

# **Cuadernos de Teoría Avanzada de Estructuras**

## **Capítulo I: Introducción al Análisis en Rotura**

**Josep Casanova Colón**

**Enero de 2015**

Cuadernos de Teoría Avanzada de Estructuras. Capítulo I: Introducción al Análisis en Rotura

Josep Casanova Colon

Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Universitat Politècnica de València

Enero de 2015



Introducción al Análisis en Rotura by Josep Casanova Colon is licensed under a [Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

# Índice

---

Índice.....	III
Tema 1: Formulación básica del análisis en rotura de los elementos estructurales .....	1
Índice .....	2
Introducción .....	3
Comportamiento elasto-plastico de materiales dúctiles .....	5
Respuesta elasto-plastica uniaxial .....	5
Criterios de plastificación .....	11
Hipótesis fundamentales del análisis límite.....	15
Respuesta elasto-plástica de la sección solicitada a axil o a flexión .....	16
Axil de plastificación y relación axil-alargamiento .....	17
Momento plástico .....	19
Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica.....	29
Tensiones residuales .....	37
Diagramas de interacción.....	41
Interacción axil-flector .....	42
Interacción flector-cortante .....	50
Interacción flector-axil-cortante .....	63
Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura .....	66
Bibliografía .....	73
Tema 2: Formulación básica del análisis en rotura de los elementos estructurales (II) .....	75
Índice .....	76
Introducción .....	77
Método paso a paso.....	79
Teorema de unicidad de la solución .....	93
Teoremas de la cota .....	95
Bibliografía .....	100
Anejo: Demostración de los Teoremas de la Cota .....	102
Teorema Estático (o de la Cota Inferior) .....	102
Enunciado.....	102
Enunciado alternativo .....	102
Enunciado alternativo 2 .....	102
Demostración .....	102

Teorema Cinemático (o de la Cota Superior).....	103
Enunciado.....	103
Demostración.....	104

---

Tema 1:

# Formulación básica del análisis en rotura de los elementos estructurales

---

CAPÍTULO I:  
Introducción  
al análisis en  
rotura

J. Casanova

TEMA 1:

## *Formulación básica del análisis en rotura de los elementos estructurales (I)*

TEORIA AVANZADA DE ESTRUCTURAS

1

# Índice

---

## Índice

---

1. Introducción
2. Comportamiento elasto-plástico de materiales dúctiles
3. Hipótesis fundamentales del análisis límite
4. Respuesta elasto-plástica de la sección (axil/flector)
5. Diagramas de interacción
6. Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura
7. Bibliografía

# Introducción

---

## Introducción

---

Punto de partida:

Análisis de estructuras de barras convencional

- Basado en
  - Hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones
  - Hipótesis de sección plana (Navier-Bernoulli o Timoshenko)
  - Material elástico lineal
- Es conocido
  - GIC: Mecánica del Sólido Deformable, Análisis de Estructuras
  - GIOP: Análisis de Estructuras, Ampliación de Análisis de Estructuras
  - Otros: Resistencia de Materiales, Elasticidad, Cálculo/ Análisis de Estructuras, etc.

Análisis límite (o en rotura)

- Considera el material elástico-perfectamente plástico (¡Respuesta **no lineal!**)
- Mantiene las restantes hipótesis

# Introducción

---

## Finalidad del análisis límite

- Determinar (o al menos acotar) la carga de colapso de la estructura
- Garantizar dimensionamientos seguros

## Resultados intermedios de interés

- Diagramas de interacción
  - justifican las expresiones de cargas últimas y diagramas de interacción de las normas tecnológicas

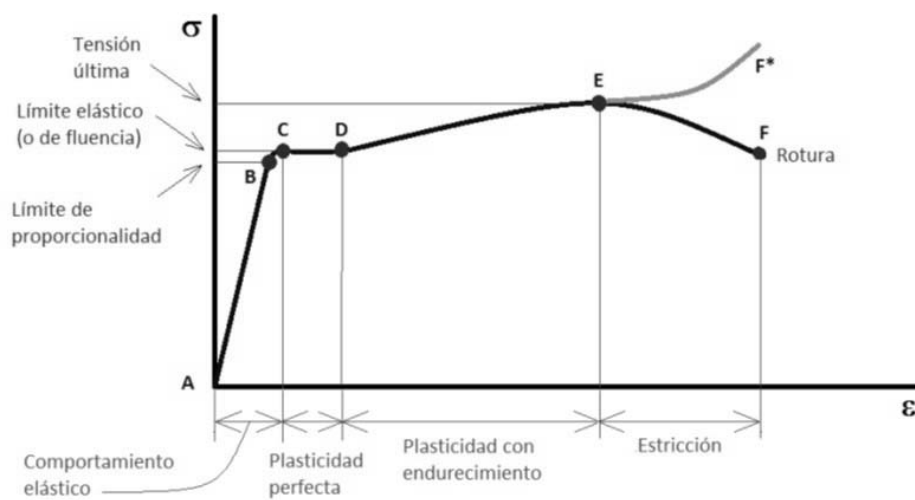


# Comportamiento elasto-plástico de materiales dúctiles

## Respuesta elasto-plástica uniaxial

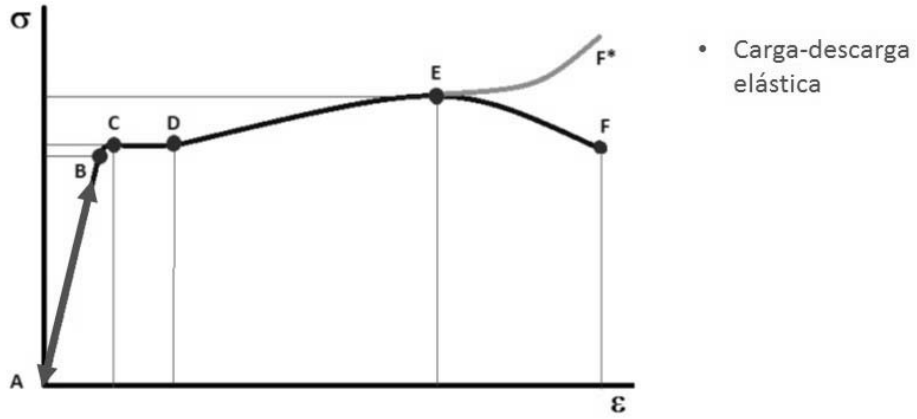
### Respuesta elasto-plástica uniaxial

Respuesta elasto-plástica (ensayo de tracción simple)



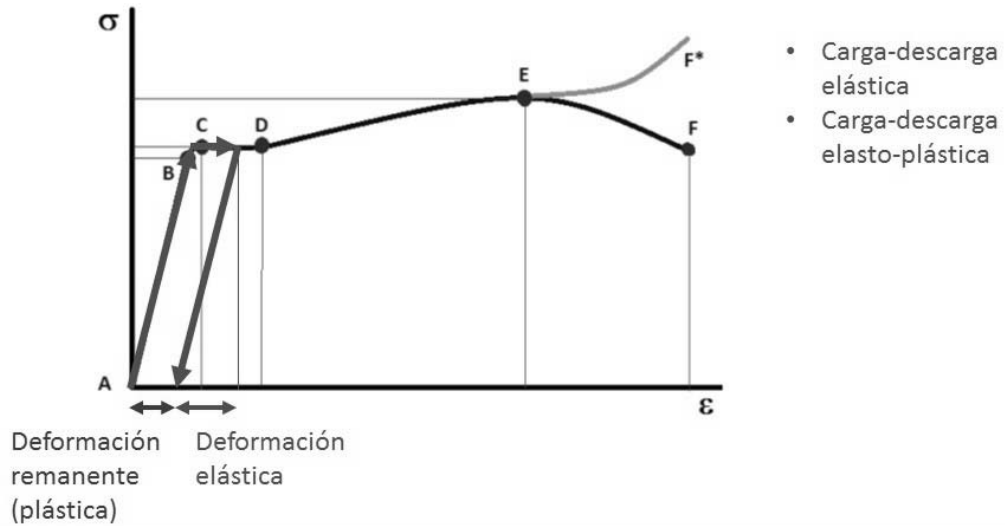
# Respuesta elasto-plástica uniaxial

Respuesta elasto-plástica (ensayo de tracción simple)



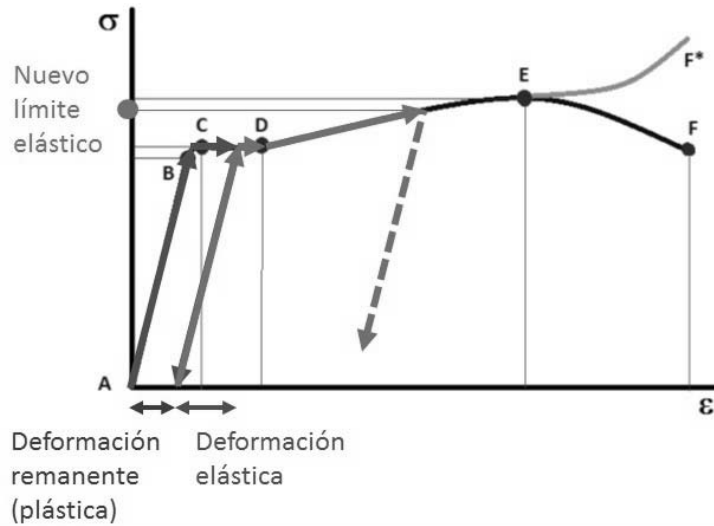
# Respuesta elasto-plástica uniaxial

## Respuesta elasto-plástica (ensayo de tracción simple)



# Respuesta elasto-plástica uniaxial

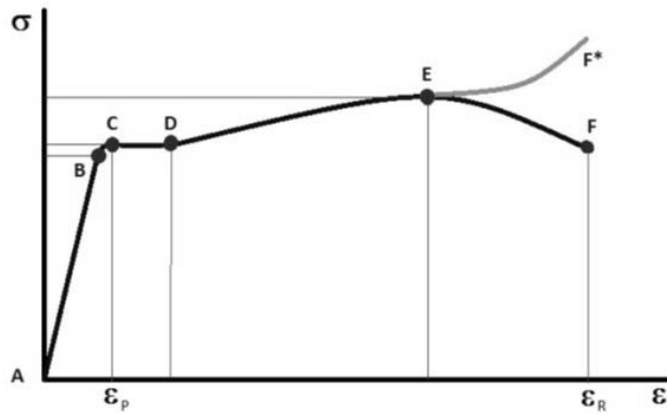
## Respuesta elasto-plástica (ensayo de tracción simple)



- Carga-descarga elástica
- Carga-descarga elasto-plástica
- Nueva carga-descarga

# Respuesta elasto-plástica uniaxial

Respuesta elasto-plástica (ensayo de tracción simple)

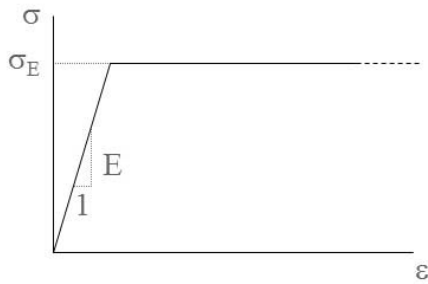


$$\text{Ductilidad} = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_P}$$

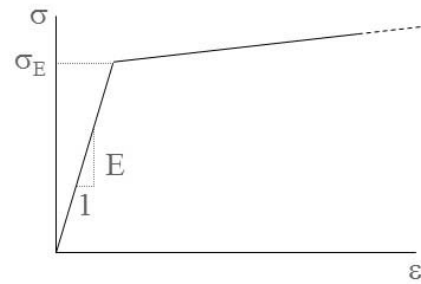
- $\varepsilon_p \rightarrow$  Deformación longitudinal en el instante de la primera plastificación
- $\varepsilon_R \rightarrow$  Deformación longitudinal en el instante de la rotura

# Respuesta elasto-plástica uniaxial

## Modelos ideales de respuesta elasto-plástica uniaxial



Modelo elástico-perfectament  
plàstic

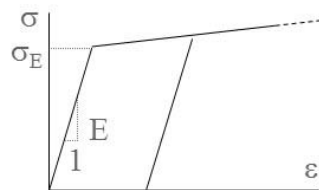


Modelo elasto-plàstic con  
endurecimiento

- Carga en tracción, descarga y carga en compresión
- Endurecimiento isótropo, cinemático y mixto. Efecto Bauschinger

## Criterios de plastificación

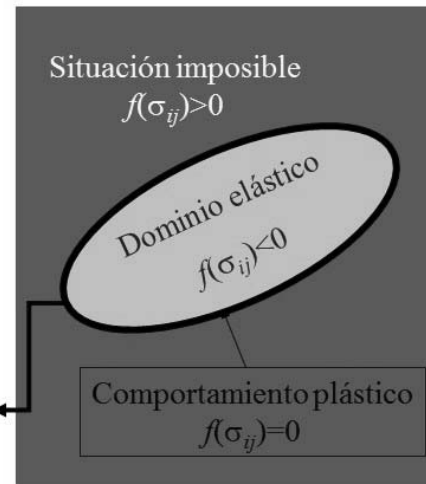
### Problemas uniaxiales



Función (o criterio) de plastificación

- Invariantes
- Endurecimiento
  - Isótropo (Hill, 1950)
  - Cinemático (Prager 1956-57, Ziegler 1959)
  - Mixto (Hodge, 1959)

### Problemas tridimensionales



# Criterios de plastificación

---

## Materiales dúctiles

- Características
- Criterios de plastificación
  - Tresca
  - Von Mises...

### Recuérdese

- Mecánica del Sólido Deformable o
- Ampliación de Análisis de Estructuras

## Materiales frágiles

- Características
- Criterios de plastificación
  - Rankine
  - Mohr-Columb
  - Drucker-Prager...

