita de la definición del operador diferencia dividida en  $\mathbb{R}^n$ . Dicho operador ha sido utilizado por Grau et al. en [67], donde reescribe la expresión iterativa del esquema de Ostrowski de manera que puede aplicarse a sistemas de ecuaciones no lineales. En esta memoria, el operador diferencia dividida se empleará en el Capítulo 7 para extender a sistemas de ecuaciones esquemas iterativos no directamente aplicables al caso multidimensional, así como para diseñar métodos iterativos para resolver sistemas no lineales.

Consideremos en adelante el sistema no lineal de ecuaciones  $F(x) = 0$ , donde  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es suficientemente diferenciable Fréchet en un conjunto abierto y convexo  $D$ .

Recordamos a continuación la definición de diferencia dividida de  $F$  en  $\mathbb{R}^n$ , proporcionada por Ortega y Rheinboldt en [89], como la aplicación  $[\cdot, \cdot; F] : D \times D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tal que satisface  $[x, y; F](x - y) = F(x) - F(y)$ ,  $\forall x, y \in D$ .

Dado que el análisis de la convergencia local que llevamos a cabo en nuestros métodos está basado en los desarrollos en serie de Taylor en torno a la solución, necesitamos obtener el correspondiente desarrollo del operador diferencias divididas. Para conseguirlo, utilizamos la fórmula de Genocchi-Hermite (ver [71]),

$$[x, x + h; F] = \int_0^1 F'(x + th) dt$$

y, desarrollando  $F'(x + th)$  en serie de Taylor en torno a  $x$ , obtenemos

$$\int_0^1 F'(x + th) dt = F'(x) + \frac{1}{2} F''(x)h + \frac{1}{6} F'''(x)h^2 + O(h^3). \quad (2.22)$$

Definiendo  $e = x - \xi$  y asumiendo que  $F'(\xi)$  es no singular, tenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= F'(\xi)[e + C_2e^2 + C_3e^3 + C_4e^4] + O(e^5), \\ F'(x) &= F'(\xi)[I + 2C_2e + 3C_3e^2 + 4C_4e^3] + O(e^4), \\ F''(x) &= F'(\xi)[2C_2 + 6C_3e + 12C_4e^2] + O(e^3), \\ F'''(x) &= F'(\xi)[6C_3 + 24C_4e] + O(e^2), \end{aligned}$$

donde  $I$  denota a la matriz identidad y  $C_q = \frac{1}{q!} [F'(\xi)]^{-1} F^{(q)}(\xi)$ ,  $q \geq 2$ .

Reemplazando estos desarrollos en la fórmula de Genocchi-Hermite, (2.22), y denotando al segundo punto de la diferencia dividida por  $y = x + h$  y a su error respecto a la solución  $\xi$  por  $e_y = y - \xi$ ,

$$[x, y; F] = F'(\xi)[I + C_2(e_y + e) + C_3e^2] + O(e^3).$$

En particular, si  $y$  es la aproximación a la solución proporcionada por el método de Newton (es decir,  $h = x - y = [F'(x)]^{-1}F(x)$ ), obtenemos

$$[x, y; F] = F'(\xi)[I + C_2e + (C_2^2 + C_3)e^2] + O(e^3).$$

## 2.3. Conceptos básicos de la dinámica compleja

Una línea de investigación que está apareciendo con fuerza en la actualidad es el estudio de los métodos iterativos aplicando técnicas de la dinámica discreta. Todo método iterativo diseñado para resolver una ecuación no lineal tiene asociado un operador de punto fijo. El comportamiento dinámico de dicho operador al ser aplicado sobre la función no lineal a resolver nos proporciona importante información acerca de la estabilidad y fiabilidad del método iterativo. El análisis dinámico de un método iterativo se centra en el estudio del comportamiento asintótico de los puntos fijos (raíces, o no, de la ecuación) del operador, así como en las cuencas de atracción asociadas a los mismos. En el caso de familias paramétricas de métodos iterativos, el análisis de los puntos críticos libres (puntos donde la derivada del operador se anula que no son raíces de la función no lineal) nos permite seleccionar los miembros más estables de dichas familias. Algunos de los trabajos existentes en la literatura relacionados con este enfoque son [6], [41] y [86], entre otros.

A continuación introducimos los conceptos básicos de dinámica compleja empleados en el análisis dinámico de los métodos iterativos. En los textos [50] y [17], entre otros, puede detallarse y ampliarse extensamente esta información.

Dada una función racional  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , donde  $\hat{\mathbb{C}}$  es la esfera de Riemann, la órbita de un punto  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  está definida como:

$$\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}.$$

Estamos interesados en el estudio del comportamiento asintótico de las órbitas dependiendo de la condición inicial  $z_0$ , analizado en el plano dinámico de la función racional  $R$  definida por los diferentes métodos iterativos.

Para obtener estos planos dinámicos, debemos clasificar en primer lugar los puntos fijos o periódicos del operador racional  $R$ . Un punto  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  es llamado *punto fijo* si satisface a  $R(z_0) = z_0$ . Si el punto fijo no es solución de la ecuación, recibe el nombre de punto fijo extraño. Un *punto periódico*  $z_0$  de período  $p > 1$  es un punto tal que  $R^p(z_0) = z_0$  y  $R^k(z_0) \neq z_0$ ,  $k < p$ . Un *punto pre-periódico* es un punto  $z_0$  que no es periódico pero existe un  $k > 0$  tal que  $R^k(z_0)$  es periódico. Un *punto crítico*  $z_0$  es un punto donde la derivada de la función racional se anula,  $R'(z_0) = 0$ .

Por otro lado, un punto fijo  $z_0$  es llamado *atractor* si  $|R'(z_0)| < 1$ , *super-atractor* si  $|R'(z_0)| = 0$ , *repulsor* si  $|R'(z_0)| > 1$  y *parabólico* si  $|R'(z_0)| = 1$ . La estabilidad de una órbita periódica es definida por la magnitud (menor que 1 o no) de  $|R'(z_1) \dots R'(z_p)|$ , donde  $\{z_1, \dots, z_p\}$  son los puntos de la órbita de período  $p$ .

La *cuenca de atracción* de un atractor  $\bar{z}$  se define como el conjunto de pre-imágenes de cualquier orden:

$$\mathcal{A}(\bar{z}) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow \bar{z}, n \rightarrow \infty\}.$$

El conjunto de puntos  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  de tal manera que sus familias  $\{R^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  son normales en algún entorno  $U(z)$ , es el *conjunto de Fatou*,  $\mathcal{F}(R)$ , es decir, el conjunto de Fatou compuesto por los puntos cuyas órbitas tienen un atractor (punto fijo, órbita periódica o infinito). Su complementario en  $\hat{\mathbb{C}}$  es el *conjunto de Julia*,  $\mathcal{J}(R)$ ; por lo tanto el conjunto de Julia incluye todos los puntos fijos y las órbitas periódicas repulsoras y sus pre-imágenes. Esto significa que la cuenca de atracción de cualquier punto fijo pertenece al conjunto de Fatou. Por el contrario, las fronteras de las cuencas de atracción componen el conjunto de Julia.

El siguiente resultado clásico, que se debe a Fatou y Julia, incluye tanto a los puntos periódicos (de cualquier periodo) como a los puntos fijos, considerados como puntos periódicos de periodo unidad.

**Teorema 2.3.1 (Fatou, Julia)** *Sea  $R$  una función racional. Las cuencas de atracción inmediatas de cada punto periódico atractor contienen al menos un punto crítico.*

El método de Newton ha sido profusamente estudiado en todos los ámbitos, incluido el de la dinámica compleja. Véanse, por ejemplo, [20] y [58]. Teniendo en cuenta la expresión iterativa del método de Newton, su operador racional asociado, al actuar el esquema iterativo sobre un polinomio cuadrático genérico  $p(z) = z^2 + c$  es:

$$N_p(z) = \frac{z^2 - c}{2z}. \quad (2.23)$$

Notemos que los únicos puntos fijos del operador son las raíces del polinomio, por lo que podemos afirmar que el operador  $N_p(z)$  no tiene puntos fijos extraños. En la Figura 2.1 podemos observar las cuencas de atracción de la función racional asociada al método de Newton sobre el polinomio  $p(z) = z^2 - 1$ . Schröder y Cayley ya demostraron a finales del siglo XIX (ver [23] y [100], por ejemplo) que, en el caso de los polinomios cuadráticos, las cuencas de atracción de las raíces son los semiplanos que las contienen y están separados por la mediatriz entre ambas, que constituye el conjunto de Julia.

Posteriormente, en 1918, Fatou y Julia comenzaron su estudio sistemático de la iteración de funciones analíticas, estableciendo las bases de lo que hoy se conoce como dinámica compleja (véanse [59] y [75]).

### 2.3.1. Clases de conjugación

Las clases de conjugación nos permiten simplificar nuestros cálculos, trabajando simultáneamente con todos los polinomios cuadráticos.

**Definición 2.3.1** *Sean  $f$  y  $g$  dos funciones de la esfera de Riemann en sí misma. Una conjugación analítica entre  $f$  y  $g$  es un difeomorfismo  $h$  de la esfera de Riemann en sí misma tal que  $h \circ f = g \circ h$ .*

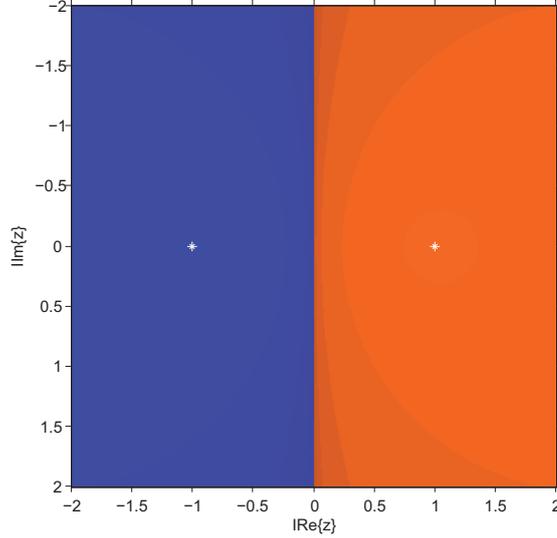


Figura 2.1: Plano dinámico asociado al método de Newton sobre  $p(z) = z^2 - 1$

En los siguientes resultados se prueba que las funciones racionales asociadas al método de Newton actuando sobre dichos polinomios son analíticamente conjugadas y así, su dinámica asociada es equivalente. El siguiente teorema, debido a Curry, Garnett y Sullivan, permite reducir el estudio dinámico de un operador racional asociado a un método iterativo (en este caso se trata del método de Newton) sobre determinadas familias de funciones a casos más simples.

**Teorema 2.3.2 (Teorema del Escalado, [42])** *Sea  $f(z)$  una función analítica en la esfera de Riemann y  $T(z) = \alpha z + \gamma$  una aplicación afín, con  $\alpha \neq 0$ . Si  $g(z) = (f \circ A)(z)$ , entonces  $(T \circ N_g \circ T^{-1})(z) = N_f(z)$ , es decir,  $N_f$  es analíticamente conjugada a  $N_g$  mediante  $T$ .*

**Teorema 2.3.3** *Sea  $q(z) = a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ , con  $a_1 \neq 0$ , un polinomio cuadrático genérico con raíces simples. Entonces, mediante una transformación afín de coordenadas  $p(z)$  se reduce a  $q(z) = z^2 + c$ , donde  $c = 4a_1 a_3 - a_2^2$ . Esta aplicación afín proporciona una conjugación entre  $N_q$  y  $N_p$ .*

De hecho, un resultado clásico prueba que los conjuntos de Julia y Fatou de dos funciones racionales conjugadas vía una transformación de Möbius son asimismo conjugados.

**Definición 2.3.2** *Sean  $R_1$  y  $R_2$  dos funciones racionales  $R_i : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ,  $i = 1, 2$ . Decimos que  $R_1$  y  $R_2$  son conjugadas si existe una transformación de Möbius  $\psi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tal que  $R_2 \circ \psi = \psi \circ R_1$ .*

**Teorema 2.3.4** *Sean  $R_1$  y  $R_2$  dos funciones racionales y sea  $\psi$  una transformación de Möbius que conjugue a  $R_1$  y  $R_2$ , es decir,  $R_2 = \psi \circ R_1 \circ \psi^{-1}$ . Entonces los conjuntos de Julia y Fatou de sendas funciones racionales también son conjugados por  $\psi$ ,  $\mathcal{J}(R_2) = \psi(\mathcal{J}(R_1))$  y  $\mathcal{F}(R_2) = \psi(\mathcal{F}(R_1))$ .*

Dado  $p(z) = z^2 + c$ , la función racional asociada al método de Newton sobre  $p(z)$ ,  $N_p$ , depende del parámetro  $c$ . Podemos eliminar el parámetro  $c$  mediante la transformación de Möbius:

$$h(z) = \frac{z - i\sqrt{c}}{z + i\sqrt{c}}$$

cuyas propiedades son  $h(\infty) = 1$ ,  $h(i\sqrt{c}) = 0$  y  $h(-i\sqrt{c}) = \infty$ .

La expresión del operador resulta:

$$N_q(z) = (h \circ N_p \circ h^{-1})(z) = z^2$$

y el plano dinámico asociado al método de Newton sobre polinomios cuadráticos queda como puede verse en la Figura 2.2.

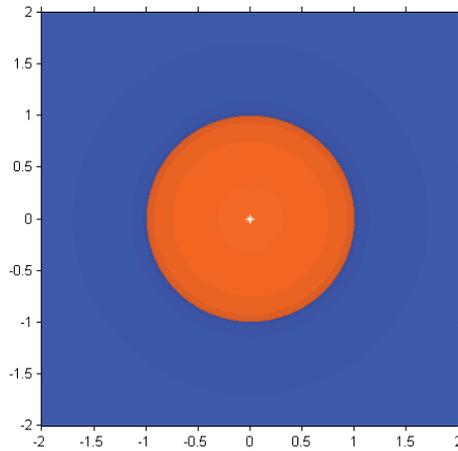


Figura 2.2: Plano dinámico asociado al método de Newton sobre polinomios cuadráticos tras la transformación de Möbius

El siguiente resultado, debido a Cayley (véase [23]) y a Schröder ([99]), supuso un cambio sustancial en el estudio del método de Newton. Cayley y Schröder estudiaron el comportamiento dinámico del método de Newton sobre polinomios cuadráticos de una forma particularmente simple, en el plano complejo, lo que motivó el posterior trabajo en el tema de Fatou y Julia.

**Teorema 2.3.5** *Sea*

$$N_f(z) = \frac{z^2 - ab}{2z - (b+a)}$$

*el operador racional asociado al método de Newton's aplicado al polinomio cuadrático  $f(z) = (z - a)(z - b)$ , con  $a \neq b$ . Entonces  $N_f$  es conjugado a la aplicación  $z \rightarrow z^2$  mediante la transformación de Möbius  $M(z) = \frac{z - a}{z - b}$ , y su conjunto de Julia  $\mathcal{J}(N_f)$  es, en el plano complejo, la línea recta que es lugar geométrico de los puntos equidistantes a  $a$  y  $b$ .*

A partir de este resultado puede deducirse el motivo del excelente comportamiento del método de Newton sobre polinomios cuadráticos: al ser su operador asociado conjugado a una potencia de la variable,  $z^2$ , (es decir, al cumplir el método el llamado test de Cayley), no existen más puntos fijos y críticos que el cero y el infinito, por lo que la dinámica del método es la más simple posible, como se puede observar en la Figura 2.2. La existencia, en el análisis de los operadores racionales asociados a otros métodos iterativos, de otros puntos fijos y críticos diferentes (fijos extraños y críticos libres), nos proporcionarán una idea precisa del comportamiento de éstos y nos proporcionarán la clave para profundizar en su estudio.

## Capítulo 3

# Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales

### 3.1. Estado del arte

Los métodos iterativos han probado en los últimos siglos su eficacia para afrontar diferentes problemas no lineales. Desde el simple método de punto fijo que F. Gauss utilizó en la determinación preliminar de la órbita del planeta menor Ceres hasta los procesos más recientes empleados en robótica (véase, por ejemplo, [47] y [81]), reacciones nucleares ([65] y [69]) o meteorología (véase [73] y [119]).

Una primera clasificación de los esquemas iterativos para resolver ecuaciones no lineales del tipo  $f(x) = 0$  se basa en el número de pasos del proceso: así, un método puede ser de un sólo paso o multipaso. El más conocido método de un sólo paso es el de Newton, cuya expresión iterativa es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.1)$$

Nótese que, en cada paso del proceso, éste método necesita dos evaluaciones funcionales, una de la función no lineal  $f$  (cuyo cero buscamos) y otra de su derivada primera. Bajo ciertas condiciones, el orden de convergencia del método de Newton es dos, lo que le proporciona una buena eficiencia con un coste computacional razonable, de ahí su amplio uso. Sin embargo, sucesivos intentos de mejorar su eficiencia, en términos de velocidad de convergencia, dieron sus frutos en forma de otros métodos de un sólo punto: los esquemas de Halley, Chebyshev, ... tienen convergencia cúbica. Sus expresiones iterativas tienen un elemento en común: el operador de convexidad logarítmica,  $L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$  (véase [61]). El uso apropiado de este operador permite acelerar la convergencia hasta tercer orden, pero a costa de evaluar la segunda derivada de la función no lineal en cada iterado. Esta idea puede extenderse para acelerar aún más la velocidad de convergencia, pero a costa de evaluaciones funcionales de derivadas de órdenes superiores, lo que a efectos prácticos no es excesivamente conveniente. Por otra parte, su orden de convergencia está limitado por el resultado que mostramos a continuación y que se encuentra en el texto de Traub [111].

**Teorema 3.1.1** *Sea  $x_{k+1} = G(x_k)$  un método iterativo punto a punto que utiliza  $p$  evaluaciones funcionales por iteración. Entonces su orden de convergencia es, como máximo,  $p$ .*

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 25

Esta y otras limitaciones de los métodos punto a punto llevan, en la segunda mitad del siglo XX, al desarrollo de métodos multipaso que, mediante expresiones iterativas sencillas y evaluaciones funcionales de derivadas de bajo orden de la función no lineal permiten obtener órdenes de convergencia elevados. Un buen exponente de éste tipo de métodos es el esquema propuesto por Traub en [111], también conocido en la literatura como método de Potra-Pták. Su expresión iterativa es muy simple, partiendo del método de Newton como primer paso y un segundo paso que consiste en aplicar Newton sobre el primero, pero evaluando únicamente la función en el primer paso y manteniendo la derivada evaluada en el iterado anterior,

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

El método resultante tiene orden de convergencia tres, como los métodos clásicos de la familia Chebyshev-Halley, pero sin evaluaciones de la derivada segunda. Poco después se desarrollaron los conocidos métodos de Jarratt (véase [74]), cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2} \left( \frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{3f'(y_k) - f'(x_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\end{aligned}\tag{3.3}$$

y Ostrowski [91], que es un caso particular (para  $\beta = -2$ ) de la familia de King [79],

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k) + (2 + \beta)f(y_k)}{f(x_k) + \beta f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Los métodos (3.3) y (3.4), manteniendo un esquema de dos pasos y sin evaluar derivadas segundas, alcanzan orden de convergencia cuatro. Estos esquemas, claramente más eficientes que sus predecesores, indujeron a Kung y Traub en [84] a preguntarse hasta dónde podía crecer el orden de convergencia de un método con un número concreto de evaluaciones funcionales. Así, plantearon su conjetura: un método iterativo multipaso sin memoria con  $n$  evaluaciones funcionales puede alcanzar, como máximo, orden de convergencia  $2^{n-1}$ . Aquellos métodos que alcanzan dicha cota reciben el nombre de métodos óptimos. Bajo esta nueva perspectiva, los métodos de Newton, Jarratt y Ostrowski son óptimos, mientras que otros muchos (Chebyshev, Halley, Traub,...) no lo son.

Durante las siguientes décadas se profundizó en el conocimiento de éstos métodos, analizando su convergencia local y semilocal, estableciendo regiones en las que se aseguraba su convergencia y las cotas del error a priori, extendiendo estos resultados a espacios de Banach (véanse, por ejemplo, [76], [68], [115] y las referencias que contienen). Paralelamente, se continuó el desarrollo de nuevos métodos iterativos. Sin embargo, el trabajo de Weerakoon y Fernando [114], basado en un trabajo previo de Özban ([93]), marca un punto de inflexión en éste área de investigación. En este momento comienza el auge en el diseño de métodos iterativos multipaso para la resolución de ecuaciones no lineales. En la última década del siglo XX y la primera del XXI aparecen numerosos trabajos en los que se diseñan tanto métodos como familias de métodos óptimos, de órdenes crecientes. Para ello se utilizan diferentes técnicas, pero con una raíz común: la composición de métodos conocidos (básicamente Newton) y la posterior eliminación de alguna de las evaluaciones funcionales añadida en el proceso. La razón del éxito de ésta técnica es simple: la composición de dos métodos de

órdenes  $p$  y  $q$ , respectivamente, permite construir un nuevo esquema cuyo orden de convergencia es el producto de los órdenes de los métodos originales,  $pq$  (véase [111]). Es, por tanto, una técnica que permite aumentar fácilmente la velocidad de convergencia de los métodos; sin embargo, aumenta de la misma manera el número de evaluaciones funcionales implicadas, por lo que la eficiencia del método compuesto suele ser menor que la de los métodos de partida. Para evitar esto, se elimina alguna de las evaluaciones funcionales añadida en el proceso de composición, ya sea por interpolación polinómica (véase, por ejemplo, [28], [111] o [88]), por funciones racionales ([32] y [105]), utilizando polinomios de Adomian ([19] y [34]), interpolación polinómica, etc.

Una técnica reciente que permite aumentar significativamente el orden de convergencia sin elevar de manera excesiva el número de evaluaciones funcionales es la técnica de las funciones peso: en el proceso de composición, se sustituye en el último paso una o más de las evaluaciones funcionales nuevas por otras existentes, con lo que el método resultante no alcanza el producto de los órdenes de partida. Para elevarlo, se introduce como factor una función indeterminada cuya variable contiene alguna de las evaluaciones funcionales usadas en el método. En la demostración del orden de convergencia se establecerán las condiciones a imponer sobre la función peso y sus derivadas, lo que permitirá mejorar el orden de convergencia. Por supuesto, no siempre será posible alcanzar ese orden óptimo y el éxito del proceso dependerá del diseño global del método.

A continuación mostraremos algunos de los métodos existentes en la literatura que, siendo óptimos de órdenes 4 y 8, han sido diseñados recientemente utilizando la técnica de las funciones peso. En los trabajos donde se presentaron dichos métodos, y en las referencias citadas en su interior, encontraremos el germen de la citada técnica. Utilizaremos estos esquemas para compararlos con los propuestos en este capítulo de la memoria.

Los métodos iterativos de orden de convergencia cuatro que proponemos serán comparados en la sección numérica con esquemas concretos ya conocidos, como el de Ostrowski ([91]) que denotamos por MEDOS4, la familia de King (3.4), para el caso particular de  $\beta = -1$  (que denotaremos en adelante por MEDK4).

Asimismo, utilizaremos el método construido por Kung y Traub en [84], cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)^2}{(f(x_k) - f(y_k))^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

y que denotaremos por MEDKT4.

También utilizaremos en nuestras comparaciones el método de Zhao et al. (ver [117]), cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + 2u_k + u_k^2}{1 - 4u_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ , que denotaremos por MEDZ4.

Nuestros métodos iterativos con orden de convergencia ocho los compararemos en la sección de pruebas numéricas con esquemas iterativos óptimos (según la conjetura de Kung- Traub) diseñados con la técnica de funciones peso, por lo que son totalmente comparables con los nuevos métodos

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 27

diseñados en esta memoria. Concretamente, nos referimos al procedimiento que Kim presenta en [78]: un método de octavo orden de tres pasos, cuya expresión iterativa es:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - \frac{1 + u_k + 2/3u_k^2}{1 - u_k - 2u_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{1 - 2u_k + 3v_k}{1 - 3u_k} \frac{f(z_k)}{f'(x_k) + f[y_k, x_k, z_k](z - x)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $v_k = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}$  y por  $f[\cdot, \cdot, \cdot]$  denotamos la diferencia dividida de orden dos. En adelante, se denotará este esquema por MEDK8.

También emplearemos en nuestras comparaciones otro método de orden ocho que ha sido desarrollado a partir de la familia de esquemas presentada recientemente por Khan et al. en [77]. Su expresión iterativa es:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k)^2 - 2f(x_k)f(y_k) + f(y_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{1}{1 + v_k^2} \frac{f(z_k)}{K - C(y_k - z_k) - D(y_k - z_k)^2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $v_k = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}$ ,  $K = f[y_k, z_k]$ ,  $H = f[x_k, y_k]$ ,  $C = \frac{H-K}{(x_k-y_k)(x_k-z_k)} - D(x_k + y_k - 2z_k)$ ,  $D = \frac{f'(x_k) - H}{(x_k-y_k)(x_k-z_k)} - \frac{H-K}{(x_k-z_k)^2}$  y  $f[\cdot, \cdot]$  simboliza la diferencia dividida de orden uno. Hemos denotado este método MEDF8.

El tercer esquema que vamos a utilizar para comparar fue construido por Džunić y Petković en [53] y lo denotamos por MEDD8. Se basa en el esquema de cuarto orden de Ostrowski (ver [91]) y su expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{(1 + w_k)(1 + 2v_k)}{1 - 2u_k - u_k^2} \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $v_k = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}$  y  $w_k = \frac{f(z_k)}{f(y_k)}$ .

Finalmente, compararemos nuestros nuevos esquemas con el método diseñado por Soleymani en [108], que denotamos por MEDS8, basado de nuevo en el método de Ostrowski y cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{f(z_k)}{2f[y_k, x_k] - f'(x_k) + f[z_k, x_k, x_k](z_k - y_k)} \left( 1 + w_k + 2v_k - 2u_k^3 + \frac{2}{5} \frac{f(z_k)}{f'(x_k)} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $v_k = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}$  y  $w_k = \frac{f(z_k)}{f(y_k)}$ .

En este capítulo diseñaremos métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para la solución de ecuaciones no lineales. Dichos esquemas serán construidos mediante la técnica de funciones peso, de manera que presentamos procedimientos de dos y tres puntos con orden óptimo de convergencia cuatro y ocho, respectivamente. Los algoritmos tienen como punto de partida el esquema de Potra-Pták (ver [96]) y el de Petković (ver [94]). La estructura del presente capítulo es la siguiente: construimos diferentes esquemas de orden cuatro y ocho, posteriormente verificamos el orden de convergencia y la relación existente entre las diferentes familias de métodos, mostramos los esquemas concretos que forman parte de dichas familias y su similitud con los ya existentes. Continuamos con la sección de pruebas numéricas, en las que comparamos los nuevos esquemas con otros ya conocidos. En la última sección, abordamos el problema de la determinación preliminar de órbitas de satélites artificiales aplicando en dicha determinación los nuevos métodos diseñados de orden ocho y comparando los resultados con los que nos proporcionan los esquemas MEDK8, MEDF8, MEDD8 y MEDS8.

### 3.2. Diseño de los métodos

Hemos diseñado varios métodos iterativos, con órdenes de convergencia cuatro y ocho, usando la ya referida técnica de funciones peso lo que es de gran ayuda para mejorar el orden de convergencia de métodos no óptimos sin aumentar el número de evaluaciones.

Iniciamos el estudio partiendo de la expresión iterativa

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

que corresponde al conocido método de orden tres de Traub (ver [111]). También se le suele llamar método de Potra-Pták o método de la derivada congelada.

Basándonos en el esquema (3.11) consideraremos la siguiente generalización, utilizando la técnica de las funciones peso

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - H(u_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro real y  $H(u(x))$  representa una función de variable real,  $u(x) = \frac{f(y)}{b_1 f(x) + b_2 f(y)}$ , en la que  $b_1$  y  $b_2$  son parámetros reales.

Partiendo de (3.11) proponemos también otro esquema de iteración similar al anterior, que expresamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - H(\mu_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 29

siendo  $\alpha$  un parámetro real y  $H(\mu(x))$  una función de variable real  $\mu(x) = \frac{a_1 f(x) + a_2 f(y)}{b_1 f(x) + b_2 f(y)}$ . La diferencia entre este método, con respecto a (3.12), es que agregamos los parámetros reales  $a_1$  y  $a_2$ , en el numerador de la variable, a los ya existentes  $b_1$  y  $b_2$  del denominador de la variable  $u(x)$ .

Pretendemos lograr que, utilizando determinados valores de los parámetros, así como bajo ciertas condiciones sobre  $H(u(x))$  y  $H(\mu(x))$  sus respectivos esquemas (3.12) y (3.13) sean métodos de orden cuatro óptimo mejorando el orden de convergencia y la eficiencia del método de partida (3.11).

En la referencia [11], a partir del método de dos pasos (3.12) diseñamos el método de tres pasos

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - H(u_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - G(u_k, v_k) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $u_k = \frac{f(y_k)}{b_1 f(x_k) + b_2 f(y_k)}$ , siendo  $b_1$  y  $b_2$  parámetros reales arbitrarios y  $v_k = \frac{f(z_k)}{f(y_k)}$ . Bajo ciertas condiciones que se detallarán en la Sección 3.3, se prueba el orden de convergencia ocho para diferentes valores de los parámetros.

Petkovič et al. en [94] diseñaron un esquema óptimo de orden 4 (bajo ciertas condiciones para la función peso real  $h$  y el parámetro  $\alpha$  utilizados),

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - h(u_k, v_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $u_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  y  $v_k = \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}$ . Partiendo de este esquema diseñamos otro método de tres pasos, en el que interviene los dos pasos de (3.15) y una función peso de tres variables que acompaña, como factor, al cociente  $\frac{f(t_k)}{f'(x_k)}$  en el nuevo paso

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ t_k &= y_k - h(u_k, v_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= t_k - g(u_k, v_k, w_k) \frac{f(t_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $w_k = \frac{f(t_k)}{f(y_k)}$ . En la siguiente sección demostramos que, bajo ciertas condiciones del parámetro  $\alpha$ , y de las funciones peso  $h$  y  $g$ , el método (3.16) es de orden ocho.

En el siguiente esquema iterativo usamos los dos primeros pasos del método (3.12), pero donde  $b_1 = 1$  y  $b_2 = 0$  que se corresponde con el método propuesto por Chun en [24], cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)h(u_k)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ . Si a este método le adicionamos un nuevo paso podemos diseñar el siguiente método de tres puntos

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - H(u_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - G(u_k, v_k) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $G(u_k, v_k)$  es una función de dos variables y  $v_k = \frac{f(z_k)}{f(y_k)}$ . A los tres pasos de este método añadiremos un cuarto para diseñar un método de orden 16 en el Capítulo 5.

### 3.3. Análisis de la convergencia

En esta sección analizamos las condiciones bajo las cuales los nuevos métodos iterativos propuestos en la sección anterior alcanzan orden de convergencia óptimo con la utilización de las funciones peso adecuadas.

En primer lugar demostramos que, sin la adición de nuevas evaluaciones funcionales, aumentamos el orden de convergencia del método de orden tres de Traub. Con la utilización de la función peso en el segundo paso obtenemos en el artículo (ver [10]), "Local convergence and dynamical analysis of a new family of optimal fourth-order iterative methods", el método cuya expresión iterativa es (3.12), de orden cuatro bajo ciertas condiciones sobre la función  $H$  y el parámetro  $\alpha$ , descritas en el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.1** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un intervalo abierto  $I$ . Sea  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cualquier función suficientemente diferenciable tal que  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = 2b_1$ ,  $|H''(0)| < \infty$  y  $\alpha = 1$ . Consideremos  $x_0$  una estimación inicial suficientemente próxima a  $\xi$ . Entonces el método definido en (3.12), con  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ,  $b_1 \neq 0$ , tiene convergencia de cuarto orden, y su ecuación del error es*

$$e_{k+1} = \left( \frac{(10b_1^2 + 4b_1b_2 - H''(0))c_2^3 - 2b_1^2c_2c_3}{2b_1^2} \right) e_k^4 + O(e_k^5),$$

donde  $c_k = (1/k!) \frac{f^{(k)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$ .

**Demostración:** Mediante el uso de los desarrollos en serie de Taylor en torno a la raíz  $\xi$ , tenemos

$$f(x_k) = f'(\xi) [e_k + c_2e_k^2 + c_3e_k^3 + c_4e_k^4] + O(e_k^5) \quad (3.19)$$

y

$$f'(x_k) = f'(\xi) [1 + 2c_2e_k + 3c_3e_k^2 + 4c_4e_k^3] + O(e_k^4). \quad (3.20)$$

A partir de (3.19) y (3.20) podemos obtener el error cometido en el primer paso del esquema iterativo (3.12),

$$y_k - \xi = (1 - \alpha)e_k + \alpha c_2 e_k^2 - 2(\alpha(c_2^2 - c_3))e_k^3 + \alpha(4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_k^4 + O(e_k^5).$$

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 31

Expandiendo  $f(y_k)$  alrededor de  $\xi$ , obtenemos

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\xi) [(1-\alpha)e_k + (1-\alpha+\alpha^2)c_2e_k^2 \\ &\quad + (-2\alpha^2c_2^2 - (-1+\alpha-3\alpha^2+\alpha^3)c_3)e_k^3 \\ &\quad + (5\alpha^2c_2^3 + \alpha^2(-10+3\alpha)c_2c_3 + (1-\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3+\alpha^4)c_4)e_k^4] + O(e_k^5). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ahora, desarrollamos  $u(x_k)$  mediante el uso de (3.19) y (3.21)

$$\begin{aligned} \frac{f(y_k)}{b_1f(x_k) + b_2f(y_k)} &= \frac{1-\alpha}{N} + \frac{\alpha^2b_1c_2}{N^2}e_k \\ &\quad - \frac{\alpha^2b_1((3b_1 + (3-3\alpha+\alpha^2)b_2)c_2^2 + (-3+\alpha)Nc_3)}{N^3}e_k^2 \\ &\quad + \left[ \frac{\alpha^2b_1(8b_1^2 + 2(8-8\alpha+3\alpha^2)b_1b_2 + (-2+\alpha)^2(2-2\alpha+\alpha^2)b_2^2)c_2^3}{N^4} \right. \\ &\quad + \frac{\alpha^2b_1(2((-7+2\alpha)b_1^2 + (-14+18\alpha-7\alpha^2+\alpha^3)b_1b_2)c_2c_3)}{N^4} \\ &\quad + \frac{\alpha^2b_1(2(-(7-16\alpha+14\alpha^2-6\alpha^3+\alpha^4)b_2^2)c_2c_3)}{N^4} \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2b_1((6-4\alpha+\alpha^2)N^2c_4)}{N^4} \right] e_k^3 + O(e_k^4), \end{aligned}$$

donde  $N = b_1 + b_2 - \alpha b_2$ .

Tomando en consideración que  $u(x_k)$  tiende a cero cuando  $x_k$  tiende a  $\xi$ , desarrollamos en serie de Taylor  $H(u(x_k))$  alrededor del cero,

$$H(u(x_k)) \approx H(0) + H'(0)u(x_k) + \frac{H''(0)}{2}u(x_k)^2 + \frac{H'''(0)}{6}u(x_k)^3. \quad (3.22)$$

Por lo tanto, usando (3.20), (3.21) y (3.22), tenemos el error cometido en el segundo paso

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y_k - \xi - H(u(x_k)) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \\ &= (-\gamma + \gamma K_1) e_k + \frac{1}{2} (2\alpha + \gamma\alpha^2 K_2 - 2(\gamma + \alpha^2) K_1) c_2 e_k^2 \\ &\quad + \left[ -\frac{K_2}{2} \alpha^2 (\gamma + \alpha^2) c_2^2 + 2\alpha(-c_2^2 + c_3) + (1+\alpha)K_1((-2+4\alpha)c_2^2 + (2+(-4+\alpha)\alpha)c_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{2N^5} \right] e_k^3 + O(e_k^4), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $\gamma = -1 + \alpha$ ,

$$\begin{aligned} K_1 &= H(0) - \frac{3\gamma N(2b_1H'(0) - \gamma(2b_2H'(0) + H''(0))) + \gamma^3H'''(0)}{6N^3}, \\ K_2 &= \frac{b_1(2N(b_1H'(0) - \gamma(b_2H'(0) + H''(0))) + \gamma^2H'''(0))}{N^4} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M &= \alpha^2b_1\gamma [-(6b_1^3H'(0) + b_1^2(2(-9\gamma + \alpha^2)b_2H'(0) + 6H''(0) - \alpha(6+\alpha)H'''(0)) \\ &\quad + \gamma^2(-3\gamma + \alpha^2)b_2(2b_2(b_2H'(0) + H''(0)) + H'''(0)) \\ &\quad + \gamma b_1(-b_2(2(-3+\alpha)(-3+2\alpha)b_2H'(0) + (-12\gamma + \alpha^2)H''(0)) + (-3\gamma + \alpha^2)H'''(0))] c_2^2 \\ &\quad - (-3+\alpha)N(2N(b_1H'(0) - \gamma(b_2H'(0) + H''(0))) + \gamma^2H'''(0)) c_3]. \end{aligned}$$

Finalmente, si exigimos  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = 2b_1$ ,  $|H''(0)| < \infty$  y  $\alpha = 1$ , se anulan los coeficientes de  $e_k$ ,  $e_k^2$  y  $e_k^3$  en (3.23) y verificamos que la ecuación del error es

$$e_{k+1} = \frac{(10b_1^2 + 4b_1b_2 - H''(0))c_2^3 - 2b_1^2c_2c_3}{2b_1^2}e_k^4 + O(e_k^5).$$

□

Así, todos los miembros de la familia definida en (3.12), que verifican las condiciones establecidas en el Teorema 3.3.1, tienen orden de convergencia cuatro óptimo, ya que requieren tres evaluaciones funcionales por iteración.

Observamos que nuestra clase de métodos (3.12) incluye algunos métodos bien conocidos. Por ejemplo, tomando  $H(t) = \frac{1}{1-t/2}$ ,  $b_1 = \frac{1}{4}$  y  $b_2 = 0$ , obtenemos el método de Ostrowski, cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

Ahora, tomemos  $H(t) = 1 + 2t$ ,  $b_1 = 1$  y consideremos  $b_2$  arbitrario. En este caso, tenemos la familia de King (ver [79]),

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k) + (2 + b_2)f(y_k)}{f(x_k) + b_2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

También se pueden obtener nuevos métodos de cuarto orden mediante el uso de diferentes funciones  $H(t)$  y valores de los parámetros  $b_1$  y  $b_2$ .

**Ejemplo 1.** Tomemos la función  $H(t) = 1 + t$ ,  $b_1 = 1/2$  y  $b_2 = 0$ : obtenemos el siguiente esquema iterativo de cuarto orden

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)^2 + f(x_k)f(y_k) + 2f(y_k)^2}{f(x_k)f'(x_k)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Denotaremos por MED43 a este esquema.

**Ejemplo 2.** Usando la función  $H(t) = \frac{4}{4-2t-t^2}$ ,  $b_1 = 1/4$  y  $b_2 = 1/4$ , se obtiene un nuevo método de orden cuatro

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{(f(x_k) + f(y_k))^2}{f(x_k)^2 - 5f(y_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

al que llamaremos MED44.

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 33

También podemos generar una familia paramétrica que incluya a MED44, fijando  $b_1 = 1/4$  y  $b_2 = \beta$ , arbitrario. La expresión iterativa de esta familia es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{(f(x_k) + 4\beta f(y_k))^2}{f(x_k)^2 + 2(4\beta - 1)f(x_k)f(y_k) + 4(4\beta^2 - 2\beta - 1)f(y_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Veamos el siguiente teorema en el se demuestra que el esquema (3.13) tiene orden de convergencia cuatro. Este método es una generalización de varios procedimientos de orden cuatro, pues bajo ciertas condiciones de  $H(\mu)$ ,  $\alpha$  y del resto de parámetros involucrados, podemos desarrollar nuevos métodos. Teniendo en cuenta que  $\mu$  tiende a  $c = \frac{a_1}{b_1}$  cuando  $x_k$  tiende a  $\xi$ , desarrollamos  $H(\mu)$  alrededor de  $c$  en la prueba del siguiente resultado.

**Teorema 3.3.2** . Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en un intervalo abierto  $I$ . Sea  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cualquier función suficientemente diferenciable tal que  $H(c) = 1$ ,  $H'(c) = \frac{2b_1^2}{a_2b_1 - a_1b_2}$ ,  $|H''(c)| < \infty$  y  $\alpha = 1$ . Consideremos  $x_0$  una estimación inicial suficientemente próxima a  $\xi$ . Entonces el método definido por (3.13), con parámetros reales arbitrarios  $a_2$  y  $b_2$ , pero con  $a_1 \neq 0$  y  $b_1 \neq 0$ , tienen convergencia de orden cuatro, y su ecuación del error es

$$e_{k+1} = \frac{1}{2b_1^4} [(10b_1^4 + 4b_1^3b_2 + (2a_1a_2b_1b_2 - a_2^2b_1^2 - a_1^2b_2^2)H''(c))c_2^3 - 2b_1^4c_2c_3] e_k^4 + O(e_k^5),$$

donde  $c_k = (1/k!) \frac{f^{(k)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$ .

**Demostración:** Usando las expresiones (3.19), (3.20) obtenidas del desarrollo de Taylor de  $f(x_k)$  y  $f'(x_k)$  en torno a  $\xi$ , obtenemos

$$y_k - \xi = (1 - \alpha)e_k + \alpha c_2 e_k^2 - 2(\alpha c_2^2 - c_3)e^3 + \alpha(4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_k^4 + O(e_k^5).$$

Desarrollando  $f(y_k)$  alrededor de  $\xi$ , conseguimos la expresión

$$\begin{aligned} f(y_k) &= (f'(\xi) - \alpha f'(\xi))e_k + (1 - \alpha + \alpha^2)f'(\xi)c_2e_k^2 + f'(\xi)(-2\alpha^2c_2^2 - (-1 + \alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3)c_3)e_k^3 \\ &\quad + f'(\xi)(5\alpha^2c_2^3 + \alpha^2(-10 + 3\alpha)c_2c_3 + (1 - \alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4)c_4)e_k^4 + O(e_k^5). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ahora, calculemos el desarrollo de  $\mu(x_k)$  usando (3.19) y (3.27)

$$\begin{aligned} \frac{a_1f(x_k) + a_2f(y_k)}{b_1f(x_k) + b_2f(y_k)} &= \frac{A}{B} + \frac{1}{B^2}(a_2b_1 - a_1b_2)\alpha^2c_2e_k \\ &\quad - \frac{1}{B^3}((a_2b_1 - a_1b_2)\alpha^2((3b_1 + b_2(3 - 3\alpha + \alpha^2))c_2^2 + (-3 + \alpha)Bc_3)e_k^2 \\ &\quad + \frac{1}{B^4}(a_2b_1 - a_1b_2)\alpha^2((8b_1^2 + b_2^2(-2 + \alpha)^2(2 - 2\alpha + \alpha^2) + 2b_1b_2(8 - 8\alpha \\ &\quad + 3\alpha^2))c_2^3 + 2(b_1^2(-7 + 2\alpha) + b_1b_2(-14 + 18\alpha - 7\alpha^2 + \alpha^3) \\ &\quad - b_2^2(7 - 16\alpha + 14\alpha^2 - 6\alpha^3 + \alpha^4))c_2c_3 + B^2(6 - 4\alpha + \alpha^2)c_4)e_k^3 + O(e_k^4), \end{aligned}$$

donde  $A = (a_1 + a_2 - a_2\alpha)$  y  $B = (b_1 + b_2 - b_2\alpha)$ .

Como  $\mu(x_k)$  tiende a  $c$  cuando  $x_k$  tiende a  $\xi$ , podemos aproximar  $H(\mu(x_k))$  por el polinomio de Taylor de tercer grado desarrollado alrededor de  $c$

$$H(\mu(x_k)) \approx H(c) + H'(c)(\mu(x_k) - c) + \frac{H''(c)}{2}(\mu(x_k) - c)^2 + \frac{H'''(c)}{6}(\mu(x_k) - c)^3, \quad (3.28)$$

por lo que utilizando (3.20), (3.27) y (3.28) tenemos

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y_k - \xi - H(\mu(x_k)) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \\ &= \left(1 - \alpha - (1 - \alpha) \left( H(c) + \frac{(1 - \alpha)(-a_2b_1 + a_1b_2)H'(c)}{b_1B} + \frac{1}{2} \left( -c + \frac{A}{B} \right)^2 H''(c) \right) \right) e_k \\ &\quad + \left( \alpha - \phi_1 \left( H(c) + \frac{(1 - \alpha)(-a_2b_1 + a_1b_2)H'(c)}{b_1B} + \frac{1}{2} \left( -c + \frac{A}{B} \right)^2 H''(c) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{(-1 + \alpha)\alpha^2 N_1}{b_1 B^3} \right) \right) c_2 e_k^2 \\ &\quad + \left( \frac{\alpha^2 \phi_1 N_1}{b_1 B^3} c_2^2 - 2\alpha(c_2^2 - c_3) + (1 + \alpha) \left( H(c) + \frac{(1 - \alpha)(-a_2b_1 + a_1b_2)H'(c)}{b_1B} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left( -c + \frac{A}{B} \right)^2 H''(c) \right) ((-2 + 4\alpha)c_2^2 + \phi_2 c_3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2B^4} \alpha^2 (a_2b_1 - a_1b_2)(1 - \alpha)(-2BH'(c)((3b_1 + \phi_2b_2)c_2^2 + (-3 + \alpha)Bc_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_1(a_2b_1 - a_1b_2)} H''(c) (((-6 + 6\alpha + \alpha^2)b_1 + 2(-3 + 6\alpha - 4\alpha^2 + \alpha^3)b_2)c_2^2 + 2\phi_4 Bc_3) \right) e_k^3 \\ &\quad + \left( -\frac{1}{b_1 B^3} \alpha^2 (1 + \alpha) N_1 c_2 ((-2 + 4\alpha)c_2^2 + \phi_3 c_3) - \frac{1}{2B^4} \alpha^2 \phi_1 (a_2b_1 \right. \\ &\quad \left. - a_1b_2) c_2 (-2BH'(c)((3b_1 + \phi_2b_2)c_2^2 + (-3 + \alpha)Bc_3) + \frac{1}{b_1} (a_2b_1 - a_1b_2) H''(c) (((-6 + 6\alpha \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2)b_1 + 2(-3 + 6\alpha - 4\alpha^2 + \alpha^3)b_2)c_2^2 + 2\phi_4 Bc_3) + \alpha(4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2b_1^2 B^2} (2b_1^4 H(c) - 2(-1 + \alpha)b_1^3 (2b_2 H(c) + a_2 H'(c)) + (-1 + \alpha)a_1^2 b_2^2 H''(c) \right. \\ &\quad \left. - 2(-1 + \alpha)a_1 b_1 b_2 (b_2 H'(c) + a_2 H''(c)) + (-1 + \alpha)b_1^2 (2(-1 + \alpha)b_2^2 H(c) + 2(a_1 + (-1 \right. \\ &\quad \left. + \alpha)a_2)b_2 H'(c) + (-1 + \alpha)a_2^2 H''(c)) ((-4 + 4\alpha + 13\alpha^2)c_2^3 + (7 - 7\alpha - 19\alpha^2 + 5\alpha^3)c_2c_3 \right. \\ &\quad \left. + (-3 + 3\alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4)c_4) - \frac{1}{B^5} \alpha^2 (a_2b_1 - a_1b_2)(1 - \alpha)(BH'(c)((8b_1^2 + 2(8 \right. \\ &\quad \left. - 8\alpha + 3\alpha^2)b_1b_2 + (-2 + \alpha)^2 \phi_2 b_2^2)c_2^3 + 2((-7 + 2\alpha)b_1^2 + (-14 + 18\alpha - 7\alpha^2 + \alpha^3)b_1b_2 \right. \\ &\quad \left. - (7 - 16\alpha + 14\alpha^2 - 6\alpha^3 + \alpha^4)b_2^2)c_2c_3 + (6 - 4\alpha + \alpha^2)B^2c_4) + H''(c)(-\alpha^2(a_2b_1 \right. \\ &\quad \left. - a_1b_2)c_2((3b_1 + \phi_2b_2)c_2^2 + (-3 + \alpha)Bc_3) + \frac{1}{b_1} (-1 + \alpha)(-a_2b_1 + a_1b_2)((8b_1^2 + 2(8 - 8\alpha \right. \\ &\quad \left. + 3\alpha^2)b_1b_2 + (-2 + \alpha)^2(2 - 2\alpha + \alpha^2)b_2^2)c_2^3 + 2((-7 + 2\alpha)b_1^2 + (-14 + 18\alpha - 7\alpha^2 + \alpha^3)b_1b_2 \right. \\ &\quad \left. - (7 - 16\alpha + 14\alpha^2 - 6\alpha^3 + \alpha^4)b_2^2)c_2c_3 + (6 - 4\alpha + \alpha^2)B^2c_4) \right) e_k^4 + O(e_k^5), \quad (3.29) \end{aligned}$$

donde  $N_1 = (a_2b_1 - a_1b_2)(-b_1^2 H'(c) - (-1 + \alpha)(a_1b_2 H''(c) + b_1 H'(c) + a_2 H''(c))$ ,  $\phi_2 = 3 - 3\alpha + \alpha^2$ ,  $\phi_3 = 2 - 4\alpha + \alpha^2$  y  $\phi_4 = 3 - 4\alpha + \alpha^2$ .

A continuación, si exigimos  $\alpha = 1$ ,  $H(c) = 1$ ,  $H'(c) = \frac{2b_1^2}{a_2b_1 - a_1b_2}$ ,  $|H''(c)| < \infty$ , se anulan los

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 35

coeficientes de  $e_k$ ,  $e_k^2$  y  $e_k^3$  en (3.29) y la ecuación del error resulta

$$e_{k+1} = \frac{1}{2b_1^4} [(10b_1^4 + 4b_1^3b_2 + (2a_1a_2b_1b_2 - a_2^2b_1^2 - a_1^2b_2^2)H''(c))c_2^3 - 2b_1^4c_2c_3] e_k^4 + O(e_k^5).$$

□

A continuación, observamos algunos ejemplos relacionados con la familia de métodos (3.12) que cumplen las condiciones de convergencia del Teorema 3.3.1. Recordemos que éstas son un caso particular de la clase de métodos (3.13) para  $a_1 = 0$ , que debe cumplir las condiciones del Teorema 3.3.2. De este modo, se obtienen algunos métodos conocidos y también mostraremos algunos ejemplos que constituyen nuevos esquemas iterativos.

**Ejemplo 3.** Considerando los valores  $a_1 = 0, a_2 = 2, b_1 = 1, b_2 = 0, H(0) = 1$  y  $H'(0) = 1$ , obtenemos las siguientes funciones peso:

- a.  $H(\mu) = 1 + \mu$ , a partir de la cual se obtiene la familia de King

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k) + (2 + b_2)f(y_k)}{f(x_k) + b_2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

- b. Si  $b_2 = 0$ , tendríamos el caso particular del siguiente esquema iterativo

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k) + 2f(y_k)}{f(x_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.** Si elegimos los valores para  $a_1 = 0, a_2 = 2, b_1 = 1/2, b_2 = 0, H(0) = 1$  y  $H'(0) = 1/2$ , obtenemos funciones peso con sus respectivos esquemas iterativos:

- a.  $H(\mu) = 1 + 1/2\mu$  con:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k) + 2f(y_k)}{f(x_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

- b.  $H(\mu) = \frac{2}{2-\mu}$ , con:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned}$$

obteniendo el método de Ostrowski.

c.  $H(\mu) = \frac{14-2\mu}{14-9\mu}$  con:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{7f(x_k) - 4f(y_k)}{7f(x_k) - 18f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned}$$

lo que es un caso particular de la familia King.

d.  $H(\mu) = \frac{6}{6-3\mu-\mu^2}$  con:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{3f(x_k)^2}{3f(x_k)^2 - 6f(x_k)f(y_k) - 8f(y_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned}$$

siendo este un nuevo método iterativo, al que llamaremos MED45.

Ahora consideremos algunos ejemplos en los que  $a_1 \neq 0$ . Obtendremos nuevos esquemas iterativos que satisfagan las condiciones de convergencia del Teorema 3.3.2 correspondiente a la clase de métodos (3.13):

**Ejemplo 5.** Dada la función  $H(\mu) = 1 + d(\mu - c)$ , donde  $c = \frac{a_1}{b_1}$ ,  $H(c) = 1$  y  $H'(c) = \frac{2b_1^2}{a_2b_1 - a_1b_2} = d$ , uno de estos casos particulares sería con valores para  $a_1 = -1/4$ ,  $a_2 = -5/8$ ,  $b_1 = -1/4$ , y  $b_2 = 1/8$ , obteniendo la función  $H(\mu) = \frac{2\mu+1}{3}$  con su correspondiente esquema iterativo

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{2f(x_k) + 3f(y_k)}{2f(x_k) - f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.** Para la función  $H(\mu) = \frac{2+\mu+\mu^2}{2}$ , siendo los valores de  $a_1 = 1/2$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = -1/2$ , y  $b_2 = 2$ , se obtiene el esquema iterativo, que denotamos por MED46

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)^2 - 6f(x_k)f(y_k) + 16f(y_k)^2}{f(x_k)^2 - 8f(x_k)f(y_k) + 16f(y_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En la sección numérica compararemos el comportamiento de algunos de éstos métodos sobre problemas no lineales concretos y lo contrastaremos con el de algunos métodos conocidos.

A continuación comenzaremos el análisis de la convergencia de los métodos propuestos de tres pasos. El siguiente resultado ha sido publicado en el artículo [11] "Two weighted eight-order classes of iterative root-finding methods". La clase de esquemas iterativos cuyo orden ocho óptimo probamos a continuación contiene, como subclase particular, a una familia de métodos diseñada por Džunić et al. en [54].

**Teorema 3.3.3** Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sobre un intervalo abierto  $I$ . Sean  $H$  y  $G$  funciones reales suficientemente diferenciables

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 37

y sea  $x_0$  una aproximación inicial cercana a  $\xi$ . Si  $\alpha = 1$  y  $H$  y  $G$  satisfacen que  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = 2b_1$ ,  $H''(0) = 2b_1(2b_1 + b_2)$ ,  $G(0,0) = G_v(0,0) = 1$ ,  $G_u(0,0) = 2b_1$ ,  $G_{uv}(0,0) = 4b_1$ ,  $G_{uu}(0,0) = 2b_1(3b_1 + b_2)$  y  $|G_{vv}(0,0)| < +\infty$ . Entonces, la familia de métodos (3.14), tiene orden de convergencia ocho para cualquier valor de  $b_1$  diferente de cero. Su ecuación del error es

$$e_{k+1} = \frac{1}{2b_1^3} [(3b_1 + b_2)c_2^2 - b_1c_3][r_3c_3^2 + r_4c_2^4 + r_5c_2^2c_3 - 2b_1^2c_2c_4] e_k^8 + O(e_k^9),$$

donde  $r_3 = b_1^2(G_{vv}(0,0) - 2)$ ,  $r_4 = 9b_1^2(G_{vv}(0,0) - 6) + b_2^2(G_{vv}(0,0) - 2) + 2b_1b_2(3G_{vv}(0,0) - 13)$ ,  $r_5 = b_1^2(34 - G_{vv}(0,0)) - 2b_1b_2(G_{vv}(0,0) - 5)$ ,  $c_k = (1/k!) \frac{f^{(k)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$

**Demostración:** Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de  $f$  y  $f'$  alrededor de  $\xi$

$$f(x_k) = f'(\xi) \sum_{j=1}^8 c_j e_k^j + O(e_k^9) \quad y \quad f'(x_k) = f'(\xi) \sum_{j=1}^8 (j+1)c_{j+1} e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $c_j = \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!f'(\xi)}$  y  $e_k = x_k - \xi$ . Aplicando estos resultados en la expresión iterativa del método de Newton amortiguado, obtenemos

$$y_k = x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \xi + \sum_{j=1}^8 A_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $A_1 = 1 - \alpha$ ,  $A_2 = -2\alpha c_2$ ,  $A_3 = 2\alpha(c_3 - c_2^2)$  y  $A_4 = \alpha(4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)$ . Usando nuevamente el desarrollo de Taylor, obtenemos

$$f(y_k) = f'(\xi) \sum_{j=1}^8 B_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = (\alpha^2 - \alpha + 1)c_2$ ,  $B_3 = -2\alpha^2 c_2^2 + (1 - \alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3)c_3$  y  $B_4 = (1 - \alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4)c_4 + 5\alpha^2 c_2^3 + \alpha^2(3\alpha - 10)c_3c_2$ .

Ahora, el desarrollo de  $u_k = \frac{f(y_k)}{b_1 f(x_k) + b_2 f(y_k)}$  puede ser calculado para, posteriormente, obtener la aproximación por un polinomio de Taylor de la función peso  $H(u_k) \approx H(0) + H'(0)u_k + (1/2)H''(0)u_k^2$ . Como

$$z_k = y_k - H(u_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} = \xi + \sum_{j=1}^8 Z_j e_k^j + O(e_k^9)$$

y la ecuación del error en el segundo paso es  $e_{z_k} = \sum_{j=1}^8 Z_j e_k^j + O(e_k^9)$  cuyo primer término depende del factor

$$Z_1 = (1 - \alpha) \left[ 1 - H(0) + \frac{1 - \alpha}{2(b_1 + b_2(1 - \alpha))^2} (-2b_1 H'(0) + (\alpha - 1)(2b_2 H'(0) + H''(0))) \right].$$

La condición para obtener al menos orden de convergencia 2 es que  $Z_1 = 0$ , para lo que necesitamos que se verifique  $\alpha = 1$ . Introduciendo este valor en la ecuación del error de este paso obtenemos

$$e_{z_k} = \sum_{j=2}^8 \bar{Z}_j e_k^j + O(e_k^9), \text{ donde}$$

$$\bar{Z}_2 = (1 - H(0))c_2, \quad y \quad \bar{Z}_3 = 2(1 - H(0))c_3 - (2 - 4H(0) + H'(0)/b_1)c_2^2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas  $\bar{Z}_2 = 0$  y  $\bar{Z}_3 = 0$ , obtenemos  $H(0) = 1$  y  $H'(0) = 2b_1$ . Sustituyendo estas condiciones obtenemos la ecuación del error de  $z_k$ ,

$$e_{z_k} = \frac{1}{2b_1^2} ((4b_1b_2 + 10b_1^2 - H''(0))c_2^2 - 2b_1^2c_3) c_2e_k^4 + \sum_{j=5}^8 \bar{Z}_j e_k^j + O(e_k^9).$$

De ésta expresión concluimos que el segundo paso de la expresión iterativa (3.14) tiene orden de convergencia al menos 4 si  $b_1 \neq 0$ .

Desarrollamos  $f(z_k)$  en serie de Taylor en torno a  $\xi$ ,

$$f(z_k) = f'(\xi) \sum_{j=4}^8 D_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $D_4 = \frac{1}{2b_1^2} ((4b_1b_2 + 10b_1^2 - H''(0))c_2^2 - 2b_1^2c_3) c_2$ .

Ahora, definimos la nueva variable  $v_k = \frac{f(z_k)}{f(y_k)}$  y aproximamos la función peso por su polinomio de Taylor asociado de segundo grado,

$$G(u_k, v_k) \approx G(0, 0) + G_u(0, 0)u_k + G_v(0, 0)v_k + \frac{1}{2}(G_{uu}(0, 0)u_k^2 + G_{vv}(0, 0)v_k^2) + G_{uv}(0, 0)u_kv_k.$$

Entonces, como  $x_{k+1} = z_k - G(u_k, v_k) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}$ , obtenemos

$$e_{k+1} = \frac{1}{2b_1^2} (1 - G(0, 0)) [(4b_1b_2 + 10b_1^2 - H''(0))c_2^2 - 2b_1^2c_3] c_2e_k^4 + \sum_{j=5}^8 L_j e_k^j + O(e_k^9).$$

Si exigimos  $G(0, 0) = 1$ , el orden de convergencia será al menos 5. Sustituyendo esta condición en la ecuación del error obtenemos

$$e_{k+1} = \frac{1}{2b_1^3} (2b_1 - G_u(0, 0)) [(4b_1b_2 + 10b_1^2 - H''(0))c_2^2 - 2b_1^2c_3] c_2e_k^5 + \sum_{j=6}^8 \bar{L}_j e_k^j + O(e_k^9).$$

Observemos que si  $G_u(0, 0) = 2b_1$ , el término de la orden 5 se anula. Otra vez, substituimos esta condición en la ecuación de error y, tras la simplificación correspondiente, obtenemos

$$e_{k+1} = \sum_{j=6}^8 \bar{\bar{L}}_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde

$$\bar{\bar{L}}_6 = \frac{1}{4b_1^4} ((4b_1b_2 + 10b_1^2 - H''(0))c_2^2 - 2b_1^2c_3) [(r_1c_2^2 + 2b_1^2(1 - G_v(0, 0))c_3] c_2$$

y

$$r_1 = 4b_1b_2(G_v(0, 0) - 1) + 2b_1^2(5G_v(0, 0) - 6) + G_{uu}(0, 0) - G_v(0, 0)H''(0).$$

Si  $G_v(0, 0) = 1$  y  $G_{uu}(0, 0) = 2b_1^2 + H''(0)$ , el orden de convergencia es al menos 7 y obtenemos la expresión de error

$$e_{k+1} = \bar{\bar{\bar{L}}}_7 e_k^7 + \bar{\bar{\bar{L}}}_8 e_k^8 + O(e_k^9),$$

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 39

donde

$$\bar{\bar{L}}_7 = \frac{1}{4b_1^5} (nc_2^2 - 2b_1^2c_3) [r_2c_2^2 - (8b_1^3 + 2b_1^2G_{uv}(0,0))c_3] c_2^2.$$

Para alcanzar el orden de convergencia ocho necesitamos  $\bar{\bar{L}}_7 = 0$ , esto es,  $G_{uv}(0,0) = 4b_1$  y  $H''(0) = 2(2b_1^2 + b_1b_2)$ .

Finalmente,

$$e_{k+1} = \frac{1}{2b_1^3} ((3b_1 + b_2)c_2^2 - b_1c_3) (r_3c_3^2 + r_4c_2^4 + r_5c_2^2c_3 - 2b_1^2c_2c_4) e_k^8 + O(e_k^9),$$

quedando probado el orden ocho de la clase de métodos.  $\square$

Las funciones peso  $H$  y  $G$  deben ser elegidas tan simples como sea posible. Una de las formas más simple es la que obtenemos mediante el uso de los polinomios de Taylor, para estas funciones siempre que cumplan con las condiciones impuestas en el Teorema 3.3.3, la familia de métodos expresada de manera general es

$$H(u) = 1 + 2b_1u + b_1(2b_1 + b_2)u^2, \quad G(u, v) = 1 + 2b_1u + v + b_1(3b_1 + b_2)u^2 + 4b_1uv.$$

Si ahora asignamos valores a  $b_1$  y  $b_2$ , obtenemos los métodos particulares siguientes:

$$\begin{aligned} H(u) &= 1 + 2u, & G(u, v) &= 1 + 2u + v + u^2 + 4uv - 4u^3, & \text{si } b_1 &= 1, b_2 = -2 \\ H(u) &= 6u^3 + 3u^2 + 2u + 1, & G(u, v) &= \frac{1}{1 - 2u - v}, & \text{si } b_1 &= 1, b_2 = 2 \\ H(u) &= \frac{1}{1 - 2u}, & G(u, v) &= 1 + 2u + v + 4uv + 10u^2 + 12u^3, & \text{si } b_1 &= 1, b_2 = 7 \end{aligned}$$

Los métodos iterativos concretos que utilizan estas tres parejas de funciones las denotaremos por MED82, MED83 y MED84, respectivamente.

A continuación trataremos las familias de métodos introducidas en (3.15) y (3.16). Demostraremos en los siguientes resultados que dichos esquemas son óptimos, respecto a la conjetura de Kung y Traub, de órdenes 4 y 8 respectivamente.

**Teorema 3.3.4** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en un intervalo abierto  $I$ . Sea  $h(u_k, v_k)$  una función real suficientemente diferenciable que satisfice:  $h(0,0) = 1$ ,  $h_v(0,0) = 2$ ,  $|h_u(0,0)| < +\infty$ ,  $|h_{vv}(0,0)| < +\infty$ , y sea  $x_0$  una aproximación inicial cercana a  $\xi$ . Entonces la clase de método (3.15) es óptima de orden cuatro para  $\alpha = 1$ , y su ecuación del error es*

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2} (c_2(2h_u(0,0)c_2 + (-10 + h_{vv}(0,0))c_2^2 + 2c_3)) e_k^4 + O(e_k^5)$$

donde  $c_j = (1/j!) \frac{f^{(j)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$ .

