# Resumen

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales figura entre los problemas más importantes, tanto desde un punto de vista teórico como práctico, de las matemáticas aplicadas, así como también de muchas ramas de las ciencias, la ingeniería, la física, la informática, la astronomía, las finanzas,.... Un vistazo a la bibliografía y la lista de grandes matemáticos que han trabajado en este tema pone de manifiesto un alto nivel de interés contemporáneo en el mismo. Aunque el rápido desarrollo de las computadoras digitales llevó a la aplicación efectiva de muchos métodos numéricos, en la realización práctica, es necesario analizar diferentes problemas tales como la eficiencia computacional basado en el tiempo usado por el procesador, el diseño de métodos iterativos que posean una rápida convergencia a la solución deseada, el control de errores de redondeo, la información sobre las cotas de error de la solución aproximada obtenida, las condiciones iniciales que garanticen una convergencia segura, etc. Dichos problemas constituyen el punto de partida de este trabajo.

El objetivo general de esta memoria es diseñar métodos iterativos eficientes para resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones no lineales. El esquema más conocido para resolver ecuaciones no lineales es el método de Newton, su generalización a sistemas de ecuaciones fue propuesta por Ostrowski.. En los últimos años, como muestra la amplia bibliografía, ha aumentado de manera considerable la construcción de métodos iterativos, tanto de un paso como multipaso, con el fin de conseguir una convergencia de orden óptimo así como una mejor eficiencia computacional. En general, en esta memoria hemos utilizado la técnica de funciones peso para diseñar métodos de resolución de ecuaciones y sistemas, tanto libres de derivadas como apareciendo éstas en su expresión iterativa.

En el Capítulo 2 introducimos los conceptos previos que sustentan el desarrollo de los distintos temas. Entre ellos, cabe destacar los relacionados con los métodos iterativos de resolución de problemas no lineales, en una y varias variables; el concepto de método óptimo (basado en la conjetura de Kung y Traub); las técnicas de demostración empleadas para probar el orden de convergencia local, así como también el operador diferencias divididas [x,y;F], y los conceptos básicos de la dinámica compleja de funciones racionales que utilizaremos para analizar el comportamiento dinámico del operador asociado a cualquier método iterativo.

En los Capítulos 3 y 4 hemos desarrollado métodos iterativos óptimos de órdenes 4 y 8, con y sin derivadas, para la resolución de ecuaciones no lineales. En ambos capítulos comenzamos refiriéndonos al estado del arte, para mostrar a continuación los nuevos métodos diseñados, que incluyen familias conocidas pero también nuevos esquemas iterativos, posteriormente continuamos con el análisis de la convergencia de dichas clases de métodos, estableciendo algunos casos particulares, que son analizados en detalle y finalizamos con las pruebas numéricas relacionadas con los esquemas iterativos propuestos. Específicamente, en el Capítulo 3, se presentan los resultados obtenidos al modificar el método clásico de Gauss para la determinación de órbitas preliminares, de manera que incluya en su proceso esquemas iterativos de alto orden de convergencia. Por su parte, en el Capítulo 4 se muestran las propiedades dinámicas de algunos de los esquemas iterativos diseñados de orden 8, así como sus propiedades de estabilidad que son verificadas sobre diferentes funciones test.

En el Capítulo 5, presentamos métodos iterativos óptimos de alto orden, con operador derivada, para resolver ecuaciones no lineales. Tras el diseño de estos métodos y el análisis de su convergencia, se transforma dicha clase de esquemas iterativos en otra libre de derivadas, manteniendo su optimalidad. Finalmente, se muestran los resultados de algunas pruebas numéricas, que incluyen la determinación de órbitas preliminares de satélites.

El comportamiento dinámico del operador asociado a un método iterativo al ser aplicado sobre la función no lineal a resolver nos proporciona importante información acerca de la estabilidad y fiabilidad de éste. El análisis dinámico de un método iterativo se centra en el estudio del comportamiento asintótico de los puntos fijos (raíces, o no, de la ecuación) del operador, así como en las cuencas de atracción asociadas a los mismos. En el caso de familias paramétricas de métodos iterativos, el análisis de los puntos críticos libres nos permite seleccionar los miembros más estables de dichas familias. El análisis de la dinámica compleja de los métodos diseñados para ecuaciones no lineales se lleva a cabo en el Capítulo 6, donde nos centramos

en una de las familias de métodos óptimos presentada en capítulos anteriores. Así, una vez establecido el teorema del escalado, analizamos el comportamiento del operador racional asociado al método actuando sobre polinomios cuadráticos, calculando sus puntos fijos y críticos y analizando su estabilidad. Mostramos los planos de parámetros de los diferentes puntos críticos libres y estudiamos algunos casos particulares mediante planos dinámicos concretos en los que significamos algunas cuencas de atracción que no corresponden a las raíces.

A continuación, en el Capítulo 7 se extienden a sistemas las técnicas iterativas diseñadas en el caso escalar, si bien ahora utilizamos funciones peso matriciales. Así construimos métodos de cualquier orden añadiendo sucesivos pasos con la misma estructura. Finalmente, se utiliza el operador diferencias divididas para extender al caso multivariable algunos esquemas iterativos que, a priori, no pueden ser extendidos de forma directa. Todos estos métodos forman parte del estudio numérico que se presenta al final del capítulo, en el que se confirman los resultados teóricos.

Esta memoria termina con un capítulo dedicado a problemas abiertos y a líneas futuras de trabajo. Algunos de estos problemas han surgido como consecuencia de los avances obtenidos.