## En esta asignatura

- Sólo materiales dúctiles
- Modelos uniaxiales + criterio von Mises

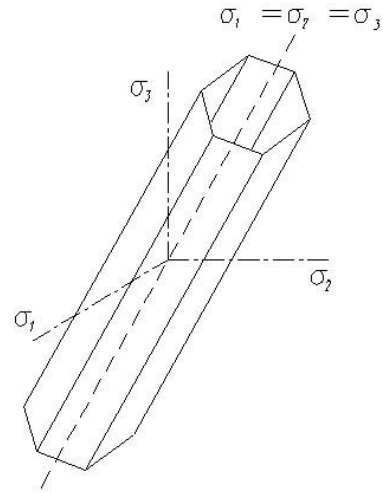


# Criterios de plastificación

## Criterio de Tresca

- Henri Tresca (1814-1885)

- $\tau_{MAX} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = k_T$



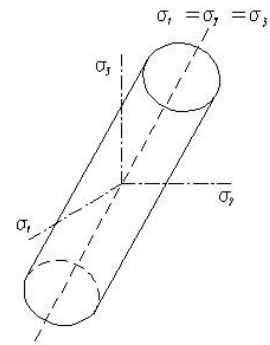
# Criterios de plastificación

## Criterio de von Mises

- Richard E. von Mises (1883-1953)  
James C. Maxwell (antecedente, 1865)

- $$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2}{2}} = k_{vM}$$

- Tensión de comparación de von Mises,  $\sigma_{vM}$ :
  - Von Mises, 1913: segundo invariante desviador de tensiones
  - Hencky, 1923 (y Maxwell, 1865): energía de deformación por distorsión
  - Nadai, 1931: tensión tangencial octaédrica



# Hipótesis fundamentales del análisis límite

---

## Hipótesis fundamentales del Análisis Límite

---

### Análisis límite

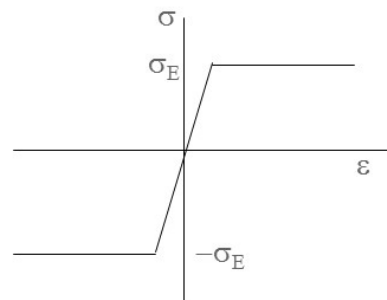
- Objetivo
- Utilidad
- Características

### Hipótesis básicas del análisis límite

- Pequeños desplazamientos
- Respuesta tenso-deformacional
- Sección plana

### Superposición

### Alcance



# Respuesta elasto-plástica de la sección solicitada a axil o a flexión

---

## Respuesta elásto-plástica de la sección

---

### Planteamiento general del análisis (axil o flector)

- Viga → haz de fibras paralelas a la directriz
- Deformación de cada fibra → hipótesis sección plana
- Tensión en cada fibra → Deformación + diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$  elastoplástico
- Esfuerzos → definiciones + integración
- El proceso relaciona deformaciones generalizadas y esfuerzos

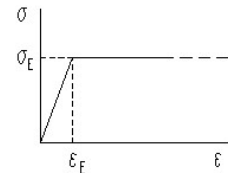
### Efecto del cortante

- Siempre aparece simultáneamente al momento flector  
→ se deben estudiar conjuntamente
- Se abordará en el punto siguiente

## Axil de plastificación y relación axil-alargamiento

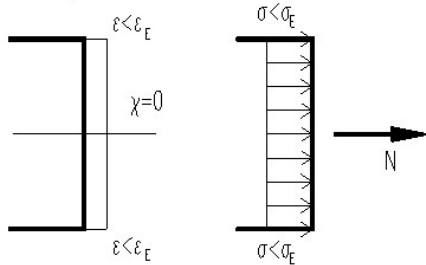
Solicitud de axil puro

- $\varepsilon(Y) = \varepsilon_0 = \text{constante}, \chi = 0$

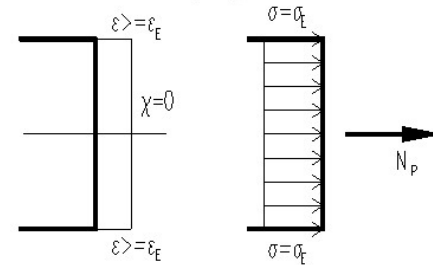


Evolución de las tensiones

Respuesta elástica



Plastificación y agotamiento



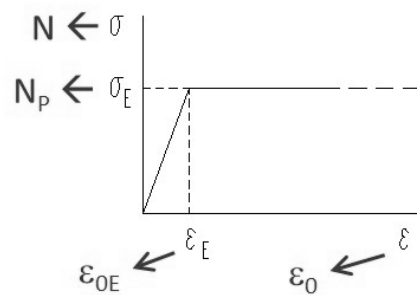
Nótese  $N_P = \sigma_E A$

# Axil de plastificación y relación axil-alargamiento

---

Axil de plastificación  $\rightarrow N_P = \sigma_E A$

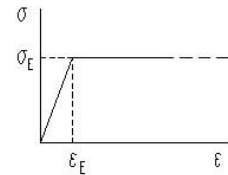
Relación axil-alargamiento unitario de la viga  
(idéntica a la relación tensión nominal-alargamiento unitario de cada fibra)



## Momento plástico

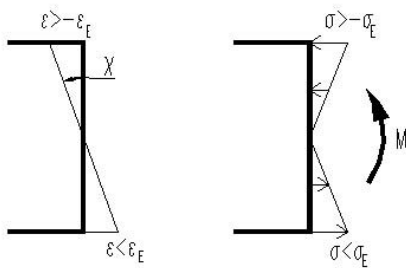
### Solicitud de flexión simple

- $\varepsilon_0=0, \chi=\text{const.}, \varepsilon(Y)=\chi Y$

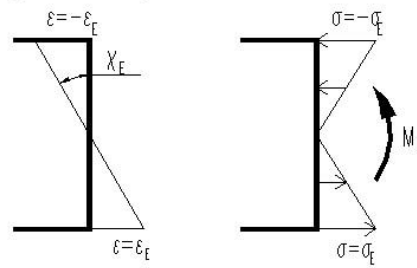


### Evolución de las tensiones

#### 1) Respuesta elástica

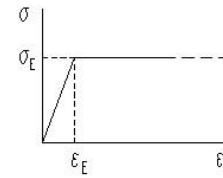


#### 2) Primera plastificación



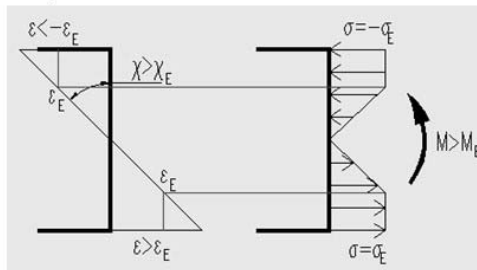
$M_E$  = momento elástico o de primera plastificación

# Momento plástico

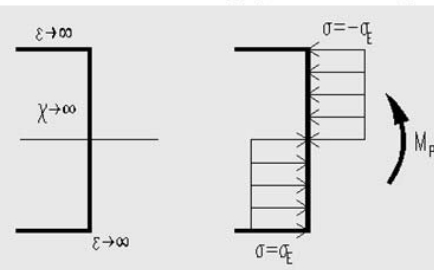


## Evolución de las tensiones

3)



4) Situación teórica (agotamiento)



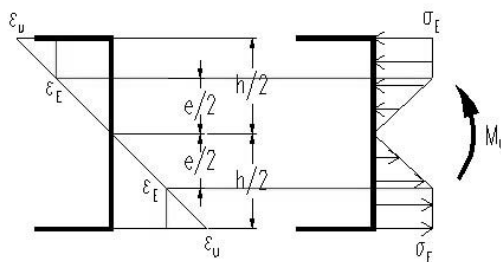
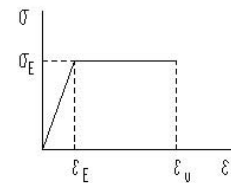
$M_p$  = momento plástico



# Momento plástico

## Momento plástico y momento último

- Momento plástico → situación inalcanzable
- Momento último
  - Definición
  - Cálculo (sección rectangular  $b \times h$ )



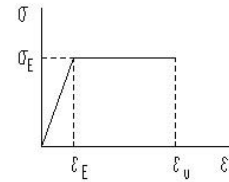
$$\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_E} = \frac{h}{e} \Rightarrow e = \frac{\varepsilon_E}{\varepsilon_u} h = \alpha h$$

$$M_u = 2b \left[ \sigma_E \left( \frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + \frac{e}{2} \right) + \frac{1}{2} \sigma_E \frac{e}{2} \frac{e}{2} \right]$$

# Momento plástico

## Momento plástico y momento último

$$\begin{aligned}
 M_u &= 2b \left[ \sigma_E \left( \frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + \frac{e}{2} \right) + \frac{1}{2} \sigma_E \frac{e}{2} \frac{2}{3} \frac{e}{2} \right] \\
 &= b \left[ \frac{\sigma_E}{4} (h^2 - e^2) + \frac{\sigma_E}{6} e^2 \right] = \sigma_E b h^2 \left[ \frac{1 - \alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{6} \right] \\
 &= \frac{\sigma_E b h^2}{4} \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{3} \right]
 \end{aligned}$$



- Haciendo  $e=0$  ( $\Leftrightarrow \alpha=0$ ) se obtiene  $M_p \rightarrow M_p = \frac{\sigma_E b h^2}{4}$
- Por lo tanto

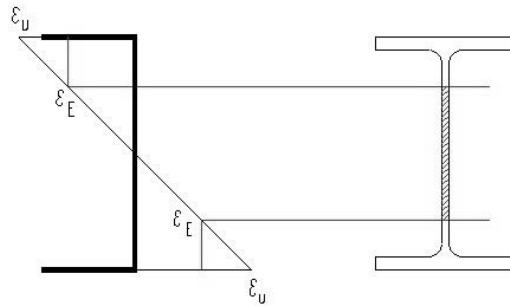
$$\frac{M_u}{M_p} = \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{3} \right]$$

Suponiendo  $\varepsilon_E=0,0012$  y  $\varepsilon_U=0,04$  se obtien  $M_u=0,9997M_p$   
(en el acero estructural  $\varepsilon_E=0,0012$  i  $\varepsilon_U \approx 0,20 \gg 0,04$  )

# Momento plástico

## Momento plástico y momento último

- Sección rectangular  $\rightarrow M_p \cong M_U$
- Sección en I  $\rightarrow M_p \cong M_U$  con mayor motivo



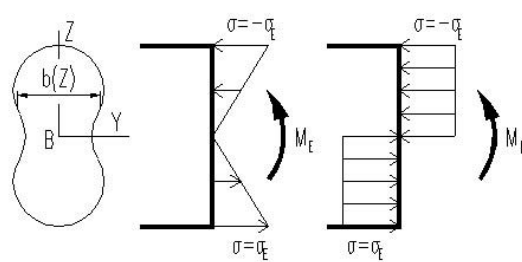
- En general (en secciones razonables para la flexión)  $\rightarrow M_p \cong M_U$

# Momento plástico

## Factor de forma

- Definición  $\rightarrow \lambda = \frac{M_P}{M_E}$
- Dependencia  $\rightarrow$  Sólo de la forma de la sección

## Determinación (sección doblemente simétrica)



$$\sigma_E = \frac{M_E}{I_Y} \frac{h}{2} \Rightarrow M_E = \frac{2\sigma_E}{h} I_Y$$

$$M_P = 2 \int_0^{h/2} \sigma_E Z b(Z) dZ$$

$$= 2\sigma_E \int_0^{h/2} Z b(Z) dZ = 2\sigma_E S_Y$$

$$\lambda = \frac{M_P}{M_E} = \frac{2\sigma_E S_Y}{(2\sigma_E I_Y)/h} = \frac{h S_Y}{I_Y}$$

$S_Y$  es el momento estático de media sección respecto al eje Y

# Momento plástico

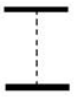





## Determinación del momento plástico en perfiles laminados

$$M_P = 2\sigma_E S_Y = \sigma_E W_{pl,Y}$$

- Prontuarios en los que se puede consultar  $S_Y$  (y  $S_Z$  para la flexión de eje Y)
  - Tablas norma NBE-EAE-95 (anejos parte 2)
    - <https://www.boe.es/boe/dias/1996/01/18/pdfs/A01414-01620.pdf>
    - [https://alojamientos.uva.es/guia\\_docente/uploads/2012/455/42617/1/Documento56.pdf](https://alojamientos.uva.es/guia_docente/uploads/2012/455/42617/1/Documento56.pdf)
    - [http://www.iit.upcomillas.es/~carnicero/perfiles\\_ea\\_95.pdf](http://www.iit.upcomillas.es/~carnicero/perfiles_ea_95.pdf)
  - Prontuario *Ensidesa*
- Prontuarios donde se puede consultar  $W_{plY}=2S_X$  (o  $W_{plZ}$ )
  - Tablas de características en *Constructalia.com*
    - <http://www.constructalia.com/espanol/productos/estructuras#.VLqdzIuG9pt>
  - Prontuarios casas comerciales
    - <http://www.celsa.com/productos.mvc/PerfilesComercial?=Prontuario>
- También se encuentran prontuarios que no facilitan información de este tipo
  - [http://www.apta.com.es/prontuario/Capitulo\\_2.htm](http://www.apta.com.es/prontuario/Capitulo_2.htm)

# Momento plástico

## Algunos factores de forma

SECCIO						
	1,00	1,15 a 1,17	1,27	1,50	1,70	2,00

Procedente de :  
ESTABILIDAD III – CAPITULO III: ANÁLISIS PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS, Universidad Nacional del Noroeste, Argentina.  
[http://ing.unne.edu.ar/pub/e3\\_cap5.pdf](http://ing.unne.edu.ar/pub/e3_cap5.pdf), [consulta 17/01/2015], pág. 4

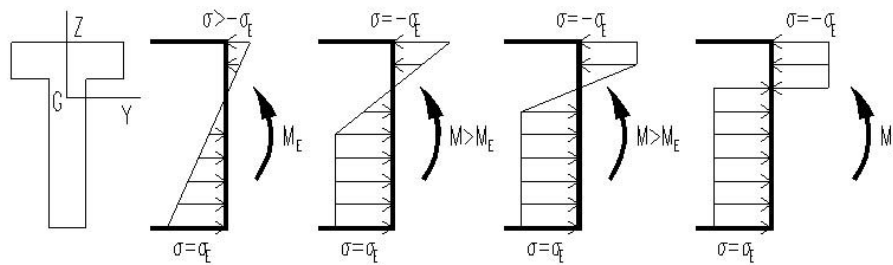
## Factores de forma de los perfiles I españoles