**Demostración:** Nuevamente usando los desarrollos en serie de Taylor (3.19), (3.20) en el primer paso del esquema iterativo (3.15), obtenemos

$$y_k - \xi = \gamma_1 e_k + \alpha(c_2 e_k^2 - (2c_2^2 - c_3)e_k^3 + (-4c_2^3 + 7c_2c_3 - 3c_4))e_k^4 + O(e_k^5),$$

donde  $\gamma_1 = -1 + \alpha$  y  $\gamma_2 = -1 + \alpha + \alpha^2$ . Desarrollando  $f(y_k)$  en serie de Taylor alrededor de  $\xi$ , obtenemos

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\xi)(-\gamma_1 + (1 - \alpha + \alpha^2)c_2 e_k^2 + (-2\alpha^2 c_2^2 - (-1 + \alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3)c_3)e_k^3 + (5\alpha^2 c_2^3 \\ &\quad + \alpha^2(-10 + 3\alpha)c_2c_3 + (1 - \alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4)c_4))e_k^4 + O(e_k^5). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sea  $u_k = \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}$ ; entonces sustituyendo en la variable los desarrollos (3.20) y (3.31), se obtiene la expresión de la variable  $u_k$  como desarrollo en serie de Taylor

$$u_k = -\gamma_1 e_k + \gamma_2 c_2 e_k^2 - (1 + \alpha)(-2 + 4\alpha)c_2^2 + (2 - 4\alpha + \alpha^2)c_3 e_k^3 + ((-4 + 4\alpha + 13\alpha^2)c_2^3 + (7 - 7\alpha - 19\alpha^2 + 5\alpha^3)c_2 c_3 + (-3 + 3\alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4)c_4)e_k^4 + O(e_k^5). \quad (3.32)$$

Análogamente, sustituyendo (3.19) y (3.31) en  $v_k = \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}$ , tenemos que

$$v_k = -\gamma_1 + \alpha^2(c_2 e_k - (3c_2^2 + (-3 + \alpha)c_3)e_k^2 + (8c_2^3 + 2(-7 + 2\alpha)c_2 c_3 + (6 - 4\alpha + \alpha^2)c_4)e_k^3 + O(e_k^4)). \quad (3.33)$$

Notemos que  $u_k$  y  $v_k$  tienden a cero cuando  $x_k$  tiende a  $\xi$  por lo que, para aproximar la función peso, utilizamos su polinomio de Taylor asociado de grado 2 desarrollado en torno a  $(0, 0)$ .

$$h(u_k, v_k) \approx h(0, 0) + h_u(0, 0)u_k + h_v(0, 0)v_k + \frac{1}{2}h_{uu}(0, 0)u_k^2 + \frac{1}{2}h_{vv}(0, 0)v_k^2 + h_{uv}(0, 0)u_k v_k. \quad (3.34)$$

Ahora calculamos la ecuación del error de (3.15), utilizando (3.32), (3.33), y (3.34), obteniendo

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \xi &= \frac{1}{2}\gamma_1(-2 + 2h(0, 0) - 2h_v(0, 0)\gamma_1 - h_{vv}(0, 0)\gamma_1^2)e_k + (\alpha c_2 - (h(0, 0) - h_v(0, 0)\gamma_1 \\ &+ \frac{1}{2}h_{vv}(0, 0)\gamma_1^2)\gamma_2 c_2 - (-\gamma_1(-\gamma_1(h_u(0, 0) + h_{uv}(0, 0)\gamma_1) + \alpha^2(h_v(0, 0) \\ &+ h_{vv}(0, 0)\gamma_1)c_2) + (-\gamma_2 c_2(-\gamma_1(h_u(0, 0) + h_{uv}(0, 0)\gamma_1) + \alpha^2(h_v(0, 0) + h_{vv}(0, 0)\gamma_1)c_2) \\ &- 2\alpha(c_2^2 - c_3) + \frac{1}{2}\gamma_1(h_{uu}(0, 0)\gamma_1^2 + 2(h_u(0, 0)\gamma_2 + h_{uv}(0, 0)(-1 + 2\alpha + \alpha^2 - 2\alpha^3))c_2 \\ &+ \alpha^2(-6h_v(0, 0) + h_{vv}(0, 0)(-6 + 6\alpha + \alpha^2))c_2^2 + 2(3 - \alpha)\alpha^2(h_v(0, 0) - h_{vv}(0, 0)\gamma_1)c_3) \\ &+ (1 + \alpha)(h(0, 0) - h_v(0, 0)\gamma_1 + \frac{1}{2}h_{vv}(0, 0)\gamma_1^2)((-2 + 4\alpha)c_2^2 + (2 - 4\alpha + \alpha^2)c_3))e_k^3 \\ &+ (\alpha(4c_2^3 - 7c_2 c_3 + 3c_4) + \frac{1}{2}(-2(h_u(0, 0)(5 - 10\alpha - 5\alpha^2 + 10\alpha^3 + \alpha^4) + h_{uv}(0, 0)(5 - 15\alpha \\ &+ 25\alpha^3 - 12\alpha^4 - 3\alpha^5))c_2^2 - (h(0, 0)(-8 + 8\alpha + 26\alpha^2) - 2h_v(0, 0)(4 - 8\alpha - 22\alpha^2 + 26\alpha^3 \\ &+ 7\alpha^4) + h_{vv}(0, 0)(-4 + 12\alpha + 27\alpha^2 - 74\alpha^3 + 18\alpha^4 + 21\alpha^5 + \alpha^6))c_2^3 + 2\gamma_1(-2h_u(0, 0)(2 \\ &- 2\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3) + h_{uv}(0, 0)(-4 + 8\alpha + 5\alpha^2 - 12\alpha^3 + 3\alpha^4))c_3 + c_2(3h_{uu}(0, 0)\gamma_1^2\gamma_2 \\ &+ (-2h(0, 0)(7 - 7\alpha - 19\alpha^2 + 5\alpha^3) + 2h_v(0, 0)(-7 + 14\alpha + 31\alpha^2 - 48\alpha^3 + 4\alpha^4 + 2\alpha^5) \\ &+ h_{vv}(0, 0)(-7 + 21\alpha + 36\alpha^2 - 122\alpha^3 + 69\alpha^4 + 9\alpha^5 - 6\alpha^6))c_3) - (2h(0, 0)(-3 + 3\alpha + 6\alpha^2 \\ &- 4\alpha^3 + \alpha^4) + \gamma_1(-2h_v(0, 0)(-3 + 3\alpha + 12\alpha^2 - 8\alpha^3 + 2\alpha^4) + 3h_{vv}(0, 0)(1 - 2\alpha - 5\alpha^2 \\ &+ 10\alpha^3 - 5\alpha^4 + \alpha^5))c_4))e_k^4 + O(e_k^5). \end{aligned}$$

Finalmente, exigiendo que  $h(0, 0) = 1$ ,  $h_v(0, 0) = 2$  y  $\alpha = 1$ , la ecuación del error es

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2}(c_2(2h_u(0, 0)c_2 + (-10 + h_{vv}(0, 0))c_2^2 + 2c_3))e_k^4 + O(e_k^5),$$

con lo que finaliza la demostración.  $\square$

Partiendo de la formulación de la familia (3.15), proponemos como nuevos esquemas iterativos:

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 41

a. Si utilizamos la función peso  $h(u, v) = 1 + 2v$ , con el esquema iterativo

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \left(1 + 2\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

b. Usando como función peso  $h(u, v) = \frac{1+2v}{1+u}$ , su esquema iterativo es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)(f(x_k) + 2f(y_k))}{f(x_k)(f'(x_k) + f(y_k))}, \end{aligned}$$

que denotamos por MED41 y MED42 respectivamente. Estos esquemas iterativos serán comparados con otros métodos de orden cuatro ya conocidos en la sección numérica de este capítulo.

A continuación presentamos el análisis de la convergencia del método de tres pasos que, partiendo del resultado anterior, alcanza orden de convergencia óptimo ocho.

**Teorema 3.3.5** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en un intervalo abierto  $I$ . Sea  $h(u_k, v_k)$  y  $g(u_k, v_k, w_k)$  funciones reales suficientemente diferenciables que satisfacen:  $h_u(0, 0) = 0$ ,  $h_{uv}(0, 0) = g_{uw}(0, 0, 0)$ ,  $h_{vv}(0, 0) = 4$ ,  $g(0, 0, 0) = 1$ ,  $g_u(0, 0, 0) = 0$ ,  $g_v(0, 0, 0) = 2$ ,  $g_w(0, 0, 0) = 1$ ,  $g_{vv}(0, 0, 0) = 2 + h_{vv}$ ,  $g_{vw}(0, 0, 0) = 4$ ,  $|g_{uw}(0, 0, 0)| < +\infty$ ,  $|g_{uv}(0, 0, 0)| < +\infty$ ,  $|g_{ww}(0, 0, 0)| < +\infty$ ,  $|g_{uu}(0, 0, 0)| < +\infty$ ,  $|h_{uu}(0, 0)| < +\infty$  y sea  $x_0$  una aproximación inicial próxima a  $\xi$ . Entonces, la clase de métodos descrita en (3.16) es de orden ocho para  $\alpha = 1$  y su ecuación del error es*

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= -\frac{1}{2}(c_2(3c_2^2 - c_3)((6g_{uw}(0, 0, 0) - 4g_{uv}(0, 0, 0))c_3^2 + 9(-6 + g_{ww}(0, 0, 0))c_2^4 \\ &\quad + (-2 + g_{ww}(0, 0, 0))c_3^2 + c_2^2(g_{uu}(0, 0, 0) - h_{uu}(0, 0) + (34 - 6g_{ww}(0, 0, 0))c_3) \\ &\quad - 2c_2(g_{uw}(0, 0, 0)c_3 + c_4))e_k^8 + O(e_k^9), \end{aligned}$$

donde  $c_j = (1/j!) \frac{f^{(j)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$ .

**Demostración:** Iniciaremos la demostración a partir del último paso desarrollado en el Teorema 3.3.4, por lo que asumimos las condiciones  $\alpha = 1$ ,  $h(0, 0) = 1$  y  $h_v(0, 0) = 2$ . El desarrollo en serie de Taylor de la variable  $t_k$  alrededor de  $\xi$  resulta

$$t_k - \xi = L_4 e_k^4 + L_5 e_k^5 + L_6 e_k^6 + L_7 e_k^7 + L_8 e_k^8 + O(e_k^9), \quad (3.35)$$

donde

$$\begin{aligned}
L_4 &= -\frac{1}{2}(2l_{4,1}c_2^2 + l_{4,2}c_3^2 + 2c_2c_3), \\
L_5 &= (l_{5,1}c_2^3 + l_{5,2}c_2^4 + l_{5,3}c_2^2c_3 + l_{5,4}c_2c_3 - 2(c_3^2 + c_2c_4)), \\
L_6 &= l_{6,1}c_2^4 + l_{6,2}c_2^5 - \frac{1}{2}(l_{6,3}c_2^3 + l_{6,4}c_2^3c_3) + 4l_{4,1}c_3^2 - 7c_3c_4 + l_{6,6}c_2^2c_3 + l_{6,7}c_2^2c_4 + l_{6,8}c_2c_3^2 \\
&\quad - 6l_{4,1}c_2c_4 - 3c_2c_5, \\
L_7 &= 2l_{7,1}c_2^5 + 4l_{7,2}c_2^6 + (6l_{6,3} - 16l_{7,4}c_3)c_2^4 + (l_{7,5}c_3 + l_{7,6}c_4)c_2^3 + (-3l_{6,3}c_3 + l_{7,8}c_2^3 + l_{7,9}c_4 \\
&\quad + 2l_{7,10}c_5)c_2^2 + 4l_{7,11}c_3^3 + 6c_4^2 + 12l_{4,1}c_3^4 + 10c_3c_5 + 2(l_{7,13}c_3^2 + l_{7,14}c_3c_4 - 4l_{4,1}c_5 - 2c_6)c_2, \\
L_8 &= l_{8,1}c_2^6 + l_{8,2}c_2^7 + (-87l_{6,3} + 28l_{8,4}c_3)c_2^5 + (2l_{8,5}c_3 + l_{8,6}c_4)c_2^4 + (90l_{6,3}c_3 + l_{8,8}c_3^2 + l_{8,9}c_4 \\
&\quad + 2l_{8,10}c_5)c_2^3 + (l_{8,11}c_3^2 - 9l_{6,3}c_4 + 2l_{8,13}c_3c_4 + 168l_{4,1}c_5 - 24l_{8,15}c_4 + (160 - 15l_{8,17})c_6) \\
&\quad + 2(l_{8,18}c_3^3 + l_{9,19}c_3^2c_4 - (9l_{4,1}c_4 + 17c_5)c_4 - (16l_{4,1}c_5 + 13c_6)c_3) - (12l_{6,3}c_3^2 + l_{8,20}c_3^3 \\
&\quad + l_{8,21}c_4^2 - 8(l_{8,22}c_4 + l_{8,23}c_5)c_3 + 10(2l_{4,1}c_6 + c_7))c_2,
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{array}{lll}
l_{4,1} = h_u(0, 0), & l_{4,2} = -10 + h_{vv}(0, 0), & l_{5,1} = 8h_u(0, 0) - h_{uv}(0, 0), \\
l_{5,2} = -36 + 5h_{vv}(0, 0), & l_{5,3} = 32 - 3h_{vv}(0, 0), & l_{5,4} = -4h_u(0, 0), \\
l_{6,1} = -42h_u(0, 0) + 11h_{uv}(0, 0), & l_{6,2} = 170 - 31h_{vv}(0, 0), & l_{6,3} = h_{uu}(0, 0), \\
l_{6,4} = 524 - 74h_{vv}(0, 0), & l_{6,6} = 44h_u(0, 0) - 6h_{uv}(0, 0), & l_{6,7} = \frac{3}{2}(32 - 3h_{vv}(0, 0)), \\
l_{6,8} = -6(11 + h_{vv}(0, 0)), & l_{7,1} = 90h_u(0, 0) - 37h_{uv}(0, 0), & l_{7,2} = -165 + 38h_{vv}(0, 0), \\
l_{7,4} = -90 + 17h_{vv}(0, 0), & l_{7,5} = 292h_u(0, 0) + 82h_{uv}(0, 0), & l_{7,6} = 2(-188 + 27h_{vv}(0, 0)), \\
l_{7,8} = 2(-352 + 51h_{vv}(0, 0)), & l_{7,9} = 64h_u(0, 0) - 9h_{uv}(0, 0), & l_{7,10} = 32 - 3h_{vv}(0, 0), \\
l_{7,11} = -11 + h_{vv}(0, 0), & l_{7,13} = 40h_u(0, 0) - 6h_{uv}(0, 0), & l_{7,14} = 98 - 9h_{vv}(0, 0), \\
l_{8,1} = 780h_{uv}(0, 0) - 1362h_u(0, 0), & l_{8,2} = 4560 - 1289h_{vv}(0, 0), & l_{8,3} = -87h_{uu}(0, 0), \\
l_{8,4} = -459 + 110h_{vv}(0, 0), & l_{8,5} = 1508h_u(0, 0) - 657h_{uv}(0, 0), & l_{8,6} = 4066 - 781h_{vv}(0, 0), \\
l_{8,7} = h_{uu}(0, 0), & l_{8,8} = 9632 - 1893h_{vv}(0, 0), & l_{8,9} = 240h_{uv}(0, 0) - 836h_u(0, 0), \\
l_{8,10} = -491h_u(0, 0) + 71h_{vv}(0, 0), & l_{8,11} = 456h_{uv}(0, 0) - 1508h_u(0, 0), & l_{8,13} = -2009 + 297h_{vv}(0, 0), \\
l_{8,15} = h_{uv}(0, 0), & l_{8,17} = h_{vv}(0, 0), & l_{8,18} = 8(6h_u(0, 0) - h_{uv}(0, 0)), \\
l_{8,19} = -2(-97 + 9h_{vv}(0, 0)), & l_{8,20} = 1654 - 248h_{vv}(0, 0), & l_{8,21} = -290 + 27h_{vv}(0, 0), \\
l_{8,22} = 58h_u(0, 0) - 9h_{uv}(0, 0), & l_{8,23} = 65 - 6h_{vv}(0, 0).
\end{array}$$

Usando la expresión (3.35) obtenemos

$$f'(t_k) = f'(\xi)(L_4e_k^4 + L_5e_k^5 + L_6e_k^6 + L_7e_k^7 + L_8e_k^8) + O(e_k^9) \quad (3.36)$$

y utilizando los desarrollos (3.31) y (3.36) en el desarrollo en serie de la variable  $w_k = \frac{f(t_k)}{f(y_k)}$  obtenemos

$$w_k = M_2e_k^2 + M_3e_k^3 + M_4e_k^4 + M_5e_k^5 + M_6e_k^6 + O(e_k^7),$$

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 43

donde

$$\begin{aligned}
M_2 &= -\frac{1}{2}(2l_{4,1}c_2 + l_{4,2}c_2^2 + 2c_3), \\
M_3 &= (m_{3,1}c_2^2 + m_{3,2}c_2^3 - 2m_{3,3}c_2c_3 - 2(l_{4,1}c_3 + c_4), \\
M_4 &= \frac{1}{2}(m_{4,1}c_2^3 + m_{4,2}c_2^4 + m_{4,3}c_3^2 - (l_{6,5} + m_{4,4}c_3)c_2^2 + (m_{4,5}c_3 + m_{4,6}c_4)c_2 - 6(l_{4,1}c_4 + c_5), \\
M_5 &= m_{5,1}c_2^4 + m_{5,2}c_2^5 + 2m_{5,3}c_3^2 + (5l_{6,3} + m_{5,4}c_3)c_2 - 6m_{5,5}c_3c_4 + (m_{5,6}c_3 + m_{5,7}c_4)c_2^2 \\
&\quad - 2(l_{6,3}c_3 + m_{5,8}c_3^2 + 3m_{5,9}c_4 + m_{5,10}c_5 + c_6)c_2^5 - 2c_6)c_2, \\
M_6 &= 231l_{8,15} + m_{6,1}c_2^5 + m_{6,2}c_2^6 + 2l_{6,3}c_3^2 + (2l_{4,1} - 31l_{6,3} + m_{6,4}c_3)c_2^4 + 38c_4^2 - \frac{9}{2}h_{vv}(0,0)c_4 \\
&\quad + 5m_{6,5}c_3 + 3m_{6,6}c_4)c_2^3 + 3m_{6,7}c_4 + 2m_{6,8}c_5)c_3 + \frac{1}{2}(55l_{6,3}c_3 + 4m_{6,9}c_3^2 + m_{6,10}c_4 \\
&\quad + 3m_{6,11}c_5)c_2^2 - 5l_{4,1}c_6 + (m_{6,12}c_3^2 - 3l_{6,3}c_4 + m_{6,13}c_3c_4 + l_{8,21}c_4^2 - 8(l_{8,22}c_4 + l_{8,23}c_5)c_3 \\
&\quad + 10(2l_{4,1}c_6 + c_7))c_2,
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
m_{3,1} &= 6h_u(0,0) - h_{uv}(0,0), & m_{3,2} &= -26 + h_{vv}(0,0), & m_{3,3} &= -10 + h_{vv}(0,0), \\
m_{4,1} &= -50 + 18h_{uv}(0,0), & m_{4,2} &= 186 - 41h_{vv}(0,0), & m_{4,3} &= 38 - 4h_{vv}(0,0), \\
m_{4,5} &= 42h_u(0,0) - 8h_{uv}(0,0), & m_{4,4} &= 260 - 43h_{vv}(0,0), & m_{4,6} &= 2(29 - 3h_{vv}(0,0)), \\
m_{5,1} &= 88h_u(0,0) - 51h_{uv}(0,0), & m_{5,2} &= -284 + 85h_{vv}(0,0), & m_{5,3} &= 9h_u(0,0) - 2h_{uv}(0,0), \\
m_{5,4} &= 580 - 138h_{vv}(0,0), & m_{5,5} &= -9 + h_{vv}(0,0), & m_{5,6} &= 49h_{uv}(0,0) - 124h_u(0,0), \\
m_{5,7} &= -180 + 31h_{vv}(0,0), & m_{5,8} &= 106 - vv(0,0), & m_{5,9} &= h_{uv}(0,0) - 5h_u(0,0), \\
m_{6,1} &= h_u(0,0)(h_{vv}(0,0) - 290), & m_{5,10} &= 2h_{vv}(0,0) - 19, & m_{6,2} &= 820 - 315h_{vv}(0,0) + \frac{1}{4}h_{vv}(0,0)^2, \\
m_{6,4} &= \frac{25}{2}(55h_{vv}(0,0) - 172), & m_{6,3} &= -113 + 22h_{vv}(0,0), & m_{6,5} &= 113h_u(0,0) - 70h_{uv}(0,0), \\
m_{6,7} &= 17h_u(0,0) - 4h_{uv}(0,0), & m_{6,6} &= 53 - 13h_{vv}(0,0), & m_{6,8} &= 35 - 4h_{uu}(0,0), \\
m_{6,9} &= 2668 - 687h_{vv}(0,0), & m_{6,11} &= -154 + 27h_{vv}(0,0),
\end{aligned}$$

$$m_{6,10} = 142h_{uv}(0,0) - 348h_u(0,0), m_{6,12} = 88h_{uv}(0,0) - 20h_u(0,0), m_{6,13} = -581 + 109h_{vv}(0,0).$$

Ahora, usando como aproximación de la función  $g(u_k, v_k, w_k)$  su polinomio de Taylor asociado de orden 2 alrededor de  $(0, 0, 0)$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
g(u_k, v_k, w_k) &\approx g(0, 0, 0) + g_u(0, 0, 0)u_k + g_v(0, 0, 0)v_k + g_w(0, 0, 0)w_k + \frac{1}{2}g_{uu}(0, 0, 0)u_k^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}g_{vv}(0, 0, 0)v_k^2 + \frac{1}{2}g_{ww}(0, 0, 0)w_k^2 + g_{uv}(0, 0, 0)u_kv_k + g_{uw}(0, 0, 0)u_kw_k \\
&\quad + g_{vw}(0, 0, 0)v_kw_k.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Así, la ecuación de error resultante es

$$x_{k+1} - \xi = R_4e_k^4 + R_5e_k^5 + R_6e_k^6 + R_7e_k^7 + R_8e_k^8 + O(e_k^9), \tag{3.38}$$

donde

$$R_4 = \frac{1}{2}(-1 + g(0, 0, 0))c_2(2l_{4,1}c_2 + l_{4,2}c_2^2 + 2c_3).$$

Exigiendo la condición  $g(0, 0, 0) = 1$ , el orden del método será 5 y, simplificando, obtenemos que

$$R_5 = \frac{1}{2}(-2 + g_v(0, 0, 0))c_2^2(2l_{4,1}c_2 + l_{4,2}c_2^2 + 2c_3).$$

Si exigimos ahora  $g_v(0,0,0) = 2$ , obtenemos orden al menos 6, con

$$R_6 = \frac{1}{4}c_2((2l_{4,1}c_2 + l_{4,2}c_2^2 + 2c_3)(2(g_u(0,0,0) + g_w(0,0,0)l_{4,1})c_2 + (-12 + g_{vv}(0,0,0) + 10g_w(0,0,0) - g_w(0,0,0)l_{8,17}c - 2(-1 + g_w(0,0,0))c_3).$$

Nuevamente imponemos las condiciones  $g_u(0,0,0) = 0$ ,  $g_w(0,0,0) = 1$ ,  $g_{vv}(0,0,0) = 2 + h_{vv}(0,0)$  y  $h_u(0,0) = 0$ , para obtener orden 7 con

$$R_7 = -\frac{1}{4}(l_{4,2}c_2^4 + c_2^2c_3) [-2(g_{uv}(0,0,0) - h_{uv}(0,0))c_2 + (32 + g_{vv}(0,0,0)l_{4,2} - 2l_{8,17}c_2^2 + 2(-4 + g_{vv}(0,0,0))c_3].$$

Finalmente, las condiciones  $h_{uv}(0,0) = g_{uv}(0,0,0)$ ,  $g_{vw}(0,0,0) = 4$  y  $h_{vv}(0,0) = 4$ , nos permiten obtener el orden 8 con la siguiente ecuación del error

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2}(c_2(3c_2^2 - c_3)((6g_{uv}(0,0,0) - 4g_{uv}(0,0,0))c_2^3 + 9(-6 + g_{ww}(0,0,0))c_2^4 + (-2 + g_{ww}(0,0,0))c_3^2 + c_2^2(g_{uu}(0,0,0) - h_{uu}(0,0) + (34 - 6g_{ww}(0,0,0))c_3 - 2c_2(g_{uw}(0,0,0)c_3 + c_4)))e_k^8 + O(e_k^9),$$

concluyendo la demostración.  $\square$

Teniendo en cuenta las condiciones dadas por el Teorema 3.3.5, obtenemos el esquema iterativo de orden 8 asociado a las funciones peso  $h(u, v) = 1 + 2v + 2v^2$ , y  $g(u, v, w) = 1 + 2v + w + 3v^2 + 4vw$ , cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ t_k &= y_k - \frac{f(y_k)(f(x_k)^2 + 2f(x_k)f(y_k) + 2f(y_k)^2)}{f'(x_k)f(x_k)^2} \\ x_{k+1} &= t_k - \frac{f(t_k)\left(1 + \frac{4f(t_k)}{f(x_k)} + \frac{f(t_k)}{f(y_k)} + \frac{2f(y_k)}{f(x_k)} + \frac{3f(y_k)^2}{f(x_k)^2}\right)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

y que denotaremos en adelante por MED81.

El método (3.18) que tiene como primeros dos pasos el esquema iterativo de Chun (3.17), con cuarto orden de convergencia, es un caso particular de la familia de métodos (3.14) con orden de convergencia ocho, cuya demostración fue desarrollada mediante el Teorema 3.3.3, por lo que consideramos innecesario demostrar el siguiente resultado que establece la convergencia de la familia de métodos (3.18).

**Teorema 3.3.6** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un intervalo abierto  $I$  y siendo  $x_0$  una aproximación inicial cerca de  $\xi$ . El método definido por (3.18), tiene orden de convergencia óptimo 8 si las funciones  $H$  y  $G$  son suficientemente diferenciables, de manera que satisfagan las siguientes condiciones dadas:*

$$\begin{aligned} H(0) &= 1, & H'(0) &= 2, & G(0,0) &= 1, & G_u(0,0) &= 2, \\ G_v(0,0) &= 1, & G_{uu}(0,0) &= 2 + H''(0), & G_{uv}(0,0) &= 4, & G_{uuu}(0,0) &= -24 + 6H''(0) + H'''(0), \\ |G_{vv}(0,0)| &< +\infty. \end{aligned}$$

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 45

La ecuación del error de éste método es

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2}c_2(3c_2^2 - c_3) \\ (9(-6 + G_{vv}(0,0))c_2^4 + 2(17 - 3G_{vv}(0,0))c_2^2c_3 + (-2 + G_{vv}(0,0))c_3^2 - 2c_2c_4)e_k^8 + O(e_k^9)$$

donde  $c_k = \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$ .

Podemos observar que una de las condiciones de este teorema esta relacionada con  $G_{uuu}(0,0)$ , la que no es necesaria para la demostración del Teorema 3.3.3, pero es imprescindible para obtener posteriormente el orden de convergencia 16, en el método que mostraremos en el siguiente capítulo.

Las siguientes secciones están dedicadas a comparar los esquemas propuestos de órdenes de convergencia óptimos 4 y 8 con otros conocidos de idéntico orden. Una de las secciones analiza el comportamiento de estos métodos para obtener la órbita preliminar de un satélite artificial a partir de dos observaciones.

#### 3.4. Pruebas numéricas

Las pruebas numéricas que aparecen en esta memoria han sido llevadas a cabo utilizando aritmética de precisión variable, con 2000 dígitos de mantisa, en Matlab R2010a. El procesador de la máquina empleada para ello ha sido un Intel(r) Core(tm) i7 CPU 950@3.07GHz con una memoria RAM de 16GB.

En esta sección presentamos los resultados obtenidos al utilizar los métodos descritos de órdenes 4 y 8 para estimar los ceros de las siguientes funciones:

$f_1(x) = \sin x - x^2 + 1,$	$\xi \approx 1.409240.$
$f_2(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2,$	$\xi \approx 0.257530.$
$f_3(x) = \cos(x) - x,$	$\xi \approx 0.739085.$
$f_4(x) = (x - 1)^3 - 1,$	$\xi = 2.$
$f_5(x) = x^3 - 10,$	$\xi \approx 2.154435.$
$f_6(x) = \cos(x) - x \exp(x) + x^2,$	$\xi \approx 0.639154.$
$f_7(x) = \exp(x) - 1.5 - \arctan(x),$	$\xi \approx 0.767653.$
$f_8(x) = x^3 + 4x^2 - 10,$	$\xi \approx 1.365230.$
$f_9(x) = 8x - \cos(x) - 2x^2,$	$\xi \approx 0.128077.$
$f_{10}(x) = \arctan(x),$	$\xi = 0.$
$f_{11}(x) = \exp(x) - 4x^2,$	$\xi \approx 0.714806.$
$f_{12}(x) = \left(\sin(x) - \frac{x}{2}\right)^2,$	$\xi = 0, \text{ doble.}$
$f_{13}(x) = x \exp(x^2) - \sin(x)^2 + 3 \cos(x) + 5,$	$\xi \approx -1.201576.$
$f_{14}(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - 2 \sin(x) - x^2 + 3,$	$\xi \approx 2.331968.$
$f_{15}(x) = x^4 + \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) - 5,$	$\xi = \sqrt{2}.$
$f_{16}(x) = 10x \exp(-x^2) - 1,$	$\xi \approx 1.679631.$
$f_{17}(x) = \exp(-x) + \cos(x),$	$\xi \approx 1.746140.$
$f_{18}(x) = \sqrt{x^4 + 8 \sin\left(\frac{\pi}{x^2 + 2}\right) + \frac{x^3}{x^4 + 1} - \sqrt{6} + \frac{8}{17},$	$\xi = -2.$

Compararemos nuestros métodos de orden 4 con otros ya conocidos, a los que ya nos hemos referido en la Sección 3.1. En particular, vamos a utilizar el método diseñado por King, (ver (3.4)), el método

de Kung y Traub, (3.5), el esquema de Zhao et al., véase (3.6) y el conocido método de Ostrowski, que no es más que un caso particular de la familia de King con  $\beta = -2$ . Estos métodos han sido denotados por MEDK4, MEDOS4, MEDKT4 y MEDZ4, respectivamente.

En las tablas siguientes aparecen los resultados obtenidos sobre las funciones desde  $f_1(x)$  a  $f_{18}(x)$ , teniendo en cuenta que el criterio de parada ha sido, en todas ellas,  $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-500}$  ó  $|f(x_{k+1})| < 10^{-500}$ . Para cada una de las funciones, mostraremos la estimación inicial utilizada,  $x_0$ , la raíz  $\xi$  a la que tiende el proceso, las estimaciones del error cometido en la última iteración,  $|x_{k+1} - x_k|$  y  $|F(x_{k+1})|$ , el número de iteraciones que ha necesitado para converger, el orden computacional de convergencia aproximado,  $\rho$  y el tiempo de computación en segundos, e-time, que ha sido calculado como la media de 100 ejecuciones consecutivas, mediante el comando `cputime`.

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales47

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_1$ $x_0 = 1$	MED41	1.409240	3.8 e-196	4.8 e-782	6	3.9998	0.1894
	MED42	1.409240	6.1 e-190	4.5 e-757	6	4.0000	0.1961
	MED44	1.409240	2.6 e-277	2.1 e-1107	6	4.0000	0.2017
	MED45	1.409240	6.0 e-295	1.2 e-1177	6	4.0000	0.2258
	MED46	1.409240	7.3 e-197	1.5 e-784	6	4.0000	0.2677
	MEDK4	1.409240	2.0 e-315	2.2 e-1259	6	4.0000	0.2708
	MEDKT4	1.409240	6.5 e-421	1.6 e-1681	6	4.0000	0.1663
	MEDZ4	1.409240	1.3 e-249	4.7 e-998	6	4.0000	0.2435
	MEDOS4	1.409240	7.3 e-139	1.3 e-553	5	4.0000	0.1101
$f_2$ $x_0 = 1$	MED41	0.257530	8.0 e-271	1.9 e-1083	5	4.0000	0.2066
	MED42	0.257530	5.6 e-260	3.8 e-1039	5	4.0000	0.2315
	MED44	0.257530	2.3 e-255	6.3 e-1021	5	4.0000	0.2167
	MED45	0.257530	1.8 e-254	2.5 e-1017	5	4.0000	0.2655
	MED46	0.257530	4.8 e-246	3.0 e-983	5	4.0000	0.3044
	MEDK4	0.257530	6.9 e-263	2.5 e-1051	5	4.0000	0.2482
	MEDKT4	0.257530	1.9 e-260	1.6 e-1041	5	4.0000	0.2249
	MEDZ4	0.257530	8.1 e-257	8.6 e-1027	5	4.0000	0.2767
	MEDOS4	0.257530	1.8 e-258	1.6 e-1033	5	4.0000	0.1420
$f_3$ $x_0 = 1$	MED41	0.739085	1.1 e-268	1.7 e-1073	5	4.0000	0.1388
	MED42	0.739085	1.1 e-248	2.9 e-993	5	4.0000	0.1843
	MED44	0.739085	9.4 e-330	5.2 e-131	5	4.0000	0.1391
	MED45	0.739085	1.8 e-347	5.6 e-1390	5	4.0000	0.1614
	MED46	0.739085	8.2 e-257	7.8 e-1026	5	4.0000	0.1970
	MEDK4	0.739085	1.9 e-279	1.0 e-1116	5	4.0000	0.1529
	MEDKT4	0.739085	1.4 e-286	2.5 e-1145	5	4.0000	0.1819
	MEDZ4	0.739085	6.9 e-308	5.8 e-1231	5	4.0000	0.1658
	MEDOS4	0.739085	4.2 e-296	1.3 e-1183	5	4.0000	0.1507
$f_4$ $x_0 = 2.5$	MED41	2.0000	7.9 e-310	4.1 e-1236	6	4.0000	0.2473
	MED42	2.0000	1.1 e-283	2.3 e-1131	6	4.0000	0.2884
	MED44	1.9999	2.0 e-183	6.6 e-731	5	4.0000	0.2514
	MED45	1.9999	2.1 e-388	1.1 e-1550	6	4.0000	0.2452
	MED46	1.9999	2.7 e-377	1.9 e-1505	7	3.9999	0.3452
	MEDK4	2.0000	1.3 e-357	2.4 e-1427	6	4.0000	0.2964
	MEDKT4	2.0000	2.1 e-397	1.1 e-1586	6	4.0000	0.2033
	MEDZ4	1.9999	7.0 e-141	2.4 e-561	5	4.0000	0.2297
	MEDOS4	2.0000	2.0 e-490	3.1 e-1959	5	4.0000	0.2357
$f_5$ $x_0 = 2$	MED41	2.154435	5.6 e-225	6.3 e-897	5	4.0000	0.1582
	MED42	2.154435	6.7 e-212	1.9 e-844	5	4.0000	0.2305
	MED44	2.154435	1.3 e-262	4.6 e-1048	5	4.0000	0.1819
	MED45	2.154435	5.6 e-258	2.8 e-1029	5	4.0000	0.2597
	MED46	2.154435	4.7 e-202	7.9 e-805	5	4.0000	0.2878
	MEDK4	2.154435	3.2 e-248	4.0 e-990	5	4.0000	0.2855
	MEDKT4	2.154435	7.9 e-268	8.9 e-1069	5	4.0000	0.1383
	MEDZ4	2.154435	1.4 e-300	1.7 e-1200	5	4.0000	0.2956
	MEDOS4	2.154435	1.1 e-303	1.3 e-1212	5	4.0000	0.1965

Tabla 3.1: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones  $f_1$  a  $f_5$

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_6$ $x_0 = 1$	MED41	0.639154	1.4 e-448	2.0 e-1791	6	4.0000	0.2418
	MED42	0.639154	1.8 e-414	6.3 e-1655	6	4.0000	0.3052
	MED44	0.639154	1.5 e-159	1.1 e-635	5	4.0000	0.2803
	MED45	0.639154	7.2 e-482	7.5 e-1925	6	4.0000	0.3733
	MED46	0.639154	6.6 e-321	2.6 e-1280	7	4.0000	0.4803
	MEDK4	0.639154	4.2 e-129	8.7 e-514	5	4.0000	0.2485
	MEDKT4	0.639154	8.3 e-144	7.3 e-573	5	4.0000	0.3541
	MEDZ4	0.639154	1.8 e-251	9.6 e-1004	5	4.0000	0.3568
MEDOS4	0.639154	3.9 e-187	8.3 e-747	5	4.0000	0.2388	
$f_7$ $x_0 = 1$	MED41	0.767653	6.6 e-146	1.0 e-580	5	4.0000	0.2167
	MED42	0.767653	5.3 e-138	5.2 e-549	5	4.0000	0.3264
	MED44	0.767653	5.6 e-222	1.4 e-885	5	4.0000	0.2191
	MED45	0.767653	1.1 e-174	2.9 e-696	5	4.0000	0.3377
	MED46	0.767653	7.9 e-339	4.9 e-1352	6	4.0000	0.4025
	MEDK4	0.767653	2.7 e-161	1.6 e-642	5	4.0000	0.1289
	MEDKT4	0.767653	6.3 e-174	3.2 e-693	5	4.0000	0.2250
	MEDZ4	0.767653	4.1 e-275	7.5 e-939	5	4.0000	0.3306
MEDOS4	0.767653	1.6 e-200	6.2 e-800	5	4.0000	0.2467	
$f_8$ $x_0 = 1$	MED41	1.365230	1.8 e-99	1.3 e-1580	6	4.0000	0.3290
	MED42	1.365230	1.4 e-91	1.8 e-1453	6	4.0000	0.2548
	MED44	1.365230	1.6 e 107	1.4 e-1712	6	4.0000	0.3882
	MED45	1.365230	6.7 e-134	7.7 e-533	5	4.0000	0.3725
	MED46	1.365230	9.2 e-368	165 e-1467	6	4.0000	0.3662
	MEDK4	1.365230	1.5 e-127	3.1 e-507	5	4.0000	0.3738
	MEDKT4	1.365230	2.7 e-151	1.7 e-602	5	4.0000	0.3263
	MEDZ4	1.365230	8.3 e-143	2.3 e-565	5	4.0000	0.4200
MEDOS4	1.365230	1.5 e-187	7.1 e-748	5	4.0000	0.2891	
$f_9$ $x_0 = 1$	MED41	0.128077	1.5 e-337	1.7 e-1348	6	4.0000	0.2377
	MED42	0.128077	5.8 e-145	5.6 e-581	5	4.0000	0.3808
	MED44	0.128077	8.1 e-292	2.4 e-1166	6	4.0000	0.3931
	MED45	0.128077	1.1 e-490	1.3 e-1961	6	4.0000	0.3530
	MED46	0.128077	1.7 e-329	5.9 e-1316	6	4.0000	0.4515
	MEDK4	0.128077	1.3 e-447	4.5 e-1789	6	4.0000	0.2100
	MEDKT4	0.128077	3.0 e-134	9.5 e-536	5	4.0000	0.3243
	MEDZ4	0.128077	1.5 e-127	1.9 e-510	5	4.0000	0.3430
MEDOS4	0.128077	8.3 e-163	3.0 e-650	5	4.0000	0.2225	
$f_{10}$ $x_0 = 0.5$	MED41	0.000000	1.6 e-251	2.2 e-1255	5	5.0000	0.1287
	MED42	0.000000	2.8 e-289	3.5 e-1444	5	5.0000	0.2307
	MED44	0.000000	7,1 e-459	4.0 e-2292	5	5.0000	0.1934
	MED45	0.000000	1.3 e-392	8.0 e-1961	5	5.0000	0.1694
	MED46	0.000000	4.1 e-285	2.7 e-1423	5	5.0000	0.3166
	MEDK4	0.000000	1.1 e-274	3.1 e-1371	5	5.0000	0.1351
	MEDKT4	0.000000	1.1 e-288	3.4 e-1441	5	5.0000	0.1826
	MEDZ4	0.000000	7.7 e-350	5.9 e-1747	5	5.0000	0.2600
MEDOS4	0.000000	4.2 e-302	2.8 e-1508	5	5.0000	0.1682	

Tabla 3.2: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones  $f_6$  a  $f_{10}$

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 49

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_{11}$ $x_0 = 1$	MED41	0.714806	8.5 e-144	5.3 e-572	5	4.0000	0.2233
	MED42	0.714806	3.2 e-135	1.2 e-537	5	4.0000	0.2251
	MED44	0.714806	1.4 e-227	6.5 e-908	5	4.0000	0.2859
	MED45	0.714806	6.0 e-199	3.9 e-793	5	4.0000	0.2744
	MED46	0.714806	3.1 e-372	2.0 e-1485	6	4.0000	0.3059
	MEDK4	0.714806	9.2 e-157	4.4 e-624	5	4.0000	0.2225
	MEDKT4	0.714806	1.3 e-166	1.0 e-663	5	4.0000	0.3188
	MEDZ4	0.714806	8.1 e-214	1.2 e-853	5	4.0000	0.2279
	MEDOS4	0.714806	3.6 e-184	3.8 e-734	5	4.0000	0.1816
$f_{12}$ $x_0 = 0.5$	MED41	0.000000	7.8 e-250	3.1 e-500	493	1.0000	70.0533
	MED42	0.000000	8.1 e-250	3.4 e-500	493	1.0000	80.1442
	MED44	0.000000	1.9 e-249	6.7 e-500	374	1.0000	66.7409
	MED45	0.000000	3.2 e-249	5.3 e-500	276	1.0000	53.5009
	MED46		n.c		n.c		
	MEDK4	0.000000	1.4 e-249	8.9 e-500	465	1.0000	73.5159
	MEDKT4	0.000000	6.4 e-250	1.5 e-500	448	1.0000	70.5389
	MEDZ4	0.000000	5.1 e-250	6.4 e-500	402	1.0000	75.9783
	MEDOS4	0.000000	7.5 e-250	1.6 e-500	414	1.0000	69.8863
$f_{13}$ $x_0 = -1$	MED41	-1.201576	3.2 e-273	2.4 e-1088	6	4.0000	0.5725
	MED42	-1.201576	1.0 e-286	2.2 e-1142	6	4.0000	0.7573
	MED44	-1.201576	2.8 e-341	6.7 e-1361	7	4.0000	0.6298
	MED45	-1.201576	5.5 e-367	1.4 e-1463	6	4.0000	0.6065
	MED46	-1.201576	6.9 e-246	1.5 e-978	6	4.0000	0.8368
	MEDK4	-1.201576	4.3 e-410	3.8 e-1636	6	4.0000	0.3671
	MEDKT4	-1.201576	1.6 e-137	3.6 e-546	5	4.0000	0.6191
	MEDZ4	-1.201576	2.2 e-277	1.1 e-1105	6	4.0000	0.8030
	MEDOS4	-1.201576	2.3 e-266	7.9 e-1063	5	4.0000	0.6178
$f_{14}$ $x_0 = 2$	MED41	2.331968	7.1 e-332	2.9 e-1327	5	4.0000	0.7058
	MED42	2.331968	1.1 e-361	1.6 e-1446	5	4.0000	0.7786
	MED44	2.331968	7.5 e-320	8.5 e-1279	5	4.0000	0.9969
	MED45	2.331968	6.5 e-319	5.1 e-1275	5	4.0000	1.0798
	MED46	2.331968	4.5 e-308	2.1 e-1231	5	4.0000	1.0253
	MEDK4	2.331968	4.6 e-327	7.5 e-1308	5	4.0000	0.6281
	MEDKT4	2.331968	4.9 e-325	1.1 e-1299	5	4.0000	0.8512
	MEDZ4	2.331968	1.9 e-321	2.9 e-1285	5	4.0000	0.9517
	MEDOS4	2.331968	3.5 e-323	2.7 e-1292	5	3.9998	1.0154
$f_{15}$ $x_0 = 1$	MED41	1.414214	6.2 e-137	3.7 e-544	5	4.0000	0.6375
	MED42	1.414214	1.8 e-130	3.2 e-518	5	4.0000	0.4947
	MED44	1.414214	5.6 e-137	1.5 e-544	5	4.0000	0.6075
	MED45	1.414214	8.5 e-134	1.0 e-531	5	4.0000	0.7043
	MED46	1.414214	3.4 e-446	1.1 e-1780	6	4.0000	0.7703
	MEDK4	1.414214	9.6 e-143	9.5 e-568	5	4.0000	0.4455
	MEDKT4	1.414214	2.3 e-150	1.2 e-598	5	4.0000	0.5991
	MEDZ4	1.414214	9.1 e-143	6.2 e-568	5	4.0000	0.6899
	MEDOS4	1.414214	7.0 e-156	5.6 e-621	5	4.0000	0.6407

Tabla 3.3: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones  $f_{11}$  a  $f_{15}$

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_{16}$ $x_0 = 2$	MED41	1.679631	7.9 e-108	2.5 e-693	6	4.0000	0.7658
	MED42	1.679631	1.8 e-124	1.0 e-699	6	4.0000	0.4783
	MED44	1.679631	1.2 e-266	3.8 e-1270	6	4.0000	0.5887
	MED45	1.679631	3.4 e-306	8.0 e-1010	6	4.0000	0.8077
	MED46	1.679631	3.4 e-306	5.1 e-677	6	4.0000	0.8833
	MEDK4	1.679631	1.8 e-293	8.2 e-1171	6	4.0000	0.3942
	MEDKT4	1.679631	3.2 e-405	4.6 e-1618	6	4.0000	0.7014
	MEDZ4	1.679631	7.7 e-244	6.7 e-974	6	4.0000	0.5472
	MEDOS4	1.679631	4.3 e-139	7.7 e-544	5	4.0000	0.7371
$f_{17}$ $x_0 = 1.95$	MED41	1.746140	3.4 e-250	5.5 e-1000	5	4.0000	0.1760
	MED42	1.746140	1.0 e-288	1.5 e-1154	5	4.0000	0.2570
	MED44	1.746140	9.7 e-327	1.5 e-1306	5	4.0000	0.3385
	MED45	1.746140	1.7 e-342	2.0 e-1369	5	4.0000	0.4332
	MED46	1.746140	2.6 e-257	1.1 e-1028	5	4.0000	0.2466
	MEDK4	1.746140	1.2 e-262	5.7 e-1050	5	4.0000	0.2688
	MEDKT4	1.746140	1.3 e-270	8.7 e-1082	5	4.0000	0.3444
	MEDZ4	1.746140	2.3 e-296	6.1 e-1185	5	4.0000	0.4150
	MEDOS4	1.746140	9.0 e-280	1.6 e-1118	5	4.0000	0.3049
$f_{18}$ $x_0 = -1.8$	MED41	-2	7.5 e-143	5.8 e-570	5	4.0000	1.7779
	MED42	-2	7.2 e-152	3.5 e-606	5	4.0000	1.7978
	MED44	-2	5.2 e-183	4.1 e-731	5	4.0000	1.9030
	MED45	-2	1.5 e-207	2.2 e-829	5	4.0000	1.8236
	MED46	-2	3.2 e-148	1.7 e-591	5	4.0000	1.9093
	MEDK4	-2	1.9 e-161	1.7 e-644	5	4.0000	2.5807
	MEDKT4	-2	3.4 e-174	1.6 e-695	5	4.0000	1.8567
	MEDZ4	-2	9.7 e-219	7.0 e-874	5	4.0000	2.1545
	MEDOS4	-2	3.1 e-188	8.7 e-752	5	4.0000	1.8944

Tabla 3.4: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones  $f_{16}$  a  $f_{18}$ 

El comportamiento de los distintos métodos con orden de convergencia cuatro sobre las funciones seleccionadas ha sido variado, pues éste depende obviamente de las características del método utilizado, así como de la complejidad de la función. Hemos observado que el orden de convergencia computacional aproximado obtenido por los diferentes métodos coincide con el teórico excepto sobre las funciones  $f_{10}$  y  $f_{12}$ , donde es cinco y uno respectivamente. Ello es debido a que la derivada segunda de la función  $f_{10}$  se anula en la raíz, mientras que el cero de la función  $f_{12}$  es doble.

Respecto al número de iteraciones obtenidas sobre la función  $f_4$ , el método MED46 realizó siete, los métodos MED44, MEDZ4 y MEDOS4 cinco y los demás seis; sobre la función  $f_6$  el método MED46 realizó siete, mientras que los métodos MED41, MED42, MED43, y MED46 realizaron seis y los demás métodos cinco, observamos que el método MED46 necesitó una iteración más que los otros sobre las funciones  $f_7$ ,  $f_{11}$  y  $f_{15}$ . Sin embargo, el método MEDOS4 utiliza una iteración menos que los restantes sobre las funciones  $f_1$  y  $f_{16}$ , mientras que al considerar la función  $f_8$  los métodos MED45, MEDKT4, MEDT4, MEDZ4 y MEDOS4 realizaron cinco iteraciones y los restantes una iteración más. Sobre  $f_9$  los métodos MED42, MEDT4, MEDZ4 y MEDOS4 tienen cinco iteraciones y los restantes métodos una iteración más; en la función  $f_{13}$  MED44 realizó siete iteraciones y los métodos MEDKT4 y MEDOS4 realizaron cinco iteraciones, una menos que los restantes métodos. Sobre la función  $f_{12}$  el número de iteraciones es muy elevado, siendo los esquemas MED44 y MED45 los que mejores resultados aportan con 374 y 276 respectivamente, las demás efectuaron por encima de las 400 iteraciones. En el caso de las restantes siete funciones, los diferentes métodos se comportaron con igual número de iteraciones sobre cada función.

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales51

Las dos estimaciones del error (el valor absoluto de la diferencia entre las dos últimas iteraciones y el valor absoluto de la función evaluada en la última iteración), no se comportan de la misma manera en los diferentes métodos iterativos, pero sí podemos asegurar que nuestros nuevos métodos sobre las funciones  $f_2, f_3, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{14}, f_{16}$  y  $f_{17}$  tienen mejores resultados que los demás. También hemos observado que al menos uno de nuestros nuevos métodos tiene menor error sobre las funciones  $f_4, f_6, f_7, f_9$  y  $f_{18}$ , mientras que sobre las funciones  $f_1, f_5, f_8, f_{13}$  y  $f_{15}$  al menos dos de los métodos ya estudiados tienen menor error que los nuestros. En el caso de  $f_{12}$  los resultados son muy parejos para todos.

En cuanto a los tiempos de computación, entre los cuatro primeros lugares tenemos tres de nuestros nuevos métodos sobre las funciones  $f_2, f_{12}, f_{17}$  y  $f_{18}$  y sobre las demás funciones tenemos dos de nuestros nuevos métodos, exceptuando la función  $f_9$ , en la que sólo hay un nuevo método con los mejores resultados.

En general, consideramos que los nuevos métodos son competitivos en relación con los métodos conocidos utilizados.

A continuación, compararemos los métodos nuestros de orden 8 que han sido denotados previamente por MED81, MED82, MED83 y MED84 con otros ya conocidos. Todos los esquemas diseñados por otros autores tienen en común la técnica de las funciones peso y corresponden a trabajos recientes en el área de investigación. En primer lugar, utilizaremos el método de Džunić y Petković (ver (3.9)); así como el método diseñado por Soleymani et al. (ver (3.10)); el esquema de Kim, cuya expresión se puede ver en (3.7) y el reciente método publicado por Khan et al. de octavo orden (ver (3.8)). Estos métodos los hemos denotado respectivamente MEDD8, MEDS8, MEDK8 y MEDF8, respectivamente.

Los métodos de orden ocho comparados entre sí han tenido un comportamiento diferente, es decir, no hay homogeneidad en los resultados sobre las funciones seleccionadas, pero sí todos coinciden al obtener la misma solución ó raíz de cada una de las funciones seleccionadas a partir del valor inicial escogido previamente.

Al observar  $\rho$ , constatamos que éste coincide con el valor teórico, con ligeras diferencias en algunos casos, aunque en el caso del método MEDK8 en las funciones  $f_4, f_5$ , se han obtenido valores próximos a nueve. Sobre la función  $f_{10}$  se obtiene un orden de convergencia computacional aproximado próximo a 11 en los métodos MED83 Y MEDK8; en los otros métodos se aproximan a nueve ó es nueve. En la función  $f_{12}$  el ACOC es uno debido a la multiplicidad de la raíz; sobre la mayoría de las restantes funciones los métodos obtienen aproximadamente orden 8 ó exactamente 8. Ésto no ocurre para el método MEDF8, pues en ninguna de las funciones evaluadas alcanza el orden 8, siendo por lo general 5.

Con relación al número de iteraciones necesarias, los métodos realizan un total de tres a cinco iteraciones; sólo sobre la función  $f_{12}$  se obtiene una cantidad entre 264 y 447 de iteraciones. Queremos destacar que sobre  $f_9, f_{10}$  y  $f_{18}$  el número de iteraciones es igual para todos los métodos, mientras que sobre  $f_4, f_6, f_8, f_{11}, f_{13}, f_{14}, f_{15}$  y  $f_{16}$  el método MEDF8 tiene una iteración más que los demás, mientras que en las otras funciones, la diferencia de iteraciones entre los métodos es al menos una.

Respecto al valor absoluto de la diferencia entre las dos últimas iteraciones y el valor absoluto de la función evaluada en la última iteración, no se aprecian grandes diferencias. En cuanto a los tiempos de computación, observamos que dos de los métodos propuestos están entre los que mejor se comportan sobre las funciones  $f_{11}, f_{12}, f_{13}$  y  $f_{14}$ , mientras que sobre las restantes funciones al menos tres de los nuevos métodos figuran entre los que dan mejores resultados. Debemos destacar que el método MEDF8 generalmente ocupa el último lugar.

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_1$ $x_0 = 1.01$	MED81	1.409624	2.8 e-185	1.2 e-1383	4	8.0002	0.1345
	MED82	1.409624	1.7 e-252	2.7 e-2008	5	8.0000	0.1816
	MED83	1.409624	4.0 e-86	9.3 e-684	5	8.0201	0.1760
	MED84	1.409624	3.9 e-107	8.9 e-852	4	7.9935	0.1663
	MEDD8	1.409624	1.5 e-271	2.7 e-2008	4	8.0000	0.1892
	MEDS8	1.409624	1.3 e-176	7.3 e-908	4	8.0004	0.1973
	MEDK8	1.409624	1.6 e-118	4.9 e-944	4	7.9995	0.2040
	MEDF8	1.409624	2.0 e-315	8.9 e-852	5	5.0000	0.3201
$f_2$ $x_0 = 1$	MED81	0.257530	4.5 e-420	0.0	4	8.0000	0.1962
	MED82	0.257530	3.0 e-424	0.0	4	8.0000	0.1819
	MED83	0.257530	8.7 e-493	0.0	4	8.0000	0.1871
	MED84	0.257530	4.2 e-420	0.0	4	8.0244	0.1984
	MEDD8	0.257530	7.3 e-424	2.7 e-2008	4	8.1062	0.2158
	MEDS8	0.257530	7.4 e-416	2.7 e-2008	4	8.0251	0.2420
	MEDK8	0.257530	5.0 e-479	0.0	3	7.9085	0.2656
	MEDF8	0.257530	3.1 e-195	3.5 e-977	4	5.0000	0.3583
$f_3$ $x_0 = 1$	MED81	0.739085	5.1 e-499	1.3 e-2008	4	7.9194	0.1336
	MED82	0.739085	2.4 e-483	1.3 e-2008	4	7.9003	0.1760
	MED83	0.739085	9.4 e-70	1.4 e-555	3	7.9044	0.1359
	MED84	0.739085	3.6 e-64	1.7 e-510	3	7.9241	0.1600
	MEDD8	0.739085	7.4 e-69	1.1 e-548	3	7.9607	0.2073
	MEDS8	0.739085	2.5 e-73	3.0 e-515	3	7.9926	0.1832
	MEDK8	0.739085	3.0 e-72	5.2 e-576	3	7.9262	0.1822
	MEDF8	0.739085	2.8 e-171	5.4 e-856	4	5.0000	0.3239
$f_4$ $x_0 = 2.5$	MED81	2.000000	2.9 e-141	9.7 e-1123	4	7.9991	0.2801
	MED82	2.000000	2.3 e-127	4.7 e-1011	4	7.9979	0.2512
	MED83	1.999999	2.2 e-165	3.9 e-1316	4	8.0005	0.2557
	MED84	2.000000	8.2 e-165	1.4 e-1311	4	7.9996	0.2915
	MEDD8	2.000000	2.2 e-219	1.1 e-1748	4	8.0000	0.3171
	MEDS8	1.999999	1.2 e-224	7.2 e-1791	4	8.0000	0.3792
	MEDK8	2.000000	7.0 e-246	0.0	4	9.0001	0.3496
	MEDF8	1.999999	1.2 e-255	1.2 e-1274	5	5.0000	0.4322
$f_5$ $x_0 = 2$	MED81	2.154435	1.0 e-442	4.3 e-2007	4	8.0401	0.2220
	MED82	2.154435	6.3 e-50	2.7 e-2007	4	8.0797	0.1751
	MED83	2.154435	4.7 e-58	4.3 e-2007	4	8.0657	0.2113
	MED84	2.154435	7.0 e-464	2.1 e-2007	4	8.0539	0.1986
	MEDD8	2.154435	2.3 e-74	3.4 e-591	3	8.0070	0.2155
	MEDS8	2.154435	3.5 e-65	7.3 e-517	3	8.0422	0.2965
	MEDK8	2.154435	2.2 e-75	9.2 e-673	3	9.0506	0.1927
	MEDF8	2.154435	4.1 e-143	5.9 e-713	4	5.0000	0.3935
$f_6$ $x_0 = 1$	MED81	0.639154	2.3 e-211	1.2 e-1684	4	8.0000	0.3370
	MED82	0.639154	4.9 e-190	2.1 e-1513	4	7.9999	0.3843
	MED83	0.639154	1.8 e-231	9.8 e-1846	4	8.0000	0.3760
	MED84	0.639154	3.0 e-252	1.3 e-2008	4	8.0000	0.4088
	MEDD8	0.639154	2.9 e-395	4.0 e-2008	4	7.8589	0.3504
	MEDS8	0.639154	3.7 e-281	1.3 e-1715	4	8.0000	0.4542
	MEDK8	0.639154	1.0 e-305	1.3 e-2008	4	7.0000	0.4461
	MEDF8	0.639154	9.5 e-360	7.2 e-1796	5	5.0000	0.5612

Tabla 3.5: Resultados obtenidos por los métodos de orden 8 sobre las funciones  $f_1$  a  $f_6$

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 53

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_7$ $x_0 = 1$	MED81	0.767653	5.1 e-272	1.3 e-2008	4	8.0000	0.3710
	MED82	0.767653	3.3 e-251	2.1 e-2002	4	8.0000	0.3900
	MED83	0.767653	1.1 e-305	2.7 e-2008	4	8.0000	0.4099
	MED84	0.767653	1.5 e-299	1.3 e-2008	4	8.0000	0.2879
	MEDD8	0.767653	6.5 e-370	2.7 e-2008	4	7.9070	0.2861
	MEDS8	0.767653	9.1 e-357	1.3 e-2008	4	7.8122	0.4190
	MEDK8	0.767653	5.7 e-359	2.7 e-2008	3	7.9795	0.2661
	MEDF8	0.767653	4.3 e-442	1.3 e-2008	5	5.0000	0.5177
$f_8$ $x_0 = 1$	MED81	1.365230	9.9 e-237	6.4 e-1888	4	8.0000	0.4184
	MED82	1.365230	9.1 e-134	1.0 e-1065	4	8.0000	0.4059
	MED83	1.365230	2.0 e-184	7.3 e-1470	4	8.0000	0.4596
	MED84	1.365230	9.4 e-211	1.9 e-1680	4	7.9999	0.4250
	MEDD8	1.365230	3.9 e-366	0.0	4	8.0378	0.3036
	MEDS8	1.365230	5.1 e-273	0.0	4	8.0000	0.5169
	MEDK8	1.365230	9.2 e-262	0.0	4	8.0000	0.5249
	MEDF8	1.365230	4.2 e-425	0.0	5	4.9999	0.3820
$f_9$ $x_0 = 1$	MED81	0.128077	2.8 e-222	2.6 e-1775	4	8.0000	0.5061
	MED82	0.128077	3.7 e-97	6.7 e-774	4	7.9894	0.4453
	MED83	0.128077	1.2 e-140	1.3 e-1122	4	8.0000	0.4004
	MED84	0.128077	7.7 e-166	5.2 e-1324	4	7.9994	0.4930
	MEDD8	0.128077	2.9 e-289	7.6 e-2009	4	8.0000	0.5077
	MEDS8	0.128077	1.3 e-244	1.7 e-1955	4	8.0001	0.5218
	MEDK8	0.128077	3.8 e-221	1.2 e-1767	4	8.0000	0.5044
	MEDF8	0.128077	1.6 e-103	5.7 e-517	4	5.0000	0.6279
$f_{10}$ $x_0 = 0.8$	MED81	0.000000	2.8 e-197	2.8 e-1771	4	9.0000	0.4500
	MED82	0.000000	5.1 e-64	5.5 e-572	4	9.0607	0.2368
	MED83	0.000000	2.5 e-144	2.4 e-1581	4	11.0011	0.4679
	MED84	0.000000	9.2 e-121	1.2 e-1082	4	9.0008	0.2236
	MEDD8	0.000000	5.2 e-245	7.4 e-2201	4	9.0000	0.5142
	MEDS8	0.000000	2.7 e-213	1.8 e-1915	4	9.0001	0.3060
	MEDK8	0.000000	7.0 e-327	5.5 e-2988	4	10.6790	0.5311
	MEDF8	0.000000	2.4 e-210	9.1 e-1679	4	9.0008	0.4789
$f_{11}$ $x_0 = 1$	MED81	0.714806	2.7 e-263	5.4 e-2008	4	8.0000	0.4018
	MED82	0.714806	2.0 e-246	5.5 e-1964	4	8.0000	0.4507
	MED83	0.714806	2.4 e-308	5.4 e-2008	4	8.0000	0.3440
	MED84	0.714806	6.6 e-283	5.4 e-2008	4	8.0000	0.4715
	MEDD8	0.714806	8.1 e-331	5.4 e-2008	4	7.8267	0.3027
	MEDS8	0.714806	3.2 e-387	5.4 e-2008	4	7.6729	0.4361
	MEDK8	0.714806	1.6 e-343	5.4 e-2008	4	7.7926	0.4565
	MEDF8	0.714806	3.5 e-180	1.2 e-537	5	5.0000	0.7081
$f_{12}$ $x_0 = 0.5$	MED81	0.000000	1.2 e-249	2.1 e-500	347	1.0000	77.2076
	MED82	0.000000	6.6 e-250	6.9 e-501	358	1.0000	30.0323
	MED83	0.000000	6.5 e-250	7.4 e-500	225	1.0000	24.4725
	MED84	0.000000	9.8 e-250	1.0 e-500	326	1.0000	43.5539
	MEDD8	0.000000	1.6 e-249	2.0 e-500	302	1.0000	49.6313
	MEDS8	0.000000	1.2 e-249	8.8 e-501	290	1.0000	26.7002
	MEDK8	0.000000	2.1 e-249	1.8 e-500	264	1.0000	41.3733
	MEDF8	0.000000	5.0 e-250	9.2 e-501	447	1.0000	56.6269

Tabla 3.6: Resultados obtenidos por los métodos de orden 8 sobre las funciones  $f_7$  a  $f_{12}$

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_{13}$ $x_0 = -1$	MED81	-1.201576	2.0 e-203	1.4 e-1616	4	8.0000	0.8262
	MED82	-1.201576	8.2 e-75	5.6 e-597	4	7.9888	1.0326
	MED83	-1.201576	2.2 e-111	1.0 e-884	4	8.0021	1.0512
	MED84	-1.201576	8.3 e-249	7.4 e-1983	4	8.0000	0.8994
	MEDD8	-1.201576	1.2 e-383	2.2 e-2007	4	7.9681	1.0116
	MEDS8	-1.201576	3.3 e-309	2.2 e-2007	4	8.0000	1.1325
	MEDK8	-1.201576	1.8 e-180	9.1 e-1436	4	7.9999	1.1321
	MEDF8	-1.201576	1.6 e-348	1.1 e-1737	5	4.9999	1.1850
$f_{14}$ $x_0 = 2$	MED81	2.331968	7.8 e-75	4.1 e-598	3	8.0000	1.2870
	MED82	2.331968	2.3 e-75	1.6 e-602	3	8.0166	1.4158
	MED83	2.331968	2.9 e-80	9.1 e-642	3	7.9570	0.9875
	MED84	2.331968	2.4 e-74	3.0 e-594	3	8.0165	1.0301
	MEDD8	2.331968	9.9 e-73	1.3 e-580	3	7.9511	1.2241
	MEDS8	2.331968	7.7 e-72	2.7 e-573	3	7.9367	1.3119
	MEDK8	2.331968	6.0 e-80	9.7 e-639	3	7.9022	0.9058
	MEDF8	2.331968	4.6 e-206	4.0 e-1031	4	5.0000	1.7410
$f_{15}$ $x_0 = 1$	MED81	1.414214	3.1 e-213	2.7 e-1699	4	8.0000	0.3538
	MED82	1.414214	4.8 e-207	7.4 e-1649	4	8.0000	0.3527
	MED83	1.414214	2.2 e-279	0.0	4	8.0000	0.3877
	MED84	1.414214	4.4 e-210	3.1 e-1674	4	7.9999	0.3922
	MEDD8	1.414214	8.9 e-216	2.0 e-1720	4	7.9999	0.4597
	MEDS8	1.414214	1.0 e-208	1.6 e-1663	4	7.9999	0.4314
	MEDK8	1.414214	5.1 e-242	1.4 e-1929	4	8.0000	0.4985
	MEDF8	1.414214	3.8 e-480	0.0	5	4.9999	0.5264
$f_{16}$ $x_0 = 1.9$	MED81	1.679631	7.9 e-219	8.4 e-1744	4	8.0000	0.1946
	MED82	1.679631	6.9 e-77	2.1 e-607	4	7.9748	0.2238
	MED83	1.679631	6.2 e-112	1.3 e-888	4	8.0056	0.2464
	MED84	1.679631	2.2 e-157	3.3 e-1252	4	7.9994	0.2645
	MEDD8	1.679631	2.9 e-361	1.3 e-2008	4	7.9006	0.2161
	MEDS8	1.679631	1.3 e-224	3.1 e-1528	4	8.0001	0.3541
	MEDK8	1.679631	9.4 e-192	1.3 e-1785	4	8.0001	0.3509
	MEDF8	1.679631	7.9 e-358	3.3 e-1252	5	5.0002	0.4257
$f_{17}$ $x_0 = 2$	MED81	1.746140	1.4 e-455	3.4 e-2009	4	8.1195	0.2073
	MED82	1.746140	2.0 e-932	3.4 e-2009	4	8.1545	0.1368
	MED83	1.746140	1.4 e-63	3.8 e-507	3	8.1672	0.1635
	MED84	1.746140	1.7 e-463	3.4 e-2009	4	8.1179	0.2233
	MEDD8	1.746140	5.5 e-64	6.6 e-510	3	8.0641	0.2348
	MEDS8	1.746140	2.8 e-65	3.4 e-531	3	8.0363	0.2244
	MEDK8	1.746140	1.4 e-66	1.2 e-830	3	8.1237	0.2457
	MEDF8	1.746140	4.5 e-166	3.4 e-2009	4	5.0000	0.4169
$f_{18}$ $x_0 = -1.8$	MED81	-1.999999	9.7 e-257	5.4 e-2008	4	8.0000	0.9890
	MED82	-1.999999	1.2 e-210	3.0 e-1680	4	7.9998	1.0025
	MED83	-1.999999	1.7 e-278	0.0	4	8.0000	1.0853
	MED84	-1.999999	7.6 e-254	2.7 e-2008	4	8.0000	1.1524
	MEDD8	-1.999999	9.4 e-325	5.4 e-2008	4	8.2476	0.9483
	MEDS8	-1.999999	2.7 e-348	2.7 e-2008	4	8.1688	0.9805
	MEDK8	-1.999999	1.2 e-349	5.4 e-2008	4	8.3498	1.3706
	MEDF8	-1.999999	1.4 e-103	1.2 e-516	4	5.0000	1.4935

Tabla 3.7: Resultados obtenidos por los métodos de orden 8 sobre las funciones  $f_{13}$  a  $f_{18}$

En general, nuestros métodos son competitivos al compararlos con los esquemas ya conocidos, excluyendo al método MEDF8, que no tiene buenos resultados en ninguno de los indicadores evaluados y en ninguna de las funciones test. Además su orden de convergencia se comporta como si fuera 5 y no 8. Probamos en un anexo de este capítulo que, efectivamente, el orden de convergencia del esquema MEDF8 es cinco, en contra de lo que afirman sus autores en [77].

### 3.4.1. Aplicación a la determinación preliminar de órbitas

Una referencia clásica en la determinación de la órbita preliminar es F. Gauss (1777-1855), quién dedujo la órbita del planeta menor Ceres, descubierto en 1801 y después perdido. El cálculo de su trayectoria mediante el procedimiento diseñado por Gauss y el redescubrimiento de Ceres en la posición predicha por los cálculos de Gauss, marcó el reconocimiento internacional de Gauss y su obra.

