Cuaderno de

Mecánica Computacional de Sólidos

Josep Casanova Colon

Enero 2015

Cuaderno de Mecánica Computacional de Sólidos

Josep Casanova Colon

Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Universitat Politècnica de València

Enero de 2015

Cuaderno de Mecánica Computacional de Sólidos byJosep Casanova Colon is licensed under a Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional License.

Índice

Presentación de la asignatura

¿Qué es la Mecánica Computacional de Sólidos?

¿Qué es la **Mecánica Computacional de Sólidos**?

- La **Mecánica Computacional** se ocupa del desarrollo y aplicación de métodos numéricos y de ordenadores para la solución de los problemas planteados por la ingeniería y las ciencias aplicadas con los objetivos de comprender y aprovechar los recursos de la naturaleza.

Definición de la
Internactional Association for Computational Mechanics

3

¿Qué es la **Mecánica Computacional de Sólidos**?

- La **Mecánica Computacional** se ocupa de la utilización de métodos y dispositivos computacionales para el estudio de los fenómenos que se rigen por los principios de la mecánica.

Definición de la
United States Association for Computational Mechanics

4

¿Qué es la
Mecánica Computacional de Sólidos?

- La **Mecánica Computacional** […] se ocupa de la resolución de problemas mecánicos mediante métodos de aproximación numérica, que conllevan la discretización de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno tanto en el espacio y el tiempo.

  Presentación del
  Master Program on Computational Mechanics
  Technische Universität München

5

¿Qué es la **Mecánica Computacional de Sólidos**?

A modo de síntesis:

La **Mecánica Computacional** es la ciencia que se ocupa del desarrollo y aplicación de métodos numéricos a la resolución de problemas mecánicos en el ámbito de la ingeniería y las ciencias aplicadas, con los objetivos de comprender los fenómenos físicos y aprovechar los recursos naturales.

6

¿Qué es la **Mecánica Computacional de Sólidos**?

Carácter interdisciplinar de la Mecánica Computacional, que es, simultáneamente:

Nos ocuparemos, principalmente, de

- Una rama de la Ingeniería, que se centra en los aspectos mecánicos de la metodología.
- Una rama de la Informática, que se ocupa de la eficiencia de los algoritmos numéricos y en su implementación en el ordenador.
- Una rama de las Matémáticas, que trata de las aproximaciones, la convergencia y la precisión.

Extractado de
Kleiber, M. (ed.) *Handbook of Computational Sòlid Mechanics,* Springer, Berlin, 1998

7

¿Qué es la **Mecánica Computacional de Sólidos**?

Ámbito de la **Mecánica Computacional**:

- Principalmente:
  - Mecánica Computacional de Sólidos
  - Mecánica Computacional de Fluidos
- Pero también
  - Termodinámica
  - Electromagnetismo
  - Mecánica de Sólidos Rígidos
  - Sistemas de Control
  - ...

8

¿Qué es la **Mecánica Computacional de Sólidos**?

La **Mecánica Computacional de Sólidos** es la rama de la Mecánica Computacional que se ocupa de los sólidos (deformables) y los sistemas de sólidos o estructuras.

¿Qué es la **Mecánica Computacional de Sólidos**?

Procedimientos principales en Mecánica Computacional de Sólidos:

- **Método de los Elementos Finitos**
- Método de los Elementos de Contorno
- Métodos de las Diferencias Finitas

10

Resolución de un problema típico: fases

Resolución del problema: fases

Creación del modelo/programa

- Modelo matemático del sistema real
  - Idealización, simplificación, etc. → sistema EDP
  - Elasticidad, Mecánica del Sólido Deformable, Análisis de Estructuras…
- Procedimiento de discretización
  - "Adaptación" del modelo al ordenador
  - Sistema EDP → Sistema ecuaciones algebraico
- Modelado numérico e implementación
  - Selección de algoritmos eficientes
  - Programación
- Verificación del algoritmo
  - Contraste con soluciones analíticas, experimentales o previamente verificadas

12

Resolución del problema: fases

Explotación del modelo/programa

- Preproceso
  - Modelado matemático del sistema real concreto
  - Discretización del modelo matemático
  - Preparación de los datos en el formato adecuado
- Proceso = ejecución del programa
- Postproceso
  - Verificación del modelo
    - Intuición física
    - Concordancia con modelos simplificados
    - Casos límite…
  - Interpretación de resultados

13

Enfoque de la asignatura

Enfoque de la asignatura

- Actividades del Ingeniero de Caminos en el ámbito de las Estructuras:
  - Proyecto
    - Concepción y diseño
    - Cálculo
    - Comprobación
    - Documentación

    Cálculo, Comprobación: **¡Usuario de programas!**
  - Construcción
  - Mantenimiento
  - Rehabilitación
    - Concepción y diseño
    - Cálculo
    - Comprobación
    - Documentación

    Cálculo, Comprobación: **¡Usuario de programas!**

15

Enfoque de la asignatura

- Nos proponemos
  - Formar a los estudiantes como **usuarios cualificados y competentes** de programas elaborados por otros.

Ingeniero de Caminos

- Renunciamos a
  - Formarlo para la concepción e implementación de programas generales o específicos para una necesidad concreta.

Postgrado, máster específico...

16

Enfoque de la asignatura

Contenidos:

- Fundamentos: elasticidad, teoría vigas
- **Método de los Elementos Finitos** (convencional)
- Otros métodos (parte descriptiva)
  - Últimas tendencias en el Método de los Elementos Finitos
  - Método de los Elementos de Contorno
  - Métodos de las Diferencias Finitas

17

Enfoque de la asignatura

MEF: creación del programa

Recordar materias anteriores

- Modelo matemático del tipo de sistemas reales

Conocer nociones básicas

- Procedimiento de discretización
- Modelado numérico e implementación
- Verificación del algoritmo

MEF: explotación del programa

Prácticar hasta dominar

- Preproceso
  - Modelo sistema concreto
  - Discretización
  - Preparación de los datos
- Ejecución del programa
- Postproceso
  - Verificación del modelo
  - Interpretación de resultados

Programa

Programa

1. Recapitulación de Mecánica de Sólidos Deformables (modelos 3D y 1D –vigas-)
2. Formulación débil
3. Descripción general del Método de los Elementos Finitos
4. Introducción a la Elasticidad Bidimensional
5. Elasticidad Bidimensional por el Método de los Elementos Finitos
6. Elementos isoparamétricos, condensación estática, integración numérica, integración reducida y modos incompatibles
7. Estructuras de barras por el Método de los Elementos Finitos (I)

20

Programa

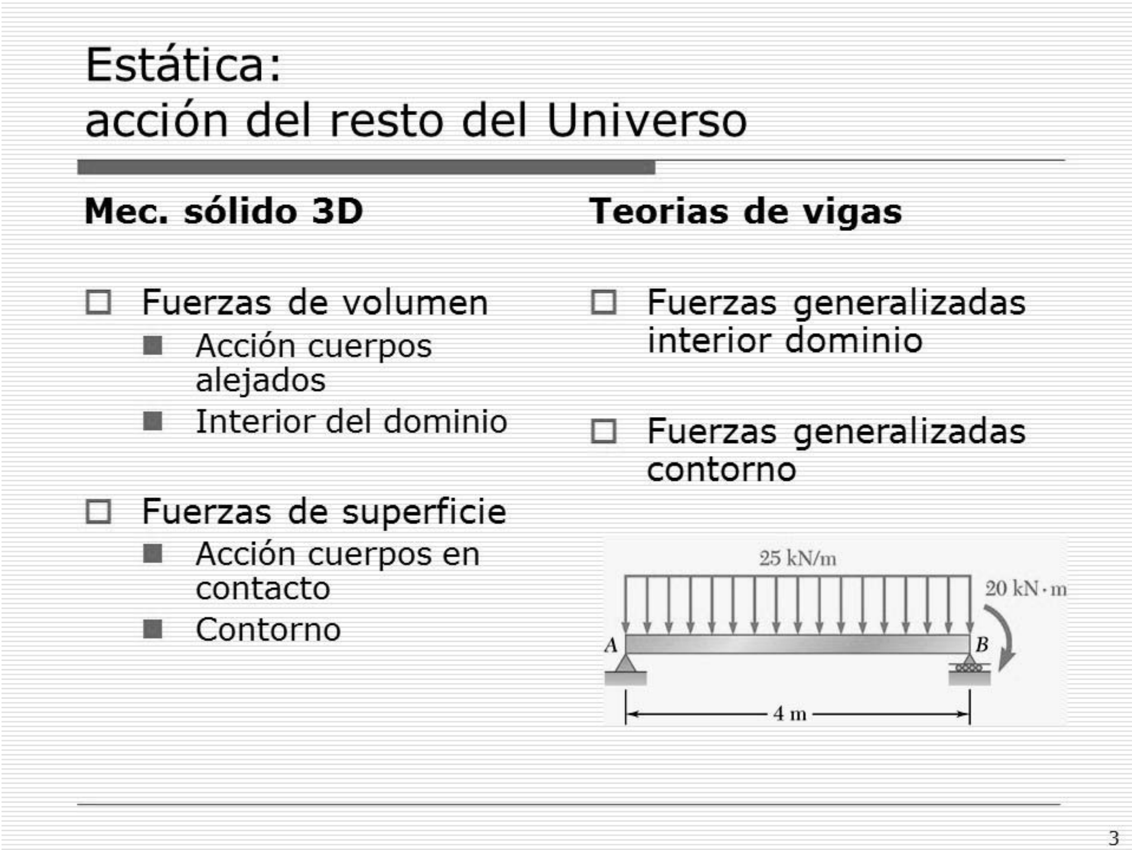
8. Estructuras de barras por el Método de los Elementos Finitos (II)
9. Elementos y técnicas complementarias para el modelado de estructuras de barras
10. Introducción a la Teoría de Placas
11. Placas de Love-Kirchhoff por el Método de los Elementos Finitos
12. Placas de Reissner-Mindlin por el Método de los Elementos Finitos
13. Descripción de otros métodos numéricos en Mecánica Computacional de Sólidos

21

Tema 1:

Recapitulación de Mecánica del Sólido Deformable: modelos 3D y 1D

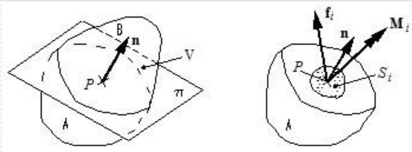
Estática



Estática:
interacción entre las partes del cuerpo

Mec. sólido 3D

- Vectores tensión

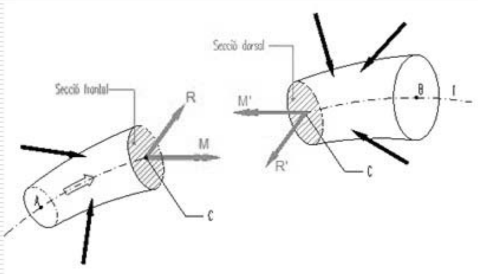


- Tensor de tensiones: fórmula de Cauchy

$$\begin{Bmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_X \\ n_Y \\ n_Z \end{Bmatrix}$$

Teorias de vigas

- Esfuerzos



4

Estática:
Relaciones estáticas

Mec. sólido 3D

- E.E.I.

$$\frac{\partial \sigma_X}{\partial X}+\frac{\partial \tau_{XY}}{\partial Y}+\frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial Z}+b_X=0$$
$$\frac{\partial \tau_{XY}}{\partial X}+\frac{\partial \sigma_Y}{\partial Y}+\frac{\partial \tau_{YZ}}{\partial Z}+b_Y=0$$
$$\frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial X}+\frac{\partial \tau_{YZ}}{\partial Y}+\frac{\partial \sigma_Z}{\partial Z}+b_Z=0$$

- C.C. Estáticas (*naturales*)

$$\begin{Bmatrix}\bar{t}_X\\ \bar{t}_Y\\ \bar{t}_Z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ}\\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{YZ}\\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_X\\ n_Y\\ n_Z\end{Bmatrix}$$

Teorias de vigas

- E.E.I.

$$N,_X+q_X=0 \qquad M_T,_X+m_X=0$$
$$V_Y,_X+q_Y=0 \qquad M_Y,_X-V_Z+m_Y=0$$
$$V_Z,_X+q_Z=0 \qquad M_Z,_X+V_Y+m_Z=0$$

- C.C. Estáticas (*naturales*)

$$N_1+\bar{F}_{X1}=0 \qquad N_2-\bar{F}_{X2}=0$$
$$V_{Y1}+\bar{F}_{Y1}=0 \qquad V_{Y2}-\bar{F}_{Y2}=0$$
$$V_{Z1}+\bar{F}_{Z1}=0 \qquad V_{Z2}-\bar{F}_{Z2}=0$$
$$M_{T1}+\bar{M}_{X1}=0 \qquad M_{T2}-\bar{M}_{X2}=0$$
$$M_{Y1}+\bar{M}_{Y1}=0 \qquad M_{Y2}-\bar{M}_{Y2}=0$$
$$M_{Z1}+\bar{M}_{Z1}=0 \qquad M_{Z2}-\bar{M}_{Z2}=0$$

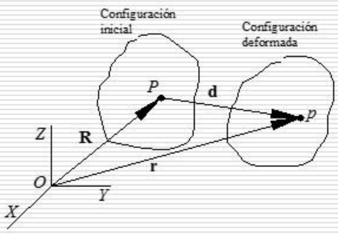
$$\boxed{S_d \cap S_\sigma=\varnothing \quad \wedge \quad \bar{S}_d \cup \bar{S}_\sigma=S}$$

5

Cinemática: Desplazamientos

Mec. sólido 3D

- ☐ Campo de desplazamientos

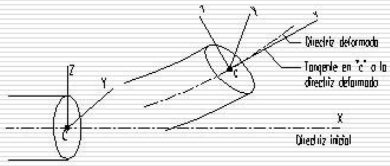


$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{R} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r} = x(X,Y,Z)\mathbf{i} + y(X,Y,Z)\mathbf{j} + z(X,Y,Z)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{d} = u(X,Y,Z)\mathbf{i} + v(X,Y,Z)\mathbf{j} + w(X,Y,Z)\mathbf{k}$$

Teorias de vigas

- ☐ Hip. cinemática: desp. generalizados



$$u^*(X,Y,Z) = u(X) - Y\,\theta_Z(X) + Z\,\theta_Y(X)$$
$$v^*(X,Y,Z) = v(X)$$
$$w^*(X,Y,Z) = w(X)$$

7

Cinemática:
Deformaciones y ecuaciones cinemáticas

Mec. sólido 3D

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial X}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial Y}$$

$$\varepsilon_Z = \frac{\partial w}{\partial Z}$$

$$\varepsilon_{XY} = \frac{1}{2}\gamma_{XY} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}\right)$$

$$\varepsilon_{XZ} = \frac{1}{2}\gamma_{XZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X}\right)$$

$$\varepsilon_{YZ} = \frac{1}{2}\gamma_{YZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y}\right)$$

Teorias de vigas

$$\varepsilon = \frac{du}{dX}$$

$$\chi_Z = \frac{d\theta_Z}{dX}$$

$$\chi_Y = \frac{d\theta_Y}{dX}$$

$$\gamma_{XY} = \left(-\theta_Z + \frac{dv}{dX}\right)$$

$$\gamma_{XZ} = \left(\theta_Y + \frac{dw}{dX}\right)$$

$$\varphi = \frac{d\theta_X}{dX}$$

8

Cinemática:
Cond. de cont. cinemáticas (*esenciales*)

Mec. sólido 3D

$$u = \overline{u}$$
$$v = \overline{v}$$
$$w = \overline{w}$$

Teorias de vigas

$$u_1 = \overline{u}_1 \qquad u_2 = \overline{u}_2$$
$$v_1 = \overline{v}_1 \qquad v_2 = \overline{v}_2$$
$$w_1 = \overline{w}_1 \qquad w_2 = \overline{w}_2$$
$$\theta_{X1} = \overline{\theta}_{X1} \qquad \theta_{X2} = \overline{\theta}_{X2}$$
$$\theta_{Y1} = \overline{\theta}_{Y1} \qquad \theta_{Y2} = \overline{\theta}_{Y2}$$
$$\theta_{Z1} = \overline{\theta}_{Z1} \qquad \theta_{Z2} = \overline{\theta}_{Z2}$$

$$\boxed{S_d \cap S_\sigma = \varnothing \quad \wedge \quad \overline{S}_d \cup \overline{S}_\sigma = S}$$

9

Ecuaciones constitutivas

Ecuaciones constitutivas

Mec. sólido 3D

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E}\{\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)\}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}\{\sigma_Y - \nu(\sigma_X + \sigma_Z)\}$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}\{\sigma_Z - \nu(\sigma_X + \sigma_Y)\}$$

$$\varepsilon_{XY} = \frac{\tau_{XY}}{2G}$$

$$\varepsilon_{XZ} = \frac{\tau_{XZ}}{2G}$$

$$\varepsilon_{YZ} = \frac{\tau_{YZ}}{2G}$$

Teorias de vigas

$$N = \varepsilon EA$$

$$V_Y = \gamma_{XY} GA_{VY}$$

$$V_Z = \gamma_{XZ} GA_{VZ}$$

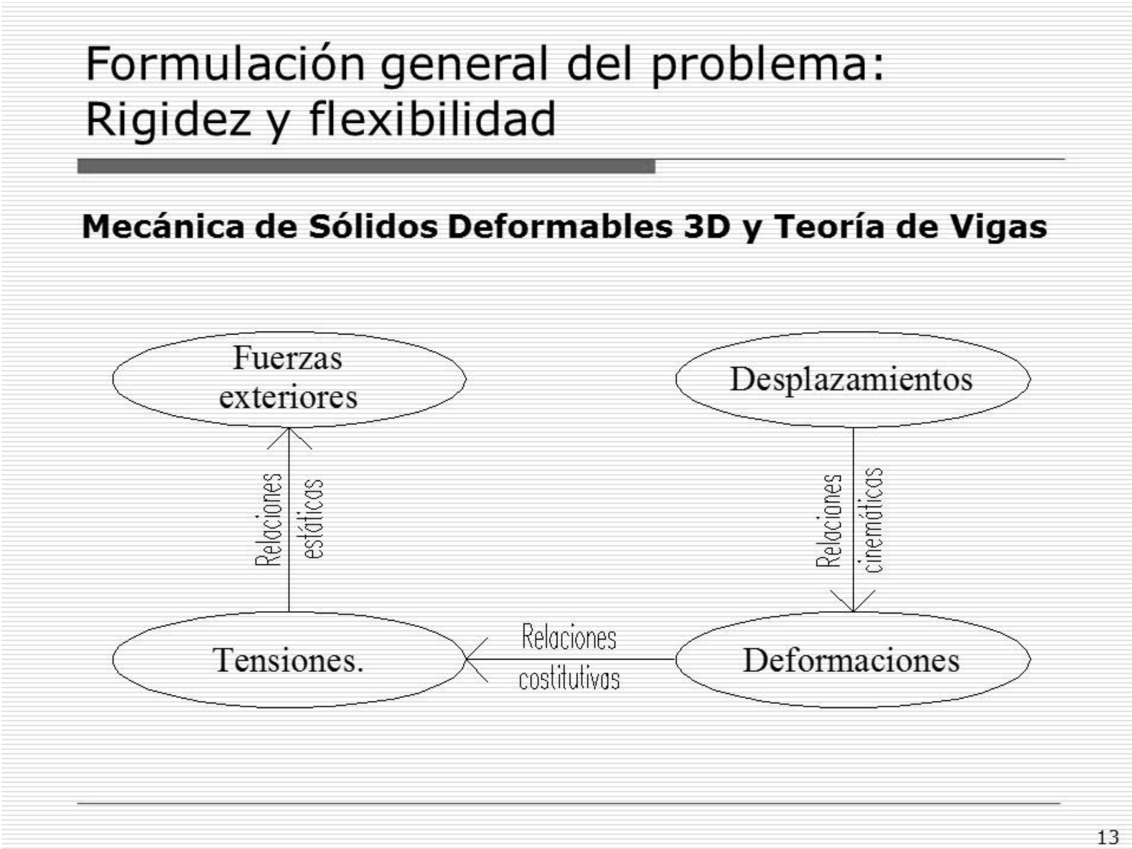
$$M_Y = EI_Y \chi_Y$$

$$M_Z = EI_Z \chi_Z$$

$$M_T = GJ\varphi$$

11

Formulación general del problema



Formulación general del problema: Formulaciones fuerte y débil

Mecánica de Sólidos Deformables 3D y Teoría de Vigas

Mecánica vectorial
- Aislar cuerpos
- Interacción
- Ecuaciones de equilibrio

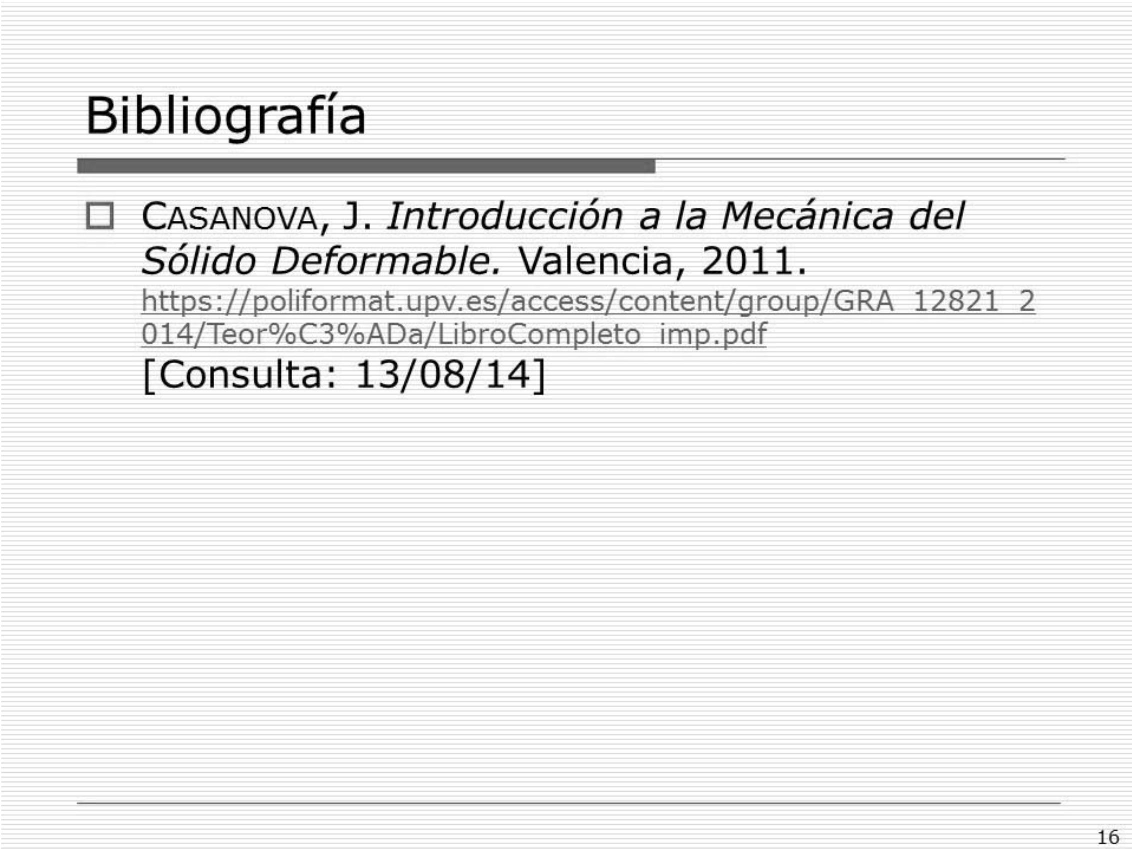
Mecánica analítica
- Sistema en conjunto
- TTV o TEP

Formulación fuerte (local)
- Aislar dV y dS
- Interacción
- Sist. ecs. diferenciales

Formulación débil (global)
- Cuerpo en conjunto
- TTV, TEP...
- Sol. Aprox. → MEF

14

Bibliografía

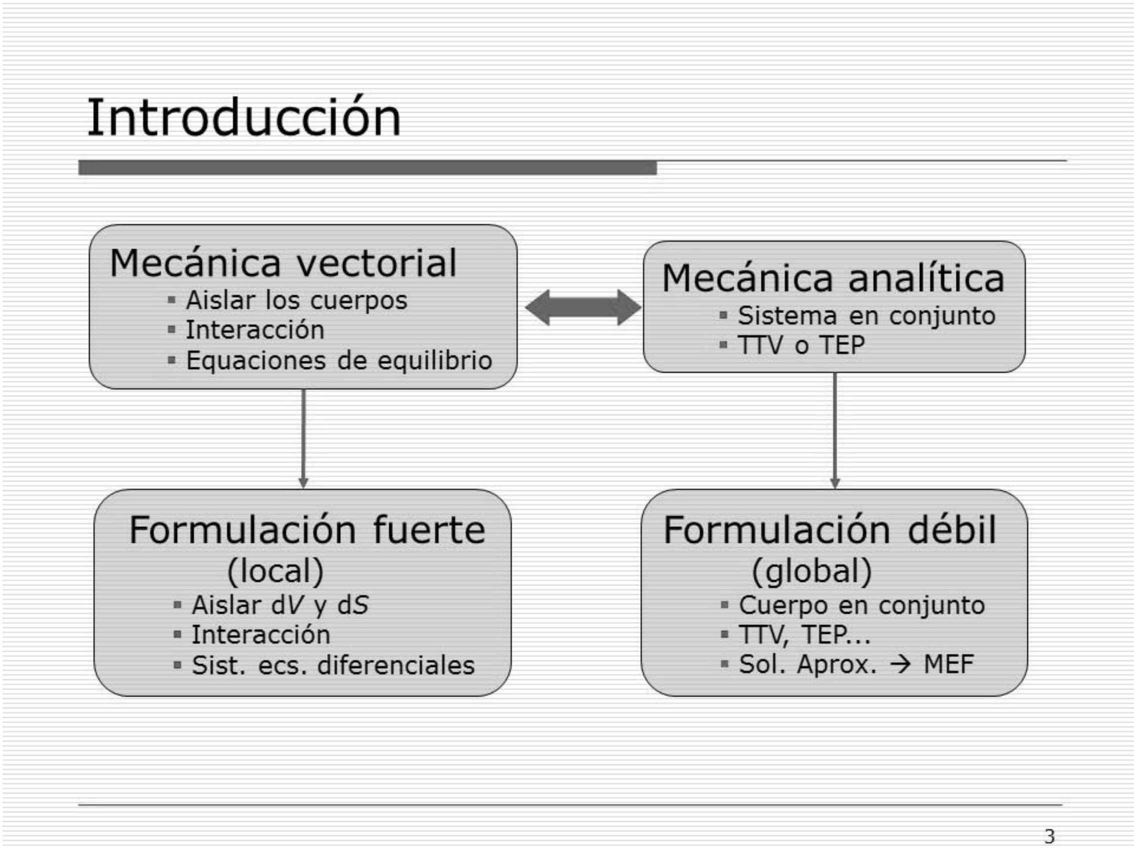


La bibliografía sobre estos temas es extensísima. Como la finalidad del tema es, exclusivamente, recordar conceptos conocidos, se ha incluido únicamente el texto en el que, probablemente, la han estudiado la mayoría de los alumno de la asignatura; pero cualquier texto de Elasticidad (Timoshenko y Goodier, Torroja, Samartin, Ortiz…) y cualquier texto de Resistencia de Materiales (Courbon, Timoshenko, Gere, Garrido, Ortiz, Vázquez…), quizás conjuntamente, pueden utilizarse para prepararlo.