- IPE:  $1,13 \leq \lambda \leq 1,16$
- HEB:  $1,11 \leq \lambda \leq 1,16$
- HEA:  $1,10 \leq \lambda \leq 1,14$
- IPN:  $1,16 \leq \lambda \leq 1,17$
- HEM:  $1,15 \leq \lambda \leq 1,24$

# Momento plástico

## Momento plástico de secciones simplemente simétricas

- Evolución de las tensiones

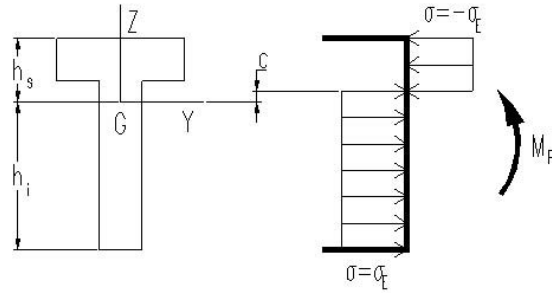


- ¡La posición de la fibra neutra **varía** durante la plastificación!
- Factor de forma  $\rightarrow$  mayor que en secciones doblemente simétricas (porque  $M_E$  es proporcionalmente menor)

# Momento plástico

## Momento plástico de secciones simplemente simétricas

- Determinación



$$N = \int_{-h_i}^{h_s} \sigma b(Z) dZ = \int_{-h_i}^c \sigma_E b(Z) dZ + \int_c^{h_s} (-\sigma_E) b(Z) dZ = 0$$

$$M_P = - \int_{-h_i}^{h_s} Z \sigma b(Z) dZ = - \int_{-h_i}^c \sigma_E Z b(Z) dZ - \int_c^{h_s} (-\sigma_E) Z b(Z) dZ$$



## Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica

Relación momento-curvatura en una sección rectangular

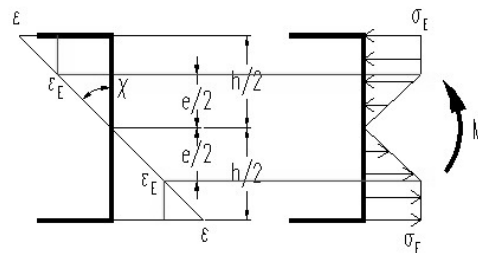
◦ Si  $M \leq M_E \rightarrow \chi = \chi_Y = \frac{M_Y}{EI_Y}$

◦ Si  $M > M_E$ :

$$\frac{M}{M_p} = \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{3} \right]$$

$$\alpha = \frac{e}{h}$$

$$M_p = \lambda M_E = 1,5 M_E$$



$$\Rightarrow \frac{M}{M_E} = 1,5 - \frac{1}{2} \left( \frac{e}{h} \right)^2$$

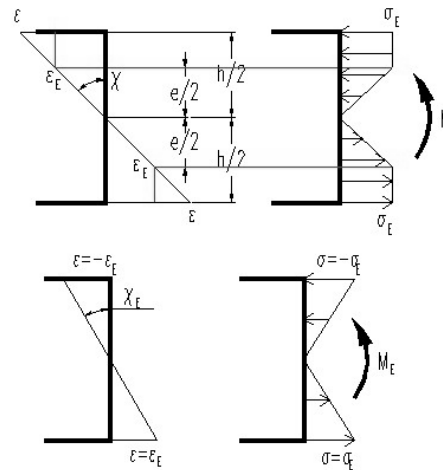
# Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica

Relación momento-curvatura en una sección rectangular

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_E &= \chi \frac{e}{2} \\ \varepsilon_E &= \chi_E \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \chi e = \chi_E h \Rightarrow \frac{e}{h} = \frac{\chi_E}{\chi}$$

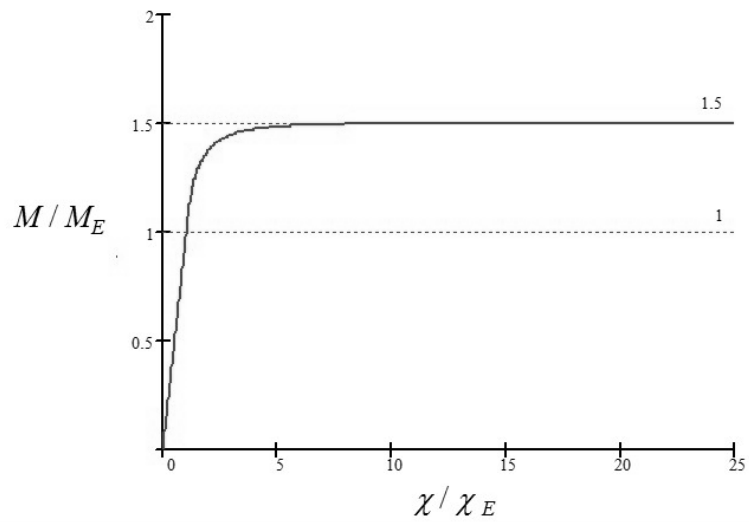
$$\frac{M}{M_E} = 1,5 - \frac{1}{2} \left( \frac{e}{h} \right)^2 = 1,5 - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_E}{\chi} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{M}{M_E} = 1,5 - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_E}{\chi} \right)^2}$$



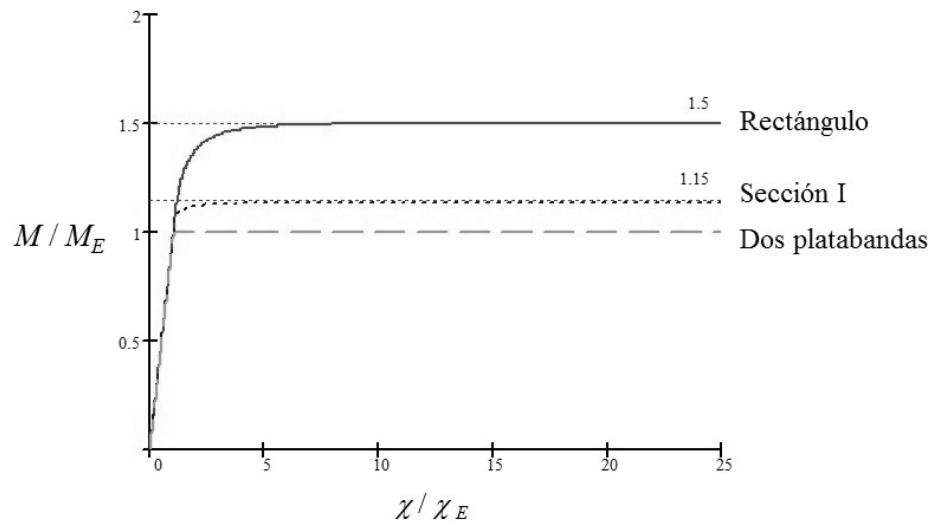
# Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica

Relación momento-curvatura en una sección rectangular



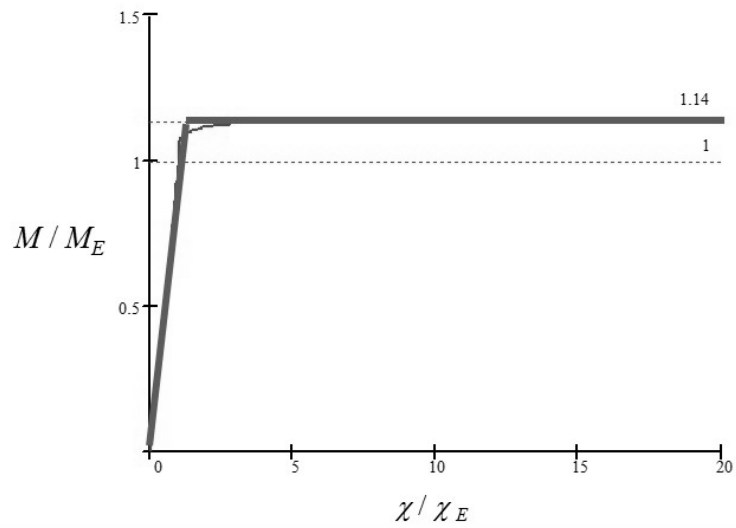
# Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica

Relaciones momento-curvatura de diferentes secciones



# Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica

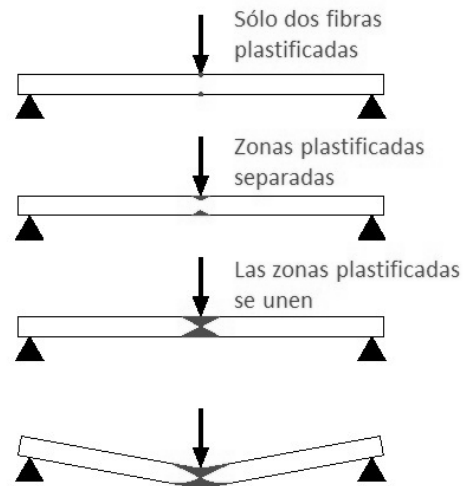
Relación momento-curvatura idealizada



# Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica

## Evolución de la zona plastificada

- Primera plastificación ( $M_E$ )
- Flujo plástico controlado ( $M_E < M < M_p$ )
- Flujo plástico incontrolado.  
**Rótula plástica.** ( $M = M_p$ )
- Colapso (est. isostática)



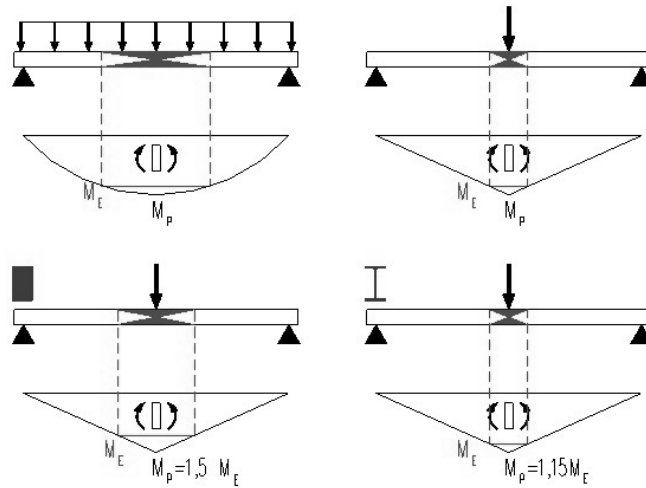
## Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica



Rótulas plásticas en Av. Serrería, Valencia

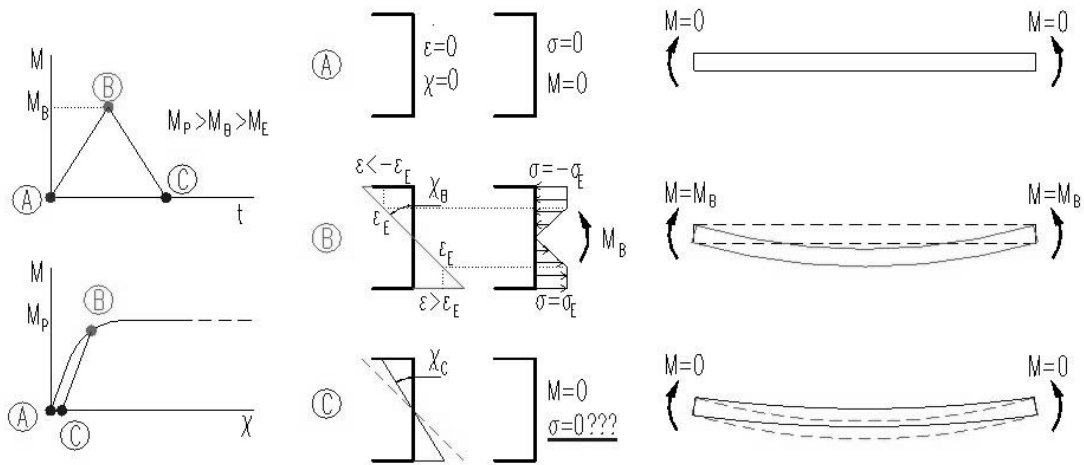
# Relación momento-curvatura. Concepto de rótula plástica

Extensión de la zona plastificada

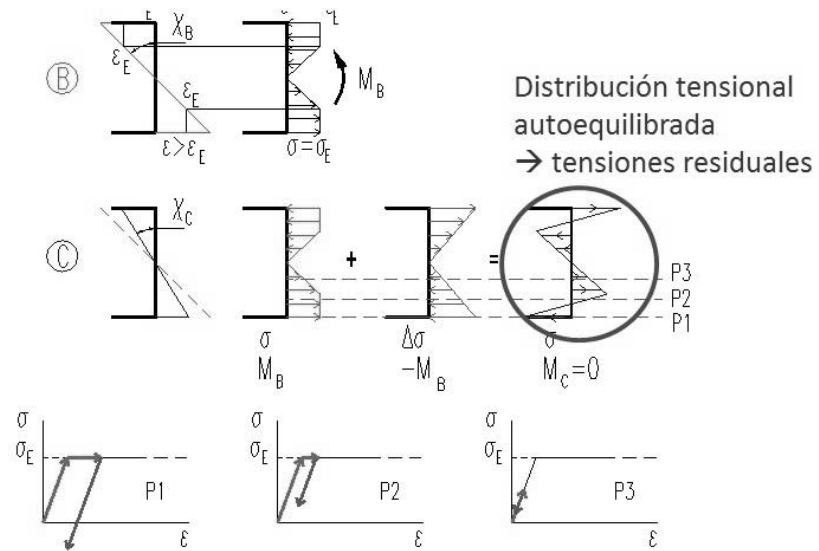




## Tensiones residuales



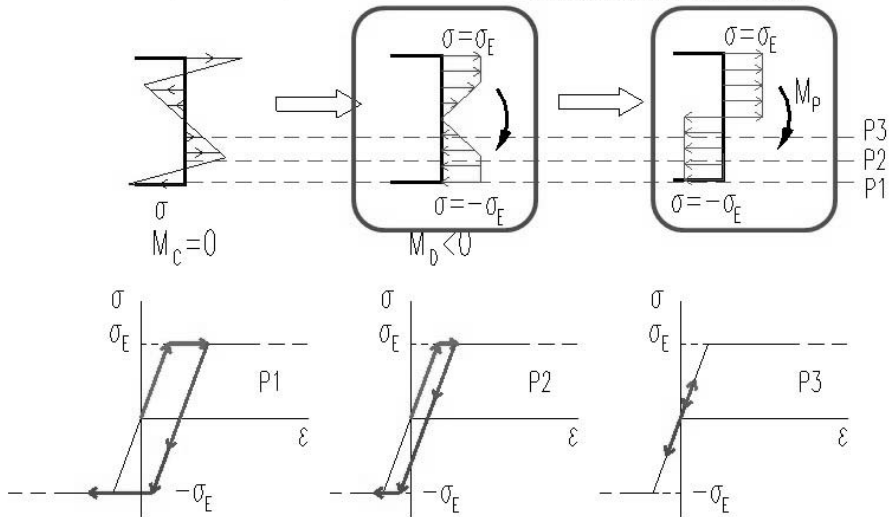
# Tensiones residuales



# Tensiones residuales

Nueva carga de signo contrario

La plastificación "borra" la historia de tensiones.