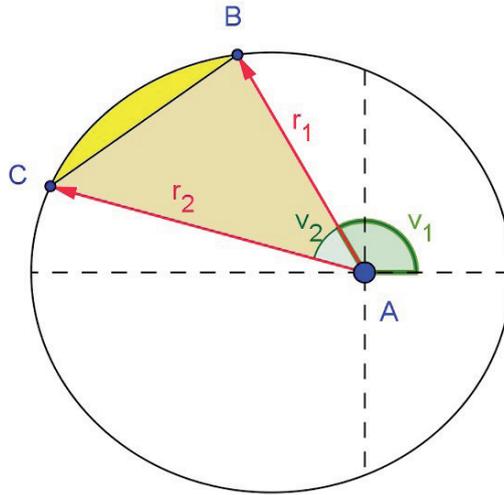


Figura 3.1: Relación de Gauss

El llamado método de Gauss se basa en la razón  $y$  entre el triángulo y el sector de la elipse definida por dos vectores de posición, a partir de observaciones astronómicas, vea Figura (3.1). Esta proporción está relacionada con la geometría de la órbita y la posición observada por

$$y = 1 + X(l + x), \tag{3.39}$$

donde

$$l = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}\right)} - \frac{1}{2}, \quad x = \sin^2\left(\frac{E_2 - E_1}{4}\right),$$

y

$$X = \frac{E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}.$$

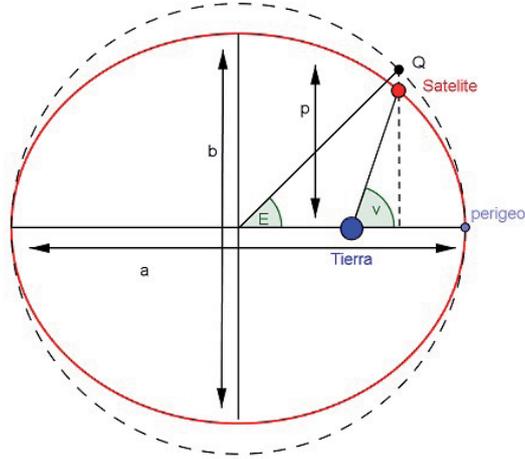


Figura 3.2: Elementos orbitales

Los ángulos  $E_i$ ,  $\nu_i$ ,  $i = 1, 2$ , (vease Figura 3.2) son las anomalías excéntricas y verdaderas, respectivamente, asociadas a las posiciones observadas  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  (denotaremos por  $r_i$  al módulo del vector  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, 2$ ). La ecuación (3.39) es, realmente, la composición de la Primera ecuación de Gauss

$$y^2 = \frac{m}{l + x}$$

y la Segunda ecuación de Gauss

$$y^2(y - 1) = mX,$$

donde  $m = \frac{\mu\tau^2}{[2\sqrt{r_1 r_2} \cos(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2})]^3}$ ,  $\mu$  es el parámetro gravitacional del movimiento y  $\tau$  es una variable temporal de tiempo modificada.

El procedimiento iterativo original utilizado para resolver la ecuación no lineal de Gauss (3.39) es el método de punto fijo (véase, por ejemplo, [55]) y se describe en el siguiente esquema:

(i) A partir de la estimación inicial  $y_0 = 1$ , obtenemos  $x_0 = \frac{m}{y_0} - l$  (es posible calcular  $m$  y  $l$  partiendo de las posiciones observadas  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  y el tiempo  $\tau$ ).

(ii) Para  $x_0$  y

$$\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) = 1 - 2x_0, \quad \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) = +\sqrt{4x_0(1 - x_0)},$$

$$\text{calculamos } E_2 - E_1. \text{ Entonces, obtenemos } X_0 = \frac{E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}.$$

(iii) Usamos la ecuación unificada de Gauss (3.39) y obtenemos

$$y_1 = 1 + X_0(l + x_0),$$

una nueva nueva iteración es calculada y, el proceso puede comenzar otra vez.

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 57

El proceso iterativo sigue como lo describimos anteriormente, para obtener nuevas estimaciones de la relación, hasta que no varíe, dentro de una tolerancia dada. Una vez que el método converge, el semieje mayor  $a$ , se puede calcular por medio de la ecuación

$$y = \frac{\sqrt{\mu p} \cdot \tau}{r_2 r_1 \sin(\nu_2 - \nu_1)} = \frac{\sqrt{\mu} \cdot \tau}{2\sqrt{a} \sqrt{r_2 r_1} \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}\right)},$$

partiendo de la última estimación de la proporción y la diferencia de las anomalías excéntricas. Entonces se inicia la última fase para determinar la velocidad y los elementos orbitales, vea Figura (3.3).

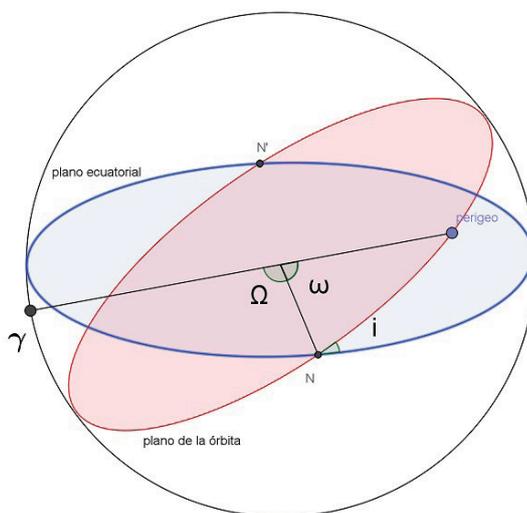


Figura 3.3: Elementos orbitales

Tengamos en cuenta que la estimación inicial utilizada es buena sólo si las observaciones son cercanas en el tiempo, es una debilidad implícita en el método de Gauss. De hecho, el esquema de punto fijo original, con convergencia lineal, se ha mejorado utilizando los últimos esquemas óptimos de orden superior. En particular, vamos a aplicar los métodos óptimos de orden ocho propuestos, en unión con algunos esquemas existentes del mismo orden de convergencia, con el fin de obtener un procedimiento modificado de Gauss más eficiente en la determinación de la órbita preliminar.

Todos los esquemas iterativos conocidos que se han introducido en el proceso son de orden de convergencia 8 óptimo y han sido diseñados con la técnica de funciones peso, por lo que son totalmente comparables con el nuevo método MED82, diseñado en la sección anterior. Dicha comparación la haremos con los esquemas de tres pasos generados por Džunić y Petković cuya expresión iterativa podemos ver en en (3.9), otro de los esquemas que utilizaremos en nuestras comparaciones es el método construido por Khan, Fardi y Sayevand (ver (3.8)) y por último compararemos nuestros métodos con el diseño por Soleymani et al. (ver (3.10)).

En las pruebas numérica hechas en este caso, se ha utilizado aritmética de precisión variable, con

4000 dígitos de mantisa en Matlab R2011b. Se han utilizado algunas órbitas de referencia, que se pueden encontrar en el texto de Escobal [55]:

- Órbita de prueba I. Utilizaremos los vectores de posición observados

$$\vec{r}_1 = [2.46080928705339, 2.04052290636432, 0.14381905768815]$$

y

$$\vec{r}_2 = [1.98804155574820, 2.50333354505224, 0.31455350605251],$$

medidos en radios de la Tierra (e.r.) en los instantes  $t_1 = 0$  y  $t_2 = 0.01044412000000$  medidos en días Julianos (J.D.). Los elementos orbitales correspondientes a la geometría de la órbita son el semieje mayor  $a = 4$  e.r., la excentricidad  $e = 0.2$ , la época del perigeo  $T_0 = 0h0m0s$ , y los ángulos de Euler que encajan en la órbita del espacio son la ascensión recta del nodo ascendente,  $\Omega = 30^\circ$ , el argumento del perigeo,  $\omega = 10^\circ$  y la inclinación de la órbita  $i = 15^\circ$ .

- Órbita de prueba II. Vectores de posición y tiempos:

$$\vec{r}_1 = [-1.75981065999937, 1.68112802634201, 1.16913429510899] \text{ e.r., } t_1 = 0 \text{ J.D.,}$$

$$\vec{r}_2 = [-2.23077219993536, 0.77453561301361, 1.34602197883025] \text{ e.r., } t_2 = 0.01527809 \text{ J.D.,}$$

Elementos orbitales:  $\Omega = 80^\circ$ ,  $\omega = 60^\circ$ ,  $i = 30^\circ$ ,  $a = 3$  e.r.,  $e = 0.1$ ,  $T_0 = 0h0m0s$ .

- Órbita de prueba III. Vectores de posición y tiempos:

$$\vec{r}_1 = [0.41136206679761, -1.66250000000000, 0.82272413359522] \text{ e.r., } t_1 = 0 \text{ J.D.,}$$

$$\vec{r}_2 = [0.97756752977209, -1.64428006097667, -0.04236299091612] \text{ e.r., } t_2 = 0.01316924 \text{ J.D.,}$$

Elementos orbitales:  $\Omega = 120^\circ$ ,  $\omega = 150^\circ$ ,  $i = 60^\circ$ ,  $a = 2$  e.r.,  $e = 0.05$ ,  $T_0 = 0h0m0s$ .

Mediante el uso de estos vectores de posición y los tiempos asociados, vamos a considerar que la solución aportada por el esquema de Newton con una precisión de  $10^{-3998}$  es la solución exacta  $y_{ex}$ . A continuación vamos a comparar el error exacto en las tres primeras iteraciones del método de orden ocho propuesto MED82 y los esquemas conocidos MEDF8, MEDD8 y MEDS8. También se incluyen, en las Tablas 3.8 a 3.10, el cálculo del índice de convergencia computacional (COC) (ver [114]),

$$COC \approx \frac{\log |(x_{k+1} - \xi)/(x_k - \xi)|}{\log |(x_k - \xi)/(x_{k-1} - \xi)|},$$

con el fin de comparar la eficiencia computacional con su índice teórico de la convergencia.

Esquema	Punto fijo	MEDF8	MEDD8	MEDS8	MED82
$ y_1 - y_{ex} $	0.006399	1.717e-18	1.459e-24	1.2369276e-24	1.244e-24
$ y_2 - y_{ex} $	8.157e-5	2.389e-96	1.105e-197	2.503241e-198	2.636e-198
$ y_3 - y_{ex} $	1.03e-6	1.246e-485	1.198e-1582	7.043196e-1588	1.075e-1587
COC	1.0	5.0	8.0	8.0	8.0

Tabla 3.8: Comparación de esquemas modificados de Gauss para la Referencia I

Las diferentes órbitas de prueba se han elegido con una propiedad importante: el ángulo creciente  $\nu_2 - \nu_1$ . Este ángulo mide la dispersión en las observaciones y, por el diseño del procedimiento de

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales 59

Gauss, induce inestabilidad en el problema cuando se hace mayor. La diferencia entre las anomalías verdaderas de las observaciones es, en las órbitas de prueba I a III,  $\nu_2 - \nu_1 = 12.23^\circ$ ,  $\nu_2 - \nu_1 = 22.06^\circ$  and  $\nu_2 - \nu_1 = 31.46^\circ$ , respectivamente. Se puede observar en las Tablas 3.8 a 3.10 que, cuando la dispersión de las observaciones aumenta, la precisión obtenida en los cálculos se reduce en la misma tasa para cualquier método de orden ocho.

Esquema	Punto fijo	MEDF8	MEDD8	MEDS8	MED82
$ y_1 - y_{ex} $	0.02314	1.327e-13	4.57e-18	3.8834479e-18	2.425e-18
$ y_2 - y_{ex} $	0.001055	8.253e-70	1.216e-143	2.8055145e-144	4.214e-146
$ y_3 - y_{ex} $	4.652e-5	7.694e-351	3.061e-1148	2.0814831e-1153	3.508e-1168
COC	1.0	5.0	8.0	8.0	8.0

Tabla 3.9: Comparación de esquemas modificados de Gauss para la Referencia II

Está claro que la aplicación de los esquemas de orden alto para el problema del cálculo preliminar de las órbitas por el procedimiento de Gauss consigue un éxito importante, ya que la velocidad y la precisión obtenida en los cálculos se incrementan. Sin embargo, el comportamiento de todos los esquemas de orden alto no es el mismo. La gran complejidad de los cálculos involucrados en el problema y la propia estabilidad de cada esquema iterativo son factores importantes a tener en cuenta: notemos que el procedimiento Khan no es apropiado para este problema en particular, ya que converge más lentamente que el resto de los esquemas.

Esquema	Punto fijo	MEDF8	MEDD8	MEDS8	MED82
$ y_1 - y_{ex} $	0.05052	9.195e-11	2.6e-14	2.1653574e-14	4.962e-15
$ y_2 - y_{ex} $	0.004936	1.888e-54	1.753e-112	3.3635496e-113	7.299e-119
$ y_3 - y_{ex} $	0.0004492	6.897e-273	7.503e-898	1.1401025e-903	1.6e-949
COC	1.0	5.0	8.0	8.0	8.0

Tabla 3.10: Comparación de esquemas modificados de Gauss para la Referencia III

### 3.5. Anexo

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las pruebas numéricas sobre las funciones académicas y el problema de la determinación preliminar de órbitas, conjeturamos que el método iterativo particular MEDF8, que se obtuvo a partir de la familia tri-paramétrica de métodos desarrollada por Khan et al. en [77] es de orden cinco. Esta conjetura se basa en los resultados que se pueden observar en las Tablas comparativas 3.5, 3.6 y 3.7 de los distintos métodos de orden 8, así como en las Tablas 3.8, 3.9 y 3.10 relacionadas con la determinación preliminar de órbitas. La familia de métodos a la que nos referimos y que fue diseñada por Khan et al. en [77], tiene por expresión iterativa la siguiente:

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 z_k &= y_k - G(u_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\
 x_{k+1} &= z_k - \frac{\mu}{\lambda + \nu q_k^2} \frac{f(z_k)}{K - C(y_k - z_k) - D(y_k - z_k)^2},
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $q_k = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}$ ,  $K = f[y_k, z_k]$ ,  $H = f[x_k, y_k]$ ,  $C = \frac{H-K}{(x_k-y_k)(x_k-z_k)} - D(x_k + y_k - 2z_k)$  y  $D = \frac{f'(x_k) - H}{(x_k-y_k)(x_k-z_k)} - \frac{H-K}{(x_k-z_k)^2}$ .

Demostramos a continuación que esta familia de métodos tiene orden de convergencia cinco, lo que no coincide con el orden ocho probado por los autores.

**Teorema 3.5.1** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en un intervalo abierto  $I$ . Sea  $G(u)$  una función real suficientemente diferenciable que satisfice:  $G(0) = 1$ ,  $G_u(0) = 2$ ,  $|G_{uu}(0)| < +\infty$ . Supongamos que los parámetros  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  son distintos de cero y sea  $x_0$  una aproximación inicial cercana a  $\xi$ . Entonces la clase de métodos (3.40) es de orden cinco y su ecuación del error es*

$$e_{k+1} = \frac{1}{2}((-10 + G_{uu}(0))c_2^5 + c_2^3 c_3)e_k^5 + O(e_k^6),$$

donde  $c_j = (1/j!) \frac{f^{(j)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$ .

**Demostración:** Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de  $f(x_k)$  y  $f'(x_k)$  alrededor de  $\xi$

$$f(x_k) = f'(\xi) \sum_{j=1}^8 c_j e_k^j + O(e_k^9) \quad y \quad f'(x_k) = f'(\xi) \sum_{j=1}^8 (j+1)c_{j+1} e_k^j + O(e_k^9).$$

Aplicando estos resultados en el primer paso de la expresión iterativa del método (3.40), obtenemos

$$y_k - \xi = \sum_{j=2}^8 A_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $A_2 = c_2$ ,  $A_3 = 2(c_3 - c_2^2)$ ,  $A_4 = 4c_2^3 - 7c_2 c_3 + 3c_4$ ,  $A_5 = -8c_2^4 + 20c_2^2 c_3 - 6c_3^2 - 10c_2 c_4 + 4c_5$  y  $A_6 = 16c_2^5 - 52c_2^3 c_3 + 28c_2^2 c_4 - 17c_3 c_4 + c_2(33c_3^2 - 13c_5) + 5c_6$ . Usando nuevamente el desarrollo de Taylor, obtenemos

$$f(y_k) = f'(\xi) \sum_{j=2}^8 B_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $B_2 = A_2$ ,  $B_3 = A_3$ ,  $B_4 = 5c_2^3 - 7c_2 c_3 + 3c_4$ ,  $B_5 = -12c_2^4 + 24c_2^2 c_3 - 6c_3^2 - 10c_2 c_4 + 4c_5$  y  $B_6 = 16c_2^5 - 52c_2^3 c_3 + 28c_2^2 c_4 - 17c_3 c_4 + c_2(33c_3^2 - 13c_5) + 5c_6$ .

Ahora, el desarrollo de  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$  puede ser calculado para, posteriormente, obtener la aproximación por un polinomio de Taylor de la función peso  $G(u_k) \approx G(0) + G_u(0)u_k + (1/2)G_{uu}(0)u_k^2$  y así obtener

$$z_k - \xi = \sum_{j=2}^8 Z_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $Z_2 = -(-1 + G(0))c_2$ ,  $Z_3 = (-2 + 4G(0) - G_u(0)c_2^2 - 2(-1 + G(0))c_3)$ ,  $Z_4 = (4 - 13G(0) + 7G_u(0) - \frac{1}{2}G_{uu}(0))c_2^3 + (-7 + 14G(0) - 4G_u(0))c_2 c_3 - 3(-1 + G(0))c_4$  y  $Z_5 = (-8 + 38G(0) - 33G_u(0) + 5G_{uu}(0))c_2^4 + (20 - 64G(0) + 38G_u(0) - 3G_{uu}(0))c_2^2 c_3 + 2(-3 + 6G(0) - 2G_u(0))c_2^3 + 2(-5 + 10G(0) - 3G_u(0))c_2 c_4 - 4 - 4(-1 + G(0))c_5$ .

### 3. Métodos iterativos multipunto óptimos con derivadas para ecuaciones no lineales61

Al desarrollar  $f(z_k)$  en serie de Taylor en torno a  $\xi$ , podemos ya sustituir todos los desarrollos en el último paso para obtener la ecuación del error,

$$e_{k+1} = \sum_{j=2}^8 L_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde el coeficiente de orden dos es

$$L_2 = -\frac{(-1 + G(0))(\lambda - \mu)c_2}{\lambda},$$

con lo que al exigir  $G(0) = 1$  obtenemos orden tres. El coeficiente de orden tres será ahora

$$\bar{L}_3 = -\frac{(-2 + G_u(0))(\lambda - \mu)c_2^2}{\lambda},$$

lo que nos obliga a exigir  $G_u(0) = 2$  para obtener orden de convergencia cuatro. Así, el coeficiente de orden cuatro queda

$$\bar{\bar{L}}_4 = -\frac{(\lambda - \mu)c_2((-10 + G_{uu}(0))c_2^2 + 2c_3)}{2\lambda}$$

y haciendo  $\lambda = \mu$  en  $\bar{\bar{L}}_4$ , el orden de convergencia llega a cinco. La expresión resultante de la ecuación del error es

$$e_{k+1} = \frac{1}{2}((-10 + G_{uu}(0))c_2^5 + c_3^3)e_k^5 + O(e_k^6),$$

que, como se puede observar, no permite anular el término de orden cinco. Con esto finaliza la prueba del teorema.  $\square$

## Capítulo 4

# Métodos iterativos multipunto óptimos de tipo Steffensen para ecuaciones no lineales

### 4.1. Estado del arte

La no linealidad aparece con frecuencia en problemas reales, que son modelados en las diferentes ramas de la ciencia e ingeniería. Estos modelos tratan de simplificar los problemas originales de manera que mantengan sus propiedades fundamentales. El empleo de técnicas iterativas para estimar las soluciones de esta clase de problemas se ha revelado como un área fructífera de investigación. En general, tratamos de encontrar una solución real simple  $\xi \in I$  de una función  $f(x) = 0$ . La mayor parte de las técnicas computacionalmente útiles para determinar raíces pueden ser clasificadas como: (a) los métodos iterativos que requieren sólo evaluaciones funcionales  $f$ , que serán desarrollados en este capítulo y (b) métodos cuya fórmula iterativa requiere las evaluaciones de la función y sus derivadas, desarrollado en el capítulo anterior. Hay dos métodos conocidos simples y eficaces que representan estas clases: Steffensen y Newton, respectivamente, ambos con orden de convergencia dos. La búsqueda de las variantes de estos métodos con una convergencia acelerada y un número reducido de operaciones y evaluaciones funcionales ha causado la aparición en las pasadas décadas métodos multipaso. Estos esquemas pertenecen a la clase de los métodos más poderosos que vencen las limitaciones de los métodos de un punto en lo que concierne al orden de convergencia y la eficiencia computacional. Estos tipos de métodos iterativos fueron ampliamente estudiados en el texto de Traub, [111] y más recientemente, en el texto de Petković et al. [95].

La mayor parte de los métodos iterativos multipaso tratan de modificar el esquema de Newton para resolver ecuaciones no lineales generando esquemas multipunto con un alto orden de convergencia (ver [39], [83], [78], [77] y [101]). Sin embargo, éstos con frecuencia usan derivadas, lo que es una desventaja seria, ya que muchos de los algoritmos iterativos que dependen de derivadas no pueden emplearse debido, por ejemplo, a la falta de una expresión explícita de la función. Para estos casos, diferentes autores han desarrollado métodos iterativos de tipo Steffensen en numerosos artículos, siendo necesarias únicamente evaluaciones adicionales de la función no lineal (ver [97], [85], [107] y [118]).

En este capítulo diseñamos familias de métodos iterativos que pertenecen a los tipos de métodos (a),

con orden de convergencia óptimo cuatro y ocho, presentando sus correspondientes demostraciones de convergencia en la Sección 4.3. Las pruebas numéricas se describen en la Sección 4.4, mientras que en la Sección 4.5, mostramos las propiedades dinámicas de algunos de los esquemas iterativos diseñados con orden de convergencia 8, así como sus propiedades de estabilidad que son verificadas sobre diferentes funciones test.

A continuación mostramos algunos métodos iterativos con orden de convergencia cuatro, que utilizaremos para compararlos con los nuevos métodos iterativos del mismo orden propuestos en este capítulo. Liu et al. en [85] presentan el método multipunto óptimo cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, z_k] + f[x_k, z_k]}{f[x_k, y_k]^2} f(y_k), \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $z_k = x_k + f(x_k)$ . A este método lo hemos denotado MES4L.

Otro método de dos pasos diseñado recientemente por Ren et al. en [97], al que denotamos por MES4R, tiene por expresión

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f[x_k, y_k] + f[y_k, z_k] - f[x_k, z_k] + a(y_k - x_k)(y_k - z_k)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $z_k = x_k + f(x_k)$  y  $a = 1$ .

También utilizamos para comparar el método desarrollado por Zheng et al. (ver [118]), que ha sido denotado MES4Z

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f[y_k, x_k] + f[y_k, x_k, z_k](y_k - x_k)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $z_k = x_k + f(x_k)$ . Observemos que en este esquema se han utilizado diferencias divididas de segundo orden.

Al añadir a la expresión anterior un paso más, Zheng et al. en [118] definieron un método iterativo óptimo de orden ocho, cuya expresión es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \\ u_x &= y_k - \frac{f(y_k)}{f[y_k, x_k] + f[y_k, x_k, z_k](y_k - x_k)}, \\ x_{k+1} &= u_k - \frac{f(u_k)}{f[u_k, y_k] + f[u_k, y_k, x_k](u_k - y_k) + f[u_k, y_k, x_k, z_k](u_k - y_k)(u_k - x_k)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $z_k = x_k + f(x_k)$ . A este método de tres pasos lo denotamos por MES8Z.

Finalmente, utilizamos también para comparar el esquema propuesto por Soleymani y Karimi en

[106], al que denotamos por MESSS y que tiene por expresión iterativa

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \\ u_x &= y_k - \frac{f(y_k)}{f[x_k, y_k] + f[y_k, z_k] - f[x_k, z_k]} \left( 1 - \frac{t^2}{f[x_k, z_k] - 1} \right), \\ x_{k+1} &= u_k - AB \frac{f(u_k)}{f[u_k, y_k] + f[u_k, y_k, x_k](u_k - y_k) + f[u_k, y_k, x_k, z_k](u_k - y_k)(u_k - x_k)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $z_k = x_k + f(x_k)$ ,  $t = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $A = (1 + \tau^3)$ ,  $B = (1 + \omega^5)$ ,  $\tau = \frac{f(u_k)}{f(y_k)}$  y  $w = \frac{f(y_k)}{f(z_k)}$ .

## 4.2. Diseño de los métodos

Recordemos que la expresión iterativa del esquema de Steffensen es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]},$$

donde  $z_k = x_k + \beta f(x_k)$  ( $\beta = 1$  corresponde al método de Steffensen clásico y  $\beta \neq 0$  al esquema modificado de Steffensen), y en el caso de Newton ésta es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Si componemos cualquiera de estos métodos consigo mismo, obtenemos esquemas de orden 4 con 4 evaluaciones funcionales en ambos casos. Esto los hace no óptimos, según la conjetura de Kung-Traub [84]. Si en el doble esquema de Newton consideremos la derivada congelada en el segundo paso, se obtiene el método de Traub no óptimo de orden 3 (ver (3.11)). Hemos visto en el Capítulo 3 como, usando la técnica de funciones de peso, es posible aumentar a cuatro el orden de convergencia del esquema de Traub sin añadir nuevas evaluaciones funcionales. Ahora, consideremos el doble esquema de Steffensen, utilizando la misma diferencia dividida en el denominador del segundo paso. Usando la técnica de funciones peso, Petković et al. en [94] también consigue aumentar a cuatro el orden de convergencia del doble método de Steffensen sin añadir nuevas evaluaciones funcionales. El esquema iterativo del método resultante es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ x_{k+1} &= y_k - H(u_k, v_k) \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $z_k = x_k + \beta f(x_k)$ ,  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$  y  $v_k = \frac{f(y_k)}{f(z_k)}$ . Para ciertas condiciones sobre la función  $H$  y para valores de  $\beta$  distintos de cero, (4.6) es un esquema iterativo óptimo de orden cuatro.

En la presente memoria, extendemos el método de Petković (4.6), añadiendo un tercer paso donde aparece una función peso de tres variables.

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ t_k &= y_k - H(u_k, v_k) \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ x_{k+1} &= t_k - G(u_k, v_k, w_k) \frac{f(t_k)}{f[z_k, x_k]}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $z_k = x_k + \beta f(x_k)$ ,  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $v_k = \frac{f(y_k)}{f(z_k)}$  y  $w_k = \frac{f(t_k)}{f(y_k)}$ . Este esquema tiene orden de convergencia ocho, como comprobaremos más adelante bajo ciertas codiciones.

Manteniendo la misma estructura de los esquemas (4.6) y (4.7), podríamos diseñar una familia de métodos de orden 4 y 8 con un ligero cambio en la variable  $u_k$ ,

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ x_{k+1} &= y_k - h(u_k, v_k) \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde  $z_k = x_k + \beta f(x_k)$ ,  $u_k = \frac{f(y_k)}{a_1 f(x_k) + a_2 f(y_k)}$  siendo  $a_1$  y  $a_2$  parámetros reales y  $v_k = \frac{f(y_k)}{f(z_k)}$ . Para ciertas condiciones sobre la función peso  $h$ ,  $\beta \neq 0$  y determinados valores de  $a_1$  y  $a_2$ , demostramos que (4.8) es un método iterativo óptimo de orden cuatro.

De forma análoga al método (4.7), establecemos

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ t_k &= y_k - h(u_k, v_k) \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ x_{k+1} &= t_k - g(u_k, v_k, w_k) \frac{f(t_k)}{f[z_k, x_k]}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde los primeros dos pasos son los mismos que utilizamos en la familia de métodos (4.8) y añadimos un tercer paso en el que interviene la nueva variable  $w_k = \frac{f(t_k)}{f(y_k)}$ , obteniéndose orden de convergencia ocho para ciertos valores de los paámetros  $a_1$  y  $a_2$ , con  $\beta \neq 0$  y bajo determinadas condiciones sobre las funciones  $h$  y  $g$ .

### 4.3. Análisis de la convergencia

Comenzamos presentando una demostración alternativa al método iterativo de Petković en [94], en la que el polinomio de Taylor empleado para aproximar la función peso es de grado superior al de la prueba original, lo que nos permitirá demostrar el Teorema 4.3.2 posteriormente.

**Teorema 4.3.1** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en un intervalo abierto  $I$ . Sea  $H(u_k, v_k)$  una función real suficientemente diferenciable que satisface:  $H(0, 0) = H_u(0, 0) = H_v(0, 0) = 1$ ,  $|H_{uu}(0, 0)| < \infty$ ,  $|H_{vv}(0, 0)| < \infty$ ,  $|H_{uv}(0, 0)| < \infty$ , y sea  $x_0$  una aproximación inicial próxima a  $\xi$ . Entonces el método (4.6) es óptimo de orden 4 para cualquier valor no nulo de  $\beta$ , y su ecuación del error es*

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2} \rho c_2 ((-2(5\rho + \gamma^2) + 2H_{uv}(0, 0)\rho + H_{vv}(0, 0) + H_{uu}(0, 0)\rho^2)c_2^2 + 2\rho c_3)e_k^4 + O(e_k^5).$$

donde  $c_j = (1/j!) \frac{f^{(j)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $j = 2, 3, \dots$ ,  $e_k = x_k - \xi$ ,  $\gamma = f'(\xi)\beta$ ,  $\rho = 1 + \gamma$  y  $\varrho = 2 + \gamma$ .

**Demostración:** Desarrollando en serie de Taylor  $f(x_k)$  en torno a  $\xi$ , tenemos

$$f(x_k) = f'(\xi)(e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4) + O(e_k^5), \tag{4.10}$$

y

$$f'(x_k) = f'(\xi)(1 + 2c_2e_k + 3c_3e_k^2 + 4c_4e_k^3 + 5c_5e_k^4) + O(e_k^5). \quad (4.11)$$

Como  $z_k = x_k + \beta f(x_k)$ , entonces:

$$z_k - \xi = \rho e_k + \gamma(c_2e_k^2 + c_3e_k^3 + c_4e_k^4) + O(e_k^5).$$

A continuación tenemos que

$$\begin{aligned} f(z_k) &= f'(\xi)(\rho e_k + (\gamma + \rho^2)c_2e_k^2 + (\gamma(2\rho c_2^2 + c_3) + \rho^3c_3)e_k^3 \\ &\quad + (3\gamma\rho^2c_2c_3 + \gamma c_2(\gamma c_2^2 + 2\rho c_3) + \gamma c_4 + \rho^4c_4)e_k^4) + O(e_k^5). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Utilizando (4.10), (4.11) y (4.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_k) - f(x_k)}{z_k - x_k} &= f'(\xi)(1 + \rho c_2e_k + (\gamma c_2^2 + (3\rho + \gamma^2)c_3)e_k^2 \\ &\quad + \rho(2\gamma c_2c_3 + (2\rho + \gamma^2)c_4)e_k^3) + O(e_k^4). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sustituyendo (4.10), (4.11) y el primer paso del esquema iterativo (4.6), obtenemos

$$\begin{aligned} y_k - \xi &= \rho c_2e_k^2 + (-(2\rho + \gamma^2)c_2^2 + (2 + 3\gamma + \gamma^2)c_3)e_k^3 + ((4 + 5\gamma + 3\gamma^2 + \gamma^3)c_2^3 \\ &\quad - (7 + 10\gamma + 7\gamma^2 + 2\gamma^3)c_2c_3 + (3 + 6\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_4)e_k^4 + O(e_k^5). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Desarrollando  $f(y_k)$  alrededor de  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\xi)(\rho c_2e_k^2 + (-(2\rho + \gamma^2)c_2^2 + (2 + 3\gamma + \gamma^2)c_3)e_k^3 + ((5 + 7\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_2^3 \\ &\quad - (7 + 10\gamma + 7\gamma^2 + 2\gamma^3)c_2c_3 + (3 + 6\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_4)e_k^4) + O(e_k^5). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sea  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ , entonces usando (4.10) y (4.15), se obtiene

$$\begin{aligned} u_k &= \rho c_2e_k + (-(3\rho + \gamma^2)c_2^2 + (2 + 3\gamma + \gamma^2)c_3)e_k^2 \\ &\quad + ((8 + 10\gamma + 5\gamma^2 + \gamma^3)c_2^3 - 2(5 + 7\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_2c_3 + (3 + 6\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_4)e_k^3 + O(e_k^4) \end{aligned}$$

Análogamente,  $v_k = \frac{f(y_k)}{f(z_k)}$  y utilizando (4.12) y (4.15), tenemos

$$\begin{aligned} v_k &= c_2e_k + (-(3 + 2\gamma)c_2^2 + \rho c_3)e_k^2 \\ &\quad + ((8\rho + 3\gamma^2)c_2^3 - (10 + 11\gamma + 4\gamma^2)c_2c_3 + (3\rho + \gamma^2)c_4)e_k^3 + O(e_k^4). \end{aligned}$$

Notemos que  $u_k$  y  $v_k$  tienden a cero cuando  $x_k$  tiende a  $\xi$ , por lo que

$$\begin{aligned} H(u_k, v_k) &\approx H(0, 0) + H_u(0, 0)u_k + H_v(0, 0)v_k + \frac{1}{2}H_{uu}(0, 0)u_k^2 + \frac{1}{2}H_{vv}(0, 0)v_k^2 \\ &\quad + H_{uv}(0, 0)u_kv_k. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ahora calculamos la ecuación del error de (4.6), utilizando (4.13), (4.15) y (4.16),

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \xi &= -(-1 + H(0, 0)\rho c_2e_k^2 + (-(2\rho + \gamma^2 + H_v(0, 0)\rho + \rho^2H_u(0, 0) - H(0, 0)(4 + 5\gamma \\ &\quad + 2\gamma^2))c_2^2 - (-1 + H(0, 0))(2 + 3\gamma + \gamma^2)c_3)e_k^3 + (-\frac{1}{2}(-8 - 10\gamma - 6\gamma^2 - 2\gamma^3 \\ &\quad - H_v(0, 0)(14 + 20\gamma + 8\gamma^2) + H_{uu}(0, 0)(1 + 3\gamma + 3\gamma^2 + \gamma^3) + H_{vv}(0, 0)(1 + \gamma) \\ &\quad + H_{uv}(0, 0)(2 + 4\gamma + 2\gamma^2) - 2H_u(0, 0)(7 + 15\gamma + 11\gamma^2 + 3\gamma^3) + H(0, 0)(26 + 40\gamma \\ &\quad + 24\gamma^2 + 6\gamma^3))c_2^3 - (7 + 10\gamma + 7\gamma^2 + 2\gamma^3 + H_v(0, 0)(4 + 6\gamma + 2\gamma^2) \\ &\quad + 2H_u(0, 0)\rho^2 - 2H(0, 0)(7 + 12\gamma + 8\gamma^2 + 2\gamma^3))c_2c_3 - (-1 + H(0, 0))(3 + 6\gamma \\ &\quad + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_4)e_k^4 + O(e_k^5). \end{aligned}$$

Finalmente, exigiendo  $H(0, 0) = H_u(0, 0) = H_v(0, 0) = 1$ , la ecuación del error queda reducida a

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2}(\rho c_2((-2(5\rho + \gamma^2) + 2H_{uv}(0, 0)\rho + H_{vv}(0, 0) + H_{uu}(0, 0)\rho^2)c_2^2 + 2\rho c_3))e_k^4 + O(e_k^5),$$

con lo que finaliza la demostración del teorema.  $\square$

A continuación, analizamos la convergencia del método (4.7), obtenido al componer (4.6) con el esquema de Steffensen con la diferencia dividida congelada y utilizando una función peso adecuada, el que fue publicado en [11].

**Teorema 4.3.2** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sobre un intervalo abierto  $I$  y siendo  $x_0$  una aproximación cerca a  $\xi$ . Sean  $H$  y  $G$  funciones reales suficientemente diferenciable que satisfacen:  $H(0, 0) = H_u(0, 0) = H_v(0, 0) = 1$ ,  $H_{uu}(0, 0) = H_{vv}(0, 0) = 2$ ,  $H_{uv}(0, 0) = 0$ ,  $G(0, 0, 0) = G_u(0, 0, 0) = G_v(0, 0, 0) = G_w(0, 0, 0) = 1$ ,  $G_{uu}(0, 0, 0) = G_{vv}(0, 0, 0) = G_{uv}(0, 0, 0) = 2$ ,  $G_{uw}(0, 0, 0) = 1$  y  $|G_{ww}(0, 0, 0)| < \infty$ . Entonces, el método (4.7) es óptimo de orden ocho, siendo su ecuación del error*

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2}\rho^2 c_2(3c_2^2 - c_3)((9G_{ww}(0, 0, 0)\rho^2 + 2(-27 - 54\gamma - 28\gamma^2 + \gamma^3) + \gamma^4))c_2^4 + 2\rho(17 + 17\gamma, \\ + 2\gamma^2 - 3G_{ww}(0, 0, 0)\rho)c_2^2 c_3 + (-2 + G_{ww}(0, 0, 0))\rho^2 c_3^2 - 2\rho^2 c_2 c_4)e_k^8 + O(e_k^9),$$

donde  $\rho = 1 + \gamma$ ,  $\gamma = f'(\xi)\beta$ ,  $c_j = (1/j!) \frac{f^{(j)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $j = 2, 3, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$ .

**Demostración:** Usando el desarrollo en serie de Taylor de  $f(x_k)$  introducido en el teorema anterior, tenemos

$$z_k = x_k + \beta f(x_k) = \rho e_k + \gamma \sum_{j=2}^8 c_j e_k^j + O(e_k^9).$$

Como

$$f(z_k) = f'(\xi) \sum_{j=1}^8 Z_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $Z_1 = \rho$ ,  $Z_2 = (\gamma + \rho^2)c_2$ ,  $Z_3 = 2\gamma\rho c_2^2 + (\gamma + \rho^3)c_3$  y  $Z_4 = 3\gamma\rho^2 c_2 c_3 + \gamma c_2(\gamma c_2^2 + 2\rho c_3) + (\gamma + \rho^4)c_4$ , el desarrollo de Taylor de la diferencia dividida resulta

$$f[x_k, z_k] = \frac{f(z_k) - f(x_k)}{z_k - x_k} = f'(\xi) \left[ 1 + \sum_{j=1}^8 D_j e_k^j \right] + O(e_k^9),$$

siendo  $D_1 = (1 + \rho)c_2$ ,  $D_2 = \gamma c_2^2 + (3\rho + \gamma^2)c_3$  y  $D_3 = f'(\xi)(1 + \rho)(2\gamma c_2 c_3 + (2\rho + \gamma^2)c_4)$ . Por lo tanto, el error en el primer paso del método es

$$e_{y_k} = y_k - \xi = \sum_{j=2}^8 Y_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $Y_2 = \rho c_2$ ,  $Y_3 = -(2\rho + \gamma^2)c_2^2 + (2 + 3\gamma + \gamma^2)c_3$  e  $Y_4 = (4 + 5\gamma + 3\gamma^2 + \gamma^3)c_2^3 - (7 + 10\gamma + 7\gamma^2 + 2\gamma^3)c_2 c_3 + (3 + 6\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_4$ .

Esto nos permite calcular los desarrollos de Taylor de las variables  $u_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$  y  $v_k = \frac{f(y_k)}{f(z_k)}$  y posteriormente obtener el desarrollo de la función peso  $H$  alrededor de  $(0, 0)$ ,

$$H(u_k, v_k) \approx H(0, 0) + H_u(0, 0)u_k + H_v(0, 0)v_k + \frac{1}{2}H_{uu}(0, 0)u_k^2 + \frac{1}{2}H_{vv}(0, 0)v_k^2 + H_{uv}(0, 0)u_k v_k.$$

Entonces, la ecuación del error en el segundo paso es

$$e_{t_k} = t_k - \xi = \sum_{j=2}^8 R_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $R_2 = -(-1 + H(0, 0))\rho c_2$  y  $R_3 = -(2\rho + H_v(0, 0) + \gamma H_v(0, 0) + \gamma^2 + \rho^2 H_u(0, 0) - H(0, 0)(4 + 5\gamma + 2\gamma^2))c_2^2 - (-1 + H(0, 0))(2 + 3\gamma + \gamma^2)c_3$ . Para que  $t_k$  alcance un orden de convergencia cuatro, exigimos que  $H(0, 0) = H_u(0, 0) = H_v(0, 0) = 1$ . Con estos valores,

$$e_{t_k} = \sum_{j=4}^8 \bar{R}_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $\bar{R}_4 = -\frac{1}{2}\rho(r_{4,1}c_2^3 + r_{4,2}c_2c_3)$ ,  $r_{4,1} = -2(5\rho + \gamma^2) + h_{vv}(0, 0) + 2h_{uv}(0, 0)\rho + h_{uu}(0, 0)\rho^2$  y  $r_{4,2} = 2\rho$ . Entonces,

$$f(t_k) = f'(\xi) \sum_{j=4}^8 \bar{R}_j e_k^j + O(e_k^9).$$

De este modo, podemos obtener el desarrollo de la variable  $w_k = \frac{f(t_k)}{f(y_k)}$  y aproximar la función peso  $G(u_k, v_k, w_k)$  alrededor de  $(0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} G(u_k, v_k, w_k) &\approx G(0, 0, 0) + G_u(0, 0, 0)u_k + G_v(0, 0, 0)v_k + G_w(0, 0, 0)w_k + \frac{1}{2}G_{uu}(0, 0, 0)u_k^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}G_{vv}(0, 0, 0)v_k^2 + \frac{1}{2}G_{ww}(0, 0, 0)w_k^2 + G_{uv}(0, 0, 0)u_kv_k + G_{uw}(0, 0, 0)u_kw_k \\ &\quad + G_{vw}(0, 0, 0)v_kw_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación del error del método es

$$e_{k+1} = \sum_{j=4}^8 L_j e_k^j + O(e_k^9),$$

donde  $L_4 = \frac{1}{2}(-1 + G(0, 0, 0))\rho(r_{4,1}c_2^3 + r_{4,2}c_2c_3)$ . Si asumimos que  $G(0, 0, 0) = 1$ , entonces el término de orden cuatro se anula y sustituyendo en  $L_5$  esta condición tenemos  $\bar{L}_5 = \frac{1}{2}(-2 + G_u(0, 0, 0) + G_v(0, 0, 0) - \gamma(1 - G_u(0, 0, 0)))\rho(r_{4,1}c_2^4 + r_{4,2}c_2^2c_3)$ .

Ahora, si  $G_u(0, 0, 0) = G_v(0, 0, 0) = 1$ , tenemos orden seis, de manera que el coeficiente de  $e_k^6$  es  $\bar{L}_6 = \frac{1}{4}\rho(r_{4,1}c_2^3 + r_{4,2}c_2c_3)((-2(6\rho + \gamma^2) + 2G_{uv}(0, 0, 0)\rho + G_{vv}(0, 0, 0) + G_{uu}(0, 0, 0)\rho^2 + G_w(0, 0, 0)(2(5\rho^2 + \gamma^2) - H_{uu}(0, 0)\rho^2 - 2H_{uv}(0, 0)\rho - H_{vv}(0, 0))c_2^3 - 2(G_w(0, 0, 0) - 1)\rho c_2c_3)$ .

Nuevamente, imponiendo las condiciones  $G_{uv}(0, 0, 0) = 1 + H_{uv}(0, 0)$ ,  $G_w(0, 0, 0) = 1$  y  $H_{uu}(0, 0) = G_{uu}(0, 0, 0)$ , obtenemos orden 7 con coeficiente

$$\begin{aligned} \bar{\bar{L}}_7 &= -\frac{1}{4}(\rho c_2^2((-10 + 2H_{uv}(0, 0) + H_{vv}(0, 0) - 10\gamma + 2\gamma H_{uv}(0, 0) - 2\gamma^2 + G_{uu}(0, 0, 0)\rho^2) c_2^2 \\ &\quad + 2\rho c_3)((32 - 10G_{vv}(0, 0, 0) - 4H_{uv}(0, 0) + 2G_{vw}(0, 0, 0)H_{uv}(0, 0) - 2H_{vv}(0, 0) \\ &\quad + G_{vv}(0, 0, 0)H_{vv}(0, 0) + 48\gamma - 10\gamma G_{vw}(0, 0, 0) - 6\gamma H_{uv}(0, 0) + 2\gamma G_{vw}(0, 0, 0)H_{uv}(0, 0) \\ &\quad - \gamma H_{vv}(0, 0) + 20\gamma^2 - 2\gamma^2 G_{vw}(0, 0, 0) - 2\gamma^2 H_{uv}(0, 0) + 2\gamma^3 \\ &\quad + G_{uu}(0, 0, 0)\rho^2(-2 + G_{uv}(0, 0, 0) + G_{vv}(0, 0, 0) - \gamma + \gamma G_{uv}(0, 0, 0)) \\ &\quad + G_{uv}(0, 0, 0)\rho(H_{vv}(0, 0) + 2H_{uv}(0, 0)\rho - 2(5 + 5\gamma + \gamma^2))) c_2^2 \\ &\quad + 2\rho(-4 + G_{uv}(0, 0, 0) + G_{vw}(0, 0, 0) - 2\gamma + \gamma G_{uv}(0, 0, 0))c_3). \end{aligned}$$

Finalmente, las condiciones  $G_{uu}(0,0,0) = G_{uw}(0,0,0) = G_{vv}(0,0,0) = 2$ ,  $H_{uv}(0,0) = 0$  y  $H_{vv}(0,0) = 2$ , nos permiten llegar a orden ocho con la siguiente ecuación del error

$$\begin{aligned} e_{k+1} = & -\frac{1}{2}\rho^2 c_2(3c_2^2 - c_3)((9G_{ww}(0,0,0)\rho^2 + 2(-27 - 54\gamma - 28\gamma^2 + \gamma^3) + \gamma^4))c_2^4 \\ & + 2\rho(17 + 17\gamma + 2\gamma^2 - 3G_{ww}(0,0,0)\rho)c_2^2 c_3 \\ & + (-2 + G_{ww}(0,0,0))\rho^2 c_3^2 - 2\rho^2 c_2 c_4)e_k^8 + O(e_k^9), \end{aligned} \quad (4.17)$$

y de esta manera la demostración concluye.  $\square$

**Observación 4.3.1** *La familia de métodos de tres puntos (4.7) requiere cuatro evaluaciones funcionales y tiene orden de convergencia ocho. Por lo tanto, esta familia está formada por métodos óptimos según la conjetura de Kung-Traub siendo su índice de eficiencia  $8^{1/4} \approx 1.6818$ .*

En este caso, algunas de las funciones  $H$  y  $G$  que satisfacen las condiciones del Teorema 4.3.2 son

$$\begin{aligned} H(u, v) &= 1 + u + v + u^2 + v^2, \\ G(u, v, w) &= 1 + u + v + w + u^2 + v^2 + uv + 2(vw + uw). \end{aligned} \quad (4.18)$$

A este esquema iterativo lo denotamos por MES84 y será comparado con otros métodos en la sección de pruebas numéricas.

Ahora consideremos el análisis de la convergencia del esquema iterativo (4.8) cuya variable  $u_k$  depende de los parámetros  $a_1$  y  $a_2$ .

**Teorema 4.3.3** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en un intervalo abierto  $I$ . Sea  $h(u_k, v_k)$  una función real suficientemente diferenciable que satisface:  $h(0,0) = h_v(0,0) = 1$  y  $h_u(0,0) = a_1$ ,  $|h_{uu}(0,0)| < \infty$ ,  $|h_{vv}(0,0)| < \infty$ ,  $|h_{uv}(0,0)| < \infty$ , y sea  $x_0$  una aproximación inicial próxima a  $\xi$ . Entonces el método (4.8) es óptimo de orden 4 para cualquier valor de  $a_2$  y para cualesquiera valores no nulos de  $\beta$  y  $a_1$ , siendo su ecuación del error*

$$\begin{aligned} e_{k+1} = & -\frac{1}{2a_1^2}(\rho c_2((\rho^2 h_{uu}(0,0) - 2a_1\rho(a_2 - h_{uv}(0,0) + a_2\gamma) + a_1^2(h_{vv}(0,0) - 2(5 + 5\gamma + \gamma^2)))c_2^2 \\ & + 2a_1^2\rho c_3))e_k^4 + O(e_k^5), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $c_j = (1/j!) \frac{f^{(j)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $j = 2, 3, \dots$ ,  $e_k = x_k - \xi$ ,  $\gamma = f'(\xi)\beta$ ,  $\rho = 1 + \gamma$  y  $\varrho = 2 + \gamma$ .

**Demostración:** Dado que los métodos (4.7), cuya convergencia ha sido analizada en el Teorema thm4.2, y el esquema (4.8) tienen el mismo primer paso, aprovechamos los cálculos del resultado anterior. A continuación tenemos que  $u_k = \frac{f(y_k)}{a_1 f(x_k) + a_2 f(y_k)}$  y, usando las expresiones (4.10) y (4.15), obtenemos

$$\begin{aligned} u_k = & \frac{\rho}{a_1} c_2 e_k + \frac{1}{a_1^2} (-a_2 \rho^2 + a_1(3\rho + \gamma^2))c_2^2 + a_1(2 + 3\gamma + \gamma^2)c_3 e_k^2 + \frac{1}{a_1^3} ((a_2^2 \rho^3 + 2a_1 a_2(3 + 6\gamma \\ & + 4\gamma^2 + \gamma^3) + a_1^2(8 + 10\gamma + 5\gamma^2 + \gamma^3))c_2^3 - 2a_1(a_2 \rho^2 \varrho + a_1(5 + 7\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3))c_2 c_3 \\ & + a_1^2(3 + 6\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_4)e_k^3 + O(e_k^4) \end{aligned}$$

Para calcular los términos del desarrollo en serie de la variable  $v_k = \frac{f(y_k)}{f(z_k)}$  utilizamos (4.12) y (4.15)

$$v_k = c_2 e_k + (-3 + 2\gamma)c_2^2 + \varrho c_3 e_k^2 + ((8\rho + 3\gamma^2)c_2^3 - (10 + 11\gamma + 4\gamma^2)c_2 c_3 + (3\rho + \gamma^2)c_4)e_k^3 + O(e_k^4).$$

Observemos que  $u_k$  y  $v_k$  tienden a cero cuando  $x_k$  tiende a  $\xi$ , por lo que podemos aproximar la función peso  $h$  en torno a  $(0, 0)$ ,

$$h(u_k, v_k) \approx h(0, 0) + h_u(0, 0)u_k + h_v(0, 0)v_k + \frac{1}{2}h_{uu}(0, 0)u_k^2 + \frac{1}{2}h_{vv}(0, 0)v_k^2 + h_{uv}(0, 0)u_k v_k. \quad (4.20)$$

Así, la ecuación del error del método (4.8), usando (4.13), (4.15) y (4.20), es

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \xi &= -(-1 + h(0, 0)\rho c_2 e_k^2 + \frac{1}{a_1}((\rho^2 h_u(0, 0) - a_1(2 + h_v(0, 0) + 2\gamma + \gamma h_v(0, 0)) \\ &\quad - h(0, 0)(4 + 5\gamma + 2\gamma^2))c_2^2 - a_1(-1 + h(0, 0))(2 + 3\gamma + \gamma^2)c_3)e_k^3 + ((4 + 5\gamma + 3\gamma^2 \\ &\quad + \gamma^3)c_2^3 - (7 + 10\gamma + 7\gamma^2 + 2\gamma^3)c_2 c_3 + (3\varrho + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_4 - \frac{1}{2a_1^2}((-2a_2 h_u(0, 0) \\ &\quad - h_{uu}(0, 0))\rho^3 - 2a_1 \rho(-\rho h_{uv}(0, 0) + h_u(0, 0)(7 + 8\gamma + 3\gamma^2)) + a_1^2(h_{vv}(0, 0) + \gamma h_{vv}(0, 0) \\ &\quad - 2h_v(0, 0)(7 + 10\gamma + 4\gamma^2) + h(0, 0)(26 + 40\gamma + 24\gamma^2)))c_2^3 - 4a_1(h_u(0, 0)\rho^2 \varrho \\ &\quad + a_1(-h_v(0, 0))(2 + 3\gamma + \gamma^2 + h(0, 0)(7 + 12\gamma + 8\gamma^2 + 2\gamma^3)))c_2 c_3 + 2a_1^2 h(0, 0)(3 \\ &\quad + 6\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3)c_4)e_k^4 + O(e_k^5). \end{aligned}$$

Finalmente, exigiendo las condiciones  $h(0, 0) = h_v(0, 0) = 1$  y  $h_u(0, 0) = a_1$ , se verifica que la ecuación del error es

$$e_{k+1} = -\frac{1}{2a_1^2}(\rho c_2((\rho^2 h_{uu}(0, 0) - 2a_1 \rho(a_2 - h_{uv}(0, 0) + a_2 \gamma) + a_1^2(h_{vv}(0, 0) - 2(5\rho + \gamma^2)))c_2^2 + 2a_1^2 \rho c_3)e_k^4 + O(e_k^5),$$

con lo que finaliza la demostración del teorema.  $\square$

Veamos diferentes funciones peso que cumplen con las condiciones exigidas por del Teorema 4.3.3 para la función  $h$  y los parámetros  $a_1$  y  $a_2$ , con  $a_1 \neq 0$ , cualquier valor de  $a_2$  y donde  $u_k = \frac{f(x_k)}{a_1 f(x_k) + a_2 f(y_k)}$ :

- $h(u, v) = 1 + a_1 u + v.$
- $h(u, v) = \frac{v+1}{1-a_1 u}.$
- $h(u, v) = \frac{a_1 u+1}{1-v}.$

Proponemos estudiar los siguientes casos particulares:

- Consideremos  $a_2 = 0$ ,  $u_k = \frac{f(y_k)}{a_1 f(x_k)}$  y,
  - $a_1 = 1$ ,  $h(u, v) = 1 + u + v$ ; método denotado por MES41.
  - $a_1 = 2$ ,  $h(u, v) = \frac{v+1}{1-2u}$ ; método denotado por MES42.

- $a_1 = 3$ ,  $h(u, v) = \frac{3u+1}{1-v}$ ; método denotado por MES43.
- Consideremos  $a_2 \neq 0$   $u_k = \frac{f(y_k)}{a_1 f(x_k) + a_2 f(y_k)}$  y,
  - $a_1 = -1$  y  $a_2 = 1$ ,  $h(u, v) = 1 - u + v$ ; método denotado por MES44.
  - $a_1 = \frac{1}{2}$  y  $a_2 = 1$ ,  $h(u, v) = \frac{2v+2}{2-u}$ ; método denotado por MES45.
  - $a_1 = 3$  y  $a_2 = \frac{3}{2}$ ,  $h(u, v) = \frac{3u+1}{1-v}$ ; método denotado por MES46.
  - $a_1 = \frac{3}{2}$  y  $a_2 = 1$ ,  $h(u, v) = \frac{2v+2}{2-3v}$ ; método denotado por MES47.

El siguiente resultado establece el orden de convergencia del esquema de tres pasos (4.9).

**Teorema 4.3.4** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en un intervalo abierto  $I$ , y sea  $x_0$  una aproximación inicial próxima a  $\xi$ . Si las funciones reales  $h(u_k, v_k)$  y  $g(u_k, v_k, w_k)$  son suficientemente diferenciables y satisfacen las siguientes condiciones:  $|h_{uu}(0, 0)| < \infty$ ,  $|h_{vv}(0, 0)| < \infty$ ,  $|h_{uv}(0, 0)| < \infty$ ,  $|h_{uuu}(0, 0)| < \infty$ ,  $|h_{uuv}(0, 0)| < \infty$ ,  $|h_{vvu}(0, 0)| < \infty$ ,  $|h_{vvv}(0, 0)| < \infty$ ,  $|g_{ww}(0, 0, 0)| < \infty$ ,  $|g_{uuw}(0, 0, 0)| < \infty$ ,  $|g_{vuv}(0, 0, 0)| < \infty$ ,  $|g_{uvv}(0, 0, 0)| < \infty$ ,*

$$\begin{aligned}
 h(0, 0) &= h_v(0, 0) = 1, & h_u(0, 0) &= g_u(0, 0, 0) = a_1, \\
 g(0, 0, 0) &= g_v(0, 0, 0) = g_w(0, 0, 0) = 1, & g_{uu}(0, 0, 0) &= h_{uu}, \\
 g_{vv}(0, 0, 0) &= h_{vv}(0, 0), & g_{uv}(0, 0, 0) &= a_1 + h_{uv}(0, 0), \\
 g_{uw}(0, 0, 0) &= 2a_1, & g_{vw}(0, 0, 0) &= 2 \\
 g_{uuu}(0, 0, 0) &= -6a_1^3 - 6a_1^2 a_2 + 3a_1 h_{uu}(0, 0) + h_{uuu}(0, 0), & g_{vvv}(0, 0, 0) &= -6 + 3h_{vv}(0, 0) + h_{vvv}(0, 0), \\
 g_{uvv}(0, 0, 0) &= -2a_1 + 2h_{uv}(0, 0) + a_1 h_{uu}(0, 0) + h_{vvu}(0, 0), & a_1 &\neq 0, \\
 g_{uuw}(0, 0, 0) &= -2a_1^2 + h_{uu}(0, 0) + h_{uuv}(0, 0) + 2a_1 h_{uv}(0, 0), & &
 \end{aligned}$$

entonces, el método descrito por (4.9) es de orden 8 óptimo para cualesquiera valores no nulo de  $\beta$  y  $a_1$  y cualquier valor de  $a_2$  y su ecuación del error es

$$\begin{aligned}
 e_{k+1} = & -\frac{1}{48a_1^6} \rho c_2 ((h_{uu}(0, 0)\rho^2 - 2a_1\rho(a_2\rho - h_{uv}(0, 0)) + a_1^2(h_{vv} - 2(5\rho + \gamma^2)))c_2^2 \\
 & + 2a_1^2 \rho c_3)((-3h_{uu}(0, 0)(-2g_{uuv}(0, 0, 0) + g_{ww}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0))\rho^4 \\
 & - 4a_1\rho^3(-3g_{vuv}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0) - 2h_{uuu}(0, 0) - 3g_{uuw}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0) \\
 & + 3g_{vw}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0)h_{uv}(0, 0) - \gamma h_{uuu}(0, 0) + 3a_2(g_{uuw}(0, 0, 0) + h_{uu}(0, 0) \\
 & - g_{ww}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0))\rho - 6a_1^2\rho^2(18h_{uu}(0, 0) - g_{vvv}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0) \\
 & - 10g_{vw}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0) - 4h_{uuv}(0, 0) - 4g_{uuv}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0) + 2g_{ww}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0))^2 \\
 & + g_{ww}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0)h_{vv}(0, 0) + 18\gamma h_{uu}(0, 0) - 10\gamma g_{ww}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0) - 2\gamma h_{uuv}(0, 0) \\
 & + 4\gamma^2 h_{uu}(0, 0) - 2\gamma^2 g_{ww}(0, 0, 0)h_{uu}(0, 0) + 4a_2(g_{vuv}(0, 0, 0) + h_{uv}(0, 0) \\
 & + g_{ww}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0))\rho + 2a_2^2\rho^2 g_{ww}(0, 0, 0) + g_{uuw}(0, 0, 0)(-h_{vv}(0, 0) \\
 & + 2(5\rho + \gamma^2))) - 12a_1^3\rho(18h_{uv}(0, 0) - g_{vuv}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0) - 10g_{ww}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0) \\
 & + g_{ww}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0)h_{vv}(0, 0) - 2h_{vvu}(0, 0) + 18\gamma h_{uv}(0, 0) - 10\gamma g_{ww}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0) \\
 & - \gamma h_{vvu}(0, 0) + 4\gamma^2 h_{uv}(0, 0) - 2\gamma^2 g_{ww}(0, 0, 0)h_{uv}(0, 0) + g_{uvv}(0, 0, 0)(-h_{vv}(0, 0) \\
 & + 2(5\rho + \gamma^2)) + a_2\rho(-26 + g_{vuv}(0, 0, 0) + h_{vv}(0, 0) - 22\gamma - 2\gamma^2 + g_{ww}(0, 0, 0))(10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h_{vv}(0,0) + 10\gamma + 2\gamma^2)) + a^4(6g_{vww}(0,0,0)(h_{vv}(0,0) - 2(5\rho + \gamma^2)) \\
& - 3g_{ww}(0,0,0)(h_{vv}(0,0) - 2(5\rho + \gamma^2))^2 + 4(h_{vvv}(0,0)(2 + \gamma) - 3h_{vv}(0,0)(9 + 9\gamma\gamma \\
& + 2\gamma^2) + 6(45 + 90 + 59\gamma^2 + 14\gamma^3) + \gamma^4)))c_2^4 + 12a_1^2\rho((g_{uuw}(0,0,0 + h_{uu}(0,0) \\
& - g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0))\rho^2 + 2a_1\rho(g_{uww}(0,0,0)) + h_{uv}(0,0) - g_{ww}(0,0,0)h_{uv}(0,0) \\
& + a_2(-3 + g_{ww}(0,0,0)\rho) + a_1^2(-38 + g_{vww}(0,0,0) + h_{vv}(0,0) - 38\gamma - 6\gamma^2 \\
& + g_{ww}(0,0,0)(10 - h_{vv}(0,0) + 10\gamma + 2\gamma^2)))c_2^2c_3 - 12a_1^4(-2 + g_{ww}(0,0,0))\rho^2c_3^2 \\
& + 24a_1^4\rho^2c_2c_4e_k^8 + O(e_k^9),
\end{aligned}$$

donde  $\rho = 1 + \gamma$ ,  $\gamma = f'(\xi)\beta$ ,  $c_j = (1/j!) \frac{f^{(j)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $j = 2, 3, \dots$  y  $e_k = x_k - \xi$ .