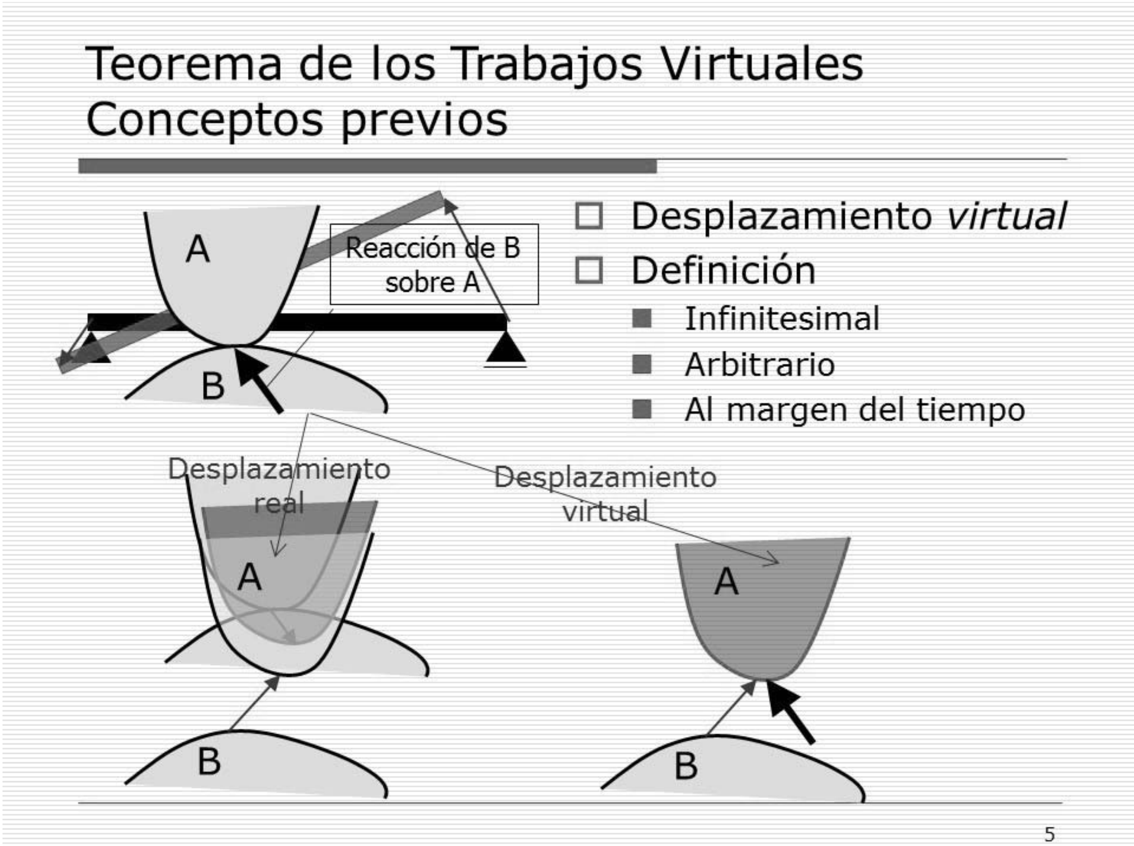
Tema 2:

Formulación débil

Introducción



Teorema de los Trabajos Virtuales



Teorema de los Trabajos Virtuales
Conceptos previos

- Desplazamiento *virtual*
  - Infinitesimal
  - Arbitrario
  - Al margen del tiempo

- Desplazamiento virtual cinemáticamente admisible
  - Cumple las condiciones de contorno cinemàticas de forma homogénea

$$d_i = \bar{d}_i \quad \text{en } S_d \quad \Rightarrow \quad \delta d_i = 0 \quad \text{en } S_d$$

6

Teorema de los Trabajos Virtuales Enunciado

Un cuerpo está en equilibrio si, y sólo si, el trabajo virtual de las fuerzas internas iguala al trabajo virtual de las fuerzas externas para cualquier desplazamiento virtual cinemáticamente admisible

$$\int_V T^{ij}\,\delta E_{ij}\,dV - \int_V b^i\,\delta d_i\,dV - \int_{S_f} \bar{t}^{\,i}\,\delta d_i\,dS = 0 \qquad \forall\,\delta d_i \in \mathcal{A}$$

7

Teorema de los Trabajos Virtuales Demostración (condición necesaria)

- Hipótesis:
  - El cuerpo está en equilibrio

$$T^{ij}{}_{|i} + b^j = 0 \qquad \text{en } V$$

$$T^{ij} n_i = \bar{t}^{\,j} \qquad \text{en } S_f$$

- Definiciones
  - Desp. virtual cinemáticament admisible

    δd_i infinitesimal, arbitrario, al margen del tiempo / $\delta d_i = 0$ en S_d
  - Deformación virtual

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta d_{i|j} + \delta d_{j|i}\right)$$

8

Teorema de los Trabajos Virtuales Demostración (condición necesaria)

- $T^{ij}{}_{|i} + b^j = 0 \quad \text{en}\, V \quad \Rightarrow \quad \int_V \left(T^{ij}{}_{|i} + b^j\right)\delta d_j dV = 0$
- $\int_V \left(T^{ij}{}_{|i} + b^j\right)\delta d_j dV = \int_V T^{ij}{}_{|i}\delta d_j dV + \int_V b^j \delta d_j dV = 0$
- $\left(T^{ij}\delta d_j\right)_{|i} = T^{ij}{}_{|i}\delta d_j + T^{ij}\delta d_{j|i} \quad \Rightarrow \quad T^{ij}{}_{|i}\delta d_j = \left(T^{ij}\delta d_j\right)_{|i} - T^{ij}\delta d_{j|i}$
- $\int_V T^{ij}{}_{|i}\delta d_j dV = \int_V \left(T^{ij}\delta d_j\right)_{|i} dV - \int_V T^{ij}\delta d_{j|i} dV$

$$= \int_S T^{ij}\delta d_j n_i dS - \int_V \tfrac{1}{2}\left(T^{ij}\delta d_{j|i} + T^{ji}\delta d_{i|j}\right)dV$$

$$= \int_{S_f}\left(T^{ij}n_i\right)\delta d_j dS + \int_{S_d}\left(T^{ij}n_i\right)\delta d_j dV - \int_V T^{ij}\left[\tfrac{1}{2}\left(\delta d_{j|i} + \delta d_{i|j}\right)\right]dV$$

$$= \int_{S_f}\bar{t}^j\delta d_j ds + 0 - \int_V T^{ij}\delta E_{ji} dV \qquad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

9

Teorema de los Trabajos Virtuales
Demostración (condición necesaria)

$$\left.\begin{aligned}&\int_V T^{ij}{}_{|i}\,\delta d_j\,dV + \int_V b^j\,\delta d_j\,dV = 0\\ &\int_V T^{ij}{}_{|i}\,\delta d_j\,dV = \int_{S_f} \bar{t}^{\,j}\,\delta d_j\,dS - \int_V T^{ij}\,\delta E_{ji}\,dV \qquad \forall\,\delta d_i \in \mathcal{A}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V T^{ij}\,\delta E_{ji}\,dV - \int_V b^j\,\delta d_j\,dV - \int_{S_f} \bar{t}^{\,j}\,\delta d_j\,dS = 0 \qquad \forall\,\delta d_i \in \mathcal{A}}$$

10

Teorema de los Trabajos Virtuales Demostración (condición suficiente)

- Hipótesis

$$\int_V T^{ij}\delta E_{ji} dV - \int_V b^j \delta d_j dV - \int_{S_f} \bar{t}^j \delta d_j dS = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

- Demostración
  - $\int_V T^{ij}\delta E_{ji} dV = \int_V T^{ij}\left[\frac{1}{2}\left(\delta d_{j|i} + \delta d_{i|j}\right)\right] dV$

    $= \int_V \frac{1}{2}\left(T^{ij}\delta d_{j|i} + T^{ji}\delta d_{j|i}\right) dV = \int_V T^{ij}\delta d_{j|i} dV$
  - $\left(T^{ij}\delta d_j\right)_{|i} = T^{ij}{}_{|i}\delta d_j + T^{ij}\delta d_{j|i} \Rightarrow T^{ij}\delta d_{j|i} = \left(T^{ij}\delta d_j\right)_{|i} - T^{ij}{}_{|i}\delta d_j$
  - $\int_V T^{ij}\delta E_{ji} dV = \int_V \left(\left(T^{ij}\delta d_j\right)_{|i} - T^{ij}{}_{|i}\delta d_j\right) dV$

11

Teorema de los Trabajos Virtuales
Demostración (condición suficiente)

$$\int_V T^{ij}\delta E_{ji}dV = \int_V \left(\left(T^{ij}\delta d_j\right)_{|i} - T^{ij}{}_{|i}\delta d_j\right)dV$$

$$= \int_V \left(T^{ij}\delta d_j\right)_{|i} dV - \int_V T^{ij}{}_{|i}\delta d_j dV$$

$$= \int_S T^{ij}\delta d_j n_i dS - \int_V T^{ij}{}_{|i}\delta d_j dV$$

$$= \int_{S_f} T^{ij} n_i \delta d_j dS + \int_{S_d} T^{ij} n_i \delta d_j dS - \int_V T^{ij}{}_{|i}\delta d_j dV$$

12

Teorema de los Trabajos Virtuales
Demostración (condición suficiente)

$$\left.\begin{aligned}
&\int_V T^{ij}\delta E_{ji}dV - \int_V b^j \delta d_j dV - \int_{S_f} \bar{t}^j \delta d_j dS = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A} \\
&\int_V T^{ij}\delta E_{ji}dV = \int_{S_f} T^{ij} n_i \delta d_j dS + \int_{S_d} T^{ij} n_i \delta d_j dS - \int_V T^{ij}{}_{|i} \delta d_j dV
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_{S_f} T^{ij} n_i \delta d_j dS + \int_{S_d} T^{ij} n_i \delta d_j dS - \int_V T^{ij}{}_{|i} \delta d_j dV$$

$$- \int_V b^j \delta d_j dV - \int_{S_f} \bar{t}^j \delta d_j dS = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \int_{S_f} \left(T^{ij} n_i - \bar{t}^j\right) \delta d_j dS + \int_{S_d} \left(T^{ij} n_i\right) 0\, dS$$

$$- \int_V \left(T^{ij}{}_{|i} + b^j\right) \delta d_j dV = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

Teorema de los Trabajos Virtuales
Demostración (condición suficiente)

$$\int_{S_f} \left(T^{ij} n_i - \bar{t}^{\,j}\right) \delta d_j \, dS - \int_V \left(T^{ij}{}_{|i} + b^j\right) \delta d_j \, dV = 0 \qquad \forall\, \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T^{ij}{}_{|i} + b^j = 0 & \text{en } V \\ T^{ij} n_i - \bar{t}^{\,j} = 0 & \text{en } S_f \end{cases}$$

14

Teorema de la Energía Potencial

Teorema de la Energía Potencial: Conceptos previos e hipótesis

- Campos de desplazamientos admisibles
  - $d_i + \delta d_i$
    siendo d_i el campo de desplazamientos correspondiente a la configuración de equilibrio.
- Interpretaciones
  - δd_i → diferencial de desplazamiento
  - δE_{ij} → diferencial de deformación

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(d_{i|j} + d_{j|i}\right) \quad \Rightarrow \quad \delta E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta d_{i|j} + \delta d_{j|i}\right)$$

- Material hiperelástico

$$T^{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}$$

16

Teorema de la Energía Potencial: Conceptos previos e hipótesis

- Fuerzas exteriores conservativas

$$\exists G(d_i) \Big/ b^i = -\frac{\partial G}{\partial d_i}$$

$$\exists H(d_i) \Big/ \bar{t}^i = -\frac{\partial G}{\partial d_i}$$

- Nota:
  - Si las fuerzas exteriores son constantes

$$G = -b^i d_i \quad , \quad H = -\bar{t}^i d_i$$

  - Energía potencial de las fuerzas exteriores

$$\mathcal{V} = -\int_V b^i d_i dV - \int_{S_f} \bar{t}^i d_i dV$$

$$= -\int_V G dV - \int_{S_f} H dV$$

17

Teorema de la Energía Potencial: Enunciado

Entre todos los campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles, el correspondiente a la configuración de equilibrio se caracteriza por definir un punto crítico[1] de la energía potencial.

$$\delta\Pi = \delta(U + \mathcal{V}) = 0 \qquad \forall\, \delta d_i \in \mathcal{A}$$

[1] O punto de estacionariedad.

NOTA: $\Pi = U + \mathcal{V}$ es la energia potencial del sistema

18

Teorema de la Energía Potencial: Demostración

$$\int_V T^{ij}\delta E_{ji}dV - \int_V b^j \delta d_j dV - \int_{S_f} \bar{t}^j \delta d_j dS = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$\int_V \frac{\partial W}{\partial E_{ji}}\delta E_{ji}dV - \int_V \left(-\frac{\partial G}{\partial d_i}\right)\delta d_j dV - \int_{S_f}\left(-\frac{\partial H}{\partial d_i}\right)\delta d_j dS = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$\int_V \delta W dV + \int_V \delta G dV + \int_{S_f}\delta H dS = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$\delta\left(\int_V W dV\right) + \delta\left(\int_V G dV + \int_{S_f} H dS\right) = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$\delta(U) + \delta(\mathcal{V}) = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$\delta\Pi = \delta(U + \mathcal{V}) = 0 \quad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

19

Formulación débil

Formulación débil

- Formulación fuerte (sist. ecs. diferenciales)

$$T^{ij}{}_{|i} + b^j = 0 \quad , \quad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(d_{i|j} + d_{j|i}\right) \quad , \quad T^{ij} = \lambda \delta^{ij} e + 2GE_{ij}$$

- Formulación débil (expresiones integrales)
  - Primera alternativa (TTV)

$$\int_V T^{ij} \delta E_{ji} dV - \int_V b^j \delta d_j dV - \int_{S_f} \bar{t}^j \delta d_j dS = 0 \qquad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(d_{i|j} + d_{j|i}\right) \quad , \quad T^{ij} = \lambda \delta^{ij} e + 2GE_{ij}$$

  - Segunda alternativa (TEP; form. variacional)

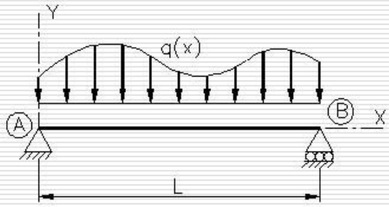
$$\delta \Pi = 0 \qquad \forall \delta d_i \in \mathcal{A} \quad , \quad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(d_{i|j} + d_{j|i}\right) \quad , \quad T^{ij} = \lambda \delta^{ij} e + 2GE_{ij}$$

21

Formulación débil

- Ejemplo:
  - Formulación fuerte

$$\frac{d^4 v}{dX^4} = -\frac{q(X)}{EI}$$



  - Formulación débil

$$\int_V T^{ij}\delta E_{ji} dV \to \int_0^L M_Z \delta\chi_Z dX = \int_0^L (EI\chi_Z)\delta\chi_Z dX = \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dX^2}\frac{d^2(\delta v)}{dX^2} dX$$

$$\int_V b^j \delta d_j dV \to \int_0^L -q(X)\delta v dX$$

$$\int_{S_f} \bar{t}^j \delta d_j dS \to F_{Y2}\delta v_2 + M_{Z1}\delta\theta_1 - F_{Y2}\delta v_2 - M_{Z2}\delta\theta_2$$

$$= F_{Y2}0 + 0\delta\theta_1 - F_{Y1}0 - 0\delta\theta_2 = 0$$

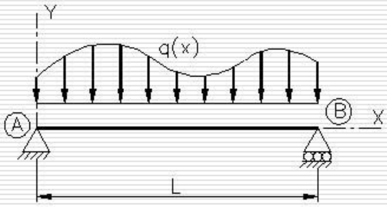
$$\int_0^L EI \frac{d^2 v}{dX^2}\frac{d^2(\delta v)}{dX^2} dX + \int_0^L q(X)\delta v dX = 0 \qquad \forall \delta v \in \mathcal{A}$$

El orden de derivación requerido en la formulación débil es menor

22

Formulación débil

- Ejemplo:
  - Pero, ¿cómo se resuelve el problema?



    - TTV → Ecuación integral

$$\int_0^L EI \frac{d^2 v}{dX^2}\frac{d^2(\delta v)}{dX^2} dX + \int_0^L q(X)\delta v dX = 0 \qquad \forall \delta v \in \mathcal{A}$$

    - TEP → Problema variacional

$$\delta\Pi = 0 \qquad \forall \delta v \in \mathcal{A} \quad \text{siendo} \quad \Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2 v}{dX^2}\right)^2 dX + \int_0^L (-qv) dX$$

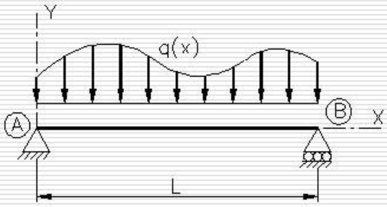
Solución analítica:

1. **¿Cómo?**
2. **El orden de derivación requerido, ¿es menor?**

23

Formulación débil

- Ejemplo:
  - Soluciones aproximadas
    (TTV, ej. con *q(X)=q=*conts.)



$$v = K\sin\frac{\pi X}{L} \quad , \quad \delta v = \delta K\sin\frac{\pi X}{L}$$

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dX^2}\frac{d^2(\delta v)}{dX^2}dX + \int_0^L q\,\delta v\,dX = 0 \qquad \forall\,\delta v \in \mathcal{A}$$

$$\int_0^L EIK\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin^2\frac{\pi X}{L}\,\delta K dX + \int_0^L q\,\delta K\sin\frac{\pi X}{L}dX = 0 \qquad \forall\,\delta K$$

$$EIK\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \delta K\int_0^L \sin^2\frac{\pi X}{L}dX + q\,\delta K\int_0^L \sin\frac{\pi X}{L}dX = 0 \qquad \forall\,\delta K$$

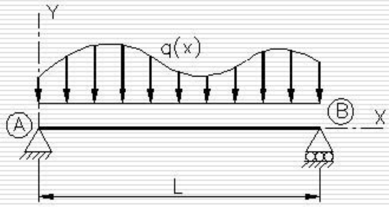
$$\left(EIK\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\frac{L}{2} + q\frac{2}{\pi}L\right)\delta K = 0 \qquad \forall\,\delta K \;\Rightarrow\; K = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{4}{\pi^5} = 0'01307 \\ \dfrac{5}{384} = 0'01302\end{array}}$$

24

Formulación débil

- Ejemplo:
  - Soluciones aproximadas
    (TEP, ej. con *q(X)=q=*conts.)



$$v = K \sin \frac{\pi X}{L}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2 v}{dX^2}\right)^2 dX + \int_0^L q v dX \quad \forall \delta v \in \mathcal{A}$$

$$\frac{4}{\pi^5} = 0'01307$$

$$\frac{5}{384} = 0'01302$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EIK^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin^2 \frac{\pi X}{L}\delta K dX + \int_0^L qK \sin \frac{\pi X}{L} dX$$

$$\delta\Pi = 0 \quad \forall \delta v \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad EIK\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi X}{L} dX + q\int_0^L \sin \frac{\pi X}{L} dX = 0 \quad \forall \delta K$$

$$\left(EIK\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{L}{2} + q\frac{2}{\pi}L\right)\delta K = 0 \quad \forall \delta K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI}$$

25

Formulación débil

- ¿Por qué **débil**?
  - No se han de cumplir las ecuaciones en todos los puntos, sino solo una especie de *media ponderada* por los desplazamientos virtuales.
  - Es menos exigente en cuanto a condiciones de continuidad y derivabilidad.
- Resolución analítica de la formulación débil
  - TTV → Ecuación integral
  - TEP → Cálculo variacional
- Realmente es menos exigente en cuanto a derivabilidad?
  - Cálculo variacional → Ecuaciones Euler-Lagrange
  - Demostración condición suficiente TTV
- Potencia de la formulación
  - **Soluciones aproximadas**

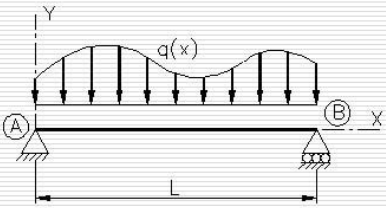
26

Soluciones aproximadas

Planteamiento intuitivo

Soluciones aproximadas: Planteamiento intuitivo (TEP)

- Desarrollo en serie de los desplazamientos



$$v(X)=\sum_{i=1}^{\infty} v_i\phi_i(X) \;\Big/\; \phi_i(0)=\phi_i(L)=0 \;\; \forall i$$

$$\Pi=\int_0^L EI\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i\phi_i''(X)\right)^2 dX+\int_0^L\left(-q\sum_{i=1}^{\infty} v_i\phi_i(X)\right)dX$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v_i v_j \underbrace{EI\int_0^L \phi_i''(X)\phi_j''(X)dX}_{K_{ij}}-\sum_{i=1}^{\infty} v_i \underbrace{\int_0^L (q(X)\phi_i(X))dX}_{F_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v_i v_j K_{ij}-\sum_{i=1}^{\infty} v_i F_i$$

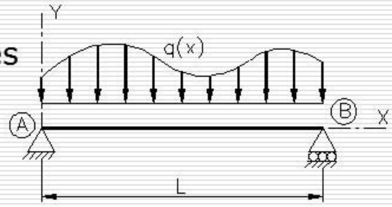
$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i}=\sum_{j=1}^{\infty} v_j K_{ij}-F_i=0 \qquad i=1,2,3\ldots\infty$$

Hemos sustituido un problema variacional por la resolución de un sistema algebraico de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas

28

Soluciones aproximadas: Planteamiento intuitivo (TTV)

- Desarrollo en serie de los desplazamientos reales y virtuales



$$v(X)=\sum_{i=1}^{\infty} v_i\phi_i(X) \qquad \delta v(X)=\sum_{i=1}^{\infty} \delta v_i\psi_i(X)$$

$$\phi_i(0)=\phi_i(L)=0 \;\;,\;\; \psi_i(0)=\psi_i(L)=0 \qquad \forall i$$

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dX^2}\frac{d^2(\delta v)}{dX^2}dX+\int_0^L q(X)\delta v dX=$$

$$=\int_0^L EI\left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j\phi_j''(X)\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\delta v_i\psi_i''(X)\right)dX+\int_0^L q(X)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\delta v_i\psi_i(X)\right)dX$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v_j\delta v_i\underbrace{EI\int_0^L \phi_j''(X)\psi_i(X)dX}_{K_{ij}}-\sum_{i=1}^{\infty}\delta v_i\underbrace{\int_0^L (q(X)\psi_i(X))dX}_{F_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\delta v_i v_j K_{ij}-\sum_{i=1}^{\infty}\delta v_i F_i=\sum_{i=1}^{\infty}\delta v_i\left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j K_{ij}-F_i\right)=0 \qquad \forall\delta v_i$$

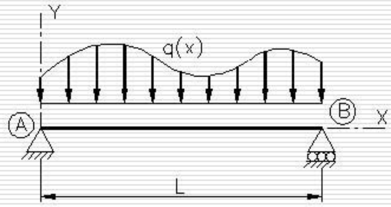
$$\sum_{j=1}^{\infty} v_j K_{ij}=F_i \qquad i=1,2,3\ldots\infty$$

Hemos sustituido un problema integral por la resolución de un sistema algebraico de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas

29

Soluciones aproximadas: Planteamiento intuitivo (TEP o TTV)

- Trunquemos las series



$$v(X)=\sum_{i=1}^{N} v_i\phi_i(X) \quad / \quad \phi_i(0)=\phi_i(L)=0 \;\; \forall i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i}=\sum_{j=1}^{N} v_j K_{ij} - F_i = 0 \qquad i=1,2,3...N$$

→ En esencia, Método de Ritz

$$v(X)=\sum_{i=1}^{N} v_i\phi_i(X) \qquad \delta v(X)=\sum_{i=1}^{N} \delta v_i\psi_i(X)$$

$$\phi_i(0)=\phi_i(L)=0 \;\; , \;\; \psi_i(0)=\psi_i(L)=0 \qquad \forall i$$

$$\sum_{j=1}^{N} v_j K_{ij} = F_i \qquad i=1,2,3..N$$

→ En esencia, Método de Petrov-Galerkin

Hemos sustituido un problema variacional o integral por la resolución de un sistema algebraico de *N* ecuaciones con *N* incógnitas

30

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

- Sea una EDP con sus condiciones de contorno:

$$D(\mathbf{x})u(\mathbf{x})+q(\mathbf{x})=0 \qquad \mathbf{x}\in V$$

$$C_E(\mathbf{x})u(\mathbf{x})+\overline{u}(\mathbf{x})=0 \qquad \mathbf{x}\in S_d$$

$$C_N(\mathbf{x})u(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})=0 \qquad \mathbf{x}\in S_f$$

por abreviar las escribiremos sin hacer constar la dependencia de **x**, simplemente como:

$$Du+q=0 \qquad \text{en } V$$

$$C_E u+\overline{u}=0 \qquad \text{en } S_d$$

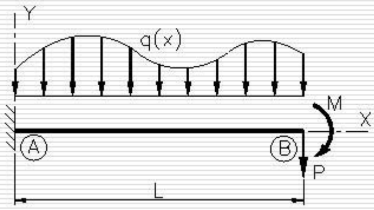
$$C_N u+g=0 \qquad \text{en } S_f$$

32

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 1

Flexión de vigas



$$Du + q = 0 \quad \text{en } V \quad \rightarrow \quad EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q(x) \quad \forall x \in \left]0, L\right[$$

$$C_E u + \bar{u} = 0 \quad \text{en } S_d \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v(0) = \bar{v}_1 \\ \theta(0) = \bar{\theta}_1 \end{cases}$$

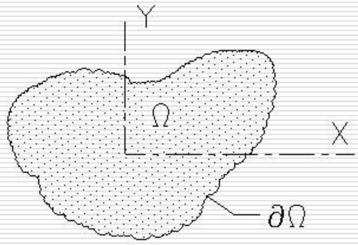
$$C_N u + g = 0 \quad \text{en } S_f \quad \rightarrow \quad \begin{cases} EI\dfrac{d^2v}{dx^2} = -M \\ EI\dfrac{d^3v}{dx^3} = P \end{cases}$$

33

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 2

Función de alabeo
(torsión de Saint-Venant)



$$Du + q = 0 \quad \text{en } V \qquad \rightarrow \qquad \Delta f = f_{,ii} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$C_E u + \bar{u} = 0 \qquad \text{en } S_d \quad \rightarrow \quad \text{No hay}$$

$$C_N u + g = 0 \qquad \text{en } S_f \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial n} - \varepsilon_{ij3} n^i X^j =$$

$$= n^k f_{,k} - \varepsilon_{ij3} n^i X^j = 0 \quad \text{en } \Gamma_f \equiv \Gamma$$

34

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

- Admitamos que la solución del problema se puede **aproximar** como

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \leftrightarrow \quad \hat{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$$

  donde
  - $\varphi_i\,(\mathbf{x})$ es una familia de funciones escogidas *a priori*, y
  - c_i es un conjunto de parámetros escalares, las incógnitas a determinar

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$v(x) \cong \hat{v}(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x)$	$f(x,y) \cong \hat{f}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x,y)$

35

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Sustituyendo las soluciones aproximadas en la EDP y las c.c. obtenemos los *residuos*

$$D\hat{u} + q = R \neq 0 \qquad \text{en } V$$

$$C_E\hat{u} + \overline{u} = R_E \neq 0 \qquad \text{en } S_d$$

$$C_N\hat{u} + g = R_N \neq 0 \qquad \text{en } S_f$$

cuya expresión desarrollada resulta

$$R = D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) + f = \sum_{i=1}^{n} c_i\, D\varphi_i + q \qquad \text{en } V$$

$$R_E = C_E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) + \overline{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, C_E\varphi_i + \overline{u} \qquad \text{en } S_d$$

$$R_N = C_N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) + g = \sum_{i=1}^{n} c_i\, C_N\varphi_i + g \qquad \text{en } S_f$$

36

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 1

Residuos

$$D\hat{u} + q = R \neq 0 \quad \text{en } V \quad \leftrightarrow \quad R = EI\frac{d^4\hat{v}}{dx^4} + q(x) \quad \forall x \in \left]0, L\right[$$

$$C_E\hat{u} + \bar{u} = R_E \neq 0 \quad \text{en } S_d \quad \leftrightarrow \quad R_{E1,1} = \hat{v}(0) - \bar{v}_1 \quad , \quad R_{E1,2} = \theta(0) - \bar{\theta}_1$$

$$C_N\hat{u} + g = R_N \neq 0 \quad \text{en } S_f \quad \leftrightarrow \quad R_{N2,1} = EI\left.\frac{d^3\hat{v}}{dx^3}\right|_{x=L} - P \quad , \quad R_{N2,2} = EI\left.\frac{d^2\hat{v}}{dx^2}\right|_{x=L} + M$$

Expresión desarrollada

$$R = \sum_{i=1}^{n} c_i\, D\varphi_i + q \quad \text{en } V \quad \leftrightarrow \quad R = EI\sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i^{IV} + q \quad \forall x \in \left]0, L\right[$$

$$R_E = \sum_{i=1}^{n} c_i\, C_E\varphi_i + \bar{u} \quad \text{en } S_d \quad \leftrightarrow \quad R_{E1,1} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i(0) + \bar{v}_1 \quad , \quad R_{E1,2} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i'(0) + \bar{\theta}_1$$

$$R_N = \sum_{i=1}^{n} c_i\, C_N\varphi_i + g \quad \text{en } S_f \quad \leftrightarrow \quad R_{N2,1} = EI\sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi'''_i(L) - P \quad , \quad R_{N2,2} = EI\sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi''_i(L) + M$$

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 2

Residuos

$$D\hat{u} + q = R \neq 0 \quad \text{en } V \quad \leftrightarrow \quad R = \hat{f}_{,ii} \neq 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$C_E \hat{u} + \bar{u} = R_E \neq 0 \quad \text{en } S_d \quad \leftrightarrow \quad \text{No hay}$$

$$C_N \hat{u} + g = R_N \neq 0 \quad \text{en } S_f \quad \leftrightarrow \quad R_N = n^k \hat{f}_{,k} - \varepsilon_{ij3} n^i X^j \neq 0 \quad \text{en } \Gamma_f \equiv \Gamma$$