Las tensiones residuales no influyen en el momento de plastificación

# Tensiones residuales

---

Cuando una pieza se carga hasta la plastificación y luego se descarga:

- Queda una deformación remanente
- Queda una distribución de tensiones residuales autoequilibrada (resultante y momento resultante nulos)

Si tras ello la pieza se carga de nuevo, con independencia del signo de la carga:

- Las nuevas plastificaciones “borran” la historia de tensiones anterior
- La historia previa (tensiones residuales) no influye en el momento de plastificación.

# Diagramas de interacción

---

## Diagramas de interacción

---

Puntos anteriores. Determinación de:

- Axil de plastificación  $N_p$  → él solo origina la plastificación de la sección
- Momento plástico  $M_p$  → él solo origina la plastificación de la sección

Objetivo apartado actual:

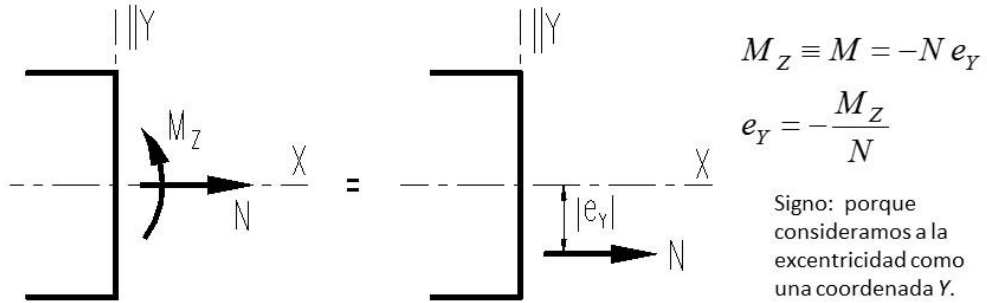
- Determinar ternas de valores  $(N, M, V)$  que, actuando simultáneamente originan la plastificación de la sección
- Interacción axil flector →  $(N, M, 0)$
- Interacción flector cortante →  $(0, M, V)$
- Interacción axil-flector-cortante →  $(N, M, V)$
- Diagramas de interacción → representación gráfica de los resultados

Semejanzas

- $N_p$  o  $M_p$  ↔ problema elastoplástico uniaxial 1D, límite elástico
- Diagrama de interacción ↔ criterio de plastificación

## Interacción axil-flector

Representación de  $(N, M)$  como axil excéntrico

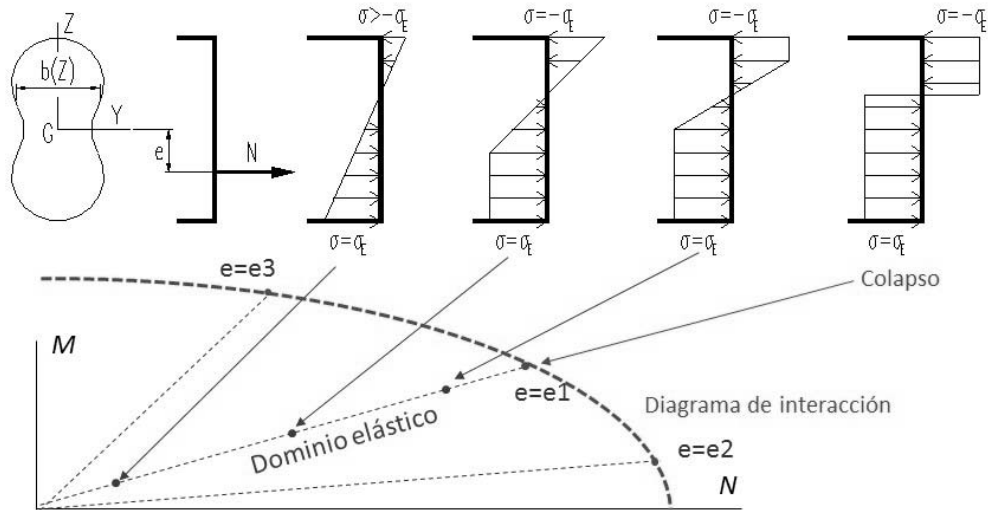


### Notación

- $N_p \rightarrow$  Axil de plastificación
- $M_p \rightarrow$  Momento plástico
- $(N'_p, M'_p) \rightarrow$  Par axil-flector de plastificación  
(Asterisco  $\rightarrow$  identifica los esfuerzos de plastificación por interacción axil-flector)

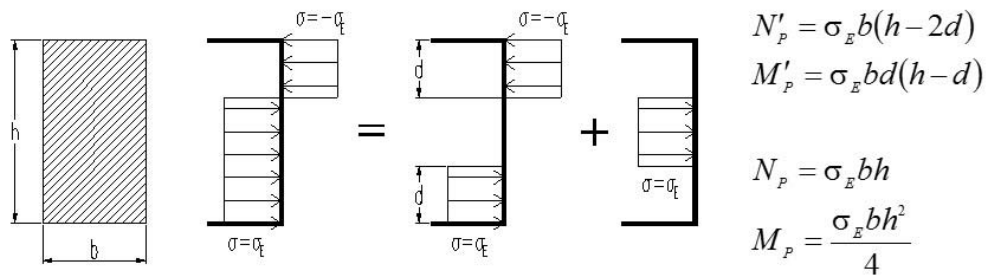
# Interacción axil-flector

Evolución de las tensiones para un  $e_y$  dado



# Interacción axil-flector

## Diagrama de interacción axil-flector (sección rectangular)



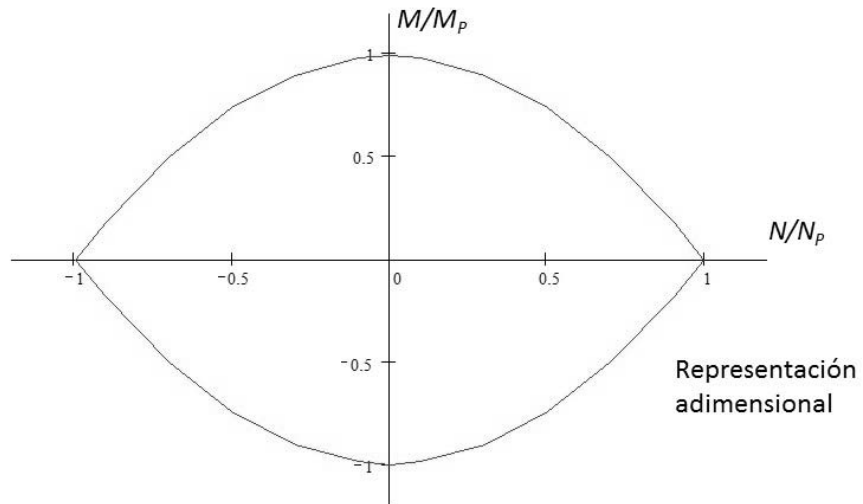
$$\left. \begin{aligned} \frac{N'_p}{N_p} &= 1 - 2\frac{d}{h} \\ \frac{M'_p}{M_p} &= 4\frac{d}{h}\left(1 - \frac{d}{h}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{M'_p}{M_p} = 1 - \left(\frac{N'_p}{N_p}\right)^2}$$

Expresión analítica del diagrama de interacción axil-flector de una sección rectangular



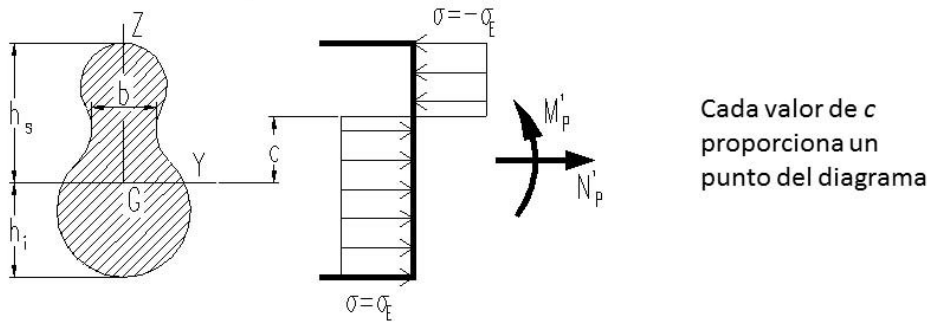
# Interacción axil-flector

Diagrama de interacción axil-flector (sección rectangular)



## Interacción axil-flector

Determinación del diagrama de interacción axil-flector de una sección simplemente simétrica

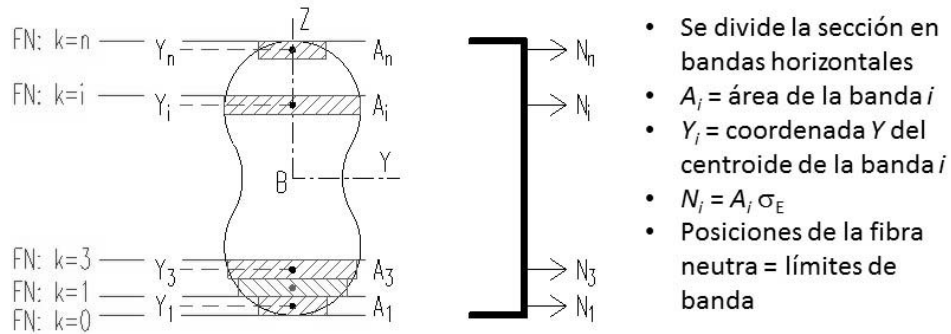


$$N'_P = \int_{h_i}^c \sigma_E b dZ + \int_c^{h_s} (-\sigma_E) b dZ$$

$$M'_P = -\int_{h_i}^c \sigma_E Z b dZ - \int_c^{h_s} (-\sigma_E) Z b dZ$$

# Interacción axil-flector

Algoritmo de determinación del diagrama  $N'_p$ - $M'_p$  aproximado (sección simplemente simétrica)



- Para cada  $k$  (posición de la fibra neutra)

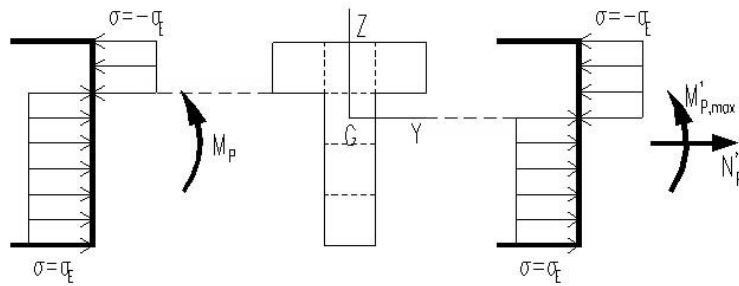
$$N'_p = \sum_{i=0}^k N_i + \sum_{i=k+1}^n (-N_i) \quad , \quad M'_p = -\sum_{i=0}^k Y_i N_i - \sum_{i=k+1}^n Y_i (-N_i)$$

- Otro medio diagrama,  $N_i \rightarrow -N_i \Rightarrow (N'_p, M'_p) \rightarrow (-N'_p, -M'_p)$

# Interacción axil-flector

Valor máximo de  $M'_p$

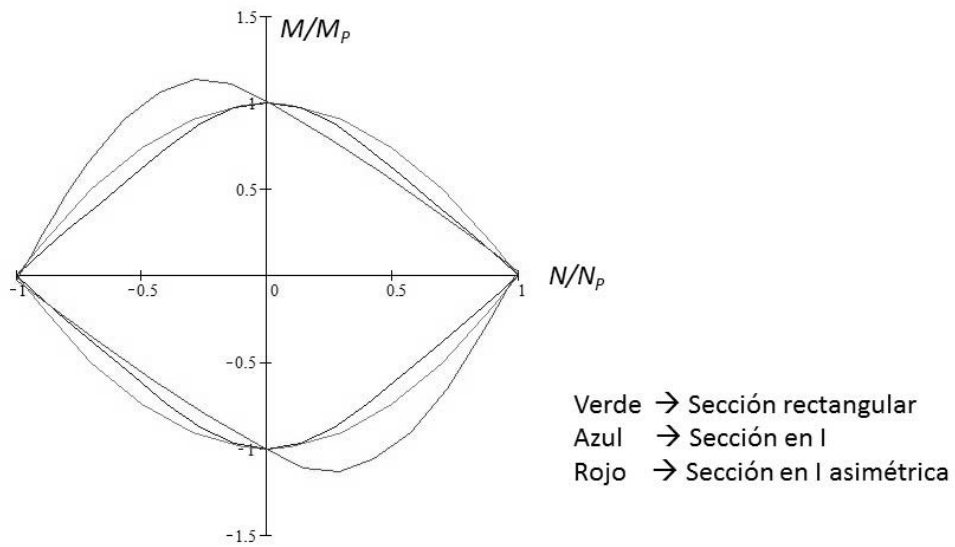
- Sección simplemente simétrica)