**Demostración:** Iniciaremos la demostración a partir del último paso desarrollado en el Teorema 4.3.3, no sin antes sustituir  $h(0,0) = 1$ ,  $h_u(0,0) = a_1$ , y  $h_v(0,0) = 1$  ya que estas condiciones proporcionan orden de convergencia 4 en el segundo paso. El desarrollo de Taylor de  $t_k$  alrededor de  $\xi$  resulta

$$t_k - \xi = \sum_{j=4}^8 R_j e_k^j + O(e_k^9), \quad (4.21)$$

donde  $R_4 = -\frac{1}{2a_1^2}\rho(r_{4,1}c_2^3 + r_{4,2}c_2c_3)$  y  $R_5 = \frac{1}{6a_1^3}(r_{5,1}c_2^4 - r_{5,2}c_2^2c_3 + r_{5,3}(c_3^2 + c_2c_4))$ , siendo

$$\begin{aligned}
r_{4,1} &= h_{uu}(0,0)\rho^2 - 2a_1\rho(a_2\rho - h_{uv}(0,0)) + a_1^2(h_{vv}(0,0) - 2(5\rho + \gamma^2)), \\
r_{4,2} &= 2a_1^2\rho, \\
r_{5,1} &= (6a_2h_{uu}(0,0) - h_{uuu}(0,0))\rho^4 - 3a_1\rho^2(h_{uuu}(0,0)\rho + 2a_2^2\rho^2 - 2a_2h_{uv}(0,0)\rho \\
& - h_{uu}(0,0)(10 + 11\gamma + 4\gamma^2) - 3a_1^2\rho(h_{vvu}(0,0)\rho - 2h_{uv}(0,0)(10 + 13\gamma + 5\gamma^2) \\
& + a_2(20 + 42\gamma + 30\gamma^2 + 8\gamma^3)) - a_1^3(h_{uuu}(0,0)\rho - 3h_{vv}(0,0)(10 + 15\gamma + 6\gamma^2) \\
& + 6(36 + 80\gamma + 66\gamma^2 + 24\gamma^3 + 3\gamma^4)), \\
r_{5,2} &= -3a_1\rho(3h_{uu}(0,0)\rho^2\rho - 6a_1(a_2\rho - h_{uv}(0,0))(2 + 3\gamma + \gamma^2) + a_1^2(3h_{vv}(0,0)\rho - 2(32 \\
& + 46\gamma + 22\gamma^2 + 3\gamma^3))), \\
r_{5,3} &= -6a_1^3\rho^2\rho.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$f(t_k) = f'(\xi) \sum_{j=4}^8 R_j e_k^j + O(e_k^9), \quad (4.22)$$

y puede obtenerse el desarrollo de Taylor de la variable  $w_k = \frac{f(t_k)}{f(y_k)}$  en torno a cero, así como aproximar la función peso  $g(u_k, v_k, w_k)$  por su polinomio de Taylor de tercer grado desarrollado alrededor de  $(0,0,0)$

$$\begin{aligned}
g(u_k, v_k, w_k) &\approx g(0,0,0) + g_u(0,0,0)u_k + g_v(0,0,0)v_k + g_w(0,0,0)w_k + \frac{1}{2}g_{uu}(0,0,0)u_k^2 \\
&+ \frac{1}{2}g_{vv}(0,0,0)v_k^2 + \frac{1}{2}g_{ww}(0,0,0)w_k^2 + g_{uv}(0,0,0)u_kv_k + g_{uw}(0,0,0)u_kw_k \\
&+ g_{vw}(0,0,0)v_kw_k + \frac{1}{6}g_{uuu}(0,0,0)u_k^3 + \frac{1}{6}g_{vvv}(0,0,0)v_k^3 + \frac{1}{6}g_{www}(0,0,0)w_k^3 \\
&+ \frac{1}{2}g_{uuv}(0,0,0)u_k^2v_k + \frac{1}{2}g_{uuw}(0,0,0)u_k^2w_k + \frac{1}{2}g_{uvv}(0,0,0)u_kv_k^2 \\
&+ \frac{1}{2}g_{uww}(0,0,0)u_kw_k^2 + \frac{1}{2}g_{vww}(0,0,0)v_k^2w_k + g_{uvw}(0,0,0)u_kv_kw_k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación del error es

$$e_{k+1} = \sum_{j=4}^8 L_j e_k^j + O(e_k^9), \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} L_4 = & -\frac{1}{2a_1^2} \rho c_2 ((h_{uu}(0,0)\rho^2 - 2a_1\rho(a_2\rho - h_{uv}(0,0)) + a_1^2(h_{vv}(0,0) - 2(5\rho + \gamma^2)))c_2^2 \\ & + 2a_1^2\rho c_3) + \frac{1}{2a_1^2} (g(0,0,0)\rho c_2 ((h_{uu}(0,0)\rho^2 - 2a_1\rho(a_2\rho - h_{uv}(0,0)) + a_1^2(h_{vv}(0,0) \\ & - 2(5\rho - \gamma^2)))c_2^2 + 2a_1^2\rho c_3). \end{aligned}$$

A la vista de  $L_4$ , observamos que basta exigir  $g(0,0,0) = 1$  para que el orden del método sea 5 y entonces

$$\begin{aligned} \bar{L}_5 = & -\frac{1}{2a_1^2} \rho(2 + \gamma)(h_{uu}(0,0)\rho^2 - 2a_1\rho(a_2\rho - h_{uv}(0,0)) + a_1^2(h_{vv}(0,0) \\ & - 2(5\rho + \gamma^2)))c_2^4 + \frac{1}{2a_1^2} \rho(h_{uu}(0,0)\rho^2 - 2a_1\rho(a_2\rho - h_{uv}(0,0)) + a_1^2(h_{vv}(0,0) \\ & - 2(5\rho + \gamma^2)))c_2^4(g_v(0,0,0) + \frac{g_u(0,0,0)\rho}{a_1}) + (-\rho^2(2 + \gamma)c_2^2 + \rho^2 c_2^2(g_v(0,0,0) \\ & + \frac{g_u(0,0,0)\rho}{a_1}))c_3. \end{aligned}$$

Si exigimos  $g_u(0,0,0) = a_1$ ,  $g_v(0,0,0) = 1$  y  $g_w(0,0,0) = 1$ , resulta  $\bar{L}_5 = 0$  y obtenemos un método de orden 6, con coeficiente

$$\begin{aligned} \bar{L}_6 = & \frac{1}{4a_1^4} \rho(2a_1(g_{uv}(0,0,0) - h_{uu}(0,0))\rho^2 + a_1^2(10 + g_{vv}(0,0,0)) - h_{uu}(0,0) + 10\gamma + 2\gamma^2 \\ & - 2(+6\gamma + \gamma^2))c_2^3((h_{uu}(0,0)\rho^2 - 2a_1\rho(a_2h_{uv}(0,0) - h_{uv}(0,0) + a_1^2(h_{vv}(0,0) - 2(5\rho \\ & + \gamma^2)))c_2^2 + 2a_1^2\rho c_3). \end{aligned}$$

Nuevamente imponemos las condiciones  $g_{uu}(0,0,0) = h_{uu}(0,0)$ ,  $g_{vv}(0,0,0) = h_{vv}(0,0)$ ,  $g_{uv}(0,0,0) = a_1 + h_{uu}(0,0)$ ,  $g_{uw}(0,0,0) = 2a_1$  y  $g_{vw} = 2$  para anular  $\bar{L}_6$  y así obtener orden 7 con

$$\begin{aligned} \bar{L}_7 = & -\frac{1}{12a_1^5} \rho((g_{uuu}(0,0,0) - h_{uuu}(0,0))\rho^3 + 3a_1^2\rho(g_{uvv}(0,0,0) - 4h_{uv}(0,0) \\ & - h_{vvu}(0,0) - 2\gamma h_{vu}(0,0) + 2a_2\rho^2) - 3a_1\rho^2(-g_{uuv}(0,0,0) + h_{uuv}(0,0) + h_{uu}(0,0)(2 + \gamma)) \\ & + a_1^3(24 + g_{vvv}(0,0,0) - h_{vvv}(0,0) + 36\gamma + 24\gamma^2 + 6\gamma^3 - 3h_{vv}(0,0)(2 + \gamma)))c_2^4(-h_{uu}(0,0)\rho^2 \\ & - 2a_1\rho(a_2\rho - h_{uv}(0,0)) + a_1^2(h_{vv}(0,0) - 2(5\rho + \gamma^2)))c_2^2 - 2a_1^2\rho c_3). \end{aligned}$$

Finalmente, las condiciones

$$\begin{aligned} g_{uuu}(0,0,0) &= -6a_1^3 - 6a_1^2 a_2 + 3a_1 h_{uu}(0,0) + h_{uuu}(0,0), \\ g_{uuv}(0,0,0) &= -2a_1^2 + h_{uu}(0,0) + h_{uuv}(0,0) + 2a_1 h_{uv}(0,0), \\ g_{uvv}(0,0,0) &= -2a_1 + 2h_{uv}(0,0) + a_1 h_{uu}(0,0) + h_{vvu}(0,0), \\ g_{vvv}(0,0,0) &= -6 + 3h_{vv}(0,0) + h_{vvv}(0,0), \end{aligned}$$

nos permiten obtener el orden 8 con la siguiente ecuación del error

$$\begin{aligned}
e_{k+1} = & -\frac{1}{48a_1^6}\rho c_2((h_{uu}(0,0)\rho^2 - 2a_1\rho(a_2\rho - h_{uv}(0,0)) + a_1^2(h_{vv} - 2(5\rho + \gamma^2)))c_2^2 \\
& + 2a_1^2\rho c_3)((-3h_{uu}(0,0)(-2g_{uuv}(0,0,0) + g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0))\rho^4 \\
& - 4a_1\rho^3(-3g_{uww}(0,0,0)h_{uu}(0,0) - 2h_{uuu}(0,0) - 3g_{uuw}(0,0,0)h_{uv}(0,0) \\
& + 3g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0)h_{uv}(0,0) - \gamma h_{uuu}(0,0) + 3a_2(g_{uww}(0,0,0) + h_{uu}(0,0) \\
& - g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0))\rho - 6a_1^2\rho^2(18h_{uu}(0,0) - g_{vww}(0,0,0)h_{uu}(0,0) \\
& - 10g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0) - 4h_{uuv}(0,0) - 4g_{uww}(0,0,0)h_{uv}(0,0) + 2g_{ww}(0,0,0)h_{uv}(0,0)^2 \\
& + g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0)h_{vv}(0,0) + 18\gamma h_{uu}(0,0) - 10\gamma g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0) - 2\gamma h_{uuv}(0,0) \\
& + 4\gamma^2 h_{uu}(0,0) - 2\gamma^2 g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0) + 4a_2(g_{uww}(0,0,0) + h_{uv}(0,0) \\
& + g_{ww}(0,0,0)h_{uv}(0,0))\rho + 2a_2^2\rho^2 g_{ww}(0,0,0) + g_{uww}(0,0,0)(-h_{vv}(0,0) \\
& + 2(5\rho + \gamma^2))) - 12a_1^3\rho(18h_{uv}(0,0) - g_{vww}(0,0,0)h_{uv}(0,0) - 10g_{ww}(0,0,0)h_{uv}(0,0) \\
& + g_{ww}(0,0,0)h_{uv}(0,0)h_{vv}(0,0) - 2h_{vuv}(0,0) + 18\gamma h_{uv}(0,0) - 10\gamma g_{ww}(0,0,0)h_{uv}(0,0) \\
& - \gamma h_{vuv}(0,0) + 4\gamma^2 h_{uv}(0,0) - 2\gamma^2 g_{ww}(0,0,0)h_{uv}(0,0) + g_{uww}(0,0,0)(-h_{vv}(0,0) \\
& + 2(5\rho + \gamma^2)) + a_2\rho(-26 + g_{vww}(0,0,0) + h_{vv}(0,0) - 22\gamma - 2\gamma^2 + g_{ww}(0,0,0)(10 \\
& - h_{vv}(0,0) + 10\gamma + 2\gamma^2))) + a^4(6g_{vww}(0,0,0)(h_{vv}(0,0) - 2(5\rho + \gamma^2)) \\
& - 3g_{ww}(0,0,0)(h_{vv}(0,0) - 2(5\rho + \gamma^2))^2 + 4(h_{vuv}(0,0)(2 + \gamma) - 3h_{vv}(0,0)(9 + 9\gamma\gamma \\
& + 2\gamma^2) + 6(45 + 90 + 59\gamma^2 + 14\gamma^3 + \gamma^4)))c_2^4 + 12a_1^2\rho(g_{uww}(0,0,0) + h_{uu}(0,0) \\
& - g_{ww}(0,0,0)h_{uu}(0,0))\rho^2 + 2a_1\rho(g_{uww}(0,0,0) + h_{uv}(0,0) - g_{ww}(0,0,0)h_{uv}(0,0) \\
& + a_2(-3 + g_{ww}(0,0,0)\rho) + a_1^2(-38 + g_{vww}(0,0,0) + h_{vv}(0,0) - 38\gamma - 6\gamma^2 \\
& + g_{ww}(0,0,0)(10 - h_{vv}(0,0) + 10\gamma + 2\gamma^2)))c_2^3 c_3 - 12a_1^4(-2 + g_{ww}(0,0,0))\rho^2 c_3^2 \\
& + 24a_1^4\rho^2 c_2 c_4 e_k^8 + O(e_k^9),
\end{aligned}$$

con lo que finaliza la demostración del teorema.  $\square$

A continuación vamos a seleccionar determinadas funciones peso  $h$  y  $g$  tales que satisfagan las condiciones impuestas en el Teorema 4.3.4, exigiendo asimismo que  $a_1 \neq 0$  y cualquier valor de  $a_2$ . Así, unas funciones peso que cumplan estos requisitos, dependientes de  $a_1$  y  $a_2$  son

$$\begin{aligned}
h(u, v) &= 1 + a_1 u + v + u^2 + uv + v^3 + u^2 v, \\
g(u, v, w) &= 1 + a_1 u + v + w + u^2 + (a_1 + 1)uv + 2(a_1 uw + vw) - a_1(a_1^2 + a_1 a_2 - 1)u^3 \\
&\quad - (a_1^2 - a_1 - 2)u^2 v - (a_1 - 1)v^2 u.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Consideremos ahora las siguientes funciones peso particulares con  $a_1 = \frac{1}{2}$  y  $a_2 = 0$

$$\begin{aligned}
h(u, v) &= 1 + \frac{1}{2}u + v + \frac{1}{4}u^2 + v^2, \\
g(u, v, w) &= 1 + \frac{1}{2}u + v + w + \frac{1}{4}u^2 + v^2 + \frac{1}{2}uv + uw + 2vw.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Por otra parte, si  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 0$ , las funciones

$$\begin{aligned}
h(u, v) &= \frac{1+v}{1-u} + 3uv, \\
g(u, v, w) &= 1 + u + v + w + u^2 + 5uv + 2uw + 2vw + u^3 - v^3 + 5u^2 v + 3uv^2,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

también cumplen las hipótesis del teorema.

Asimismo, tomando  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 1$ , con

$$\begin{aligned} h(u, v) &= 1 + u + v + 4uv + 2u^2 + v^3, \\ g(u, v, w) &= 1 + u + v + w + 2u^2 + 5uv + 2uw + 2vw + 5u^2v + 3uv^2, \end{aligned} \quad (4.27)$$

se obtiene también un método de orden ocho.

Finalmente, si  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} h(u, v) &= \frac{1 + u + u^2}{1 - v + v^2} + 3uv, \\ g(u, v, w) &= 1 + u + v + w + u^2 + 5uv + 2uw + 2vw - 2v^3 + 5u^2v + 3uv^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

que también verifican las hipótesis del teorema.

A partir de estas últimas cuatro funciones peso particulares obtenemos los esquemas iterativos denominados MES81, MES82, MES83 y MES86 respectivamente.

#### 4.4. Pruebas numéricas

Las pruebas numéricas reflejadas a continuación han sido llevadas a cabo utilizando aritmética de precisión variable, con 2000 dígitos de mantisa, en Matlab R2010a. El procesador de la máquina empleada para ello ha sido un Intel(r) Core(tm) i7 CPU 950@3.07GHz con una memoria RAM de 16GB.

A continuación presentamos los resultados obtenidos por los métodos iterativos libres de derivadas descritos de órdenes 4 y 8 sobre las funciones dadas la Sección (3.4). Asimismo, y dado que los procesos iterativos diseñados no utilizan derivadas en su expresión iterativa, trabajaremos también con las siguientes funciones no derivables siguientes:

$$\begin{aligned} f_{19}(x) &= \begin{cases} x(x-1), & \text{si } x < 0 \\ -2x(x+1), & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ f_{20}(x) &= |x^2 - 9|, \\ f_{21}(x) &= \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Debemos aclarar que las funciones  $f_8(x)$ ,  $f_{13}(x)$  y  $f_{15}(x)$ , serán sustituidas en las pruebas numéricas para los métodos de orden cuatro, por las funciones no derivables  $f_{19}(x)$ ,  $f_{20}(x)$  y  $f_{21}(x)$ . En los métodos de orden ocho no vamos a usar las funciones  $f_{10}(x)$  y  $f_{15}(x)$ , que serán sustituidas por las funciones no derivables  $f_{19}(x)$  y  $f_{20}(x)$ .

En las tablas siguientes aparecen los resultados obtenidos por los diferentes métodos sobre las funciones mencionadas con anterioridad, teniendo en cuenta que el criterio de parada ha sido, en todas ellas,  $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-500}$  ó  $\|f(x_{k+1})\| < 10^{-500}$ . Para cada una de las funciones, mostraremos la estimación inicial utilizada,  $x_0$ , la raíz  $\xi$  a la que tiende el proceso, el valor absoluto de la diferencia entre las dos últimas iteraciones,  $|x_{k+1} - x_k|$ , el valor absoluto de cada función evaluada en la última iteración,  $|f(x_{k+1})|$ , el número de iteraciones que le ha llevado converger, el orden computacional de convergencia aproximado,  $\rho$  y el tiempo de computación en segundos, e-time, que ha sido calculado como la media de 100 ejecuciones consecutivas, mediante el comando `cputime`.

Los esquemas iterativos de orden cuatro MES41, MES42, MES43, MES44, MES45, MES46 y MES47 obtenidos a partir de la familia de métodos (4.8), son comparados con los esquemas del mismo orden MES4L, MES4R y MES4Z diseñados por diferentes autores y presentados en la Introducción.

Al observar las tablas, todos los métodos involucrados en la comparación determinan con la precisión adecuada la solución o raíz. Respecto a las estimaciones del error cometido,  $|(x_{k+1} - x_k)|$  y  $|f(x_{k+1})|$ , los métodos propuestos presentan resultados iguales o mejores que los esquemas consolidados, en la mayoría de los casos.

Con respecto al número de iteraciones que han necesitado los diferentes métodos para converger, podemos afirmar que las únicas diferencias apreciables se dan en las funciones  $f_{12}(x)$ , cuya raíz es múltiple, y en  $f_{21}(x)$ , que presenta problemas de estabilidad debido a su carácter no diferenciable. El número concreto de iteraciones (en los diferentes métodos) sobre estas funciones ha oscilado de 268 a 319 y de 269 a 355, respectivamente.

En cuanto al orden de convergencia computacional aproximado, ACOC, todas las funciones derivables (excepto  $f_{12}(x)$ ) mantienen, con cada método iterativo el orden teórico, mientras que en el caso no derivable, éste se mantiene con  $f_{20}(x)$  para todos los métodos, mientras que para  $f_{19}(x)$  todos los esquemas muestran convergencia cuadrática. En el caso de  $f_{21}(x)$ , la convergencia es lineal en todos los casos.

	Metodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_1$ $x_0 = 1$	MES41	1.409624	4.3 e-162	3.0 e-646	5	4.0000	0.2045
	MES42	1.409624	4.4 e-136	6.3 e-542	5	4.0000	0.2226
	MES43	1.409624	1.0 e-182	4.5 e-729	5	4.0000	0.2365
	MES44	1.409624	2.9 e-460	2.1 e-1838	6	4.0000	0.2308
	MES45	1.409624	2.8 e-147	1.6 e-586	5	4.0000	0.2243
	MES46	1.409624	3.2 e-248	7.4 e-991	5	4.0000	0.2396
	MES47	1.409624	2.1 e-191	7.2 e-764	5	4.0000	0.2697
	MES4L	1.409624	6.0 e-239	5.9 e-954	5	4.0000	0.2403
	MES4R	1.409624	2.6 e-213	1.4 e-851	5	4.0000	0.2437
	MES4Z	1.409624	6.2 e-151	1.9 e-601	5	4.0000	0.2826
$f_2$ $x_0 = 1$	MES41	0.257530	7.2 e-154	4.2 e-614	5	4.0000	0.2346
	MES42	0.257530	4.0 e-175	2.9 e-699	5	4.0000	0.2675
	MES43	0.257530	2.0 e-150	2.9 e-600	5	4.0000	0.2836
	MES44	0.257530	2.1 e-189	3.2 e-756	5	4.0000	0.2580
	MES45	0.257530	1.4 e-137	9.6 e-549	5	4.0000	0.2760
	MES46	0.257530	1.1 e-143	3.2 e-573	5	4.0000	0.3185
	MES47	0.257530	1.0 e-154	1.7 e-617	5	4.0000	0.3002
	MES4L	0.257530	4.7 e-163	6.8 e-651	5	4.0000	0.3027
	MES4R	0.257530	1.5 e-402	4.7 e-1608	6	4.0000	0.2847
	MES4Z	0.257530	1.3 e-166	4.2 e-665	5	4.0000	0.2905

Tabla 4.1: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones test

	Metodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_3$ $x_0 = 1$	MES41	0.739085	4.3 e-311	6.1 e-1244	5	4.0000	0.1850
	MES42	0.739085	3.6 e-316	2.5 e-1264	5	4.0000	0.2239
	MES43	0.739085	2.5 e-304	9.3 e-1217	5	4.0000	0.2422
	MES44	0.739085	5.6 e-302	2.4 e-1207	5	4.0000	0.1785
	MES45	0.739085	1.2 e-359	1.1 e-1438	5	4.0000	0.1800
	MES46	0.739085	2.3 e-309	5.9 e-1237	4	4.0000	0.2554
	MES47	0.739085	2.1 e-325	2.0 e-1301	5	4.0000	0.1664
	MES4L	0.739085	8.7 e-339	4.2 e-1355	5	4.0000	0.1775
	MES4R	0.739085	3.9 e-257	1.9 e-1027	5	4.0000	0.2217
MES4Z	0.739085	6.8 e-309	4.2 e-1235	5	4.0000	0.1842	
$f_4$ $x_0 = 2.5$	MES41	2.0000	6.7 e-144	6.7 e-571	7	4.0000	0.4033
	MES42	2.0000	6.1 e-139	1.3 e-551	6	4.0000	0.3805
	MES43	2.0000	4.4 e-153	1.0 e-607	7	4.0000	0.3814
	MES44	2.0000	1.1 e-492	1.8 e-1966	7	4.0000	0.3423
	MES45	2.0000	1.4 e-415	2.1 e-1657	8	4.0000	0.4117
	MES46	2.0000	7.4 e-487	1.1 e-1942	8	4.0000	0.4683
	MES47	2.0000	3.9 e-189	5.2 e-752	7	4.0000	0.4307
	MES4L	2.0000	1.9 e-180	5.3 e-718	6	4.0000	0.3977
	MES4R	2.0000	9.1 e-167	3.2 e-663	6	4.0000	0.4051
MES4Z	2.0000	1.9 e-193	3.8 e-770	6	4.0000	0.3824	
$f_5$ $x_0 = 1.5$	MES41	2.154435	4.2 e-184	1.8 e-730	6	4.0000	0.1471
	MES42	2.154435	1.3 e-451	1.4 e-1801	7	4.0000	0.1734
	MES43	2.154435	1.4 e-205	2.0 e-816	6	4.0000	0.1822
	MES44	2.154435	1.2 e-434	2.0 e-1733	7	4.0000	0.1841
	MES45	2.154435	1.5 e-248	4.5 e-988	8	4.0000	0.2654
	MES46	2.154435	1.6 e-317	5.0 e-1264	7	4.0000	0.2479
	MES47	2.154435	2.5 e-323	1.6 e-1287	6	4.0000	0.2080
	MES4L	2.154435	2.2 e-495	5.7 e-1977	7	4.0000	0.2049
	MES4R	2.154435	6.3 e-204	4.8 e-811	6	4.0000	0.2269
MES4Z	2.154435	2.8 e-498	1.3 e-1988	7	4.0000	0.2333	
$f_6$ $x_0 = 1$	MES41	0.639154	2.1 e-156	8.4 e-634	5	4.0000	0.1778
	MES42	0.639154	2.0 e-146	2.1 e-583	5	4.0000	0.2134
	MES43	0.639154	3.1 e-156	2.6 e-623	5	4.0000	0.2175
	MES44	0.639154	3.5 e-359	5.9 e-1434	6	4.0000	0.2312
	MES45	0.639154	1.8 e-221	5.3 e-883	6	4.0000	0.2949
	MES46	0.639154	1.7 e-392	1.6 e-1567	6	4.0000	0.2607
	MES47	0.639154	1.6 e-125	5.6 e-500	5	4.0000	0.2706
	MES4L	0.639154	2.3 e-129	2.9 e-515	5	4.0000	0.2741
	MES4R	0.639154	1.3 e-434	2.8 e-1736	6	4.0000	0.2913
MES4Z	0.639154	2.1 e-151	1.5 e-603	5	4.0000	0.2957	

Tabla 4.2: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones test

	Metodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_7$ $x_0 = 1$	MES41	0.767653	1.3 e-322	1.6 e-1286	6	4.0000	0.2783
	MES42	0.767653	2.7 e-439	8.3 e-1754	6	4.0000	0.2503
	MES43	0.767653	3.5 e-343	4.8 e-1369	6	4.0000	0.2894
	MES44	0.767653	1.7 e-403	2.1 e-1610	6	4.0000	0.2354
	MES45	0.767653	1.4 e-298	2.0 e-1190	6	4.0000	0.3605
	MES46	0.767653	1.6 e-319	2.9 e-1274	6	4.0000	0.3261
	MES47	0.767653	2.2 e-358	6.2 e-1430	6	4.0000	0.3040
	MES4L	0.767653	1.6 e-127	5.6 e-507	5	4.0000	0.2734
	MES4R	0.767653	6.8 e-458	2.4 e-1828	6	4.0000	0.2874
MES4Z	0.767653	4.1 e-138	1.6 e-549	5	4.0000	0.2928	
$f_9$ $x_0 = 0.4$	MES41	0.128077	4.5 e-475	2.0 e-1896	8	4.0000	0.4452
	MES42	0.128077	3.6 e-277	1.7 e-1105	6	4.0000	0.3648
	MES43	0.128077	1.6 e-223	3.4 e-890	7	4.0000	0.4443
	MES44	0.128077	6.5 e-174	2.5 e-692	6	4.0000	0.3748
	MES45	0.128077	1.9 e-219	1.9 e-873	8	4.0000	0.5585
	MES46	0.128077	3.4 e-182	9.1 e-725	9	4.0000	0.6426
	MES47	0.128077	1.3 e-458	9.4 e-1831	7	4.0000	0.4012
	MES4L	0.128077	4.5 e-419	2.2 e-1673	6	4.0000	0.3724
	MES4R	0.128077	3.0 e-275	1.6 e-1097	6	4.0000	0.4797
MES4Z	0.128077	2.0 e-445	7.2 e-1779	6	4.0000	0.3655	
$f_{10}$ $x_0 = 0.5$	MES41	0.000000	3.4 e-111	5.9 e-553	5	5.0000	0.2174
	MES42	0.000000	4.5 e-160	2.5 e-797	5	5.0000	0.3196
	MES43	0.000000	3.6 e-140	7.8 e-698	5	5.0000	0.1865
	MES44	0.000000	6.9 e-137	2.1 e-681	5	5.0000	0.2522
	MES45	0.000000	5.7 e-458	8.2 e-2287	6	5.0000	0.2815
	MES46	0.000000	1.4 e-199	6.0 e-595	5	5.0000	0.2659
	MES47	0.000000	9.1 e-143	8.5 e-711	5	5.0000	0.3392
	MES4L	0.000000	1.0 e-184	1.3 e-920	5	5.0000	0.2334
	MES4R	0.000000	1.3 e-101	2.2 e-504	5	5.0000	0.3014
MES4Z	0.000000	5.2 e-197	5.3 e-982	5	5.0000	0.2739	
	Metodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_{11}$ $x_0 = 0.5$	MES41	0.714806	1.1 e-223	2.2 e-892	5	4.0000	0.2851
	MES42	0.714806	1.1 e-486	3.9 e-1943	6	4.0000	0.3060
	MES43	0.714806	2.4 e-197	2.4 e-786	5	4.0000	0.3004
	MES44	0.714806	2.3 e-431	1.1 e-1721	6	4.0000	0.2933
	MES45	0.714806	1.4 e-488	1.7 e-1950	6	4.0000	0.3776
	MES46	0.714806	7.1 e-145	6.7 e-576	5	4.0000	0.3433
	MES47	0.714806	3.7 e-230	4.2 e-919	5	4.0000	0.3216
	MES4L	0.714806	5.5 e-157	9.8 e-625	5	4.0000	0.3840
	MES4R	0.714806	4.3 e-156	3.3 e-621	5	4.0000	0.3105
MES4Z	0.714806	2.1 e-139	2.9 e-554	5	4.0000	0.2651	

Tabla 4.3: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones test

4. Métodos iterativos multipunto óptimos de tipo Steffensen para ecuaciones no lineales

	Metodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_{12}$ $x_0 = 0.5$	MES41	0.000000	8.1 e-250	3.3 e-500	493	1.0000	49.0422
	MES42	0.000000	1.5 e-249	9.6 e-500	465	1.0000	59.8727
	MES43	0.000000	1.5 e-249	9.8 e-500	465	1.0000	69.4388
	MES44	0.000000	9.0 e-250	3.8 e-500	479	1.0000	76.1777
	MES45	0.000000	8.1 e-250	3.4 e-500	493	1.0000	90.7748
	MES46	0.000000	4.5 e-250	9.0 e-501	472	1.0000	96.1048
	MES47	0.000000	6.7 e-250	2.1 e-500	479	1.0000	107.3228
	MES4L	0.000000	6.7 e-250	1.6 e-500	448	1.0000	101.7515
	MES4R	0.000000	1.3 e-249	4.5 e-500	415	1.0000	99.7564
	MES4Z	0.000000	7.9 e-250	1.7 e-500	414	1.0000	103.4145
$f_{14}$ $x_0 = 2$	MES41	2.331968	8.6 e-271	2.4 e-1082	5	4.0000	4.9849
	MES42	2.331968	3.0 e-273	3.4 e-1092	5	4.0000	3.3445
	MES43	2.331968	2.5 e-269	1.7 e-1072	5	4.0000	4.7539
	MES44	2.331968	6.3 e-279	5.7 e-1115	5	4.0000	3.6813
	MES45	2.331968	5.5 e-261	5.2 e-1043	5	4.0000	4.2912
	MES46	2.331968	2.9 e-266	3.6 e-1064	5	4.0000	4.0712
	MES47	2.331968	1.9 e-268	5.8 e-1073	5	4.0000	4.5487
	MES4L	2.331968	3.9 e-268	1.1 e-1071	5	4.0000	4.0061
	MES4R	2.331968	4.2 e-209	7.6 e-835	5	4.0000	4.6275
	MES4Z	2.331968	1.5 e-291	2.1 e-1085	5	3.9998	4.6158
$f_{16}$ $x_0 = 1.95$	MES41	1.679631	2.7 e-156	2.3 e-622	5	4.0000	1.7459
	MES42	1.679631	2.0 e-493	1.6 e-1970	6	4.0000	3.8185
	MES43	1.679631	6.7 e-185	2.4 e-737	5	4.0000	2.4896
	MES44	1.679631	9.2 e-413	1.3 e-1647	6	4.0000	1.2390
	MES45	1.679631	9.0 e-134	1.1 e-531	5	4.0000	3.3249
	MES46	1.679631	7.8 e-196	2.0 e-780	5	4.0000	3.3616
	MES47	1.679631	5.1 e-187	9.4 e-746	5	4.0000	1.4657
	MES4L	1.679631	7.0 e-222	6.5 e-885	5	4.0000	2.8514
	MES4R	1.679631	3.4 e-163	5.6 e-650	5	4.0000	3.7570
	MES4Z	1.679631	9.9 e-141	6.8 e-560	5	4.0000	1.1147
$f_{17}$ $x_0 = 2$	MES41	1.746140	8.6 e-469	9.5 e-1877	5	4.0000	0.0987
	MES42	1.746140	3.2 e-467	9.0 e-1871	5	4.0000	0.1113
	MES43	1.746140	2.9 e-440	4.9 e-1762	5	4.0000	0.1161
	MES44	1.746140	4.0 e-469	4.6 e-1878	5	4.0000	0.1177
	MES45	1.746140	7.2 e-470	1.5 e-1881	5	4.0000	0.1291
	MES46	1.746140	1.1 e-440	1.1 e-1763	5	4.0000	0.1383
	MES47	1.746140	6.9 e-468	1.7 e-1873	5	4.0000	0.1371
	MES4L	1.746140	7.0 e-477	3.4 e-1910	5	4.0000	0.1514
	MES4R	1.746140	1.0 e-386	3.8 e-1547	5	4.0000	0.1396
	MES4Z	1.746140	1.5 e-446	2.9 e-1787	5	4.0000	0.1432

Tabla 4.4: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones test

	Metodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_{18}$ $x_0 = -1.8$	MES41	-2	5.4 e-179	7.4 e-715	5	4.0000	0.9593
	MES42	-2	5.6 e-193	6.7 e-771	5	4.0000	1.0801
	MES43	-2	2.8 e-199	3.8 e-796	5	4.0000	1.2067
	MES44	-2	3.4 e-184	1.1 e-735	5	4.0000	1.2385
	MES45	-2	2.4 e-181	2.6 e-724	5	4.0000	1.4067
	MES46	-2	4.2 e-195	2.0 e-779	5	4.0000	1.4699
	MES47	-2	3.2 e-189	7.8 e-756	5	4.0000	1.6189
	MES4L	-2	1.8 e-203	5.6 e-813	5	4.0000	1.5619
	MES4R	-2	1.3 e-184	4.0 e-737	5	4.0000	1.6794
MES4Z	-2	1.0 e-220	5.3 e-882	5	4.0000	1.7830	
$f_{19}$ $x_0 = 0.4$	MES41	0.000000	2.3 e-409	5.4 e-1635	10	2.0000	1.5531
	MES42	0.000000	1.7 e-407	1.9 e-1627	10	2.0000	2.2511
	MES43	0.000000	1.1 e-222	4.7 e-666	9	2.0000	0.6047
	MES44	0.000000	2.6 e-411	1.9 e-1642	10	2.0000	0.5015
	MES45	0.000000	6.3 e-403	3.1 e-1609	10	2.0000	0.7001
	MES46	0.000000	4.9 e-222	4.8 e-664	9	2.0000	1.0018
	MES47	0.000000	3.5 e-406	9.9 e-1623	10	2.0000	1.3186
	MES4L	0.000000	8.3 e-403	1.6 e-2015	10	2.0000	1.5012
	MES4R	0.000000	2.1 e-215	1.9 e-644	9	2.0000	2.0481
MES4Z	0.000000	3.7 e-222	1.0 e-664	9	2.0000	1.8219	
$f_{20}$ $x_0 = 4$	MES41	3.000000	3.5 e-358	2.2 e-1430	7	4.0000	0.3212
	MES42	3.000000	5.9 e-352	1.5 e-1405	6	4.0000	0.3881
	MES43	3.000000	4.4 e-369	7.8 e-1474	7	4.0000	0.6388
	MES44	3.000000	3.8 e-326	3.9 e-1302	6	4.0000	0.5808
	MES45	3.000000	1.1 e-148	2.7 e-591	6	4.0000	1.0104
	MES46	3.000000	5.7 e-325	4.6 e-648	7	4.0000	1.2827
	MES47	3.000000	1.4 e-415	3.9 e-1660	7	4.0000	1.5458
	MES4L	3.000000	1.4 e-405	2.3 e-1620	6	4.0000	1.5404
	MES4R	3.000000	2.6 e-347	1.7 e-1386	7	4.0000	1.6568
MES4Z	3.000000	2.8 e-415	4.2 e-1659	6	4.0000	0.2872	
$f_{21}$ $x_0 = 0.5$	MES41	0.000000	4.4 e-250	4.0 e-500	494	1.0000	12.8983
	MES42	0.000000	6.7 e-250	7.6 e-500	466	1.0000	15.0322
	MES43	0.000000	7.7 e-250	1.0 e-501	466	1.0000	16.2331
	MES44	0.000000	4.3 e-250	3.5 e-500	480	1.0000	16.7338
	MES45	0.000000	4.5 e-250	4.2 e-500	494	1.0000	20.0735
	MES46	0.000000	2.4 e-250	9.9 e-501	473	1.0000	20.8291
	MES47	0.000000	3.4 e-250	2.1 e-500	478	1.0000	22.0366
	MES4L	0.000000	2.7 e-250	1.1 e-500	449	1.0000	20.2063
	MES4R	0.000000	3.4 e-250	1.2 e-500	415	1.0000	20.8602
MES4Z	0.000000	2.8 e-250	8.5 e-501	415	1.0000	19.8432	

Tabla 4.5: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre las funciones test

Hemos comparado los métodos nuestros de orden 8 MES81, MES82, MES83 y MES86 obtenidos a partir de la familia de métodos (4.9), que cumplen con las exigencias del Teorema 4.3.4, con otros ya diseñados por otros autores MES8Z y MES8S ( ver éstos en (4.4) y (4.5)) que tienen como característica la utilización de la técnica de funciones peso y ser trabajos recientes en el área de investigación. Los métodos iterativos de orden ocho se han comportado de igual manera que los de orden cuatro, en cuanto a la precisión obtenida en la determinación de la solución o raíz al ser probados sobre las funciones seleccionadas.

Con relación al valor absoluto de la diferencia de las iteraciones, así como el valor absoluto de la

última iteración hemos observado que tanto los nuevos métodos como los ya estudiados se comportan de manera diferente cuando los evaluamos sobre las funciones dadas, pero en un rango adecuado. Hay un total de siete funciones en las que los métodos comparados realizaron el mismo número de iteraciones, en las otras funciones la diferencia no es significativa, sólo en las funciones  $f_{12}(x)$  y  $f_{21}(x)$  el número de iteraciones realizadas es mucho mayor, lo que se debe a las características propias de esas funciones. Con respecto al ACOC obtenido por de los métodos una vez evaluados sobre las funciones, la realidad es que la gran mayoría el orden de convergencia han sido exactamente ocho, y los que no están en este grupo los valores son muy cercanos a ocho.

Los resultados obtenidos por los métodos iterativos estudiados conocidos que han sido utilizados para compararlos con los propuestos, nos permiten afirmar que todos ellos se encuentran en un grupo selecto de métodos eficientes para resolver ecuaciones no lineales.

	Metodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_1$ $x_0 = 1$	MES81	1.409624	2.7 e-224	1.1 e-1788	4	8.0000	0.1782
	MES82	1.409624	2.2 e-268	2.7 e-2008	4	7.9999	0.2075
	MES83	1.409624	6.0 e-292	2.7 e-2008	4	8.0000	0.2325
	MES86	1.409624	6.7 e-281	2.7 e-2008	4	7.9999	0.2502
	MES8Z	1.409624	7.2 e-315	2.7 e-2008	4	8.0000	0.2080
	MES8S	1.409624	7.6 e-287	2.7 e-2008	4	8.0000	0.2618
$f_2$ $x_0 = 1$	MES81	0.257530	2.1 e-328	2.7 e-2008	4	7.9832	0.2277
	MES82	0.257530	1.1 e-327	0.0	4	7.9205	0.2645
	MES83	0.257530	5.6 e-321	0.0	4	8.0000	0.3488
	MES86	0.257530	3.6 e-421	0.0	4	7.7511	0.2844
	MES8Z	0.257530	1.0 e-323	2.7 e-2008	4	8.0014	0.3088
	MES8S	0.257530	2.5 e-329	0.0	4	7.9472	0.3009
$f_3$ $x_0 = 1$	MES81	0.739085	3.6 e-67	1.8 e-535	3	8.0241	0.2025
	MES82	0.739085	1.9 e-77	1.1 e-618	3	8.0081	0.2111
	MES83	0.739085	1.2 e-78	2.0 e-628	4	8.0046	0.2279
	MES86	0.739085	8.9 e-78	2.0 e-621	3	8.0132	0.2335
	MES8Z	0.739085	2.3 e-82	1.0 e-658	3	8.0196	0.1646
	MES8S	0.739085	5.0 e-81	8.2 e-648	3	8.0156	0.2362
$f_4$ $x_0 = 2.5$	MES81	2.000000	1.4 e-252	0.0	5	8.0000	0.4363
	MES82	1.999999	1.3 e-446	0.0	5	7.8415	0.4166
	MES83	2.000000	3.8 e-192	3.1 e-1527	5	7.9991	0.5196
	MES86	2.000000	2.1 e-318	0.0	5	7.7662	0.4992
	MES8Z	2.000000	3.4 e-120	5.3 e-954	4	7.9980	0.3323
	MES8S	2.000000	1.3 e-107	5.1 e-852	4	7.9921	0.3990
$f_5$ $x_0 = 1.5$	MES81	2.154435	2.8 e-100	4.5 e-791	4	8.0034	0.3520
	MES82	2.154435	4.3 e-353	4.3 e-2007	5	7.7889	0.3727
	MES83	2.154435	1.4 e-144	5.8 e-1145	4	7.9835	0.3956
	MES86	2.154435	1.9 e-88	2.1 e-696	4	8.0496	0.3848
	MES8Z	2.154435	1.4 e-102	2.2 e-812	4	7.9917	0.3462
	MES8S	2.154435	1.8 e-477	2.2 e-2007	5	7.8907	0.3854
$f_6$ $x_0 = 1$	MES81	0.639154	1.3 e-139	1.3 e-1111	4	8.0019	0.4920
	MES82	0.639154	1.6 e-164	1.8 e-1313	4	7.9996	0.6078
	MES83	0.639154	2.6 e-107	2.6 e-852	4	8.0060	0.5456
	MES86	0.639154	2.2 e-169	5.5 e-1350	4	7.9995	0.6670
	MES8Z	0.639154	6.8 e-269	4.0 e-2008	4	8.0000	0.4290
	MES8S	0.639154	1.0 e-232	2.1 e-1856	4	8.0000	0.5787

Tabla 4.6: Resultados obtenidos por los métodos de orden 8 sobre las funciones test

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_7$ $x_0 = 1$	MES81	0.767653	3.3 e-172	2.7 e-1369	4	7.9998	0.5103
	MES82	0.767653	1.1 e-213	2.3 e-1702	4	7.9999	0.5716
	MES83	0.767653	2.5 e-176	1.6 e-1402	4	7.9981	0.5628
	MES86	0.767653	3.3 e-202	5.1 e-1642	4	7.9996	0.5356
	MES8Z	0.767653	7.7 e-287	1.3 e-2008	4	8.0000	0.4989
	MES8S	0.767653	4.6 e-239	1.8 e-1904	4	8.0000	0.5547
$f_8$ $x_0 = 1.5$	MES81	1.365230	1.4 e-133	1.2 e-1056	4	7.9989	0.1450
	MES82	1.365230	4.5 e-165	5.9 e-1309	4	7.9989	0.2047
	MES83	1.365230	5.8 e-102	2.2 e-803	4	7.9878	0.2076
	MES86	1.365230	5.2 e-141	2.3 e-1116	4	7.9913	0.1532
	MES8Z	1.365230	1.1 e-330	0.0	4	7.7620	0.1345
	MES8S	1.365230	6.2 e-312	0.0	4	8.0000	0.2118
$f_9$ $x_0 = -0.1$	MES81	0.128077	1.5 e-314	7.6 e-2009	4	8.0000	0.1423
	MES82	0.128077	5.1 e-340	7.6 e-2009	4	7.8165	0.1496
	MES83	0.128077	2.6 e-292	7.6 e-2009	4	8.0000	0.2106
	MES86	0.128077	7.6 e-435	7.6 e-2009	4	7.6151	0.1417
	MES8Z	0.128077	3.3 e-438	7.6 e-2009	4	7.8909	0.1256
	MES8S	0.128077	8.5 e-409	7.6 e-2009	4	7.8473	0.1563
$f_{11}$ $x_0 = 0.5$	MES81	0.714806	5.1 e-299	5.4 e-2008	4	8.0000	0.1309
	MES82	0.714806	1.5 e-272	5.4 e-2008	4	8.0000	0.1700
	MES83	0.714806	4.1 e-260	5.4 e-2008	4	8.0000	0.1702
	MES86	0.714806	6.6 e-354	5.4 e-2008	4	7.7919	0.1379
	MED8Z	0.714806	5.1 e-302	5.4 e-2008	4	8.0000	0.1421
	MED8S	0.714806	6.8 e-277	5.4 e-2008	4	8.0000	0.1704
$f_{12}$ $x_0 = 0.5$	MES81	0.000000	1.3 e-249	2.3 e-500	347	1.0000	26.0622
	MES82	0.000000	9.6 e-250	1.0 e-500	330	1.0018	25.5618
	MES83	0.000000	6.2 e-250	4.9 e-501	339	1.0000	26.2324
	MES86	0.000000	1.4 e-249	2.2 e-500	332	1.0017	26.0003
	MES8Z	0.000000	1.7 e-249	1.6 e-500	276	1.0000	19.9002
	MES8S	0.000000	3.2 e-249	4.5 e-500	266	1.0000	20.6869
$f_{13}$ $x_0 = -1$	MES81	-1.201576	6.0 e-68	5.0 e-528	4	8.0203	0.1940
	MES82	-1.201576	1.6 e-398	2.2 e-2007	5	7.8649	0.3404
	MES83	-1.201576	1.9 e-140	2.9 e-1107	4	7.9833	0.3404
	MES86	-1.201576	1.8 e-69	5.9 e-540	4	7.9627	0.3345
	MES8Z	-1.201576	1.1 e-134	3.7 e-1066	4	8.0038	0.3000
	MES8S	-1.201576	7.7 e-85	1.1 e-665	4	7.9882	0.3404
$f_{14}$ $x_0 = 2$	MES81	2.331968	2.5 e-68	4.0 e-545	3	7.9753	0.2975
	MES82	2.331968	1.0 e-495	0.0	4	7.9966	0.6121
	MES83	2.331968	2.5 e-487	1.1 e-2007	4	7.9990	0.6121
	MES86	2.331968	6.6 e-496	0.0	4	7.9968	0.6184
	MES8Z	2.331968	1.3 e-69	8.9 e-556	3	8.0003	0.5848
	MES8S	2.331968	6.9 e-70	7.1 e-558	3	7.9974	0.6217
$f_{16}$ $x_0 = 1.95$	MES81	1.679631	1.7 e-213	9.6 e-1701	4	8.0001	0.1663
	MES82	1.679631	1.8 e-256	4.4 e-2008	4	7.9999	0.2636
	MES83	1.679631	1.0 e-256	4.4 e-2008	4	8.0000	0.2638
	MES86	1.679631	1.7 e-279	1.3 e-2008	4	7.9999	0.2574
	MES8Z	1.679631	1.3 e-334	1.3 e-2008	4	7.7933	0.1671
	MES8S	1.679631	6.6 e-283	1.3 e-2008	4	8.0000	0.2519

Tabla 4.7: Resultados obtenidos por los métodos de orden 8 sobre las funciones test

	Métodos	$\xi$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	$\rho$	e-time
$f_{17}$ $x_0 = 1.95$	MES81	1.746140	4.0 e-94	1.6 e-754	3	8.0533	0.1172
	MES82	1.746140	9.5 e-111	5.5 e-889	3	8.0763	0.1289
	MES83	1.746140	2.0 e-102	2.1 e-821	3	8.0693	0.1279
	MES86	1.746140	5.7 e-101	2.1 e-809	3	8.0607	0.1359
	MES8Z	1.746140	3.3 e-114	7.4 e-916	3	7.9710	0.1056
	MES8S	1.746140	2.6 e-112	1.3 e-900	3	7.9880	0.1321
$f_{18}$ $x_0 = -1.8$	MES81	-1.999999	1.0 e-315	5.4 e-2008	4	8.0000	0.8115
	MES82	-1.999999	2.2 e-455	1.3 e-2007	4	7.9319	0.5769
	MES83	-1.999999	1.6 e-358	5.3 e-2008	4	8.2226	0.6025
	MES86	-1.999999	9.1 e-392	1.3 e-2007	4	8.1198	0.6198
	MES8Z	-1.999999	2.0 e-430	5.4 e-2008	4	8.1662	0.5502
	MES8S	-1.999999	2.4 e-442	2.7 e-2008	4	8.1440	0.5726
$f_{19}$ $x_0 = 0.4$	MES81	0.000000	4.9 e-380	1.4 e-3033	9	2.0000	0.4318
	MES82	0.000000	9.6 e-316	1.8 e-630	9	1.9734	0.5125
	MES83	0.000000	1.4 e-289	8.8 e-577	9	1.9999	0.5217
	MES86	0.000000	5.5 e-342	6.4 e-2730	9	1.9970	0.5189
	MES8Z	0.000000	4.0 e-203	1.0 e-1012	8	2.0000	0.4076
	MES8S	0.000000	7.1 e-219	7.2 e-655	8	2.0000	0.5594
$f_{21}$ $x_0 = 0.5$	MES81	0.000000	3.9 e-250	8.3 e-501	348	1.0000	8.8994
	MES82	0.000000	1.4 e-249	8.7 e-500	330	1.0000	8.8045
	MES83	0.000000	9.9 e-250	4.9 e-500	339	1.0000	9.3590
	MES86	0.000000	3.6 e-250	6.1 e-501	332	1.0000	9.3234
	MES8Z	0.000000	3.1 e-250	1.9 e-501	277	1.0000	6.1430
	MES8S	0.000000	6.7 e-250	7.8 e-501	267	1.0000	7.3762

Tabla 4.8: Resultados obtenidos por los métodos de orden 8 sobre las funciones test

#### 4.5. Comparativa entre métodos con y sin derivadas

En esta sección utilizaremos tanto herramientas dinámicas como numéricas para comparar algunos de los esquemas diseñados, con derivadas en la expresión iterativa y sin ellas, de manera que podamos obtener algunas conclusiones acerca de su estabilidad y sus cuencas de convergencia. Lo que mostraremos en esta sección fue publicado en [11].

##### 4.5.1. Análisis de la estabilidad

Las propiedades dinámicas de la función racional asociada a un método iterativo que actúa sobre un polinomio nos da una importante información sobre los rasgos numéricos del método en cuanto a su estabilidad y fiabilidad (ver [20]).

Para la representación de las cuencas de convergencia de cada procedimiento iterativo hemos usado el software descrito en [26]. Para dibujar los planos dinámicos, cada punto del plano complejo es considerado como un punto de partida del esquema iterativo y está dibujado en diferentes colores dependiendo del punto al que esté converge (las raíces del polinomio están marcadas en las figuras con estrellas blancas). Las figuras han sido generadas para valores de la estimación inicial en  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ , con una red de  $800 \times 800$  puntos y un máximo de 80 iteraciones por punto. Dependiendo del número de iteraciones necesarias para que converga, el color del punto de partida será más brillante (menos iteraciones) o más oscuro (más iteraciones).

Representaremos el comportamiento dinámico de dos elementos mencionados de las clases sugeridas, (3.14) y (4.7), para polinomios de grado bajo y funciones no polinomiales, mostrando su estabilidad y la amplitud de las regiones de convergencia en estos casos.

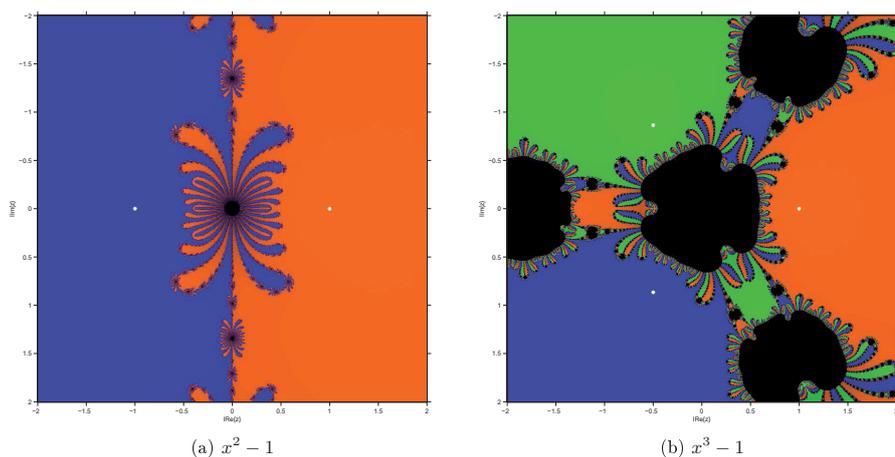


Figura 4.1: Planos dinámicos para el esquema MED82

En primer lugar, consideramos el esquema MED82; observamos en la Figura 4.1 la cuenca de atracción de las diferentes raíces de los polinomios de bajo grado. Es posible observar algunas regiones de convergencia lenta, en forma "de flores", cuyos pétalos se hacen más estrechos mientras nos acercamos al centro. Las zonas negras en el centro de las flores corresponden a las regiones carentes de convergencia o bien donde se ha superado el máximo de iteraciones. Los planos dinámicos observados muestran amplias regiones de convergencia para las diferentes raíces.

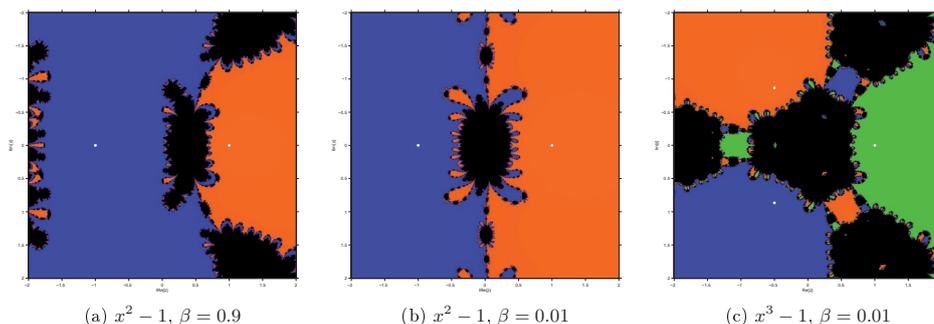


Figura 4.2: Planos dinámicos para el método MES84

Si consideramos ahora la función racional asociada al elemento de la familia (4.7) denotado por MES84 y analizamos su comportamiento dinámico, encontramos que existen también regiones negras en los planos dinámicos (ver Figura 4.2) cuyas órbitas no tienden a ninguna de las raíces, pero sí al infinito. Además, puede observarse que las regiones de convergencia son más estrechas en algunos

casos. Es de destacar que la convergencia mejora cuando el valor  $\beta$  se aproxima a cero respecto a cuando está cerca de uno.

En la Figura 4.3, mostramos los planos dinámicos correspondientes a la función no polinómica  $f(x) = 10xe^{-x^2} - 1$  en  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ , que tiene dos raíces. Estos planos dinámicos se han obtenido para comparar el comportamiento de Newton y los métodos MED82 y MES84. En todos los casos existen amplias regiones de no convergencia a ninguna de las raíces. Algunos de ellas son debidas a los polos de la función  $f(x)$ . Observamos que, a pesar de todo, el comportamiento de los métodos propuestos no es muy diferente del de Newton, mientras que la velocidad de convergencia se ha multiplicado por cuatro.

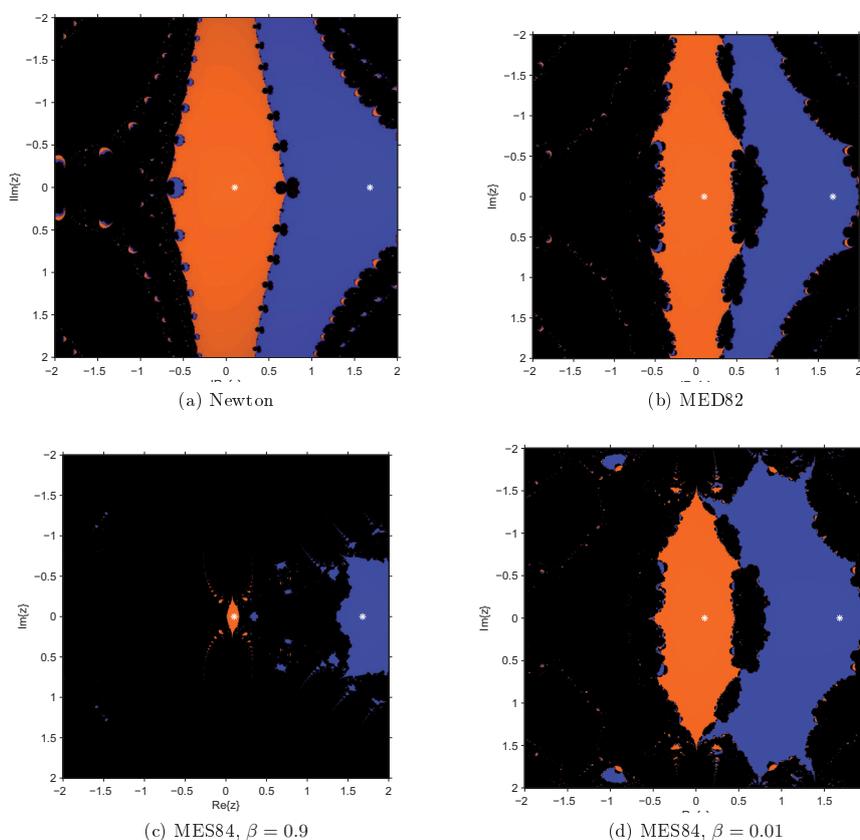


Figura 4.3: Planos dinámicos para la función  $10xe^{-x^2} - 1$

#### 4.5.2. Análisis numérico

En esta sección mostramos el comportamiento de los métodos propuestos MED82 y MES84 bajo otro punto de vista. En las pruebas numéricas se ha usado aritmética de precisión variable con 4000 dígitos de mantisa en Matlab R2010a. En nuestros experimentos numéricos comparamos nuestros

esquemas con el método de Newton (NM), el método de Steffensen (SM), el método de Ostrowski (OM), y varios procedimientos iterativos, cuyas expresiones iterativas mostramos a continuación.

El primero de los métodos con derivadas que consideraremos es el diseñado por Kou y Wang en [83], cuyos dos primeros pasos corresponden al esquema de Ostrowski. Denotaremos este método por KWM.

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - H_1 \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - \left[ (1 + H_1)^2 + (1 + 4H_1) H_2 \right] \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned}$$

donde  $H_1 = \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}$  y  $H_2 = \frac{f(z_k)}{f(y_k) - 3f(z_k)}$ .

El segundo de los métodos con derivadas que usaremos en nuestra comparación fue propuesto por Cordero et al. en [39] y también parte del método de Ostrowski para diseñar un método óptimo de orden 8. Lo denotaremos por CTVM.

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - H \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= u_k - 3 \frac{u_k - z_k}{y_k - x_k} \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned}$$

donde  $H = \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}$ ,  $u_k = z_k - (H + T/2)^2 \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}$  y  $T = \frac{f(z_k)}{f(y_k) - 2f(z_k)}$ .

Respecto a los métodos de tipo Steffensen, denotaremos por ZLHM al esquema propuesto por Zheng et al. en [118], que utiliza diferencias divididas de cuatro orden para alcanzar orden ocho óptimo, sin evaluaciones funcionales de derivadas.

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \quad z_k = x_k + \gamma f(x_k), \\ u_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{f[y_k, x_k] + f[y_k, z_k](y_k - x_k)}, \\ x_{k+1} &= u_k - \frac{f(u_k)}{f[u_k, y_k] + f[u_k, y_k, x_k](u_k - y_k) + f[u_k, y_k, x_k, z_k](u_k - y_k)(u_k - x_k)}, \end{aligned}$$

Por último, utilizaremos también el esquema libre de derivadas de Soleymani y Khattri [107], que consigue orden 8 óptimo con diferencias divididas de primer orden. Denotaremos este método por SKM.

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \quad z_k = x_k - f(x_k), \\ u_k &= y_k - H \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \\ x_{k+1} &= u_k - G \frac{f(u_k)}{f[x_k, z_k]}, \end{aligned}$$

donde  $H = 1 + w_1(x_k) + w_2(x_k)$ ,  $w_1(x_k) = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $w_2(x_k) = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}$ ,  $G = g_1 + g_2 + g_3$ ,  $g_1 = 1 + (2 - f[x_k, z_k])w_1(x_k) + (1 - f[x_k, z_k])w_1(x_k)^2$ ,  $g_2 = (4 - f[x_k, z_k])(6 + f[x_k, z_k](-4 + f[x_k, z_k]))w_1(x_k)^3$ ,  $g_3 = w_3(x_k) + w_3(x_k)^2 + (4 - 2f[x_k, z_k])w_4(x_k)$ ,  $w_3(x_k) = \frac{f(u_k)}{f(y_k)}$  y  $w_4 = \frac{f(u_k)}{f(z_k)}$ .

La Tabla 4.9 muestra la expresión de las funciones de prueba, las raíces con dieciséis dígitos significativos y la aproximación inicial  $x_0$  que es la misma para todos los métodos. Mostramos en la Tabla 4.10 el número de iteraciones (iter), el orden de convergencia computacional (COC), el valor absoluto de la función  $|f(x_{k+1})|$  en la última iteración y la raíz obtenida en cada método  $\xi$ .

Funciones test	Raíces	Valores iniciales
$f_1 = \sqrt{x^4 + 8} \sin\left(\frac{\pi}{x^2+2}\right) + \frac{x^3}{x^4+1} - \sqrt{6} + \frac{8}{17}$	$\xi_1 = -2$ $\xi_2 \approx -1.149212674609088$	$x_0 = -1.8$
$f_2 = x \exp(x^2) - \sin(x^2) + 3 \cos(x) + 5$	$\xi \approx -1.201576112092293$	$x_0 = 2$
$f_3 = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - 2 \sin(x) - x^2 + 3$	$\xi_1 \approx +2.3319676558839640$ $\xi_2 \approx -2.573166514902827$	$x_0 = 1$
$f_4 = x^4 + \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) - 5$	$\xi_1 \approx +1.414213562373095$ $\xi_2 \approx -1.414213562373095$	$x_0 = 2$
$f_5 = (\sin(x) - \frac{x}{2})^2$	$\xi = 0$ ( raíz doble)	$x_0 = 0.5$

Tabla 4.9: Funciones test y sus raíces

		NM	SM	OM	KWM	CTVM	MED82	ZLHM	SKM	MES84
$f_1$	iter	9	9	5	3	3	4	3	4	3
	COC	2.0000	2.0000	4.0000	8.2176	8.3082	8.0000	8.1662	7.9999	8.0000
	$ f(x_{k+1}) $	1.6e-479	2.3e-574	8.8e-752	9.8e-359	1.4e-329	9.6e-2525	6.6e-431	4.2e-1882	9.6e-2522
	raíz	$\xi_1$	$\xi$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$
$f_2$	iter	14	n.c.	5	3	3	4	4	n.c.	4
	COC	2.0000		4.0000	7.9547	7.9386	8.0203	8.0038		8.0203
	$ f(x_{k+1}) $	2.6e-553		7.9e-1063	3.5e-517	8.6e-485	5.0e-528	3.7e-1066		5.0e-528
	raíz	$\xi$		$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$		$\xi$
$f_3$	iter	8	8	5	3	3	3	3	14	3
	COC	2.0000	2.0000	3.9998	8.0286	7.9075	7.9753	8.0003	7.6578	7.9753
	$ f(x_{k+1}) $	3.2e-422	1.8e-334	2.7e-1292	5.6e-560	6.7e-622	4.0e-545	9.0e-556	4.4e-080	4.0e-545
	raíz	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$	$\xi_1$
$f_4$	iter	9	70	5	4	3	n.c.	4	6	n.c.
	COC	2.0000	2.0000	4.0000	8.0232	7.6465		8.0353	8.0000	
	$ f(x_{k+1}) $	8.2e-425	5.1e-306	5.6e-621	1.3e-1714	2.3e-333		1.3e-092	2.7e-1750	
	raíz	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_2$	$\xi_1$	$\xi_1$		$\xi_1$	$\xi_1$	
$f_5$	iter	536	536	268	n.c.	194	226	179	226	225
	COC	1.0000	1.0000	1.0000		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	$ f(x_{k+1}) $	7.1e-325	7.9e-325	1.0e-326		3.1e-325	3.5e-325	2.5e-325	2.0e-324	3.5e-325
	raíz	$\xi$	$\xi$	$\xi$		$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$

Tabla 4.10: Comparación de varios métodos iterativos libres de derivada

Estos resultados numéricos son coherentes con el análisis de la convergencia llevado a cabo en el Teorema 3.3.3 y el Teorema 4.3.2 presentados en el Capítulo 3 y éste respectivamente. Ambos, tanto en los resultados numéricos como el análisis dinámico, muestran que los métodos sin derivada son más sensibles a la aproximación inicial y, por tanto más inestables, aunque esta situación mejora si el parámetro introducido en la variable  $z_k = x_k + \beta f(x_k)$  está próximo a cero.

## Capítulo 5

# Métodos iterativos multipunto óptimos de orden alto para ecuaciones no lineales

### 5.1. Estado del arte

Dada la complejidad a la hora de establecer el orden de convergencia, no son muchos los métodos óptimos, de orden superior a ocho, presentes en la literatura. En particular, Thukral (en [110]), presenta el siguiente esquema libre de derivadas, óptimo de orden 16, cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[w_k, x_k]}, \\z_k &= y_k - \frac{f[w_k, x_k]}{f[w_k, y_k]} \frac{f(y_k)}{f[x_k, y_k]}, \\a_k &= z_k - \frac{1}{(1 - 2u_3u_4^2)(1 - u_2)} \frac{f(z_k)}{f[y_k, z_k] - f[x_k, y_k] + f[x_k, z_k]}, \\x_{k+1} &= a_k - T f(a_k) \frac{f[y_k, z_k]}{f[y_k, a_k]f[z_k, a_k]},\end{aligned}$$

donde  $w_k = x_k + f(x_k)$ ,  $u_1 = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}$ ,  $u_2 = \frac{f(z_k)}{f(w_k)}$ ,  $u_3 = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $u_4 = \frac{f(y_k)}{f(w_k)}$ ,  $u_5 = \frac{f(a_k)}{f(x_k)}$ ,  $u_6 = \frac{f(a_k)}{f(w_k)}$  y  $T = 1 + u_1u_2 - u_1u_3u_4^2 + u_5 + u_6 + u_1^2u_4 + u_2^2u_3 + 3u_1u_4^2 \frac{u_3^2 - u_4^2}{f[x_k, y_k]}$ . En adelante, denotaremos este esquema por T16.

Asimismo, Sharma et al. presentan en [103] un método que utiliza derivadas primeras, así como diferencias divididas de primer orden, que denotamos por S16 y que es también un método óptimo

de orden 16. Su expresión iterativa es

$$\begin{aligned} w_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= w_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(w_k)} \frac{f(w_k)}{f'(x_k)}, \\ t_k &= x_k - \frac{f(x_k)(p+q+r)}{pf[z_k, x_k] + qf'(x_k) + rf[w_k, x_k]}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{p_1f[z_k, w_k] + q_1f[w_k, x_k] + rf[t_k, w_k]}{p_1l + q_1m + rn} f(x_k), \end{aligned}$$

donde  $p = (x_k - w_k)f(x_k)f(w_k)$ ,  $q = (w_k - z_k)f(z_k)f(w_k)$ ,  $r = (z_k - x_k)f(z_k)f(x_k)$ ,  $p_1 = (x_k - t_k)f(x_k)f(t_k)$ ,  $q_1 = (t_k - z_k)f(t_k)f(z_k)$ ,  $l = \frac{f(w_k)f[z_k, x_k] - f(z_k)f[w_k, x_k]}{w_k - z_k}$ ,  $m = \frac{f(w_k)f'(x_k) - f(x_k)f[w_k, x_k]}{w_k - x_k}$  y  $n = \frac{f(w_k)f[x_k, t_k] - f(t_k)f[w_k, x_k]}{w - t}$ .

La notación de los distintos pasos de los métodos T16 y S16 no coincide, pero se ha dejado así para respetar la notación original de los autores.

En este capítulo diseñaremos métodos iterativos multipunto óptimos de orden dieciséis con y sin derivadas para la solución de ecuaciones no lineales. Dichos esquemas serán construidos mediante la técnica de funciones peso. Los algoritmos tienen como punto de partida los métodos de órdenes inferiores diseñados en capítulos anteriores. La estructura del presente capítulo es la siguiente: construiremos diferentes esquemas de orden dieciséis, posteriormente verificamos el orden de convergencia y la relación existente entre las diferentes familias de métodos, mostrando esquemas particulares miembros de dichas familias y su similitud con los ya existentes. Continuamos con la sección de pruebas numéricas, en las que comparamos los nuevos esquemas con otros ya conocidos.

## 5.2. Diseño de los métodos

En los capítulos anteriores, hemos diseñado varios métodos iterativos con órdenes de convergencia cuatro y ocho con y sin derivadas. A continuación, nos preguntamos si es posible encontrar un método iterativo que alcance el orden 16, añadiendo al método de orden 8 (3.14) de un nuevo paso con la misma configuración, acompañado de una función peso  $T$  que dependa de tres variables  $u(x_k) = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $v(x_k) = \frac{f(z_k)}{f(y_k)}$  y  $w(x_k) = \frac{f(s_k)}{f(z_k)}$ , donde  $s_k$  es el último paso del método de orden 8. La expresión iterativa del nuevo esquema resulta

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - H(u(x_k)) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ s_k &= z_k - G(u(x_k), v(x_k)) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= s_k - T(u(x_k), v(x_k), w(x_k)) \frac{f(s_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Al analizar la convergencia del método (5.1) observamos que tiene orden 16, bajo ciertas condiciones sobre las funciones peso, que incluyen las que proporcionaban orden 8 al método de tres pasos (3.16).

### 5.3. Análisis de la convergencia

En esta sección analizamos las condiciones bajo las cuales los nuevos métodos iterativos propuestos en la sección anterior alcanzan orden de convergencia óptimo con la utilización de las funciones peso.

La subclase del método iterativo (3.14) se convierte en los tres primeros pasos del método (5.1), cuyo orden probaremos a continuación, lo cual aparece publicado en [12].

**Teorema 5.3.1** *Sea  $\xi$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un intervalo abierto  $I$  y sea  $x_0$  es una estimación inicial cerca de  $\xi$ . El método definido en (5.1) es óptimo con orden de convergencia dieciséis si se eligen funciones peso  $H, G$  y  $T$  suficientemente diferenciables, de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:*

$$\begin{array}{lll}
 H(0) = 1, & H'(0) = 2, & H''(0) = 0, \\
 H^{(3)}(0) = 24, & H^{(4)}(0) = -72, & G(0, 0) = 1, \\
 G_u(0, 0) = 2, & G_v(0, 0) = 1, & G_{uu}(0, 0) = 2, \\
 G_{uv}(0, 0) = 4, & G_{uuu}(0, 0) = 0, & G_{uuuv}(0, 0) = 24, \\
 G_{uuvv}(0, 0) = -16, & G_{uuv}(0, 0) = 6, & G_{uuuu}(0, 0) = 0, \\
 G_{uvv}(0, 0) = 8 - \frac{1}{3}(G_{uuvv}(0, 0) + 6G_{vv}(0, 0)), & T(0, 0, 0) = 1, & T_u(0, 0, 0) = 2, \\
 T_v(0, 0, 0) = 1, & T_w(0, 0, 0) = 1, & T_{uu}(0, 0, 0) = 2, \\
 T_{uv}(0, 0, 0) = 4, & T_{vv}(0, 0, 0) = G_{vv}(0, 0), & T_{vw}(0, 0, 0) = 2, \\
 T_{vvv}(0, 0, 0) = -6 + 3G_{vv}(0, 0) + G_{vvv}(0, 0), & T_{uuv}(0, 0, 0) = 8, & T_{uuu}(0, 0, 0) = 0, \\
 T_{uuv}(0, 0, 0) = 4 + G_{uuv}(0, 0), & T_{uvv}(0, 0, 0) = 8, & T_{uvv}(0, 0, 0) = 2, \\
 T_{uuw}(0, 0, 0) = 2. & & 
 \end{array}$$

La ecuación del error del método es

$$\begin{aligned}
 e_{k+1} = & -\frac{1}{48}c_2(5c_2^2 - c_3)(5(-14 + 5G_{vv}(0, 0))c_2^4 + 2(16 - 5G_{vv}(0, 0))c_2^2c_3 + (-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 \\
 & - 2c_2c_4)(25N_1c_2^8 - 20N_2c_2^6c_3 - N_3c_3^4 + 60N_4c_2^5c_4 + 24N_5c_2^3c_3c_4 + 12N_6c_2c_3^2c_4 \\
 & + 6c_2^4(N_7c_3^2 + 20c_5) - 4c_2^2(N_8c_3^3 + 3(2 - T_{ww}(0, 0, 0))c_4^2 + 6c_3c_5))e_k^{16} + O(e_k^{17}),
 \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde  $c_k = \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ ,  $e_k = x_k - \xi$  y

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -2544 + 40G_{uuvv}(0, 0) - 100G_{vvv}(0, 0) - 25G_{vvv}(0, 0) + 420T_{vvw}(0, 0, 0) + 588T_{ww}(0, 0, 0) \\
 &\quad + 75G_{vv}^2(0, 0)T_{ww}(0, 0, 0) - 30G_{vv}(0, 0)(-48 + 5T_{vvw}(0, 0, 0) + 14T_{ww}(0, 0, 0)), \\
 N_2 &= -2640 + 30G_{uuvv}(0, 0) - 100G_{vvv}(0, 0) - 25G_{vvv}(0, 0) + 450T_{vvw}(0, 0, 0) + 672T_{ww}(0, 0, 0) \\
 &\quad + 75G_{vv}^2(0, 0)T_{ww}(0, 0, 0) - 30G_{vv}(0, 0)(-43 + 5T_{vvw}(0, 0, 0) + 15T_{ww}(0, 0, 0)), \\
 N_3 &= -24 - 4G_{vvv}(0, 0) - G_{vvv}(0, 0) + 12T_{vvw}(0, 0, 0) + 12T_{ww}(0, 0, 0) + 3G_{vv}^2(0, 0)T_{ww}(0, 0, 0) \\
 &\quad - 6G_{vv}(0, 0)(-4 + T_{vvw}(0, 0, 0) + 2T_{ww}(0, 0, 0)), \\
 N_4 &= -66 + 5T_{vvw}(0, 0, 0) - 5G_{vv}(0, 0)(-1 + T_{ww}(0, 0, 0)) + 14T_{ww}(0, 0, 0), \\
 N_5 &= 56 - 5T_{vvw}(0, 0, 0) + 5G_{vv}(0, 0)(-1 + T_{ww}(0, 0, 0)) - 16T_{ww}(0, 0, 0), \\
 N_6 &= -6 + G_{vv}(0, 0) + T_{vvw}(0, 0, 0) + (2 - G_{vv}(0, 0))T_{ww}(0, 0, 0), \\
 N_7 &= -2220 + 20G_{uuvv}(0, 0) - 100G_{vvv}(0, 0) - 25G_{vvv}(0, 0) + 440T_{vvw}(0, 0, 0) + 652T_{vv}(0, 0, 0) \\
 &\quad + 75G_{vv}^2(0, 0)T_{ww}(0, 0, 0) - 10G_{vv}(0, 0)(-110 + 15T_{vvw}(0, 0, 0) + 44T_{ww}(0, 0, 0)), \\
 N_8 &= -276 + 2G_{uuvv}(0, 0) - 20G_{vvv}(0, 0) - 5G_{vvv}(0, 0) + 78T_{vvw}(0, 0, 0) + 96T_{ww}(0, 0, 0) \\
 &\quad + 15G_{vv}^2(0, 0)T_{ww}(0, 0, 0) - 6G_{vv}(0, 0)(-29 + 5T_{vvw}(0, 0, 0) + 13T_{ww}(0, 0, 0)).
 \end{aligned}$$

**Demostración:** Utilizando los desarrollos de Taylor obtenidos en la prueba del Teorema 3.3.3, obtenemos

$$\begin{aligned}
s_k = & -\frac{1}{48}c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)((1080 - G_{uuuu}(0, 0) \\
& + (-300 + 60H''(0) - 3H''^2(0))G_{vv}(0, 0) + 6p_{1,2}G_{uuv}(0, 0) \\
& - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0))c_2^4 \\
& + 12(-3 + G_{uuv}(0, 0) + 10G_{vv}(0, 0) + H''(0) - G_{vv}(0, 0)H''(0))c_2^2c_3 \\
& - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^8 + \mathcal{M} + O(e_k^{17}),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde  $p_{1,2} = -10 + H''(0)$  y  $\mathcal{M} = M_1e_k^9 + M_2e_k^{10} + M_3e_k^{11} + M_4e_k^{12} + M_5e_k^{13} + M_6e_k^{14} + M_7e_k^{15} + M_8e_k^{16}$ .