Expresión desarrollada

$$R = \sum_{i=1}^{n} c_i D\varphi_i + q \quad \text{en } V \quad \leftrightarrow \quad R = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{i,jj} + q \quad \text{en } \Omega$$

$$R_E = \sum_{i=1}^{n} c_i C_E \varphi_i + \bar{u} \quad \text{en } S_d \quad \leftrightarrow \quad \text{No hay}$$

$$R_N = \sum_{i=1}^{n} c_i C_N \varphi_i + g \quad \text{en } S_f \quad \leftrightarrow \quad R_N = n^j \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{i,j} - \varepsilon_{kl3} n^k X^l \quad \text{en } \Gamma_f \equiv \Gamma$$

38

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

- **Formulación integral**:

$$\int_V \psi_j\, R\, dV + \int_{S_d} \overline{\psi}_j\, R_E\, dS + \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j\, R_N\, dS = 0 \qquad j = 1,2\ldots n$$

$$\int_V \psi_j\, R\, dV = \int_V \psi_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, D\varphi_i + f \right) dV = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_V \psi_j\, D\varphi_i\, dV + \int_V \psi_j\, f\, dV$$

$$\int_{S_d} \overline{\psi}_j\, R_E\, dS = \int_{S_d} \overline{\psi}_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, C_E \varphi_i + \overline{u} \right) dS = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{S_d} \overline{\psi}_j\, C_E \varphi_i\, dS + \int_{S_d} \overline{\psi}_j\, \overline{u}\, dS$$

$$\int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j\, R_N\, dS = \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, C_N \varphi_i + g \right) dS = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j\, C_N \varphi_i\, dS + \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j\, g\, dS$$

n = número funciones de peso
n = número de términos de la solución aproximada
Si *n* suficientemente grande → buena aproximación

39

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Por lo tanto

En general, le integración por partes/teorema de la divergencia permite disminuir el orden de derivación de φ_i.

$$\int_V \psi_j R\, dV + \int_{S_d} \overline{\psi}_j R_E\, dS + \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j R_N\, dS =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\left[\int_V \psi_j D\varphi_i\, dV + \int_{S_d} \overline{\psi}_j C_E \varphi_i\, dS + \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j C_N \varphi_i\, dS \right]}_{K_{ji}} +$$

$$+ \underbrace{\left[\int_V \psi_j f\, dV + \int_{S_d} \overline{\psi}_j \bar{u}\, dS + \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j g\, dS \right]}_{T_i} = 0 \qquad j = 1,2 \ldots n$$

Así pues, la solución del problema queda determinada por la del sistema de ecuaciones (algebraico, lineal si la EDP lo era)

$$\sum_{i=1}^{n} K_{ji} c_i + T_i = 0 \qquad j = 1,2 \quad \leftrightarrow \quad [K]\{k\} + \{T\} = \{0\}$$

40

Soluciones aproximadas:
Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 1

- Formulación integral: (1)

$$\int_V \psi_j \, R \, dV = \int_0^L \psi_j \left(EI \sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi_i^{IV} + q \right) dx = EI \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^L \psi_j \, \varphi_i^{IV} \, dx + \int_0^L \psi_j \, q \, dx$$

$$\int_{S_d} \overline{\psi}_j \, R_E \, dS = \overline{\psi}_{j1} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi_i(0) + \overline{v}_1 \right) + \overline{\psi}_{j2} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi_i'(0) + \overline{\theta}_1 \right)$$

$$\int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j \, R_N \, dS = \overline{\overline{\psi}}_{j1} \left(EI \sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi'''_i(L) - P \right) + \overline{\overline{\psi}}_{j2} EI \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi''_i(L) + M \right)$$

$$j = 1,2 \ldots n$$

41

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 1

- Formulación integral: (2)

$$\int_0^L \psi_j\,\varphi_i^{IV}\,dx = \ldots \quad \left|\begin{matrix} u = \psi_j & du = \psi'_j dx \\ dv = \varphi_i^{IV}\,dx & v = \varphi_i''' \end{matrix}\right| \quad \ldots = \left[\psi_j \varphi_i'''\right]_0^L - \int_0^L \psi'_j\,\varphi_i''' dx = \ldots$$

$$\left|\begin{matrix} u = \psi'_j & du = \psi''_j dx \\ dv = \varphi_i''' dx & v = \varphi_i'' \end{matrix}\right| \quad \ldots = \left[\psi_j \varphi_i'''\right]_0^L - \left\{\left[\psi'_j \varphi_i''\right]_0^L - \int_0^L \psi''_j\,\varphi_i''\,dx\right\} =$$

$$= \psi_j(L)\varphi_i'''(L) - \psi_j(0)\varphi_i'''(0) - \psi'_j(L)\varphi''(L) + \psi'_j(0)\varphi''(0) + \int_0^L \psi''_j\,\varphi_i''\,dx$$

$$\int_V \psi_j\,R\,dV = EI\sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^L \psi_j\,\varphi_i^{IV}\,dx + \int_0^L \psi_j\,q\,dx =$$

$$EI\sum_{i=1}^{n} c_i \left[\psi_j(L)\varphi_i'''(L) - \psi_j(0)\varphi_i'''(0) - \psi'_j(L)\varphi''(L) + \psi'_j(0)\varphi''(0) + \int_0^L \psi''_j\,\varphi_i''\,dx\right] + \int_0^L \psi_j\,q\,dx$$

$$j = 1,2\ldots n$$

42

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 1

- Formulación integral: (3)

$$\int_V \psi_j \, R \, dV + \int_{S_d} \overline{\psi}_j \, R_E \, dS + \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j \, R_N \, dS =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\left[EI \left(\psi_j(L)\varphi_i'''(L) - \psi_j(0)\varphi_i'''(0) - \psi_j'(L)\varphi''(L) + \psi_j'(0)\varphi''(0) \right. \right.}$$

$$\underbrace{\left. \left. \overline{\overline{\psi}}_{j1}\varphi'''_i(L) + \overline{\overline{\psi}}_{j2}\,\varphi''_i(L) + \int_0^L \psi_j'' \varphi_i'' dx \right) + \overline{\psi}_{j1}\varphi_i(0) + \overline{\psi}_{j2}\varphi_i'(0) \right]}_{K_{ji}} +$$

$$+ \underbrace{\left[-\overline{\overline{\psi}}_{j1}P + \overline{\overline{\psi}}_{j2}\,M + \overline{\psi}_{j1}\overline{v}_1 + \overline{\psi}_{j2}\overline{\theta}_1 + \int_0^L \psi_j \, q \, dx \right]}_{T_j} = 0 \qquad j = 1,2\ldots n$$

$$[K]\{c\} = \{T\}$$

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 2

- Formulación integral: (1)

$$\int_V \psi_j \, R \, dV = \int_\Omega \psi_j \, \hat{f}_{,ii} \, d\Omega = \int_\Omega \psi_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi_i \right)_{,kk} d\Omega = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_\Omega \psi_j \, \varphi_{i,kk} d\Omega = \ldots$$

$$\left| \; \left(\psi_j \, \varphi_{i,k}\right)_{,k} = \psi_{j,k} \, \varphi_{i,k} + \psi_j \, \varphi_{i,kk} \; \right|$$

$$\ldots = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_\Omega \left(\psi_j \, \varphi_{i,k}\right)_{,k} d\Omega - \sum_{i=1}^{n} c_i \int_\Omega \psi_{j,k} \, \varphi_{i,k} \, d\Omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \int_\Gamma n^k \psi_j \, \varphi_{i,k} \, ds - \sum_{i=1}^{n} c_i \int_\Omega \psi_{j,k} \, \varphi_{i,k} \, d\Omega$$

$$j = 1,2 \ldots n$$

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 2

- Formulación integral: (2)

$$\int_{S_d} \overline{\Psi}_j \, R_E \, dS = 0$$

$$\int_{S_f} \overline{\overline{\Psi}}_j \, R_N \, dS = \int_{\Gamma} \overline{\overline{\Psi}}_j \left(n^k \hat{f}_{,k} - \varepsilon_{nm3} n^n X^m \right) ds =$$

$$= \int_{\Gamma} \overline{\overline{\Psi}}_j \, n^k \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \varphi_i \right)_{,k} ds - \int_{\Gamma} \overline{\overline{\Psi}}_j \, \varepsilon_{nm3} n^n X^m \, ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\Gamma} \overline{\overline{\Psi}}_j \, n^k \varphi_{i,k} \, ds - \int_{\Gamma} \overline{\overline{\Psi}}_j \, \varepsilon_{nm3} n^n X^m \, ds \qquad j = 1,2 \ldots n$$

45

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Ejemplo 2

- Formulación integral: (3)

$$\int_V \psi_j \, R \, dV + \int_{S_d} \overline{\psi}_j \, R_E \, dS + \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j \, R_N \, dS =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\left[\int_\Gamma \psi_j \, n^k \varphi_{i,k} \, ds + \int_\Gamma \overline{\overline{\psi}}_j \, n^k \varphi_{i,k} \, ds - \int_\Omega \psi_{j,k} \, \varphi_{i,k} \, d\Omega \right]}_{M_{ji}} -$$

$$- \underbrace{\int_\Gamma \overline{\overline{\psi}}_j \, \varepsilon_{nm3} n^n X^m \, ds}_{T_j} = 0 \qquad j = 1,2 \ldots n$$

$$[M]\{c\} = \{T\}$$

46

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Consideraciones finales:

- MRP: sistema EDP → formulación integral ($\forall$ sistema EDP, no solo probs. estructuras)
  ¡Recuérdese el TTV!
- Formulación integral + condiciones concretas = = formulación variacional ¡Recuérdese el TEP!
- Dificultad del método: encontrar familias de funciones de interpolación y de peso eficientes.
- Posibilidades:
  - Funciones de interpolación ($\hat{u}$ $(\Leftrightarrow \varphi_i)$) totalmente generales → MRP impone:
    - las ecuaciones de campo
    - Las condiciones de contorno esenciales
    - Las condiciones de contorno naturales

47

Soluciones aproximadas: Métodos de Residuos Ponderados

Consideraciones finales:

- Posibilidades (sigue):
  - Las funciones de interpolación ($\hat{u}$ $(\Leftrightarrow \varphi_i)$) cumplen las ecuaciones de campo (R=0).
    - El MRP impone las condiciones de contorno.
    - Base del Método de los Elementos de Contorno.
  - Las funciones de interpolación ($\hat{u}$ $(\Leftrightarrow \varphi_i)$) cumplen las condiciones de contorno esenciales (R_E=0).
    - El MRP impone las ecuaciones de campo.
    - El MRP impone las condiciones de contorno naturales.
    - Base del Método de los Elementos Finitos.

48

Soluciones aproximadas: Método de Petrov-Galerkin

- Se escoge la función de interpolación $\hat{u}(\mathbf{x})$ de manera que satisfaga las c.c. esenciales. Ello permite escribirla como

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \leftrightarrow \quad \hat{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i$$

  donde:
  - $\varphi_0(\mathbf{x})$ cumple las c.c. esenciales
  - $\varphi_i(\mathbf{x})$ cumple las c.c. esenciales de forma homogénea, $\forall i$.
  - c_i es un conjunto de parámetros escalares a determinar (las incógnitas del problema).
- Las funciones $\overline{\overline{\psi}}(\mathbf{x})$ son la particularización al contorno de las funciones $\psi(\mathbf{x})$. Las $\overline{\psi}(\mathbf{x})$ no aparecen.

50

Soluciones aproximadas: Método de Petrov-Galerkin

- Todo ello conduce a la expresión integral:

$$\int_V \psi_j R\, dV + \int_{S_d} \overline{\psi}_j R_E\, dS + \int_{S_f} \overline{\overline{\psi}}_j R_N\, dS =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\left[\int_V \psi_j D\varphi_i\, dV + \int_{S_f} \psi_j C_N \varphi_i\, dS \right]}_{M_{ji}} +$$

$$+ \underbrace{\left[\int_V \psi_j D\varphi_0\, dV + \int_V \psi_j f\, dV + \int_{S_f} \psi_j g\, dS + \int_{S_f} \psi_j C_N \varphi_0\, dS \right]}_{T_i} = 0 \qquad j = 1,2\ldots n$$

- El método de Petrov-Galerkin es una generalización del método de Galerkin que se verá a continuación.

51

Soluciones aproximadas: Método de Petrov-Galerkin

Ejemplo 1

- Expresión integral:

Por homogeneidad dimensional $\overline{\overline{\psi}}_{j,2} = \psi'_j(L)$

$$EI \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\Big[\psi_j(L)\varphi_i'''(L) - \psi_j(0)\varphi_i'''(0) - \psi'_j(L)\varphi_i''(L) + \psi'_j(0)\varphi_i''(0) + \psi_j(L)\varphi_i'''(L) + \psi'_j(L)\varphi_i''(L) + \int_0^L \psi''_j\, \varphi''_i\, dx\Big)\Big]}_{K_{ji}} +$$

$$\underbrace{+\Big[\psi_j(L)\varphi_0'''(L) - \psi_j(0)\varphi_0'''(0) - \psi'_j(L)\varphi_0''(L) + \psi'_j(0)\varphi_0''(0) + \psi_j(L)\varphi_0'''(L) + \psi'_j(L)\varphi_0''(L) + \int_0^L \psi''_j\, \varphi''_0\, dx - \psi_j(L)P + \psi'_j(L)M + \int_0^L \psi_j\, q\, dx\Big]}_{T_j} = 0$$

$$j = 1,2 \ldots n$$

52

Soluciones aproximadas: Método de Petrov-Galerkin

Ejemplo 2

- Expresión integral:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left[\int_\Gamma \psi_j n^k \varphi_{i,k}\, ds + \int_\Gamma \overline{\overline{\psi}}_j n^k \varphi_{i,k}\, ds - \int_\Omega \psi_{j,k} \varphi_{i,k}\, d\Omega \right] - \int_\Gamma \overline{\overline{\psi}}_j \varepsilon_{nm3} n^n X^m\, ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\left[2\int_\Gamma \psi_j n^k \varphi_{i,k}\, ds - \int_\Omega \psi_{j,k} \varphi_{i,k}\, d\Omega \right]}_{M_{ji}} +$$

$$\underbrace{\cancel{+2\int_\Gamma \psi_j n^k \varphi_{0,k}\, ds - \int_\Omega \psi_{j,k} \varphi_{0,k}\, d\Omega} - \int_\Gamma \psi_j \varepsilon_{nm3} n^n X^m\, ds}_{T_i} = 0 \qquad j = 1,2 \ldots n$$

- Los términos tachados no aparecen en este problema concreto porque, al no haber c.c. esenciales, φ_0 es nula.

53

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

- Supuestos método Petrov-Galerkin + ($\varphi_i = \psi_i$).

- Por lo tanto:

$$\int_V \varphi_j \, R \, dV + \cancelto{0}{\int_{S_d} \overline{\psi}_j \, R_E \, dS} + \int_{S_f} \varphi_j \, R_N \, dS = \sum_{i=1}^{n} k_i \underbrace{\left[\int_V \varphi_j \, D\varphi_i \, dV + \int_{S_f} \varphi_j \, C_N \varphi_i \, dS \right]}_{M_{ji}} +$$

$$+ \underbrace{\left[\int_V \varphi_j \, D\varphi_0 \, dV + \int_V \varphi_j \, f \, dV + \int_{S_f} \varphi_j \, g \, dS + \int_{S_f} \varphi_j \, C_N \varphi_0 \, dS \right]}_{T_i} = 0$$

$$j = 1,2 \ldots n$$

55

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Ejemplo 1

- Expresión integral:

φ_i cumple las c.c.esenciales de forma homogénea

$$EI\sum_{i=1}^{n} c_i\Big[\varphi_j(L)\varphi_i'''(L)-\cancel{\varphi_j(0)\varphi_i'''(0)}-\cancel{\varphi_j'(L)\varphi_i''(L)}+\cancel{\varphi_j'(0)\varphi_i''(0)}+$$

$$\underbrace{+\varphi_j(L)\varphi_i'''(L)+\cancel{\varphi_j'(L)\varphi_i''(L)}+\int_0^L\varphi_j''\varphi_i''\,dx\Big)\Big]}_{K_{ji}}\qquad+$$

$$+\Big[\varphi_j(L)\varphi_0'''(L)-\cancel{\varphi_j(0)\varphi_0'''(0)}-\cancel{\varphi_j'(L)\varphi_0''(L)}+\cancel{\varphi_j'(0)\varphi_0''(0)}+$$

$$+\varphi_j(L)\varphi_0'''(L)+\cancel{\varphi_j'(L)\varphi_0''(L)}+\int_0^L\varphi_j''\varphi_0''\,dx-$$

$$\underbrace{-\varphi_j(L)P+\varphi_j'(L)M+\int_0^L\varphi_j\,q\,dx\Big]}_{T_j}=0$$

$$j=1,2\ldots n$$

56

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Ejemplo 2

- Expresión integral:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\left[2\int_{\Gamma} \varphi_j \, n^k \varphi_{i,k} \, ds - \int_{\Omega} \varphi_{j,k} \, \varphi_{i,k} \, d\Omega\right]}_{M_{ji}} -$$

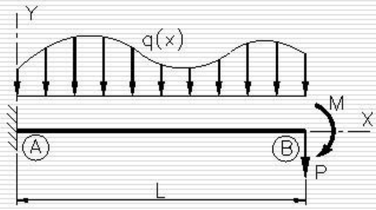
$$- \underbrace{\int_{\Gamma} \varphi_j \, \varepsilon_{nm3} n^n X^m \, ds}_{T_i} = 0 \qquad j = 1,2 \ldots n$$

57

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Ejemplo 1

- **Resolución del ejemplo**:
  - $\bar{v}_1 = 0 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = 0 \quad , \quad q = const.$
  - Adoptamos $\varphi_0 \equiv 0$
  - Adoptamos $\varphi_i = \sum_{i=2}^{n} c_i \, x^i$



$$EI\sum_{i=2}^{n} c_i \left[2\varphi_j(L)\varphi_i''(L) + \int_0^L \varphi_j'' \varphi_i'' dx \right] + \left[-\varphi_j(L)P + \varphi_j'(L)M + \int_0^L \varphi_j \, q \, dx \right] = 0$$

$$EI\sum_{i=2}^{n} c_i \left[2L^j \, i(i-1)(i-2)L^{i-3} + \int_0^L j(j-1)x^{j-2} i(i-1)x^{i-2} dx \right] + \left[-L^j P + jL^{j-1} M + \int_0^L x^j \, q \, dx \right] =$$

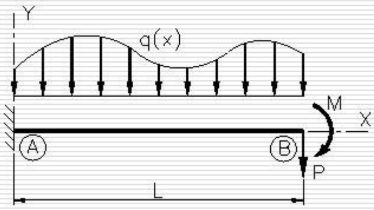
$$= EI\sum_{i=2}^{n} c_i \left[2i(i-1)(i-2)L^{j+i-3} + \frac{j(j-1)i(i-1)}{(i+j-3)} L^{j+i-3} \right] + \left[-L^j P + jL^{j-1} M + \frac{1}{j+1} L^{j+1} q \right] = 0$$

58

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Ejemplo 1

- Resolución del ejemplo:



$$K_{ij} = EI\left[2i(i-1)(i-2)+\frac{j(j-1)i(i-1)}{(i+j-3)}\right]L^{j+i-3}$$

$$T_j = -L^j P + jL^{j-1} M + \frac{1}{j+1}L^{j+1}q$$

- Aproximación de un término (*i*,*j*=2)

$$K_{22} = 4EIL^3 \quad , \quad T_2 = -L^2 P + 2LM + \frac{qL^3}{3}$$

$$\boxed{\sum_{i=2}^{n} K_{ji}c_i + T_j = 0}$$

$$4EILc_2 = L^2 P - 2LM - \frac{qL^3}{3} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{PL}{4EI} - \frac{M}{2EI} - \frac{qL^2}{12EI}$$

$$v(x) = \frac{PL}{4EI}x^2 - \frac{M}{2EI}x^2 - \frac{qL^2}{12EI}x^2$$

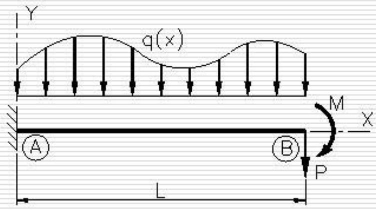
La solución es exacta para el término en *M*.

59

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Ejemplo 1

- Aproximación de dos términos (i,j=2,3)



$$EI\begin{bmatrix} 4L & 18L^2 \\ 6L^2 & 24L^3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L^2P - 2LM - \frac{1}{3}qL^3 \\ L^3P - 3L^2M - \frac{1}{4}qL^4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 6 & 24 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{LP}{EI} - \frac{2M}{EI} - \frac{qL^2}{3EI} \\ \frac{LP}{EI} - \frac{3M}{EI} - \frac{qL^2}{4EI} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{PL}{2EI} - \frac{M}{2EI} + \frac{7qL^2}{24EI} \\ \frac{P}{6EI} - \frac{5qL}{60EI} \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = \frac{P}{EI}\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{L}{2}x^2\right] - \frac{M}{2EI}x^2 + \frac{q}{EI}\left[\frac{7}{24}x^4 - \frac{5L}{60}x^3\right]$$

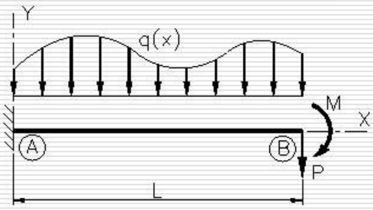
La solución es exacta para los términos en P y M.

60

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Ejemplo 1

- Aproximación de tres términos ($i,j=2,3,4$)



$$\begin{bmatrix} 4 & 18 & 56 \\ 6 & 24 & 66 \\ 8 & 30 & 76{,}8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 L \\ c_4 L^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{LP}{EI} - \dfrac{2M}{EI} - \dfrac{qL^2}{3EI} \\ \dfrac{LP}{EI} - \dfrac{3M}{EI} - \dfrac{qL^2}{4EI} \\ \dfrac{LP}{EI} - \dfrac{4M}{EI} - \dfrac{qL^2}{5EI} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{PL}{2EI} - \dfrac{M}{2EI} - \dfrac{1qL^2}{4EI} \\ \dfrac{P}{6EI} + \dfrac{qL}{6EI} \\ -\dfrac{q}{24EI} \end{Bmatrix}$$

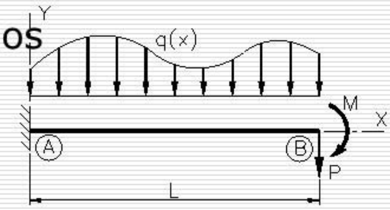
$$v(x) = \frac{P}{EI}\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{L}{2}x^2\right] - \frac{M}{2EI}x^2 + \frac{q}{EI}\left[-\frac{1}{24}x^4 + \frac{L}{6}x^3 + \frac{L^2}{4}x^2\right]$$

Todos los términos de la solución son exactos.

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Ejemplo 1

- Aproximación de cuatro términos (i,j=2,3,4,5)



$$\begin{bmatrix} 4 & 18 & 56 & 130 \\ 6 & 24 & 66 & 144 \\ 8 & 30 & 76{,}8 & 160 \\ 10 & 36 & 88 & 177{,}14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 L \\ c_4 L^2 \\ c_5 L^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{LP}{EI} - \frac{2M}{EI} - \frac{qL^2}{3EI} \\ \frac{LP}{EI} - \frac{3M}{EI} - \frac{qL^2}{4EI} \\ \frac{LP}{EI} - \frac{4M}{EI} - \frac{qL^2}{5EI} \\ \frac{LP}{EI} - \frac{5M}{EI} - \frac{qL^2}{6EI} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{PL}{2EI} - \frac{M}{2EI} - \frac{1qL^2}{4EI} \\ \frac{P}{6EI} + \frac{qL}{6EI} \\ -\frac{q}{24EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = \frac{P}{EI}\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{L}{2}x^2\right] - \frac{M}{2EI}x^2 + \frac{q}{EI}\left[-\frac{1}{24}x^4 + \frac{L}{6}x^3 + \frac{L^2}{4}x^2\right]$$

La solución anterior ya era exacta. **No hay término de quinto grado.**

62

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Ejemplo 1

- En general, se obtiene una solución aproximada, no la solución exacta.
- Si la familia de funciones de interpolación permite representar la solución exacta, el método de Galerkin permite obtenerla. (El de Ritz también.)

63

Soluciones aproximadas: Método de Galerkin

Condiciones que deben cumplir las funciones de interpolación

- φ_0 debe cumplir las condiciones de contorno esenciales.
- φ_i, $\forall i$, debe cumplir:
  - Ser derivable hasta el orden que se requiera.
  - Las condiciones de contorno esenciales de forma homogénea.
  - Ser linealmente independientes y definir un conjunto completo[1].

[1] Se cumple si tomamos como aproximación el resultado de truncar una serie de cualquier tipo (Taylor, Fourier, Legendre…) con coeficientes indeterminados.

Soluciones aproximadas: Método de Ritz

- Se aplica a problemas que admiten una formulación variacional. (TEP, por ejemplo.)

- Se escoge $\hat{u}$ de manera que satisfaga la c.c. esenciales. Puede expresarse como en el método de Galerkin:

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N} k_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \leftrightarrow \quad \hat{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} k_i \varphi_i$$

- No intervienen funciones de peso $\psi_j, \overline{\psi}_j$ ni $\overline{\overline{\psi}}_j$.

- Al sustituir la aproximación en el funcional, este se transforma en una función algebraica de los coeficientes c_i.

- Solución del problema

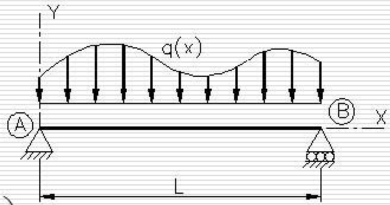
$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \qquad \rightarrow \qquad [K]\{c_i\} + \{T_i\} = \{0\}$$

66

Soluciones aproximadas: Método de Ritz

□ Planteamiento

$$\hat{v}(X)=\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i(X) \quad / \quad \phi_i(0)=\phi_i(L)=0 \ \ \forall i$$



$$\Pi=\int_0^L EI\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i''(X)\right)^2 dX+\int_0^L\left(-q\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i(X)\right)dX$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v_i v_j \underbrace{EI\int_0^L \phi_i''(X)\phi_j''(X)dX}_{K_{ij}}-\sum_{i=1}^{\infty} v_i\underbrace{\int_0^L (q(X)\phi_i(X))dX}_{F_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j K_{ij}-\sum_{i=1}^{\infty} v_i F_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i}=\sum_{j=1}^{\infty} v_j K_{ij}-F_i=0 \qquad i=1,2,3\ldots n$$

Se sustituye un problema variacional por la resolución de un sistema algebraico de *n* ecuaciones con *n* incógnitas

67

Soluciones aproximadas: Método de Ritz

Condiciones que deben cumplir las funcione… interpolación

- φ_0 debe cumplir las condiciones d… …rno esenciales.
- φ_i, $\forall i$, debe cumplir:
  - Ser derivable hasta e… …que se requiera.
  - Las condiciones d… …no esenciales de forma homogénea.
  - Ser linealm… …dependientes y definir un conjunto complet…

Las mismas que en el método de Galerkin

[1] S… …si tomamos como aproximación el resultado de truncar una … …ualquier tipo (Taylor, Fourier, Legendre…) con coeficientes …minados.

68

Soluciones aproximadas: Método de los elementos finitos

- En el ámbito de la Mecánica de Sólidos Deformables, es el principal método de resolución de sistemas de EDP.
- Le dedicaremos la mayor parte del curso.
- Ahora solo aparecerán unas pinceladas para relacionarlo con los métodos de Ritz y Galerkin.