- Sección doblemente simétrica

# Interacción axil-flector

Algunos diagramas de interacción axil-flector



## Interacción flector-cortante

---

### Flexión simple (o compuesta con cortante)

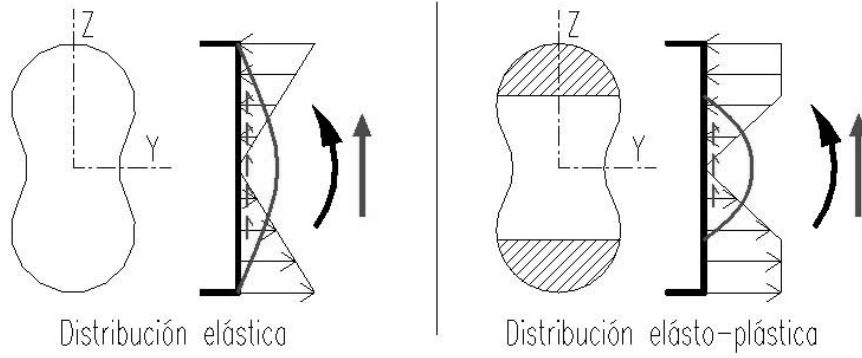
- Aparecen tensiones  $\sigma$  y  $\tau$
- Se requiere un criterio de plastificación para determinar el estado (elástico, plástico o imposible) en cada punto

### Se adopta el criterio de plastificación de von Mises

- En vigas a flexión, sólo  $\sigma_x = \sigma$  y  $\tau_{xy} = \tau$  →  $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_E^2$
- Si  $\tau = 0$  →  $|\sigma| = \sigma_E$
- Si  $\sigma = 0$  →  $|\tau| = \sigma_E / \sqrt{3}$

# Interacción flector-cortante

Formulación de Bezukhov<sup>1</sup>

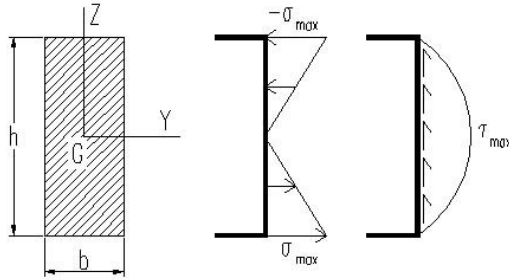


<sup>1</sup> Bezukhov (1936)

# Interacción flector-cortante

## Formulación de Bezukhov en una sección rectangular

- Distribución elástica de tensiones



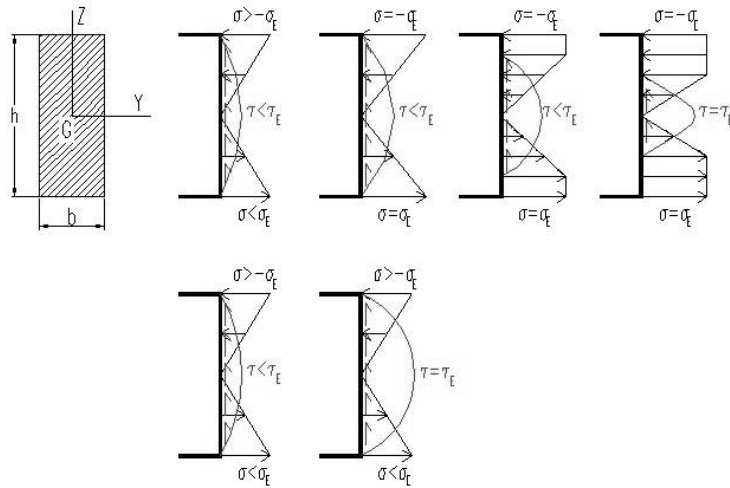
- La plastificación comienza por las fibras extremas o por la fibra media (Benito, 1975)



# Interacción flector-cortante

## Formulación de Bezukhov en una sección rectangular

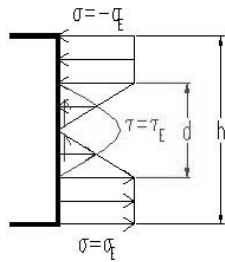
- Evolución de las tensiones



# Interacción flector-cortante

## Formulación de Bezukhov en una sección rectangular

- Determinación



$$V_P = \frac{2}{3} \tau_E b h$$

$$\frac{M}{M_P} = \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{3} \right] \quad \text{sent} \quad \alpha = \frac{d}{h}$$

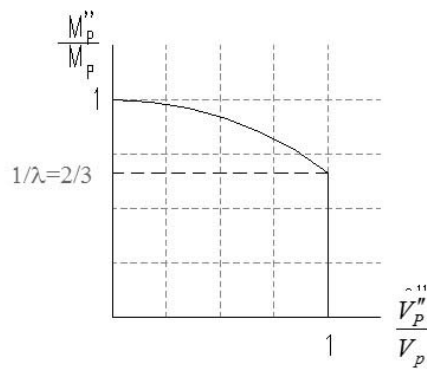
$$V_P'' = \frac{2}{3} \tau_E b d \quad \rightarrow \quad \frac{V_P''}{V_P} = \frac{d}{h} = \alpha$$

$$\frac{M_P''}{M_P} = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{V_P''}{V_P} \right)^2$$

# Interacción flector-cortante

## Formulación de Bezukhov en una sección rectangular<sup>1</sup>

- Representación gráfica



$$\frac{M_p''}{M_p} = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{V_p''}{V_p} \right)^2$$

<sup>1</sup>La aplicación de esta formulación a secciones en I se puede consultar en Benito (1975). Hoy, para este tipo de secciones se utiliza habitualmente la formulación alternativa que se presentará a continuación.

# Interacción flector-cortante

## Teorema estático o de la cota inferior<sup>1</sup>

En un cuerpo formado por un material elástico-perfectamente plástico y en el instante de la plastificación, el trabajo virtual complementario de los vectores tensión reales es mayor o igual que el trabajo virtual complementario de los vectores tensión deducidos de cualquier distribución de tensiones estáticamente admisible que no viole en ningún punto el criterio de plastificación.

$$\int_{S_d} t^i d_i dS \geq \int_{S_d} \delta T^{ij} n_j d_i dS = \int_{S_d} \delta t^i d_i dS$$

(En este tema usaremos la primera formulación del teorema, pero en el tema posterior recurriremos a la segunda.)

## Formulación alternativa<sup>2</sup>

Si se puede encontrar una distribución de tensiones que esté en equilibrio con las fuerzas exteriores y no viole el criterio de plastificación en ningún punto, la estructura no colapsará o bien estará justo en el instante del colapso.

<sup>1</sup> Chakrabarty, (1987, pág. 95). Aunque en el texto se enuncia en términos de potencia (virtual), aquí se ha preferido hacer en términos de trabajo virtual complementario (trabajo de fuerzas virtuales).

<sup>2</sup> Chen, (1982, pág. 298), Jirásek y Bažant (2002, pág. 57)

# Interacción flector-cortante

## Teorema estático o de la cota inferior

$$\int_{S_d} t^i d_i dS \geq \int_{S_d} \delta T^{ij} n_j d_i dS = \int_{S_d} \delta t^i d_i dS$$

### Hipótesis y notación:

- Material elástico-perfectamente plástico
- En el instante de la plastificación
- $\delta T^{ij}$  estáticamente admisible  $\rightarrow$  cumple
  - las ecuaciones de equilibrio interno con fuerzas de volumen
  - las condiciones de contorno estáticas con de superficie nulas
- $S_d \rightarrow$  parte del contorno donde se definen condiciones de contorno cinemáticas
- $t^i$  y  $d_i \rightarrow$  campos de vectores tensión y de desplazamientos reales

# Interacción flector-cortante

## Formulación basada en el teorema estático<sup>1</sup>

- Consideremos un tramo de viga limitado por dos secciones transversales.
- Definamos una distribución tensional uniforme a lo largo del tramo (idéntica en todas las secciones), que sea estáticamente admisible y que no viole el criterio de plastificación en ningún punto.
- Si la sección es simétrica respecto al eje Z, estáticamente admisible significa que cumpla
  - $\frac{\partial}{\partial X}[b(Z)\sigma(X,Z)] + \frac{\partial}{\partial Z}[b(Z)\tau(X,Z)] = 0 \quad \forall Z$
  - $\tau(X, Z_{MAX}) = 0$  y  $\tau(X, Z_{MIN}) = 0$
- Considerando campos de desplazamientos tales que la sección dorsal permanece fija y la frontal se desplaza según  $\mathbf{d} = u\mathbf{i} = \mathbf{cte.}$ ,  $\mathbf{d} = kZ\mathbf{i}$  con  $k = \mathbf{cte.}$  o  $\mathbf{d} = v\mathbf{k}$ , el teorema permite determinar cotas inferiores de los esfuerzos de agotamiento.

<sup>1</sup> Chakrabarty, (1987, pág. 95).

# Interacción flector-cortante

Formulación basada en el teorema estático<sup>1</sup>

$$\left. \int_{S_d} t^i d_i dS \geq \int_{S_d} \delta^i d_i dS \right\} \Rightarrow \int_{S_d} t_X u dS \geq \int_{S_d} \delta_X u dS \Rightarrow u \underbrace{\int_{S_d} t_X dS}_{N_{P,real}} \geq u \underbrace{\int_{S_d} \delta_X dS}_{\delta V_p \leftarrow \text{cota inferior}}$$

**d = ui = cte.**

$$\left. \int_{S_d} t^i d_i dS \geq \int_{S_d} \delta^i d_i dS \right\} \Rightarrow \int_{S_d} t_X kZ dS \geq \int_{S_d} \delta_X kZ dS \Rightarrow k \underbrace{\int_{S_d} t_X Z dS}_{M_{P,real}} \geq k \underbrace{\int_{S_d} \delta_X Z dS}_{\delta M_p \leftarrow \text{cota inferior}}$$

**d = kZi = cte.**

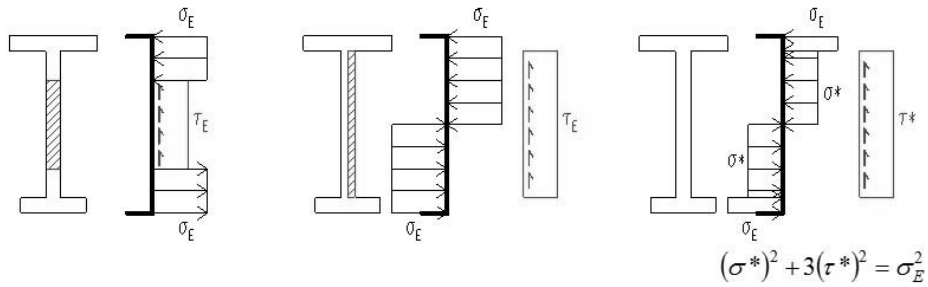
$$\left. \int_{S_d} t^i d_i dS \geq \int_{S_d} \delta^i d_i dS \right\} \Rightarrow \int_{S_d} t_X v dS \geq \int_{S_d} \delta_X v dS \Rightarrow v \underbrace{\int_{S_d} t_X dS}_{V_{P,real}} \geq v \underbrace{\int_{S_d} \delta_X dS}_{\delta V_p \leftarrow \text{cota inferior}}$$

**d = vk = cte.**

Nótese que el teorema estático garantiza que los axiles y momentos de plastificación hallados en los puntos anteriores, y las parejas flector cortante halladas con la formulación de Bezukhov son cotas inferiores de los esfuerzos que realmente originan la plastificación.

# Interacción flector-cortante

Diagrama de interacción flector cortante para secciones en I, basado en el teorema estático<sup>1</sup>



- Se supone un valor del cortante a partir del cual se determina
  - En el primer procedimiento, la altura del alma plastificada
  - En el segundo, la anchura del alma plastificada
  - En el tercero,  $\tau^*$  y  $\sigma^*$
- Con la condición  $N=0$  se determina la posición de la fibra neutra
- La resultante y el momento resultante de la distribución definen  $(M''_{pr}, V''_{pr})$

<sup>1</sup> Horne y Morris (1981)



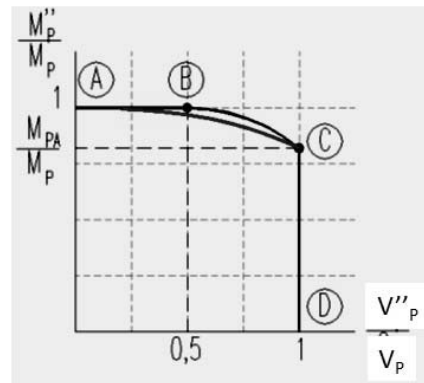
# Interacción flector-cortante

Diagrama de interacción flector cortante para secciones en I, art. 5.6.7 Eurocódigo 3

- Tramos AB y CD –rectos
- Tramo BC

$$M_P'' = M_{PA} + (M_P - M_{PA}) \left[ 1 - \left( \frac{2V_P''}{V_P} - 1 \right)^2 \right]$$

- $V_P$  y  $M_{PA}$  → diapositiva siguiente
- Punto B

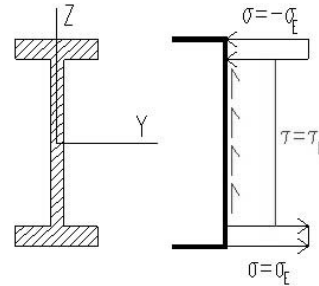


Azul → resultado aproximado procedimientos anteriores

# Interacción flector-cortante

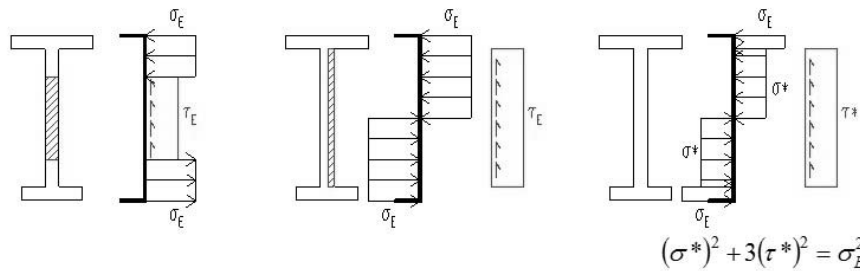
Diagrama de interacción flector cortante para secciones en I, art. 5.6.7 Eurocódigo 3

- $V_P = \sigma_E A_a$ , siendo  $A_a$  el área del alma
- $M_{pA} \rightarrow$  Momento de plastificación de las alas (cuidado, si las áreas de las alas no son iguales, la fibra neutra plástica divide en dos partes a la mayor).