Desarrollamos  $f(s_k)$  en serie de Taylor,

$$\begin{aligned}
f(s_k) = & -\frac{1}{48}f(\xi)c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)((1080 - G_{uuuu}(0, 0) \\
& + (-300 + 60H''(0) - 3H''^2(0))G_{vv}(0, 0) + 6p_{1,2}G_{uuv}(0, 0) \\
& - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0, 0))c_2^4 \\
& + 12(-3 + G_{uuv}(0, 0) + 10G_{vv}(0, 0) + H''(0) - G_{vv}(0, 0)H''(0))c_2^2c_3 \\
& - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^8 + f(\xi)\mathcal{M} + O(e_k^{17}),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

con lo que el próximo paso a seguir es calcular el desarrollo asociado a  $w(x_k) = \frac{f(s_k)}{f(z_k)}$ :

$$\begin{aligned}
w(x_k) = & \frac{1}{24}((1080 - G_{uuuu}(0, 0) + (-300 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)G_{vv}(0, 0) + 6p_{1,2}G_{uuv}(0, 0) \\
& - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0, 0))c_2^4 \\
& + 12(-3 + G_{uuv}(0, 0) + 10G_{vv}(0, 0) + H''(0) - G_{vv}(0, 0)H''(0))c_2^2c_3 \\
& - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^4 + \mathcal{M}_1 + O(e_k^{13}).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Teniendo en cuenta que las variables  $u(x_k)$ ,  $v(x_k)$  y  $w(x_k)$  tienden a cero, cuando  $x_k$  tiende a  $\xi$ , aproximamos  $T(u(x_k), v(x_k), w(x_k))$  por su polinomio de Taylor asociado,

$$T(u(x_k), v(x_k), w(x_k)) \approx t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{6}t_3, \tag{5.6}$$

donde

$$\begin{aligned}
t_1 &= T(0, 0, 0) + T_u(0, 0, 0)u(x_k) + T_v(0, 0, 0)v(x_k) + T_w(0, 0, 0)w(x_k) \\
t_2 &= T_{uu}(0, 0, 0)u(x_k)^2 + T_{vv}(0, 0, 0)v(x_k)^2 + T_{ww}(0, 0, 0)w(x_k)^2 \\
&+ 2T_{uv}(0, 0, 0)u(x_k)v(x_k) + 2T_{uw}(0, 0, 0)u(x_k)w(x_k) \\
&+ 2T_{vw}(0, 0, 0)v(x_k)w(x_k) \\
t_3 &= T_{uuu}(0, 0, 0)u(x_k)^3 + T_{vvv}(0, 0, 0)v(x_k)^3 + T_{www}(0, 0, 0)w(x_k)^3 \\
&+ 3T_{uuv}(0, 0, 0)u(x_k)^2v(x_k) + 3T_{uww}(0, 0, 0)u(x_k)^2w(x_k) \\
&+ 3T_{vvv}(0, 0, 0)u(x_k)v(x_k)^2 + 3T_{vww}(0, 0, 0)u(x_k)v(x_k)w(x_k)^2 \\
&+ 3T_{vww}(0, 0, 0)v(x_k)w(x_k)^2 + 3T_{vvw}(0, 0, 0)v(x_k)^2w(x_k) \\
&+ 6T_{uvw}(0, 0, 0)u(x_k)v(x_k)w(x_k).
\end{aligned}$$

## 5. Métodos iterativos multipunto óptimos de orden alto para ecuaciones no lineales 95

Por otra parte, el desarrollo en serie de Taylor asociado al cociente  $\frac{f(s_k)}{f'(x_k)}$  es

$$\begin{aligned} \frac{f(s_k)}{f'(x_k)} = & -\frac{1}{48}c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)((1080 - G_{uuuu}(0, 0) \\ & + (-300 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)G_{vv}(0, 0) + 6(-10 + H''(0))G_{uuv}(0, 0) \\ & - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0, 0))c_2^4 \\ & + 12(-38 + G_{uuv}(0, 0) - (-10 + H''(0))G_{vv}(0, 0) - H''(0))c_2^2c_3 \\ & - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^8 + \mathcal{M}_2 + O(e_k^{17}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por tanto, utilizando (5.3), (5.6) y (5.7), tenemos la ecuación de error para el último paso del método iterativo:

$$\begin{aligned} e_{k+1} = & -\frac{1}{48}(-1 + T(0, 0, 0))c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)((1080 - G_{uuuu}(0, 0) \\ & + (-300 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)G_{vv}(0, 0) + 6(-10 + H''(0))G_{uuv}(0, 0) \\ & - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0, 0))c_2^4 \\ & + 12(-38 + G_{uuv}(0, 0) - (-10 + H''(0))G_{vv}(0, 0) - H''(0))c_2^2c_3 \\ & - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^8 + \mathcal{M}_3 + O(e_k^{17}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Podemos deducir a partir de esta expresión que para tener al menos orden de convergencia nueve es necesario que  $T(0, 0, 0) = 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} e_{k+1} = & -\frac{1}{48}(-2 + T_u(0, 0, 0))c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)((1080 - G_{uuuu}(0, 0) \\ & + (-300 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)G_{vv}(0, 0) + 6(-10 + H''(0))G_{uuv}(0, 0) \\ & - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0, 0))c_2^4 \\ & + 12(-38 + G_{uuv}(0, 0) - (-10 + H''(0))G_{vv}(0, 0) - H''(0))c_2^2c_3 \\ & - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^9 + \mathcal{M}_4 + O(e_k^{17}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

y deducimos que para tener orden de convergencia al menos diez hay que exigir que  $T_u(0, 0, 0) = 2$ . Entonces,

$$\begin{aligned} e_{k+1} = & \frac{1}{96}c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)((12 + (-10 + H''(0))T_v(0, 0, 0) \\ & - T_{uu}(0, 0, 0))c_2^2 + 2(-1 + T_v(0, 0, 0))c_3)((1080 - G_{uuuu}(0, 0) \\ & + (-300 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)G_{vv}(0, 0) + 6(-10 + H''(0))G_{uuv}(0, 0) \\ & - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0, 0))c_2^4 \\ & + 12(-38 + G_{uuv}(0, 0) - (-10 + H''(0))G_{vv}(0, 0) - H''(0))c_2^2c_3 \\ & - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^{10} + \mathcal{M}_5 + O(e_k^{17}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para alcanzar un orden de convergencia de al menos once debemos resolver el sistema de ecuaciones formado por  $12 + (-10 + H''(0))T_v(0, 0, 0) - T_{uu}(0, 0, 0) = 0$  y  $-1 + T_v(0, 0, 0) = 0$ , cuya solución es  $T_v(0, 0, 0) = 1$  y  $T_{uu}(0, 0, 0) = 2 + H''(0)$ . Si sustituimos estas condiciones en la ecuación (5.10),

obtenemos la ecuación del error

$$\begin{aligned}
e_{k+1} = & -\frac{1}{288}c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)((96 + H^{(3)}(0) - T_{uuu}(0, 0, 0)) \\
& + 3(-2 + T_{uv}(0, 0, 0))H''(0) - 30T_{uv}(0, 0, 0))c_2^2 + 2(-1 \\
& + T_v(0, 0, 0))c_3((1080 - G_{uuuu}(0, 0) + (-300 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)G_{vv}(0, 0) \\
& + 6(-10 + H''(0))G_{uuu}(0, 0) - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0))c_2^4 \\
& + 12(-38 + G_{uuu}(0, 0) - (-10 + H''(0))G_{vv}(0, 0) - H''(0))c_2^2c_3 \\
& - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^{11} + \mathcal{M}_6 + O(e_k^{17}). \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Una vez más, resolviendo el sistema  $96 + H^{(3)}(0) - T_{uuu}(0, 0, 0) + 3H''(0)(-2 + T_{uv}(0, 0, 0)) - 30T_{uv}(0, 0, 0) = 0$ ,  $-4 + T_{uv}(0, 0, 0) = 0$ , obtenemos  $T_{uv}(0, 0, 0) = 4$  y  $H^{(3)}(0) = 24 - 6H''(0) + T_{uuu}(0, 0, 0)$  y, si sustituimos estas expresiones en la ecuación (5.11), obtenemos al menos orden de convergencia doce.

$$\begin{aligned}
e_{k+1} = & \frac{1}{1152}c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)A_1(A_2c_2^4 + A_3c_3 + A_4 - 24(-1 + T_w(0, 0, 0))c_2c_4)e_k^{12} \\
& + \mathcal{M}_7 + O(e_k^{17}).
\end{aligned}$$

Exigiendo  $T_w(0, 0, 0) = 1$ , la ecuación de error queda

$$\begin{aligned}
e_{k+1} = & \frac{1}{1152}c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)(-G_{uuuu}(0, 0) - 6G_{uuu}(0, 0)(-10 + H''(0)) \\
& + 3(-10 + H''(0))(-4 + G_{vv}(0, 0)(-10 + H''(0)) + 2T_{uuu}(0, 0, 0) + 10T_{vv}(0, 0, 0) \\
& - H''(0)T_{vvv}(0, 0, 0))c_2^4 + 12(2 + G_{uuu}(0, 0) - G_{vv}(0, 0)(-10 + H''(0)) - T_{uuu}(0, 0, 0) \\
& + (-10 + H''(0))T_{vv}(0, 0, 0))c_2^2c_3 + 12(-G_{vv}(0, 0) + T_{vv}(0, 0, 0))c_3^2((1272 - G_{uuuu}(0, 0) \\
& + (-300 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)G_{vv}(0, 0) + 6G_{uuu}(0, 0)(-10 + H''(0)) - 156H''(0) \\
& + H^{(4)}(0) + 8T_{uuu}(0, 0, 0))c_2^4 + 12(-38 + G_{uuu}(0, 0) - (-10 + H''(0))G_{vv}(0, 0))c_2^2c_3 \\
& - 12(-2 + G_{vv}(0, 0))c_3^2 + 24c_2c_4)e_k^{12} + \mathcal{M}_8 + O(e_k^{17})
\end{aligned}$$

y el orden es, al menos doce. Para elevar el orden de convergencia resolvemos el sistema de ecuaciones  $-4 + G_{vv}(0, 0)(-10 + H''(0)) + 2T_{uuu}(0, 0, 0) + 10T_{vv}(0, 0, 0)H''(0)T_{vvv}(0, 0, 0) = 0$ ,  $2 + G_{uuu}(0, 0) - G_{vv}(0, 0)(-10 + H''(0)) - T_{uuu}(0, 0, 0) + (-10 + H''(0))T_{vv}(0, 0, 0) = 0$  y  $-G_{vv}(0, 0) + T_{vv}(0, 0, 0) = 0$ . La solución de este sistema es  $G_{vv}(0, 0) = T_{vv}(0, 0, 0)$ ,  $G_{uuuu}(0, 0) = 0$  y  $T_{uuu}(0, 0, 0) = 2 + G_{uuu}(0, 0)$ .

Imponiendo estas condiciones en la ecuación de error (5.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
e_{k+1} = & \frac{1}{1152}c_2^2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)\mathcal{A}(A_1c_2^4 \\
& + 4A_2c_2^2c_3 + 12A_3c_3^2 - 24(-2 + T_{uv}(0, 0, 0))c_2c_4)e_k^{13} \\
& + \mathcal{M}_9 + O(e_k^{17}). \tag{5.13}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= 3264 + G_{uvv}(0,0)(300 - 60H''(0) + 3H''^2(0)) + (-60 + 120H''(0) - 6H''^2(0))G_{vv}(0,0) \\
 &\quad - 2G_{uuuv}(0,0)(-10 + H''(0)) - 384H''(0) + 16T_{uuu}(0,0,0) \\
 &\quad + (-300 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)T_{uvv}(0,0,0) \\
 &\quad - 6G_{uvv}(0,0)(-10 + H''(0))(-2 + T_{uw}(0,0,0)) + (-1272 + 300G_{vv}(0,0) + 156H''(0) \\
 &\quad - 60G_{vv}(0,0)H''(0) + 3G_{vv}(0,0)H''(0)^2 - H^{(4)}(0) - 8T_{uuu}(0,0,0))T_{uw}(0,0,0), \\
 \mathcal{A}_2 &= G_{uuuv}(0,0) + 3G_{uvv}(0,0)(-2 + T_{uw}(0,0,0)) - 3(-108 + G_{uvv}(0,0)(-10 + H''(0)) \\
 &\quad + 4H''(0) + (-10 + H''(0))(-T_{uvv}(0,0,0) + G_{vv}(0,0)(-2 + T_{uw}(0,0,0))) \\
 &\quad + (38 - H''(0))T_{uw}(0,0,0), \\
 \mathcal{A}_3 &= 8 + G_{uvv}(0,0) - T_{uvv}(0,0,0) + G_{vv}(0,0)(-2 + T_{uw}(0,0,0)) - 2T_{uw}(0,0,0).
 \end{aligned}$$

El orden de convergencia catorce lo alcanzamos si exigimos como condiciones las soluciones del sistema formado por  $\mathcal{A}_1 = 0$ ,  $\mathcal{A}_2 = 0$ ,  $\mathcal{A}_3 = 0$  y  $-2 + T_{uw}(0,0,0) = 0$ . Dichas condiciones son:  $T_{uvv}(0,0,0) = 4 + G_{uvv}(0,0)$ ,  $T_{uw}(0,0,0) = 2$  y  $G_{uuuv}(0,0) = -6(-4 + H''(0))$ . Por lo tanto, sustituyendo estos resultados en la última expresión de la ecuación de error (5.13), obtenemos orden de convergencia catorce.

$$\begin{aligned}
 e_{k+1} &= -\frac{1}{2304}c_2((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)\mathcal{B}(2\mathcal{B}_1c_2^6 - \mathcal{B}_2c_2^4c_3 + 12\mathcal{B}_3c_2^2c_3^2 \\
 &\quad + 8(\mathcal{B}_4c_3^3 + 24\mathcal{B}_5c_2^3c_4 - 48(-2 + T_{uw}(0,0,0))c_2c_3c_4)e_k^{14} + \mathcal{M}_{10} + O(e_k^{17}).
 \end{aligned}$$

Para conocer las condiciones que nos porporcionen el orden de convergencia quince resolvemos el sistema de ecuaciones  $\mathcal{B}_1 = 0$ ,  $\mathcal{B}_2 = 0$ ,  $\mathcal{B}_3 = 0$ ,  $\mathcal{B}_4 = 0$ ,  $\mathcal{B}_5 = 0$  y  $-2 + T_{uw}(0,0,0) = 0$ , donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1 &= -22464 + 12(300 - 60H''(0) + 3H''(0)^2 - 25T_{uuu}(0,0,0))G_{vv}(0,0) \\
 &\quad + (-1000 + 300H''(0) - 30H''(0)^2 + H''(0)^3)G_{vvv}(0,0) \\
 &\quad - 3G_{uuuv}(0,0)(-10 + H''(0))^2 + 3552H''(0) - 96H''(0)^2 - 12H^{(4)}(0) \\
 &\quad + (1272 - 156H''(0) + 3(20 - 3H''(0))G_{vv}(0,0)H''(0) + H^{(4)}(0))T_{uuu}(0,0,0) \\
 &\quad + (-176 + 8H''(0) + 8T_{uuu}(0,0,0))T_{uuu}(0,0,0) \\
 &\quad + (1000 - 300H''(0) + 30H''(0)^2 - H''(0)^3)T_{vvv}(0,0,0) \\
 &\quad + (12720 - 2832H''(0) + 156H''(0)^2 \\
 &\quad + 3(-1000 + 300H''(0) - 30H''(0)^2 + H''(0)^3)G_{vv}(0,0) \\
 &\quad - (-10 + H''(0))((H^{(4)}(0) + 8T_{uuu}(0,0,0))T_{vw}(0,0,0) \\
 &\quad - 6G_{uvv}(0,0)(12 - T_{uuu}(0,0,0) + (-10 + H''(0))T_{vw}(0,0,0))), \\
 \mathcal{B}_2 &= -5928 + 1020G_{vv}(0,0) - 300G_{vvv}(0,0) \\
 &\quad + 444H''(0) - H^{(4)}(0) + 6G_{uuuv}(0,0)(-10 + H''(0)) \\
 &\quad + 3(340 - 44H''(0) + 4H''^2(0))G_{vv}(0,0) + 3(-100 + 60H''(0) - 3H''(0)^2)G_{vvv}(0,0) \\
 &\quad + 6(38 + (-10 + H''(0))G_{vv}(0,0) - H''(0))T_{uuu}(0,0,0) \\
 &\quad - 8(2 - T_{vw}(0,0,0))T_{uuu}(0,0,0) + 3(100 - 20H''(0) + H''(0)^2)T_{vvv}(0,0,0) \\
 &\quad + (3552 - 444H''(0) + 6H''(0)^2 + H^{(4)}(0) + 9(-100 + 20H''(0) \\
 &\quad - H''(0)^2)G_{vv}(0,0))T_{vw}(0,0,0) - 6G_{uvv}(0,0)(-22 + H''(0) + T_{uuu}(0,0,0) \\
 &\quad - 2(-10 + H''(0))T_{vw}(0,0,0)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3 &= 140 - 2H''(0) + G_{uuv}(0,0) - 2G_{uv}(0,0) + (-2 + G_{vv}(0,0))T_{uuw}(0,0,0) \\
&\quad + 2(-16 + H''(0))G_{vv}(0,0) + (-10 + H''(0))(T_{vvv}(0,0,0) - G_{vvv}(0,0)) \\
&\quad + (-96 + 4H''(0) - 3(-10 + H''(0))G_{vv}(0,0) + 2G_{uuv}(0,0))T_{vw}(0,0,0), \\
\mathcal{B}_4 &= 6 + G_{vvv}(0,0) - T_{vvv}(0,0,0) + 3G_{vv}(0,0)(-1 + T_{vw}(0,0,0)) - 6T_{vw}(0,0,0), \\
\mathcal{B}_5 &= -22 + H''(0) + T_{uuw}(0,0,0) - (-10 + H''(0))T_{vw}(0,0,0).
\end{aligned}$$

La solución es:  $G_{uuv}(0,0) = -2(2 + G_{uv}(0,0) - H''(0))$ ,  $H^{(4)}(0) = 12(-6 + H''(0))$ ,  $T_{uuw}(0,0,0) = 2 + H''(0)$ ,  $T_{vvv}(0,0,0) = -6 + 3G_{vv}(0,0) + G_{vvv}(0,0)$  y  $T_{vw}(0,0,0) = 2$ .

Por lo tanto, bajo estas condiciones,

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= -\frac{1}{2304}c_2^3((-10 + H''(0))c_2^2 + 2c_3)(2 - H''(0) + T_{uuw}(0,0,0))\mathcal{C}e_k^{15} + \mathcal{M}_{11} \\
&\quad + O(e_k^{17}).
\end{aligned}$$

Para alcanzar orden 16 debe verificarse  $2 + H''(0) - T_{uuw}(0,0,0) = 0$ . Por tanto, exigiendo  $T_{uuw}(0,0,0) = 2 + H''(0)$  obtenemos el orden deseado, siendo la ecuación de error la expresada en (5.2).  $\square$

Un elemento particular de ésta familia lo obtenemos al seleccionar

$$\begin{aligned}
H(u) &= 1 + 2u + 4u^3 - 3u^4, \\
G(u, v) &= 1 + 2u + v + u^2 + 4uv + 3u^2v + 4uv^2 + 4u^3v - 4u^2v^2, \\
T(u, v, w) &= 1 + 2u + v + w + u^2 + 4uv + 2uw + 4u^2v + u^2w + 6uv^2 + 8uvw.
\end{aligned}$$

Denotaremos al método resultante por el MED16.

Nos preguntamos si es posible generar métodos de mayor orden. La respuesta es afirmativa, aunque la complejidad es muy elevada. Podemos también desarrollar esquemas de orden alto sin derivadas, de manera análoga a los diseñados en el Capítulo 4. Sin embargo, utilizaremos a continuación la técnica desarrollada en [38], que permite transformar, sin aumentar la complejidad algorítmica, métodos con derivadas en esquemas de tipo Steffensen. En particular, usaremos la siguiente conjetura, aplicada sobre la clase de métodos óptimos de orden 16 que hemos presentado en esta sección.

**Observación 5.3.1** ([38]) *Consideremos un método iterativo óptimo con derivadas de orden  $2^q$ , y un nuevo esquema sin derivadas diseñado a partir de éste aplicando la aproximación  $f'(x_k) \approx f[z_k, x_k]$ , donde  $z_k = x_k + f(x_k)^n$ . Para que dicho esquema conserve el orden óptimo del método de partida, es necesario que  $n \geq q$ .*

Transformamos la expresión iterativa (5.1) utilizando diferencias divididas de primer orden y la idea que acabamos de mencionar, obteniendo una familia de métodos óptimos de orden 16 libres de derivadas.

**Teorema 5.3.2** *Sea  $\xi \in I$  un cero simple de una función suficientemente diferenciable  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow$*

## 5. Métodos iterativos multipunto óptimos de orden alto para ecuaciones no lineales 99

$\mathbb{R}$  en el intervalo  $I$  y  $x_0$  la aproximación inicial suficientemente cerca a  $\xi$ . El método definido por

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ t_k &= y_k - H(u(x_k)) \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ s_k &= t_k - G(u(x_k), v(x_k)) \frac{f(t_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ x_{k+1} &= s_k - T(u(x_k), v(x_k), w(x_k)) \frac{f(s_k)}{f[z_k, x_k]}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

tiene orden convergencia 16 óptimo si las funciones reales, suficientemente diferenciables,  $H$ ,  $G$  y  $T$  se escogen de tal manera que cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll} H(0) = 1, & H'(0) = 2, & H''(0) = 0, \\ H^{(3)}(0) = 24, & H^{(4)}(0) = -72, & G(0, 0) = 1, \\ G_u(0, 0) = 2, & G_v(0, 0) = 1, & G_{uu}(0, 0) = 2, \\ G_{vvv}(0, 0) = 6 - 3G_{vv}(0, 0) + T_{vvv}(0, 0, 0), & G_{uuu}(0, 0) = 0, & G_{uv}(0, 0) = 4, \\ G_{uuvv}(0, 0) = -2(2 + G_{uuv}(0, 0) - H'''(0)), & G_{uuv}(0, 0) = 6, & G_{uuuv}(0, 0) = 24, \\ G_{uvw}(0, 0) = \frac{1}{3}(24 - G_{uuvv}(0, 0) - 6G_{vv}(0, 0)), & T(0, 0, 0) = 1, & T_u(0, 0, 0) = 2, \\ T_{uu}(0, 0, 0) = 2, & T_v(0, 0, 0) = 1, & T_{uv}(0, 0, 0) = 4, \\ T_w(0, 0, 0) = 1, & T_{uuuu}(0, 0, 0) = 0, & T_{uuv}(0, 0, 0) = 8, \\ T_{vv}(0, 0, 0) = G_{uuv}(0, 0), & T_{uvv}(0, 0, 0) = 2, & T_{uuvv}(0, 0, 0) = 4 + G_{vv}(0, 0), \\ T_{vw}(0, 0, 0) = 2, & T_{uuvv}(0, 0, 0) = 2, & T_{uvv}(0, 0, 0) = 8, \end{array}$$

donde  $z_k = x_k + f(x_k)^4$ ,  $f[z_k, x_k] = \frac{f(z_k) - f(x_k)}{z_k - x_k}$ ,  $u(x_k) = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$ ,  $v(x_k) = \frac{f(t_k)}{f(y_k)}$  y  $w(x_k) = \frac{f(s_k)}{f(t_k)}$ .

La ecuación del error de este método es:

$$e_{k+1} = -\frac{1}{48}c_2(5c_2^2 - c_3)(\alpha_1 - 2c_2c_4)(\alpha_2 + 6c_3c_5)e_k^{16} + O(e_k^{17}),$$

donde

$$\alpha_1 = 5M_1c_2^4 + 2M_2c_2^2c_3 + M_3c_3^2,$$

$$\alpha_2 = 25N_1c_2^8 - 20N_2c_2^6c_3 + N_3c_3^4 + 60N_4c_2^5c_4 + 24N_5c_3^3c_4 + 12N_6c_2c_3^2c_4 + 6c_2^4(N_7c_3^2 + 20c_5) - 4c_2^2(N_8c_3^3 + 3N_9)c_4^2,$$

$c_k = \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(\xi)}{f(\xi)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ ,  $e_k = x_k - \xi$  y  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$  dependen de las derivadas parciales de orden uno, dos y tres de las funciones peso  $G$  y  $T$  evaluadas en cero.

**Demostración:** La prueba se basa en la expansión de Taylor de los elementos que aparecen en la expresión iterativa (5.14). Sólo se muestran los elementos necesarios de las expresiones con el fin de determinar las condiciones que se necesitan para alcanzar el orden de convergencia. El desarrollo de Taylor de las funciones peso utilizadas se hace en torno a cero.

Usando desarrollos de Taylor en torno de  $\xi$ , obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\xi) \sum_{j=1}^{16} c_j e_k^j + O(e_k^{17}), \\ z_k - \xi &= f'(\xi)^4 (e_k^4 + 4c_2 e_k^5) + f'(\xi) \sum_{j=6}^{16} D_j e_k^j + O(e_k^{17}), \\ f(z_k) &= f'(\xi) (e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + (f'(\xi)^4 + c_4) e_k^4) + f'(\xi) \sum_{j=5}^{16} E_j e_k^j + O(e_k^{17}), \\ f[z_k, x_k] &= f'(\xi) (1 + 2c_2 e_k + 3c_3 e_k^2 + 4c_4 e_k^3) + f'(\xi) \sum_{j=5}^{16} F_j e_k^{j-1} + O(e_k^{16}), \end{aligned}$$

donde  $c_1 = 1$ . Sustituyendo estas expresiones en el primer paso de (5.14), obtenemos  $y_k - \xi = \sum_{j=2}^{16} A_j e_k^j + O(e_k^{17})$ , donde  $A_2 = c_2$ ,  $A_3 + 2(c_3 - 2c_2^2)$  y  $A_4 = 4c_2^3 - 7c_2 c_3 + 3c_4$ . Usando de nuevo el desarrollo de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\xi) (c_2 e_k^2 - 2(c_2^2 - c_3) e_k^3 + (5c_2^3 - 7c_2 c_3 + 3c_4) e_k^4) \\ &\quad + f'(\xi) (-12c_2^4 + 24c_2^2 c_3 - 6c_3^2 + c_2(f'(\xi)^4 - 10c_4) + 4c_5) e_k^5 \\ &\quad + f'(\xi) \sum_{j=6}^{16} A'_j e_k^j + O(e_k^{17}), \\ u(x_k) &= c_2 e_k + (2c_3 - 3c_2^2) e_k^2 + (8c_2^3 - 10c_2 c_3 + 3c_4) e_k^3 \\ &\quad + (-20c_2^4 + 37c_2^2 c_3 - 8c_3^2 + c_2(f'(\xi)^4 - 14c_4) + 4c_5) e_k^5 \\ &\quad + f'(\xi) \sum_{j=6}^{16} A''_j e_k^j + O(e_k^{17}), \end{aligned}$$

y calculamos  $H(u(x_k)) \approx H(0) + H'(0)u(x_k) + \frac{1}{2}H''(0)u(x_k)^2 + \frac{1}{6}H^{(3)}(0)u(x_k)^3 + \frac{1}{24}H^{(4)}(0)u(x_k)^4$ . Esto nos permite obtener la ecuación de error para el segundo paso de (5.14):

$$t_k - \xi = \sum_{j=2}^{16} B_j e_k^j + O(e_k^{17}),$$

donde  $B_2 = -(H(0) - 1)c_2$ ,  $B_3 = (-2 + 4H(0) - H'(0))c_2^2 - 2(H(0) - 1)c_3$ . Si  $B_2 = 0$  y  $B_3 = 0$  tenemos orden de convergencia al menos 4. Esto se obtiene si  $H(0) = 1$  y  $H'(0) = 2$  y nos proporciona para  $t_k$  la siguiente expresión:

$$t_k - \xi = \sum_{j=4}^{16} K_j e_k^j + O(e_k^{17}),$$

donde  $K_4 = \left(5 - \frac{H''(0)}{2}\right) c_2^3 - c_2 c_3$ .

Usando de nuevo el desarrollo de Taylor en torno de  $\xi$  para obtener  $f(t_k)$  y a partir de él calculamos

## 5. Métodos iterativos multipunto óptimos de orden alto para ecuaciones no lineales 01

$v(x_k)$  y aproximamos la función  $G$  en torno a  $(0, 0)$

$$\begin{aligned} G(u(x_k), v(x_k)) \approx & G(0, 0) + G_u(0, 0)u(x_k) + G_v(0, 0)v(x_k) + \frac{1}{2}(G_{uu}(0, 0)u(x_k)^2 \\ & + 2G_{uv}(0, 0)u(x_k)v(x_k) + G_{vv}(0, 0)v(x_k)^2) + \frac{1}{6}(G_{uuu}(0, 0)u(x_k)^3 \\ & + 3G_{uuv}(0, 0)u(x_k)^2v(x_k) + 3G_{uvv}(0, 0)u(x_k)v(x_k)^2 + G_{vvv}(0, 0)v(x_k)^3) \\ & + \frac{1}{24}(G_{uuuu}(0, 0)u(x_k)^4 + 4G_{uuuv}(0, 0)u(x_k)^3v(x_k) + 6G_{uuvv}(0, 0)u(x_k)^2v(x_k)^2 \\ & + 4G_{uvvv}(0, 0)u(x_k)v(x_k)^3 + G_{vvvv}(0, 0)v(x_k)^4), \end{aligned}$$

y obtenemos la serie de Taylor de  $s_k$ :

$$s_k - \xi = \sum_{j=4}^{16} S_j e_k^j + O(e_k^{17}), \quad (5.15)$$

donde  $S_4 = \frac{1}{2}\alpha\beta_1c_2((H''(0) - 10)c_2^2 + 2c_3)$  y  $S_5 = \frac{1}{6}(-216 + 3G_u(0, 0)(H''(0) - 10) + 30H''(0) + G(0, 0)(276 - 36H''(0) + H^{(3)}(0)))c_2^4 + (32 + G_u(0, 0) - 3H''(0) + G(0, 0)(-34 + 3H''(0)))c_2^2c_3 + 2\beta_1c_3^2 + 2\beta_1c_2c_4$ , siendo  $\alpha = (H''(0) - 10)c_2^2 + 2c_3$  y  $\beta_1 = G(0, 0) - 1$ . Para tener orden de convergencia seis,  $S_4$  y  $S_5$  deben anularse. Esto es posible solamente si  $G(0, 0) = 1$  y  $G_u(0, 0) = 2$ . Sustituyendo estas expresiones en (5.15) obtenemos

$$s_k - \xi = \sum_{j=6}^{16} S'_j e_k^j + O(e_k^{17}), \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} S'_6 &= \frac{1}{4}\alpha c_2(s'_{6,1}c_2^2 - 2\beta_2c_3), \\ S'_7 &= -\frac{1}{12}s'_{7,1}c_2^6 + \frac{1}{6}s'_{7,2}c_2^4c_3 + s'_{7,3}c_2^2c_3^2 - \beta_2c_3^3 + s'_{7,4}c_2^3c_4 - 2\beta_2c_2c_3c_4, \\ \beta_2 &= G_v(0, 0) - 1, \\ s'_{6,1} &= -12 + G_{uu}(0, 0) - G_v(0, 0)(H''(0) - 10), \\ s'_{7,1} &= 4272 + 300G_{uv}(0, 0) - 4320G_v(0, 0) - G_{uuu}(0, 0)(H'''(0) - 10) - 528H''(0) \\ &\quad - 60G_{uv}(0, 0)H''(0) + 1032G_v(0, 0)H''(0) + 3(G_{uv}(0, 0) - 20G_{vv}(0, 0))H''(0)^2 \\ &\quad + (54H''(0) - H^{(3)}(0) - 456)G_{uu}(0, 0) + 12H^{(3)}(0) + 2G_v(0, 0)H^{(3)}(0)(H''(0) - 10), \\ s'_{7,2} &= 2196 + G_{uuu}(0, 0) - 6(10 - H''(0))G_{uv}(0, 0) \\ &\quad + (-2052 + 372H''(0) - 15H''(0)^2 - 2H^{(3)}(0))G_v(0, 0) \\ &\quad + 15(H''(0)^2 - 204H''(0) - 12)G_{uu}(0, 0), \\ s'_{7,3} &= -66 + 3G_{uu}(0, 0) - G_{uv}(0, 0) + 64G_v(0, 0) + 3H''(0) - 6G_v(0, 0)H''(0), \\ s'_{7,4} &= -22 + G_{uu}(0, 0) - 2G_v(0, 0)(H''(0) - 10) + H''(0). \end{aligned}$$

Si  $S'_6$  y  $S'_7$  se anulan se obtiene orden de convergencia ocho. Imponiendo  $S'_6 = 0$  y  $S'_7 = 0$  resultan  $G_v(0, 0) = 1$ ,  $G_{uv}(0, 0) = 4$ ,  $G_{uuu} = -24 + 6H''(0) + H^{(3)}(0)$  y  $G_{uu}(0, 0) = 2 + H''(0)$ . Sustituyendo estas expresiones en (5.16) obtenemos orden de convergencia ocho

$$s_k - \xi = \sum_{j=8}^{16} S''_j e_k^j + O(e_k^{17}), \quad (5.17)$$

donde

$$\begin{aligned} S_8'' &= -\frac{1}{48}\alpha (s_{8,1}c_2^4 + 12s_{8,2}c_2^2c_3 - 12(2 - G_{vv}(0,0))c_3^2 + 24c_2c_4), \\ s_{8,1} &= 1080 - G_{uuuu}(0,0) - 3(100 - 20H''(0) + H''^2(0))G_{vv}(0,0) \\ &\quad + 6G_{uuv}(0,0)(H''(0) - 10) - 108H''(0) + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0), \\ s_{8,2} &= -38 + G_{uuv}(0,0) - (H''(0) - 10)G_{vv}(0,0) + H''(0). \end{aligned}$$

Así, usando de nuevo el desarrollo de Taylor en torno de  $\xi$ , obtenemos  $f(s_k)$  y la utilizamos para obtener el desarrollo de Taylor de  $w(x_k)$  y  $T(u(x_k), v(x_k), w(x_k))$ . Finalmente obtenemos la ecuación de error del método iterativo (5.14):

$$e_{k+1} = \sum_{j=8}^{16} N_j e_k^j + O(e_k^{17}), \quad (5.18)$$

donde  $N_8 = [1 - T(0,0,0)]S_8''$ . Si  $T(0,0,0) = 1$ , entonces  $N_8 = 0$  y sustituyendo esta condición en  $N_9$  obtenemos  $N_{1,9} = [2 - T_u(0,0,0)]S_8''$ . Tomando  $T_u(0,0,0) = 2$  obtenemos

$$e_{k+1} = \sum_{j=10}^{16} N_{2,j} e_k^j + O(e_k^{17}),$$

donde  $N_{2,10} = \frac{1}{96}c_2\alpha[(12 + (H''(0) - 10)T_v(0,0,0) - T_{uu}(0,0,0))c_2^2 + 2(T_{uu}(0,0,0) - 1)c_3]S_8''$ . Si tomamos  $T_v(0,0,0) = 1$  y  $T_{uu}(0,0,0) = 2 + H''(0)$ , aseguramos que el orden de convergencia es al menos once. La ecuación del error en este caso toma la siguiente forma

$$e_{k+1} = \sum_{j=11}^{16} N_{3,j} e_k^j + O(e_k^{17}),$$

donde  $N_{3,11} = -\frac{1}{288}c_2^2\alpha[(96 + H^{(3)}(0) - T_{uuu}(0,0,0) + 3H''(0)(T_{uv}(0,0,0) - 2) - 30T_{uv}(0,0,0))c_2^2 + 6(T_{uv}(0,0,0) - 4)c_3]S_8''$ . Tomando  $T_{uv}(0,0,0) = 4$  y  $H^{(3)}(0) = 24 - 6H'' + T_{uuu}(0,0,0)$  obtenemos la nueva expresión de la ecuación de error

$$e_{k+1} = \sum_{j=12}^{16} N_{4,j} e_k^j + O(e_k^{17}),$$

donde

$$N_{4,12} = \frac{1}{1152}c_2\alpha[n_{12,1}c_2^4 + 12n_{12,2}c_2^2c_3 + 12n_{12,3}c_3^2 - 24(T_3 - 1)c_2c_4]S_2'',$$

siendo

$$\begin{aligned} n_{12,1} &= 1200 + H^{(4)}(0) - 8H^{(3)}(0)(T_w(0,0,0) - 1) + (-1080 + 60G_{uuv}(0,0) \\ &\quad + G_{uuuu}(0,0))T_w(0,0,0) + (30G_{vv}(0,0) - H^{(4)}(0))T_w(0,0,0) - 60T_{uuv}(0,0,0) \\ &\quad - 6H''(0)(20 + (-18 + G_{uuv}(0,0) + 10G_{vv}(0,0))T_w(0,0,0) - T_{uuv}(0,0,0) - 10T_{vv}(0,0,0) \\ &\quad + 3H''^2(0)(G_{vv}(0,0)T_w(0,0,0) - T_{vv}(0,0,0)) - 300T_{vv}(0,0,0), \\ n_{12,2} &= -40 - (-38 + G_{uuv}(0,0) + 10G_{vv}(0,0))T_w(0,0,0) + T_{uuv}(0,0,0) + 10T_{vv}(0,0,0) \\ &\quad + H''(0)(1 + (1 + (G_{vv}(0,0) - 1)T_w(0,0,0) - T_{vv}(0,0,0))), \\ n_{12,3} &= 2 + (G_{vv}(0,0) - 2)T_w(0,0,0)T_w(0,0,0) - T_v(0,0,0). \end{aligned}$$

## 5. Métodos iterativos multipunto óptimos de orden alto para ecuaciones no lineales 3

Para tener orden de convergencia al menos 13  $n_{12,1}$ ,  $n_{12,2}$ ,  $n_{12,3}$  deben anularse. Esto se consigue si:  $T_w(0,0,0) = 1$ ,  $G_{uuuu}(0,0) = 4$ ,  $T_{uuw}(0,0,0) = 2 + G_{uuw}(0,0)$  y  $T_{vv}(0,0,0) = G_{vv}(0,0)$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación del error obtenemos su nueva forma:

$$e_{k+1} = \sum_{j=13}^{16} N_{5,j} e_k^j + O(e_k^{17}),$$

donde  $N_{5,13} = \frac{1}{1152} c_2^2 \alpha N'_{13} (n_{13,1} c_4^4 - 4n_{13,2} c_2^2 c_3 + 12n_{13,3} c_3^2 - 24(T_{uw}(0,0,0) - 2)c_2 c_3)$ . Notamos que una de las condiciones para anular  $N_{5,13}$  es  $T_{uw}(0,0,0) = 2$ . Esto nos permite obtener la siguiente forma simplificada de  $N_{5,13} = \frac{1}{1152} c_2^2 \alpha^2 (n_{13,4} c_2^2 - 6n_{13,5} c_3)(n_{13,6} c_4^4 + 12n_{13,7} c_2^2 c_3 - 12(G_v(0,0) - 2)c_3^2 + 24c_2 c_4)$ . Para obtener orden de convergencia al menos 14 se debe verificar

$$\begin{aligned} n_{13,4} &= 72 + 2G_{uuuv}(0,0) + 30G_{uvv}(0,0)H''(0) - 30T_{uvv}(0,0,0) + 3H''(0)T_{uvv}(0,0,0) = 0, \\ n_{13,5} &= 4 + G_{uvv}(0,0) - T_{uvv}(0,0,0) = 0. \end{aligned}$$

Esto nos da  $G_{uuuv} = -6(H''(0) - 4)$ ,  $T_{uvv}(0,0,0) = 4 + G_{uvv}(0,0)$  y

$$e_{k+1} = \sum_{j=14}^{16} N_{6,j} e_k^j + O(e_k^{17}),$$

donde  $N_{6,14} = -\frac{1}{2304} c_2 \alpha (n_{14,1} - 24c_2 c_4)(n_{14,2} c_2^6 - 2n_{14,3} c_4^4 c_3 - 12n_{14,4} c_2^4 c_3 - 12n_{14,5} c_2^2 c_3^2 + 8n_{14,6} c_3^3 + 24(T_{uv}(0,0,0) - 2)c_2^3 c_4 - 48(T_{uv}(0,0,0) - 2)c_2 c_3 c_4)$ , siendo

$$\begin{aligned} n_{14,2} &= -18240 + 3600G_{vv}(0,0) - 1000G_{vvv}(0,0) - 3G_{uuuv}(0,0)(H''(0) - 10)^2 + G_{vvv}(0,0)H^{(3)}(0) \\ &\quad + 8H''(0)H^{(3)}(0) - 24H^{(4)}(0) + (2304 - 720G_{vv}(0,0) + 300G_{vvv}(0,0))H^{(3)}(0) \\ &\quad + (1080 - 300G_{vv}(0,0))T_{uuw}(0,0,0) + (-108H''(0) + 60G_{vv}(0,0)H''(0) - 3G_{vv}(0,0)H''(0))^2 \\ &\quad + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0)T_{uuw}(0,0,0) + (1000 - 300H''(0) + 30H''(0)^2 - H''(0)^3)T_{vvv}(0,0,0) \\ &\quad + (10800 - 3000G_{vv}(0,0))T_{vv}(0,0,0) + (-2160H''(0) + 900G_{vv}(0,0)H''(0) + 108H''(0)^2 \\ &\quad - 90G_{vv}(0,0)H''(0)^2)T_{vv}(0,0,0) + (3G_{vv}(0,0)H''(0)^3 + 80H^{(3)}(0) - 8H''(0)H^{(3)}(0) \\ &\quad + 10H^{(4)}(0) - H''(0)H^{(4)}(0))T_{vw}(0,0,0) - 6G_{uuw}(H''(0) - 10)(12 - T_{uuw}(0,0,0) \\ &\quad + (H''(0) - 10)T_{vw}(0,0,0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{14,3} &= -5544 + 1020G_{vv}(0,0) - 300G_{vvv}(0,0) + 6G_{uuuv}(0,0)(H'''(0) - 10) - 16H^{(3)}(0) - H^{(4)}(0) \\ &\quad + (348 - 132G_{vv}(0,0) + 60G_{vvv}(0,0) + 3G_{vvv})H''(0) + (3G_{vv}(0,0) - 3G_{vvv}(0,0))H''(0)^2 \\ &\quad + (228 - 60G_{vv}(0,0) + 3H''(0))T_{vvv}(0,0,0) + (3360 - 900G_{vv}(0,0) - 396H''(0))T_{vw}(0,0,0) \\ &\quad + (6H''(0)^2 - 9G_{vv}(0,0) + 8H''(0)^2 + 8H^{(3)}(0) + H^{(4)}(0) + 180G_{vv}(0,0)H''(0))T_{vw}(0,0,0) \\ &\quad - 6G_{uuw}(0,0)(-22 + H''(0) + T_{uuw}(0,0,0) + 2T_{vw}(0,0,0)(1 - 2H''(0))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{14,4} &= 140 + G_{uuuv}(0,0) - 32G_{vv}(0,0) + 10G_{vvv}(0,0) + (-2 + 2G_{vv}(0,0) - G_{vvv}(0,0))H''(0) \\ &\quad + (-2 + G_{vv}(0,0))T_{uuw}(0,0,0) + (10 - H''(0))T_{vvv}(0,0,0) + 2G_{uuw}(0,0)(T_{vw}(0,0) - 1) \\ &\quad + (-96 + 30G_{vv}(0,0) + 4H''(0) - 36G_{vv}(0,0)H''(0))T_{vw}(0,0,0), \end{aligned}$$

$$n_{14,5} = 6 + G_{vvv}(0,0) - T_{vvv}(0,0,0) + 3G_{vv}(0,0)(T_{vw}(0,0,0) - 1) - 6T_{vw}(0,0,0),$$

$$n_{14,6} = -22 + H''(0) + T_{uuw}(0,0,0) + 10T_{vw}(0,0,0) - H''(0)T_{vw}(0,0,0).$$

Si todos estos términos son nulos y  $T_{uw}(0,0,0) - 2 = 0$ , obtenemos orden de convergencia al menos 15. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos:  $T_{vw}(0,0,0) = 2$ ,  $T_{uuw}(0,0,0) = 2 + H''(0)$ ,

$G_{vvv}(0,0) = 6 - 3G_{vv}(0,0) + T_{vvv}(0,0,0)$ ,  $G_{uuvv}(0,0) = -2(2 + G_{uuv}(0,0) - H''(0))$  y  $H^{(4)}(0) = 12(H''(0) - 12)$  y

$$e_{k+1} = N_{7,15}e_k^{15} + N_{7,16}e_k^{16} + O(e_k^{17}),$$

donde

$$N_{7,15} = -\frac{1}{6912}c_2^2\alpha(n_{15,1} - 24c_2c_4)(n_{15,2}c_2^6 - 6n_{15,3}c_2^4c_3 + 12n_{15,4}c_2^2c_3^2 + 24n_{15,5}c_3^3 - 24n_{15,6}c_2^3c_4 - 144(T_{uuvv}(0,0,0) - 8)c_2c_3c_4),$$

siendo

$$\begin{aligned} n_{15,2} &= -147168 - 3000G_{uuv}(0,0) + 46800G_{vv}(0,0) + 9G_{uuv}(0,0)(H''(0) - 10)^3 \\ &\quad - 36G_{vv}(0,0)H''(0)^3 + (24624 + 900G_{uuv}(0,0) - 12960G_{vv}(0,0))H''(0) + (-1008 \\ &\quad + -90G_{uuv}(0,0)1188G_{vv}(0,0) + 3G_{uuvv}(0,0))H''(0)^2 + (-1776H^{(3)}(0) + 300G_{vv}(0,0) \\ &\quad + 84H''(0) - 60G_{vv}(0,0)H''(0) + 6H''(0)^2 + 3G_{vv}(0,0)H''(0)^2 - 8H^{(3)}(0))H^{(3)}(0) \\ &\quad - 6G_{uuv}(0,0)(H''(0) - 10)(156 + H^{(3)}(0) - 30T_{uuv}(0,0,0) + 3H''(0)(T_{uuv}(0,0,0) - 4)) \\ &\quad + (30240 - 9000G_v(0,0) - 5904H''(0) + 2700G_{vv}(0,0)H''(0) + 288H''(0)^2 \\ &\quad - 270G_{vv}(0,0)H''(0)^2 + 9G_{vv}(0,0)H''(0)^2 + 240H^{(3)}(0) - 24H''(0)H^{(3)}(0))T_{uuv}(0,0,0), \\ n_{15,3} &= 17088 - 300G_{uuvv}(0,0) + 4920G_{vv}(0,0) - 9G_{uuv}(0,0)(H''(0) - 10)^2 + (1584 \\ &\quad + 60G_{uv}(0,0) - 912G_{vv}(0,0)H''(0))H''(0) + (-12 - 3G_{uuvv}(0,0) + 42G_{vv}(0,0))H''(0)^2 \\ &\quad + (-88 + 20G_{vv}(0,0) - 2H''(0)(1 - G_{vv}(0,0)))H^{(3)}(0)(-88 + 20G_{vv}(0,0) \\ &\quad - 2(1 - G_{vv}(0,0))H''(0))H^{(3)}(0) + 2G_{uuv}(0,0)(336 + H^{(3)}(0) + 6H''(0)(T_{uuv}(0,0,0) - 5) \\ &\quad - 60T_{uuv}(0,0,0)) + (3288 - 900G_{vv}(0,0) - 384H''(0) + 18G_{vv}(0,0)H''(0) \\ &\quad + 6H''(0)^2 - 9G_{vv}(0,0)H''(0)^2 + 8H^{(3)}(0))T_{uuv}(0,0,0), \\ n_{15,4} &= -1512 - 30G_{uuvv}(0,0) + 516G_{vv}(0,0) + 9G_{uuv}(0,0)(H''(0) - 10) + (36 + 3G_{uuvv}(0,0) \\ &\quad - 48G_{vv}(0,0))H''(0) + G_{vv}(0,0)H^{(3)}(0) - 6G_{uuv}(0,0)(T_{uuv}(0,0,0) - 6) + (288 - 90G_{vv}(0,0) \\ &\quad - 48G_{vv}(0,0))H''(0) + G_{vv}90,0)H^{(3)}(0) - 6G_{uuv}(0,0)(T_{uuv}(0,0,0) - 6) + (288 - 90G_{vv}(0,0) \\ &\quad - 12H''(0) + 9G_{vv}(0,0)H''(0))T_{uuv}(0,0,0), \\ n_{15,5} &= 3G_{uuv}(0,0) + G_{uuvv}(0,0) + 3(8 - 6G_{vv}(0,0) - (2 - G_{vv}(0,0))T_{uuv}(0,0,0)), \\ n_{15,6} &= 216 + H^{(3)}(0) + 3H''(0)(T_{uuv}(0,0,0) - 6) + 30T_{uuv}(0,0,0). \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema  $n_{15,2} = 0$ ,  $n_{15,3} = 0$ ,  $n_{15,4} = 0$ ,  $n_{15,5} = 0$  y  $n_{15,6} = 0$  obtenemos:  $G_{uuv}(0,0) = \frac{1}{3}(24 - G_{uuvv}(0,0) - 6G_{vv}(0,0))$ ,  $H''(0) = 0$ ,  $H^{(3)}(0) = 24$ ,  $G_{uuv}(0,0) = 6$  y  $T_{uuv}(0,0,0) = 8$ . Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación de error obtenemos su forma definitiva

$$e_{k+1} = -\frac{1}{48}c_2(5c_2^2 - c_3)(\alpha_1 - 2c_2c_4)(\alpha_2 + 6c_3c_5)e_k^{16} + O(e_k^{17}),$$

Esta expresión muestra que el método propuesto tiene orden de convergencia al menos 16.  $\square$

La siguiente sección está dedicada a la comparación de los esquemas propuestos con otros conocidos de idéntico orden aplicados a la resolución de algunas funciones no lineales.

#### 5.4. Pruebas numéricas

En esta sección, compararemos el comportamiento del esquema iterativo propuesto con orden de convergencia dieciséis MED16 con el de los métodos conocidos, introducidos en la Sección 5.1, T16 y S16, para estimar la solución simple de algunas ecuaciones no lineales particulares. El comportamiento de dichos esquemas será analizado utilizando las funciones de prueba que figuran a continuación (ver [53] y [110]), junto con sus respectivas raíces simples  $\xi$ :

- $f_1(x) = \log x^2 + 1 + \exp(x) \sin(x)$ ,  $\xi = 0$ ,
- $f_2(x) = 1 + \exp(x^3 - x) - \cos(1 - x^2) + x^3$ ,  $\xi = -1$ ,
- $f_3(x) = (x - 2)(x^{10} + x + 1) \exp(-x - 1)$ ,  $\xi = 2$ .

Todos los cálculos se han llevado a cabo mediante el uso de aritmética de precisión variable con 4000 dígitos de mantisa. La solución exacta de las ecuaciones no lineales es conocida, por lo que el error exacto absoluto de las tres primeras iteraciones de cada procedimiento se muestra en la Tabla 5.1, junto al orden computacional de convergencia COC, cuya fórmula la encontramos en (2.10) para diferentes estimaciones iniciales  $x_0$ .

Función de prueba	$x_0$		T16	S16	MED16
$f_1(x)$	0.3	$ x_1 - \xi $	1.611e-5	5.991e-8	5.987e-5
		$ x_2 - \xi $	1.134e-55	3.791e-112	3.613e-58
		$ x_3 - \xi $	1.185e-707	1.74e-1779	1.125e-909
		COC	13.0	16.0	16.0
$f_1(x)$	1	$ x_1 - \xi $	5.277e-2	7.143e-4	1.549e-2
		$ x_2 - \xi $	1.399e-11	6.056e-47	4.122e-20
		$ x_3 - \xi $	1.825e-134	4.408e-736	9.269e-301
		COC	13.0	16.0	16.0
$f_2(x)$	-2	$ x_1 - \xi $	0.512	6.887e-3	7.588e-5
		$ x_2 - \xi $	4.13	2.374e-38	9.508e-65
		$ x_3 - \xi $	0.6932	1.299e-605	3.501e-1023
		COC	-	16.0	16.0
$f_2(x)$	-3	$ x_1 - \xi $	0.1002	0.3238	8.93e-3
		$ x_2 - \xi $	0.252e-4	3.062e-8	8.602e-32
		$ x_3 - \xi $	3.296e-45	7.209e-224	7.042e-496
		COC	-	16.0	15.99
$f_3(x)$	2.1	$ x_1 - \xi $	2.365e-5	4.299e-11	3.28e-6
		$ x_2 - \xi $	9.018e-42	1.015e-159	4.371e-74
		$ x_3 - \xi $	3.419e-515	9.445e-2538	4.319e-1160
		COC	13.0	16.0	16.0

Tabla 5.1: Comparación de esquemas de orden dieciséis

De los resultados de la Tabla 5.1, se puede deducir que el método propuesto es, por lo menos, tan competitivo como los métodos recientemente publicados del mismo orden de convergencia, siendo mejor en algunos casos. También ha demostrado ser suficientemente robusto como para mantener el orden numérico de convergencia cuando otros procedimientos no son tan estables en este sentido.

## 5.5. Aplicación a la determinación de órbitas preliminares

Ahora, vamos a comparar el esquema M16 con otros ya conocidos del mismo orden 16. En particular, analizamos el comportamiento de estos métodos al determinar las órbitas preliminares de un satélite artificial.

Todos los esquemas iterativos introducidos en la sección (5.1) son óptimos, es decir cumplen con la conjetura de Kung-Traub, además han sido diseñados con la técnica de función de peso, entonces ellos son totalmente comparables con los nuevos métodos diseñados previamente. El esquema iterativo M16 propuesto será comparado con T16 y S16.

En estas prueba numéricas utilizamos también aritmética de precisión variable con 4000 dígitos de mantisa en Matlab R2011b. Las órbitas de referencia que han sido usadas en las pruebas, pueden ser encontradas en [55] y son las que se muestran en la Sección 3.4.1. Entonces, nuestro objetivo es resolver la ecuación unificada de Gauss a partir de estas posiciones, con la precisión más alta posible.

Compararemos entre si las estimaciones de la solución en las tres primeras iteraciones del esquema original de punto fijo FP, el método propuesto de decimosexto orden MED16 y los esquemas T16 y S16, así como el valor de la función en cada iterado. También incluimos en las Tablas 5.2 a 5.4 el orden de convergencia computacional aproximado (ACOC) [36], para comparar la eficacia computacional de los esquemas relacionados con su orden de convergencia teórico. Este índice es evaluado por la fórmula dada en el Capítulo 2.

	$ x_1 - x_0 $	$ f(x_1) $	$ x_2 - x_1 $	$ f(x_2) $	$ x_3 - x_2 $	$ f(x_3) $	ACOC
<b>FP</b>	0.6450e-2	-	0.8288e-4	-	0.1055e-5	-	1.002
<b>T16</b>	0.6368e-2	0.2662e-63	0.2628e-63	0.1642e-1045	NaN	NaN	-
<b>S16</b>	0.6368e-2	0.7454e-48	0.7361e-48	0.6647e-783	0.6563e-783	0.	16.000
<b>MED16</b>	0.6368e-2	0.6998e-47	0.6910e-47	0.2286e-766	0.2258e-766	0.	16.000

Tabla 5.2: Comparativa de los esquemas de Gauss modificados para la órbita I

Las diferentes órbitas de prueba han sido escogidas con el ángulo creciente  $\nu_2 - \nu_1$ . Esto mide la extensión en las observaciones y, según el diseño del procedimiento de Gauss, esto induce la inestabilidad en el sistema cuando se hace más alto. La diferencia entre las anomalías verdaderas de las observaciones es, para las órbitas de prueba de la I a la III,  $12.23^\circ$ ,  $22.06^\circ$  y  $31.46^\circ$ , respectivamente. Puede ser observado en las Tablas 5.2 a 5.4 que, cuando la dispersión de las observaciones aumenta, la precisión obtenida en los cálculos se reduce en la misma la proporción para cualquier método del mismo orden.

	$ x_1 - x_0 $	$ f(x_1) $	$ x_2 - x_1 $	$ f(x_2) $	$ x_3 - x_2 $	$ f(x_3) $	ACOC
<b>FP</b>	0.2397e-1	-	0.1132e-2	-	0.5163e-4	-	1.011
<b>T16</b>	0.2289e-1	0.2913e-45	0.2786e-45	0.4103e-748	0.3924e-748	0.	16.000
<b>S16</b>	0.2289e-1	0.1482e-34	0.1417e-34	0.4368e-556	0.4195e-556	0.	16.010
<b>MED16</b>	0.2289e-1	0.4590e-34	0.4389e-34	0.1062e-557	0.1016e-557	0.	16.000

Tabla 5.3: Comparativa de los esquemas de Gauss modificados para la órbita II

Los resultados numéricos ponen de manifiesto que el uso de métodos de alto orden, en el problema de

## 5. Métodos iterativos multipunto óptimos de orden alto para ecuaciones no lineales 07

determinación de satélites, proporciona excelentes resultados con un número reducido de iteraciones.

	$ x_1 - x_0 $	$ f(x_1) $	$ x_2 - x_1 $	$ f(x_2) $	$ x_3 - x_2 $	$ f(x_3) $	ACOC
<b>FP</b>	0.5499e-1	-	0.5830e-2	-	0.5723e-3	-	1.034
<b>T16</b>	0.4968e-1	0.2742e-34	0.2495e-34	0.1560e-567	0.1419e-567	0.7e-3998	16.010
<b>S16</b>	0.4968e-1	0.1550e-26	0.1411e-26	0.1066e-435	0.9702e-436	0.1e-3998	16.020
<b>MED16</b>	0.4968e-1	0.3967e-27	0.3610e-27	0.1512e-445	0.1376e-445	0.1e-3998	16.010

Tabla 5.4: Comparativa de los esquemas de Gauss modificados para la órbita III

La precisión de los elementos orbitales calculados, con tan solo tres iteraciones, es prácticamente total, teniendo en cuenta que trabajamos con 4000 dígitos significativos.



## Capítulo 6

# Análisis de la dinámica compleja de algunos métodos diseñados para ecuaciones no lineales

### 6.1. Introducción

El estudio dinámico de la función racional asociada a un método iterativo da una información importante sobre la convergencia y la estabilidad de los esquemas. El método iterativo más conocido, bajo el punto de vista dinámico es, de nuevo, el esquema de Newton (véase, por ejemplo, [20], [49], [51], y las referencias que aparecen en su interior). Algunos de los aspectos más importantes de la dinámica compleja asociada al método iterativo de Newton ya han sido introducidos en el Capítulo 2.

La dinámica del método iterativo de König [52], de los métodos de Cauchy y Halley [80] y un número importante de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales, incluyendo la familia de métodos de tipo Jarratt [6] y la familia de King [27] también han sido estudiadas en detalle, bajo el punto de vista dinámico.

En este capítulo, dado un método iterativo de resolución de ecuaciones no lineales, analizamos la dinámica compleja del operador racional asociado al método iterativo aplicado sobre polinomios de grado bajo. Presentamos las clases de conjugación de algunos de los nuevos métodos de cuarto orden óptimos para polinomios complejos. En uno de los métodos analizados demostramos que no es generalmente convergente para polinomios cúbicos, como será discutido más adelante.

#### 6.1.1. Cálculo de puntos fijos y críticos

Como uno de nuestros objetivos es analizar el comportamiento dinámico de los métodos iterativos sobre polinomios, recordamos algunas herramientas que son necesarias y que han sido expuestas en detalle en el Capítulo 2.

En [42] se demostró en el Teorema del Escalado del método de Newton que la función racional asociada al método iterativo actuando sobre un polinomio se puede transformar mediante una

transformación afín, sin cambios cualitativos en la dinámica. Por otra parte, el Teorema 2.3.3 asegura la existencia de una transformación afín entre cualquier polinomio cuadrático y el polinomio  $p(z) = z^2 + c$ , por lo que éste último puede ser utilizado sin pérdida de generalidad.

Se ha demostrado en la Sección 3.3 que las diferentes elecciones del valor de los parámetros  $b_1$  y  $b_2$ , en la clase de métodos iterativos definida en (3.12), proporcionan diferentes métodos iterativos. En esta sección vamos a presentar el efecto que esta elección tiene en el comportamiento dinámico de los métodos resultantes, al menos sobre polinomios de bajo grado.

Sea  $R_f(z)$  el operador que se deriva de aplicar el método MED43 sobre una función genérica  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

$$R_f(z) = z - \frac{f(z)^2 + f(z)f(y) + 2f(y)^2}{f(z)f'(z)}, \quad (6.1)$$

donde  $y = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ . A continuación se demuestra el Teorema del Escalado para el método MED43. Nótese que éste puede ser extendido, de forma análoga, para el resto de los esquemas presentados.

**Teorema 6.1.1** *Sea  $f$  una función analítica sobre la esfera de Riemann, y  $A(z) = az + b$ , con  $a \neq 0$ , una función afín. Si  $g(z) = (f \circ A)(z)$ , entonces el operador de punto fijo  $R_f$  definido en (6.1) es conjugado analíticamente a  $R_g$  por  $A$ , es decir,  $(A \circ R_g \circ A^{-1})(z) = R_f(z)$ .*

**Demostración:** Dado que  $R_g(z)$  es la función racional asociada al método iterativo MED43 actuando sobre  $g$ , tenemos

$$R_g(A^{-1}(z)) = A^{-1}(z) - \frac{g(A^{-1}(z))^2 + g(A^{-1}(z))g\left(A^{-1}(z) - \frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))}\right)}{g(A^{-1}(z))g'(A^{-1}(z))} - \frac{2g\left(A^{-1}(z) - \frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))}\right)^2}{g(A^{-1}(z))g'(A^{-1}(z))}.$$

Como  $(g \circ A^{-1})(z) = f(z)$ , es claro que  $g'(A^{-1}(z)) = a(g \circ A^{-1})'(z) = af'(z)$  y  $g''(A^{-1}(z)) = a^2f''(z)$ . Entonces

$$R_g(A^{-1}(z)) = A^{-1}(z) - \frac{f(z)^2 + f(z)g(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}) + 2g(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)})^2}{af(z)f'(z)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R_f(z) &= A(R_g(A^{-1}(z))) = aR_g(A^{-1}(z)) + b \\ &= aA^{-1}(z) - \frac{f(z)^2 + f(z)g(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}) + 2g(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)})^2}{f(z)f'(z)} + b \\ &= z - \frac{f(z)^2 + f(z)g(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}) + 2g(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)})^2}{f(z)f'(z)}. \end{aligned}$$

Si demostramos que se verifica la igualdad  $g\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}\right) = f\left(z - \frac{f(z)}{f'(z)}\right)$  entonces se concluye

la prueba del teorema. Desarrollando en serie de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned}
 g\left(A^{-1}(z) - \frac{f(z)}{af'(z)}\right) &= g(A^{-1}(z)) - g'(A^{-1}(z))\frac{f(z)}{af'(z)} + \\
 &\quad g''(A^{-1}(z))\frac{f(z)^2}{2a^2f'(z)^2} - g'''(A^{-1}(z))\frac{f(z)^3}{6a^3f'(z)^3} + \dots \\
 &= f''(z)\frac{f(z)^2}{2f'(z)^2} - f'''(z)\frac{f(z)^3}{6f'(z)^3} + \dots \\
 &= f\left(z - \frac{f(z)}{f'(z)}\right).
 \end{aligned}$$

□

Como se ha indicado anteriormente, por medio del Teorema del Escalado el análisis de la dinámica de un método iterativo se hace más fácil, ya que el estudio de la función racional asociada al esquema iterativo actuando sobre cualquier polinomio cuadrático se puede reducir al estudio de polinomios más simples, como  $p(z) = z^2 - c$  (véase el Capítulo 2, Teorema 2.3.3).

Asimismo, es conocido que aquellos puntos críticos que no corresponden a las raíces del polinomio  $p(z)$  reciben el nombre de puntos críticos libres. La importancia de dichos puntos reside en el Teorema de Fatou-Julia (Teorema 2.3.1), según el cual toda cuenca inmediata de un punto fijo u órbita periódica contiene al menos un punto crítico. Por tanto, para detectar dichos comportamientos (ciclos periódicos atractores, puntos fijos extraños atractores,...) debemos analizar las órbitas de los puntos críticos libres del operador asociado a nuestro método y determinar el conjunto de puntos límites del mismo.

### 6.1.2. Dinámica asociada a MED43 sobre $p(z) = z^2 - c$

A continuación, estudiamos la dinámica de la función racional asociada al esquema MED43 actuando sobre el polinomio  $p(z) = z^2 - c$ ,

$$R_p(z) = \frac{c^3 - 5c^2z^2 + 15cz^4 + 5z^6}{16z^5}. \tag{6.2}$$

Es fácil comprobar que las raíces de  $p(z)$  son puntos fijos superatractores de la función racional  $R_p(z)$ , debido a que el orden del método iterativo asociado es mayor o igual a dos. Por tanto, son también puntos críticos. La existencia y estabilidad de puntos fijos del operador  $R_p(z)$ , así como la existencia de puntos críticos se resume en el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.2** *La función racional  $R_p(z)$  asociada al método iterativo MED43 actuando sobre el polinomio  $p(z) = z^2 - c$  tiene como puntos fijos a las raíces del polinomio; son también los únicos puntos críticos, por lo que son puntos fijos superatractores. Además, existen cuatro puntos fijos extraños,  $\pm\sqrt{\frac{7c}{27} - \frac{4}{27}i\sqrt{2}c}$  y  $\pm\sqrt{\frac{7c}{27} + \frac{4}{27}i\sqrt{2}c}$ . Estos puntos fijos son repulsores, por lo que forman parte del conjunto de Julia.*

Por lo tanto, de manera similar a lo que ocurre en el método de Newton, el conjunto de Fatou asociado a MED43 consiste en las cuencas de atracción de las dos raíces del polinomio. Eso significa que MED43 nunca falla sobre polinomios de segundo grado cuando se aplica en un conjunto abierto

del plano complejo. El plano dinámico asociado a este operador es similar al de Newton, pero con una estructura un poco más compleja, que incluye una amplia cuenca inmediata de cada raíz e infinitas componentes conexas que corresponden a las preimágenes de las inmediatas, como se puede observar en la Figura 6.1a para  $c = 1$ .