70

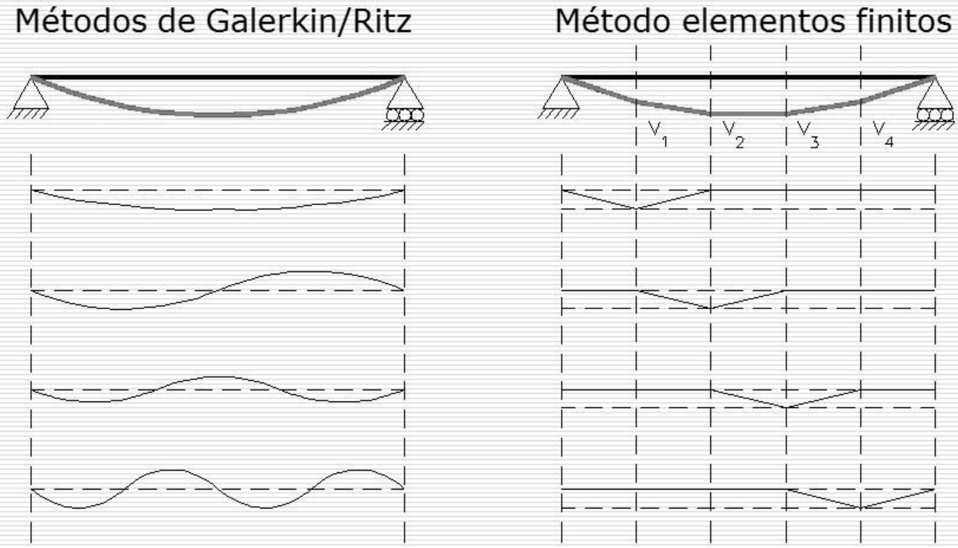
Soluciones aproximadas: Método de los elementos finitos

J. Argirys
R.W. Clough
O.C. Zienkiewicz

- Método de los elementos finitos
  - Similar a los métodos de Ritz y Galerkin
  - Se divide el dominio en subdominios pequeños → elementos finitos
  - Se adoptan funciones de interpolación **sencillas** en cada elemento
  - Aumentado el número de elementos se puede aproximar cualquier función tanto como se quiera
  - Se integra elemento a elemento

71

Soluciones aproximadas: Método de los elementos finitos

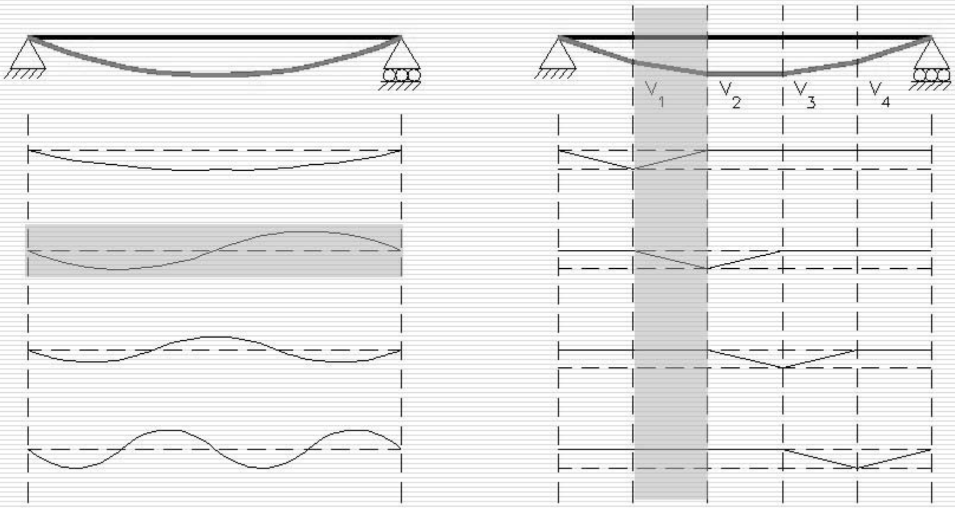


72

Soluciones aproximadas: Método de los elementos finitos

Integración:

Métodos de Galerkin/Ritz — Método elementos finitos



73

Bibliografía

Bibliografía

- CASANOVA, J. *Fundamentos de elasticidad teórica,* Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1993.
- CASANOVA, J. *Introducción a la Mecánica del Sólido Deformable.* Valencia, 2011. <https://poliformat.upv.es/access/content/group/GRA_12821_2014/Teor%C3%ADa/LibroCompleto_imp.pdf >[Consulta: 13/08/14] (Tema 6)
- KLEIBER, M. (ed.) *Handbook of Computational solid Mechanics*. Springer, Berlin, 1998. (Capítulo 3, Parte I)
- NAVARRINA, F, ET. AL. *Método de Residuos Ponderados. Problemas de Equilibrio 1D.* Universidad de A Coruña. <http://caminos.udc.es/info/asignaturas/mna/ApuntesYMaterialPedagogico/Apuntes/7a_RP_PE_1D.pdf >[Consulta:13/08/14]
- REDDY, J. N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics.* Wiley, New York, 1983. (Apartados 2.1, 2.3, 3.1 a 3.3)
- ZIENKIEWICZ, O.C. *El método de los elementos Finitos*. Reverté, Barcelona, 1980. (Capítulo 3)

75

Tema 3:

Descripción general del Método de los Elementos Finitos

Introducción

Introducción

- ¿Qué es el Método de los Elementos Finitos?
  - Un método numérico de resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales basado en una formulación débil de éstas.
  - Actualmente, en el ámbito de la Ingeniería Estructural, el procedimiento de cálculo más potente y versátil disponible.
- Formulación inicial:
  - M. J. ***Turner***, R. W. ***Clough***, H. C. ***Martin*** y L. J. ***Topp***: «Stiffness and deflection analysis of complex structures». Jour. Aerona. Sci. 1956
  - J.H. ***Argyris***, S. ***Kelsey***, Energy Theorems and Structural Analysis, Aircr. Eng. 1955

3

Formulación matricial del
Teorema de los Trabajos Virtuales

Formulación matricial del TTV

- Teorema de los Trabajos Virtuales

$$\delta \Pi = 0 \qquad \forall \delta d_i \in \mathcal{A}$$

$$\delta \Pi = \int_V T^{ij} \delta E_{ij} dV - \int_V b^i \delta d_i dV - \int_{S_f} \bar{t}^i \delta d_i dS =$$

$$= \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{d}^t \mathbf{b} dV - \int_{S_f} \delta \mathbf{d}^t \bar{\mathbf{t}} dS$$

siendo

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X & \sigma_Y & \sigma_Z & \tau_{XY} & \tau_{XZ} & \tau_{YZ} \end{pmatrix}^t$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_X & \delta\varepsilon_Y & \delta\varepsilon_Z & \delta\gamma_{XY} & \delta\gamma_{XZ} & \delta\gamma_{YZ} \end{pmatrix}^t$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_X & b_Y & b_Z \end{pmatrix}^t \qquad \bar{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \bar{t}_X & \bar{t}_Y & \bar{t}_Z \end{pmatrix}^t$$

$$\delta \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \delta d_X & \delta d_Y & \delta d_Z \end{pmatrix}^t$$

5

Formulación matricial del TTV

- Justificación del primer término

$$\int_V T^{ij}\delta E_{ij}dV = \sigma_X \delta\varepsilon_X + \sigma_Y \delta\varepsilon_Y + \sigma_Z \delta\varepsilon_Z +$$

$$+2\tau_{XY}\delta\varepsilon_{XY} + 2\tau_{XZ}\delta\varepsilon_{XZ} + 2\tau_{YZ}\delta\varepsilon_{YZ} =$$

$$= \sigma_X \delta\varepsilon_X + \sigma_Y \delta\varepsilon_Y + \sigma_Z \delta\varepsilon_Z +$$

$$+\tau_{XY}\delta\gamma_{XY} + \tau_{XZ}\delta\gamma_{XZ} + \tau_{YZ}\delta\gamma_{YZ} = \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_X & \sigma_Y & \sigma_Z & \tau_{XY} & \tau_{XZ} & \tau_{YZ}\end{pmatrix}^t$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix}\delta\varepsilon_X & \delta\varepsilon_Y & \delta\varepsilon_Z & \delta\gamma_{XY} & \delta\gamma_{XZ} & \delta\gamma_{YZ}\end{pmatrix}^t$$

6

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Discretización:
  - Se divide el dominio en subdominios llamados *elementos finitos*.
  - Sólo están conectados en los *nodos* (puntos particulares del contorno del elemento).
- Interpolación:
  - Los desplazamientos (reales y virtuales) se aproximan en cada elemento mediante funciones de interpolación sencillas —*funciones de forma* —.
  - Éstas sólo dependen de parámetros (desplazamientos o sus derivadas) definidos en los nodos —*parámetros nodales*—.
- Aproximación del funcional. Todo ello permite:
  - Evaluar el funcional (TV o EP) aproximado *elemento a elemento*.
  - Obtener una expresión del funcional aproximado que depende algrebráicamente de los parámetros nodales.

8

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Discretización del funcional

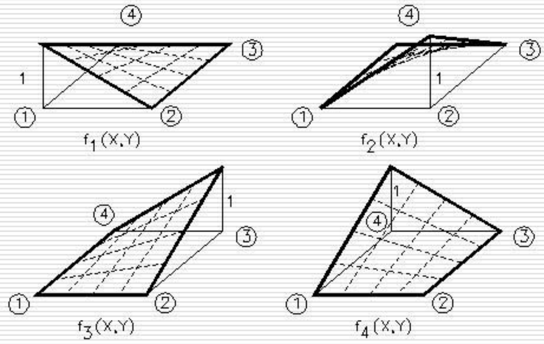
$$\delta\Pi = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta\mathbf{d}^t \mathbf{b} dV - \int_{S_f} \delta\mathbf{d}^t \bar{\mathbf{t}} dS$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{V_i} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV - \sum_{i=1}^{N} \int_{V_i} \delta\mathbf{d}^t \mathbf{b} dV - \sum_{j=1}^{M} \int_{S_{f\,i}} \delta\mathbf{d}^t \bar{\mathbf{t}} dV$$

9

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Interpolación de los desplazamientos → $\mathbf{d} \cong \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{N}\mathbf{a}_e$
- Ejemplo 2D



$$\mathbf{d} \approx \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{N}\mathbf{a}_e$$

$$\mathbf{d} = \left(u(X,Y) \quad v(X,Y)\right)^t$$

$$\hat{\mathbf{d}} = \left(\hat{u}(X,Y) \quad \hat{v}(X,Y)\right)^t$$

$$\mathbf{a}_e = \left(u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\right)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} f_1(X,Y) & 0 & f_2(X,Y) & 0 & f_3(X,Y) & 0 & f_4(X,Y) & 0 \\ 0 & f_1(X,Y) & 0 & f_2(X,Y) & 0 & f_3(X,Y) & 0 & f_4(X,Y) \end{bmatrix}$$

10

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Deformaciones
  - Expresión matricial → $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{d}$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{XZ} \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial Z \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X & 0 \\ \partial/\partial Z & 0 & \partial/\partial X \\ 0 & \partial/\partial Z & \partial/\partial Y \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

11

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Deformaciones
  - Expresión matricial → $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{d}$
  - Interpolación → $\boldsymbol{\varepsilon} \cong \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}_e = \mathbf{B}\mathbf{a}_e$

- Método de Galerkin
  - Desplazamientos virtuales → $\delta\mathbf{d} \cong \delta\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{N}\delta\mathbf{a}_e$
  - Deformaciones virtuales → $\delta\boldsymbol{\varepsilon} \cong \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\delta\mathbf{a}_e$

12

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Tensiones (ecuaciones constitutivas)
  - Expresión matricial → $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{XZ} \\ \tau_{YZ} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{XZ} \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

13

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Tensiones (ecuaciones constitutivas)
  - Expresión matricial → $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$
  - Expresión interpolada → $\boldsymbol{\sigma} \cong \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e$

14

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Aproximación del funcional:

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^t\boldsymbol{\sigma}dV - \sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}\delta\mathbf{d}^t\mathbf{b}dV - \sum_{j=1}^{M}\int_{S_{fi}}\delta\mathbf{d}^t\bar{\mathbf{t}}dS$$

¡Datos!

$$\delta\hat{\Pi} = \sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^t\hat{\boldsymbol{\sigma}}dV - \sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}\delta\hat{\mathbf{d}}^t\mathbf{b}dV - \sum_{j=1}^{M}\int_{S_{fi}}\delta\hat{\mathbf{d}}^t\bar{\mathbf{t}}dS$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}(\mathbf{B}\delta\mathbf{a}_e)^t(\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e)dV - \sum_{i=1}^{N}\int_{V_i}(\mathbf{N}\delta\mathbf{a}_e)^t\mathbf{b}dV - \sum_{j=1}^{M}\int_{S_{fi}}(\mathbf{N}\delta\mathbf{a}_e)^t\bar{\mathbf{t}}dS$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\delta\mathbf{a}_e^{\,t}\underbrace{\left[\int_{V_i}\mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B}dV\right]}_{\mathbf{K}_e}\mathbf{a}_e + \sum_{i=1}^{N}\delta\mathbf{a}_e^{\,t}\underbrace{\left(-\int_{V_i}\mathbf{N}^t\mathbf{b}dV\right)}_{\mathbf{f}_{be}} + \sum_{j=1}^{M}\delta\mathbf{a}_e\underbrace{\left(-\int_{S_{fi}}\mathbf{N}^t\bar{\mathbf{t}}dS\right)}_{\mathbf{f}_{te}}$$

15

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

- Escritura matricial del funcional aproximado:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta \mathbf{a}_e^{\,t} \left[\int_{V_i} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{a}_e = \delta \mathbf{a}^t \mathbf{K} \mathbf{a}$$

$$-\sum_{i=1}^{N} \delta \mathbf{a}_e^{\,t} \int_{V_i} \mathbf{N}^t \mathbf{b} dV - \sum_{j=1}^{M} \delta \mathbf{a}_e \int_{S_{f\,i}} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}} dV = \delta \mathbf{a}^t \mathbf{f}$$

$$\delta \hat{\Pi} = \delta \mathbf{a}^t \left(\mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{f} \right)$$

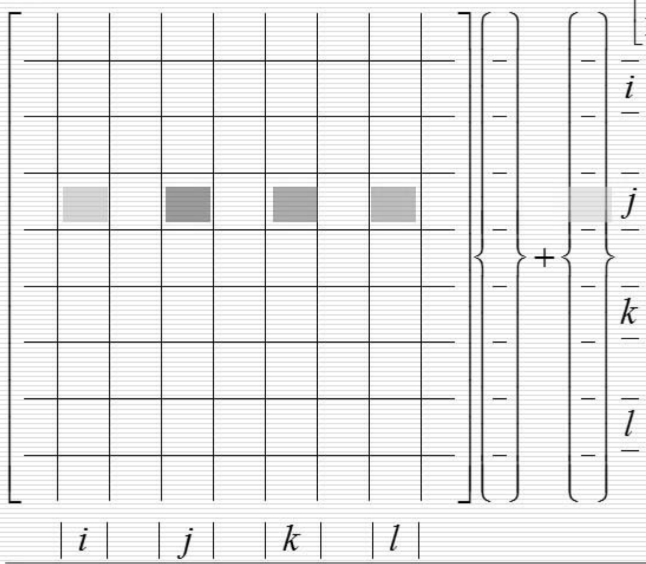
- Determinación de **K** y **f** conocidos $\mathbf{K}_e$ y $\mathbf{f}_e$, $\forall e$
  → Ensamblaje
- Se pueden calcular las matrices $\mathbf{K}_e$ y $\mathbf{f}_e$ de cada elemento en un sistema de referencia local y cambiarlas al sistema global antes de hacer las sumas.

16

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^e \\ \mathbf{a}_2^e \\ \mathbf{a}_3^e \\ \mathbf{a}_4^e \end{Bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ l \end{array}$$

- Ensamblaje



17

Aproximación del funcional: discretización e interpolación

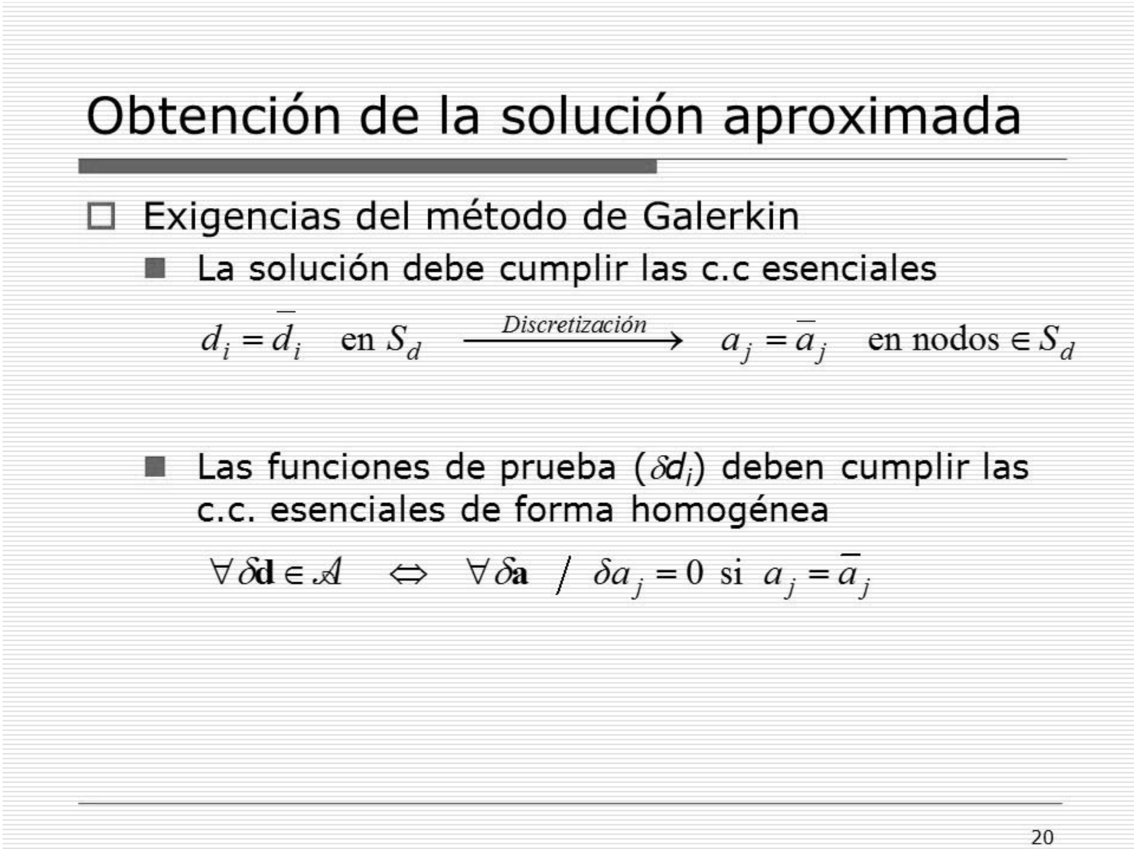
- Resultado alcanzado:
  - Expresión aproximada del funcional

    $$\delta\hat{\Pi} = \delta\mathbf{a}^t\left(\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f}\right)$$

    que
    - Depende exclusivamente de los parámetros nodales **a** y δ**a** (expresión algebraica).
    - Se determina elemento a elemento.
    - Con los desplazamientos interpolados elemento a elemento.
    - Donde aún **no** se han impuesto las condiciones de contorno esenciales (cinemáticas).

18

Obtención de la solución aproximada



Obtención de la solución aproximada

- Exigencias del método de Galerkin
  - En consecuencia, si $a_j = \overline{a}_j \quad \wedge \quad \delta a_j = 0$
    - La columna *j* de **K** queda multiplicada por un valor conocido → se puede agrupar con **f**
    - La fila *j* de **K** queda multiplicada por cero

$$\delta\hat{\Pi} = \delta\mathbf{a}^t\left(\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f}\right)$$

$$= \left(\delta a_1 \quad \cdots \quad \boxed{\delta a_j = 0} \quad \dots \quad \delta a_n\right)\left(\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{j1} & \dots & K_{jj} & \dots & K_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nj} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j = \overline{a}_j \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}\right)$$

21

Obtención de la solución aproximada

- Exigencias del método de Galerkin
  - Luego: $\delta\hat{\Pi} = \delta\mathbf{a}^t\left(\mathbf{Ka}-\mathbf{f}\right) = \delta\tilde{\mathbf{a}}^t\left(\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{a}} + \left(\tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{K}_C\mathbf{a}_C\right)\right) = \delta\tilde{\mathbf{a}}^t\left(\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{f}}^*\right)$

$$\delta\hat{\Pi} = \delta\mathbf{a}^t\left(\mathbf{Ka}+\mathbf{f}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \delta a_1 & \cdots & \delta a_j = 0 & \dots & \delta a_n \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{j1} & \dots & K_{jj} & \dots & K_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nj} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j = \bar{a}_j \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \delta a_1 & \dots & \delta a_{j-i} & \delta a_{j+1} & \dots & \delta a_n \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j-1} & K_{1j+1} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{j-1,1} & \dots & K_{j-1,j-1} & K_{j-1,j+1} & \dots & K_{j-1,n} \\ K_{j+1,1} & \dots & K_{j+1,j-1} & K_{j+1,j+1} & \dots & K_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{n,j-1} & K_{n,j+1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{j-1} \\ f_{j+1} \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_{1j} \\ \vdots \\ K_{j-1,j} \\ K_{j+1,j} \\ \vdots \\ K_{n,j} \end{Bmatrix} \bar{a}_j \right)$$

22

Obtención de la solución aproximada

Imposición c.c. esenciales. Resumen:

- Para cada grado de libertad *j* afectado:
  - Se multiplica la columna *j* por el valor $\overline{a}_j$ impuesto y agrupa con las fuerzas nodales en el vector $\tilde{\mathbf{f}}^*$.
  - Se elimina la fila *j* completa ($\mathbf{K}$ y $\tilde{\mathbf{f}}^*$).

Obtención de la solución aproximada

- Aplicación del TTV
  - Condición de equilibrio

$$\delta\Pi = 0 \quad \forall \delta\mathbf{d} \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \delta\hat{\Pi} = 0 \quad \forall \delta\widetilde{\mathbf{a}}$$

$$\delta\hat{\Pi} = \delta\widetilde{\mathbf{a}}^t\left(\widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{\mathbf{a}} + \widetilde{\mathbf{f}}^*\right) = 0 \quad \forall \delta\widetilde{\mathbf{a}} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{\mathbf{a}} + \widetilde{\mathbf{f}}^* = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{\mathbf{a}} = -\widetilde{\mathbf{f}}^*$$

  - La obtención de la solución aproximada (parámetros nodales desconocidos, $\widetilde{\mathbf{a}}$) se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones algebraico.
  - En Elasticidad Lineal el sistema es lineal.

24

Resumen del método

Resumen del método

- Discretización del continuo en elementos finitos
- Determinación de $\mathbf{K}_e$ y $\mathbf{f}_e$ de cada elemento.
- Cambio de sistema de referencia, si procede.
- Ensamblaje + c.c. esenciales → $\widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{\mathbf{a}} = -\widetilde{\mathbf{f}}^*$
- Resolución del sistema
- Cálculo de las deformaciones → $\hat{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}_e$
- Cálculo de las tensiones → $\hat{\sigma} = \mathbf{D}\hat{\varepsilon}$
- Cálculo de las reacciones

26

Resumen del método

- Precisión de los resultados
  - Desplazamientos nodales
  - Desplazamientos interpolados
  - Deformaciones y tensiones

- Precisión
  - Número de elementos
  - Funciones de forma

27

Funciones de forma: convergencia

Funciones de forma: convergencia

- Finalidad apartado:
  - Establecer las condiciones que han de cumplir las funciones de forma para garantizar que al aumentar el número de elementos las solución del MEF converge hacia la solución exacta

29

Funciones de forma: convergencia

- Derivabilidad
  - Las derivadas que aparezcan en el funcional deben existir y no ser idénticamente nulas.

    (Si en el funcional los desplazamientos aparecen derivados hasta el orden *p*, las funciones de forma deben ser derivables hasta el orden *p*.)
  - Si no fuera así, el funcional no existiría o se reduciría a la constante cero.

    → En tal caso, la aproximación no tendría sentido
  - Este tipo de condición es común a los métodos clásicos de Galerkin o de Ritz.

30

Funciones de forma: convergencia

- Derivabilidad
  - En Mecánica, las derivadas que aparecen en el funcional son **deformaciones** y el criterio anterior exige que las funciones de forma sean capaces de reproducir **un campo de deformaciones constante** en cada elemento.
  - Nótese que, al refinar la malla y hacer cada vez más pequeños los elementos, el campo deformacional en cada uno va aproximándose a un campo constante. La condición anterior asegura que, aumentando el número de elementos, se puede aproximar suficientemente cualquier campo deformacional.

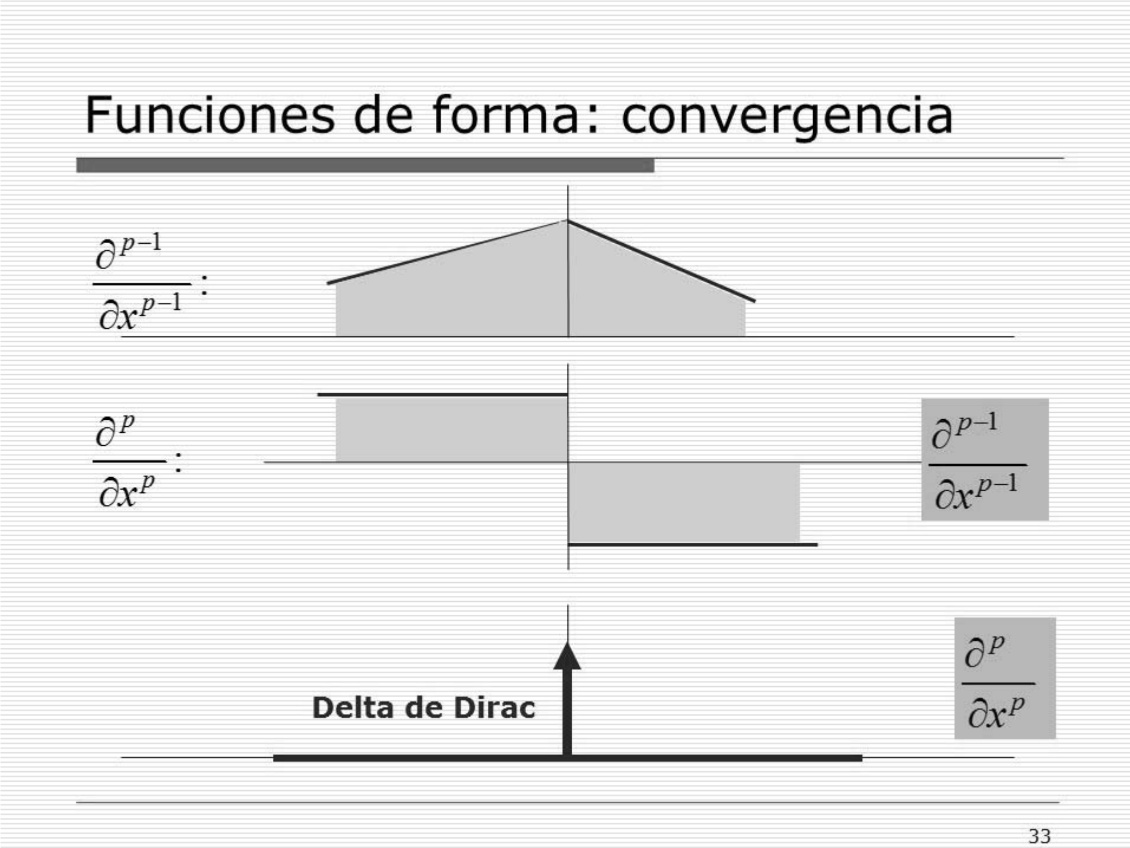
31

Funciones de forma: convergencia

- Integrabilidad
  - El funcional aproximado debe ser integrable.

    Se deben poder realizar las operaciones involucradas en el proceso de aproximación.
  - Eso exige que las funciones de forma sean de clase $\mathscr{C}^{p-1}$ (derivables con continuidad hasta el orden *p-1*) si en el funcional los desplazamientos aparecen derivados hasta el orden *p*.

32


Funciones de forma: convergencia
$\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}$:
$\frac{\partial^{p}}{\partial x^{p}}$:
$\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}$
Delta de Dirac
$\frac{\partial^{p}}{\partial x^{p}}$
33

Funciones de forma: convergencia

- Movimiento de sólido rígido:
  - Si los desplazamientos nodales corresponden a un movimiento de sólido rígido, las funciones de forma deben definir un movimiento de sólido rígido en el interior del elemento, es decir, deben conducir a deformaciones nulas.
- Deformación constante
  - Si los desplazamientos nodales corresponden a un campo deformacional constante en el elemento, las funciones de forma deben determinar un campo deformacional constante en él.

34

Funciones de forma: convergencia

- Deformación finita en el contorno del elemento
  - Las funciones de forma deben determinar deformaciones finitas en el contorno del elemento.
    - Si no fuera así, el trabajo virtual de las fuerzas internas estaría mal determinado, porque sólo se ha considerado el producido en el interior del elemento.
    - Eso exige que las funciones de forma sean de clase $\mathcal{C}^{p-1}$ incluso en el contorno si en el funcional los desplazamientos aparecen derivados hasta el orden *p*.
    - Recuérdese la condición de integrabilidad.

35

Funciones de forma: convergencia

- Elementos **no conformes**
  - En ocasiones es difícil encontrar funciones de forma de clase $\mathscr{C}^{p-1}$ en el contorno del elemento.
  - Los elementos cuyas funciones de forma no cumplen esta condición se denominan **elementos no conformes**.
  - Si un elemento no conforme satisface
    - las condiciones de deformación constante anteriormente enunciadas, y
    - el criterio de la parcela (*patch test*) —que se enunciará más adelante —,

    entonces la solución aproximada basada en él, al aumentar el número de elementos converge a la solución exacta.
  - La velocidad de convergencia es similar, a veces incluso mejor, que la que proporcionan los elementos conformes.

36

Funciones de forma: convergencia

- **Criterio de la parcela**
  - Se define una *parcela* formada por un número arbitrario de elementos.
  - Se impone a los elementos de la parcela unos desplazamientos nodales correspondientes a un estado de deformación constante.
  - El criterio de la parcela se satisface si:
    - Se alcanza simultáneamente el equilibrio de todos los nodos sin necesidad de introducir ninguna fuerza nodal exterior en los nodos internos.
    - Se determina un estado tensional constante en toda la parcela.
  - Esto garantiza que no se ha perdido trabajo virtual en las discontinuidades entre elementos y, por lo tanto, que el elemento no conforme es válido.