## Interacción flector-axil-cortante

Adoptamos una de las formulaciones del libro de Horne y Morris



- La primera plantea la dificultad adicional de tener que fijar a que altura se supone el tramo del alma plastificado
- Cualquiera de las otras dos sirve para completar fácilmente el procedimiento

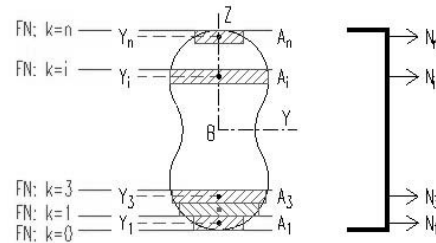
Para cada valor del cortante (menor que  $V_p$ ), determinamos

- Proc. 2) La anchura equivalente del alma (descontado el tramo plastificado)
- Procedimiento 3) La tensión de plastificación equivalente,  $\sigma^*$

## Interacción flector-axil-cortante

Aplicamos la formulación descrita en la diapositiva 57 considerando

- La anchura del alma equivalente (procedimiento 2)
- El límite elástico equivalente sólo en el alma (procedimiento 3)



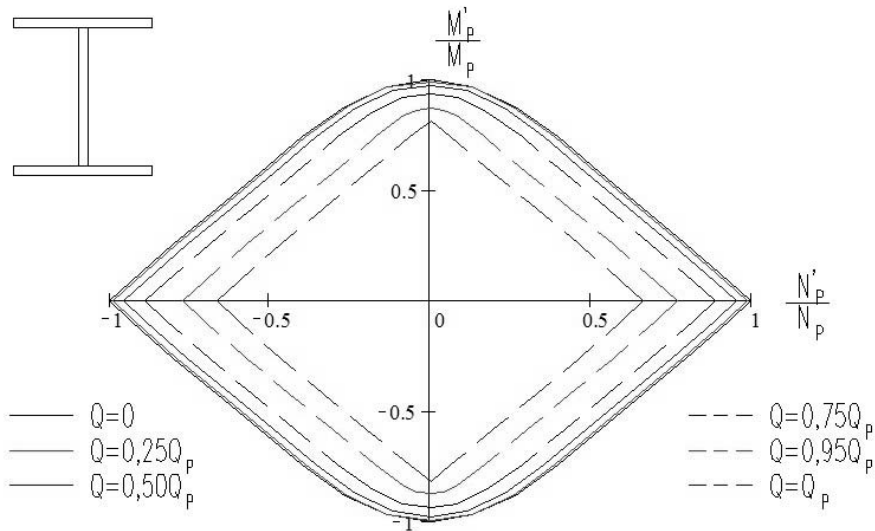
Así obtenemos una curva

$N'''_p - M'''_p$  concomitante con el cortante  $V'''_p$  supuesto.

Repitiendo el procedimiento para varios cortantes se obtiene la superficie de interacción en planos acotados.

# Interacción flector-axil-cortante

Ejemplo de diagramas  $N''_p-M''_p$  para varios valores de  $V''_p$



# Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura

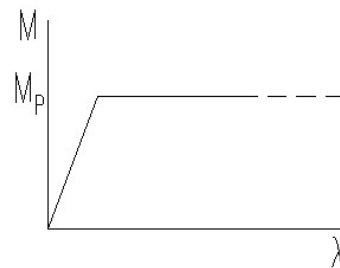
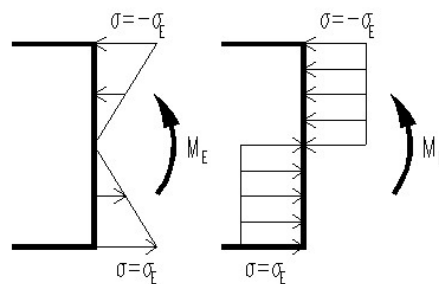
## Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura

### Criterios de agotamiento

- Análisis elástico
- Análisis plástico

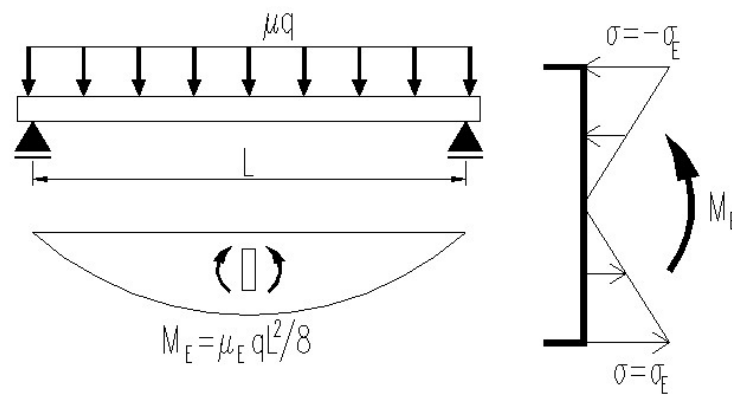
### Hipótesis del estudio

- Carga proporcional
- Relación momentos-curvaturas



## Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura

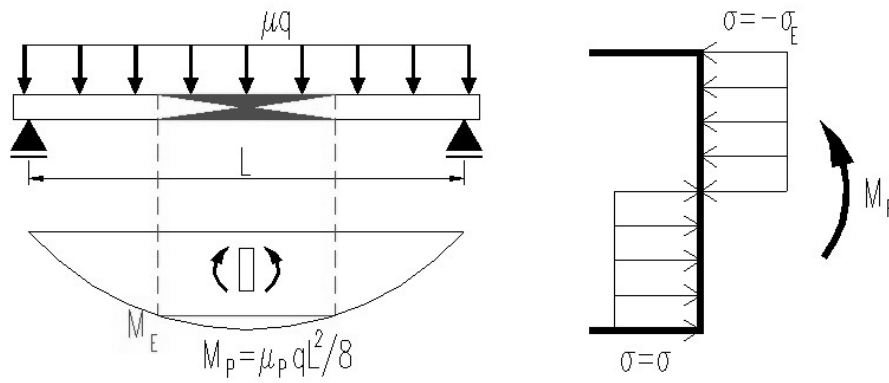
Viga simplemente apoyada. Agotamiento elástico



## Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura

### Viga simplemente apoyada. Agotamiento plástico

- Se requiere UNA rótula plástica

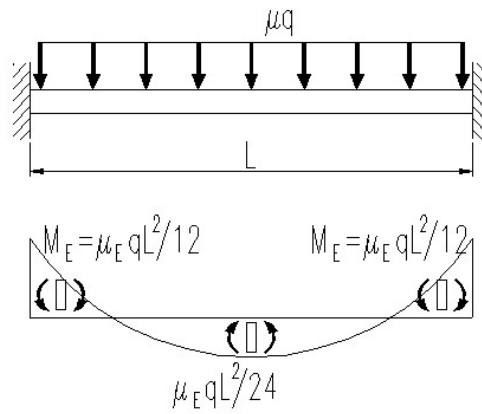


$$M_p = \lambda M_E \Rightarrow \mu_p = \lambda \mu_E$$



# Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura

Viga Biempotrada. Agotamiento elástico

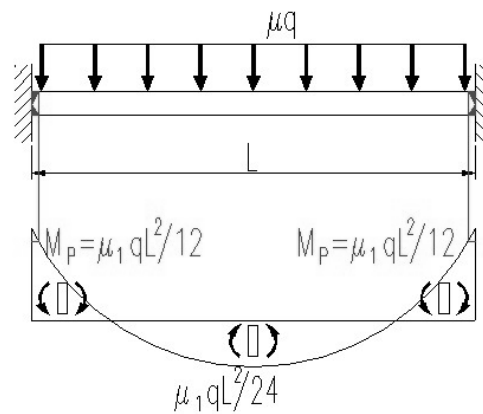


## Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura

### Viga biempotrada. Agotamiento plástico

- Se requieren TRES rótulas plásticas

Formación de las dos primeras rótulas plásticas (simultánea)



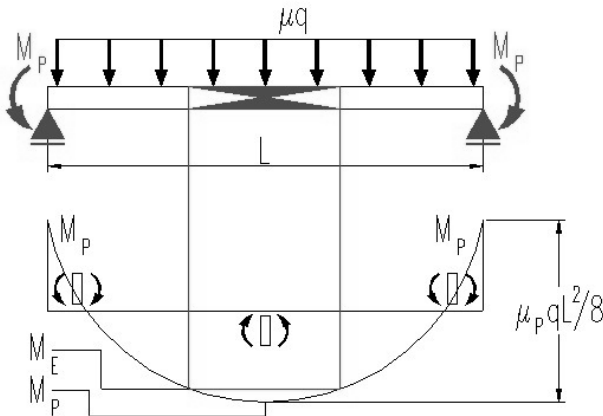
$$M_p = \lambda M_E \Rightarrow \mu_1 = \lambda \mu_E$$

# Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura

## Viga biempotrada. Agotamiento plástico

- Se requieren TRES rótulas plásticas

Formación de la tercera rótula plástica



$$\left. \begin{aligned} \mu_p \frac{qL^2}{8} &= 2M_p = 2\lambda M_E \\ \mu_E \frac{qL^2}{12} &= M_E \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_p \frac{qL^2}{8} = 2\lambda \mu_E \frac{qL^2}{12}$$

$$\Rightarrow \mu_p = \frac{4}{3} \lambda \mu_E$$

# Comparación del análisis elástico y el análisis en rotura

---

## Conclusiones

### El análisis plástico (límite):

- Explica el comportamiento hasta el colapso
- Permite aprovechar mejor el material
  - $M_p > M_E$
  - Redistribución
- Estimación más precisa del margen real de seguridad

### Sencillez de cálculo: ¿ventaja o falacia?

### Campo de aplicación

- EIU
- Tipo de Estructuras
- Ductilidad

## Bibliografía

---

### Bibliografía

---

BENITO, C., *Nociones básica de plasticidad*, (4ª ed.) Madrid , 1975

BEZUKHOV, N.I. “Sobre la teoría de la flexión plástica” [en ruso] *Vestnik Inzhenerov i Tekhnikov*, vol. 10, Moskva, 1936

CHEN, W.F. *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, New York, 1982

COURBON, J., *Tratado de Resistencia de Materiales*, Ediciones Aguilar, Madrid, 1968

DALMAU, M.R. y VILARDELL, J. *Análisis plástico de estructuras. Introducción*, Edicions UPC, Barcelona, 2003

## Bibliografía

---

ESTABILIDAD III – CAPITULO III: ANÁLISIS PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS,  
Universidad Nacional del Noroeste, Argentina.  
[http://ing.unne.edu.ar/pub/e3\\_cap5.pdf](http://ing.unne.edu.ar/pub/e3_cap5.pdf), [consulta  
17/01/2015]

GHALI, A. y NEVILLE, A. M. *Structural Analysis. A Unified  
Classical and Matrix Approach* (3ª ed.), Chapman and Hall,  
Londres, 1989

HORNE M.R. y MORRIS L.J. *Plastic desing of low-rise frames*,  
Granada Publishing, London, 1981

JIRÁSEK, M. y BAŽANT, Z.P. *Inelastic Analisys of Structures*,  
willey, New York, 2002

---

Tema 2:

## Formulación básica del análisis en rotura de los elementos estructurales (II)

---

CAPÍTULO I:  
Introducción  
al análisis en  
rotura

J. Casanova

TEMA 2:

## *Formulación básica del análisis en rotura de los elementos estructurales (II)*

TEORIA AVANZADA DE ESTRUCTURAS

1

# Índice

---

## Índice

---

1. Introducción
2. Método paso a paso
3. Teorema de unicidad de la solución
4. Teoremas de la cota
5. Bibliografía



# Introducción

## Introducción

### Tipo de carga

- Monótona creciente
- Conjunto de fuerzas generalizadas cuyo valor aumenta manteniéndose la proporción entre ellas.

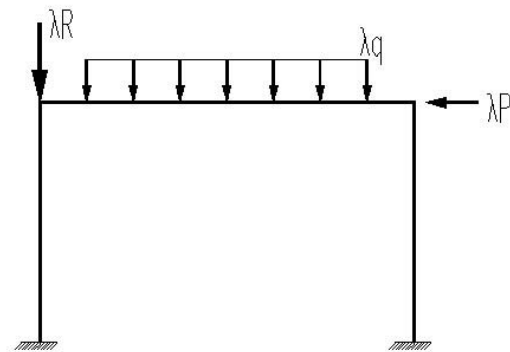
### Representación

- Conjunto de fuerzas conocidas
- Factor escalar  $\lambda \in [0, \infty[$

### Objetivos del tema

Determinar la carga de colapso de la estructura, representada por el factor escalar.

### Ejemplo



- $P, R$  y  $q$  son los datos
- $\lambda$  es el escalar

# Introducción

---

## Respuesta de la estructura a una carga monótona creciente

- $\lambda$  pequeño  $\rightarrow$  respuesta elástica
- $\lambda$  empieza a aumentar
  - formación de la primera rótula plástica
  - formación de la segunda rótula plástica
  - ...
- Colapso

## Carga de colapso

- Valor de  $\lambda$  correspondiente a la formación de la rótula plástica que convierte a la estructura, o a parte de ella, en un mecanismo.