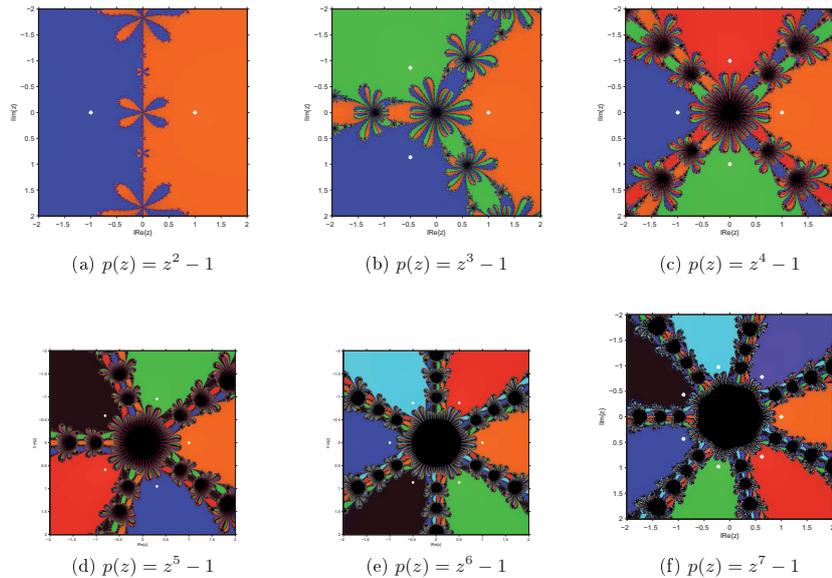


Figura 6.1: Planos dinámicos asociados a MED43 sobre algunos polinomios

Respecto al comportamiento de MED43 sobre polinomios cúbicos (o de grado superior), los puntos fijos del operador son las raíces de un polinomio de grado al menos 15 dependiente del parámetro  $c$ . Aunque no se puede establecer ningún resultado general debido al alto grado, pueden establecerse algunas conclusiones parciales, como la existencia de polinomios específicos cuya dinámica asociada incluye órbitas periódicas.

En el caso presentado en la Figura 6.1b,  $p(z) = z^3 - 1$ , existen 12 puntos fijos extraños que son repulsores y 6 puntos críticos libres que se encuentran en las cuenca de atracción de las raíces de la unidad. Por otra parte, en las Figuras 6.1b a 6.1f (obtenidas a partir de polinomios de grado mayor que dos) se puede observar que muchas de las infinitas pre-imágenes de las cuencas inmediatas de las raíces tienen apariencia de "flor". Si se aumenta el número máximo de iteraciones en las figuras (las imágenes se han generado mediante el uso de 80 iteraciones como máximo), la región negra en el centro de cada flor se encoge y los pétalos son más estrechos en el centro.

### 6.1.3. Órbitas periódicas

A continuación utilizando la técnica presentada por Chun et al. en [25] establecemos un resultado en el que demostramos comportamiento periódico en uno de los métodos analizados, MED43. Construimos un polinomio específico  $p(z)$  tal que la función racional asociada a MED43 aplicada sobre

$p(z)$ ,  $R_p$ , tenga una órbita periódica atractora de período 2 en  $z = 1$ .

**Proposición 6.1.1** *El esquema (3.24) no es globalmente convergente para polinomios cúbicos, pues presenta una órbita periódica de período dos, definida por los puntos  $\{1, 2\}$ , para el polinomio  $p(z) = z^3 - 3.13638z^2 + 1.73725z + 1.49038$ .*

**Demostración:** El proceso mediante el cual se demuestra este resultado es simple: basta partir de un polinomio genérico  $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ ; definimos el operador asociado a MED43 sobre éste polinomio cúbico y planteamos un sistema de ecuaciones exigiendo condiciones  $R_p(1) = 2$ ,  $R_p(2) = 1$  y  $R'_p(1) = 0$ . La única solución real de éste sistema de ecuaciones nos proporciona los coeficientes  $a = -3.13638$ ,  $b = 1.73725$  y  $c = 1.49038$ . Sin embargo, existen otras muchas soluciones complejas que dan lugar a otros polinomios en  $\mathbb{C}$  para los que también los puntos  $\{1, 2\}$  forman una órbita periódica de periodo dos. □

En la Figura 6.2 se observa dicha órbita periódica (con líneas amarillas en la figura), donde su cuenca de convergencia inmediata y sus preimágenes aparecen en negro.

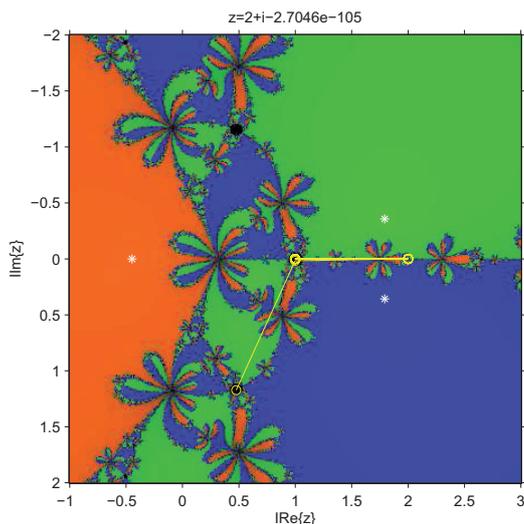


Figura 6.2: Plano dinámico de MED43 con una órbita periódica

#### 6.1.4. Dinámica asociada a MED44 sobre $p(z) = z^2 - c$

La función de punto fijo asociada a MED44 sobre una función genérica  $f(z)$  es

$$S_f(z) = y - \frac{(f(z) + f(y))^2 f(y)}{f(z)^2 - 5f(y)^2 f'(z)},$$

donde  $y = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ .

En este caso, el análisis de puntos fijos y críticos nos proporciona la siguiente información.

**Teorema 6.1.3** La función racional  $S_p(z) = \frac{c^3 - 3c^2z^2 + 27cz^4 + 7z^6}{8cz^3 + 24z^5}$  asociada al método iterativo MED44 actuando sobre el polinomio  $p(z) = z^2 - c$  tiene, si  $c \neq 0$ , ocho puntos fijos distintos, incluyendo a las raíces del polinomio (en el caso  $c = 0$ , todos los puntos fijos coinciden en el origen y éste punto es preimagen del infinito). Los puntos fijos extraños son  $\pm \frac{\sqrt{3c-4\sqrt{2}c}}{\sqrt{23}}$  y  $\pm \sqrt{\frac{3c}{23} + \frac{4\sqrt{2}c}{23}}$  y su carácter es repulsor. Además, existen seis puntos críticos libres,  $\pm \sqrt{\frac{3}{11}}\sqrt{c}$ ,  $\pm \sqrt{\frac{15c-8\sqrt{5}c}{19}}$  y  $\pm \sqrt{\frac{15c}{19} + \frac{8\sqrt{5}c}{19}}$ .

Este resultado se obtiene del análisis de la función racional  $S_p(z)$  y de su derivada, teniendo en cuenta que los puntos fijos son las soluciones de la ecuación  $S_p(z) = z$ , mientras que los puntos críticos verifican  $S'(z) = \frac{3(-c+z^2)^3(c+7z^2)}{8z^4(c+3z^2)^2} = 0$ .

Los planos dinámicos para polinomios de grados bajos se pueden ver en la Figura 6.3 para las raíces de la unidad. En las Figuras 6.3b y 6.3c observamos el comportamiento dinámico del método

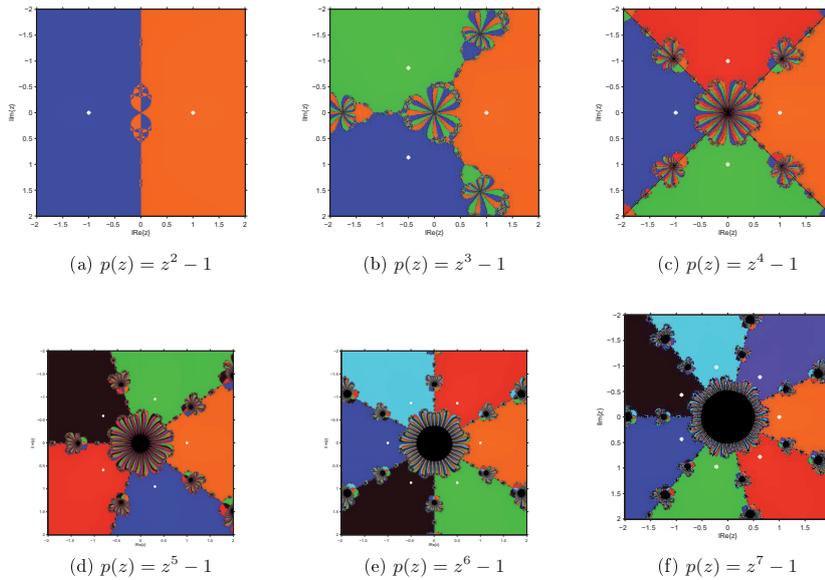


Figura 6.3: Planos dinámicos asociados a MED44 sobre algunos polinomios

MED44 para polinomios de grado tres y cuatro, respectivamente. Notemos que MED44 parece ser más estable que MED43 ya que las pre-ímagenes del infinito (regiones negras en el centro de las flores) son más reducidas. Se observa un comportamiento similar para polinomios de grado superior, hasta siete (Figuras 6.3d a 6.3f).

A continuación vamos a definir una familia que contiene a MED44 dependiente de un parámetro. Utilizaremos el análisis dinámico de la familia para seleccionar aquellos elementos más estables y fiables.

En ese sentido, recuperamos la familia paramétrica que contiene a MED44, generada en (3.26)

fijando en (3.12) la función peso  $H(t) = \frac{4}{4-2t-t^2}$  y considerando  $b_1 = \frac{1}{4}$  y dejando  $b_2 = \beta$ , arbitrario. La expresión iterativa de esta familia es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{(f(x_k)+4\beta f(y_k))^2}{f(x_k)^2+2(4\beta-1)f(x_k)f(y_k)+4(4\beta^2-2\beta-1)f(y_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Para analizar el comportamiento cualitativo de esta familia sobre un polinomio cuadrático genérico  $p(z) = (z - a)(z - b)$ , utilizamos la función de conjugación de Blanchard (ver [20]). Como se ha mostrado en el Capítulo 2, esa es una transformación de Moëbius tal que

$$\begin{aligned} O_p(z) &= (h \circ S_p \circ h^{-1})(z) \\ &= z^4 \frac{16\beta^2 z(2+z) + 4\beta(1+z)^2(3+2z) + (1+z)^2(-3+2z+z^2)}{1 + (4+8\beta)z + 2(1+14\beta+8\beta^2)z^2 + 4(-1+8\beta+8\beta^2)z^3 + 3(-1+4\beta)z^4}, \end{aligned}$$

donde  $h(z) = \frac{z-a}{z-b}$  verifica  $h(\infty) = 1$ ,  $h(a) = 0$  y  $h(b) = \infty$ . Esto es, las raíces del polinomio  $(z - a)(z - b)$  se transforman en el origen y en el infinito, mientras que el infinito original (el comportamiento divergente del método) se asocia con el círculo unidad.

Tengamos en cuenta que el único parámetro en el operador conjugado  $O_p(z)$  es  $\beta$  y la estabilidad del sistema sólo puede ser analizada en términos de  $\beta$ . El cero o el infinito son puntos fijos superatractores y  $z = 1$  puede ser un superatractor, un atractor o un repulsor dependiendo del valor del parámetro. La función de estabilidad de  $z = 1$  es  $O'_p(1) = \frac{2(1+6\beta+4\beta^2)}{\beta(4+3\beta)}$ . En la Figura 6.4a se puede observar la región del plano complejo donde  $|O'_p(1)| < 1$ . Dicha superficie tiene su mínimo en los puntos  $\beta = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$ , para los que  $O'_p(1) = 0$ ; en los valores del parámetro interiores a los conos en los que  $|O'_p(1)| < 1$ ,  $z = 1$  es atractor y es repulsor en el resto del plano complejo. En la frontera de los discos para los que  $|O'_p(1)| = 1$ ,  $z = 1$  es parabólico.

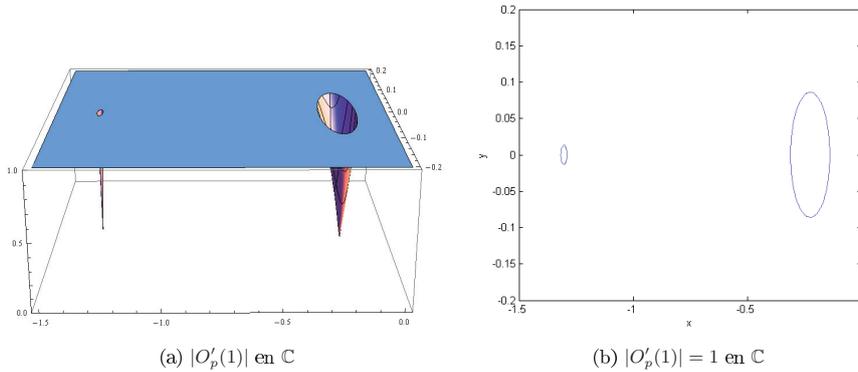


Figura 6.4: Estabilidad de  $z = 1$  en función de  $\beta$

La estabilidad del punto fijo  $z = 1$  se resume en el siguiente resultado.

**Proposición 6.1.2** *El operador asociado a la familia (6.3) tiene un punto fijo extraño en  $z = 1$ , cuyo carácter es*

a) Superatractor si  $\beta = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$ ,

b) Atractor cuando  $\left( \frac{55\text{Im}(\beta)^2 - (-48 - 84\text{Re}(\beta) - 55\text{Re}(\beta)^2)}{2} \right)^2 < 521 + 1356\text{Re}(\beta) + 884\text{Re}(\beta)^2$ , donde  $\frac{1}{11}(-8 - \sqrt{42}) \leq \text{Re}(\beta) \leq \frac{1}{5}(-4 - \sqrt{6})$  ó  $\frac{1}{5}(-4 + \sqrt{6}) \leq \text{Re}(\beta) \leq \frac{1}{11}(-8 + \sqrt{42})$ ,

c) Si  $\beta$  verifica  $\left( \frac{55\text{Im}(\beta)^2 - (-48 - 84\text{Re}(\beta) - 55\text{Re}(\beta)^2)}{2} \right)^2 = 521 + 1356\text{Re}(\beta) + 884\text{Re}(\beta)^2$ , entonces  $z = 1$  es parabólico.

En cualquier otro caso,  $z = 1$  es un repulsor y se encuentra en el conjunto de Julia.

**Demostración:** Partiendo de la función de estabilidad de  $z = 1$

$$O'_p(1) = \frac{2 + 12\beta + 8\beta^2}{4\beta + 3\beta^2}$$

y exigiendo  $O'_p(1) \overline{O'_p(1)} = 1$ , obtenemos las condiciones

$$\left( \frac{1}{11}(-8 - \sqrt{42}) \leq \text{Re}(\beta) \leq \frac{1}{5}(-4 - \sqrt{6}) \right),$$

$$\left( \frac{1}{5}(-4 + \sqrt{6}) \leq \text{Re}(\beta) \leq \frac{1}{11}(-8 + \sqrt{42}) \right)$$

y

$$\text{Im}(\beta) = \pm \sqrt{\frac{1}{55}(-48 - 84\text{Re}(\beta) - 55\text{Re}(\beta)^2) + \frac{2}{55}\sqrt{521 + 1356\text{Re}(\beta) + 884\text{Re}(\beta)^2}}.$$

Tras algunas sencillas operaciones, la segunda de las condiciones se transforma en  $\left( \frac{55\text{Im}(\beta)^2 - (-48 - 84\text{Re}(\beta) - 55\text{Re}(\beta)^2)}{2} \right)^2 = 521 + 1356\text{Re}(\beta) + 884\text{Re}(\beta)^2$ , cuya representación en el plano complejo podemos ver en la Figura 6.4b. Los valores de  $\beta$  para los que  $z = 1$  es superatractor se obtienen directamente de resolver la ecuación  $O'_p(1) = 0$ , es decir, los ceros de  $2 + 12\beta + 8\beta^2$ . Se comprueba fáciamente que son  $\beta = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$ .  $\square$

Hay algunos valores del parámetro  $\beta$  cuyos métodos asociados muestran un comportamiento muy peligroso, numéricamente hablando. Algunos de ellos podemos deducirlos de la estabilidad del punto fijo extraño  $z = 1$ . Para los valores del parámetro  $\beta$  en los que  $z = 1$  es un superatractor (véase la Figura 6.5a), la cuenca de atracción de este punto es muy grande comparada con la del cero y es fácil que el método no converja a ninguna de las raíces. En un pequeño entorno de este valor de  $\beta$ ,  $z = 1$  sostiene su carácter atractor (ver la Figura 6.5b), pero pronto lo pierde, haciéndose repulsor (ver la Figura 6.5c).

Además podemos concluir que el análisis dinámico y, en particular, el plano de parámetros, son instrumentos poderosos que permiten seleccionar correctamente entre los miembros de una familia paramétrica de métodos iterativos.

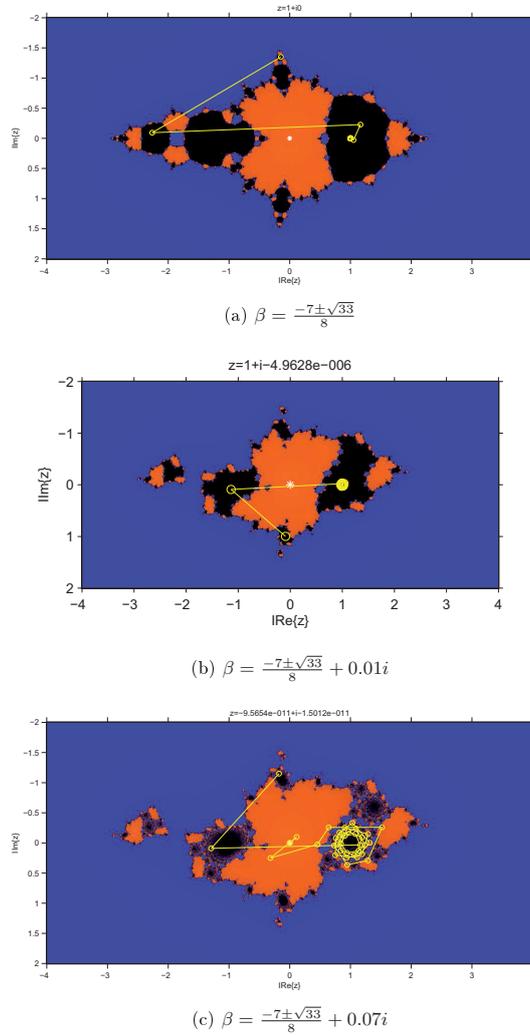


Figura 6.5: Comportamiento de la familia MED44 en la vecindad de  $\beta = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{8}$

## 6.2. Planos de parámetros

Podemos demostrar que  $z = -1$  es un punto crítico libre del operador  $O_p(z)$ . El comportamiento de los elementos de la familia de métodos iterativos sobre dicho punto crítico (utilizándolo como estimación inicial) nos da información muy útil sobre la estabilidad de dichos miembros de la familia, en función del valor del parámetro que los define. Debemos de tener en cuenta que esta información es parcial, debido a que el resto de los puntos críticos libres no se han encontrado.

El proceso para representar el plano de parámetros es el siguiente: asociamos cada punto del plano

con un valor complejo de  $\beta$ , es decir, con un elemento de la familia de métodos iterativos definida en (6.3). Los valores de  $\beta$  asociados a una misma componente conexa del plano de parámetros dará lugar a subclases de elementos de la familia con un comportamiento dinámico similar. De este modo, es interesante encontrar regiones del plano de parámetros tan estables como sea posible, ya que esos valores de  $\beta$  nos proporcionarán los mejores miembros de la familia en términos de estabilidad numérica.

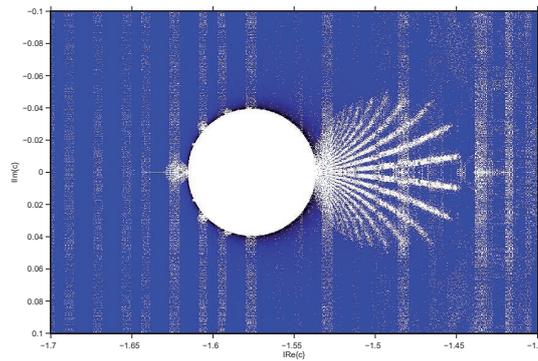


Figura 6.6: Detalle del plano de parámetros de la familia (6.3),  $[-1.7, -1.4] \times [-0.1, 0.1]$

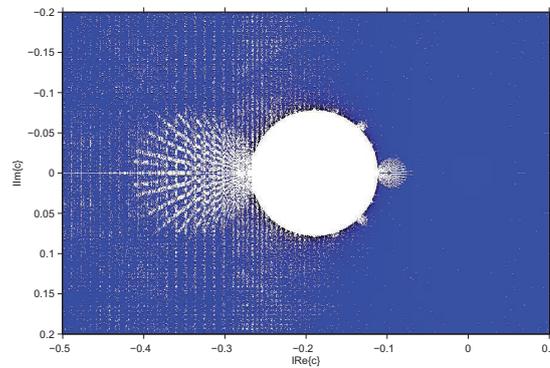


Figura 6.7: Detalle del plano de parámetros de la familia (6.3),  $[-0.5, 0.1] \times [-0.2, 0.2]$

Las Figuras 6.6 y 6.7 han sido generadas mediante los algoritmos presentados en [26] para valores del parámetro  $\beta$  en  $[-1.7, -1.4] \times [-0.1, 0.1]$  y  $[-0.5, 0.1] \times [-0.2, 0.2]$ , respectivamente, con una malla de  $2000 \times 2000$  puntos y un máximo de 800 iteraciones por punto.

Así, al utilizar al punto crítico libre como estimación inicial de cada esquema iterativo asociado a cada valor complejo de  $\beta$ , coloreamos de azul aquellos puntos del plano cuyos métodos asociados convergen al cero o al infinito, mientras que las regiones blancas indican que el método correspondiente a estos valores tiene, al menos, tres cuencas de atracción. También debemos señalar que este comportamiento parece ser más estable para los valores de  $\beta$  en la región azul  $[0, 0.1] \times [-0.2, 0.2]$  de la Figura 6.7.

Los discos (en blanco en las Figuras 6.6 y 6.7) corresponden a la región de estabilidad de  $z = 1$  descrita en la Proposición 6.1.2. El resto de la región blanca en los planos de parámetros conjeturamos que es reflejo de la existencia de otros críticos libres no independientes, que no hemos podido aislar.

En la Figura 6.8, se muestran dos casos particulares de valores reales del parámetro  $\beta$ , uno en una de las regiones coloreadas en blanco, con dos atractores extraños en  $z = 2.2922$  y  $z = 0.4363$  (diferentes de las raíces), véanse las Figuras 6.8a y 6.8b respectivamente, y un valor de  $\beta$  en la región azul, con un comportamiento muy estable (muy similar al esquema de Newton, pero con orden de convergencia cuatro), en la Figura 6.8c.

Parte de los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en la referencia [11]. De ellos, se puede deducir que el comportamiento dinámico de los métodos iterativos de un familia paramétrica puede ser muy diferente, incluso sobre las funciones más sencillas, como los polinomios. Así, el plano de parámetros se muestra como una herramienta sumamente útil a la hora de seleccionar a miembros de la familia. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, debido a la complejidad de las funciones racionales implicadas, no siempre es posible aislar todos los puntos críticos libres de un operador de punto fijo. Dado que los diferentes críticos libre suelen ser independientes entre sí, cada uno de ellos nos muestra una visión parcial del comportamiento de los métodos.

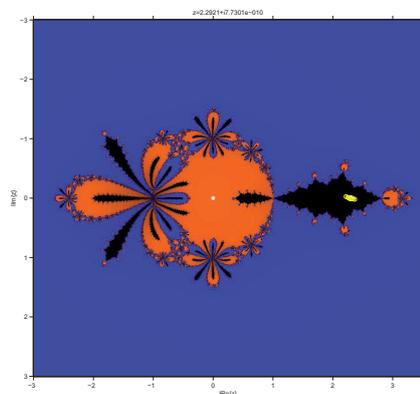
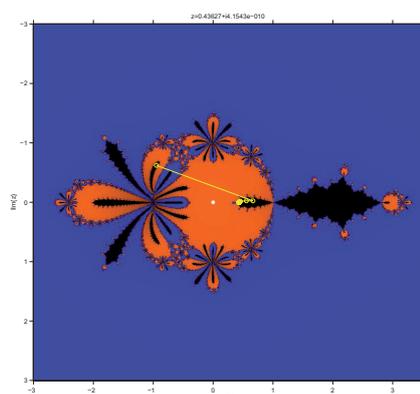
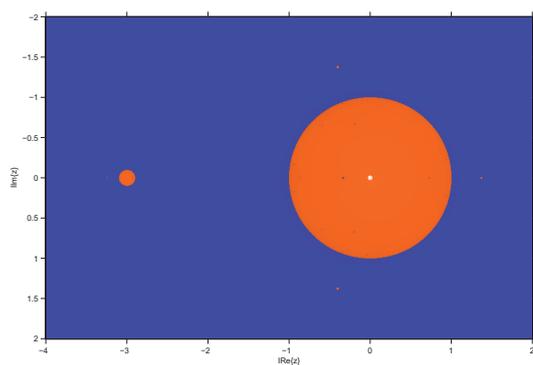
(a)  $\beta = -0.4$ , atractor en  $z = 2.2922$ (b)  $\beta = -0.4$ , atractor en  $z = 0.4363$ (c)  $\beta = 0$ 

Figura 6.8: Casos inestables y estables

## Capítulo 7

# Métodos iterativos de alto orden con operador derivada para sistemas de ecuaciones no lineales

### 7.1. Estado del arte

La solución de sistemas de ecuaciones no lineales es un problema frecuente, antiguo y de gran importancia por sus aplicaciones en Matemáticas e Ingeniería (véase, por ejemplo, [72]). En particular, la solución numérica de ecuaciones cuadráticas y de ecuaciones integrales no lineales es necesaria en el estudio de modelos dinámicos de reactores químicos [21], o en transferencia radioactiva [56]. En [116], se emplean cálculos de alta precisión para resolver problemas de interpolación en Astronomía; en [70] los autores describen el uso de cálculos de precisión arbitraria para mejorar los resultados obtenidos en simulaciones climáticas. Los resultados de estos experimentos numéricos muestran que los métodos de alto orden, asociados con aritmética de punto flotante de multiprecisión, son muy útiles porque conllevan una clara reducción en el número de iteraciones necesarias.

Aunque no de forma tan prolífica como en el caso de las ecuaciones, en los últimos años se han publicado diferentes contribuciones de métodos iterativos que tratan de resolver sistemas no lineales, se han hecho diversas modificaciones a los métodos clásicos para acelerar la convergencia o reducir el número de operaciones y evaluaciones funcionales en cada paso del método iterativo. La extensión de las variantes del método de Newton descritas por Weerakoon y Fernando en [114], por Özban en [93] y Gerlach en [62], a funciones de varias variables han sido desarrolladas en [35], [36], [60] y [37]. Asimismo, en [35] y [36] se han diseñado familias de variantes de tercer orden del método de Newton usando fórmulas de cuadratura abiertas y cerradas, incluyendo las familias de los métodos definidos por Frontini et al. en [60]. Usando la fórmula genérica de la cuadratura de interpolación, en [37] es obtenida una familia de métodos con orden de convergencia  $2d+1$ , bajo ciertas condiciones, donde  $d$  es el orden hasta el cual las derivadas parciales de cada función coordenada evaluada en la solución se cancelan. De hecho, Darvishi et al. mejoraron en [43] el método de Frontini et al., consiguiendo un método de cuarto orden. En [112] y [40], Vassileva et al. diseñaron un procedimiento general llamado pseudocomposición que permite generar métodos de alto orden de convergencia combinando adecuadamente métodos conocidos. Inicialmente, se generaron métodos multipunto de orden tres utilizando como predictor el método clásico de Newton y cuadratura Gaussiana como corrector.

Se probó que, bajo algunas condiciones impuestas sobre los nodos y coeficientes de la fórmula de cuadratura, se alcanza orden de convergencia tres, por lo que sólo un subconjunto de las cuadraturas Gaussianas pueden usarse con este fin (por ejemplo, utilizando la cuadratura de Gauss-Chebyshev la convergencia es sólo lineal). A continuación, se generalizó el proceso, de manera que se pueda usar otros métodos como predictores, dando lugar a esquemas de orden alto.

Además de métodos multipunto basados en cuadraturas de interpolación, han sido desarrollados otros esquemas utilizando diferentes técnicas, como por ejemplo la extensión a varias variables de esquemas unidimensionales (ver [44]), la descomposición de Adomian (ver [4] y [14], por ejemplo), la propuesta por Darvishi y Barati en [45] y [46] con convergencia super cúbica y los métodos de Cordero et al. en [34] con órdenes de convergencia cuatro y cinco. Otro procedimiento para desarrollar métodos iterativos para sistemas no lineales es reemplazar la segunda derivada por alguna aproximación de la misma. En [111], Traub presentó una familia de métodos multipunto basados en la aproximación de la segunda derivada que aparece en la fórmula iterativa de Chebyshev y, más recientemente, Babajee et al. en [15] diseñaron dos métodos similares al de Chebyshev libres de segundas derivadas.

Por otra parte, la técnica de la composición de métodos presentada en el Capítulo 2 e introducida por Traub en [111], consiste en la composición de dos métodos iterativos de órdenes  $p_1$  y  $p_2$ , respectivamente, para obtener un método de orden  $p_1 p_2$ . En consecuencia, habitualmente se requieren nuevas evaluaciones de la matriz Jacobiana y de la función no lineal para incrementar el orden de convergencia y el nuevo método suele acabar siendo menos eficiente que los métodos originales. De hecho, si componemos un método de función de iteración  $g(x)$  de orden  $p$  con el método de Newton clásico, se obtiene un nuevo método de orden  $2p$  que requiere  $n^2 + n$  evaluaciones funcionales más que  $g(x)$ . De modo que para conseguir un método más eficiente, en [30] se estima en el nuevo paso del método iterativo la matriz Jacobiana,  $F'(g(x^{(k)}))$ , en términos de matrices Jacobianas utilizadas previamente. Con esta idea, el nuevo método tiene en general un orden de convergencia menor que  $2p$  pero el número de evaluaciones funcionales por iteración disminuye. Consideremos el problema de encontrar un cero real de una función  $F : D \subseteq R^n \rightarrow R^n$ , esto es, una solución  $\xi \in D$  del sistema no lineal de ecuaciones  $F(x) = 0$ . Esta solución se puede aproximar por medio de métodos iterativos. El método más conocido y ampliamente utilizado es el método clásico de Newton,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}). \quad (7.1)$$

Este método, de segundo orden de convergencia, constituye uno de los procedimientos básicos para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. En fechas recientes se han propuesto una serie de métodos, variantes del esquema de Newton, con el objetivo de mejorar el orden de convergencia de éste. En esta memoria nosotros hemos diseñado algunos métodos, con órdenes de convergencia cuatro y cinco, que pretendemos comparar con métodos ya conocidos y estudiados de orden igual a los nuestros, pues los resultados de ésta comparación nos darán idea de cuán eficaces podrían ser nuestros métodos. Algunos resultados parciales de este capítulo aparecen publicados en [13].

Entre los métodos de cuarto orden a comparar con los nuestros está el método multipunto desarrollado por Jarratt en [74], que tiene por expresión

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3}[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - [6F'(y^{(k)}) - 2F'(x^{(k)})]^{-1}(3F'(y^{(k)}) - F'(x^{(k)}))[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.2)$$

y que denotaremos en adelante por MSD4J.

En el siguiente esquema iterativo, diseñado por Sharma et al. en [102] se mantiene el primer paso igual al método anterior, mientras que en el segundo se utiliza el conocido método de Newton

ponderado que, para sistema de ecuaciones, se puede escribir como

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3}[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{1}{2}\left[-I + \frac{9}{4}F'(y^{(k)})^{-1}F'(x^{(k)}) + \frac{3}{4}[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)})\right][F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.3)$$

que denotaremos por MSD4S.

El tercer método que utilizaremos en nuestras pruebas numéricas, denotado por MSD4D, fue obtenido por Abad et al. en [1] a partir de la combinación de los métodos de Newton y Traub, siendo su expresión iterativa

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}(F(x^{(k)}) + F(y^{(k)})), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [F'(z^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde  $y^{(k)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ .

A continuación mostraremos los métodos de orden de convergencia 5 que serán comparados con los nuestros. Entre ellos tenemos el método obtenido por Vassileva en [112], generalizando el método de Jarratt, mejorando el orden de convergencia de éste añadiendo una evaluación funcional,

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \alpha[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [a_1F'(x^{(k)}) + a_2F'(y^{(k)})]^{-1}(b_1F'(x^{(k)}) + b_2F'(y^{(k)}))[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde  $\alpha = -1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$ ,  $b_1 = -3$ ,  $b_2 = -1$ . Denotaremos este esquema por MSD5M.

Otro esquema con el que comparamos, denotado por MSD5S, es el propuesto por Sharma et al en [104]. Éste método de tres pasos que tiene como base el esquema de Homeier, cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{1}{2}[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \left([aF'(y^{(k)})]^{-1} + b[F'(x^{(k)})]^{-1}\right)F(z^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde  $a = 2$ , y  $b = -1$ .

El tercer esquema de orden 5 que mencionaremos fue desarrollado por Arroyo et al. en [9], que denotaremos por MSD5A1, siendo su expresión iterativa

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= y^{(k)} - 5[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \frac{1}{5}[F'(x^{(k)})]^{-1}[-16F(y^{(k)}) + F(z^{(k)})], \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde  $y^{(k)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ .

El siguiente método, al igual que (7.4), fue diseñado por Abad et al en [1] y también se obtiene a partir de la combinación de los métodos de Newton y Traub. Este tiene por expresión

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}(F(x^{(k)}) + F(y^{(k)})), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - [F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde  $y^{(k)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ , y lo denotaremos por MSD5A2.

En las secciones siguientes diseñaremos algunos métodos de órdenes cuatro y cinco, mediante la técnica de las funciones peso, probando su convergencia local mediante la técnica de los desarrollos de Taylor multidimensionales, descrita en detalle en el Capítulo 2. A continuación, se estudia la eficiencia computacional de los mismos y se generaliza el proceso analizando el orden de convergencia de los métodos resultantes al añadir sucesivos pasos con la misma función peso y sólo una evaluación funcional más. Finalmente, se muestran las pruebas numéricas llevadas a cabo para establecer la eficiencia y robustez de los métodos propuestos, mostrando su estabilidad respecto a la estimación inicial en el plano real, para alguno de los ejemplos.

## 7.2. Diseño de los métodos y análisis de la convergencia

Una tarea de gran importancia en la matemática numérica y su aplicación es el diseño de métodos para la aproximación de las soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales. Nosotros presentamos en primer lugar un nuevo método para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, usando la técnica de funciones peso.

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \alpha [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - H(\eta^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.9)$$

donde

$$\eta^{(k)} = m_1 I + m_2 [F'(y^{(k)})]^{-1} F'(x^{(k)}) + m_3 [F'(x^{(k)})]^{-1} F'(y^{(k)}). \quad (7.10)$$

Denotamos a esta clase de métodos, cuyo orden de convergencia demostraremos que es cinco bajo ciertas condiciones, por MS5.

Además de en para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, podríamos utilizar (7.9) en la solución de ecuaciones no lineales, pero con el inconveniente de que para ecuaciones su orden de convergencia no es óptimo. De aquí surge la idea de encontrar un método óptimo, es decir de orden cuatro, que nos sea útil para resolver ecuaciones no lineales, así como también para sistemas de ecuaciones no lineales; al método que cumple esas características lo hemos denotado por MS4, cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \alpha [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - H(\eta^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Obsérvese que la función peso  $H$ , utilizada en las expresiones (7.9) y (7.11), es una función matricial de variable matricial. Concretamente, si  $X = R^{n \times n}$  denota el espacio de Banach de las matrices cuadradas reales de tamaño  $n \times n$ , entonces podemos definir  $H : X \rightarrow X$  tal que sus derivadas Frechet satisfacen:

- a)  $H'(u)(v) = H_1 uv$ , donde  $H' : X \rightarrow \mathcal{L}(X)$  y  $H_1 \in \mathbb{R}$ ,
- b)  $H''(u, v)(w) = H_2 uvw$ , donde  $H'' : X \times X \rightarrow \mathcal{L}(X)$  y  $H_2 \in \mathbb{R}$ .

Notemos que  $\mathcal{L}(X)$  denota el espacio de las aplicaciones lineales de  $X$  en si mismo.

Para demostrar la convergencia local de nuestro proceso iterativo a la solución  $\xi$  de  $F(x) = 0$  utilizaremos el desarrollo en serie de Taylor, de las funciones involucradas en torno a la solución

asumiendo que la matriz Jacobiana  $F'(x)$  es no singular en un entorno de  $\xi$ ,

$$F(\xi + h) = F'(\xi)[h + \sum_{q=2}^{p-1} C_q h^q] + O(h^p) \quad (7.12)$$

donde  $C_q = (\frac{1}{q!})[F'(\xi)]^{-1}F^{(q)}(\xi)$ ,  $q \geq 2$ .

Así, podemos expresar  $F'$  como

$$F'(\xi + h) = F'(\xi)[I + \sum_{q=2}^{p-1} qC_q h^{q-1}] + O(h^p) \quad (7.13)$$

donde  $I$  es la matriz identidad. Esta técnica, junto con la notación empleada, ha sido desarrollada con detalle en el Capítulo 2.

En los siguientes resultados probaremos bajo qué condiciones está asegurada la convergencia en los métodos propuestos, analizando asimismo su eficiencia.

**Teorema 7.2.1** *Sea  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suficientemente diferenciable en  $\Omega$  y sea  $\xi \in \Omega$  una solución del sistema de ecuaciones no lineales  $F(x) = 0$ . Supongamos que  $F'(x)$  es continua y no singular en  $\xi$ . Sea  $H : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  una función peso matricial suficientemente diferenciable tal que  $H(I) = I$ ,  $H_1 = \frac{1}{m_2 - m_3}$ , y  $H_2 = \frac{m_2 - 5m_3}{2(m_2 - m_3)^3}$ , siendo  $I$  la matriz identidad. Consideremos  $x^{(0)}$  una estimación inicial suficientemente próxima a  $\xi$ . Entonces, la sucesión  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  obtenida usando la expresión (7.9) converge a  $\xi$  con orden de convergencia cinco si  $\alpha = 1$  y  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ . Así, obtenemos la siguiente ecuación de error,*

$$e^{(k+1)} = \left[ \frac{2m_2^2 + 14m_3^2}{m_2 - m_3} C_2^4 + \frac{1}{2}(C_2 C_3 C_2 - 3C_3 C_2) \right] e^{(k)5} + O(e^{(k)6}),$$

donde  $C_q = \frac{1}{q!}[F'(\xi)]^{-1}F^{(q)}(\xi)$ ,  $q \geq 2$  y  $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$ .

**Demostración:** De (7.12) y (7.13) obtenemos:

$$F(x^{(k)}) = F'(\xi)[e^{(k)} + C_2 e^{(k)2} + C_3 e^{(k)3} + C_4 e^{(k)4} + C_5 e^{(k)5}] + O(e^{(k)6}), \quad (7.14)$$

$$F'(x^{(k)}) = F'(\xi)[I + 2C_2 e^{(k)} + 3C_3 e^{(k)2} + 4C_4 e^{(k)3} + 5C_5 e^{(k)4} + 6C_6 e^{(k)5}] + O(e^{(k)6}). \quad (7.15)$$

De la expresión anterior tenemos

$$F'([x^{(k)}])^{-1} = [I + X_2 e^{(k)} + X_3 e^{(k)2} + X_4 e^{(k)3} + X_5 e^{(k)4} + X_6 e^{(k)5}]^{-1} [F'(\xi)]^{-1} + O(e^{(k)6}), \quad (7.16)$$

con  $X_1 = I$ ,  $X_m = -\sum_{j=2}^m j X_{m-j+1} C_j$ ,  $m = 2, 3, \dots$

Usamos (7.14) y (7.16)

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) = e^{(k)} + A_2 e^{(k)2} + A_3 e^{(k)3} + A_4 e^{(k)4} + A_5 e^{(k)5} + O(e^{(k)6}), \quad (7.17)$$

con  $A_2 = -C_2$ ,  $A_s = C_s + \sum_{j=3}^s X_{s-j+2} C_{j-1} + X_s$ ,  $s = 3, 4, \dots$

A partir de (7.17), obtenemos

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \alpha [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \\ &= \xi + (1 - \alpha) e^{(k)} - \alpha A \end{aligned} \quad (7.18)$$

con  $A = A_2e^{(k)2} + A_3e^{(k)3} + A_4e^{(k)4} + A_5e^{(k)5} + O(e^{(k)6})$

Si utilizamos (7.18)

$$F'(y^{(k)}) = F'(\xi)[B_1e^{(k)} + B_2e^{(k)2} + B_3e^{(k)3} + B_4e^{(k)4} + B_5e^{(k)5}] + O(e^{(k)6}), \quad (7.19)$$

$$F'(y^{(k)}) = F'(\xi)[I + D_1e^{(k)} + D_2e^{(k)2} + D_3e^{(k)3} + D_4e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}), \quad (7.20)$$

donde

$$\begin{aligned} B_1 &= 1 - \alpha, \\ B_2 &= (\alpha + (1 - \alpha)^2)C_2, \\ B_3 &= -\alpha A_3 + 2\alpha(1 - \alpha)C_2^2 + (1 - \alpha)^3C_3, \\ B_4 &= -\alpha A_4 + \alpha^2C_2^3 - 2\alpha(1 - \alpha)C_2A_3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2C_3C_2 + (1 - \alpha)^4C_4, \\ B_5 &= -\alpha A_5 - 2\alpha(1 - \alpha)C_2A_4 + \alpha^2(C_2^2A_3 + C_2A_3C_2) + 3\alpha^2(1 - \alpha)C_3C_2^2 - 3\alpha(1 - \alpha)^2C_3A_3, \\ &+ 4\alpha(1 - \alpha)^3C_4C_2 + (1 - \alpha)^5C_5, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_1 &= 2(1 - \alpha)C_2, \\ D_2 &= 2\alpha C_2^2 + 3(1 - \alpha)^2C_3, \\ D_3 &= -2\alpha C_2A_3 + 6\alpha(1 - \alpha)C_3C_2 + 4(1 - \alpha)^5C_4, \\ D_4 &= -2\alpha C_2A_4 + 3\alpha^2C_3C_2^2 + 12\alpha(1 - \alpha)C_3A_3 - 3\alpha(1 - \alpha)^2C_4C_2 + 5(1 - \alpha)^4C_5. \end{aligned}$$

Utilizando (7.20)

$$[F'(y^{(k)})]^{-1} = [I + Y_1e^{(k)} + Y_2e^{(k)2} + Y_3e^{(k)3} + Y_4e^{(k)4}][F'(\xi)]^{-1} + O(e^{(k)6}), \quad (7.21)$$

con  $Y_1 = -D_1, Y_m = -D_m - \sum_{j=1}^{m-1} Y_j D_{m-j}, m = 2, 3, \dots, j = 1, 2, \dots$

Para  $u^{(k)} = [F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)})$ , usando (7.15) y (7.21), tenemos

$$[F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}) = I + E_1e^{(k)} + E_2e^{(k)2} + E_3e^{(k)3} + E_4e^{(k)4} + E_5e^{(k)5} + O(e^{(k)6}),$$

siendo  $E_1 = 2C_2 + Y_1, E_s = (s+1)C_{s+1} + \sum_{j=1}^{s-1} (s-j+1)Y_{j+1}C_{s-j+1} + Y_{s+1}, s = 2, 3, \dots, j = 1, 2, \dots$

Ahora, para  $v^{(k)} = [F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)})$ , utilizamos (7.16) y (7.20)

$$[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)}) = I + F_1e^{(k)} + F_2e^{(k)2} + F_3e^{(k)3} + F_4e^{(k)4} + F_5e^{(k)5} + (e^{(k)6}),$$

con  $F_1 = D_1 + X_2, F_m = D_m + \sum_{j=1}^{m-1} X_{j+1}D_{m-j} + X_{m+1}, m = 2, 3, \dots, j = 1, 2, \dots$

Para  $\eta^{(k)} = m_1 + m_2u^{(k)} + m_3v^{(k)}$ ,

$$\eta^{(k)} = mI + N_2e^{(k)} + N_3e^{(k)2} + N_4e^{(k)3} + N_5e^{(k)4} + N_6e^{(k)5} + O(e^{(k)6}). \quad (7.22)$$

con  $N_i = m_2 E_{i-1} m_3 F_{i-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots$  y  $N_1 = m - 1$ . A partir de (7.22),

$$\begin{aligned}\eta^{(k)} - I &\approx N_1 I + N_2 e^{(k)} + N_3 e^{(k)2} + N_4 e^{(k)3} + N_5 e^{(k)4} + N_6 e^{(k)5}, \\ (\eta^{(k)} - I)^2 &\approx N_1^2 I + M_1 e^{(k)} + M_2 e^{(k)2} + M_3 e^{(k)3} + M_4 e^{(k)4} + M_5 e^{(k)5},\end{aligned}\quad (7.23)$$

donde

$$\begin{aligned}M_1 &= N_1 N_2 + N_2 N_1, \\ M_2 &= N_1 N_3 + N_2^2 + N_3 N_1, \\ M_3 &= N_1 N_4 + N_2 N_3 + N_3 N_2 + N_4 N_1, \\ M_4 &= N_1 N_5 + N_2 N_4 + N_3^2 + N_4 N_2 + N_5 N_1, \\ M_5 &= N_1 N_6 + N_2 N_5 + N_3 N_4 + N_4 N_3 + N_5 N_2 + N_6 N_1.\end{aligned}$$

Desarrollando en serie de Taylor  $H(\eta^{(k)})$  alrededor de  $I$ , tenemos

$$H(\eta^{(k)}) \approx H(I) + H_1(\eta^{(k)} - I) + \frac{1}{2}H_2(\eta^{(k)} - I)^2, \quad (7.24)$$

Ahora, sustituimos (7.23) en (7.24), obteniendo

$$H(\eta^{(k)}) = h_1 I + h_2 e^{(k)} + h_3 e^{(k)2} + h_4 e^{(k)3} + h_5 e^{(k)4} + \alpha e^{(k)5} + O(e^{(k)6}), \quad (7.25)$$

siendo  $h_1 = H_0 + H_1 N_1 + \frac{1}{2}H_2 N_1^2$ ,  $h_j = H_1 N_j + \frac{1}{2}H_2 M_{j-1}$ ,  $j = 2, 3, \dots$ , donde  $H_0 = H(I)$ .

Efectuemos el producto de (7.16) y (7.19)

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}) = R_1 e^{(k)} + R_2 e^{(k)2} + R_3 e^{(k)3} + R_4 e^{(k)4} + R_5 e^{(k)5} + O(e^{(k)6}) \quad (7.26)$$

con  $R_1 = B_1$ ,  $R_s = B_s + \sum_{j=1}^s X_{j+1} B_{s-j}$ ,  $s = 2, 3, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Utilizamos (7.25) y (7.26)

$$H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}) = S_1 e^{(k)} + S_2 e^{(k)2} + S_3 e^{(k)3} + S_4 e^{(k)4} + S_5 e^{(k)5} + O(e^{(k)6}) \quad (7.27)$$

con  $S_1 = h_1 R_1$ ,  $S_m = \sum_{j=1}^m h_j R_{m-j+1}$ ,  $m = 2, 3, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Desarrollemos el segundo paso de (7.9), usando (7.27)

$$x^{(x+1)} = y^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}). \quad (7.28)$$

Expresada en forma general, la ecuación del error es

$$e^{(k+1)} = T_1 e^{(k)} + T_2 e^{(k)2} + T_3 e^{(k)3} + T_4 e^{(k)4} + T_5 e^{(k)5} + O(e^{(k)6}), \quad (7.29)$$

siendo  $T_1 = 1 - \alpha - S_1$  y  $T_j = -[\alpha A_j + S_j]$ ;  $j = 2, 3, \dots$

Tengamos en cuenta que si  $T_1 = 0$ , el orden será al menos 2; si además  $T_2 = 0$ , orden 3 y así sucesivamente. Desarrollando  $T_1$  paso a paso,

$$T_1 = 1 - \alpha - S_1 = 1 - \alpha - h_1 R_1 = 1 - \alpha - h_1 B_1 = (1 - \alpha) - h_1(1 - \alpha) = (1 - \alpha)(1 - h_1) = 0.$$

Es decir, con  $\alpha = 1$  ó  $h_1 = 1$ , obtenemos orden dos.

Utilizando  $h_1 = 1$  y  $H_0 = I$  obtenemos

$$T_2 = \alpha A_2 + S_2 = (\alpha - 1)[(\alpha + 1)C_2 + h_2] = 0,$$

de donde  $\alpha = 1$  nos proporciona orden tres.

Para  $T_3 = \alpha A_3 + S_3 = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha A_3 + S_3 &= A_3 + h_1 R_3 + h_2 R_2 + h_3 R_1 \\ &= -2C_2^2 - 2C_3 + R_3 + h_2 C_2 \\ &= -2C_2 + (H_1 N_2 + \frac{1}{2} H_2 M_1) C_2 \\ &= [-1 + H_1(m_2 - m_3)] 2C_2^2. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Al sustituir  $H_1 = \frac{1}{m_2 - m_3}$  en (7.30) el orden es cuatro.

Ahora para  $T_4 = \alpha A_4 + S_4 = 0$ , y utilizando  $H_1 = \frac{1}{m_2 - m_3}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha A_4 + S_4 &= A_4 + h_1 R_4 + h_2 R_3 + h_3 R_2 + h_4 R_1 \\ &= 9C_2^3 - 4C_2 C_3 - 3C_3 C_2 + h_2 R_3 + h_3 R_2 \\ &= \left[ 1 - \frac{2(m_2 - 3m_3)}{m_2 - m_3} + 2H_2(m_2 - m_3)^2 \right] C_2^3. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Si sustituimos  $H_2 = \frac{m_2 - 5m_3}{2(m_2 - m_3)^3}$  en (7.31) el orden es cinco.

A continuación sustituimos en  $T_5 = \alpha A_5 + S_4$  las condiciones exigidas anteriormente

$$\begin{aligned} \alpha A_5 + S_5 &= A_5 + h_1 R_5 + h_2 R_2 + h_3 R_1 \\ &= -30C_2^4 + 18C_2^2 C_3 + 14C_2 C_3 C_2 - 6C_2 C_4 + 12C_3 C_2^2 - 6C_3^2 - 4C_4 C_2 + h_2 R_4 + h_3 R_3 + h_4 R_2 \\ &= \left[ -\frac{1}{2} C_2 C_3 C_2 + \frac{3}{2} C_3 C_2^2 - \frac{2m_2^2 + 14m_3^2}{(m_2 + m_3)^2} \right] C_2^4, \end{aligned} \quad (7.32)$$

y es a partir de esta expresión que obtenemos la ecuación del error

$$e^{(k+1)} = \left[ \frac{2m_2^2 + 14m_3^2}{m_2 - m_3} C_2^4 + \frac{1}{2} (C_2 C_3 C_2 - 3C_3 C_2) \right] e^{(k)^5} + O(e^{(k)^6}),$$

con lo que la demostración queda finalizada.  $\square$

Partiendo del método (7.9) y bajo las hipótesis del Teorema 7.2.1, mostramos dos esquemas iterativos concretos de orden 5.

- Exigiendo que  $m_1 = m_3 = \frac{1}{2}$  y  $m_2 = 0$ , se obtiene directamente de aplicar el Teorema 7.2.1 que  $H(I) = I$ ,  $H_1 = -2$ , y  $H_2 = 10$ . De este modo, obtenemos el proceso iterativo de expresión

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - H(\eta^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.33)$$

donde  $\eta^{(k)} = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}[F'(x^{(k)})]^{-1} F'(y^{(k)})$  y

$$H(\eta^{(k)}) = \frac{13}{4}I - \frac{7}{2}[F'(x^{(k)})]^{-1} F'(y^{(k)}) + \frac{5}{4}[F'(x^{(k)})]^{-1} F'(y^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1} F'(y^{(k)}).$$

A este esquema lo denotamos por MSD51.

- Al segundo esquema iterativo lo hemos denotado por MSD52, y se define imponiendo las siguientes condiciones:  $m_1 = m_3 = 0$ , y  $m_2 = 1$ , con lo que el Teorema 7.2.1 implica que  $H(I) = I$ ,  $H_1 = 1$ , y  $H_2 = \frac{1}{2}$ . La expresión iterativa resultante es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}[F(x^{(k)})], \end{aligned} \quad (7.34)$$

donde  $\eta^{(k)} = [F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)})$  y

$$H(\eta^{(k)}) = \frac{1}{4}I + \frac{1}{2}[F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}) + \frac{1}{4}[F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)})[F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}).$$

Si reemplazamos en (7.9) la evaluación funcional del segundo paso  $F(y^{(k)})$  por  $F(x^{(k)})$ , el orden de convergencia del método resultante, MS4, se reduce a cuatro, como se demuestra en el siguiente resultado.

**Teorema 7.2.2** *Sea  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suficientemente diferenciable en  $\Omega$  y sea  $\xi \in \Omega$  una solución del sistema de ecuaciones no lineales  $F(x) = 0$ . Supongamos que  $F'(x)$  es continua y no singular en  $\xi$ . Sea  $H : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  una función peso matricial suficientemente diferenciable tal que  $H(I) = \frac{1}{3}I$ ,  $H_1 = \frac{3}{4(m_2 - m_3)}$  y  $H_2 = \frac{3(m_2 - 3m_3)}{4(m_2 - m_3)^3}$ , siendo  $I$  la matriz identidad. Consideremos  $x^{(0)}$  una estimación inicial suficientemente próxima a  $\xi$ . Entonces, la sucesión  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  obtenida usando la expresión (7.11) converge a  $\xi$  con orden de convergencia cuatro si  $\alpha = 2/3$  y  $m = m_1 + m_2 + m_3 = 1$ , obteniéndose la siguiente ecuación del error*

$$e^{(k+1)} = \left[ \frac{1}{9(m_2 + m_3)^2} (13m_2^2 - 26m_2m_3 + 45m_3^2)C_2^3 - C_3C_2 + \frac{1}{9}C_4 \right] e^{(k)4} + O(e^{(k)5}),$$

donde  $C_q = \frac{1}{q!}[F'(\xi)]^{-1}F^{(q)}(\xi)$ ,  $q \geq 2$  y  $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$ .

**Demostración:** Como la única diferencia entre el método (7.9) y (7.11) es que en el segundo paso del método (7.9), se sustituye  $F(y^{(k)})$  por  $F(x^{(k)})$ , razón por la que obtenemos la expresión siguiente

$$H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) = L_1e^{(k)} + L_2e^{(k)2} + L_3e^{(k)3} + L_4e^{(k)4} + O(e^{(k)5}) \quad (7.35)$$

con  $L_1 = h_1$ ,  $L_m = \sum_{j=1}^{m-1} h_j A_{m+j-1} + h_m$ ,  $m = 2, 3, \dots$

Utilizando (7.25) y (7.35)

$$x^{(k+1)} = y^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \quad (7.36)$$

y

$$e^{(k+1)} = W_1e^{(k)} + W_2e^{(k)2} + W_3e^{(k)3} + W_4e^{(k)4} + O(e^{(k)5}), \quad (7.37)$$

siendo  $W_1 = 1 - \alpha - L_1$  y  $W_j = -[\alpha A_j + L_j]$ ,  $j = 2, 3, \dots$ . Si  $W_1 = 0$ , se obtiene orden 2; si además  $W_2 = 0$ , orden 3 y así sucesivamente.

$W_1 = 1 - \alpha - L_1 = 0$ , es decir,  $h_1 = 1 - \alpha$  proporciona orden dos. De aquí,  $H_0 + H_1N_1 + \frac{1}{2}H_2N_1^2 = 1 - \alpha$  y como  $N_1 = 0$ , tenemos que  $H_0 = 1 - \alpha$ .

$W_2 = \alpha A_2 + L_2 = 0$ , utilizando  $h_1 = 1 - \alpha$  y  $M_1 = 0$

$$\begin{aligned}
 \alpha A_2 + L_2 &= \alpha A_2 + h_1 A_2 + h_2 \\
 &= \alpha A_2 + (1 - \alpha) A_2 + h_2 \\
 &= A_2 + h_2 \\
 &= A_2 + H_1 N_2 + \frac{1}{2} H_2 M_1 \\
 &= -C_2 + H_1(m_2 E_1 + m_3 F_1) \\
 &= [-1 + H_1 2\alpha(m_2 - m_3)] C_2
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

Sustituyendo  $H_1 = \frac{1}{2\alpha(m_2 - m_3)}$  en (7.38) obtenemos orden tres.

Para  $W_3 = \alpha A_3 + L_3 = 0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \alpha A_3 + L_3 &= \alpha A_3 + h_1 A_3 + h_2 A_2 + h_3 \\
 &= (\alpha + h_1) A_3 + h_2 A_2 + h_3 \\
 &= A_3 - h_2 C_2 + h_3 \\
 &= 2C_2^2 - C_3 - \left[ H_1 N_2 + \frac{1}{2} H_2 M_1 \right] C_2 + H_1 N_3 + \frac{1}{2} H_2 M_2 \\
 &= -2C_2^2 - C_3 - H_1 [N_2 C_2 - N_3] + \frac{1}{2} H_2 M_2 \\
 &= \left( 1 - \frac{3}{2} \alpha \right) C_2 + \left[ -2 + \frac{2\alpha m_2}{(m_2 - m_3)} + 2\alpha^2 H_2 (m_2 - m_3)^2 \right] C_2^2.
 \end{aligned} \tag{7.39}$$

Sustituyendo en (7.39)  $\alpha = \frac{2}{3}$  y  $H_2 = \frac{3(m_2 - m_3)}{4(m_2 - m_3)^3}$ , obtenemos orden cuatro.

Para desarrollar la ecuación de error utilizamos  $W_4 = \alpha A_4 + L_4$

$$\begin{aligned}
\alpha A_4 + L_4 &= \alpha A_4 + h_1 A_4 + h_2 A_3 + h_3 A_2 + h_4 \\
&= \alpha A_4 + (1 - \alpha) A_4 + h_2 A_3 + h_3 A_2 + h_4 \\
&= A_4 + h_2 A_3 + h_3 A_2 + h_4 \\
&= -4C_2^3 + 4C_2 C_3 + 3C_3 C_2 - 3C_4 + h_2(2C_2^2 - 2C_3) - h_3 C_2 + h_4 \\
&= -4C_2^3 + 4C_2 C_3 + 3C_3 C_2 - 3C_4 + \left( H_1 N_2 + \frac{1}{2} H_2 M_1 \right) (2C_2^2 - 2C_3) \\
&\quad - \left( H_1 N_3 \frac{1}{2} H_2 M_2 \right) C_2 + H_1 N_4 + \frac{1}{2} H_2 M_3 \\
&= -4C_2^3 + 4C_2 C_3 + 3C_3 C_2 - 3C_4 + H_1 N_2 (2C_2^2 - 2C_3) - H_1 N_3 C_2 + \frac{1}{2} H_2 (N_1 N_3 \\
&\quad + N_2^2 + N_3 N_1) C_2 + H_1 N_4 + \frac{1}{2} H_2 (N_1 N_4 + N_2 N_3 + N_3 N_2 + N_4 N_1) \\
&= -4C_2^3 + 4C_2 C_3 + 3C_3 C_2 - 3C_4 + H_1 (m_2 E_1 + m_3 F_1) (2C_2^2 - 2C_3) \\
&\quad - \left( H_1 N_3 \frac{1}{2} H_2 N_2^2 \right) C_2 + H_1 N_4 + \frac{1}{2} H_2 (N_2 N_3 + N_3 N_2) \\
&= -4C_2^3 + 4C_2 C_3 + 3C_3 C_2 - 3C_4 + 2C_2^2 - 2C_3 - 2C_3 C_2 + C_2^3 + \frac{16}{9} C_2^3 - \frac{10}{3} C_2 C_3 - \frac{4}{3} C_3 C_2 \\
&\quad + \frac{26}{9} C_4 - \frac{56m_3}{9(m_2 - m_3)} C_2^3 + \frac{8m_3}{3(m_2 - m_3)} (C_2 C_3 + C_3 C_2) + \frac{m_2 - 3m_3}{(m_2 - m_3)^3} \frac{4}{3} (m_2 \\
&\quad - m_3)^2 (C_2 C_3 + C_3 C_2 - 3C_2^3) + \frac{m_2 - 3m_3}{(m_2 - m_3)^3} \left( \frac{16}{9} \right) m_2 (m_2 - m_3) C_2^3 \\
&= C_3 C_2 - \frac{1}{9} C_4 + \left[ \frac{7}{9} + \frac{16m_2^2 - 48m_2 m_3 - 56(m_2 m_3 - m_3^2) - 36(m_2^2 - 4m_2 m_3 + 3m_3^2)}{9(m_2 - m_3)^2} \right] C_2^3.
\end{aligned}$$

Al sustituir en la fórmula anterior las condiciones exigidas con anterioridad, podemos verificar que la ecuación de error correspondiente al método (7.11) es:

$$e^{(k+1)} = \left[ \frac{1}{9(m_2 + m_3)^2} (13m_2^2 - 26m_2 m_3 + 45m_3^2) C_2^3 - C_3 C_2 + \frac{1}{9} C_4 \right] e^{(k)^4} + O(e^{(k)^5}),$$

con lo que completamos la demostración.  $\square$

Concluimos que el método es de orden cuatro, por lo que, en el contexto de ecuaciones de un avraible, sería óptimo según la conjetura de Kung y Traub.

Partiendo del método (7.11), bajo las condiciones impuestas en el Teorema 7.2.2, obtenemos dos esquemas iterativos particulares de orden 4.

- Exigiendo que  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 0$ , las condiciones del Teorema 7.2.2 implican  $H(I) = \frac{1}{3}I$ ,  $H_1 = \frac{3}{4}$ , y  $H_2 = \frac{3}{4}$ . La expresión iterativa del método resultante es

$$\begin{aligned}
y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3} [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\
x^{(k+1)} &= y^{(k)} - H(\eta^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \tag{7.40}
\end{aligned}$$

donde  $\eta^{(k)} = [F'(y^{(k)})]^{-1} F'(x^{(k)})$  y

$$H(\eta^{(k)}) = -\frac{1}{24}I + \frac{3}{8} [F'(y^{(k)})]^{-1} F'(x^{(k)}) [F'(y^{(k)})]^{-1} F'(x^{(k)}).$$

A este esquema lo denotamos por MSD41.

- Al segundo esquema lo denotaremos por MSD42, y resulta de fijar los parámetros  $m_1 = \frac{1}{4}$ ,  $m_2 = 0$  y  $m_3 = \frac{3}{4}$  en el Teorema 7.2.2. Entonces,  $H(I) = \frac{1}{3}I$ ,  $H_1 = -1$ , y  $H_2 = 4$ , quedando su expresión iterativa

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3}[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.41)$$

donde  $\eta^{(k)} = \frac{1}{4}I + \frac{3}{4}[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)})$  y

$$H(\eta^{(k)}) = \frac{53}{24}I - 3[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)}) + \frac{9}{8}[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)}).$$

### 7.3. Extensión a órdenes superiores

Es interesante que, tomando como base los resultados del Teorema 7.2.1, podemos generar métodos de orden superior a 5. El proceso consiste en añadir un paso más al esquema (7.9), manteniendo la función peso. De este modo, la expresión iterativa será:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \alpha[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.42)$$

donde

$$\eta^{(k)} = m_1I + m_2[F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}) + m_3[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)}). \quad (7.43)$$

En el siguiente resultado probamos que, bajo las mismas condiciones que en el Teorema 7.2.1, el orden de convergencia aumenta en dos unidades.

**Teorema 7.3.1** *Sea  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suficientemente diferenciable en  $\Omega$  y sea  $\xi \in \Omega$  una solución del sistema de ecuaciones no lineales  $F(x) = 0$ . Supongamos que  $F'(x)$  es continua y no singular en  $\xi$ . Sea  $H : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  una función peso matricial suficientemente diferenciable tal que  $H(I) = I$ ,  $H_1 = \frac{1}{m_2 - m_3}$ , y  $H_2 = \frac{m_2 - 5m_3}{2(m_2 - m_3)^3}$ , siendo  $I$  la matriz identidad. Consideremos  $x^{(0)}$  una estimación inicial suficientemente próxima a  $\xi$ . Entonces, la sucesión  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  obtenida usando la expresión (7.42) converge a  $\xi$  con orden de convergencia siete si  $\alpha = 1$  y  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ .*

**Demostración:** Las hipótesis del teorema nos aseguran que el orden del método, en el segundo paso,

$$z^{(k)} = y^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}) \quad (7.44)$$

es cinco, aplicando el Teorema 7.2.1. Así, denotamos el error en este paso por  $E = z^{(k)} - \xi = O(e^{(k)5})$ , siendo la ecuación del error del método

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \xi = E - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}). \quad (7.45)$$

Utilizando las expresiones (7.25) y (7.16)

$$\begin{aligned}
e^{(k+1)} &= E - (I + h_2e^{(k)} + h_3e^{(k)^2})(I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)^2})(E + O(E^{(k)^2})) \\
&= E - (I + h_2e^{(k)} + h_3e^{(k)^2})(E + X_2e^{(k)}E + O(e^{(k)^7})) \\
&= E - (E + X_2e^{(k)}E + h_2e^{(k)}E) + O(e^{(k)^7}) \\
&\quad - (X_2 + h_2)e^{(k)}E + O(e^{(k)^7}).
\end{aligned}$$

Sabemos que  $h_2 = H_1N_2 + \frac{1}{2}H_2M_1$ , donde  $M_1 = N_1N_2 + N_2N_1 = 0$  porque  $N_1 = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
h_2 &= H_1N_2 \\
&= H_1(m_2E_1 + m_3F_1) \\
&= H_1(m_2(2C_2 + Y_1) + m_3(D_1 + X_2)) \\
&= 2C_2H_1(m_2 - m_3) \\
&= 2C_2,
\end{aligned}$$

donde  $Y_1 = -D_1 = 0$ ,  $X_2 = -2C_2$  y  $H_1 = \frac{1}{m_2 - m_3}$ . Considerando lo antes expuesto, finalmente  $X_2 + h_2 = 0$  y el método es de orden 7.