37

Funciones de forma: convergencia

- **Consideraciones finales:**
  - Los programas comerciales de Cálculo de Estructuras se basan en funciones de forma, métodos de integración, etc. bien contrastados.
  - Por ello, al ingeniero que los utiliza para analizar **estructuras convencionales** todo referente a la elección de la función de forma y a otros problemas que no se han tratado (como la integración numérica) en general no debe preocuparle.
  - Estos aspectos sólo resultan relevantes en unos pocos casos:
    - Problemas de gran complejidad, prácticamente reservados a gabinetes especializados en ellos, que requieran usar programas específicos.
    - En investigación.
    - En la elaboración de los propios programas.

38

Bibliografía

Bibliografía

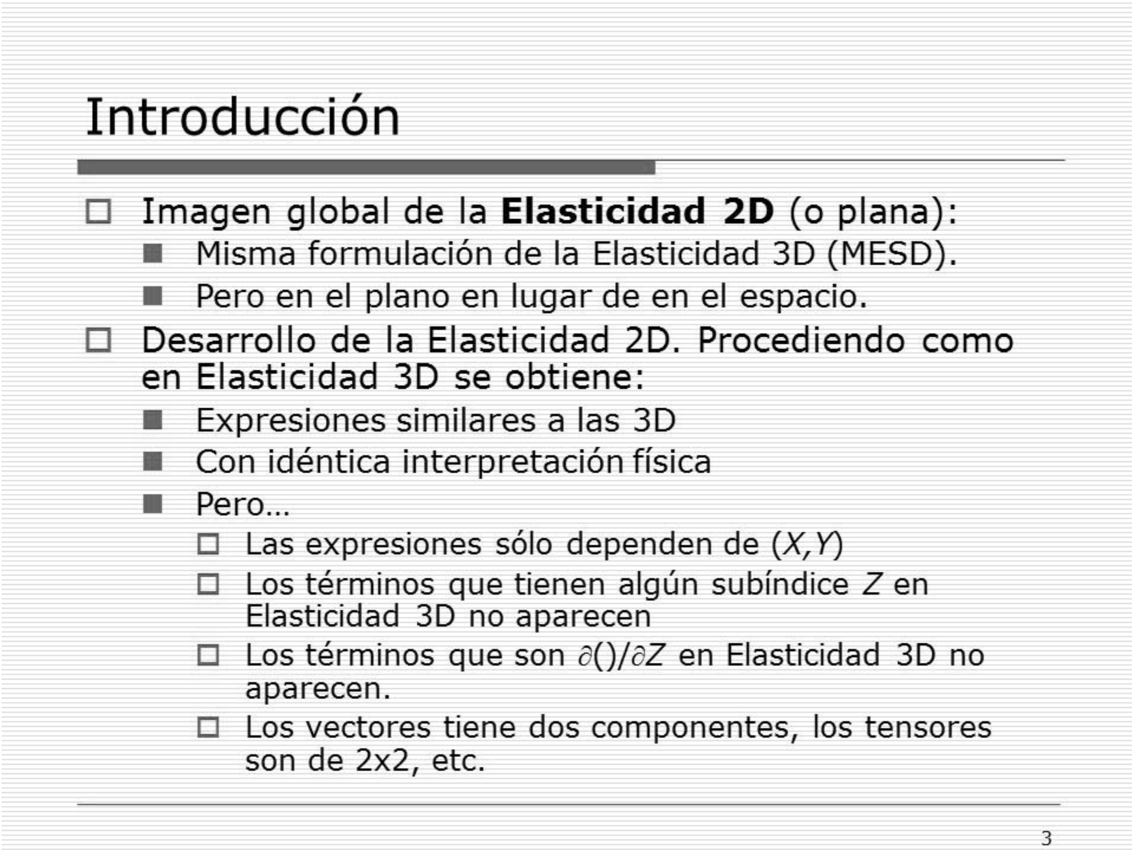
- ZIENKIEWICZ, O.C. *El método de los elementos finitos*. Reverté, Barcelona, 1980. (Capítulo 2)
- OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (Capítulo 2)
- CELIGÜETA, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.). San Sebastián, 2011. (Capítulos 1 y 2)
- REDDY, J. N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics.* Wiley, New York, 1983. (Apartado 3.4)
- KLEIBER, M. (ed.) *Handbook of Computational solid Mechanics*. Springer, Berlin, 1998. (Capítulo 1, Parte II.)

40

Tema 4:

Introducción a la Elasticidad Bidimensional

Introducción



Introducción

- La Elasticidad 2D es puramente teórica
  - No existen cuerpos 2D
- Supone una buena aproximación a dos situaciones reales:
  - Estado de deformación plana
  - Estado de tensión plana

4

Relaciones fundamentales

Relaciones fundamentales: Cinemática

- Campo de desplazamientos

$$\mathbf{d} = u(X,Y)\,\mathbf{i} + v(X,Y)\,\mathbf{j}$$

- Ecuaciones cinemáticas

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial X} \quad , \quad \varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial Y} \quad , \quad \varepsilon_{XY} = \frac{1}{2}\gamma_{XY} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}\right)$$

- Ecuación de compatibilidad

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{XY}}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_X}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_Y}{\partial X^2}$$

6

Relaciones fundamentales: Estática

- Fuerzas en el interior del dominio
(3D → de volumen; 2D → de superficie)

$$\mathbf{b} = b_X(X,Y)\mathbf{i} + b_Y(X,Y)\mathbf{j}$$

- Fuerzas en el contorno
(3D → de superficie; 2D → por unidad de longitud)

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{t}_X(X,Y)\mathbf{i} + \bar{t}_Y(X,Y)\mathbf{j}$$

- Vector tensión
(tensión = fuerza por unidad de longitud)

$$\mathbf{t} = t_X(X,Y)\mathbf{i} + t_Y(X,Y)\mathbf{j}$$

7

Relaciones fundamentales:
Estática

- Fórmula de Cauchy

$$\begin{Bmatrix} t_X \\ t_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_X \\ n_Y \end{Bmatrix}$$

- Ecuaciones de equilibrio interno / Ecuaciones de equilibrio en el contorno

$$\frac{\partial \sigma_X}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial Y} + b_X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial Y} + b_Y = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{t}_X \\ \bar{t}_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_X \\ n_Y \end{Bmatrix}$$

8

Relaciones fundamentales: Constitutivas

- Ley de Hooke Generalizada

$$\varepsilon_X = \frac{1}{\hat{E}}\left\{\sigma_X - \hat{\nu}\sigma_Y\right\}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{\hat{E}}\left\{\sigma_Y - \hat{\nu}\sigma_X\right\}$$

$$\varepsilon_{XY} = \frac{\tau_{XY}}{2\hat{G}}$$

$$\sigma_X = \hat{\lambda}e + 2\hat{G}\varepsilon_X = \hat{\lambda}(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) + 2\hat{G}\varepsilon_X$$

$$\sigma_Y = \hat{\lambda}e + 2\hat{G}\varepsilon_Y = \hat{\lambda}(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) + 2\hat{G}\varepsilon_Y$$

$$\tau_{XY} = 2\hat{G}\varepsilon_{XY}$$

9

Estado de deformación plana

- Se caracteriza porque el campo de desplazamientos **tridimensional** tiene la estructura

$$\mathbf{d} = u(X,Y)\mathbf{i} + v(X,Y)\mathbf{j}$$

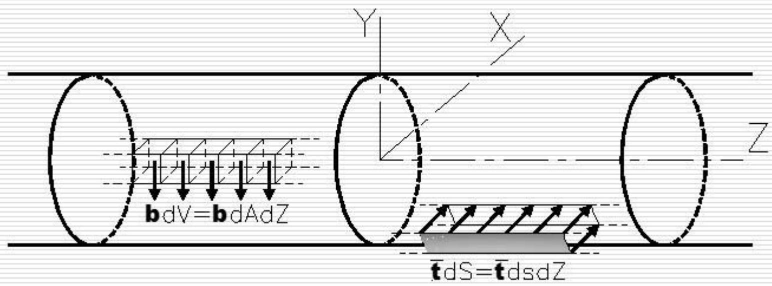
en consecuencia, en el modelo 3D:

- $\varepsilon_Z = \varepsilon_{XZ} = \varepsilon_{YZ} = 0$
- En todos los puntos del cuerpo, *Z* determina una dirección principal.

11

Estado de deformación plana

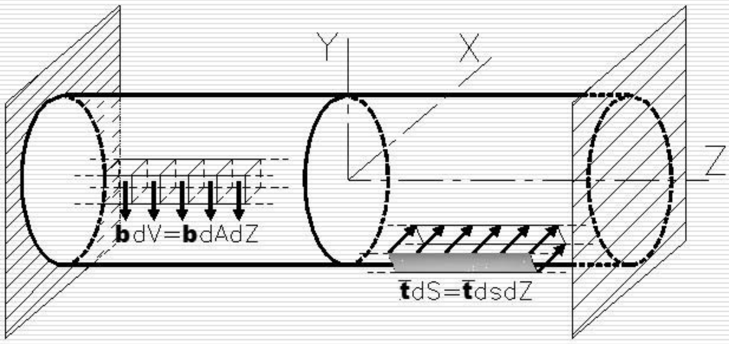
- Se produce en…
  - …cilindros rectos, de longitud infinita, sometidos exclusivamente a fuerzas perpendiculares a las generatrices cuyo valor no varía a lo largo de estas.



12

Estado de deformación plana

- Se produce en…
  - …cilindros rectos, constreñidos a permanecer entre dos planos infinitamente rígidos, perpendiculares a las generatrices y sin rozamiento con el cuerpo,
  - sometidos exclusivamente a fuerzas perpendiculares a las generatrices cuyo valor no varía a lo largo de estas.



13

Estado de deformación plana

- Representa, aproximadamente, la situación que se da…
  - …lejos de los extremos,
  - en piezas rectas,
  - muy alargadas,
  - sometidas a fuerzas perpendiculares a las generatrices cuyo valor no varía a lo largo de estas.
- Por ejemplo:
  - El revestimiento de un túnel.
  - El terreno alrededor del túnel.
  - El terreno en zanjas, cimentaciones corridas…
  - Alcantarillas, conducciones…
  - Muros, azudes…

14

Estado de deformación plana

- Cinemática
  - $\varepsilon_Z = \varepsilon_{XZ} = \varepsilon_{YZ} = 0$
  - $\varepsilon_X(X,Y)$, $\varepsilon_Y(X,Y)$ y $\varepsilon_{XY}(X,Y)$ son las incógnitas del problema. .
  - Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant:
    - La primera coincide con la del problema 2D.
    - Las cinco restantes se cumplen idénticamente.

15

Estado de deformación plana

- Tensiones
  - El modelo 2D proporciona los valores de σ_X, σ_Y y τ_{XY}.
  - σ_Z existe y, en general, no es nula:

$$\varepsilon_Z = 0 = \frac{1}{E}\{\sigma_Z - \nu(\sigma_Y + \sigma_Y)\} \Rightarrow \sigma_Z = \nu(\sigma_Y + \sigma_Y) \neq 0$$

  - τ_{YZ} y τ_{YZ} existen pero son idénticamente nulas:

$$\varepsilon_{XZ} = 0 = \frac{\tau_{XZ}}{2G} \Rightarrow \tau_{XZ} = 0$$

$$\varepsilon_{YZ} = 0 = \frac{\tau_{YZ}}{2G} \Rightarrow \tau_{YZ} = 0$$

16

Estado de deformación plana

- Ecuaciones constitutivas (1)

$$\varepsilon_Z = 0 = \frac{1}{E}\{\sigma_Z - \nu(\sigma_X + \sigma_Y)\} \Rightarrow \sigma_Z = \nu(\sigma_X + \sigma_Y) \neq 0$$

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E}\{\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)\} = \frac{1}{E}\{\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \nu(\sigma_X + \sigma_Y))\} =$$

$$= \frac{1-\nu^2}{E}\left\{\sigma_X - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_Y\right\} = \frac{1}{\hat{E}}\{\sigma_X - \hat{\nu}\sigma_Y\}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{\hat{E}}\{\sigma_Y - \hat{\nu}\sigma_Z\}$$

$$\boxed{\hat{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad , \quad \hat{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}}$$

$$\varepsilon_{YZ} = \frac{\tau_{YZ}}{2G}$$

$$\varepsilon_{XZ} = 0 = \frac{\tau_{XZ}}{2G} \Rightarrow \tau_{XZ} = 0, \quad \varepsilon_{YZ} = 0 = \frac{\tau_{YZ}}{2G} \Rightarrow \tau_{YZ} = 0$$

17

Estado de deformación plana

- Ecuaciones constitutivas (3)

$$\sigma_X = \lambda e + 2G\varepsilon_X = \lambda(\varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z) + 2G\varepsilon_X$$

$$= \lambda(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) + 2G\varepsilon_X$$

$$\sigma_Y = \lambda(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) + 2G\varepsilon_Y$$

$$\sigma_Z = \lambda(\varepsilon_X + \varepsilon_Y)$$

$$\tau_{XY} = 2G\varepsilon_{XY}$$

$$\tau_{YX} = 2G\varepsilon_{XZ}$$

$$\tau_{YZ} = 2G\varepsilon_{YZ}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \lambda \\ \hat{G} &= G\end{aligned}}$$

18

Estado de deformación plana

- Notas finales
  - El **estado de deformación plana** constituye un tipo de problema elástico 3D muy particular cuya solución se puede obtener mediante la elasticidad 2D.
  - La situación 3D exacta es extraña, pero representa una muy buena aproximación a problemas habituales de cuerpos alargados, lejos de los extremos.
  - Entre las ciencias que lo utilizan cabe destacar la Geotecnia, donde se usa para estudiar tanto el terreno como la estructura en contacto con él.

19

Estado de Tensión Plana

Estado de tensión plana

- Se caracteriza porque el campo de tensiones **tridimensional** cumple

  $$\sigma_Z = \tau_{YX} = \tau_{YZ} = 0$$

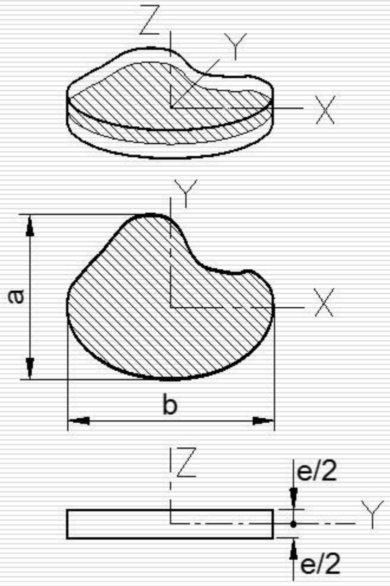
  por lo tanto

  - La dirección *Z* es principal en todos los puntos del cuerpo.

21

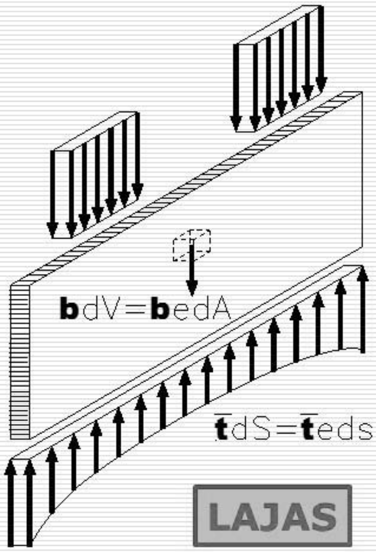
Estado de tensión plana

- Se produce, **aproximadamente**, en cilindros rectos…
  - cuya altura es mucho menor que cualquiera de las dimensiones de base,
  - sometidos exclusivamente a fuerzas perpendiculares a las generatrices (espesor) cuyo valor no varía a lo largo de estas.



Estado de tensión plana

- Se produce, **aproximadamente**, en cilindros rectos…
  - cuya altura es mucho menor que cualquiera de las dimensiones de base,
  - sometidos exclusivamente a fuerzas perpendiculares a las generatrices (espesor) cuyo valor no varía a lo largo de estas.



23

Estado de tensión plana

- Para que el problema fuese realmente 2D, debería cumplirse

  $$\sigma_X = \sigma_X(X,Y) \quad , \quad \sigma_Y = \sigma_Y(X,Y) \quad , \quad \tau_{XY} = \tau_{XY}(X,Y)$$

  pero esta relación es incompatible con las ecuaciones de la elasticidad 3D.
- En el problema descrito se cumple

  $$\sigma_X = \sigma_X^1(X,Y) + Z^2\sigma_X^2(X,Y)$$

  $$\sigma_Y = \sigma_Y^1(X,Y) + Z^2\sigma_Y^2(X,Y)$$

  $$\tau_{XY} = \tau_{XY}^1(X,Y) + Z^2\tau_{XY}^1(X,Y)$$

  donde los primeros sumandos son la solución del problema 2D y los segundos, al ser *Z* pequeño, son muy pequeños. Tenemos, pues, una solución **aproximada** del problema.

Casanova (1998, puntos II.1 y II.11)

Estado de tensión plana

- La solución del problema 2D también define el **valor medio en el espesor** de las tensiones en cada punto, incluso cuando las cargas no son constantes en el espesor sino sólo simétricas respecto al plano medio. (Tensión *cuasi-plana* o tensión plana *generalizada.*)

- La solución del problema 2D determina la del **estado membrana** (esfuerzos que representan la integral de las tensiones en el espesor) en problemas de *placas y láminas*.

Casanova (1998, puntos II.1 y II.11)

Estado de tensión plana

- Deformaciones
  - El problema 2D determina la aproximación a los valores de $\varepsilon_X(X,Y)$, $\varepsilon_Y(X,Y)$, y $\varepsilon_{XY}(X,Y)$.
  - La deformación ε_Z existe y, en general, no es nula

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}\{\sigma_Z - \nu(\sigma_X + \sigma_Y)\} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_X + \sigma_Y)$$

  - Las deformaciones ε_{XZ} y ε_{YZ} son idénticamente nulas

$$\varepsilon_{XZ} = \frac{\tau_{XZ}}{2G} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{YZ} = \frac{\tau_{YZ}}{2G} = 0$$

26

Estado de tensión plana

- Desplazamientos
  - La condición de compatibilidad 2D

    $$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{XY}}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_X}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_Y}{\partial X^2}$$

    garantiza que el campo de deformaciones 2D es integrable y permite calcular los desplazamientos aproximados *u(X,Y)* y *v(X,Y)*.
  - El desplazamiento aproximado *w(X,Y)* se puede calcular, suponiendo que el plano medio de la laja es de simetría, como

    $$w(X,Y,Z) = \int_0^Z \varepsilon_Z(X,Y)dZ$$

  - En general, el campo de desplazamientos 2D así obtenido **NO** cumple las restantes cinco ecuaciones de compatibilidad 3D, porque sólo es una aproximación. Las cumpliría la solución exacta.

27

Estado de tensión plana

- Ecuaciones constitutivas (1)

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E}\{\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)\} = \frac{1}{E}\{\sigma_X - \nu\sigma_Y\}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}\{\sigma_Y - \nu\sigma_Z\}$$

$$\boxed{\hat{E} = E \quad , \quad \hat{\nu} = \nu}$$

$$\varepsilon_{YZ} = \frac{\tau_{YZ}}{2G}$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}\{\sigma_Z - \nu(\sigma_X + \sigma_Y)\} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_X + \sigma_Y)$$

$$\varepsilon_{XZ} = \frac{\tau_{XZ}}{2G} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{YZ} = \frac{\tau_{YZ}}{2G} = 0$$

28

Estado de tensión plana

- Ecuaciones constitutivas (2)

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_X = \dfrac{1}{E}\{\sigma_X - \nu\sigma_Y\} \\ \varepsilon_Y = \dfrac{1}{E}\{\sigma_Y - \nu\sigma_Z\} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} \sigma_X = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_X + \nu\varepsilon_Y) \\ \sigma_Y = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_Y + \nu\varepsilon_X) \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\varepsilon_{YZ} = \frac{\tau_{YZ}}{2G}}$$

29

Estado de tensión plana

- Ecuaciones constitutivas (3)

$$\sigma_Z = 0 = \lambda e + 2G\varepsilon_Z = \lambda(\varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z) + 2G\varepsilon_Z$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_Z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_X + \varepsilon_Y)$$

$$\sigma_X = \lambda(\varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z) + 2G\varepsilon_X = \lambda\left(\varepsilon_X + \varepsilon_Y - \frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_X + \varepsilon_Y)\right) + 2G\varepsilon_X$$

$$= \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G}(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) + 2G\varepsilon_X = \lambda\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) + 2G\varepsilon_X = \hat{\lambda} e + 2G\varepsilon_X$$

$$\sigma_Y = \hat{\lambda} e + 2G\varepsilon_Y$$

$$\tau_{XY} = 2G\varepsilon_{XY}$$

$$\hat{\lambda} = \lambda \frac{2G}{\lambda + 2G} = \lambda \frac{1-2\nu}{1-\nu}$$

$$\hat{G} = G$$

30

Estado de tensión plana

- Consideraciones finales
  - El estado de tensión plana (problema 2D) **no determina** la solución de ningún problema 3D real.
  - Sin embargo, el cálculo 2D define buenas aproximaciones a la solución de los problemas de…
    - …lajas sometidas a fuerzas exteriores uniformemente distribuidas en el espesor.
    - …lajas sometidas a fuerzas exteriores simétricas respecto a su plano medio (valor medio).
    - …estado membrana en placas.

31

Representación gráfica de la solución

Representación gráfica de la solución

- En problemas bidimensionales es sencillo elaborar representaciones gráficas de la solución del problema, que facilitan su interpretación.
- Históricamente han sido importantes porque algunas se podían obtener por métodos **fotoelásticos**, que permitían resolver experimentalmente problemas complejos.
- Hoy los ordenadores nos facilitan algunas de estas representaciones como visualización de la solución buscada:
  - Deformadas
  - Líneas de nivel de las tensiones
  - Isobaras
  - Isostáticas

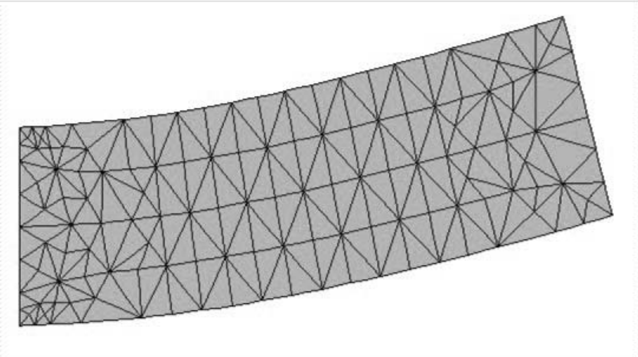
33

Representación gráfica de la solución

- Deformada
  - Imagen del cuerpo, o de algunas líneas sobre él, en la configuración deformada.
- Líneas de nivel de las tensiones
- Isobaras
  - Son las líneas de nivel de las tensiones principales
- Isostáticas
  - Son las envolventes de las direcciones principales (es decir, son tangentes a una de las direcciones principales en cada punto).

Representación gráfica de la solución

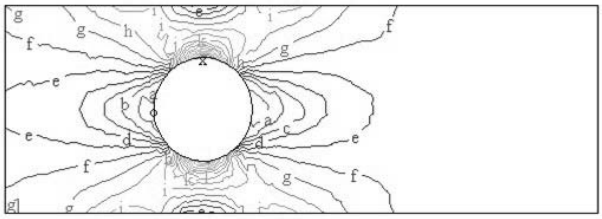
- Deformada

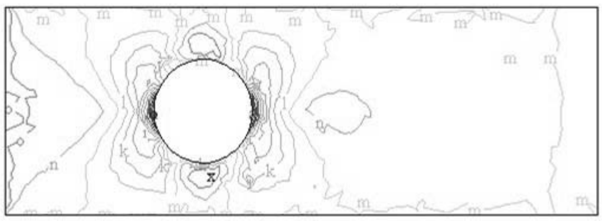


35

Representación gráfica de la solución

- Líneas de nivel de las tensiones / Isobaras

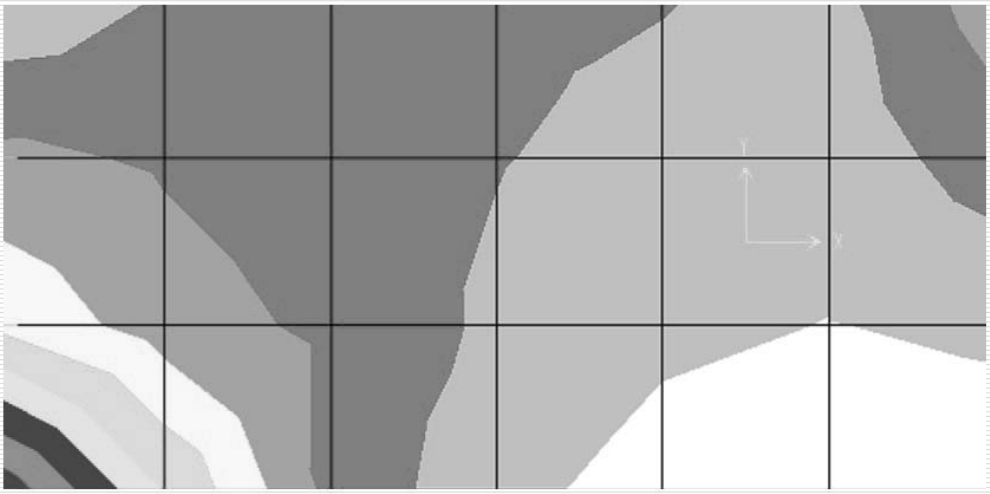




36

Representación gráfica de la solución

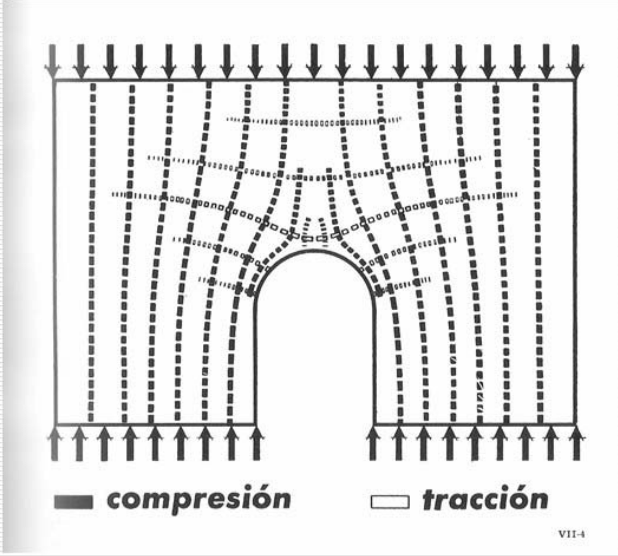
- Líneas de nivel de las tensiones / Isobaras



37

Representación gráfica de la solución

- Isostáticas

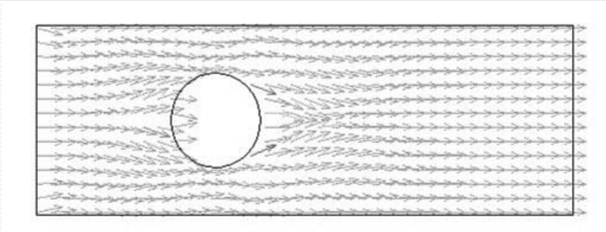


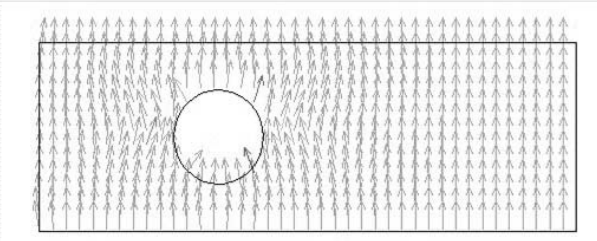
Torroja (1996, pág. 105)

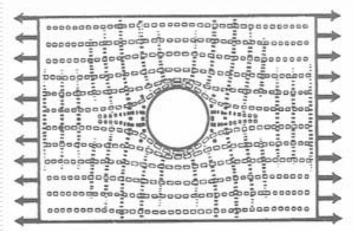
38

Representación gráfica de la solución

- Isostáticas





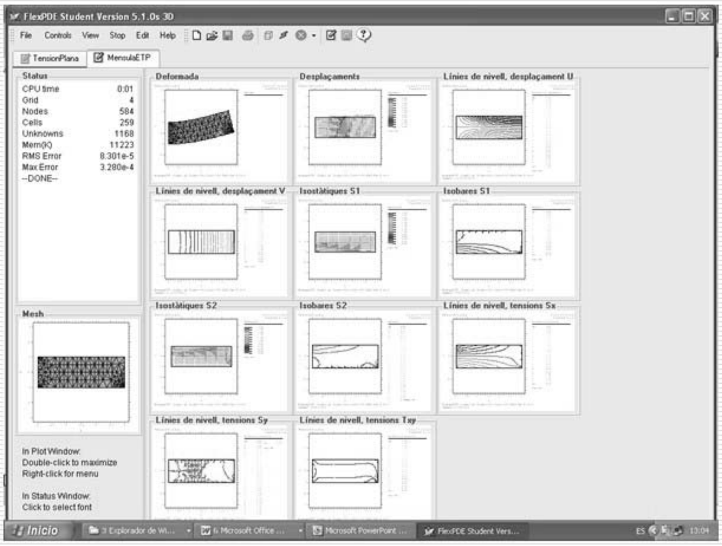


Torroja (1996, pág. 105)