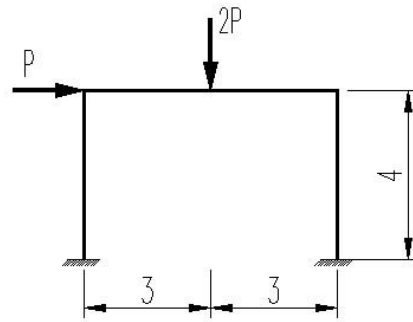
# Método paso a paso

## Método paso a paso

Exposición → ejemplo

Problema:

- Pórtico representado
  - $H=3$ ,  $N_R=H+1=4$
- Sección IPE360
  - $A = 53,8 \text{ cm}^2$ ,  $A_v=35,1 \text{ cm}^2$
  - $W_{el}=904 \text{ cm}^3$ ,  $W_{pl}=1019 \text{ cm}^3$
  - $h=360 \text{ mm}$ ,  $b=170 \text{ mm}$
  - $t_f=12,7 \text{ mm}$ ,  $t_w=8 \text{ mm}$
- Material
  - Elástico-perfectamente plástico
  - $\sigma_E = 353 \text{ MPa}$



$$M_E = \sigma_E W_{el} = 319 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

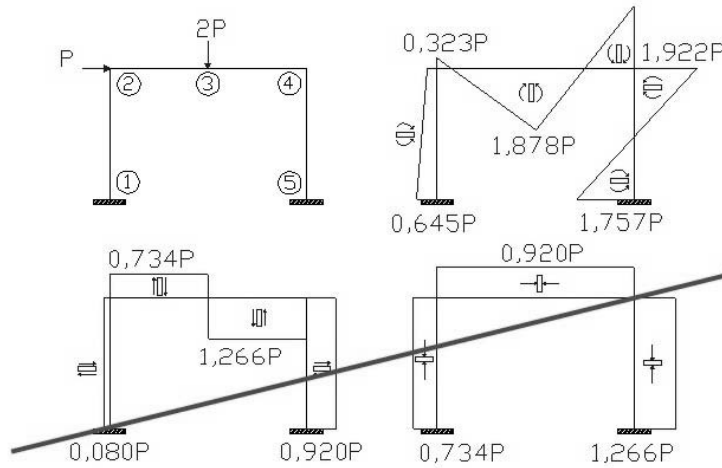
$$M_P = \sigma_E W_{pl} = 360 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$N_p = \sigma_E A = 1899 \text{ kN}$$

$$V_p = \frac{\sigma_E}{\sqrt{3}} A_v = 715 \text{ kN}$$

# Método paso a paso

## Fase 1: análisis elástico lineal de la estructura inicial



Despreciaremos el efecto de los axiles y los cortantes en el análisis. Normalmente, el error que esto induce es despreciable. Cf. Jirásek y Bažant (2002, pág. 47)

## Método paso a paso

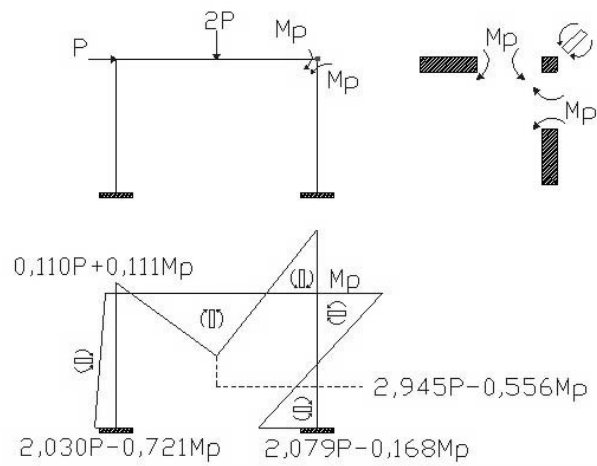
---

Fase 1: análisis elástico lineal de la estructura inicial

- Momento máximo  $\rightarrow |M_{max}| = 1,922P$
- Agotamiento, criterio elástico  $\rightarrow |M_{max}| = M_E \rightarrow P = 166,0 \text{ kN}$
- Primera rótula plástica  $\rightarrow |M_{max}| = M_p \rightarrow P = 187,3 \text{ kN}$

# Método paso a paso

Fase 2: análisis de la estructura con un rótula plástica (se transforma en un cálculo elástico lineal)



## Método paso a paso

---

Fase 2: análisis de la estructura con un rótula plástica

Formación de la segunda rótula plástica

$$|M_3| = 2,945P - 0,556M_p = M_p \quad \Rightarrow P = 0,528M_p$$

$$|M_1| = 2,030P - 0,721M_p = M_p \quad \Rightarrow P = 0,848M_p$$

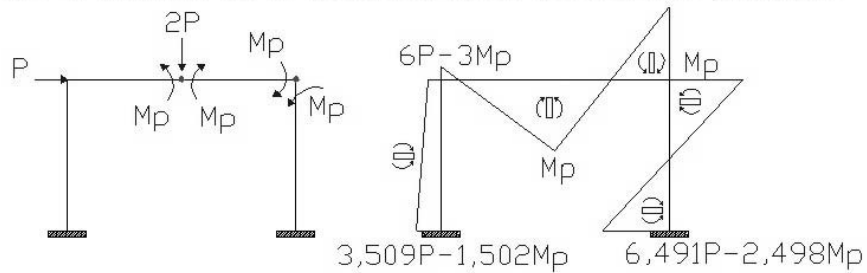
$$|M_5| = 2,079P - 0,168M_p = M_p \quad \Rightarrow P = 0,562M_p$$

Así pues, la segunda rótula plástica se forma en el punto 3 cuando la carga alcanza un valor de

$$P = 0,528 M_p = 190,1 \text{ kN}$$

## Método paso a paso

### Fase 3: análisis de la estructura con dos rótulas plásticas



$$|M_2| = 6P - 3M_p = M_p \quad \Rightarrow P = 0,667M_p$$

$$|M_5| = 6,491P - 2,498M_p = M_p \quad \Rightarrow P = 0,539M_p$$

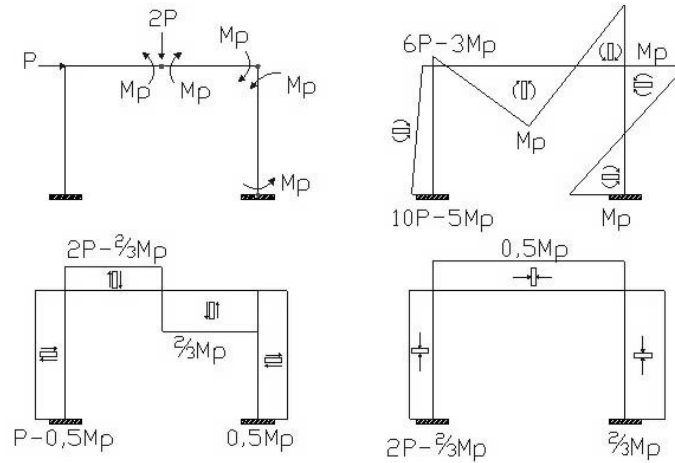
$$|M_1| = 3,509P - 1,502M_p = M_p \quad \Rightarrow P = 0,713M_p$$

3ª rótula plástica  $\rightarrow$  se forma en 5 cuando  $P = 0,539 M_p = 194,0 \text{ kN}$



# Método paso a paso

## Fase 4: análisis de la estructura con tres rótulas plásticas



## Método paso a paso

---

Fase 4: análisis de la estructura con tres rótulas plásticas

$$|M_1| = 10P - 5M_p = M_p \quad \Rightarrow P = 0,6M_p$$

$$|M_2| = 6P - 3M_p = M_p \quad \Rightarrow P = 0,667M_p$$

4ª rótula (colapso) → en 3 cuando  $P = 0,6 M_p = 216 \text{ kN}$

## Método paso a paso

---

### Evaluación del efecto del axil y del cortante

Se comprueba que, en este caso concreto, el hecho de prescindir de la interacción con el axil y el cortante se ajusta a la normativa (la EAE-12, suponiendo que el material es acero)

Cortante máximo y axil máximo en la estructura

$$|V_{1-2}| = 0,100 M_p = 36 \text{ kN}$$

$$|N_{1-2}| = 0,533 M_p = 192 \text{ kN}$$

$$|V_{2-3}| = 0,533 M_p = 192 \text{ kN}$$

$$|N_{2-4}| = 0,500 M_p = 180 \text{ kN}$$

$$|V_{3-4}| = 0,667 M_p = 240 \text{ kN}$$

$$|N_{4-5}| = 0,667 M_p = 240 \text{ kN}$$

$$|V_{4-5}| = 0,500 M_p = 180 \text{ kN}$$

$$|V_{\max}| = 240 \text{ kN}$$

$$|N_{\max}| = 240 \text{ kN}$$

Del lado de la seguridad, consideraremos concomitantes el cortante máximo, el axil máximo y el momento de plastificación.

# Método paso a paso

---

## Evaluación del efecto del axil y del cortante

### Efecto del cortante

- Según art. 34.7.3 de la EAE-12, si el cortante actuante no supera la mitad del de plastificación, no se reduce la resistencia a axil y flector determinada sin tenerlo en cuenta.

$$|V_{\max}| = 240 \text{ kN} \leq 0,5V_p = 0,5 * 715 = 358 \text{ kN}$$

- Según art. 34.7.2.1 de la EAE-12, si el axil actuante no supera la condición que se indica debajo, no se reduce la resistencia a flexión determinada sin tenerlo en cuenta.

$$|N_{\max}| = 240 \text{ kN} \leq \min \{0,25N_p; 0,5h_w t_e \sigma_E\} = \min \{474, 472\} = 472 \text{ kN}$$

- Así pues, la normativa permite el cálculo considerando que el agotamiento se produce cuando el flector iguala al momento de plastificación, corroborando nuestra hipótesis inicial.

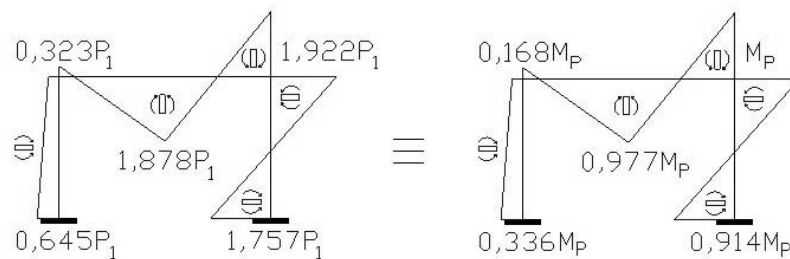
# Método paso a paso

## Formulación alternativa

- De complejidad similar a la anterior operando a mano
- Más adecuada como base para elaborar un programa que automatice el cálculo

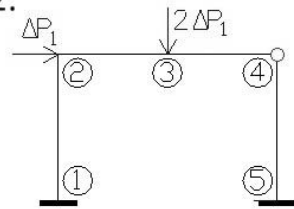
## Fase 1: idéntica a la del procedimiento anterior.

- Como resultado se obtiene  $|M_{max}| = M_p \rightarrow P = 187,3 \text{ kN y}$



# Método paso a paso

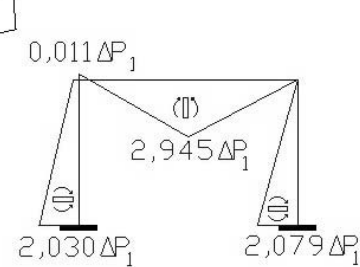
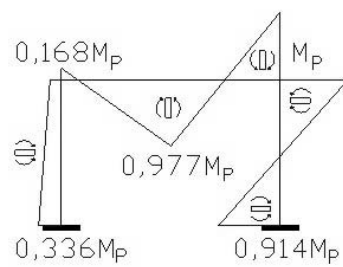
Fase 2:



$$|M_3| = 0,977M_p + 2,945\Delta P_1 = M_p$$

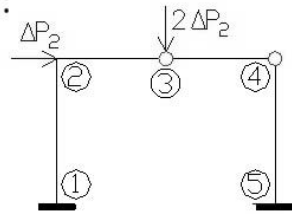
$$\Rightarrow \Delta P_1 = 0,00781M_p = 2,81 \text{ kN}$$

$$P_2 = P_1 + \Delta P_1 = 190,1 \text{ kN}$$



# Método paso a paso

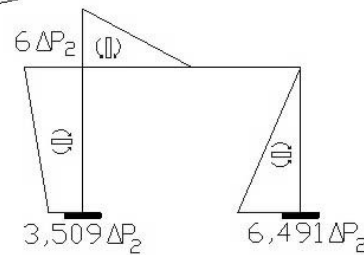
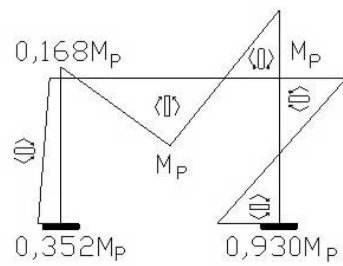
Fase 3:



$$|M_5| = 0,930M_p + 6,491\Delta P_2 = M_p$$

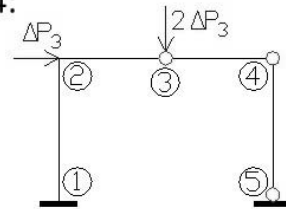
$$\Rightarrow \Delta P_2 = 0,0108M_p = 3,88 \text{ kN}$$

$$P_3 = P_2 + \Delta P_2 = 194,0 \text{ kN}$$



# Método paso a paso

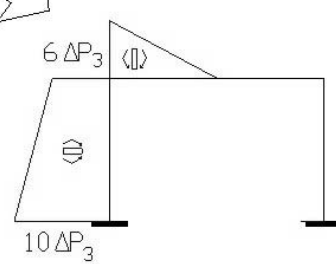
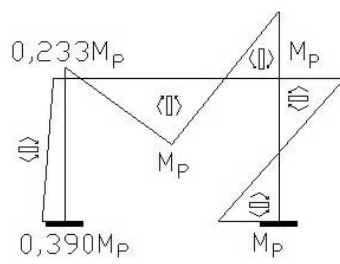
Fase 4:



$$|M_1| = 0,390M_p + 10\Delta P_3 = M_p$$

$$\Rightarrow \Delta P_3 = 0,0610M_p = 22,00 \text{ kN}$$

$$P_4 = P_3 + \Delta P_4 = 216,0 \text{ kN}$$





## Teorema de unicidad de la solución

---

### Teorema de unicidad de la solución

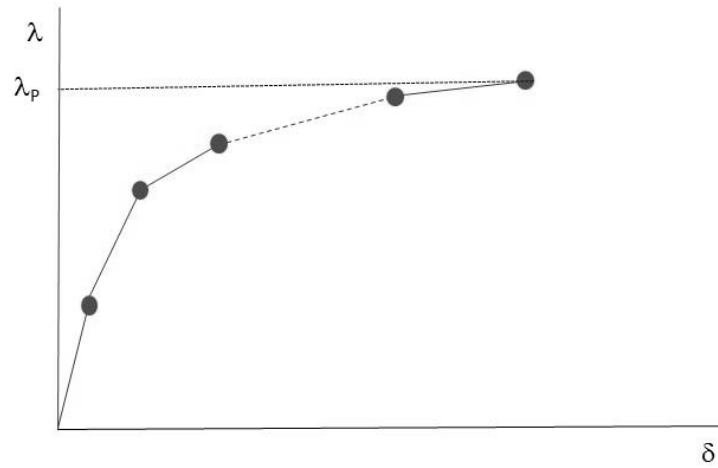
---

El problema de determinar por cuánto se debe multiplicar un estado de cargas para producir el colapso de la estructura tiene solución única, que se caracteriza por:

- Cumplir las condiciones de equilibrio
- Que el momento flector no viole en ningún sitio la condición de plastificación  $-M_p \leq M \leq M_p$
- Que las rótulas plásticas formadas conviertan la estructura en un mecanismo

# Teorema de unicidad de la solución

Justificación



### Teoremas de la cota

---

#### **Teorema estático (o teorema de la cota inferior)**

Una estructura no colapsa bajo la acción de un estado de carga en equilibrio con un conjunto de reacciones internas y externas que determinan una ley de momentos flectores que no supera en ningún punto de la estructura la condición de plastificación ( $-M_p \leq M \leq M_p$ ).