Supongamos un paso  $w^{(k)}$  de orden  $p$ ,  $\bar{E} = w^{(k)} - \xi = O(e^p)$ . En general

$$\begin{aligned}
e^{(k+1)} &= \bar{E} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(w^{(k)}) \\
&= \bar{E} - (I + h_2e^{(k)} + h_3e^{(k)^2})(I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)^2})(\bar{E} + O(\bar{E}^{(k)^2})) \\
&= -(X_2 + h_2)e^{(k)}\bar{E} + O(e^{p+2}).
\end{aligned}$$

Luego al añadir cada paso con esta estructura el orden aumenta en dos unidades.  $\square$

De manera análoga, añadiendo un tercer paso sobre la clase de métodos de orden cuatro y bajo las hipótesis del Teorema 7.2.2, el orden de convergencia aumenta en una unidad, tal como se demuestra en el siguiente resultado. La expresión iterativa del esquema resultante es: El proceso consiste en añadir un paso más al esquema (7.9), manteniendo la función peso. De este modo, la expresión iterativa será:

$$\begin{aligned}
y^{(k)} &= x^{(k)} - \alpha[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\
z^{(k)} &= y^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\
x^{(k+1)} &= z^{(k)} - 3H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}),
\end{aligned} \tag{7.46}$$

donde

$$\eta^{(k)} = m_1I + m_2[F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}) + m_3[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)}). \tag{7.47}$$

**Teorema 7.3.2** Sea  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suficientemente diferenciable en  $\Omega$  y sea  $\xi \in \Omega$  una solución del sistema de ecuaciones no lineales  $F(x) = 0$ . Supongamos que  $F'(x)$  es continua y no singular en  $\xi$ . Sea  $H : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  una función peso matricial suficientemente diferenciable tal que  $H(I) = \frac{1}{3}I$ ,  $H_1 = \frac{3}{4(m_2 - m_3)}$  y  $H_2 = \frac{3(m_2 - 3m_3)}{4(m_2 - m_3)^3}$ , siendo  $I$  la matriz identidad. Consideremos  $x^{(0)}$  una estimación inicial suficientemente próxima a  $\xi$ . Entonces, la sucesión  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  obtenida usando la expresión (7.46) converge a  $\xi$  con orden de convergencia cinco si  $\alpha = 2/3$  y  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ .

**Demostación:** Dado que se verifican las hipótesis del Teorema 7.2.2, el error en el segundo paso de (7.46) se puede expresar como

$$E = z^{(k)} - \xi = O(e^{(k)4}), \quad (7.48)$$

donde

$$z^{(k)} = y^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}).$$

Supongamos un nuevo paso con la misma idea:  $x^{(k+1)} = z^{(k)} - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}[F(z^{(k)})]$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - \xi &= E - H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}) \\ &= E - \left(\frac{1}{3}I + h_2e^{(k)} + h_3e^{(k)2}\right) \left(I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2}\right) \left(E + O(E^{(k)2})\right) \\ &= E - \left(\frac{1}{3}I + h_2e^{(k)}\right) \left(E + X_2e^{(k)}E + O(e^{(k)6})\right) \\ &= E - \left(\frac{1}{3}E + \frac{1}{3}X_2e^{(k)}E + h_2e^{(k)}E + O(e^{(k)6})\right) \\ &= \frac{2}{3}E - \left(\frac{1}{3}X_2 + h_2\right)e^{(k)}E + O(e^{(k)6}). \end{aligned}$$

Sabemos que  $h_2 = H_1N_2 + \frac{1}{2}H_2M_1 = H_1(m_2E_1 + m_3F_1) + \frac{1}{2}H_2(N_1N_2 + N_2N_1)$ , donde  $\frac{1}{2}H_2(N_1N_2 + N_2N_1) = 0$  porque  $N_1 = 0$ , entonces y

$$\begin{aligned} h_2 &= H_1(m_2(2C_2 + Y_1) + m_3(D_1 + X_2)) \\ &= H_1 \left[ m_2 \left( 2C_2 - 2 \left( 1 - \frac{2}{3} \right) C_2 \right) + m_3 \left( 2 \left( \frac{1}{3} \right) C_2 - 2C_2 \right) \right] \\ &= H_1 \left[ m_2 \left( \frac{4}{3} \right) C_2 + m_3 \left( -\frac{4}{3} C_2 \right) \right] \\ &= H_1 \left[ \frac{4}{3} C_2 (m_2 - m_3) \right] \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{m_2 - m_3} \left[ \frac{4}{3} (m_2 - m_3) \right] C_2 \\ &= C_2. \end{aligned}$$

donde  $Y_1 = -D_1 = -\frac{2}{3}C_2$ ,  $X_2 = -2C_2$  y  $H_1 = \frac{3}{4(m_2 - m_3)}$ . Considerando lo antes expuesto, tenemos que  $\frac{1}{3}X_2 + h_2 = \frac{1}{3}C_2$ , por lo que  $x^{(k+1)} - \xi = \frac{2}{3}E - \frac{1}{3}C_2eE + O(e^{(k)6})$  es de orden cuatro. Basta con usar  $x^{(k+1)} = z^{(k)} - 3H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}[F(z^{(k)})]$  para obtener orden 5 y aumenta cada paso en una unidad.  $\square$

Nuevamente supongamos un paso  $w^{(k)}$  de orden  $p$ ,  $\bar{E} = w^{(k)} - \xi = O(e^p)$ . En general

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= \bar{E} - 3H(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(w^{(k)}) \\ &= \bar{E} - 3\left(\frac{1}{3}I + h_2e^{(k)} + h_3e^{(k)2}\right)(I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2})(\bar{E} + O(\bar{E}^{(k)2})) \\ &= -(X_2 + 3h_2)e^{(k)}\bar{E} + O(e^{p+1}). \end{aligned}$$

Luego al añadir cada paso con esta estructura el orden aumenta en una unidad.  $\square$

Teniendo en cuenta el número de productos-cocientes que se necesitan para resolver un sistema lineal de tamaño  $n \times n$  (véase Capítulo 2) y el número de sistemas lineales que debemos resolver en cada iteración en los métodos de orden 4 y 5 diseñados anteriormente, mostramos en las Figuras 7.1 y 7.2 el índice de eficiencia y el índice de eficiencia computacional para distintos tamaños del sistema.

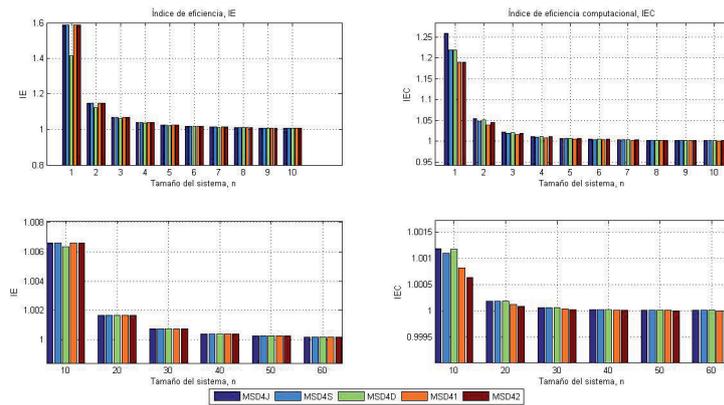


Figura 7.1: Índices de eficiencia de métodos iterativos MSD de orden cuatro

Al observar las gráficas 7.1 observamos que nuestros métodos de orden cuatro MSD41 y MSD42 junto con MSD4J y MSD4S tienen igual índice de eficiencia (IE) pero mayor que el MSD4D, siendo este método el peor, tanto para los sistemas de ecuaciones pequeños, como grandes.

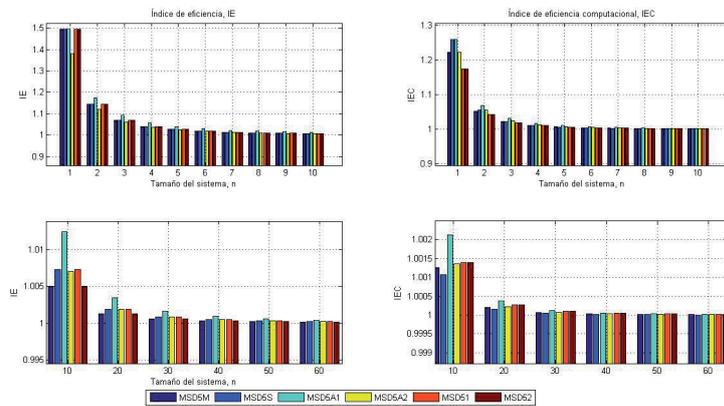


Figura 7.2: Índices de eficiencia de métodos iterativos MSD de orden cinco

Desde el punto de vista de la eficiencia las gráficas presentadas en la Figura 7.2 representan los índices de eficiencia (IE) y de eficiencia computacional (IEC) de los métodos desarrollados y también de los que usamos para comparar: los métodos MSD51 y MSD52 tienen un buen índice de eficiencia clásico para pequeños sistemas, siendo MSD5A1 el mejor en todos los casos, con respecto al índice

de eficiencia computacional los mejores esquemas iterativos son MSD5A1 y MSD5S para sistemas pequeños, cuando el tamaño del sistema aumenta el método MSD5A1 nuevamente es el mejor y los métodos propuestos MSD51 y MSD52, mejoran a los demás aunque la diferencia no es significativa.

#### 7.4. Pruebas numéricas

En esta sección ponemos a prueba los métodos desarrollados para significar su eficacia comparándolos con otros métodos ya conocidos. A continuación podemos observar la lista de sistemas de ecuaciones no lineales empleada en dichas comprobaciones numéricas, llevadas a cabo en Matlab R2010a, con aritmética de precisión variable de 2000 dígitos de mantisa y  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-500}$  ó  $\|f(x^{(k+1)})\| < 10^{-500}$  como criterio de parada.

$$\begin{aligned}
 F_1(x_1, x_2) &= (\exp(x_1)\exp(x_2) + x_1\cos(x_2), x_1 + x_2 - 1), \quad \xi \approx (3.47063096, -2, 47063096)^T. \\
 F_2(x_1, x_2) &= (\ln(x_1^2) - 2\ln(\cos(x_2)), x_1\tan\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + x_2\right) - \sqrt{2}), \quad \xi \approx 0.9548041416, 6.5849814845)^T. \\
 F_3(x_1, x_2) &= (x_1 + \exp(x_2) - \cos(x_2), 3x_1 - x_2 - \sin(x_2)), \quad \xi = (0, 0)^T. \\
 F_4(x_1, x_2, x_3) &= (\cos(x_2) - \sin(x_1), x_3^{x_1} - \frac{1}{x_2}, \exp(x_1) - x_3^2), \quad \xi \approx (0.909570, 0.661227, 1.575834)^T. \\
 F_5(u, v, w, t) &= (vw + t(v + w), uv + t(u + w), uv + t(u + v), uv + uw + vw - 1), \\
 \xi &\approx (0.577350, 0.577350, 0.577350, -0.284675)^T.
 \end{aligned}$$

Hemos confeccionado cuatro tablas comparativas en las que los métodos iterativos se agrupan según el orden de convergencia, en la Tablas 7.1 y 7.2 podemos observar el comportamiento de los métodos de orden 4 y en las Tablas 7.3 y 7.4, de los esquemas de orden 5. Realizamos las pruebas numéricas para cada uno de los sistemas de ecuaciones no lineales seleccionados, tanto para los métodos propuestos MSD41, MSD42, MSD51 y MSD52, como para los métodos consolidados MSD4S, MSD4A, MSD4J, MSD5A1, MSD5A2, MSD5M, y MSD5S, descritos en las expresiones (7.3), (7.4), (7.2), (7.8), (7.7), (7.5) y (7.6), respectivamente. Las columnas de las tablas corresponden de izquierda a derecha a: el sistema de ecuaciones no lineales a resolver, los métodos iterativos empleados, las soluciones o raíces encontradas, el valor absoluto de la diferencia entre las dos últimas iteraciones (componente a componente),  $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|$ , el valor absoluto de cada función coordenada evaluada en la última iteración,  $|F(x^{(k+1)})_i|$ , el número de iteraciones empleadas en el proceso y orden de convergencia computacional aproximado, ACOG.

	Métodos	$\xi$	$ x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} $	$ F(x^{(k+1)})_i $	iter	$\rho$	
$F_1$ $x_0 = (3, -2)$	MSD41	3.470631	2.7 e-1012	2.7 e-12	6	4.0000	
		-2.470631	2.7 e-1012	0			
	MSD42	3.470631	1.1 e-993	2.7 e-12	6	4.0000	
		-2.470631	1.1 e-993	0			
	MSD4S	3.470631	1.0 e-1006	2.7 e-12	6	4.0000	
		-2.470631	1.0 e-1006	0			
	MSD4A	3.470631	1.3 e-1605	2.7 e-12	6	4.0000	
		-2.470631	1.3 e-1605	0			
	MSD4J	3.470631	2.0 e-1015	2.7 e-12	6	4.0000	
		-2.470631	2.0 e-1015	0			
	$F_2$ $x_0 = (2, 6)$	MSD41	0.954804	4.0 e-1691	1.7 e-2009	7	3.9192
			6.584981	4.6 e-1691	1.8 e-11		
MSD42		0.954804	2.1 e-1115	2.9 e-2008	7	3.9821	
		6.584981	1.3 e-1114	1.8 e-11			
MSD4S		0.954804	3.8 e-1427	6.1 e-2008	7	3.9601	
		6.584981	5.2 e-1427	1.8 e-11			
MSD4A		0.954804	7.7 e-589	1.7 e-2009	6	4.0069	
		6.584981	1.5 e-589	1.8 e-11			
MSD4J		0.954804	5.6 e-612	7.7 e-612	6	4.0266	
		6.584981	6.6 e-612	1.8 e-11			
$F_3$ $x_0 = (0.5, 0.5)$		MSD41	0.000000	8.3 e-153	2.2 e-608	5	4.0000
			0.000000	1.5 e-152	5.3 e-609		
	MSD42	0.000000	1.1 e-117	1.4 e-1868	5	3.9999	
		0.000000	1.7 e-117	8.5 e-1870			
	MSD4S	0.000000	7.1 e-139	1.5 e-552	5	4.0000	
		0.000000	1.2 e-138	2.0 e-553			
	MSD4A	0.000000	1.2 e-191	3.7 e-764	5	4.0000	
		0.000000	1.8 e-191	1.2 e-1146			
	MSS4J	0.000000	1.4 e-662	4.5 e-662	6	4.0000	
		0.000000	3.0 e-662	1.7 e-662			

Tabla 7.1: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre los sistemas de ecuaciones  $F_1$  a  $F_3$

Al observar las Tablas 7.1 y 7.2, los resultados numéricos del valor absoluto de la diferencia de las dos últimas iteraciones tenemos que el método MSS4A, es el de mejores resultados en  $F_1$  y  $F_3$ , mientras que en  $F_2$ ,  $F_4$  y  $F_5$  el mejor resultado es de MSD4J y en  $F_5$  el de mejores resultados es MSD42. El valor absoluto de la función evaluada en la última iteración tiene mejores resultados en  $F_2$  y  $F_4$ , correspondientes a los métodos MSD4A y MSD41, siendo el método MSD42 el de mejores resultados en  $F_3$  y  $F_5$ ; para  $F_1$  los resultados son los mismos para todos los métodos.

El número de iteraciones es el mismo para  $F_1$  y  $F_2$  en todos los métodos comparados, no siendo así para las demás funciones, pues el método MSD4J tiene una iteración más en  $F_3$  y dos iteraciones más en  $F_5$  con respecto a otros métodos; sin embargo MSD4A tiene una iteración menos que los demás en  $F_4$ .

Con relación al orden de convergencia computacional aproximado, se manifiestan de manera similar. Consideramos que en general todos los métodos son competitivos, pues en los resultados obtenidos para cada uno de los sistemas de ecuaciones no lineales utilizados, no hay un método que siempre se comporte mejor o peor.

En las Tablas 7.3 y 7.4 se observa que, en cuanto al valor absoluto de la diferencia de las dos últimas

	Métodos	$\xi$	$ x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} $	$ F(x^{(k+1)})_i $	iter	$\rho$
$F_4$ $x_0 = (0.8, 0.5, 1.4)$	MSD41	0.909569	1.0 e-466	7.4 e-1867	6	3.9937
		0.661227	1.0 e-466	1.1 e-1863		
		1.575834	6.0 e-467	6.5 e-1864		
	MSD42	0.909569	2.4 e-297	1.8 e-1190	6	3.9996
		0.661227	2.4 e-297	1.8 e-1185		
		1.575834	1.6 e-297	6.9 e-1186		
	MSD4S	0.909569	1.2 e-382	3.8 e-1537	6	4.0013
		0.661227	1.2 e-382	4.2 e-1527		
		1.575834	7.5 e-382	1.9 e-1527		
	MSD4A	0.909569	2.8 e-176	1.0 e-704	5	4.0045
		0.661227	2.9 e-176	9.2 e-702		
		1.575834	1.9 e-176	3.0 e-702		
	MSD4J	0.909569	2.1 e-742	4.5 e-713	6	3.9870
		0.661227	2.8 e-742	6.5 e-742		
		1.575834	3.5 e-743	4.2 e-742		
$F_5$ $x_0 = (1, 0.9, 1.1, 2)$	MSD41	0.577350	2.3 e-193	3.5 e-771	6	3.9991
		0.577350	3.2 e-193	4.2 e-770		
		0.577350	8.0 e-194	9.8 e-771		
	MSD42	-0.288675	2.6 e-194	4.8 e-770	6	4.0417
		0.577350	3.8 e-488	1.7 e-1947		
		0.577350	1.6 e-487	1.0 e-1948		
	MSD4S	0.577350	7.7 e-488	3.4 e-1948	6	3.9556
		-0.288675	8.8 e-489	2.3 e-1947		
		0.577350	7.4 e-172	1.1 e-683		
	MSD4A	0.577350	7.2 e-172	1.1 e-683	6	4.0002
		0.577350	2.2 e-171	1.7 e-684		
		-0.288675	1.4 e-172	2.3 e-683		
	MSD4J	0.577350	3.2 e-290	1.5 e-1157	6	4.0002
		0.577350	3.0 e-290	1.4 e-1157		
		0.577350	4.3 e-290	4.8 e-1158		
		-0.288675	3.0 e-291	2.5 e-1157		
		0.577350	4.0 e-2008	1.3 e-2008		
		0.577350	1.3 e-2008	0		
0.577350	1.3 e-2008	0	8	4.0018		
-0.288675	6.7 e-2009	6.5 e-2008				

Tabla 7.2: Resultados obtenidos por los métodos de orden 4 sobre los sistemas de ecuaciones  $F_4$  a  $F_5$

iteraciones, el método MSD5A1 tiene mejores resultados que los demás en  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $F_5$ ; mientras que el de mejores resultados en  $F_3$  y  $F_4$  es el método MSD52. En cuanto al valor absoluto de la función evaluada en la última iteración, tenemos que los resultados sobre  $F_1$  son iguales para todos los métodos; los métodos MSD5A1 y MSD5S sobre  $F_2$  tienen idénticos resultados y mejores que los otros métodos. Aunque en general MSD5A1 tiene resultados superiores a los demás métodos, en  $F_3$  y  $F_4$  los mejores resultados los obtiene MSD52.

Cuando analizamos el número de iteraciones en  $F_1$  el método MSD5S tiene una iteración más que los demás métodos, igual pasa tanto en  $F_3$  como en  $F_5$  donde el método MSD5M tiene una iteración más que los otros, en  $F_2$  sucede que MSD5A2 y MSD5M tienen dos iteraciones más que los otros métodos, en  $F_4$  los métodos MSD5A1 y MSD5S tienen cinco iteraciones, mientras que MSD51, MSD52, y MSD5A2 tienen seis iteraciones y MSD5M tiene 7 iteraciones. El orden de convergencia

	Métodos	$\xi$	$ x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} $	$\ F(x^{(k+1)})_i\ $	iter	$\rho$	
$F_1$ $x_0 = (3, -2)$	MSD51	3.470631	1.4 e-850	2.7 e-12	5	5.0000	
		-2.470631	1.4 e-850	0			
	MSD52	3.470631	1.6 e-807	2.7 e-12	5	5.0000	
		-2.470631	1.6 e-807	0			
	MSD5A1	3.470631	1.2 e-871	2.7 e-12	5	5.0000	
		-2.470631	1.2 e-871	0			
	MSD5A2	3.470631	1.7 e-729	2.7 e-12	5	5.0000	
		-2.470631	1.7 e-729	0			
	MSD5M	3.470631	2.6 e-805	2.7 e-12	5	5.0000	
		-2.470631	2.6 e-805	0			
	MSD5S	3.470631	4.1 e-2002	2.7 e-12	6	4.9999	
		-2.470631	4.1 e-2002	0			
	$F_2$ $x_0 = (2, 6)$	MSD51	0.954804	5.2 e-1386	1.7 e-2009	7	-
			6.684981	6.7 e-1386	1.8 e-11		
MSD52		0.954804	2.5 e-1649	2.5 e-2008	7	-	
		6.684981	5.4 e-1650	1.8 e-11			
MSD5A1		0.954804	2.3 e-999	5.6 e-2008	6	5.0049	
		6.684981	1.9 e-998	1.8 e-11			
MSD5A2		0.954804	7.1 e-1140	3.0 e-2008	7	-	
		6.684981	5.7 e-1140	1.9 e-11			
MSD5M		0.954804	1.2 e-1001	2.0 e-1001	7	-	
		6.684981	7.3 e-1002	1.8 e-11			
MSD5S		0.954804	2.9 e-813	5.6 e-2008	6	4.9994	
		6.684981	4.7 e-813	1.8 e-11			
$F_3$ $x_0 = (0.5, 0.5)$		MSD51	0.000000	3.7 e-262	1.8 e-1306	5	5.0000
			0.000000	5.7 e-262	5.3 e-1308		
	MSD52	0.000000	1.5 e-357	7.1 e-1784	5	4.9970	
		0.000000	2.9 e-357	1.8 e-1784			
	MSD5A1	0.000000	3.2 e-320	2.1 e-1597	5	5.0000	
		0.000000	4.8 e-320	7.2 e-2237			
	MSD5A2	0.000000	1.5 e-256	1.4 e-1278	5	5.0000	
		0.000000	2.1 e-256	6.3 e-1279			
	MSD5M	0.000000	4.3 e-1880	1.3 e-1879	6	4.9978	
		0.000000	8.8 e-1880	4.6 e-1880			
	MSD5S	0.000000	8.9 e-323	5.1 e-1610	5	5.0000	
		0.000000	1.5 e-322	6.0 e-1611			

Tabla 7.3: Resultados obtenidos por los métodos de orden 5 sobre los sistemas de ecuaciones  $F_1$  a  $F_3$

computacional aproximado se comporta de manera similar en  $F_1$  y  $F_3$ , mientras que en  $F_2$ ,  $F_4$  y  $F_5$ , sólo son estables los métodos MSD5A1 y MSD5S.

En general, al observar las Tablas 7.1 a 7.4, notamos que el orden de convergencia computacional aproximado confirma los resultados teóricos. Los resultados en términos de precisión en la aproximación de las raíces y número de iteraciones se mantienen en el rango de lo esperado para los órdenes de convergencia de los métodos, como se deduce de la comparación con los métodos consolidados. Consideramos que, en general, los métodos propuestos son competitivos sobre cada uno de los sistemas de ecuaciones no lineales utilizados.

	Métodos	$\xi$	$ x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} $	$\ F(x^{(k+1)})_i\ $	iter	$\rho$
$F_4$ $x_0 = (0.8, 0.5, 1.4)$	MSD51	0.909569	2.2 e-429	2.3 e-1711	6	-
		0.661227	1.1 e-428	1.2 e-1710		
		1.575834	1.1 e-428	1.6 e-1712		
	MSD52	0.909569	8.7 e-497	1.1 e-1985	6	-
		0.661227	7.0 e-497	3.8 e-1985		
		1.575834	7.0 e-497	5.4 e-1985		
	MSD5A1	0.909569	5.3 e-234	1.0 e-1169	5	4.9995
		0.661227	5.3 e-234	5.3 e-1165		
		1.575834	3.6 e-234	1.7 e-1165		
	MSD5A2	0.909569	7.6 e-347	2.6 e-1385	6	-
		0.661227	5.9 e-347	1.5 e-1384		
		1.575834	6.2 e-347	1.1 e-1384		
	MSD5M	0.909569	1.7 e-1534	8.1 e-1534	7	-
		0.661227	1.2 e-1533	3.7 e-1533		
		1.575834	1.1 e-1533	3.0 e-1533		
MSD5S	0.909569	2.3 e-211	2.9 e-1060	5	4.9989	
	0.661227	2.3 e-211	4.8 e-1052			
	1.575834	1.5 e-211	2.1 e-1052			
$F_5$ $x_0 = (1, 0.9, 1.1, 2)$	MSD51	0.577350	1.3 e-184	1.2 e-735	6	-
		0.577350	1.2 e-184	8.0 e-736		
		0.577350	2.6 e-184	2.3 e-736		
	MSD52	-0.288675	3.9 e-231	1.2 e-735	6	-
		0.577350	1.8 e-268	3.3 e-1072		
		0.577350	6.4 e-268	1.6 e-1071		
	MSD5A1	0.577350	1.2 e-268	1.4 e-1071	6	4.9929
		-0.288675	3.0 e-337	3.2 e-1072		
		0.577350	7.4 e-487	1.3 e-2008		
	MSD5A2	0.577350	2.2 e-485	6.7 e-2009	6	-
		0.577350	2.4 e-485	0		
		-0.288675	6.1 e-487	1.4 e-2008		
	MSD5M	0.577350	1.0 e-145	1.4 e-580	6	-
		0.577350	3.6 e-146	6.6 e-580		
		0.577350	6.5 e-146	5.8 e-580		
MSD5S	-0.288675	1.0 e-183	1.3 e-580	7	-	
	0.577350	5.6 e-1166	1.6 e-1166			
	0.577350	9.5 e-1166	2.6 e-1166			
MSD5S	0.577350	3.7 e-1166	1.1 e-1166	6	4.9959	
	-0.288675	3.2 e-1453	2.5 e-1167			
	0.577350	9.6 e-457	1.3 e-2008			
	0.577350	1.2 e-456	1.6 e-2008			
	0.577350	3.9 e-458	0			
	-0.288675	2.7 e-458	0			

Tabla 7.4: Resultados obtenidos por los métodos de orden 5 sobre los sistemas de ecuaciones  $F_4$  a  $F_5$

### 7.5. Extensión a sistemas de métodos iterativos unidimensionales sin traslación directa a sistemas

Algunos de los métodos introducidos en los capítulos anteriores son directamente extensibles a sistemas de ecuaciones no lineales, otros (en las secciones anteriores) han sido específicamente diseñados

para ellos. Una particularidad a tener en cuenta en este diseño es que, mientras en un método iterativo unidimensional las evaluaciones funcionales de la función no lineal y sus derivadas tienen el mismo coste computacional, no ocurre lo mismo en el caso multidimensional. Es mucho más eficiente un esquema que evalúe una matriz Jacobiana y dos funciones, que dos matrices Jacobianas y una evaluación de la función. Por otra parte, muy recientemente se está trabajando en la extensión a sistemas de esquemas unidimensionales que, a priori, no tienen extensión directa a sistemas (véanse [67] y [2]).

La proliferación de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales ha sido espectacular en los últimos años. Algunos de estos métodos se pueden trasladar de forma sencilla al contexto de sistemas no lineales, pero otros, al menos aparentemente, no hay forma de extenderlos. En esta sección, pretendemos demostrar que es posible esta traslación, al menos de gran parte de los métodos multipunto conocidos para ecuaciones, haciendo uso de herramientas como el operador diferencias divididas. Entendemos que esta traslación sólo tiene interés si se conserva el orden de convergencia, por lo que prestaremos atención a las condiciones bajo las cuales está asegurado mantener dicho orden.

### 7.5.1. Diseño de la técnica y análisis de la convergencia

En esta sección pretendemos dar una generalización a varias variables de la familia de métodos iterativos que mencionaremos más adelante y que ha sido propuesta en el Capítulo 3 de esta memoria, para que conserven el orden de convergencia local. Para conseguir este objetivo, vamos a usar el operador de diferencia dividida.

Consideremos una función suficientemente diferenciable  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en el conjunto convexo  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  y sea  $\xi$  una solución del sistema no lineal  $F(x) = 0$ . El operador diferencia dividida de  $F$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , expresado por  $[\cdot, \cdot; F] : \Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  (ver [67]), y que está definido mediante  $[x + h, x; F] = \int_0^1 F'(x + th) dt, \forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  fue introducido en el Capítulo 2.

Para extender un esquema iterativo al caso multidimensional, es necesario reescribir la expresión iterativa de tal modo que ninguna evaluación funcional de la función no lineal permanezca en el denominador. Para conseguir este objetivo, consideremos el primer paso del proceso iterativo  $y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \xi$  que puede ser reescrito como  $f(x_k) = (x_k - y_k) f'(x_k)$ . Usando esto, podemos volver a reescribir el cociente  $\frac{f(y_k)}{f(x_k)}$  como

$$\frac{f(y_k)}{f(x_k)} = 1 - \frac{f[x_k, y_k]}{f'(x_k)}.$$

Observando el método iterativo (3.13) con  $\alpha = 1$  para resolver ecuaciones no lineales, nos preguntamos si es posible configurarlo de tal manera que se pueda utilizar para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Esto no es posible de manera directa pues necesitaríamos que la variable de la función peso utilizada en dicho método tuviese derivadas en el denominador, lo cual no es así.

Ahora bien, el primer paso en (3.13) es Newton para sistemas y en el segundo paso utilizamos la variable de la función peso expresada de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \eta^{(k)} &= \left[ (b_1 + b_2)I - b_2 [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]^{-1} \left[ (a_1 + a_2)I - a_2 [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right] \\ &= M^{-1}N. \end{aligned}$$

de este modo, el uso del operador diferencia dividida nos facilita la extensión multivariable de nuestra propuesta,

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - G(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.49)$$

donde  $\eta^{(k)} = M^{-1}N$ ,  $M^{-1} = [(b_1 + b_2)I - b_2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F]]^{-1}$ ,  $N = (a_1 + a_2)I - a_2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F]$ , siendo  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son parámetros. A este método lo denotaremos por *MS3*.

Veamos en el siguiente resultado la demostración del orden de convergencia de los métodos descritos por la expresión (7.49). Bajo determinadas condiciones de  $G(\eta^{(k)})$ , y de los parámetros involucrados, podemos desarrollar nuevos métodos. Teniendo en cuenta que  $\eta^{(k)}$  tiende a  $c = \frac{a_1}{b_1}I$  cuando  $x^{(k)}$  tiende a  $\xi$ , desarrollamos  $G(\eta^{(k)})$  alrededor de  $c$  en series de Taylor.

**Teorema 7.5.1** *Sea  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suficientemente diferenciable en  $\Omega$  y  $\xi \in \Omega$  una solución del sistema de ecuaciones no lineales  $F(x) = 0$ . Supongamos que  $F'(x)$  es continua y no singular en  $\xi$ . Entonces, la sucesión  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  obtenida usando la expresión (7.49) converge a  $\xi$  con orden de convergencia cuatro si  $G(c) = I$ , siendo  $c = \frac{a_1}{b_1}I$ ,  $G_1 = \frac{2b_1^2}{a_2b_1 - a_1b_2}$ , donde  $a_1 \neq 0$ ,  $b_1 \neq 0$  y  $|G_2| < \infty$ . Además, la ecuación del error es*

$$e^{(k+1)} = \frac{1}{2b_1^4} [(2b_1^4 - 4b_1^3(3b_1 + b_2) + G''(c)(a_2b_1 - a_1b_2)^2)C_2^3 + 4b_1^4C_3C_2] e^{(k)4} + O(e^{(k)5})$$

donde  $C_j = (\frac{1}{j!})[F'(\xi)]^{-1}F^{(j)}(\xi)$ ,  $j = 2, 3, \dots$  y  $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$ .

**Demostración:** Utilizamos las expresiones (7.14) y (7.15), dadas en la Sección 7.2. Iniciamos desarrollando que

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = [I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2} + X_4e^{(k)3}][F'(\xi)]^{-1} + O(e^{(k)4}) \quad (7.50)$$

Usando (7.15) y (7.50) para determinar  $I = [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$

$$\begin{aligned} [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) &= [I + (2C_2 + X_2)e^{(k)} + (3C_3 + 2X_2C_2 + X_3)e^{(k)2} \\ &\quad + (4C_4 + 3X_2C_3 + 2X_3C_2 + X_4)e^{(k)3}] + O(e^{(k)4}), \end{aligned}$$

por lo que

$$X_2 = -2C_2, \quad X_3 = 4C_2^2 - 3C_3, \quad X_4 = -8C_2^3 + 6C_2C_3 + 6C_3C_2 - 4C_4,$$

Usamos (7.14) y (7.50)

$$\begin{aligned} [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) &= [I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2} + X_4e^{(k)3}][F'(\xi)]^{-1}F'(\xi)[e^{(k)} + C_2e^{(k)2} \\ &\quad + C_3e^{(k)3} + C_4e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}) \\ &= [e^{(k)} + A_2e^{(k)2} + A_3e^{(k)3} + A_4e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}), \end{aligned} \quad (7.51)$$

donde

$$A_2 = -C_2, \quad A_3 = 2(C_2^2 - C_3), \quad A_4 = -4C_2^3 + 4C_2C_3 + 3C_3C_2 - 3C_4,$$

Para el primer paso de (7.49), utilizamos (7.51)

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \\ &= \xi + e^{(k)} - e^{(k)} - [A_2e^{(k)2} + A_3e^{(k)3} + A_4e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}) \\ &= \xi - [A_2e^{(k)2} + A_3e^{(k)3} + A_4e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Así, podemos utilizar (7.52) para obtener el desarrollo en serie de Taylor de  $F(y^{(k)})$  en torno a  $\xi$

$$F(y^{(k)}) = F'(\xi)[(y^{(k)} - \xi) + C_2(y^{(k)} - \xi)^2] + O(e^{(k)5}), \quad (7.53)$$

siendo

$$\begin{aligned} (y^{(k)} - \xi) &= A_2e^{(k)2} - A_3e^{(k)3} - A_4e^{(k)4} + O(e^{(k)5}), \\ (y^{(k)} - \xi)^2 &= C_2A_2^2e^{(k)4} + O(e^{(k)5}), \end{aligned} \quad (7.54)$$

con lo que obtenemos  $F(y^{(k)})$

$$\begin{aligned} F(y^{(k)}) &= F'(\xi)[-A_2e^{(k)2} - A_3e^{(k)3} - A_4e^{(k)4} + C_2A_2^2e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}) \\ &= F'(\xi)[-A_2e^{(k)2} - A_3e^{(k)3} + A_5e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}), \end{aligned} \quad (7.55)$$

donde  $A_5 = -A_4 + C_2A_2^2 = 5C_2^3 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 3C_4$ .

A continuación calculamos el desarrollo en serie de Taylor del operador diferencia dividida  $[x^{(k)}, y^{(k)}; F]$  en torno a  $\xi$

$$\begin{aligned} [x^{(k)}, y^{(k)}; F] &= F'(\xi)[I + 2C_2e^{(k)} + 3C_3e^{(k)2} + 4C_4e^{(k)3} + 5C_5e^{(k)4} \\ &\quad + \frac{1}{2}[2C_2 + 6C_3e^{(k)} + 12C_4e^{(k)2} + 20C_5e^{(k)3}] \left( [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{6}[6C_3 + 24C_4e^{(k)} + 60C_5e^{(k)2}] \left( [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \right)^2]. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Ahora sustituimos (7.51) en (7.56)

$$\begin{aligned} [x^{(k)}, y^{(k)}; F] &= F'(\xi)[I + 2C_2e^{(k)} + 3C_3e^{(k)2} + 4C_4e^{(k)3} + 5C_5e^{(k)4} \\ &\quad + C_2[-e^{(k)} - A_2e^{(k)2} - A_3e^{(k)3} - A_4e^{(k)4}] + 3C_3[-e^{(k)} - A_2e^{(k)2} \\ &\quad - A_3e^{(k)3} + A_4e^{(k)4}]e^{(k)} + 6C_4[-e^{(k)} - A_2e^{(k)2} - A_3e^{(k)3} - A_4e^{(k)4}]e^{(k)2} \\ &\quad + 10C_5[-e^{(k)} - A_2e^{(k)2} - A_3e^{(k)3} - A_4e^{(k)4}]e^{(k)3} + C_3[e^{(k)2} + B_3e^{(k)3} + B_4e^{(k)4}] \\ &\quad + 4C_4[e^{(k)2} + B_3e^{(k)3} + B_4e^{(k)4}]e^{(k)} + 10C_5[e^{(k)2} + B_3e^{(k)3} + B_4e^{(k)4}]e^{(k)2}], \end{aligned}$$

donde  $([F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}))^2 = e^{(k)2} + B_3e^{(k)3} + B_4e^{(k)4}$ , siendo  $B_3 = 2A_2$  y  $B_4 = A_2^2 + 3A_3$ .

Denotamos

$$P = [x^{(k)}, y^{(k)}; F] = F'(\xi)[I + P_1e^{(k)} + P_2e^{(k)2} + P_3e^{(k)3} + P_4e^{(k)4}], \quad (7.57)$$

siendo

$$\begin{aligned} P_1 &= C_2, \\ P_2 &= C_2^2 + C_3, \\ P_3 &= -2C_2^3 + 2C_2C_3 + C_3C_2 + 2C_4, \\ P_4 &= 4C_2^4 - 4C_2^2C_3 - 3C_2C_3C_2 + 3C_2C_4 + 2C_3^2 - C_3C_2^2 - 2C_4C_2 + 5C_5. \end{aligned}$$

Calculemos  $T = [F'(x^{(k)})]^{-1}P$ , entonces

$$T = I + T_1e^{(k)} + T_2e^{(k)2} + T_3e^{(k)3} + T_4e^{(k)4}, \quad (7.58)$$

con  $T_1 = P_1 + X_2$  y  $T_m = P_m + \sum_{j=1}^m X_j P_{m-j} + X_{m+1}$ ,  $m = 2, 3, \dots$

Utilizando (7.58)

$$\begin{aligned} M &= (b_1 + b_2)I + b_2T \\ &= b_1I + M_1e^{(k)} + M_2e^{(k)2} + M_3e^{(k)3} + M_4e^{(k)4}, \end{aligned} \quad (7.59)$$

donde  $M_j = -b_2T_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Si forzamos a que  $M^{-1}$  tenga la expresión

$$M^{-1} = \frac{I}{b_1} + Y_2e^{(k)} + Y_3e^{(k)2} + Y_4e^{(k)3} + Y_5e^{(k)4}, \quad (7.60)$$

podemos determinar los coeficientes  $Y_j$  de manera que

$$M^{-1}M = \left[ \frac{I}{b_1} + Y_2e^{(k)} + Y_3e^{(k)2} + Y_4e^{(k)3} + Y_5e^{(k)4} \right] \left[ b_1I + M_1e^{(k)} + M_2e^{(k)2} + M_3e^{(k)3} + M_4e^{(k)4} \right] = I. \quad (7.61)$$

Así  $Y_2 = -\frac{1}{b_1^2}M_1$  e  $Y_s = -\frac{1}{b_1^s}(M_{s-1} + \sum_{j=2}^s Y_j M_{s-j})$ ,  $s = 3, 4, \dots$

Si utilizamos (7.58)

$$\begin{aligned} N &= (a_1 + a_2)I + a_2T \\ &= a_1I + N_1e^{(k)} + N_2e^{(k)2} + N_3e^{(k)3} + N_4e^{(k)4}, \end{aligned} \quad (7.62)$$

con  $N_j = -a_2T_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Sustituimos (7.60) y (7.58) en  $\eta^{(k)} = M^{-1}N$ ,

$$\eta^{(k)} = \frac{a_1}{b_1}I + L_1e^{(k)} + L_2e^{(k)2} + L_3e^{(k)3} + L_4e^{(k)4} \quad (7.63)$$

con  $L_1 = \frac{1}{b_1}N_1 + a_1Y_2$  y  $L_t = \frac{1}{b_1}N_t + \sum_{j=1}^t Y_{j+1}N_{t-j} + a_1Y_{t+1}$ ,  $t = 2, 3, \dots$

A continuación aproximamos  $G(\eta^{(k)})$  en torno a  $c$  por un polinomio de Taylor

$$G(\eta^{(k)}) \approx G(c) + G_1(\eta^{(k)} - c) + \frac{1}{2}G_2(\eta^{(k)} - c)^2 \quad (7.64)$$

$$= G(c) + S_1e^{(k)} + S_1e^{(k)2} + S_1e^{(k)3} + S_1e^{(k)4}, \quad (7.65)$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= G_1L_1, & S_2 &= G_1L_2 + \frac{1}{2}G_2L_1^2, \\ S_3 &= G_1L_3 + \frac{1}{2}G_2(L_1L_2 + L_2L_1), & S_4 &= G_1L_4 + \frac{1}{2}G_2(L_1L_3 + L_2^2 + L_3L_1). \end{aligned}$$

Si usamos (7.51) y (7.55) obtenemos que  $R = [F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)})$  es

$$\begin{aligned} R &= [I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2} + X_4e^{(k)3}][F'(\xi)]^{-1}F'(\xi)[-A_2e^{(k)2} - A_3e^{(k)3} \\ &\quad + A_5e^{(k)4}] + O(e^{(k)5}) \\ &= R_2e^{(k)2} + R_3e^{(k)3} + R_4e^{(k)4}, \end{aligned} \quad (7.66)$$

donde

$$R_2 = -A_2, \quad R_3 = -(A_3 + X_2A_2), \quad \text{y} \quad R_4 = A_5 - X_2A_3 - X_3A_2.$$

Utilizando (7.64) y (7.66), podemos calcular  $Q = G(\eta^{(k)})R$ ,

$$\begin{aligned} Q &= [G(c) + S_1e^{(k)} + S_2e^{(k)^2} + S_3e^{(k)^3} + S_4e^{(k)^4}][R_2e^{(k)^2} + R_3e^{(k)^3} + R_4e^{(k)^4}] \\ &= Q_2e^{(k)^2} + Q_3e^{(k)^3} + Q_4e^{(k)^4}, \end{aligned} \quad (7.67)$$

siendo

$$Q_2 = G(c)R_2, \quad Q_3 = G(c)R_3 + S_1R_2, \quad \text{y} \quad Q_4 = G(c)R_4 + S_1R_3 + S_2R_2.$$

Finalmente, la ecuación del error es

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= y^{(k)} - Q \\ &= \xi - [A_2e^{(k)^2} - A_3e^{(k)^3} + A_4e^{(k)^4}] - [Q_2e^{(k)^2} + Q_3e^{(k)^3} + Q_4e^{(k)^4}] \\ &= \xi - [(A_2 + Q_2)e^{(k)^2} + (A_3 + Q_3)e^{(k)^3} + (A_4 + Q_4)e^{(k)^4}] + O(e^{(k)^5}). \end{aligned} \quad (7.68)$$

Ahora, para conseguir  $A_2 + Q_2 = 0$  desarrollamos

$$A_2 + Q_2 = -C_2 + G(c)C_2, \quad (7.69)$$

con lo que si  $G(c) = 1$  en (7.69), obtenemos que el orden del método es al menos 3.

A continuación tratamos de averiguar bajo qué condiciones se verifica  $A_3 + Q_3 = 0$ ,

$$\begin{aligned} A_3 + Q_3 &= 2C_2^2 - 2C_3 + 2C_3 - 4C_2^2 + G_1 \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2} C_2^2 \\ &= \left[ -2I + G_1 \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2} \right] C_2^2. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Así, sustituyendo  $G_1 = \frac{2b_1^2}{a_2b_1 - a_1b_2}$  en (7.70) se obtiene orden cuatro y una vez simplificada la expresión  $A_4 + Q_4$  podemos determinar la ecuación del error

$$e^{(k+1)} = \frac{1}{2b_1^4} [(2b_1^4I - 4b_1^3(3b_1 + b_2)I + G_2(a_2b_1 - a_1b_2)^2)C_2^3 + 4b_1^4C_3C_2]e^{(k)^4} + O(e^{(k)^5}),$$

lo que concluye la demostración del Teorema.  $\square$

A continuación, presentamos la expresión general de la familia de métodos (7.49), que cumple las condiciones exigidas por el Teorema 7.5.1

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - G(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \end{aligned}$$

siendo

$$G(\eta^{(k)}) = I + \frac{2b_1^2}{a_2b_1 - a_1b_2} \left( \eta^{(k)} - \frac{a_1}{b_1}I \right),$$

donde

$$\eta^{(k)} = M^{-1}N = \left[ (b_1 + b_2)I - b_2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]^{-1} \left[ (a_1 + a_2)I - a_2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right].$$

Hemos desarrollado algunos esquemas iterativos particulares para distintas funciones peso y valores de los parámetros.

- El primer esquema iterativo, denotado por MSS43, tiene como valores  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = -\frac{1}{2}$  y  $b_2 = 1$ . La expresión iterativa resultante es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - G(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.71)$$

siendo  $G(\eta^{(k)}) = 2I + \eta^{(k)}$  y donde

$$\eta^{(k)} = M^{-1}N = \left[ \frac{1}{2}I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[x, y; F] \right]^{-1} \frac{1}{2}I.$$

- Si fijamos los parámetros  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = 1$  y  $b_2 = 2$ , obtenemos un segundo esquema, que denotaremos por MSS44, cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - G(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.72)$$

siendo  $G(\eta^{(k)}) = 2I - \eta^{(k)}$ , donde

$$\eta^{(k)} = M^{-1}N = \left[ 3I - 2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x, y; F] \right]^{-1} I.$$

- El tercer esquema, denotado por MSS45, lo obtenemos al fijar los parámetros  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = 1$  y  $b_2 = -2$ , en el Teorema 7.5.1. Entonces, se obtiene la expresión iterativa

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - G(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.73)$$

siendo  $G(\eta^{(k)}) = \eta^{(k)}$ , donde

$$\eta^{(k)} = M^{-1}N = \left[ -I + 2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x, y; F] \right]^{-1} I.$$

- El último esquema iterativo es el denotado por MSS46, obtenido al fijar los parámetros  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$  y  $b_2 = 0$ , en el Teorema 7.5.1. Entonces,

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - G(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (7.74)$$

siendo  $G(\eta^{(k)}) = \eta^{(k)}$ , donde

$$\eta^{(k)} = M^{-1}N = I \left[ 3I - 2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x, y; F] \right].$$

En la Figura 7.3, podemos observar los índices de eficiencia, tanto clásico como computacional, en función del tamaño del sistema a resolver. Notemos que, bajo el punto de vista de la eficiencia de Ostrowski, los métodos propuestos son igual de eficientes que los ya estudiados MSD4J y MSD4D, para sistemas pequeños. En términos de la eficiencia computacional MSS46 muestra los mejores resultados, con una amplia diferencia con respecto al resto de métodos.

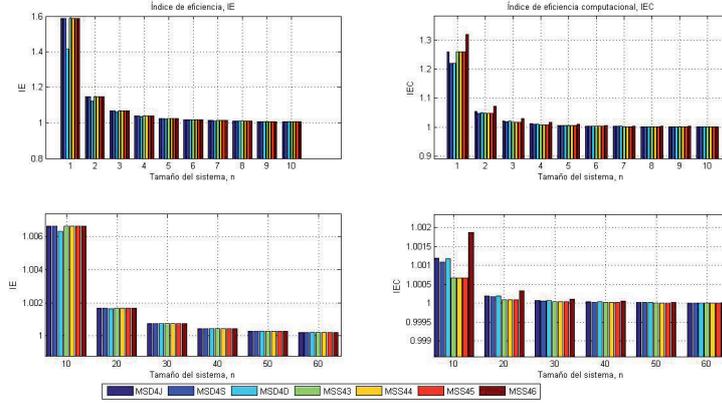


Figura 7.3: Índices de eficiencia

### 7.5.2. Pruebas numéricas

A continuación comprobaremos el comportamiento de los métodos diseñados en esta sección sobre las funciones  $F_1(x)$  a  $F_5(x)$ , utilizando dos operadores diferencia dividida de distintos órdenes que definimos a continuación.

#### Definición 7.5.1

$$[y, x; F]_{ij}^{(1)} = (F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_m) - F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)) / (y_j - x_j), 1 \leq i, j \leq m$$

Tomamos el modo siguiente de calcular el operador diferencia dividida,

#### Definición 7.5.2

$$[y, x; F]_{ij}^{(2)} = (F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_m) - F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, y_m) + (F_i(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_m) - F_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_m)) / (2(y_i - x_i)), 1 \leq i, j \leq m. \quad (7.75)$$

Obviamente, ambos operadores satisfacen la condición

$$[y, x; F](y - x) = F(y) - F(x),$$

pero además la segunda definición nos proporciona un operador simétrico, es decir,  $[y, x; F] = [x, y; F]$ . La ventaja que presenta la segunda definición es que conserva el orden de convergencia teórico del método, pero a costa de incrementar el número de evaluaciones funcionales.

En cada una de las tablas mostramos los resultados obtenidos empleando sendas diferencias divididas con la tolerancia  $10^{-25}$ , aritmética de precisión variable de 50 dígitos y  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-25}$  ó  $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-25}$  como criterio de parada.

Los sistemas de ecuaciones no lineales que utilizamos para analizar nuestros métodos son los mismos que se usaron en la Sección 7.4. Las comprobaciones numéricas, son llevadas a cabo en Matlab R2010a.

La Tabla 7.5 recoge los resultados de los métodos diseñados sobre los sistemas test establecidas utilizando diferencias divididas de primer orden. Podemos observar que, por lo general, no conserva el orden de convergencia teórico. Sin embargo, cuando utilizamos la diferencia dividida simétrica, cuyos resultados podemos encontrar en la Tabla 7.6, el orden de convergencia computacional coincide con el orden teórico.

## 7.5. Extensión a sistemas de métodos iterativos unidimensionales sin traslación directa a sistemas

	Métodos	$\xi$	$ x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} $	$ F(x^{(k+1)})_i $	iter	$\rho$	
$F_1$ $x_0 = (3.1, -2)$	MSS43	3.470631	1.9 e-49	2.7 e-12	4	4.0004	
		-2.470631	1.9 e-49	0			
	MSS44	3.470631	8.1 e-53	2.7 e-12	4	4.0003	
		-2.470631	8.1 e-53	0			
	MSS45	3.470631	1.9 e-49	2.7 e-12	4	4.0004	
		-2.470631	1.9 e-49	0			
	MSS46	3.470631	7.9 e-51	2.7 e-12	4	4.0004	
		-2.470631	7.9 e-51	0			
	$F_2$ $x_0 = (1.8, 5.5)$	MSS43	0.954804	1.4 e-33	3.4 e-58	5	3.0055
			6.584981	4.9 e-33	1.3 e-57		
MSS44		0.954804	1.0 e-25	3.6 e-58	5	2.0089	
		6.584981	3.4 e-25	1.9 e-57			
MSS45		0.954804	1.4 e-33	3.3 e-58	5	3.0556	
		6.584981	4.9 e-33	1.3 e-57			
MSS46		0.954804	5.7 e-24	3.6 e-58	5	2.3010	
		6.584981	1.9 e-23	9.6 e-58			
$F_3$ $x_0 = (0.5, 0.5)$		MSS43	0.000000	3.1 e-42	9.0 e-60	4	3.9990
			0.000000	6.6 e-42	0		
	MSS44	0.000000	8.5 e-27	4.9 e-59	4	3.9732	
		0.000000	1.3 e-26	2.9 e-105			
	MSS45	0.000000	3.1 e-42	9.0 e-60	4	3.9990	
		0.000000	6.6 e-42	0			
	MSS46	0.000000	3.9 e-30	4.7 e-59	4	3.9825	
		0.000000	6.1 e-30	0			
	$F_4$ $x_0 = (0.8, 0.5, 1.4)$	MSS43	0.909569	1.9 e-24	0	4	2.0902
			0.661227	1.9 e-24	0		
1.575834			1.5 e-24	6.4 e-58			
MSS44		0.909569	8.9 e-16	0	4	2.9774	
		0.661227	8.9 e-16	1.9 e-46			
		1.575834	7.0 e-16	6.4 e-58			
MSS45		0.909569	1.9 e-24	0	4	2.0902	
		0.661227	1.9 e-24	0			
		1.575834	1.5 e-24	6.4 e-58			
MSS46		0.909569	5.9 e-18	0	4	2.9730	
		0.661227	5.9 e-18	5.6 e-53			
		1.575834	4.7 e-18	0			
$F_5$ $x_0 = (1, 0.9, 1.1, 2)$		MSS43	0.577350	5.8 e-22	0	6	2.6662
			0.577350	1.7 e-21	8.0 e-59		
	0.577350		5.4 e-22	8.0 e-59			
	-0.288675		8.8 e-23	1.6 e-58			
	MSS44	0.577350	3.5 e-43	8.0 e-59	6	2.9777	
		0.577350	8.3 e-43	0			
		0.577350	2.6 e-43	0			
		-0.288675	3.7 e-44	0			
	MSS45	0.577350	5.8 e-22	0	6	2.6662	
		0.577350	1.7 e-21	8.0 e-59			
		0.577350	5.4 e-22	8.0 e-59			
		-0.288675	8.8 e-23	1.6 e-58			
	MSS46	0.577350	5.2 e-49	1.6 e-58	6	2.9765	
		0.577350	1.2 e-48	0			
0.577350		3.9 e-49	1.6 e-58				
-0.288675		5.4 e-50	0				

Tabla 7.5: Métodos de orden 4 con diferencia dividida de primer orden

	Métodos	$\xi$	$ x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} $	$ F(x^{(k+1)})_i $	iter	$\rho$
$F_1$ $x_0 = (3.1, -2)$	MSS43	3.470631	3.3 e-56	2.7 e-12	4	3.9998
		-2.470631	3.3 e-56	0		
	MSS44	3.470631	2.9 e-53	2.7 e-12	4	3.9997
		-2.470631	2.9 e-53	0		
	MSS45	3.470631	3.3 e-56	2.7 e-12	4	3.9999
		-2.470631	3.3 e-56	0		
MSS46	3.470631	1.8 e-54	2.7 e-12	4	3.9998	
	-2.470631	1.8 e-54	0			
$F_2$ $x_0 = (1.8, 5.5)$	MSS43	0.954804	2.8 e-31	0	3	4.0067
		6.584981	5.8 e-31	9.6 e-58		
	MSS44	0.954804	1.1 e-28	0	6	4.0150
		6.584981	1.5 e-27	9.6 e-58		
	MSS45	0.954804	2.1 e-31	0	4	4.0067
		6.584981	5.8 e-31	9.6 e-58		
MSS46	0.954804	1.1 e-15	1.0 e-54	4	4.0440	
	6.584981	1.6 e-14	3.6 e-54			
$F_3$ $x_0 = (0.5, 0.5)$	MSS43	0.000000	3.1 e-42	9.0 e-60	4	3.9990
		0.000000	6.6 e-42	0		
	MSS44	0.000000	8.5 e-27	4.9 e-59	4	3.9732
		0.000000	1.3 e-26	2.9 e-105		
	MSS45	0.000000	3.1 e-42	9.0 e-60	4	3.9990
		0.000000	6.6 e-42	0		
MSS46	0.000000	3.9 e-30	4.7 e-59	4	3.9825	
	0.000000	6.1 e-30	2.5 e-116			
$F_4$ $x_0 = (0.8, 0.5, 1.4)$	MSS43	0.909569	2.9 e-49	0	4	4.0357
		0.661227	4.6 e-50	0		
		1.575834	4.5 e-49	6.4 e-58		
	MSS44	0.909569	1.4 e-17	1.6 e-58	4	3.3174
		0.661227	1.4 e-17	3.2 e-58		
		1.575834	9.9 e-18	6.4 e-58		
	MSS45	0.909569	3.0 e-49	0	4	4.0357
		0.661227	4.6 e-50	0		
		1.575834	4.5 e-49	6.4 e-58		
	MSS46	0.909569	5.9 e-20	0	4	3.7115
		0.661227	5.8 e-20	0		
		1.575834	3.9 e-20	6.4 e-58		
$F_5$ $x_0 = (1, 0.9, 1.1, 2)$	MSS43	0.577350	3.2 e-14	9.6 e-54	4	4.0099
		0.577350	3.5 e-14	1.9 e-54		
		0.577350	2.1 e-14	4.0 e-54		
	MSS44	-0.288675	2.7 e-15	1.2 e-53	5	4,2197
		0.577350	3.9 e-25	8.0 e-59		
		0.577350	1.4 e-25	1.6 e-59		
	MSS45	0.577350	1.2 e-25	8.0 e-59	4	4.0099
		-0.288675	2.5 e-26	0		
		0.577350	3.2 e-14	9.6 e-54		
	MSS46	0.577350	3.5 e-14	1.9 e-54	5	4.2355
		0.577350	2.1 e-14	4.0 e-54		
		-0.288675	2.7 e-15	1.2 e-54		
		0.577350	2.2 e-31	0	5	
		0.577350	6.2 e-32	0		
		0.577350	8.9 e-32	0		
		-0.288675	1.2 e-32	1.6 e-58		

Tabla 7.6: Métodos de orden 4 con diferencia dividida de segundo orden

## Capítulo 8

# Conclusiones y líneas futuras

La aportación principal de esta memoria es la utilización de la técnica de funciones peso, escalares o matriciales, para diseñar familias de métodos iterativos de alto orden para la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales. En el contexto de las ecuaciones no lineales, hemos construido métodos iterativos óptimos (con derivadas o de tipo Steffensen) de ordenes cuatro, ocho y dieciséis.

Las funciones peso utilizadas y las técnicas de demostración que se han seguido en esta memoria, nos permiten conjeturar que las familias de métodos diseñadas se pueden generalizar para alcanzar cualquier orden de convergencia óptimo.

El análisis de convergencia ha sido, en todos los casos, local, si bien es conocido que existen otros tipos de convergencia, global y semilocal. Por otra parte, tanto  $\mathbb{R}$  como  $\mathbb{R}^n$  son casos particulares de espacios de Banach. Por ello, una de nuestras líneas futuras de investigación tendrá una doble vertiente: por un lado, extender los métodos diseñados a cualquier espacio de Banach y por otro, completar el análisis de la convergencia desde los puntos de vista global y semilocal.

Generalmente, los métodos diseñados requieren, para alcanzar el orden previsto, que la raíz buscada sea simple. Puede ser interesante analizar cómo se comportan los métodos construidos cuando la solución es múltiple y si es posible diseñar métodos óptimos para aproximar este tipo de raíces.

Por otra parte, para incrementar el índice de eficiencia más allá de la cota establecida en la conjetura de Kung y Traub, debemos recurrir a los métodos con memoria. Estos se generan introduciendo adecuadamente parámetros en la expresión iterativa de los métodos de manera que en la ecuación del método resultante aparezcan ciertos factores. La definición iterativa del valor de dichos parámetros hace que sirvan de aceleradores del método.

El estudio de la dinámica compleja realizado en los Capítulos 4 y 6, pone de manifiesto la utilidad del mismo a la hora de establecer la estabilidad y fiabilidad, desde un punto de vista numérico, de los métodos diseñados. Además, el uso de planos de parámetros nos permite determinar cuáles son los elementos de las familias de métodos más estables y determinar qué valores del parámetro dan lugar a comportamientos numéricamente peligrosos del esquema. El uso de las herramientas dinámicas nos permiten poner de manifiesto el comportamiento de algunos métodos numéricos que aumentan sustancialmente las cuencas de puntos iniciales convergentes. Este es el caso de los métodos con memoria, comparados con los esquemas originales sin memoria, así como de los métodos diseñados al efecto.

En el Capítulo 7, hemos diseñado, utilizando funciones peso matriciales, métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Los métodos construidos utilizan la matriz Jacobiana o el operador diferencias divididas, indistintamente. Un aspecto relevante desarrollado en este capítulo es la extensión no directa de los esquemas escalares al caso multidimensional, que se puede aplicar en el futuro a otros métodos escalares conocidos.

Asimismo, el estudio de los métodos diseñados para sistemas a través de su comportamiento cualitativo en el plano real, es una reciente vía de investigación que será objeto de estudio en futuros trabajos.

En otro contexto, el espacio de las matrices cuadradas con coeficientes reales o complejos es un espacio de Banach, por lo que en principio sería posible aplicar los métodos diseñados para ecuaciones o sistemas no lineales para ecuaciones no lineales con coeficientes matriciales. El cálculo de una inversa, el cuadrado de una matriz, las ecuaciones de Riccati, son algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones. Las técnicas propuestas en esta memoria nos deberían permitir la construcción de algoritmos para aproximar la inversa de una matriz o, en el caso de que ésta no exista, algún tipo de inversa generalizada como la de Moore-Penrose. Por otra parte, el diseño de métodos ad-hoc para este tipo de ecuaciones podría resultar más eficiente que la aplicación de métodos construidos en otros contextos.

A continuación mostramos, de forma esquemática, algunas de las líneas de trabajo que se plantean para el futuro:

- Diseño de métodos eficientes para resolver ecuaciones con raíces múltiples o sistemas con Jacobiana singular.
- Búsqueda de los límites del orden de convergencia de los esquemas con memoria, utilizando distintas aproximaciones y aceleradores.
- Extensión a espacios de Banach de los métodos propuestos en esta memoria y análisis de la convergencia de los mismos, tanto global como semilocal.
- Análisis dinámico de los métodos construidos para sistemas de ecuaciones no lineales.
- Análisis comparativo de la dinámica asociada a métodos con y sin memoria.
- Aplicación de los métodos presentados en esta memoria o construcción de métodos ad-hoc para la resolución de ecuaciones matriciales no lineales.