39

Representación gráfica de la solución

- Ejemplo de salida gráfica (FlexPDE)



40

Bibliografía

Bibliografía

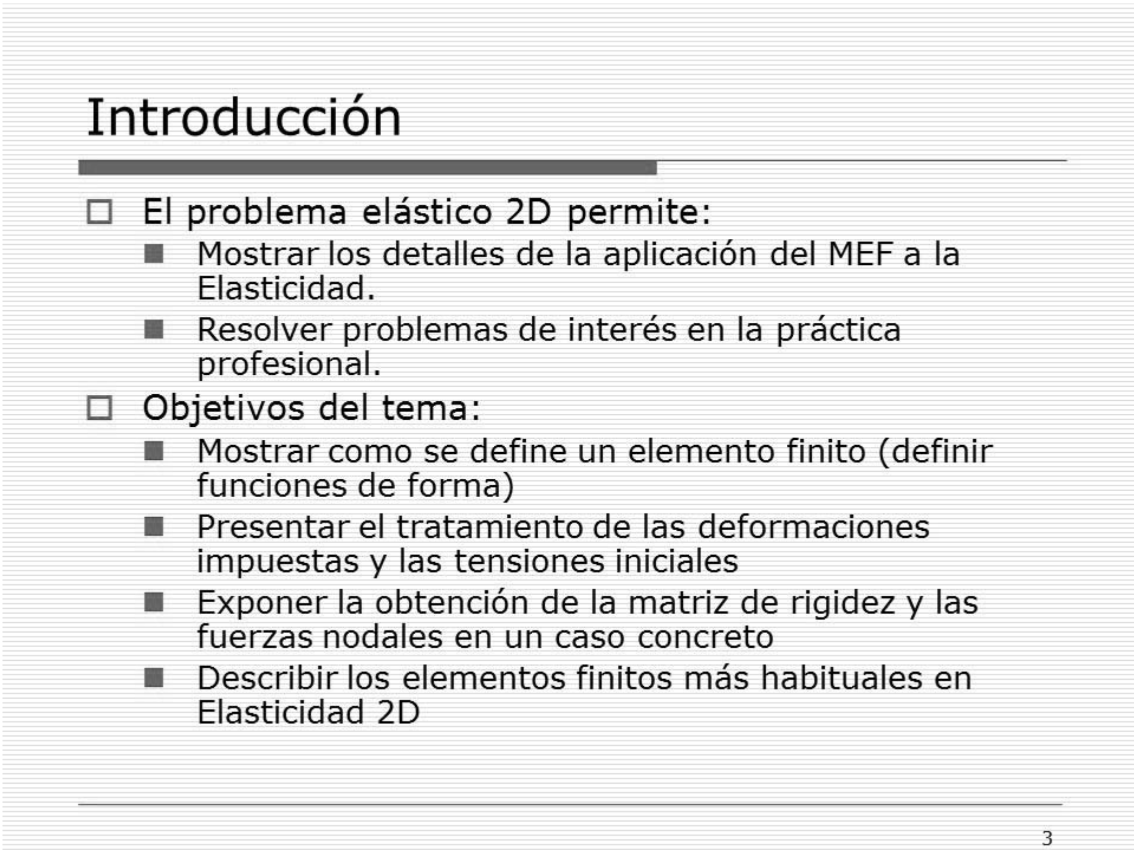
- CASANOVA, J. *Introducción a la Elasticidad Bidimensional*. Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1998.
- SAMARTIN, A. *Curso de elasticidad*. Bellisco, Madrid, 1990
- TIMOSHENKO, S.P. y GOODIER, J.N. *Teoría de la Elasticidad*. Urmo, Bilbao, 1972
- TORROJA, E. *Elasticidad*. Dossat, Madrid, 1967.
- TORROJA, E. *Razón y ser de los tipos estructurales.* C.S.I.C., Madrid, 1996

42

Tema 5:

Elasticidad Bidimensional por el Método de los Elementos Finitos

Introducción



Elemento triangular de continuidad C0

Funciones de forma

Elemento triangular de continuidad C^0
Funciones de forma

- Campo de desplazamientos en Elasticidad 2D

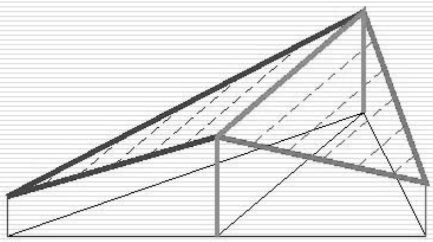
$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \end{Bmatrix}$$

- Condiciones que han de cumplir las funciones de interpolación
  - Deformaciones → derivadas primeras de **d**
    - Deben existir las derivadas primeras $\neq 0$
      → funciones de interpolación al menos lineales
    - Se requiere continuidad C^0 en el contorno

5

Elemento triangular de continuidad C^0 Funciones de forma

- Interpolación lineal
  - Cumple todas las condiciones anteriores
  - Es la más sencilla que resuelve el problema



Continuidad C^0 en el contorno

Elemento triangular de continuidad C^0 Funciones de forma

- Expresión matricial de la interpolación lineal

$$\begin{Bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \\ \beta_1 + \beta_2 X + \beta_3 Y \end{Bmatrix}$$

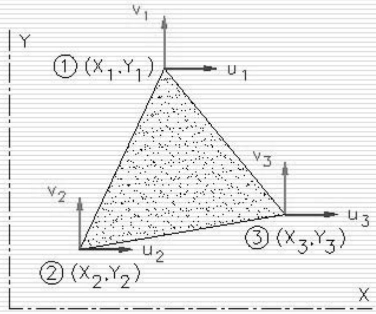
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X & Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{d} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$$

7

Elemento triangular de continuidad C^0 Funciones de forma

- Obtención de las funciones de forma (constantes en función de los parámetros nodales)

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a_e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}}$$



$$\mathbf{a_e} = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{a_e}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{a_e} = \mathbf{N}\mathbf{a_e}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}\mathbf{H}^{-1}$$

8

Elemento triangular de continuidad C^0 Funciones de forma

- Funciones de forma (Expresiones)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} f_1(X,Y) & 0 & f_2(X,Y) & 0 & f_3(X,Y) & 0 \\ 0 & f_1(X,Y) & 0 & f_2(X,Y) & 0 & f_3(X,Y) \end{bmatrix}$$

$$f_i(X,Y) = \frac{a_i + b_i X + c_i Y}{2A}$$

$$\left.\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i &= Y_j - Y_k \\ c_i &= X_k - X_j \end{aligned}\right\} \quad (i, j, k) = (1,2,3), (3,1,2), (2,3,1)$$

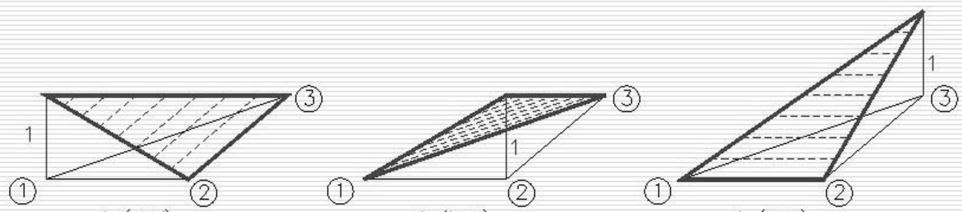
$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix} = 2 * \text{Área del triangulo}$$

9

Elemento triangular de continuidad C^0 Funciones de forma

- Funciones de forma (Representación gráfica)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} f_1(X,Y) & 0 & f_2(X,Y) & 0 & f_3(X,Y) & 0 \\ 0 & f_1(X,Y) & 0 & f_2(X,Y) & 0 & f_3(X,Y) \end{bmatrix}$$



$f_1(X,Y)$ $f_2(X,Y)$ $f_3(X,Y)$

Elemento triangular de continuidad C^0
Matrices características del elemento

- Deformaciones
  - Expresión matricial → $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{d}$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

12

Elemento triangular de continuidad C^0
Matrices características del elemento

- Deformaciones
  - Interpolación → $\boldsymbol{\varepsilon} \cong \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{LNa}_e = \mathbf{Ba}_e$

$\mathbf{B} = \mathbf{LN} =$

Válido para cualquier familia de funciones de forma

$$= \begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(X,Y) & 0 & f_2(X,Y) & 0 & f_3(X,Y) & 0 \\ 0 & f_1(X,Y) & 0 & f_2(X,Y) & 0 & f_3(X,Y) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial X} & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_1}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial Y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial Y} & \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial Y} & \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_3}{\partial Y} & \frac{\partial f_3}{\partial X} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

13

Elemento triangular de continuidad C^0 Matrices características del elemento

- Tensiones (ecuaciones constitutivas)
  - Expresión matricial → $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)$
    - $\boldsymbol{\sigma}_0$ son las tensiones iniciales
    - $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ son las deformaciones impuestas (temperatura, retracción, etc.)
    - **D** es la matriz constitutiva

Tensión plana

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Deformación plana

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}$$

14

Elemento triangular de continuidad C^0
Matrices características del elemento

- Trabajo virtual de las fuerzas internas

$$\int_{V_i} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{V_i} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)\right) dV =$$

$$= \boxed{\int_{V_i} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV} + \int_{V_i} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \boxed{\int_{V_i} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV} =$$

$$\int_{V_i} \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV = \delta\mathbf{a}_e^T \boxed{\left\{\int_{V_i} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV\right\}} +$$ ← Componente del vector fuerzas nodales

$$+ \delta\mathbf{a}_e^T \left[\int_{V_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV\right] \mathbf{a}_e -$$ ← Matriz de rigidez

$$- \delta\mathbf{a}_e^T \boxed{\left\{\int_{V_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV\right\}}$$ ← Componente del vector fuerzas nodales

15

Elemento triangular de continuidad C^0 Matrices características del elemento

- Matriz de rigidez del elemento

$$\int_{V_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{t}{4A}\begin{bmatrix} b_i b_j D_{11} + c_i c_j D_{33} & b_i c_j D_{12} + c_i b_j D_{33} \\ c_i b_j D_{12} - b_i c_j D_{33} & c_i c_j D_{11} - b_i b_j D_{33} \end{bmatrix}$$

Con funciones de forma más complicadas estas integrales no se suelen evaluar analíticamente sino numéricamente. Mediante una cuadratura de Gauss, basta evaluar las matrices **B** y **D** en los puntos de Gauss, hacer el producto matricial e ir acumulando los resultados.

16

Elemento triangular de continuidad C^0 Matrices características del elemento

- Vector de fuerzas nodales del elemento

$$\int_{V_i} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV - \int_{V_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_{V_i} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \int_{S_{fi}} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}} dS$$

  - No se puede dar una expresión cerrada de este vector porque depende de las funciones que definan σ_0, ε_0, **b** y **t**.
  - Como la matriz de rigidez, suele ser fácil evaluarlo numéricamente para cualquier familia de funciones de forma.
  - El último término sólo aparece si el elemento pertenece al contorno del cuerpo.

17

Elemento triangular de continuidad C^0 Estimación de las tensiones

- Estimación de las tensiones

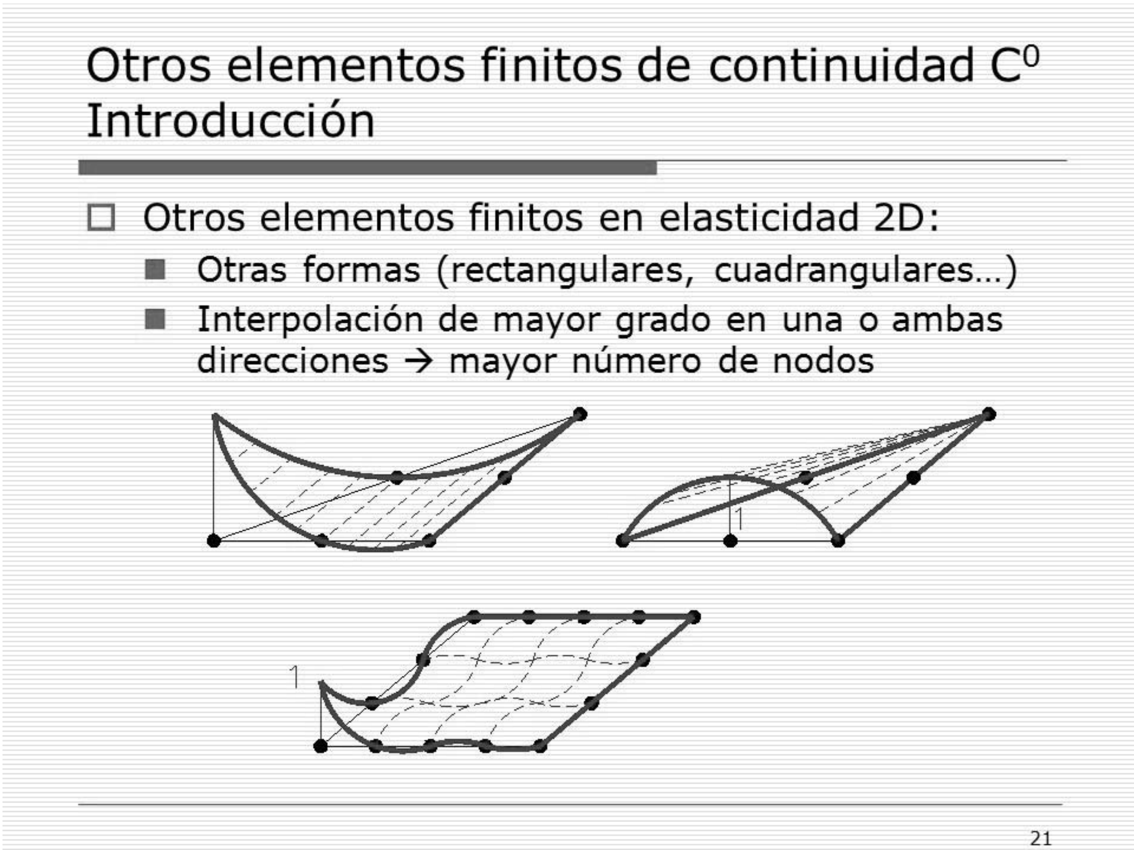
$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma_0} + \mathbf{D}\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon_0}\right) = \underbrace{\boldsymbol{\sigma_0} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon_0}}_{DATOS} + \mathbf{DBa}_e$$

  - Elemento lineal
    - **B**=**cte**. → ε=**cte**. y σ=**cte**. en cada elemento.
    - Nodos:
      - Valores diferentes en los diferentes elementos concurrentes.
      - Se toma la media de dichos valores.
    - Mejor aproximación: en el centroide del elemento.
  - Otros elementos
    - Mejor aproximación (Zienkiewicz 1980, pág. 324): en los puntos de Gauss utilizados para la integración numérica (considerando el mínimo número de puntos que permiten integrar exactamente el polinomio).

19

Otros elementos finitos de continuidad C^0

Introducción



Otros elementos finitos de continuidad C^0 Introducción

- Determinación
  - Mismo procedimiento del caso anterior.
  - Dificultades:
    - Elección términos del polinomio, si no puede ser uno completo
    - El sistema de ecuaciones para determinar las constantes puede no tener solución
    - La resolución del sistema siempre exige mucho trabajo computacional
- Alternativas
  - Escribir directamente las funciones de forma

22

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Introducción

- Condiciones a considerar para escribir directamente las funciones de forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1(X,Y) & 0 & N_2(X,Y) & 0 & \cdots & N_n(X,Y) & 0 \\ 0 & N_1(X,Y) & 0 & N_2(X,Y) & \cdots & 0 & N_n(X,Y) \end{bmatrix}$$

$$N_i(X_j,Y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(X,Y) = 1 \quad \forall (X,Y) \in \text{ elemento}$$

$(X_j, Y_j) \rightarrow$ coordenadas del nodo j

$n \rightarrow$ número de nodos del elemento

23

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Introducción

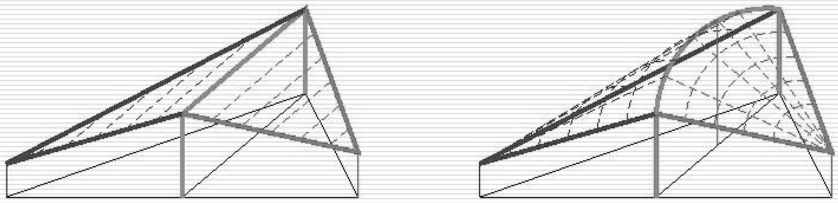
- Polinomios completos:
  - El grado de aproximación de un elemento queda determinado por el mayor polinomio completo que contiene la función de forma.
  - Los términos de orden superior al de dicho polinomio no la mejoran significativamente
  - Por tanto, conviene usar como funciones de forma polinomios completos, pero es complicado conseguirlo.

Constante	1						
Lineal	X	Y					
Cuadrático	X^2	XY	Y^2				
Cúbico	X^3	X^2Y	XY^2	Y^3			
Cuártico	X^4	X^3Y	X^2Y^2	XY^3	Y^4		
	X^5	X^4Y	X^3Y^2	X^2Y^3	XY^4	Y^5	
	X^6	X^5Y	X^4Y^2	X^3Y^3	X^2Y^4	XY^5	Y^6

24

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Introducción

- Tener el mismo número de nodos en los lados adyacentes garantiza la continuidad C^0 entre elementos[1] → presentan el mismo tipo de variación (lineal, parabólica, cúbica…) en el lado común

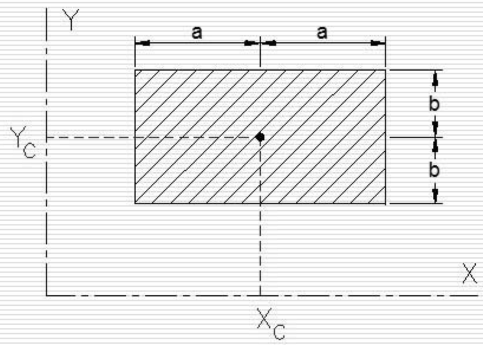


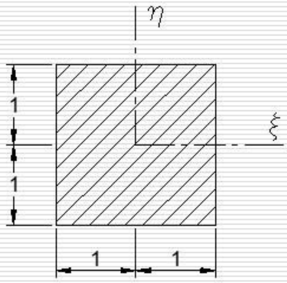
[1] En los casos que ahora se consideran, cuyos parámetros nodales son sólo desplazamientos (no derivadas de estos).

25

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos rectangulares lagrangianos

- Coordenadas normalizadas





$$\xi = \frac{X - X_C}{a} \quad \rightarrow \quad d\xi = \frac{dX}{a}$$

$$\eta = \frac{Y - Y_C}{a} \quad \rightarrow \quad d\eta = \frac{dY}{a}$$

$$dA = dXdY = abd\xi d\eta$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(X,Y)dYdX = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)abd\eta d\xi$$

27

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares lagrangianos

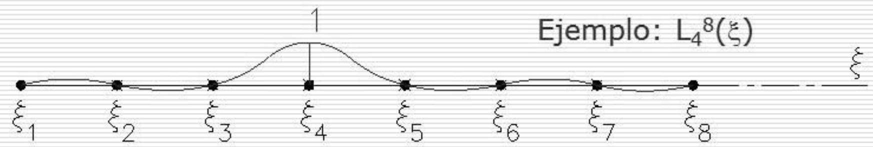
- Polinomios de Lagrange 1D. Valen
  - 1 en el nodo que los define
  - 0 en los demás nodos

$$L_i^n(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} =$$

$n \rightarrow$ número de nodos
$i \rightarrow$ nodo donde la función vale 1

$$= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\ldots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\ldots(\xi - \xi_{n-1})(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\ldots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\ldots(\xi_i - \xi_{n-1})(\xi_i - \xi_n)}$$

Ejemplo: $L_4^8(\xi)$



28

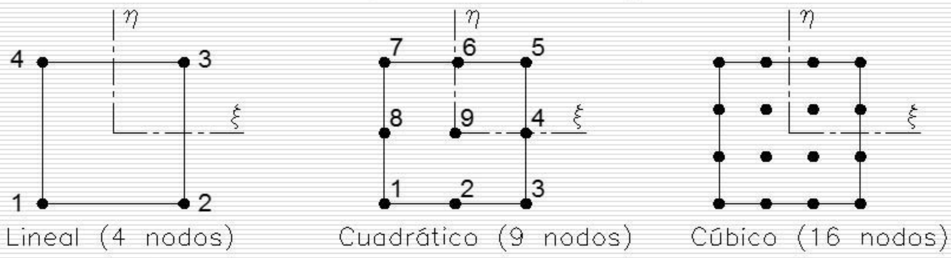
Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos rectangulares lagrangianos

- Elementos rectangulares **lagrangianos**
  - Función de forma
    (nodo *i*, *n* nodos según ξ, *m* nodos según η)
    $N_i(\xi,\eta) = L_i^n(\xi) L_i^m(\eta)$
  - Habitualmente sólo se considera con $m=n$
  - Ventajas:
    - Fácil de generar
  - Inconvenientes
    - Muchos nodos internos
      - Se pueden eliminar por condensación estática (la veremos más adelante)
    - Muchos términos de orden superior al del polinomio completo

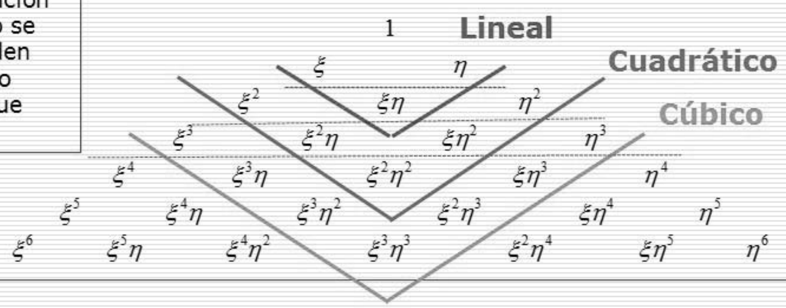
29

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares lagrangianos

- Número de nodos y términos del polinomio



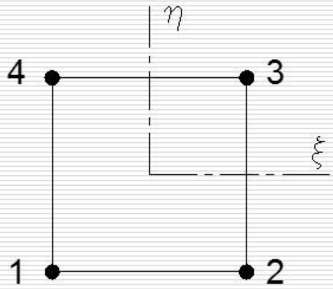
La denominación del elemento se refiere al orden del polinomio **completo** que incluye.



30

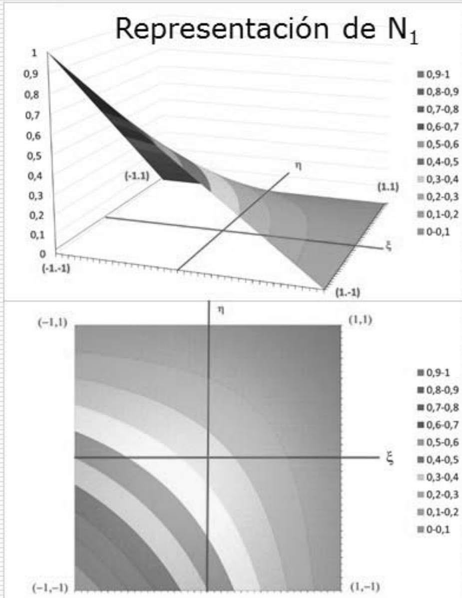
Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares lagrangianos

- Elemento rectangular lagrangiano de 4 nodos



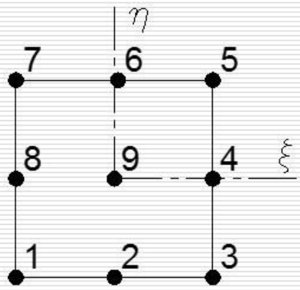
Lineal (4 nodos)

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi\xi_i)(1-\eta\eta_i)$$



Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos rectangulares lagrangianos

- Elemento rectangular lagrangiano de 9 nodos



Cuadrático (9 nodos)

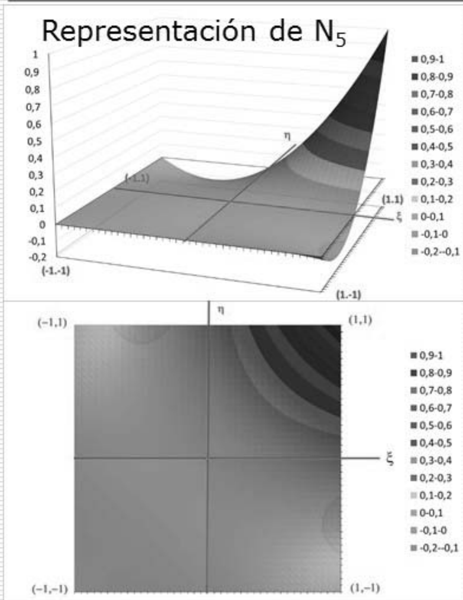
$$N_9(\xi,\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

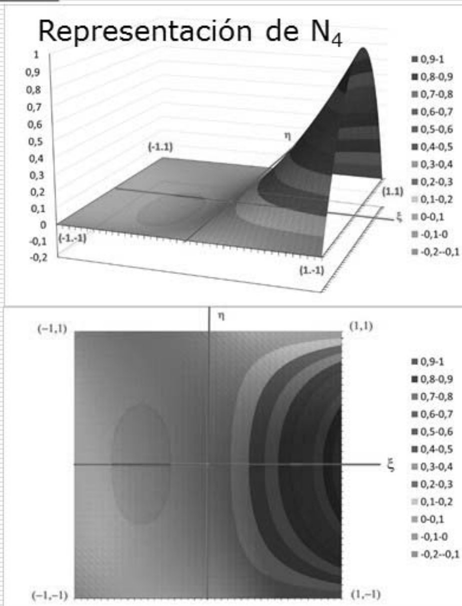
$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i) \qquad i = 1,3,5,7$$

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\eta_i^2(1-\xi^2)(\eta^2 - \eta\eta_i) + \frac{1}{2}\xi_i^2(\xi^2 - \xi\xi_i)(1-\eta^2) \qquad i = 2,4,6,8$$

32

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares lagrangianos

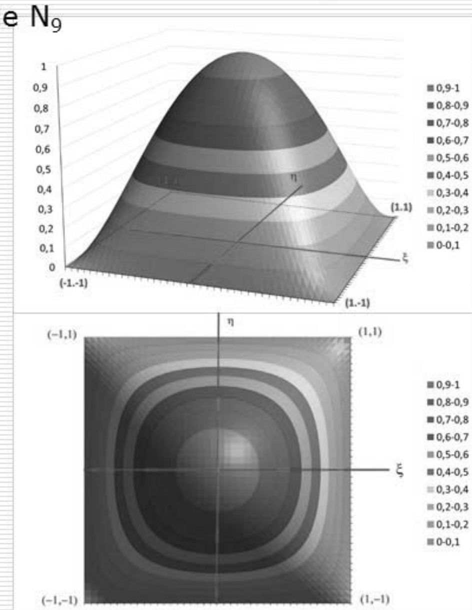




33

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos rectangulares lagrangianos

Representación de N_9



34

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos rectangulares *serendipia*

- Serendipia
  - *Serendipity*: término inglés que se refiere a un descubrimiento que se produce de casualidad, cuando se busca otra cosa.
  - ¿*Chiripa*?
  - Aceptado en la vigésimo tercera edición del diccionario de la RAE. Serendipia es el "Hallazgo valioso que se produce de manera accidental o casual".

36

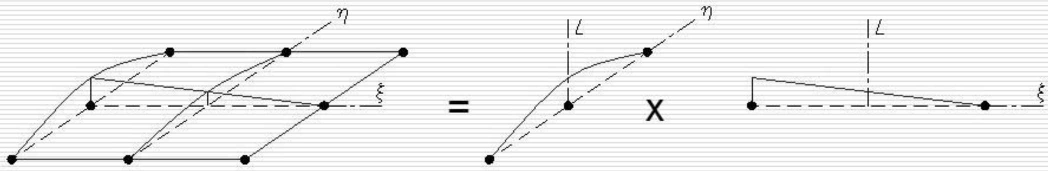
Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos rectangulares *serendipia*

- Elementos rectangulares *serendipia*
  - Sólo nodos en el contorno
    (para grados elevados, minimiza el número de nodos internos).
  - El número de nodos en un lado define el grado del polinomio en él → Continuidad C^0
  - $N(\xi,\eta) = P(\xi)*P(\eta)$
  - ¿Por qué *serendipia*? → La determinación de $N(\xi,\eta)$ requiere análisis e ingenio
    (en la familia lagrangiana era sistemática).