#### Enunciado alternativo 1

Si se puede encontrar una distribución de tensiones que esté en equilibrio con las fuerzas exteriores y no viole el criterio de plastificación en ningún punto, la estructura no colapsará o bien estará justo en el instante del colapso.

# Teoremas de la cota

---

## Enunciado alternativo 2

El factor de carga correspondiente a una sollicitación estáticamente admisible que no viola el criterio de plastificación determina una cota inferior de la carga de colapso.

## Enunciado alternativo 3

La carga de colapso es el máximo de los factores de carga correspondientes a sollicitaciones estáticamente admisibles que no violan el criterio de plastificación.

(Demostración → Ver anejo)

# Teoremas de la cota

---

## El teorema estático y las verificaciones de resistencia en ELU

- Método de los estados límite. Comprobaciones de ELU  $\rightarrow E_d \leq R_d$ 
  - $E_d$  son los efectos de las acciones, mayorados. En general, se pueden determinar por métodos
    - Elásticos (1<sup>o</sup> o 2<sup>o</sup> orden)
    - Elasto-plásticos (1<sup>o</sup> o 2<sup>o</sup> orden)
    - Rígido-plásticos
  - $R_d$  representa la resistencia, minorada. En general se determina por métodos elásto-plásticos o rígido-plásticos.
  - Existe una aparente contradicción al permitirse diferentes procedimientos para determinar los efectos y la resistencia.

# Teoremas de la cota

---

## El teorema estático y las verificaciones de resistencia en ELU

- El teorema estático garantiza que la estructura no colapsará si
  - Se cumplen las condiciones de equilibrio, lo cual garantiza cualquiera de los métodos de determinación de  $E_d$
  - Se respecta en criterio de plastificación, que es la condición que realmente se comprueba ( $E_d \leq R_d$ )
- Esto es válido si se evita la rotura frágil (pandeo, abolladura).  
**¡Ductilidad!**

# Teoremas de la cota

---

## **El teorema cinemático o teorema de la cota superior**

El factor de carga que define una sollicitación que mantiene en equilibrio un mecanismo de plastificación determina una cota superior de la carga de colapso de la estructura.

(Demostración → Ver anejo)

# Bibliografía

---

## Bibliografía

---

BENITO, C., *Nociones básica de plasticidad*, (4ª ed.) Madrid , 1975

CHEN, W.F. *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, New York, 1982

COURBON, J., *Tratado de Resistencia de Materiales*, Ediciones Aguilar, Madrid, 1968

DALMAU, M.R. y VILARDELL, J. *Análisis plástico de estructuras. Introducción*, Edicions UPC, Barcelona, 2003

GHALI, A. y NEVILLE, A. M. *Structural Analysis. A Unified Classical and Matrix Approach* (3ª ed.), Chapman and Hall, Londres, 1989



## Bibliografía

---

HORNE M.R. y MORRIS L.J. *Plastic desing of low-rise frames*, Granada Publishing, London, 1981

JIRÁSEK, M. Y BAŽANT, Z.P. *Inelastic Analisys of Structures*, willey, New York, 2002

---

# Anejo:

## Demostración de los Teoremas de la Cota

---

Teorema Estático (o de la Cota Inferior)

Enunciado

Una estructura no colapsa bajo la acción de un estado de carga en equilibrio con un conjunto de reacciones internas y externas que determinan una ley de momentos flectores que no supera en ningún punto de la estructura la condición de plastificación ( $-M_p \leq M \leq M_p$ ).

OBSERVACIÓN: Tenga en cuenta que el teorema exige que las reacciones internas y externas cumplan las condiciones de equilibrio, pero no dice nada de ninguna condición de compatibilidad. En una estructura hiperestática se pueden encontrar un sinnúmero de configuraciones de cargas y reacciones que cumplan las condiciones de equilibrio (recuerde que recurrimos a las condiciones de compatibilidad para determinar entre todas ellas qué resuelve el problema).

Enunciado alternativo

El factor de carga correspondiente a una sollicitación estáticamente admisible<sup>1</sup> que no viola el criterio de plastificación<sup>2</sup> determina una cota inferior de la carga de colapso<sup>3</sup>.

Enunciado alternativo 2

La carga de colapso es el máximo de los factores de carga correspondientes a sollicitaciones estáticamente admisibles que no violan el criterio de plastificación.

Demostración

Supongamos una estructura genérica sometida a un conjunto de fuerzas puntuales  $\delta P_i$  aplicadas en los puntos  $i=1,2,3 \dots$ , y una serie de cargas repartidas  $q_j(x)$  que actúan sobre las barras  $j=1,2,3 \dots$ . Sean  $k=1,2,3 \dots$  los puntos donde se pueden formar rótulas plásticas, y  $M_k$  el momento flector en el punto  $k$ . Finalmente, representemos por  $\delta u^m_i$  el desplazamiento virtual del punto  $i$ , por  $\delta d^m_j(x)$  la ley de desplazamientos virtuales de la barra  $j$  y por  $\delta \theta^m_k$  el giro virtual en los puntos  $k$ , todos ellos correspondientes al desplazamiento virtual cinemáticamente admisible  $m$ . Nótese que  $\delta \theta^m_k = 0$  si en el punto en cuestión no se ha formado una rótula plástica.

El teorema de los trabajos virtuales asegura que el sistema está en equilibrio si y sólo si el trabajo virtual de las fuerzas externas iguala el de las fuerzas internas para cualquier desplazamiento virtual cinemáticamente admisible, es decir, si

---

<sup>1</sup> Es decir, que cumple las condiciones de equilibrio.

<sup>2</sup> Esto es, que determina una ley de flectores que satisface la condición  $-M_p \leq M \leq M_p$  en todos los puntos de la estructura.

<sup>3</sup> Factor de carga en el instante del colapso.

$$\sum_i [(\lambda \mathbf{P}_i) \delta \mathbf{u}_i^m] + \sum_j \int_{L_j} [(\lambda \mathbf{q}_j(x)) \delta \mathbf{d}_j^m(x)] dx = \sum_k M_k \delta \theta_k^m \quad (1)$$

$$\lambda \left\{ \sum_i [(\mathbf{P}_i) \delta \mathbf{u}_i^m] + \sum_j \int_{L_j} [(\mathbf{q}_j(x)) \delta \mathbf{d}_j^m(x)] dx \right\} - \sum_k M_k \delta \theta_k^m = 0$$

Representemos por  $\lambda^p$  el factor de carga correspondiente al mecanismo de colapso real y por  $\delta \mathbf{u}_i^p$ ,  $\delta \mathbf{d}_j^p(x)$  y  $\delta \theta_k^p$  los parámetros que definen un desplazamiento virtual admisible de dicho mecanismo. El teorema de los trabajos virtuales asegura el cumplimiento de (1) para cualquier desplazamiento virtual cinemáticamente admisible, y en particular para el correspondiente al mecanismo de colapso; por tanto

$$\lambda^p \left\{ \sum_i [(\mathbf{P}_i) \delta \mathbf{u}_i^p] + \sum_j \int_{L_j} [(\mathbf{q}_j(x)) \delta \mathbf{d}_j^p(x)] dx \right\} - \sum_k M_k \delta \theta_k^p = 0 \quad (2)$$

donde  $|M_k| = M_p$  si  $k \in A$  y  $\delta \theta_k^p = 0$  si  $k \notin A$ .

siendo  $A$  el subconjunto de puntos  $k$  donde se ha formado una rótula plástica en el mecanismo de plastificación considerado. Observe que el sustraendo siempre debe ser positivo porque el momento flector y el giro deben tener el mismo signo.

Sea  $\lambda$  un factor de carga para el cual se puede encontrar un conjunto de reacciones en equilibrio que originan una ley de fletores  $M(x)$  que no supera en ningún punto de la estructura la condición de plastificación ( $-M_p \leq M(x) \leq M_p$ ). Como se cumple la condición de equilibrio se deberá verificar la ecuación (1) para cualquier desplazamiento virtual cinemáticamente admisible, y en particular para el correspondiente al mecanismo de colapso. Representando por  $M(x)$  la ley de momentos fletores y por  $M(x_k)$  los valores que adopta en los puntos donde se pueden formar rótulas plásticas tenemos:

$$\lambda \left\{ \sum_i [(\mathbf{P}_i) \delta \mathbf{u}_i^p] + \sum_j \int_{L_j} [(\mathbf{q}_j(x)) \delta \mathbf{d}_j^p(x)] dx \right\} - \sum_k M(x_k) \delta \theta_k^p = 0 \quad (3)$$

donde  $|M(x)| \leq M_p \quad \forall x$  y  $\delta \theta_k^p = 0$  si  $k \notin A$ .

restando ahora (3) de (2) se obtiene

$$(\lambda^p - \lambda) \left\{ \underbrace{\sum_i [(\mathbf{P}_i) \delta \mathbf{u}_i^p] + \sum_j \int_{L_j} [(\mathbf{q}_j(x)) \delta \mathbf{d}_j^p(x)] dx}_{(a)} \right\} - \underbrace{\sum_k [M_k - M(x_k)] \delta \theta_k^p}_{(b)} = 0 \quad (4)$$

donde (a) es positivo por exigencia de (2) y (b) lo es por exigencia de la condición  $|M(x)| \leq M_p$ . Así pues

$$(\lambda^p - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^p \geq \lambda \quad (5)$$

como queríamos demostrar.

Teorema Cinemático (o de la Cota Superior)

Enunciado

El factor de carga que define una sollicitación que mantiene en equilibrio un mecanismo de plastificación determina una cota superior de la carga de colapso de la estructura.

Demostración

Emplearemos la misma notación del apartado anterior. Sea  $\lambda$  el factor de carga para el que se cumplen las condiciones de equilibrio del mecanismo de plastificación  $m$ . El teorema de los trabajos virtuales exige que

$$\lambda \left\{ \sum_i [(\mathbf{P}_i) \delta \mathbf{u}_i^m] + \sum_j \int_{L_j} [(\mathbf{q}_j(x)) \delta \mathbf{d}_j^m(x)] dx \right\} - \sum_k M_k \delta \theta_k^m = 0 \quad (6)$$

donde  $|M_k| = M_p$  si  $k \in A$  y  $\delta \theta_k^m = 0$  si  $k \notin A$ .

siendo ahora  $A$  el subconjunto de puntos  $k$  donde se ha formado una rótula plástica en el mecanismo de plastificación considerado,  $m$ . Observe que los sustraendo siempre debe ser positivo porque el momento flector y el giro deben tener el mismo signo.

Apliquemos ahora el teorema de los trabajos virtuales considerando el factor de carga  $\lambda^p$  correspondiente al mecanismo de colapso y el desplazamiento virtual del mecanismo de plastificación  $m$ . Esto proporciona

$$\lambda^p \left\{ \sum_i [(\mathbf{P}_i) \delta \mathbf{u}_i^m] + \sum_j \int_{L_j} [(\mathbf{q}_j(x)) \delta \mathbf{d}_j^m(x)] dx \right\} - \sum_k M_k^p \delta \theta_k^m = 0 \quad (7)$$

donde  $|M_k^p| \leq M_p$  si  $k \in A$  y  $\delta \theta_k^m = 0$  si  $k \notin A$ .

siendo  $M_k^p$  el momento flector determinado por las cargas que originan el colapso en los puntos  $k$  donde se forman rótulas plásticas en el mecanismo de plastificación  $m$ .

Restando ahora (7) de (6) se obtiene

$$(\lambda - \lambda^p) \left\{ \underbrace{\sum_i [(\mathbf{P}_i) \delta \mathbf{u}_i^m] + \sum_j \int_{L_j} [(\mathbf{q}_j(x)) \delta \mathbf{d}_j^m(x)] dx}_{(a)} \right\} - \underbrace{\sum_k [M_k - M_k^p] \delta \theta_k^m}_{(b)} = 0 \quad (8)$$

donde (a) es positivo por exigencia de (6) y (b) por exigencia de la condición  $|M_k^p| \leq M_p = |M_k|$ . Así pues,

$$(\lambda - \lambda^p) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \lambda^p \quad (9)$$

como queríamos demostrar.