## Capítulo 9

# Anexos

**ANEXO 1:** Programas para los métodos iterativos con derivadas para la solución de ecuaciones no lineales con orden de convergencia cuatro (MED).

```
function [x0,iter ,p,incr ,incr2]=MED41(x0,f,maxiter ,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx;
fy = feval(f,y);
v = fy/dfx;
h = 1 + 2*v;
x = y - h*fy/dfx;
incr = abs(double(x-x0));
Inc = [Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion '), iter, disp('incr1 '), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx,dfx]=feval(f,x0);
% digits(4), disp('incr2 '), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;

end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter ,p,incr ,incr2]=MED42(x0,f,maxiter ,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
```

```

iter=0;

[fx, dfx]=feval(f, x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx;
fy = feval(f, y);
u = fy/dfx;
v = fy/fx;
h = (1 + 2*v)/(1+u);
x = y - h*fy/dfx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx, dfx]=feval(f, x0);
% digits(4), disp('incr2'), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0, iter, p, incr, incr2]=MED43(x0, f, maxiter, tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx, dfx]=feval(f, x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx; % paso de Newton
fy = feval(f, y); % evaluacion de la funcion en y
x = x0 - (fx^2+fx*fy+2*fy^2)/(fx*dfx);

incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx, dfx]=feval(f, x0);
% digits(4), disp('incr2'), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

```

---

```

function [x0,iter ,p,incr ,incr2]=MED44(x0,f,maxiter ,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx; % paso de Newton
fy = feval(f, y); % evaluacion de la funcion en y
x = y - fy*(fx+fy)^2/((fx^2-5*fy^2)*dfx);
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion '), iter, disp('incr1 '), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx,dfx]=feval(f,x0);
% digits(4), disp('incr2 '), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter ,p,incr ,incr2]=MED45(x0,f,maxiter ,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx; % paso de Newton
fy = feval(f, y); % evaluacion de la funcion en y
x = y - (3*fy*fx^2)/((3*fx^2-6*fx*fy-8*fy^2)*dfx);

incr=abs(double(x-x0));
% digits(4), disp('iteracion '), iter, disp('incr1 '), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
Inc=[Inc incr];
x0=x;
[fx,dfx]=feval(f,x0);
incr2=abs(double(fx));
% digits(4), disp('incr2 '), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

```

---

```

function [x0, iter ,p, incr , incr2]=MED46(x0, f , maxiter , tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx, dfx]=feval(f, x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx; % paso de Newton
fy = feval(f, y); % evaluacion de la funcion en y
x = y - ((fx^2-6*fx*fy+16*fy^2)*fy)/((fx^2-8*fx*fy+16*fy^2)*dfx);

incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx, dfx]=feval(f, x0);
incr2=abs(double(fx));
% digits(4), disp('incr2'), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0, iter ,p, incr , incr2]=MEDK4(x0, f , maxiter , tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx, dfx]=feval(f, x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx;
fy = feval(f, y);
u = fy/fx;
h = (1+u)/(1-u);
x = y - h*fy/dfx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc =[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx, dfx]=feval(f, x0);
% digits(4), disp('incr2'), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;

```

---

```

end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MEDKT4(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx;
fy = feval(f,y);
u = fy/fx;
h = (1)/(1-u)^2;
x = y - h*fy/dfx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx,dfx]=feval(f,x0);
% digits(4), disp('incr2'), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MEDOS4(x0,f,maxiter,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx; % paso de Newton
fy = feval(f,y); % evaluacion de la funcion en y
x = y - fy*fx/((fx-2*fy)*dfx);
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx,dfx]=feval(f,x0);
% digits(4), disp('incr2'), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)

```

---

```

    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MEDZA(x0,f,maxiter,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx;
fy = feval(f,y);
u = fy/fx;
h = (1+2*u+u^2)/(1-4*u^2);
x = y - h*fy/dfx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx,dfx]=feval(f,x0);
% digits(4), disp('incr2'), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

```

**ANEXO 2:** Programas para los métodos iterativos con derivadas para la solución de ecuaciones no lineales con orden de convergencia ocho (MED).

```

function [x0, iter, p, incr, incr2]=MED81(x0, f, maxiter, tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx, dfx]=feval(f, x0);
while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
% while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx;
fy = feval(f, y);
u = fy/dfx;
v = fy/fx;
h = (1+2*v+2*v^2);
t = y - h*fy/dfx;
ft = feval(f, t);
w = ft/fy;
g = 1+2*v+w+3*v^2+4*v*w;
x = t-g*ft/dfx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
% digits(4), disp('iteracion '), iter, disp('incr1 '), vpa(x-x0), digits(2000)
% digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
x0=x;
[fx, dfx]=feval(f, x0);
% digits(4), disp('incr2 '), vpa(fx), digits(2000)
% digits(4), vpa(fx), digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0, iter, p, incr, incr2]=MED82(x0, f, maxiter, tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx, dfx]=feval(f, x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx;
fy = feval(f, y);
u = fy/dfx;
H = (1+2*u);
z = y - H*fy/dfx;
fz = feval(f, z);

```

```

v = fz/fy;
G = 1+2*u+v+u^2+4*u*v-4*u^3;
x =z-G*fz/dfx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),disp('iteracion'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),digits(2000)
% digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx,dfx]=feval(f,x0);
digits(4),disp('incr2'),vpa(fx),digits(2000)
% digits(4),vpa(fx),digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MED83(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
y = x0 - fx/dfx;
fy = feval(f, y);
u = fy/fx;
H = (1+2*u+3*u^2+6*u^3);
z = y - H*fy/dfx;
fz =feval(f, z);
v = fz/fy;
G = (1)/(1-2*u-v);
x =z-G*fz/dfx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),disp('iteracion'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),digits(2000)
% digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx,dfx]=feval(f,x0);
digits(4),disp('incr2'),vpa(fx),digits(2000)
% digits(4),vpa(fx),digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MED84(x0,f,maxiter,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;

```

---

```

Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
    y = x0 - fx/dfx;
    fy = feval(f, y);
    u = fy/fx;
    H = 1/(1-2*u);
    z = y - H*fy/dfx;
    fz =feval(f, z);
    v = fz/fy;
    G = 1+2*u+v+4*u*v+5*u^2+12*u^3;
    x =z-G*fz/dfx;
    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4),disp(' iteracion '),iter ,disp(' incr1 '),vpa(x-x0),digits(2000)
    digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
    x0=x;
    [fx,dfx]=feval(f,x0);
    digits(4),disp(' incr2 '),vpa(fx),digits(2000)
    % digits(4),vpa(fx),digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MEDDS(x0,f,maxiter,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
    y = x0 - fx/dfx;
    fy = feval(f, y);
    u = fy/fx;
    H = 1/(1-2*u);
    z = y - H*fy/dfx;
    fz =feval(f, z);
    v = fz/fx;
    w = fz/fy;
    fyx=(fy-fx)/(y-x0);
    fzx=(fz-fx)/(z-x0);
    fzx=(fzx-dfx)/(z-x0);
    G = (1+w)*(1+2*v)/(1-2*u-u^2);
    x =z-G*fz/dfx;

```

---

```

    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4),disp('iteracion'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),digits(2000)
% digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
    x0=x;
    [fx,dfx]=feval(f,x0);
    digits(4),disp('incr2'),vpa(fx),digits(2000)
% digits(4),vpa(fx),digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MEDF8(x0,f,maxiter,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx,dfx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
    y = x0 - fx/dfx;
    fy = feval(f,y);
    H1 = fx^2/(fx^2-2*fx*fy+fy^2);
    z = y - H1*fy/dfx;
    fz =feval(f,z);
    v = fz/fx;
    K=(fy-fz)/(y-z);
    H=(fx-fy)/(x0-y);
    D = (dfx-H)/((x0-y)*(x0-z))-H-K)/(x0-z)^2;
    C = (H-K)/((x0-y)*(x0-z))-D*(x0+y-2*z);
    A = fz/((K-C*(y-z)-D*(y-z)^2)*(1+v^2));
    x =z-A;
    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4),disp('iteracion'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),digits(2000)
% digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
    x0=x;
    [fx,dfx]=feval(f,x0);
    digits(4),disp('incr2'),vpa(fx),digits(2000)
% digits(4),vpa(fx),digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MEDK8(x0,f,maxiter,tol)
incr=tol+1;
incr2=incr;

```

---

```

Inc = [];
iter = 0;

[fx, dfx] = feval(f, x0);
% while incr2 > tol && incr > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter

    y = x0 - fx/dfx;
    fy = feval(f, y);
    u = fy/fx;
    H = (1+u+2/3*u^2)/(1-u-2*u^2);
    z = y - H*fy/dfx;
    fz = feval(f, z);
    v = fz/fx;
    fyx = (fy-fx)/(y-x0);
    fxz = (fx-fz)/(x0-z);
    fyxz = (fyx-fxz)/(y-z);
    A = fz/(dfx+fyxz*(z-x0));
    D = (1-2*u+3*v)/(1-3*u);
    G = D*A;
    x = z-G;
    incr = abs(double(x-x0));
    Inc = [Inc incr]; [fx, dfx] = feval(f, x);
    digits(4), disp('iteracion '), iter, disp('incr1 '), vpa(x-x0),
    disp('incr2 '), vpa(fx), digits(2000)
    x0 = x;
% digits(4), disp('incr2 '), vpa(fx), digits(2000),
    incr2 = abs(double(fx));
    iter = iter + 1;
end
p = log(Inc(3:end) ./ Inc(2:end-1)) ./ log(Inc(2:end-1) ./ Inc(1:end-2));

function [x0, iter, p, incr, incr2] = MEDS8(x0, f, maxiter, tol)
incr = tol + 1;
incr2 = incr;
Inc = [];
iter = 0;

[fx, dfx] = feval(f, x0);
% while incr2 > tol && incr > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
    y = x0 - fx/dfx;
    fy = feval(f, y);
    u = fy/fx;
    H = 1/(1-2*u);
    z = y - H*fy/dfx;
    fz = feval(f, z);
    v = fz/fx;
    w = fz/fy;
    fyx = (fy-fx)/(y-x0);

```

---

```

    fzx=(fz-fx)/(z-x0);
    fzx=(fzx-dfx)/(z-x0);
    D = (1+w+2*v-2*u^3)+2*fz/(5*dfx);
    G = (fz/(2*fyx-dfx+fzxx*(z-y)))*D;
    x =z-G;
    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4),disp('iteracion'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),digits(2000)
% digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
    x0=x;
    [fx,dfx]=feval(f,x0);
    digits(4),disp('incr2'),vpa(fx),digits(2000)
% digits(4),vpa(fx),digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

```

**ANEXO 3:** Programas para los métodos iterativos sin derivadas para la solución de ecuaciones no lineales con orden de convergencia cuatro (MES).

```

function [x0,iter ,p ,incr ,incr2]=MES41(f ,x0 ,tol ,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr ;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f ,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx;
fz=feval(f , z);
fzx = (fz-fx)/(z-x0);
y = x0 - fx/fzx;
fy = feval(f , y);
u = fy/fx;
v = fy/fz;
h = 1+u+v;
x = y - h*fy/fzx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx]=feval(f ,x0);
digits(4),vpa(fx),digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter ,p ,incr ,incr2]=MES42(f ,x0 ,tol ,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr ;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f ,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx;
fz = feval(f , z);
fzx = (fz-fx)/(z-x0);
y = x0 - fx/fzx;
fy = feval(f , y);
u = fy/(2*fx);
v = fy/fz;
h = (v+1)/(1-2*u);
x = y - h*fy/fzx;

```

```

    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
    x0=x;
    [fx]=feval(f,x0);
    digits(4),vpa(fx),digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MES43(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx;
fz = feval(f, z);
fzx = (fz-fx)/(z-x0);
y = x0 - fx/fzx;
fy = feval(f, y);
u = fy/(3*fx);
v = fy/fz;
h = (3*u+1)/(1-v);
x = y - h*fy/fzx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx]=feval(f,x0);
digits(4),vpa(fx),digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MES44(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx;

```

---

```

    fz=feval(f, z);
    fzx = (fz-fx)/(z-x0);
    y = x0 - fx/fzx;
    fy = feval(f, y);
    u = fy/(-fx+fy);
    v = fy/fz;
    h = 1-u+v;
    x = y - h*fy/fzx;
    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
    x0=x;
    [fx]=feval(f, x0);
    digits(4),vpa(fx),digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MES45(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx;
fz=feval(f, z);
fzx = (fz-fx)/(z-x0);
y = x0 - fx/fzx;
fy = feval(f, y);
u = fy/(0.5*fx+fy);
v = fy/fz;
h = (v+1)/(1-0.5*u);
x = y - h*fy/fzx;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx]=feval(f, x0);
digits(4),vpa(fx),digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MES46(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;

```

---

```

incr2=incr ;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx ;
fz = feval(f, z);
fzx = (fz-fx)/(z-x0);
y = x0 - fx/fzx ;
fy = feval(f, y);
u = fy/(3*fx+1.5*fy);
v = fy/fz ;
h = (3*u+1)/(1-v);
x = y - h*fy/fzx ;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx]=feval(f,x0);
digits(4),vpa(fx),digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MES47(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx ;
fz = feval(f, z);
fzx = (fz-fx)/(z-x0);
y = x0 - fx/fzx ;
fy = feval(f, y);
u = fy/(3/2*fx+fy);
v = fy/fz ;
h = (2*v+2)/(2-3*u);
x = y - h*fy/fzx ;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx]=feval(f,x0);

```

---

```

        digits(4),vpa(fx),digits(2000)
        incr2=abs(double(fx));
        iter=iter+1;
    end
    p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

    function [x0,iter,p,incr,incr2]=MES4Z(f,x0,tol,maxiter)
    incr=tol+1;
    incr2=incr;
    Inc=[];
    iter=0;

    [fx]=feval(f,x0);
    % while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
    while iter<maxiter
        z = x0+fx;
        fz=feval(f,z);
        fxz = (fx-fz)/(x0-z);
        y = x0 - fx/fxz;
        fy = feval(f,y);
        fyx = (fy-fx)/(y-x0);
        fyxz = (fyx-fxz)/(y-z);
        A = fy;
        B = fyx+fyxz*(y-x0);
        h = A/B;
        x = y - h;
        incr=abs(double(x-x0));
        Inc=[Inc incr];
        digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
        x0=x;
        [fx]=feval(f,x0);
        digits(4),vpa(fx),digits(2000)
        incr2=abs(double(fx));
        iter=iter+1;
    end
    p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

    function [x0,iter,p,incr,incr2]=MES4L(f,x0,tol,maxiter)
    incr=tol+1;
    incr2=incr;
    Inc=[];
    iter=0;
    [fx]=feval(f,x0);
    % while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
    while iter<maxiter
        z = x0+fx;
        fz=feval(f,z);
        fxz = (fx-fz)/(x0-z);
        y = x0 - fx/fxz;
        fy = feval(f,y);

```

---

```

    fyx = (fy-fx)/(y-x0);
    fyz = (fy-fz)/(y-z);
    A = fyx-fyz+fxz;
    B = fyx*fyx;
    h = A/B;
    x = y - h*fy;
    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
    x0=x;
    [fx]=feval(f,x0);
    digits(4),vpa(fx),digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MES4R(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
    z = x0+fx;
    fz=feval(f,z);
    fzx = (fz-fx)/(z-x0);
    y = x0 - fx/fzx;
    fy = feval(f,y);
    fyx = (fy-fx)/(y-x0);
    fyz = (fy-fz)/(y-z);
    A = fy;
    B = fyx+fyz-fzx+(y-x0)*(y-z);
    h = A/B;
    x = y - h;
    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
    x0=x;
    [fx]=feval(f,x0);
    digits(4),vpa(fx),digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

```

**ANEXO 4:** Programas para los métodos iterativos sin derivadas para la solución de ecuaciones no lineales con orden de convergencia ocho (MES).

```

function [x0,iter ,p ,incr ,incr2]=MESS1(f ,x0 ,tol ,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr ;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f ,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx ;
fz=feval(f , z);
fzx=(fz-fx)/(z-x0);
y = x0 - fx/fzx ;
fy = feval(f , y);
u = 2*fy/fx ;
v = fy/fz ;
h = 1+(1/2)*u+v+v^2+(1/4)*u^2;
t = y - h*fy/fzx ;
ft = feval(f , t);
w = ft/fy ;
g = 1+(1/2)*u+v+w+(1/4)*u^2+v^2+(1/2)*u*v+u*w+2*v*w;
x =t-g*ft/fzx ;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx]=feval(f ,x0);
digits(4),vpa(fx),digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter ,p ,incr ,incr2]=MESS2(f ,x0 ,tol ,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr ;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f ,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx ;
fz = feval(f , z);
fzx=(fz-fx)/(z-x0);
y = x0 - fx/fzx ;
fy = feval(f , y);

```

```

    u = fy / fx ;
    v = fy / fz ;
    A = (1+v)/(1-u) ;
    B = 3*u*v ;
    h = A+B ;
    t = y - h*fy / fzx ;
    ft = feval(f, t) ;
    w = ft / fy ;
    g = 1+u+v+w+u^2+5*u*v+2*u*w+2*v*w+u^3-v^3+5*u^2*v+3*u*v^2 ;
    x = t-g*ft / fzx ;
    incr=abs(double(x-x0)) ;
    Inc=[Inc incr] ;
    digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
    x0=x ;
    [fx]=feval(f, x0) ;
    digits(4), vpa(fx), digits(2000)
    incr2=abs(double(fx)) ;
    iter=iter+1 ;
end
p=vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2))) ;

function [x0, iter, p, incr, incr2]=MES83(f, x0, tol, maxiter)
incr=tol+1 ;
incr2=incr ;
Inc=[] ;
iter=0 ;

[fx]=feval(f, x0) ;
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
    z = x0+fx ;
    fz = feval(f, z) ;
    fzx=(fz-fx)/(z-x0) ;
    y = x0 - fx/fzx ;
    fy = feval(f, y) ;
    u = fy / (fx+fy) ;
    v = fy / fz ;
    h = 1+u+v+4*u*v+2*u^2+v^3 ;
    t = y - h*fy / fzx ;
    ft = feval(f, t) ;
    w = ft / fy ;
    g = 1+u+v+w+2*u^2+5*u*v+2*u*w+2*v*w+5*v*u^2+3*u*v^2 ;
    x = t-g*ft / fzx ;
    incr=abs(double(x-x0)) ;
    Inc=[Inc incr] ;
    digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
    x0=x ;
    [fx]=feval(f, x0) ;
    digits(4), vpa(fx), digits(2000)
    incr2=abs(double(fx)) ;

```

---

```

        iter=iter+1;
    end
    p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

    function [x0,iter,p,incr,incr2]=MESS4(f,x0,tol,maxiter)
    incr=tol+1;
    incr2=incr;
    Inc=[];
    iter=0;

    [fx]=feval(f,x0);
    while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
        % while iter<maxiter
        z = x0+fx;
        fz=feval(f,z);
        fzx=(fz-fx)/(z-x0);
        y = x0 - fx/fzx;
        fy = feval(f,y);
        u = 2*fy/(fx-fy);
        v = fy/fz;
        h = 1+0.5*u+v++2*u*v+u^2+v^3;
        t = y - h*fy/fzx;
        ft = feval(f,t);
        w = ft/fy;
        g = 1+0.5*u+v+w+u^2+2.5*u*v+u*w+2*v*w+0.5*v^3+1.75*v*u^2+1.5*u*v^2;
        x =t-g*ft/fzx;
        incr=abs(double(x-x0));
        Inc=[Inc incr];
        digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
        x0=x;
        [fx]=feval(f,x0);
        digits(4),vpa(fx),digits(2000)
        incr2=abs(double(fx));
        iter=iter+1;
    end
    p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

    function [x0,iter,p,incr,incr2]=MESS6(f,x0,tol,maxiter)
    incr=tol+1;
    incr2=incr;
    Inc=[];
    iter=0;

    [fx]=feval(f,x0);
    % while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
        while iter<maxiter
            z = x0+fx;
            fz = feval(f,z);
            fzx=(fz-fx)/(z-x0);
            y = x0 - fx/fzx;

```

---

```

    fy = feval(f, y);
    u = fy/fx;
    v = fy/fz;
    A = (1+u+u^2)/(1-v+v^2);
    B = 3*u*v;
    h = A+B;
    t = y - h*fy/fzx;
    ft = feval(f, t);
    w = ft/fy;
    g = 1+u+v+w+u^2+5*u*v+2*u*w+2*v*w-2*v^3+5*u^2*v+3*u*v^2;
    x = t-g*ft/fzx;
    incr=abs(double(x-x0));
    Inc=[Inc incr];
    digits(4), vpa(x-x0), digits(2000)
    x0 = x;
    [fx]=feval(f, x0);
    digits(4), vpa(fx), digits(2000)
    incr2=abs(double(fx));
    iter=iter+1;
end
p=vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));

function [x0, iter, p, incr, incr2]=MES8S(f, x0, tol, maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f, x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx;
fz=feval(f, z);
fxz = (fx-fz)/(x0-z);
y = x0 - fx/fxz;
fy = feval(f, y);
fyx = (fy-fx)/(y-x0);
fyxz = (fyx-fxz)/(y-z);
A = fy;
B = fyx+fyxz*(y-x0);
h = A/B;
t = fy/fx;
R = 1-t^2/(fxz-1);
u = y - h*R;
fu = feval(f, u);
fuy = (fu-fy)/(u-y);
fuyx = (fuy-fyx)/(u-x0);
fuyxz = (fuyx-fyz)/(u-z);
D = fu;
E = fuy+fuyx*(u-y)+fuyxz*(u-y)*(u-x0);

```

---

```

G = D/E;
s = fu/fy;
r = fy/fz;
Q = (1+s^3)*(1+r^5);
x = u - G*Q;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx]=feval(f,x0);
digits(4),vpa(fx),digits(2000)
incr2=abs(double(fx));
iter=iter+1;
end
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x0,iter,p,incr,incr2]=MESSZ(f,x0,tol,maxiter)
incr=tol+1;
incr2=incr;
Inc=[];
iter=0;

[fx]=feval(f,x0);
% while incr2>tol && incr>tol && iter<maxiter
while iter<maxiter
z = x0+fx;
fz=feval(f,z);
fxz = (fx-fz)/(x0-z);
y = x0 - fx/fxz;
fy = feval(f,y);
fyx = (fy-fx)/(y-x0);
fyxz = (fyx-fxz)/(y-z);
A = fy;
B = fyx+fyxz*(y-x0);
h = A/B;
u = y - h;
fu = feval(f,u);
fuy = (fu-fy)/(u-y);
fuyx = (fuy-fyx)/(u-x0);
fuyxz = (fuyx-fyz)/(u-z);
D = fu;
E = fuy+fuyx*(u-y)+fuyxz*(u-y)*(u-x0);
G = D/E;
x = u - G;
incr=abs(double(x-x0));
Inc=[Inc incr];
digits(4),vpa(x-x0),digits(2000)
x0=x;
[fx]=feval(f,x0);
digits(4),vpa(fx),digits(2000)

```

---

---

```
    incr2=abs(double(fx));  
    iter=iter+1;  
end  
p=log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));
```

**ANEXO 5:** Programas para métodos iterativos con derivadas para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales con orden de convergencia cuatro (MSD).

```

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD41_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
%x=x;
Inc=[];

[fx,dfx] = feval(f,x0);

    %while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
        delta = - dfx \ fx;

        y = x0 + 2/3*delta;
        [fy,dfy] = feval(f,y);
        delta2 = -dfx \ fx;
        H = 3/8*(dfy \ dfx)*(dfy \ dfx)-1/24*eye(size(dfx));
        x = y + H*delta2;
        incr = norm(double(x-x0));

            [fx,dfx] = feval(f,x);

            incr2 = norm(double(fx));
            digits(4),disp('iter'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),disp('incr2'),
            vpa(fx),digits(2000)
            x0=x;
iter=iter+1;
Inc=[Inc,incr];

end

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD42_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
%x=x;
Inc=[];

[fx,dfx] = feval(f,x0);

    % while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter

```

```

    delta = - dfx \ fx;

    y = x0 + 2/3*delta;
    [fy ,dfy] = feval(f,y);
    delta2 = -dfx \ fx;
    H = 9/8*(dfx \ dfy)*(dfx \ dfy) - 3*(dfx \ dfy)+53/24*eye(size(dfx));
    x = y + H*delta2;
    incr = norm(double(x-x0));

    [fx ,dfx] = feval(f,x);

    incr2 = norm(double(fx));
    digits(4), disp(' iter '), iter , disp(' incr1 '), vpa(x-x0) , disp(' incr2 '),
    vpa(fx) , digits(2000)
    x0=x;
    iter=iter+1;
    Inc=[Inc, incr ];
end

p = log(Inc(3:end) ./ Inc(2:end-1)) ./ log(Inc(2:end-1) ./ Inc(1:end-2));

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD4A_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx ,dfx] = feval(f,x0);
% while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
    delta = - dfx \ fx;
    y = x0 + delta;
    [fy ,dfy] = feval(f,y);
    delta2 = -dfx \ (fx + fy);
    z = x0 + delta2;
    [fz ,dfz] = feval(f,z);
    H = -(dfz \ fy);
    x = y + H;
    incr = norm(double(x-x0));

    [fx ,dfx] = feval(f,x);

    incr2 = norm(double(fx));
    digits(4), disp(' iter '), iter , disp(' incr1 '), vpa(x-x0) , disp(' incr2 '),
    vpa(fx) , digits(2000)
    x0=x;
    iter=iter+1;

```

---

```

Inc=[Inc,incr];
end

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD4J_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx,dfx] = feval(f,x0);
% while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
    delta = dfx \ fx;
    y= x0 - (2/3)*delta;
    [~,dfy] = feval(f,y);
    delta1 = ((3*dfy-dfx)\(3*dfy+dfx))*delta;
    xn = x0 - (1/2)*delta1;
    incr = norm(double(xn-x0));
    Inc = [Inc,incr];
    x = [x0, xn]
    digits(4), disp('iter'), iter, disp('incr1'), vpa(xn-x0), disp('incr2'),
    vpa(fx), digits(2000)
    x0=xn;
    [fx,dfx] = feval(f,x0);
    iter=iter+1;
    Inc(iter) = incr;
    incr2 = norm(double(fx));
    % digits(4), disp('iter'), iter, disp('incr1'), vpa(xn-x0), disp('incr2'),
    % vpa(fx), digits(2000)
end

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD4S_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx,dfx] = feval(f,x0);

```

---

```

%while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
    delta = - dfx \ fx;
    y = x0 + 2/3*delta;
    [fy,dfy] = feval(f,y);
    H = 9/8*(dfy \ dfx)+3/8*(dfx \ dfy)-1/2*eye(size(dfx));
    x = x0 + H*delta;
    incr = norm(double(x-x0));

    [fx,dfx] = feval(f,x);

    incr2 = norm(double(fx));
    digits(4),disp('iter'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),disp('incr2'),
    vpa(fx),digits(2000)
    x0=x;
    iter=iter+1;
    Inc=[Inc,incr];
end

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

```

**ANEXO 6:** Programas para métodos iterativos con derivadas para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales con orden de convergencia cinco (MSD).

```

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD51_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx,dfx] = feval(f,x0);

% while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
    delta = - dfx \ fx;
    y = x0 + delta;
    [fy,dfy] = feval(f,y);
    delta2 = -dfx \ fy;
    H = 5/4*(dfx \ dfy)*(dfx \ dfy) -7/2*(dfx \ dfy)+13/4*eye(size(dfx));
    x = y + H*delta2;
    incr = norm(double(x-x0));

    [fx,dfx] = feval(f,x);

    incr2 = norm(double(fx));
    digits(4),disp('iter'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),disp('incr2'),
    vpa(fx),digits(2000)
    x0=x;
    iter=iter+1;
    Inc=[Inc,incr];
end

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD52_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx,dfx] = feval(f,x0);

% while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
    delta = - dfx \ fx;

```

```

y = x0 + delta;
[fy, dfy] = feval(f, y);
delta2 = -dfx \ fy;
H = 1/4*(dfy \ dfx)*(dfy \ dfx) + 1/2*(dfy \ dfx)+1/4*eye(size(dfx));
x = y + H*delta2;
incr = norm(double(x-x0));

    [fx, dfx] = feval(f, x);

    incr2 = norm(double(fx));
    digits(4), disp('iter'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), disp('incr2'),
    vpa(fx), digits(2000)
    x0=x;
    iter=iter+1;
    Inc=[Inc, incr];
end

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x, iter, incr, incr2, p] = MSD5A1_sis(f, x0, tol, maxiter)
% [x, iter, incr, p] = newton_sis('sistemas', vpa([1 1 1]), 1e-50, 50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx, dfx] = feval(f, x0);

% while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
    delta = -dfx \ fx;
    y = x0 + delta;
    [fy, dfy] = feval(f, y);
    delta2 = -dfx \ (fx + fy);
    z = x0 + delta2;
    [fz, dfz] = feval(f, z);
    H = -dfy \ fz;
    x = z + H;
    incr = norm(double(x-x0));

    [fx, dfx] = feval(f, x);

    incr2 = norm(double(fx));
    digits(4), disp('iter'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), disp('incr2'),
    vpa(fx), digits(2000)
    x0=x;
    iter=iter+1;
    Inc=[Inc, incr];

```

**end**

```

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD5A2_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx,dfx] = feval(f,x0);

% while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
while iter < maxiter
    delta = - dfx \ fx;
    y = x0 + delta;
    [fy,dfy] = feval(f,y);
    delta2 = -5*(dfx \ fy);
    z = y + delta2;
    [fz,dfz] = feval(f,z);
    H = -1/5*(dfx \ (-16*fy+fz));
    x = z + H;
    incr = norm(double(x-x0));

    [fx,dfx] = feval(f,x);

    incr2 = norm(double(fx));
    digits(4),disp('iter'),iter,disp('incr1'),vpa(x-x0),disp('incr2'),
    vpa(fx),digits(2000)
    x0=x;
iter=iter+1;
Inc=[Inc,incr];
end

```

```

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));

function [x,iter,incr,incr2,p] = MSD5M_sis(f,x0,tol,maxiter)
% [x,iter,incr,p] = newton_sis('sistemas',vpa([1 1 1]),1e-500,50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx,dfx] = feval(f,x0);

```

```

% while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
  while iter < maxiter
    delta = dfx \ fx;
    y = x0 - delta;
    [fy, dfy] = feval(f, y);
    a = ((dfx - 5*dfy) \ (3*dfx + dfy));
    b = dfx \ fy;
    delta1 = a*b;
    xn = y + delta1;
    incr = norm(double(xn-x0));
    Inc = [Inc, incr];
    x = [x0, xn]
    digits(4), disp('iter'), iter, disp('incr1'), vpa(xn-x0), disp('incr2'),
    vpa(fx), digits(2000)
    x0=xn;
    [fx, dfx] = feval(f, x0);
    iter=iter+1;
% Inc=[Inc, incr];
    Inc(iter) = incr;
    incr2 = norm(double(fx));
% digits(4), disp('iter'), iter, disp('incr1'), vpa(xn-x0), disp('incr2'),
% vpa(fx), digits(2000)

end

p = log(Inc(3:end) ./ Inc(2:end-1)) ./ log(Inc(2:end-1) ./ Inc(1:end-2));

function [x, iter, incr, incr2, p] = MSD5S_sis(f, x0, tol, maxiter)
% [x, iter, incr, p] = newton_sis('sistemas', vpa([1 1 1]), 1e-500, 50)

iter = 0; incr = tol+1; incr2=incr;
x0=x0(:);
% X=x;
Inc=[];

[fx, dfx] = feval(f, x0);

% while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter
  while iter < maxiter
    delta = - dfx \ fx;

    y = x0 + 1/2*delta;
    [fy, dfy] = feval(f, y);
    delta1 = - dfy \ fx;
    z = x0 + delta1;
    [fz, dfz] = feval(f, z);
% delta2 = -dfy \ fx;
    H = 2*(dfy \ fz) - dfx \ fz;
    x = z - H;

```

```
incr = norm(double(x-x0));

[fx, dfx] = feval(f,x);

incr2 = norm(double(fx));
digits(4), disp('iter'), iter, disp('incr1'), vpa(x-x0), disp('incr2'),
vpa(fx), digits(2000)
x0=x;
iter=iter+1;
Inc=[Inc, incr];
end

p = log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2));
```

**ANEXO 7:** Programas para métodos iterativos con el operador de diferencias divididas de orden 1 y 2 para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales con orden de convergencia 4 (MSS).

```

function [xn, iter ,p, incr ,incr2] = MSS43difdiv1(f,x,tol ,maxiter)

% [x, iter , incr , p, delta , fx] = soleymani7_sistemas('sistemas',[0,0,0,0],
% 1e-8, 200)

iter = 0; incr = tol + 1;incr2=incr ;
x = x (:);X = x;
Inc = [];
a1=vpa(0.5);
a2=vpa(0);
b1=vpa(-0.5);
b2=vpa(1);
while incr>tol && incr2>tol && iter < maxiter;
% while iter < maxiter
[fx , dfx] = feval(f,vpa( x));
y =( x - dfx \ fx); % rcond(double(dfx)) , pause
[fy , ~] = feval(f , vpa(y));
A= divdiff(f ,vpa(x),vpa(y));
delta2=(dfx\fy);
deltaM=(dfx\A);
M=((b1+b2)*eye(size(dfx))-b2*deltaM);
N=((a1+a2)*eye(size(dfx))-a2*deltaM);
B = M \ N;
H = 2*b1^2\((a2*b1-a1*b2)*eye(size(dfx)));
C = a1\b1*eye(size(dfx));
G = eye(size(dfx))+(B-C)*H;
delta3=G*delta2;
xn=y-delta3;
incr = norm(double(xn-x));
incr2 = norm(double(feval(f,xn)));
delta=vpa(xn-x);
% delta=vpa(sqrt(sum((xn-x))));
Inc = [Inc incr2];
x = xn;
[fx ,dfx]= feval(f ,vpa(x));
iter = iter + 1;
X = [X x];
digits(4) , disp('xn-x') ,vpa(delta) , disp('fx') ,vpa(fx) , digits(50);
end

p = vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));

```

```

function [xn, iter ,p, incr ,incr2] = MSS43difdiv2(f,x,tol ,maxiter)

```

```

% [x, iter , incr , p, delta , fx] = soleymani7_sistemas('sistemas',[0,0,0,0],
% 1e-8, 200)

```

---

```

iter = 0; incr = tol + 1;incr2=incr ;
x = x(:);X = x;
Inc = [];
a1=vpa(0.5);
a2=vpa(0);
b1=vpa(-0.5);
b2=vpa(1);
    while incr>tol && incr2>tol && iter < maxiter;
    % while iter < maxiter
    [fx, dfx] = feval(f,vpa(x));
    y=( x - dfx \ fx); % rcond(double(dfx)), pause
    [fy, ~] = feval(f, vpa(y));
    A= divdiff_orden2(f,vpa(x),vpa(y));
    delta2=(dfx\fy);
    deltaM=(dfx\A);
    M=((b1+b2)*eye(size(dfx))-b2*deltaM);
    N=((a1+a2)*eye(size(dfx))-a2*deltaM);
    B = M \ N;
    H = 2*b1^2\((a2*b1-a1*b2)*eye(size(dfx)));
    C = a1\b1*eye(size(dfx));
    G = eye(size(dfx))+(B-C)*H;
    delta3=G*delta2;
    xn=y-delta3;
    incr = norm(double(xn-x));
    incr2 = norm(double(feval(f,xn)));
    delta=vpa(xn-x);
    % delta=vpa(sqrt(sum((xn-x))));
    Inc = [Inc incr2];
    x = xn;
    [fx,dfx]= feval(f,vpa(x));
    iter = iter + 1;
    X = [X x];
    digits(4),disp('xn-x'),vpa(delta),disp('fx'),vpa(fx),digits(50);
    end

p = vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));
function [xn,iter,p,incr,incr2] = MSS44difdiv1(f,x,tol,maxiter)

% [x,iter,incr,p,delta,fx] = soleymani7_sistemas('sistemas',[0,0,0,0],
% 1e-8, 200)

iter = 0; incr = tol + 1;incr2=incr ;
x = x(:);X = x;
Inc = [];
a1=vpa(1);
a2=vpa(0);
b1=vpa(1);

```

---

```

b2=vpa(2);
    while incr>tol && incr2>tol && iter < maxiter;
    % while iter < maxiter
    [fx, dfx] = feval(f,vpa(x));
    y=( x - dfx \ fx); % rcond(double(dfx)), pause
    [fy, ~] = feval(f, vpa(y));
    A= divdiff(f,vpa(x),vpa(y));
    delta2=(dfx\fy);
    deltaM=(dfx\A);
    M=((b1+b2)*eye(size(dfx))-b2*deltaM);
    N=((a1+a2)*eye(size(dfx))-a2*deltaM);
    B = M \ N;
    H = 2*b1^2\((a2*b1-a1*b2)*eye(size(dfx)));
    C = a1\b1*eye(size(dfx));
    G = eye(size(dfx))+(B-C)*H;
    delta3=G*delta2;
    xn=y-delta3;
    incr = norm(double(xn-x));
    incr2 = norm(double(feval(f,xn)));
    delta=vpa(xn-x);
    % delta=vpa(sqrt(sum((xn-x))));
    Inc = [Inc incr2];
    x = xn;
    [fx, dfx]= feval(f,vpa(x));
    iter = iter + 1;
    X = [X x];
    digits(4), disp('xn-x'), vpa(delta), disp('fx'), vpa(fx), digits(50);
end

p = vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));

function [xn,iter ,p,incr ,incr2] = MSS44difdiv2(f,x,tol ,maxiter)

% [x, iter , incr , p, delta , fx] = soleymani7_sistemas('sistemas',[0,0,0,0],
% 1e-8, 200)

iter = 0; incr = tol + 1;incr2=incr ;
x = x(:);X = x;
Inc = [];
a1=vpa(1);
a2=vpa(0);
b1=vpa(1);
b2=vpa(2);
    while incr>tol && incr2>tol && iter < maxiter;
    % while iter < maxiter
    [fx, dfx] = feval(f,vpa(x));
    y=( x - dfx \ fx); % rcond(double(dfx)), pause
    [fy, ~] = feval(f, vpa(y));
    A= divdiff_orden2(f,vpa(x),vpa(y));

```

---

```

    delta2=(dfx\fy);
    deltaM=(dfx\A);
    M=((b1+b2)*eye(size(dfx))-b2*deltaM);
    N=((a1+a2)*eye(size(dfx))-a2*deltaM);
    B = M \ N;
    H = 2*b1^2\((a2*b1-a1*b2)*eye(size(dfx)));
    C = a1\b1*eye(size(dfx));
    G = eye(size(dfx))+(B-C)*H;
    delta3=G*delta2;
    xn=y-delta3;
    incr = norm(double(xn-x));
    incr2 = norm(double(feval(f,xn)));
    delta=vpa(xn-x);
    % delta=vpa(sqrt(sum((xn-x))));
    Inc = [Inc incr2];
    x = xn;
    [fx,dfx]= feval(f,vpa(x));
    iter = iter + 1;
    X = [X x];
    digits(4), disp('xn-x'),vpa(delta), disp('fx'),vpa(fx),digits(50);
end

p = vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));

function [xn,iter,p,incr,incr2] = MSS45difdiv1(f,x,tol,maxiter)

% [x,iter,incr,p,delta,fx] = soleymani7_sistemas('sistemas',[0,0,0,0],
% 1e-8, 200)

iter = 0; incr = tol + 1;incr2=incr ;
x = x(:);X = x;
Inc = [];
a1=vpa(1);
a2=vpa(0);
b1=vpa(1);
b2=vpa(-2);
while incr>tol && incr2>tol && iter < maxiter;
% while iter < maxiter
[fx,dfx] = feval(f,vpa(x));
y =( x - dfx \ fx); % rcond(double(dfx)), pause
[fy,~] = feval(f,vpa(y));
A= divdiff(f,vpa(x),vpa(y));
delta2=(dfx\fy);
deltaM=(dfx\A);
M=((b1+b2)*eye(size(dfx))-b2*deltaM);
N=((a1+a2)*eye(size(dfx))-a2*deltaM);
B = M \ N;
H = 2*b1^2\((a2*b1-a1*b2)*eye(size(dfx)));
C = a1\b1*eye(size(dfx));

```

---

```

G = eye(size(dfX))+(B-C)*H;
delta3=G*delta2;
xn=y-delta3;
incr = norm(double(xn-x));
incr2 = norm(double(feval(f,xn)));
delta=vpa(xn-x);
% delta=vpa(sqrt(sum((xn-x))));
Inc = [Inc incr2];
x = xn;
[fx, dfx]= feval(f,vpa(x));
iter = iter + 1;
X = [X x];
digits(4), disp('xn-x'), vpa(delta), disp('fx'), vpa(fx), digits(50);
end

p = vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));

function [xn,iter ,p,incr ,incr2] = MSS45difdiv2(f,x,tol ,maxiter)

% [x, iter , incr , p, delta , fx] = soleymani7_sistemas ('sistemas ', [0,0,0,0],
% 1e-8, 200)

iter = 0; incr = tol + 1;incr2=incr ;
x = x (:);X = x;
Inc = [];
a1=vpa(1);
a2=vpa(0);
b1=vpa(1);
b2=vpa(-2);
while incr>tol && incr2>tol && iter < maxiter;
% while iter < maxiter
[fx, dfx] = feval(f,vpa(x));
y =( x - dfx \ fx); % rcond(double(dfx)), pause
[fy, ~] = feval(f, vpa(y));
A= divdiff_orden2(f,vpa(x),vpa(y));
delta2=(dfx\fy);
deltaM=(dfx\A);
M=((b1+b2)*eye(size(dfX))-b2*deltaM);
N=((a1+a2)*eye(size(dfX))-a2*deltaM);
B = M \ N;
H = 2*b1^2\((a2*b1-a1*b2)*eye(size(dfX)));
C = a1\b1*eye(size(dfX));
G = eye(size(dfX))+(B-C)*H;
delta3=G*delta2;
xn=y-delta3;
incr = norm(double(xn-x));
incr2 = norm(double(feval(f,xn)));
delta=vpa(xn-x);
% delta=vpa(sqrt(sum((xn-x))));

```

---

```

    Inc = [Inc incr2];
    x = xn;
    [fx, dfx]= feval(f,vpa(x));
    iter = iter + 1;
    X = [X x];
    digits(4), disp('xn-x'), vpa(delta), disp('fx'), vpa(fx), digits(50);
end

p = vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));

function [xn,iter,p,incr,incr2] = MSS46difdiv1(f,x,tol,maxiter)

% [x, iter, incr, p, delta, fx] = soleymani7_sistemas('sistemas',[0,0,0,0],
% 1e-8, 200)

iter = 0; incr = tol + 1; incr2=incr ;
x = x(:); X = x;
Inc = [];
a1=vpa(1);
a2=vpa(2);
b1=vpa(1);
b2=vpa(0);
while incr>tol && incr2>tol && iter < maxiter;
% while iter < maxiter
[fx, dfx] = feval(f,vpa(x));
y=(x-dfx\fx); % rcond(double(dfx)), pause
[fy, ~] = feval(f, vpa(y));
A= divdiff(f,vpa(x),vpa(y));
delta2=(dfx\fy);
deltaM=(dfx\A);
M=((b1+b2)*eye(size(dfx))-b2*deltaM);
N=((a1+a2)*eye(size(dfx))-a2*deltaM);
B = M \ N;
H = 2*b1^2\((a2*b1-a1*b2)*eye(size(dfx)));
C = a1\b1*eye(size(dfx));
G = eye(size(dfx))+(B-C)*H;
delta3=G*delta2;
xn=y-delta3;
incr = norm(double(xn-x));
incr2 = norm(double(feval(f,xn)));
delta=vpa(xn-x);
% delta=vpa(sqrt(sum((xn-x))));
Inc = [Inc incr2];
x = xn;
[fx, dfx]= feval(f,vpa(x));
iter = iter + 1;
X = [X x];
digits(4), disp('xn-x'), vpa(delta), disp('fx'), vpa(fx), digits(50);
end

```

---

```

p = vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));

function [xn, iter, p, incr, incr2] = MSS46difdiv2(f, x, tol, maxiter)

% [x, iter, incr, p, delta, fx] = soleymani7_sistemas('sistemas', [0, 0, 0, 0],
% 1e-8, 200)

iter = 0; incr = tol + 1; incr2 = incr;
x = x(:); X = x;
Inc = [];
a1 = vpa(1);
a2 = vpa(2);
b1 = vpa(1);
b2 = vpa(0);
while incr > tol && incr2 > tol && iter < maxiter;
% while iter < maxiter
[fx, dfx] = feval(f, vpa(x));
y = (x - dfx \ fx); % rcond(double(dfx)), pause
[fy, ~] = feval(f, vpa(y));
A = divdiff_orden2(f, vpa(x), vpa(y));
delta2 = (dfx \ fy);
deltaM = (dfx \ A);
M = ((b1 + b2) * eye(size(dfx)) - b2 * deltaM);
N = ((a1 + a2) * eye(size(dfx)) - a2 * deltaM);
B = M \ N;
H = 2 * b1 ^ 2 \ (a2 * b1 - a1 * b2) * eye(size(dfx));
C = a1 \ b1 * eye(size(dfx));
G = eye(size(dfx)) + (B - C) * H;
delta3 = G * delta2;
xn = y - delta3;
incr = norm(double(xn - x));
incr2 = norm(double(feval(f, xn)));
delta = vpa(xn - x);
% delta = vpa(sqrt(sum((xn - x))));
Inc = [Inc incr2];
x = xn;
[fx, dfx] = feval(f, vpa(x));
iter = iter + 1;
X = [X x];
digits(4), disp('xn-x'), vpa(delta), disp('fx'), vpa(fx), digits(50);
end

p = vpa(log(Inc(3:end)./Inc(2:end-1))./log(Inc(2:end-1)./Inc(1:end-2)));

```

**ANEXO 8:** Programas para las gráficas comparativas de los índice de eficiencia (IE) e índice de eficiencia computacional (IEC) de los métodos iterativos de sistemas de ecuaciones no lineales.

---

```

function [IECS, IES]=IE_orden4

lim = [0.8 1.6]
n = (1:1:10);
% ÍNDICE DE EFICIENCIA COMPUTACIONAL
IEC_MSD4J = 4.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSD4S = 4.^(1./((2/3)*n.^3+6*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSD4D = 4.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(4/3)*n));
IEC_MSD41 = 4.^(1./(n.^3+7*n.^2));
IEC_MSD42 = 4.^(1./((1/3)*n.^3+7*n.^2+(2/3)*n));
% ÍNDICE DE EFICIENCIA
IE_MSD4J = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD4S = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD4D = 4.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSD41 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD42 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));

IECS=[IEC_MSD4J; IEC_MSD4S; IEC_MSD4D; IEC_MSD41; IEC_MSD42];
IECS = IECS';
IES=[IE_MSD4J; IE_MSD4S; IE_MSD4D; IE_MSD41; IE_MSD42];
IES = IES';

subplot(2,2,1), bar(n', IES), title('Índice de eficiencia ,_IE'),
grid
legend('MSD4J', 'MSD4S', 'MSD4D', 'MSD41', 'MSD42'),
xlabel('Tamaño del sistema ,_n')
ylabel('IE')
ylim(lim)

subplot(2,2,2), bar(n', IECS),
title('Índice de eficiencia computacional ,_IEC'),
grid
legend('MSD4J', 'MSD4S', 'MSD4D', 'MSD41', 'MSD42'),
xlabel('Tamaño del sistema ,_n')
ylabel('IEC')
ylim(lim)

n = (10:10:100);
% ÍNDICE DE EFICIENCIA COMPUTACIONAL
IEC_MSD4J = 4.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSD4S = 4.^(1./((2/3)*n.^3+6*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSD4D = 4.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(4/3)*n));
IEC_MSD41 = 4.^(1./(n.^3+7*n.^2));
IEC_MSD42 = 4.^(1./((5/3)*n.^3+5*n.^2+(2/3)*n));
% ÍNDICE DE EFICIENCIA
IE_MSD4J = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD4S = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD4D = 4.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSD41 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));

```

```

IE_MSD42 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IECS=[IEC_MSD4J; IEC_MSD4S; IEC_MSD4D; IEC_MSD41; IEC_MSD42];
IECS = IECS';
IES=[IE_MSD4J; IE_MSD4S; IE_MSD4D; IE_MSD41; IE_MSD42];
IES = IES';

subplot(2,2,3), bar(n', IES), grid
xlabel('Tamaño_del_sistema , n')
ylabel('IE')
% title('Índice de eficiencia '),
% legend('IE_{M4B}', 'IE_{M6B}', 'IE_{M8B}', 'IE_{M5BG}',
% 'IE_{M10BG}', 'IE_{M14BG}'),
% xlabel('Tamaño del sistema , n')
ylabel('IE')
ylim(lim)
subplot(2,2,4), bar(n', IECs), grid
xlabel('Tamaño_del_sistema , n')
ylabel('IEC')
ylim(lim)

function [IECS, IES]=IE_orden4

lim = [0.8 1.6]
n = (1:1:10);
% ÍNDICE DE EFICIENCIA COMPUTACIONAL
IEC_MSD4J = 4.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSD4S = 4.^(1./((2/3)*n.^3+6*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSD4D = 4.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(4/3)*n));
IEC_MSS43 = 4.^(1./((5/3)*n.^3+4*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSS44 = 4.^(1./((5/3)*n.^3+4*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSS45 = 4.^(1./((5/3)*n.^3+4*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSS46 = 4.^(1./((1/3)*n.^3+4*n.^2+(2/3)*n));
% ÍNDICE DE EFICIENCIA
IE_MSD4J = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD4S = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD4D = 4.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSS43 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSS44 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSS45 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSS46 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));

IECS=[IEC_MSD4J; IEC_MSD4S; IEC_MSD4D; IEC_MSS43; IEC_MSS44;
      IEC_MSS45; IEC_MSS46]; IECS = IECS';
IES=[IE_MSD4J; IE_MSD4S; IE_MSD4D; IE_MSS43; IE_MSS44; IE_MSS45;
     IE_MSS46]; IES = IES';

subplot(2,2,1), bar(n', IES), title('Índice de eficiencia , IE'), grid
legend('MSD4J', 'MSD4S', 'MSD4D', 'MSS43', 'MSS44', 'MSS45', 'MSS46'),
xlabel('Tamaño_del_sistema , n')
ylabel('IE')

```

```

ylim (lim)

subplot (2,2,2), bar(n',IECS),
title ('Índice de eficiencia computacional, IEC'), grid
% legend ('MSD4J', 'MSD4S', 'MSD4D', 'MSD4I', 'MSD42'),
xlabel ('Tamaño del sistema, n')
ylabel ('IEC')
ylim (lim)

n = (10:10:100);
% ÍNDICE DE EFICIENCIA COMPUTACIONAL
IEC_MSD4J = 4.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSD4S = 4.^(1./((2/3)*n.^3+6*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSD4D = 4.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(4/3)*n));
IEC_MSS43 = 4.^(1./((5/3)*n.^3+4*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSS44 = 4.^(1./((5/3)*n.^3+4*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSS45 = 4.^(1./((5/3)*n.^3+4*n.^2+(1/3)*n));
IEC_MSS46 = 4.^(1./((1/3)*n.^3+4*n.^2+(2/3)*n));
% ÍNDICE DE EFICIENCIA
IE_MSD4J = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD4S = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSD4D = 4.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSS43 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSS44 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSS45 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));
IE_MSS46 = 4.^(1./(2*n.^2 + n));

IECS=[IEC_MSD4J; IEC_MSD4S; IEC_MSD4D; IEC_MSS43; IEC_MSS44;
      IEC_MSS45;IEC_MSS46]; IECS = IECS';
IES=[IE_MSD4J; IE_MSD4S; IE_MSD4D; IE_MSS43; IE_MSS44;IE_MSS45;
     IE_MSS46]; IES = IES';

subplot (2,2,3), bar(n', IES), grid
xlabel ('Tamaño del sistema, n')
ylabel ('IE')
% title ('Índice de eficiencia'),
% legend ('IE_{M4B}', 'IE_{M6B}', 'IE_{M8B}', 'IE_{M5BG}',
% 'IE_{M10BG}', 'IE_{M14BG}'),
% xlabel ('Tamaño del sistema, n')
ylabel ('IE')
ylim (lim)
subplot (2,2,4), bar(n',IECS), grid
xlabel ('Tamaño del sistema, n')
ylabel ('IEC')
ylim (lim)

function [IECS, IES]=IE_orden5
lim = [0.8 1.6]
n = (1:1:10);
% ÍNDICE DE EFICIENCIA COMPUTACIONAL

```

```

IEC_MSD5M = 5.^(1./((2/3)*n.^3+6*n.^2+(4/3)*n));
IEC_MSD5S = 5.^(1./(n.^3+5*n.^2+n));
IEC_MSD5A1 = 5.^(1./((1/3)*n.^3+4*n.^2+(8/3)*n));
IEC_MSD5A2 = 5.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(7/3)*n));
IEC_MSD51 = 5.^(1./((1/3)*n.^3+8*n.^2+(5/3)*n));
IEC_MSD52 = 5.^(1./((1/3)*n.^3+8*n.^2+(5/3)*n));
% ÍNDICE DE EFICIENCIA
IE_MSD5M = 5.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSD5S = 5.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSD5A1 = 5.^(1./(n.^2 + 3*n));
IE_MSD5A2 = 5.^(1./(2*n.^2 + 3*n));
IE_MSD51 = 5.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSD52 = 5.^(1./(2*n.^2 + 2*n));

IECS=[IEC_MSD5M; IEC_MSD5S; IEC_MSD5A1; IEC_MSD5A2; IEC_MSD51;
      IEC_MSD52]; IECS = IECS';
IES=[IE_MSD5M; IE_MSD5S; IE_MSD5A1; IE_MSD5A2; IE_MSD51;IE_MSD52];
IES = IES';

subplot(2,2,1), bar(n',IES), title('Índice_de_eficiencia,_IE'), grid
legend('MSD5M', 'MSD5S', 'MSD5A1', 'MSD5A2', 'MSD51', 'MSD52'),
xlabel('Tamaño_del_sistema,_n')
ylabel('IE')
ylim(lim)

subplot(2,2,2), bar(n',IECS),
title('Índice_de_eficiencia_computacional,_IEC'), grid
% legend('MSD4J', 'MSD4S', 'MSD4D', 'MSD41', 'MSD42'),
xlabel('Tamaño_del_sistema,_n')
ylabel('IEC')
ylim(lim)

n = (10:10:100);
% ÍNDICE DE EFICIENCIA COMPUTACIONAL
IEC_MSD5M = 5.^(1./((2/3)*n.^3+6*n.^2+(4/3)*n));
IEC_MSD5S = 5.^(1./(n.^3+5*n.^2+n));
IEC_MSD5A1 = 5.^(1./((1/3)*n.^3+4*n.^2+(8/3)*n));
IEC_MSD5A2 = 5.^(1./((2/3)*n.^3+5*n.^2+(7/3)*n));
IEC_MSD51 = 5.^(1./((1/3)*n.^3+8*n.^2+(5/3)*n));
IEC_MSD52 = 5.^(1./((1/3)*n.^3+8*n.^2+(5/3)*n));
% ÍNDICE DE EFICIENCIA
IE_MSD5M = 5.^(1./(3*n.^2 + 2*n));
IE_MSD5S = 5.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSD5A1 = 5.^(1./(n.^2 + 3*n));
IE_MSD5A2 = 5.^(1./(2*n.^2 + 3*n));
IE_MSD51 = 5.^(1./(2*n.^2 + 2*n));
IE_MSD52 = 5.^(1./(3*n.^2 + 2*n));

IECS=[IEC_MSD5M; IEC_MSD5S; IEC_MSD5A1; IEC_MSD5A2; IEC_MSD51;

```

```

        IEC_MSD52]; IECS = IECS';
IES=[IE_MSD5M; IE_MSD5S; IE_MSD5A1; IE_MSD5A2; IE_MSD51;IE_MSD52];
IES = IES';

    subplot(2,2,3), bar(n',IES),grid
% title('Índice de eficiencia'),
% legend('IE_{M4B}', 'IE_{M6B}', 'IE_{M8B}', 'IE_{M5BG}',
% 'IE_{M10BG}', 'IE_{M14BG}'),
    xlabel('Tamaño del sistema , n')
    ylabel('IE')
    ylim(lim)
    subplot(2,2,4), bar(n',IECS),grid
    ylabel('IEC')
    ylim(lim)

```

---



## Bibliografía

- [1] M. F. Abad, A. Cordero, J. R. Torregrosa, Fourth- and fifth-order for solving nonlinear systems of equations: An application to the global positioning system, *Abstract and Applied Analysis* Volume 2013, Article ID 586708, 10 pages doi:10.1155/2013/586708.
- [2] M. F. Abad, A. Cordero, J. R. Torregrosa, A family of seventh-order schemes for solving nonlinear systems, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* 57(105) No. 2 (2014) 133–145.
- [3] S. Abbasbandy, Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation* 145 (2003) 887–893.
- [4] G. Adomian, *Solving Frontier Problem of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers., Dordrecht, 1994.
- [5] V. Alarcón, S. Amat, S. Busquier, D.J. López, A Steffensen's type method in Banach spaces with applications on boundary-value problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 216 (2008) 243–250.
- [6] S. Amat, S. Busquier, S. Plaza, Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view, *Scientia* 10 (2004) 3–35.
- [7] S. Amat, M.A.Hernández, N. Romero, A modified Chebyshev's iterative method with at least sixth order of convergence, *Applied Mathematics and Computation* 206 (2008) 164–174.
- [8] I.K. Argyros, A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 298(2) (2004) 374–397.
- [9] V. Arroyo, A. Cordero, J. R. Torregrosa, Approximation of artificial satellites' preliminary orbits: The efficiency challenge, *Mathematical and Computer Modelling* 54 (2011) 1802–1807.
- [10] S. Artidiello, F. Chicharro, A. Cordero, J. R. Torregrosa, Local convergence and dynamical analysis of a new family of optimal fourth-order iterative methods, *International Journal of Computer Mathematics*, 90(10) (2013) 2049–2060.
- [11] S. Artidiello, A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, Two weighted eight-order classes of iterative root-finding methods, *International Journal of Computer Mathematics*, doi:10.1080/00207160.2014.887201.
- [12] S. Artidiello, A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, Optimal high-order methods for solving nonlinear equations, *Journal of Applied Mathematics* Volume 2014 doi: 10.1155/2014/591638, 9 pages.

- [13] S. Artidiello, A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, Métodos iterativos de alto orden para sistemas de ecuaciones no lineales, *Actas de las Jornadas Análisis Numérico y sus Aplicaciones (ANYA)*, Santo Domingo, República Dominicana, 2014. ISBN:978-9945-472-40-0.
- [14] D.K.R. Babajee, M.Z. Dauhoo, M.T. Darvishi, A. Barati, A note on the local convergence of iterative methods based on Adomian decomposition method and 3-node quadrature rule, *Applied Mathematics and Computation*, 200(1) (2008) 452–458.
- [15] D.K.R. Babajee, M.Z. Dauhoo, M.T. Darvishi, A. Karami, A. Barati, Analysis of two Chebyshev-like third order methods free from second derivatives for solving systems of nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233 (2010) 2001–2012.
- [16] D. F. Bailey, A historical survey of solution by functional iteration, *Mathematical Magazine* 62 (1989) 155–166.
- [17] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1991.
- [18] W. Bi, H. Ren, Q. Wu, Third-step iterative methods with eight-order convergence for solving nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 255 (2009) 105–112.
- [19] J. Biazar, M.G. Porshokuhi, B. Ghanbari, Extracting a general iterative method from an Adomian decomposition method and comparing it to the variational iteration method, *Computers & mathematics with applications* 59(2) (2010) 622–628.
- [20] P. Blanchard, The Dynamics of Newton's Method, *Proc. of Symposia in Applied Mathematics* 49 (1994) 139–154.
- [21] D.D. Bruns, J.E. Bailey, Nonlinear feedback control for operating a nonisothermal CSTR near an unstable steady state, *Chem. Eng. Sci.* 32 (1977) 257–264.
- [22] R. Burden, J.D. Faires, *Numerical Analysis*, seventh ed., PWS Publishing Company, Boston, 2001.
- [23] A. Cayley, Applications of the Newton-Fourier Method to an imaginary root of an equation, *Quat. J. of Pure and App. Math.* 16 (1879) 179–185.
- [24] C. Chun, Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 195 (2008) 454–459.
- [25] C. Chun, M.Y. Lee, B. Neta, J. Džunić, On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 6427–6438.
- [26] F. Chicharro, A. Cordero, J.R. Torregrosa, Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods, *The Scientific World Journal* Volume 2013 Article ID:780153 11 pages.
- [27] A. Cordero, J. García-Maimó, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, P. Vindel, Chaos in King's iterative family, *Applied Mathematics Letters* 26 (2013) 842–848.
- [28] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Generating optimal derivative free iterative methods for nonlinear equations by using polynomial interpolation, *Journal Mathematical and Computer Modelling* 57(7) (2013) 1950–1956.

- 
- [29] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, New modifications of Potra-Patk's method with optimal fourth and eight orders of convergence, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234(10) (2010) 87–99.
- [30] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, A modified Newton-Jarratt's composition, *Numerical Algorithms* 55 (2010) 87–99.
- [31] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Steffensen-type methods for solving nonlinear equations, *Journal Mathematical and Computer and Applied Mathematics* 236 (2012) 3058–3064.
- [32] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, A new technique to obtain derivative-free optimal iterative methods for solving nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 252 (2013) 95–102.
- [33] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Efficient high-order methods based on golden ratio for nonlinear systems, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011) 4548–4556.
- [34] A. Cordero, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equation, *Journal Mathematical and Computer and Applied Mathematics* 231 (2009) 541–551.
- [35] A. Cordero, J.R. Torregrosa, Variants of Newton's method for functions of several variables, *Applied Mathematics and Computation* 183 (2006) 199–208.
- [36] A. Cordero, J.R. Torregrosa, Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas, *Applied Mathematics and Computation* 190 (2007) 686–698.
- [37] A. Cordero, J.R. Torregrosa, On interpolation variants of Newton's method for functions of several variables, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234 (2010) 34–43.
- [38] A. Cordero, J.R. Torregrosa, Low-complexity root-finding iteration functions with no derivatives of any order of convergence, *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2014) doi:10.1016/j.cam.2014.01.024.
- [39] A. Cordero, J.R. Torregrosa, M. Vassileva, Tree-step iterative method with a optimal eighth order of convergence, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235 (2011) 3189–3194.
- [40] A. Cordero, J.R. Torregrosa, M.P. Vassileva, Pseudocomposition: A technique to design predictor-corrector methods for systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 11496–11508.
- [41] A. Cordero, J.R. Torregrosa, P. Vindel, Dynamics of a family of Chebyshev-Halley-type method, *Applied Mathematics and Computation* 219 (2013) 8568–8583.
- [42] J.H. Curry, L. Garnett, D. Sullivan, On the iteration of a rational function: computer experiment with Newton's method, *Comm. Math. Phys.* 91 (1983) 267–277.
- [43] M.T. Darvishi, A. Barati, A fourth-order method from quadrature formulae to solve systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 188(1) (2007) 257–261.
- [44] M.T. Darvishi, Some three-step iterative methods free from second order derivative for finding solutions of systems of nonlinear equations, *Int. J. Pure Appl. Math.* 57(4) (2009) 557–573.
-

- 
- [45] M.T. Darvishi, A. Barati, A third-order Newton-type method to solve systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 187 (2007) 630–635.
- [46] M.T. Darvishi, A. Barati, Super cubic iterative methods to solve systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 188 (2007) 1678–1685.
- [47] I. L. Davies, C. T. Freeman, P. L. Lewin, E. Rogers, D. H. Owens, Newton Method based Iterative Learning Control of the Upper Limb, 2008 American Control Conference, Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington, USA, June 11-13, 2008.
- [48] M. Dehghan, M. Hajarian, Some derivative free quadratic and cubic convergence iterative formulas for solving nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 29 (2010) 19–30.
- [49] R.L. Devaney, The Mandelbrot Set, the Farey Tree and the Fibonacci sequence, *Am. Math. Monthly* 106(4) (1999) 289–302.
- [50] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [51] A. Douady, J. H. Hubbard, On the dynamics of polynomials-like mappings, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (Paris)* 18 (1985) 287–343.
- [52] V. Dracopoulos, How is the dynamics of Koenig iteration functions affected by their additional fixed points?, *Fractals* 7(3) (1999) 327–334.
- [53] J. Džunić, M. Petković, A family of Three-Point methods of Ostrowski's Type for Solving Nonlinear Equations, *Journal of Applied Mathematics* ID 425867 (2012) 9 pages doi:10.1155/2012/425867.
- [54] J. Džunić, M.S. Petković and L.D. Petković, A family of optimal three-point methods for solving nonlinear equations using two parametric functions, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011) 7612–7619.
- [55] P.R. Escobal, *Methods of orbit determination*, Robert E. Krieger Publishing Company, 1965.
- [56] J.A. Ezquerro, J.M. Gutiérrez, M.A. Hernández, M.A. Salanova, Chebyshev-like methods and quadratic equations, *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation* 28 (2000) 23–35.
- [57] J.A. Ezquerro, M.A. Hernández, An optimization of Chebyshev's method, *Journal of Complexity* 25 (2009) 343–361.
- [58] N. Fagella, Invariants en dinàmica complexa, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 23(1) (2008) 29–51.
- [59] P. Fatou, Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. mat. Fr.*, 47 (1919) 161–271; 48 (1920), 33–94; 208–314.
- [60] M. Frontini, E. Sormani, Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 149 (2004) 771–782.
- [61] J. Garay, M.A. Hernández, Degree of logarithmic convexity, *Publicaciones del Sem. Mat. García Galdeano. Serie II*, 26 Zaragoza 1988.
- [62] J. Gerlach, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Rev.* 36 (2) (1994) 272–276.

- [63] Y.H. Gheum, Y.I. Kim, A uniparametric family of three-step eighth order multipoint iterative method for simple roots, *Applied Mathematic Letters* 24 (2011) 929–935.
- [64] Y.H. Gheum, Y.I. Kim, A biparametric family of optimally convergence sixteenth order multipoint method with their fourth step wheighting function as a sum of a rational and a generic two variable function, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235 (2011) 3178–3188.
- [65] D.F. Gill, Y.Y. Azmy, Newton's method for solving k-eigenvalue problems in neutron diffusion theory, *Nuclear Science and Engineerin*, 167(2) (2011) 141–153.
- [66] D. González, Problemas de valor inicial en la construcción de sucesiones mayorizantes para el método de Newton en espacios de Banach, Tesis Doctoral, Universidad de La Rioja, 2012.
- [67] M. Grau-Sánchez, M. Noguera, S. Amat, On the approximation of derivatives using divided difference operators preserving the local convergence order of iterative methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 237 (2013) 363–372.
- [68] J.M. Gutiérrez, M.A. Hernández, An acceleration of Newton's method: Super-Halley method, *Applied Mathematics and Computation* 117(2-3) (2001) 223–239.
- [69] G. Hansen, A Jacobian-free Newton Krylov method for mortar-discretized thermomechanical contact problems, *Journal of Computational Physics* 230(17) (2011) 6546–6562.
- [70] Y. He and C. Ding, Using accurate arithmetics to improve numerical reproducibility and stability in parallel applications, *Journal of Supercomputing* 18 (2001) 259–277.
- [71] C. Hermite, Sur la formule d'interpolation de Lagrange, *J. Reine Angew. Math.* 84 (1878) 70–79.
- [72] A. Iliev, N. Kyurkchiev, *Nontrivial Methods in Numerical Analysis: Selected Topics in Numerical Analysis*, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrcken, Germany, 2010.
- [73] I.R. Ivic, D.S. Zrnica, T. Yu, Threshold Calculation for Coherent Detection in Dual - Polarization Weather Radars, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 48(3) (2012) 2198–2215.
- [74] P. Jarrat, Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations, *Math. Comp.* 20 (1966) 434–437.
- [75] G. Julia, Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles, *J. Mat. Pur. Appl.*, 8 (1918), 47–245.
- [76] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Funtional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [77] Y. Khan, M. Fardi, K. Sayevand, A new general eighth-order family of iterative methods for solving nonlinear equations, *Applied mathematics Letters* 25 (2012) 2262–2266.
- [78] Y.I. Kim, A triparametric family of three-step optimal eighth-order multipoint iterative methods for solving nonlinear equation, *International Journal of Computer Mathematics* 89(8) (2012) 1051–1059.
- [79] R.F. King, A family of fourth order methods for nonlinear equations, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 10 (1973) 876–879.

- 
- [80] K. Kneisl, Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method and Halley's method, *Chaos* 11(2) (2001) 359–370.
- [81] C.H. Ko, J.S. Chen, Optimal Grasping Manipulation for Multifingered Robots Using Semismooth Newton Method, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, Article ID 681710 (2013) 9 pages, doi:10.1155/2013/681710.
- [82] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1970.
- [83] J. Kou, X. Wang, Some improvements of Ostrowski's method, *Applied Mathematics Letters* 23 (2010) 92–96.
- [84] H.T. Kung, J.F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, *Applied Mathematics and Computation* 21 (1974) 643–651.
- [85] Z. Liu, Q. Zheng, P. Zhao, A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications, *Applied Mathematics and Computation* 216 (2010) 1978–1983.
- [86] A. A. Magreñán, *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado*, Tesis Doctoral, Universidad de La Rioja, 2013.
- [87] G.H. Nedhibov, A family of multi-point iterative methods for solving systems of nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 222 (2008) 244–250.
- [88] B. Neta, M.S. Petković, Construction of optimal order nonlinear solvers using inverse interpolation, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2010) 2448–2455.
- [89] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, Inc., 1970.
- [90] A.M. Ostrowski, *Solution of Equations and System of Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1964.
- [91] A.M. Ostrowski, *Solution of equations in euclidean and Banach spaces*, Academic Press, Nueva York, 1973.
- [92] J.M. Ortega, *Numerical Analysis. A Second Course*, SIAM, 1990.
- [93] A.Y. Ozban, Some new variants of newton's method, *Applied Mathematics Letters* 17 (2004) 677–682.
- [94] M.S. Petković, S. Ilić, J. Džunić, Derivative free two-point methods with and without memory for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2010) 1887–1895.
- [95] M. Petković, B. Neta, L. Petković, J. Džunić, *Multipoint methods for solving nonlinear equations*, Academic Press, 2012.
- [96] F.A. Potra, V. Pflak, *Nondiscrete induction and iterative processes*, *Research Notes in Mathematics* 103 Pitman, Boston 1984.
- [97] H. Ren, Q. Wu, W. Bi, A class of two-step Steffensen type methods with fourth-order convergence, *Applied Mathematics and Computation* 209 (2009) 206–210.
- [98] W.C. Rheinboldt, *Methods for solving systems of nonlinear equations*, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1974.

- [99] E. O. Schröder, On infinitely many algorithms for solving equations, *Math. Ann.* 2 (1870), 317–265. Traducido por G. W. Stewart, 1992 (disponible en el directorio pub/reports de thales.cs.umd.edu).
- [100] E. Schröder, Ueber iterite Functionen, *Mathematische Annalen* 3 (1871) 296–322.
- [101] J. R. Sharma, R. Sharma, A new family of modified Ostrowski's methods with accelerated eighth-order convergence, *Numerical Algorithms* 54 (2010) 445–458.
- [102] J. R. Sharma, R. K. Guna, R. Sharma, An efficient fourth order weighted-Newton method for systems of nonlinear equations, *Numerical Algorithms* 62 (2013) 307–323.
- [103] J.R. Sharma, R.K. Guha, P. Gupta, Improved King's method with optimal order of convergence based on rational approximations, *Applied Mathematics Letters* 26 (2013) 473–480.
- [104] J. R. Sharma, R. K. Guna, An efficient fifth order method for solving systems of nonlinear equations, *Computers and Mathematics with Applications* 67 (2014) 591–601.
- [105] F. Soleymani, Revisit of Jarratt method for solving nonlinear equations, *Numerical Algorithms* 57 (2011) 377–388.
- [106] F. Soleymani, S.Karimi, A modified eighth-order derivative-free root solver, *Thai Journal of Mathematics* 10 (2012)(3) 541–549.
- [107] F. Soleymani, S.K. Khattri, Finding simple roots by seventh- and eighth-order derivative-free methods, *Int. J. Math. Models Meth. Appl. Sci.* 1 (2012) 45–52.
- [108] F. Soleymani, M. Sharifi, B.S. Mousavi, An improvement of Ostrowski's and King's techniques with optimal convergence order eight, *Journal Optimization Theory and Application* 153 (2012) 225–236.
- [109] F. Soleymani, S.K Vanini, M. Khan, M. Sharifi, Some modification of King's family with optimal eighth order of convergence, *Mathematical and Computer Modelling* 55 (2012) 1373–1380.
- [110] R. Thukral, New Sixteenth-Order Derivative-Free Methods for Solving Nonlinear Equations, *American Journal of Computational and Applied Mathematics* 2(3)(2012) 112–118.
- [111] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice Hall, New York, 1964.
- [112] M.P. Vassileva, *Métodos iterativos eficientes para la resolución de sistemas no lineales*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2011.
- [113] X. Wang, L. Liu, Two new families of sixth-order methods for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 203(1) (2009) 73–78.
- [114] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, *Applied Mathematics Letters* 13 (2000) 87–93.
- [115] Q. Wu, Y. Zhao, Third-order convergence theorem by using majorizing functions for a modified Newton's method in Banach spaces, *Applied Mathematics and Computation* 175 (2006) 1515–1524.
- [116] Y. Zhang, P. Huang, High-precision Time-interval Measurement Techniques and Methods, *Progress in Astronomy* 24(1) (2006) 1–15.

- 
- [117] L. Zhao, X. Wang, W. Guo, New families of eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations, *Wseas Transactions on Mathematics* 11 (2012) 283–293.
- [118] Q. Zheng, J. Li, F. Huang, An optimal Steffensen-type family for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011) 9592–9597.
- [119] F. Zus, M. Bender, Z. Deng, G. Dick, S. Heise, M. Shang-Guan, J. Wickert, A methodology to compute GPS slant total delays in a numerical weather model, *Radio Science*, 47(2) (2012) doi:10.1029/2011RS004853.