37

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares *serendipia*

- Ejemplo de generación de la función de forma: elemento cuadrático, nodo intermedio de lado

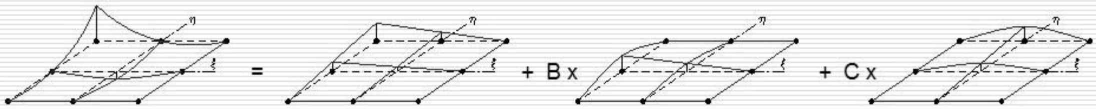


$$S_8^9(\xi,\eta) \quad = \quad L_2^3(\eta) \quad \times \quad L_1^2(\xi)$$

38

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares *serendipia*

- Ejemplo de generación de la función de forma: elemento cuadrático, nodo de vértice

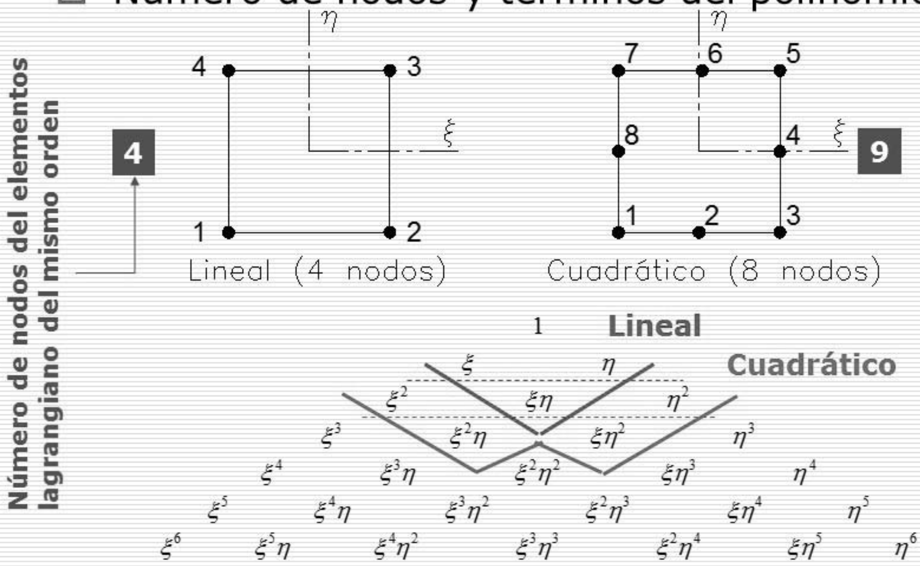


$$S_7^9(\xi,\eta) = S_4^4(\xi,\eta) + B\ S_7^9(\xi,\eta) + C\ S_6^9(\xi,\eta)$$

39

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares *serendipia*

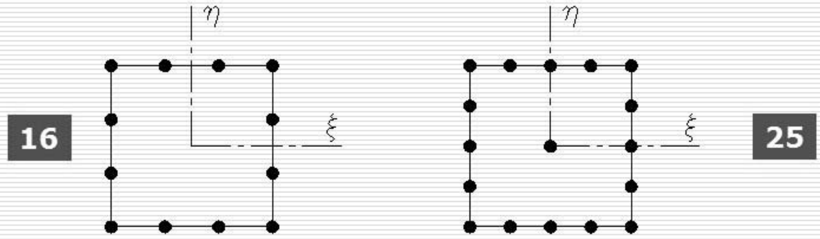
- Número de nodos y términos del polinomio



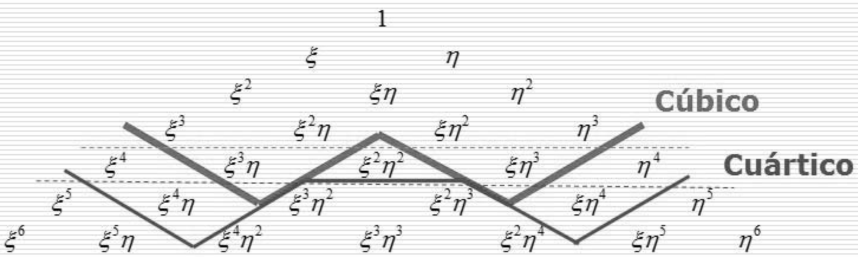
40

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares *serendipia*

- Número de nodos y términos del polinomio



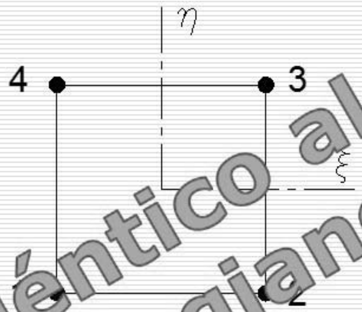
Cúbico (12 nodos) Cuártico (17 nodos)



41

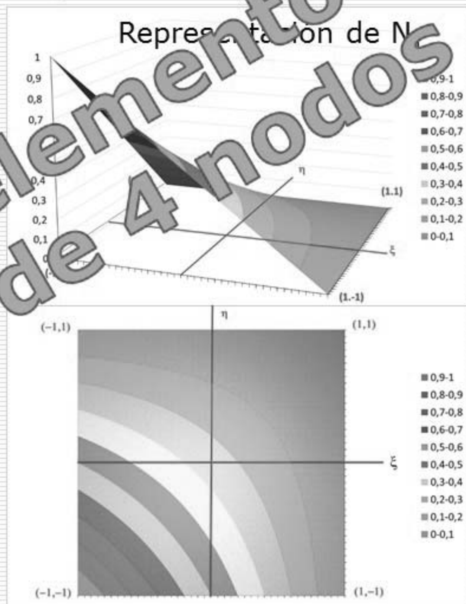
Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares *serendipia*

- Elemento rectangular *serendipia* de 4 nodos



Lineal (4 nodos)

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi\xi_i)(1-\eta\eta_i)$$

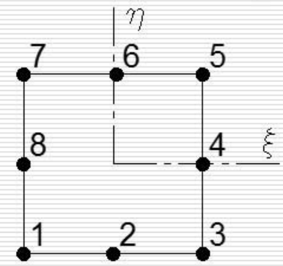


Idéntico al elemento lagrangiano de 4 nodos

42

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares *serendipia*

- Elemento rectangular *serendipia* de 8 nodos



Cuadrático (8 nodos

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2) \qquad i=4,8$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2) \qquad i=2,6$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1) \qquad i=1,3,5,7$$

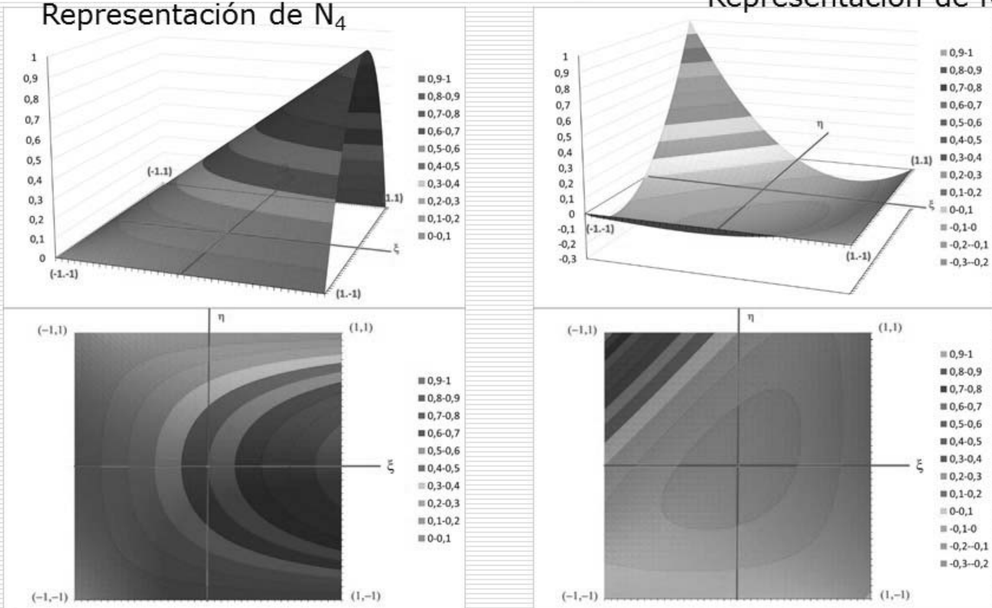
La obtención puede consultarse en Oñate (1992. Pág. 201 y s.s.)

43

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos rectangulares *serendipia*

Representación de N_4

Representación de N_7



44

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos triangulares

- Coordenadas normalizadas (o de área)

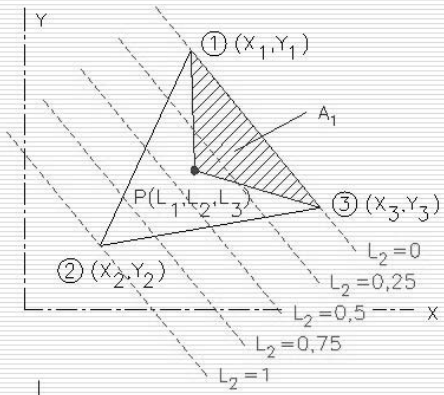
$$X = L_1X_1 + L_2X_2 + L_3X_3$$

$$Y = L_1Y_1 + L_2Y_2 + L_3Y_3$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

$$\boxed{L_i = (a_i + b_iX + c_iY)/2A}$$

$$\left.\begin{aligned} a_i &= X_jY_k - X_kY_j \\ b_i &= Y_j - Y_k \\ c_i &= X_k - X_j \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (i,j,k) &= (1,2,3), \\ &(3,1,2), \\ &(2,3,1) \end{aligned}$$



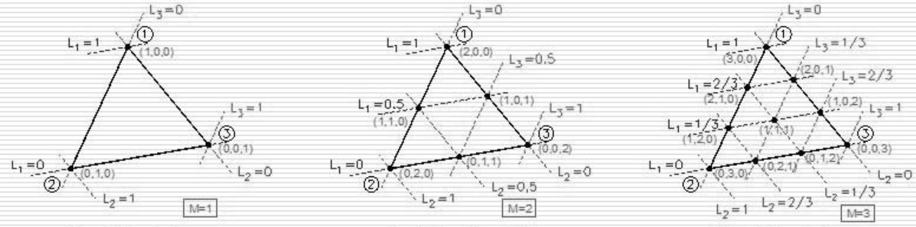
$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix} = 2 * \text{Área del triangulo}$$

$$\boxed{L_i = \frac{A_i}{A}}$$

46

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos triangulares

- Número de nodos y términos del polinomio



Lineal (3 nodos) Cuadrático (6 nodos) Cúbico (10 nodos)

$$1 \qquad \textbf{Lineal}$$

$$\xi \qquad \eta$$

$$\xi^2 \qquad \xi\eta \qquad \eta^2 \qquad \textbf{Cuadrático}$$

$$\xi^3 \qquad \xi^2\eta \qquad \xi\eta^2 \qquad \eta^3 \qquad \textbf{Cúbico}$$

$$\xi^4 \qquad \xi^3\eta \qquad \xi^2\eta^2 \qquad \xi\eta^3 \qquad \eta^4$$

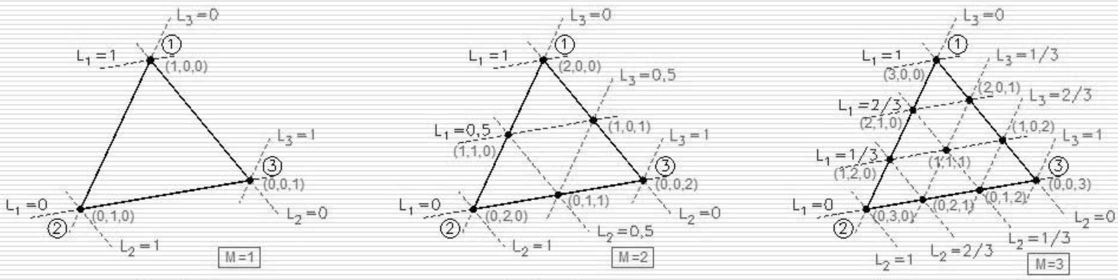
$$\xi^5 \qquad \xi^4\eta \qquad \xi^3\eta^2 \qquad \xi^2\eta^3 \qquad \xi\eta^4 \qquad \eta^5$$

$$\xi^6 \qquad \xi^5\eta \qquad \xi^4\eta^2 \qquad \xi^3\eta^3 \qquad \xi^2\eta^4 \qquad \xi\eta^5 \qquad \eta^6$$

47

Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos triangulares

- Elemento triangular (lagrangiano) de orden *M*



Lineal (3 nodos) Cuadrático (6 nodos) Cúbico (10 nodos)

$$N_i(L_1, L_2, L_3) = L_i^I(L_1) L_i^J(L_2) L_i^K(L_3)$$

$$I = L_{1i}M \quad , \quad J = L_{2i}M \quad , \quad K = L_{3i}M$$

$L_i^H(L_j) \rightarrow$ Polinomio de Lagrange de orden *H* que vale 1 en el nodo *i*.

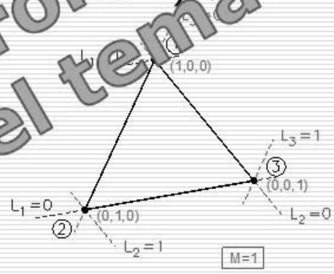
L_{ji} $\rightarrow$ Coordenada L_j del nodo *i*.

48

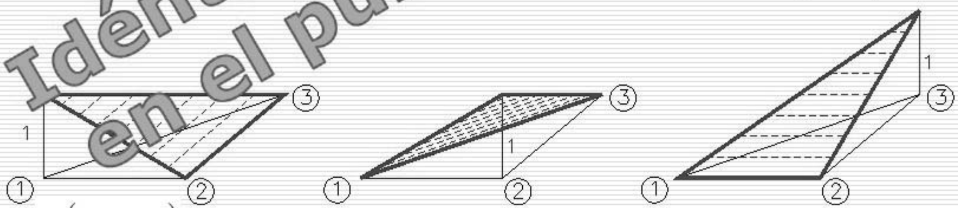
Otros elementos finitos de continuidad C^0
Elementos triangulares

- Elemento triangular de 3 nodos (orden 1)

$$N_1(L_1, L_2, L_3) = L_1$$
$$N_2(L_1, L_2, L_3) = L_2$$
$$N_3(L_1, L_2, L_3) = L_3$$



Lineal (3 nodos)



$N_1(L_1, L_2, L_3)$ $N_2(L_1, L_2, L_3)$ $N_3(L_1, L_2, L_3)$

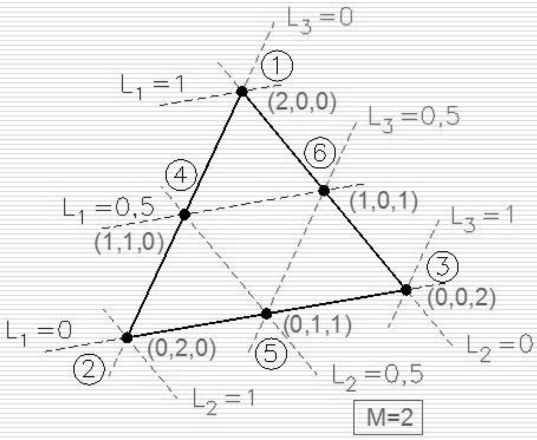
Idéntico al desarrollado en el punto 2 del tema

49

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos triangulares

- Elemento triangular de 6 nodos (orden 2)

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$$
$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$
$$N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$
$$N_4 = 4L_1L_2$$
$$N_5 = 4L_2L_3$$
$$N_6 = 4L_1L_3$$

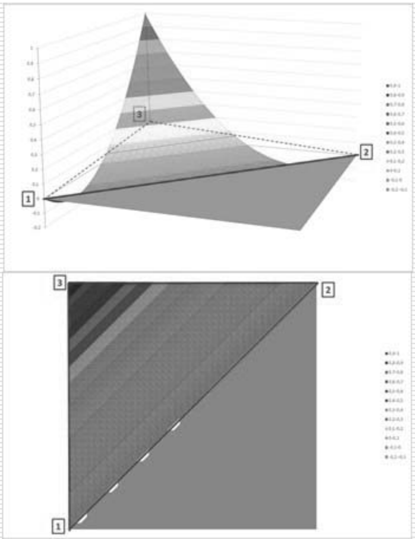


Cuadrático (6 nodos)

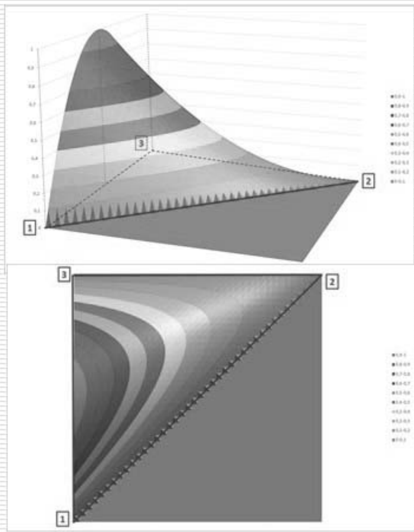
50

Otros elementos finitos de continuidad C^0 Elementos triangulares

Representación de N_3



Representación de N_6



Bibliografía

- ZIENKIEWICZ, O.C. *El método de los elementos finitos*. Reverté, Barcelona, 1980. (Capítulo 4 y 7.1 a 7.8)
- OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (5.1 a 5.3 y 5.5)
- CELIGÜETA, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.). San Sebastián, 2011. (4.1 a 4.8)
- DAHT, G. y TOUZOT, G. *Une présentation de la méthyode des éléments finis*. Maloine S.A. Paris, 1981. (2.3 y 2.4)

53

Tema 06:

Elementos isoparamétricos, condensación estática, integración numérica, integración reducida y modos incompatibles

Introducción

Introducción

- Objetivos del tema:
  - Analizar aspectos del MEF omitidos u orillados en el tema anterior
    - Necesarios para completar la formulación
    - De aplicación a la formulación por el MEF de otros problemas
  - Describir el elemento finito que utilizan numerosos programas, entre ellos el que se usará en las prácticas informáticas

3

Introducción

- Aspectos a tratar:
  - Adaptación de la malla al contorno → elementos isoparamétricos
  - Eliminación previa de grados de libertad internos, que no se compatibilizan → condensación estática
  - Determinación de la matriz de rigidez y de las fuerzas nodales → integración numérica
  - Resolución de algún mal condicionamiento numérico → integración reducida
  - Modificación de los elementos para mejorar la convergencia → modos incompatibles

4

Elementos isoparamétricos

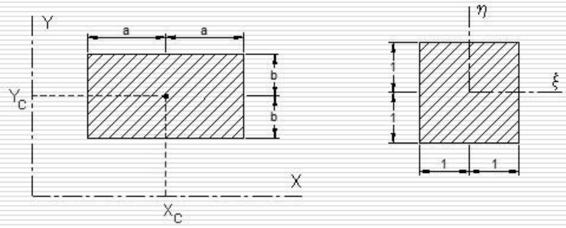
Elementos isoparámetricos

- Limitaciones de los elementos desarrollados:
  - Contornos rectangulares y triangulares
  - Permiten cubrir formas sencillas, propias de problemas teóricos
  - Se adaptan mal a los contornos más complicados habituales en las piezas reales (exigen un número desmesurado de elementos para representarlos)
- Soluciones
  - Opción inabordable: crear elementos específicos para cada tipo de contorno
  - Alternativa viable: "distorsionar" los elementos anteriores para que puedan adaptarse mejor al contorno los de las piezas reales

6

Elementos isoparámetricos

- ¿Distorsionar un elemento?
  - Al introducir la coordenadas normalizadas ya consideramos una "distorsión" del elemento



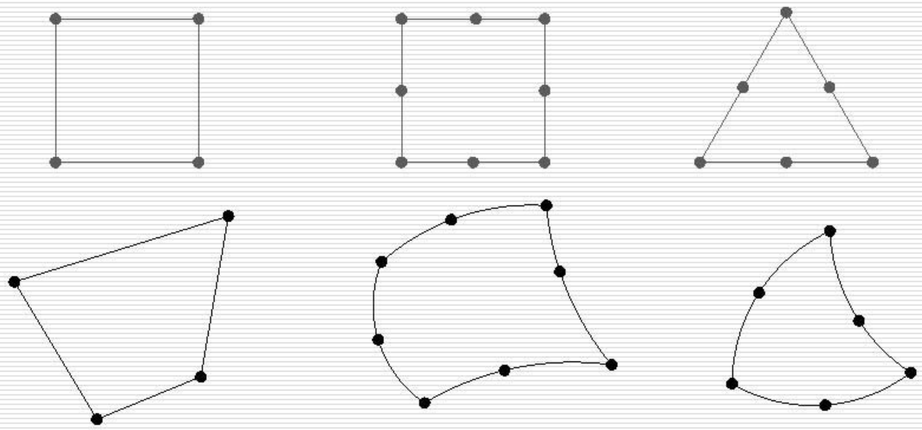
$$\xi = \frac{X - X_C}{a}$$

$$\eta = \frac{Y - Y_C}{a}$$

  - Una relación más compleja entre (X,Y) y (ξ,η) permite "distorsiones" más complejas
  - Elementos isoparamétricos → la relación se define mediante las mismas funciones de forma usadas para interpolar las incógnitas

Elementos isoparámetricos

- Elementos isoparamétricos: ejemplos de distorsión



8

Elementos isoparámetricos

- Transformación de coordenadas

$$X = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) X_i \qquad , \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) Y_i$$

- Transformación lícita (biunívoca):
  - El determinante jacobiano $|\mathbf{J}|$ de la transformación $(X,Y) \leftrightarrow (\xi,\eta)$ no se anula en ningún punto del elemento (por ello tiene el mismo signo en todos los puntos). Casos particulares:
    - Si la transformación es lineal, $|\mathbf{J}|\neq 0$ si los ángulos internos del cuadrilátero real son menores de 180º.
    - Si la transformación es cuadrática, $|\mathbf{J}|\neq 0$ si el nodo central de cada lado, en la geometría real, se sitúa en el tercio central de su longitud.

9

Elementos isoparámetricos

- Derivación de las funciones de forma
  - Objetivo: determinar las derivadas que aparecen en las matrices **B** y **K**:

$$\frac{\partial N_i}{\partial X} \quad , \quad \frac{\partial N_i}{\partial Y}$$

  - Regla de a cadena

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \eta}$$

Elementos isoparámetricos

- Derivación de las funciones de forma

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \eta}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial \xi} & \dfrac{\partial X}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial X} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial X} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial Y} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial X} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}}$$

Se puede determinar a partir de → $\begin{cases} X = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) X_i \\ Y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) Y_i \end{cases}$

Es invertible porque $|\mathbf{J}| \neq 0$

Se puede determinar a partir de $N_i(\xi,\eta)$

11

Elementos isoparámetricos

- Cálculo de la matriz jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial \xi} & \dfrac{\partial X}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} Y_i & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} Y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) X_i \\ Y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) Y_i \end{cases}$$

12

Elementos isoparámetricos

- Determinación de la matriz **B**

$$\mathbf{B}(X,Y)=\mathbf{L}\mathbf{N}(X,Y)$$

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial X} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y}\\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}}\begin{Bmatrix}\partial/\partial X\\ \partial/\partial Y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\underbrace{\frac{1}{|\mathbf{J}|}\begin{bmatrix}J_{22} & -J_{12}\\ -J_{21} & J_{11}\end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}}\underbrace{\begin{Bmatrix}\partial/\partial \xi\\ \partial/\partial \eta\end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}}$$

$$\mathbf{B}(\xi,\eta)=\mathbf{Q}\,\mathbf{J}^{-1}\,\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{N}(\xi,\eta)$$

13

Elementos isoparámetricos

- Integración sobre el área del elemento

$$dXdY = |\mathbf{J}|d\xi d\eta \quad , \quad \int_{A_{ELEMENTO}} dXdY = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|\mathbf{J}|d\xi d\eta$$

En las coordenadas normalizadas los límites de integración son muy sencillos

- Integración sobre el contorno (lados ξ=cte. o η=cte.)

$$dl = \sqrt{dX^2 + dY^2}$$

$$\text{Si } \xi = cte. \quad dX = \frac{\partial X}{\partial \eta}d\eta = J_{21}d\eta \quad , \quad dY = \frac{\partial Y}{\partial \eta}d\eta = J_{22}d\eta \quad , \quad dl = \sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2}\,d\eta$$

$$\text{Si } \eta = cte. \quad dX = \frac{\partial X}{\partial \xi}d\xi = J_{11}d\eta \quad , \quad dY = \frac{\partial Y}{\partial \xi}d\xi = J_{12}d\xi \quad , \quad dl = \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2}\,d\xi$$

$$\int_{Lado \quad \xi=cte.} dl = \int_{-1}^{1}\sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2}\,d\eta \quad , \quad \int_{Lado \quad \eta=cte.} dl = \int_{-1}^{1}\sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2}\,d\xi$$

14

Elementos isoparámetricos

- Otras interpolaciones de la geometría (del mismo tipo)
  - Superparamétrica → más nodos para interpolar la geometría que para interpolar las incógnitas
  - Subparamétrica → menos nodos para interpolar la geometría que para interpolar las incógnitas

  - La forma de operar es la misma en todos los casos.

Condensación estática

Condensación estática

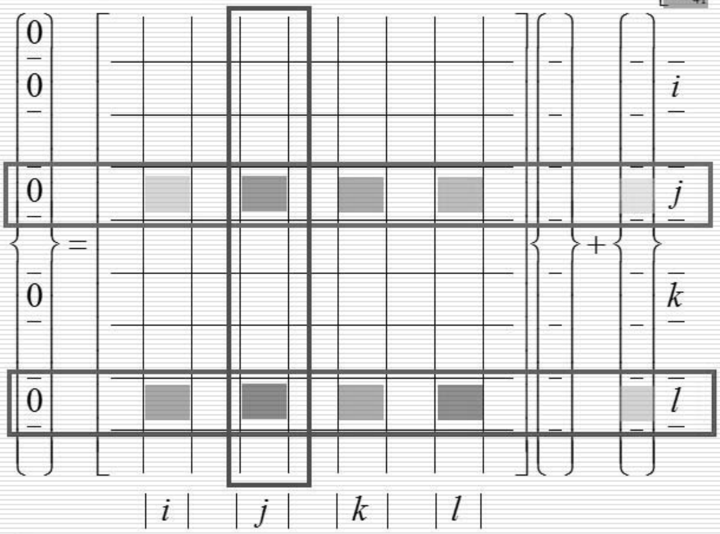
- Empezaremos estudiando la colaboración de un elemento con nodos internos a la relación de rigidez global
- Comprobaremos que, como no interactúan con el resto de los elementos, es posible expresar sus desplazamientos en función de los desplazamientos de los otros nodos del elemento
- Eso permite eliminarlos del sistema de ecuaciones global y así reducir la dimensión de este

17

Condensación estática

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e_{11} & \mathbf{K}^e_{12} & \mathbf{K}^e_{13} & \mathbf{K}^e_{14} \\ \mathbf{K}^e_{21} & \mathbf{K}^e_{22} & \mathbf{K}^e_{23} & \mathbf{K}^e_{24} \\ \mathbf{K}^e_{31} & \mathbf{K}^e_{32} & \mathbf{K}^e_{33} & \mathbf{K}^e_{34} \\ \mathbf{K}^e_{41} & \mathbf{K}^e_{42} & \mathbf{K}^e_{43} & \mathbf{K}^e_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^e_1 \\ \mathbf{a}^e_2 \\ \mathbf{a}^e_3 \\ \mathbf{a}^e_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^e_1 \\ \mathbf{f}^e_2 \\ \mathbf{f}^e_3 \\ \mathbf{f}^e_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ l \end{matrix}$$

Nodo interno: Ningún otro elemento aportará rigidez a esta columna



Nodo interno: Ningún otro elemento aportará rigidez o fuerzas nodales a esta fila.

Nodo del contorno: otros elementos aportarán rigidez o fuerzas nodales a esta fila.

18

Condensación estática

- Colaboración del elemento *e* a la relación de rigidez

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e & \mathbf{K}_{13}^e & \mathbf{K}_{14}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e & \mathbf{K}_{23}^e & \mathbf{K}_{24}^e \\ \mathbf{K}_{31}^e & \mathbf{K}_{32}^e & \mathbf{K}_{33}^e & \mathbf{K}_{34}^e \\ \mathbf{K}_{41}^e & \mathbf{K}_{42}^e & \mathbf{K}_{43}^e & \mathbf{K}_{44}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^e \\ \mathbf{a}_2^e \\ \mathbf{a}_3^e \\ \mathbf{a}_4^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \\ \mathbf{f}_3^e \\ \mathbf{f}_4^e \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^e \\ \mathbf{F}_2^e \\ \mathbf{F}_3^e \\ \mathbf{F}_4^e \end{Bmatrix}}$$

Variable auxiliar con dimensiones de fuerza

- Interpretación filas de la relación de rigidez

$$\sum_{e=1}^{n} \mathbf{F}_i^e = \mathbf{0} \qquad \text{si } i \text{ es un nodo del contorno}$$

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{0} \qquad \text{si } i \text{ NO es un nodo del contorno}$$

19

Condensación estática

- Condensación estática
  - Procedimiento que permite eliminar de la formulación, estudiando un elemento aislado, los grados de libertad que no se han de compatibilizar con los del resto de la estructura (correspondientes a los nodos internos).
  - Procedimiento importante en el Análisis de Estructuras, que aparece en varios campos:
    - MEF → eliminación de nodos internos
    - Estructuras de barras → desconexiones
    - Estructuras en general → análisis por subestructuras

20

Condensación estática

- Reordenación de la relación de rigidez del elemento

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e & \mathbf{K}_{13}^e & \mathbf{K}_{14}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e & \mathbf{K}_{23}^e & \mathbf{K}_{24}^e \\ \mathbf{K}_{31}^e & \mathbf{K}_{32}^e & \mathbf{K}_{33}^e & \mathbf{K}_{34}^e \\ \mathbf{K}_{41}^e & \mathbf{K}_{42}^e & \mathbf{K}_{43}^e & \mathbf{K}_{44}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^e \\ \mathbf{a}_2^e \\ \mathbf{a}_3^e \\ \mathbf{a}_4^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \\ \mathbf{f}_3^e \\ \mathbf{f}_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^e \\ \mathbf{F}_2^e \\ \mathbf{F}_3^e \\ \mathbf{F}_4^e \end{Bmatrix}$$

Suponiendo que 2 es el nodo interior a eliminar

Nodo interior

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CC}^e & \mathbf{K}_{CE}^e \\ \mathbf{K}_{EC}^e & \mathbf{K}_{EE}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_C^e \\ \mathbf{a}_E^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_C^e \\ \mathbf{f}_E^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_C^e \\ \mathbf{F}_E^e = \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Subíndices:
C → Conservar
E → Eliminar

21

Condensación estática

- Procedimiento matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CC}^{e} & \mathbf{K}_{CE}^{e} \\ \mathbf{K}_{EC}^{e} & \mathbf{K}_{EE}^{e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{C}^{e} \\ \mathbf{a}_{E}^{e} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{C}^{e} \\ \mathbf{f}_{E}^{e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{C}^{e} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{E}^{e} = -\left[\mathbf{K}_{EE}^{e}\right]^{-1}\left(\mathbf{K}_{EC}^{e}\mathbf{a}_{C}^{e} + \mathbf{f}_{E}^{e}\right)$$

$$\boxed{\underbrace{\left[\mathbf{K}_{CC}^{e} - \mathbf{K}_{CE}^{e}\left[\mathbf{K}_{EE}^{e}\right]^{-1}\mathbf{K}_{EC}^{e}\right]}_{\mathbf{K}^{*e}}\mathbf{a}_{C}^{e} + \underbrace{\left\{\mathbf{f}_{C}^{e} - \mathbf{K}_{CE}^{e}\left[\mathbf{K}_{EE}^{e}\right]^{-1}\mathbf{f}_{E}^{e}\right\}}_{\mathbf{f}^{*e}} = \left\{\mathbf{F}_{C}^{e}\right\}}$$

Relación equivalente a la inicial, donde ya se han impuesto las condiciones correspondientes al nodo interno y donde las variables nodales asociadas a éste no intervienen.

22

Integración numérica

- Cuadratura de Gauss-Legendre (dominio 1D)

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i f(\xi_i)$$

n	ξ_i	W_i
1	0	2,000000
2	±0.57735	1,000000
3	0 ±0,774597	0,888889 0,555556
4	±0,339981 ±0,861136	0,652145 0,347855
5	0 ±0,538469 ±0,906180	0,568889 0,478629 0,236927

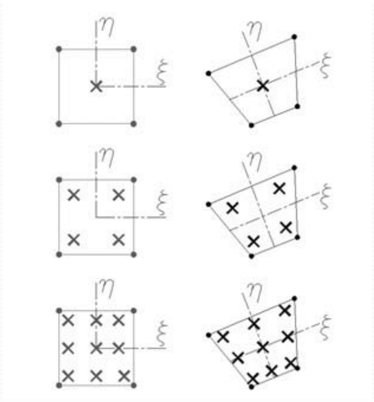
- La fórmula de *n* puntos integra exactamente un polinomio de grado menor o igual a 2*n*-1
- El error es del orden $0(\Delta^{2n})$, donde Δ es la distancia entre puntos de integración.

24

Integración numérica

- Integración sobre un rectángulo en (ξ,η)
  [representa un cuadrilátero en (X,Y)]

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} W_i W_j f(\xi_i,\eta_i)$$



- La fórmula de *n* puntos en cada dirección integra exactamente un polinomio de grado menor o igual a 2*n*-1 en cada coordenada normalizada
- El error es del orden $0(\Delta^{2n})$, donde Δ es la distancia entre puntos de integración.

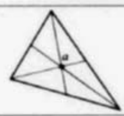
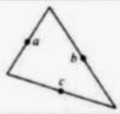
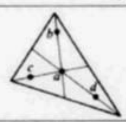
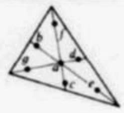
Integración numérica

- Integración sobre un triángulo en (L_1,L_2,L_3)

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_3} f\left(L_1, L_2, L_3\right) d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} W_i f\left(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}\right)$$

FÓRMULAS PARA INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE TRIÁNGULOS

Orden	Figura	Error	Puntos	Coordenadas Triangulares	Pesos
Lineal		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Cuadrático		$R = O(h^3)$	a	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{3}$
			b	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
			c	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Cúbico		$R = O(h^4)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
			b	0.6, 0.2, 0.2	$\frac{25}{48}$
			c	0.2, 0.6, 0.2	
			d	0.2, 0.2, 0.6	
Quinto		$R = O(h^6)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	0.2250000000
			b	$\alpha_1, \beta_1, \beta_1$	0.1323941527
			c	$\beta_1, \alpha_1, \beta_1$	
			d	$\beta_1, \beta_1, \alpha_1$	
			e	$\alpha_2, \beta_2, \beta_2$	0.1259391805
			f	$\beta_2, \alpha_2, \beta_2$	
			g	$\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	

con
$\alpha_1 = 0.0597158717$
$\beta_1 = 0.04701420641$
$\alpha_2 = 0.7974269853$
$\beta_2 = 0.1012865073$

Zienkiewicz (1980, pág. 232)

Integración numérica

- Integración exacta. Orden necesario
  - La integración exacta del polinomio que aparece en las distintas integrales asegura la convergencia.
  - Se requiere n puntos de integración para integrar exactamente un polinomio de grado $2n+1$.
  - La integración exacta no es posible en elementos isoparamétricos de lados curvos, ya que la transformación de coordenadas hace que el integrando no sea polinómico sino racional.
  - En tal caso, se escoge el orden de integración adecuado para el mismo problema pero planteado en un elemento de lados rectos.

27

Integración numérica

- Orden de integración **mínimo** necesario para mantener la convergencia
  - Se requiere el número de puntos adecuado para integrar exactamente
    - la parte de los coeficientes de la matriz de rigidez determinada por el polinomio completo de mayor orden contenido en la función de forma
      → polinomio de grado 2(p-m), siendo:
      - *p* el grado del citado polinomio completo
      - *m* el orden de derivación que aparece en las deformaciones
    - en un elemento similar al considerado pero de lados rectos

28

Integración numérica

- Puntos de colocación óptima
  - En general, los puntos de integración de esta cuadratura mínima coinciden con los puntos óptimos de cálculo de las tensiones (aquellos donde estas presenta la mayor precisión).

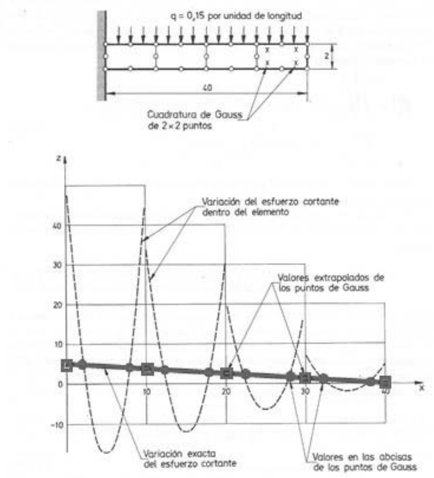


Figura 5.35 Viga en voladizo analizada con cuatro elementos Serendípitos de 8 nodos. Valores del esfuerzo cortante en las secciones correspondientes a la cuadratura 2 × 2 de Gauss-Legendre y extrapolación lineal a los nodos

Oñate (1992, fig. 5.35) o Zienkiewicz (1980, fig. 11.9)

29

Integración numérica

- Singularidad de la matriz de rigidez
  - En algunos casos la integración con el mínimo número de puntos puede hacer singular la matriz de rigidez[1,2].
  - Para evitarlo el orden de integración debe ser:
    - Elemento triangular lineal (3 nodos) → 1 punto
    - Otros elementos triangulares → ≥ 3 puntos
    - Elementos rectangulares → ≥ 2x2 puntos
  - En ocasiones se busca intencionadamente la singularidad → integración reducida

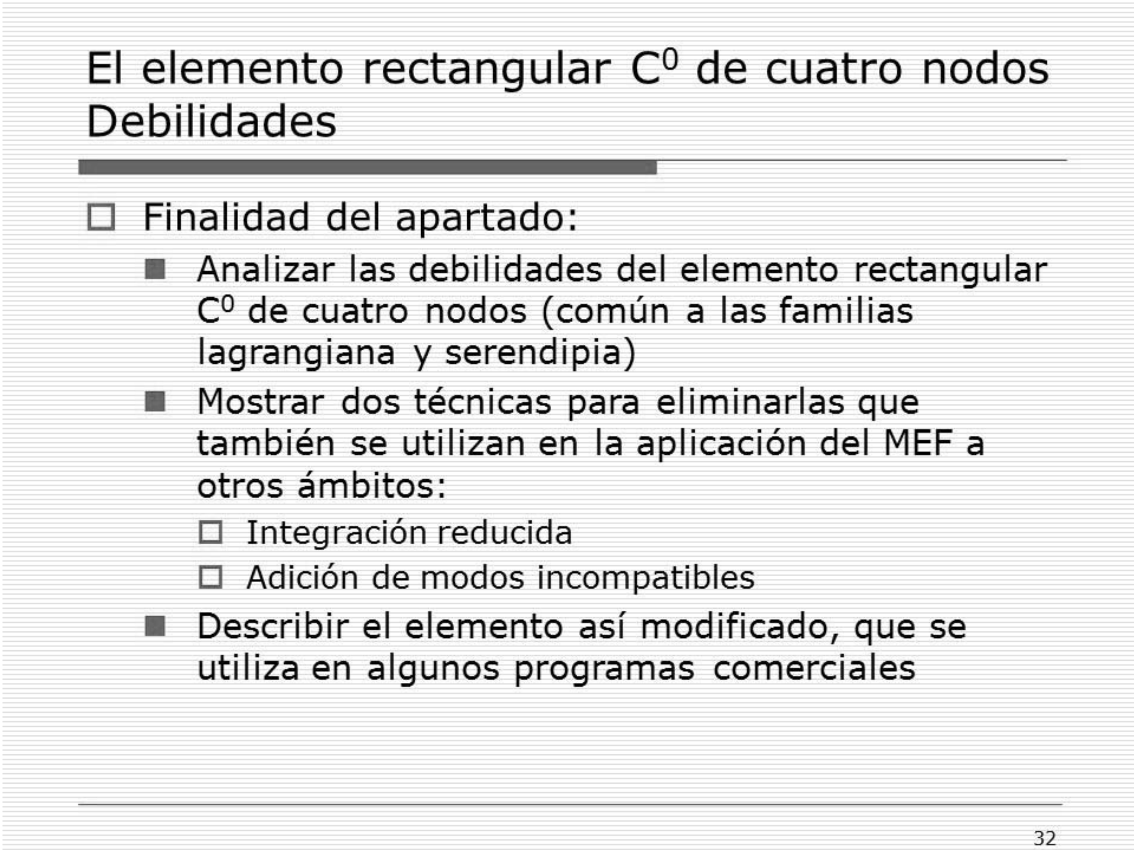
    (la veremos más adelante)

[1] Zienkiewicz (1980, punto 8.11.3)
[2] Oñate (1992, punto 5.9.3)

30

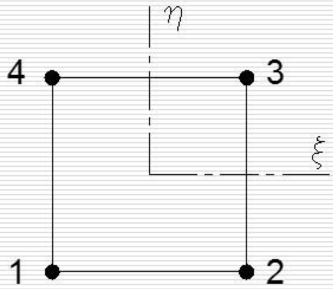
El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos

Debilidades



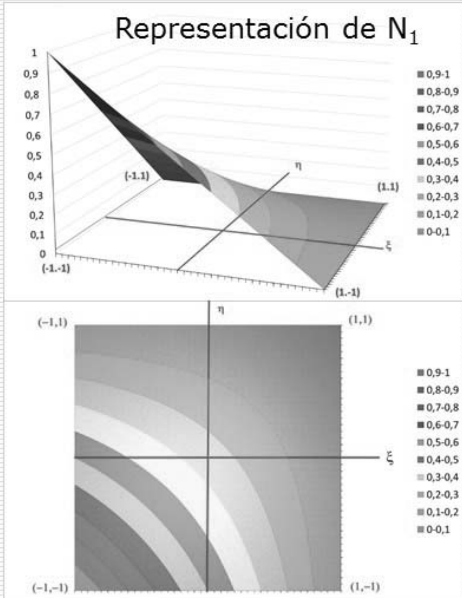
El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos Debilidades

- Elemento rectangular de 4 nodos



Lineal (4 nodos)

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi\xi_i)(1-\eta\eta_i)$$



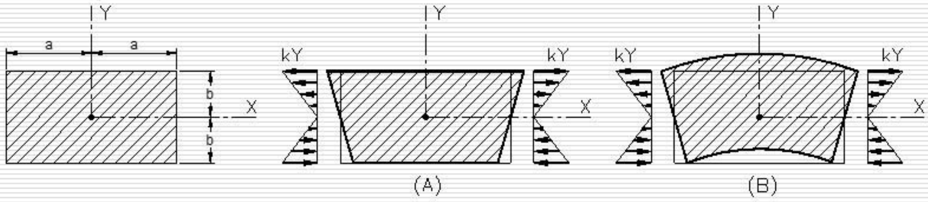
El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos Debilidades

- Fortalezas
  - Elemento simple → poco trabajo computacional
  - Muy preciso en problemas de tracción o compresión dominante (el campo tensional varía poco)
- Debilidades
  - Poco preciso en casos de flexión dominante (el campo tensional varía rápidamente)
  - En este caso, requiere mallas muy densas

34

El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos Debilidades

- Comportamiento a flexión



- Según la elasticidad bidimensional (B)

$$u = \frac{k}{E} XY = \frac{kab}{E} \xi\eta \qquad \boxed{\gamma_{XY} = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} = 0}$$

$$v = \frac{k}{2E}\left(a^2 - X^2 + \nu\left(b^2 - Y^2\right)\right) = \frac{ka^2}{2E}\left(1-\xi^2\right) + \frac{\nu k b^2}{2E}\left(1-\eta^2\right)$$

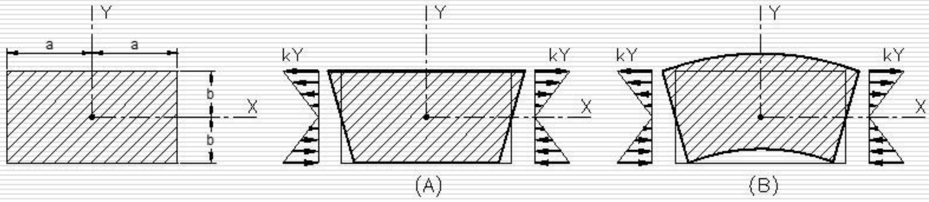
- Aproximación con el elemento finito (A)

$$u = CXY = c\xi\eta = \frac{kab}{E}\xi\eta \quad , \quad v = 0 \qquad \boxed{\gamma_{XY} = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{kab}{E} X}$$

35

El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos Debilidades

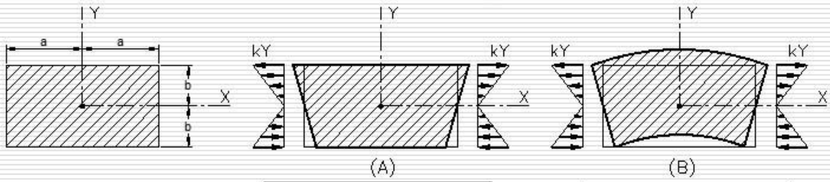
- Comportamiento a flexión



  - El elemento finito no puede reproducir los desplazamientos verticales → es demasiado rígido
  - El elemento finito evalúa por exceso la distorsión angular, la tensión asociada a ella y los términos de la matriz de rigidez que dependen de ambas → es demasiado rígido

36

El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos Mejora mediante integración reducida



$$\gamma_{XY} = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} = kX \qquad \gamma_{XY} = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} = 0$$

- Eliminación del exceso de rigidez asociado a la estimación por exceso de la distorsión angular
  - Los términos de la matriz de rigidez asociados a la distorsión angular se integran con un solo punto de Gauss [que es el (0,0)]
  - En él la distorsión es nula, como en la solución exacta.
  - El resto de términos se evalúan con una cuadratura de 2x2 puntos

38

El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos Mejora mediante integración reducida

- La técnica descrita se denomina integración reducida selectiva o, simplemente, **integración reducida**.
- Se puede aplicar del mismo modo a los elementos isoparamétricos derivados del estudiado.
- Se utiliza en otros ámbitos en los que la función de forma, en ciertas circunstancias, produce una evaluación muy por exceso de algún término de rigidez (fenómeno denominado **bloqueo**). Por ejemplo:
  - Elasticidad con materiales casi incompresibles ($\nu \approx 0,5$)
  - Elementos viga de Timoshenko muy delgados
  - Elementos placa o lámina de Reissner-Mindlin muy delgados
- La integración reducida no perjudica los casos donde no es necesaria (por ej: cuando los elementos viga o placa citados no son muy delgados)

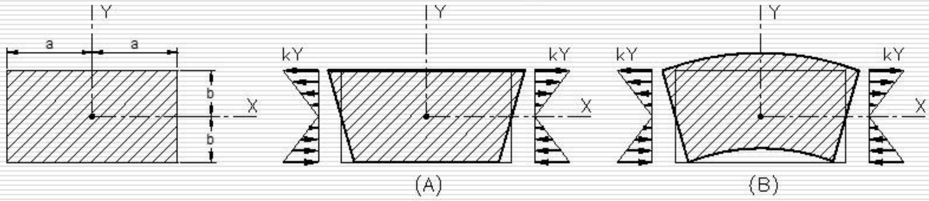
39

El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos
Mejora mediante adición de modos incompatibles

- Otra alternativa de mejora es complementar la función de forma con nuevos términos que permitan representar el modo de deformación de flexión.
- En este caso, produce mejores resultados que la integración reducida del punto anterior.
- Estarán ligados a **variables anodales**, es decir, a incógnitas que no representan el desplazamiento de ningún nodo.
- Si violan la continuidad C^0 en el contorno, como de hecho va a ocurrir, se denominan **modos incompatibles.**

41

El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos
Mejora mediante adición de modos incompatibles



- Solución problema flexión (elasticidad 2D)

$$u = \frac{kab}{E}\xi\eta \quad , \quad v = \frac{ka^2}{2E}\left(1-\xi^2\right) + \frac{\nu kb^2}{2E}\left(1-\eta^2\right)$$

- Nueva interpolación (Wilson *et al., 1973*)

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)u_i + \left(1-\xi^2\right)u_5 + \left(1-\eta^2\right)u_6$$

Variables anodales

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)v_i}_{\text{Interpolación } C^0 \text{ 4 nodos}} + \left(1-\xi^2\right)v_5 + \left(1-\eta^2\right)v_6$$

42

El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos
Mejora mediante adición de modos incompatibles

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)u_i + \left(1-\xi^2\right)u_5 + \left(1-\eta^2\right)u_6$$

$$v = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)v_i + \left(1-\xi^2\right)v_5 + \left(1-\eta^2\right)v_6$$

- Los términos adicionales modifican los desplazamientos en el contorno → dejarán de ser compatibles con los del elemento adyacente
→ **modos incompatibles**.
- El elemento deja de ser de continuidad C^0 para pasar a ser **no conforme**.
- Las variables anodales tienen carácter de grados de libertad internos → pueden eliminarse por **condensación estática**.

43

El elemento rectangular C^0 de cuatro nodos
Mejora mediante adición de modos incompatibles

- El elemento no conforme de Wilson
  (Taylor *et al*. 1976)
  - El elemento descrito satisface el test de la parcela si se evalúan:
    - Los términos de **K** correspondientes a las variables anodales mediante integración reducida de 1 punto.
    - Los restantes términos mediante integración convencional de 2x2 puntos.
  - Las variables internas se pueden eliminar por condensación estática.
  - El resultado es un elemento que presenta un comportamiento muy bueno con pocos grados de libertad.
  - Eso hace que sea utilizado en numerosos programas comerciales.

44

Bibliografía

Bibliografía

- ZIENKIEWICZ, O.C. *El método de los elementos finitos*. Reverté, Barcelona, 1980. (Capítulo 8, 7.7, 11.5.3, 11.6)
- OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (5.8, 3.4, 5.9,5.4)
- CELIGÜETA, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.). San Sebastián, 2011. (4.9 a 4.12 y capítulo 11)
- WILSON, E.L., TAYLOR, R.L., DOHERTY, R.L. Y GHABUSSI, T. "Incompatible displacement models", en *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Fenves, S.T. el al. (Eds.) Academics Press, 1973
- TAYLOR, R.L., BERESFORD, P.J. Y WILSON, E.L. "A non conforming element for stress analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol 10, pp. 1211-1220, 1976

46

Tema 07:

Estructuras de barras por el Método de los Elementos Finitos (I)

—teoría de Navier-Bernoulli—

Introducción

Introducción

- Objetivos del tema (1):
  - Definir estructura de barras. Caracterizar los diferentes tipos de estructuras de barras
  - Establecer la escritura matricial del TTV para la barra basada en la teoría de Navier-Bernoulli (flexión) y la teoría aproximada de la torsión no uniforme
  - Formular por el MEF las respuestas de axil y de flexión, mediante elementos finitos lagrangianos lineales.
  - Formular por el MEF la respuesta de flexión mediante elementos finitos hermíticos cúbicos.
  - Analizar la precisión de los resultados. Establecer el carácter exacto de la solución obtenida en los nodos.

3

Introducción

- Objetivos del tema (2):
  - Definir los cambios de sistema de referencia necesarios.
  - Repasar el procedimiento de ensamblaje del sistema de ecuaciones de rigidez. Interpretarlo como planteamiento de las ecuaciones de equilibrio de nodo.
  - Describir las líneas generales del Método Matricial de Cálculo de Estructuras. Identificarlos con la formulación del MEF basada en la función de forma natural.

4

Introducción

- Estructura de barras
  - Conjunto de barras unidas entre sí y al referencial por sus extremos, concebido para resistir y transmitir cargas.
- Pórtico plano
  - Estructura de barras cuyas directrices yacen en el mismo plano π, en el que también se sitúan las líneas de acción de las fuerzas exteriores y uno de los dos ejes principales de inercia de cualquier sección transversal. Además, el eje de los momentos exteriores ha de ser perpendicular a dicho plano.
    - Como consecuencia de ello, los movimientos de los puntos de las directrices están contenidos en el plano π , los giros se producen respecto a un eje perpendicular a él, los esfuerzos que son componentes de fuerza están contenidos en él y los que son componentes de momento tiene su eje perpendicular al mismo.

5

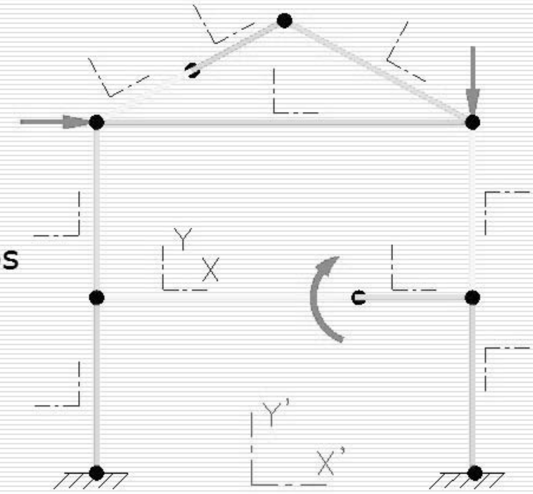
Introducción

- Emparrillado plano
  - Estructura de barras cuyas directrices yacen en el mismo plano π, en el que también se sitúan los ejes de los momentos exteriores y uno de los dos ejes principales de inercia de cualquier sección transversal. Además, las líneas de acción de las fuerzas exteriores han de ser perpendiculares a dicho plano.
    - Como consecuencia de ello, los movimientos de los puntos de las directrices son perpendiculares al plano π, sus giros se producen alrededor de ejes contenidos en él, los esfuerzos que son componentes de fuerzas son perpendiculares a π y los que son componentes de momento tienen su eje contenido en él.
- Estructura de tipo general
  - La que no cumple ninguna de las definiciones anteriores

6

Introducción

- Estructura de barras
  - Elementos ≡ barras
  - Nodos
  - Fuerzas sobre las barras (no dibujadas)
  - Fuerzas sobre los nodos
  - Sistema global de referencia
  - Sistemas locales de referencia



7

Formulación matricial del TTV
(hipótesis de Navier-Bernoulli y de Coulomb)

Formulación matricial del TTV (hip. Navier-Bernoulli y Coulomb)

- **El TTV para un estructura de barras** (teoría de Navier-Bernoulli –flexión- y aproximada de la torsión no uniforme[1])

$$\delta\Pi' = \sum_{i=1}^{N} \delta\Pi'^{(e)} = 0 \qquad \forall\, \delta\mathbf{d} \in \mathcal{A}$$

$$\delta\Pi'^{(e)} = \delta\Pi^{(e)} + \text{cambio SDR}$$

> $\delta\Pi^{(e)}$ es un escalar, tiene el mismo valor en cualquier SDR.
> $\delta\Pi'^{(e)}$ es el mismo escalar, con los factores que los forman expresados en otro SDR.

$$\begin{aligned}
\delta\Pi^{(e)} = {} & \int_0^L \{\delta\varepsilon\, N + \delta\chi_Z\, M_Z + \delta\chi_Y\, M_Y + \delta\theta\, M_T\}dX - \\
& - \int_0^L \{q_X\, \delta u + q_Y\, \delta v + q_Z\, \delta w + m_X\, \delta\varphi_X + \cancelto{0}{m_Y(-\delta w,_X)} + \cancelto{0}{m_Z\, \delta v,_X}\}dX - \\
& - \{\delta u_1 \overline{F}_{X1} + \delta v_1 \overline{F}_{Y1} + \delta w_1 \overline{F}_{Z1} + \delta\varphi_{X1} \overline{M}_{X1} + (-\delta w,_X)_1 \overline{M}_{Y1} + (\delta v,_X)_1 \overline{M}_{Z1}\} - \\
& - \{\delta u_2 \overline{F}_{X2} + \delta v_2 \overline{F}_{Y2} + \delta w_2 \overline{F}_{Z2} + \delta\varphi_{X2} \overline{M}_{X2} + (-\delta w,_X)_2 \overline{M}_{Y2} + (\delta v,_X)_2 \overline{M}_{Z2}\}
\end{aligned}$$

[1] Casanova (2011, pág. 226 y ss.)
Casanova (1993, pág. 138 y ss.)

9

Formulación matricial del TTV (hip. Navier-Bernoulli y Coulomb)

- Expresión matricial de $\delta\Pi^{(e)}$

$$\int_0^L \{\delta\varepsilon\, N + \delta\chi_Z\, M_Z + \delta\chi_Y\, M_Y + \delta\theta\, M_T\} dX = \int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\, \boldsymbol{\sigma}\, dX$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \{\delta\varepsilon \quad \delta\theta \quad \delta\chi_Y \quad \delta\chi_Z\}^T \quad , \quad \delta\boldsymbol{\sigma} = \{N \quad M_T \quad M_Y \quad M_Z\}^T$$

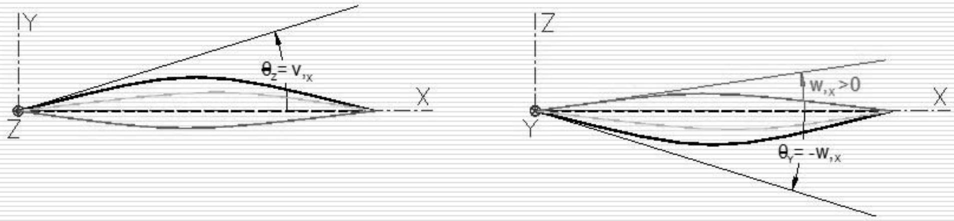
$$\int_0^L \{q_X\, \delta u + q_Y\, \delta v + q_Z\, \delta w + m_X\, \delta\varphi_X\} dX = \int_0^L \delta\mathbf{d}^T\, \mathbf{q}\, dX$$

$$\delta\mathbf{d} = \{\delta u \quad \delta v \quad \delta v \quad \delta\varphi_X\}^T \quad , \quad \delta\mathbf{q} = \{q_X \quad q_Y \quad q_Z \quad m_X\}^T$$

10

Formulación matricial del TTV (hip. Navier-Bernoulli y Coulomb)

- Expresión matricial de $\delta\Pi^{(e)}$



$$\left\{\delta u_i \overline{F}_{Xi} + \delta v_i \overline{F}_{Yi} + \delta w_i \overline{F}_{Zi} + \delta\varphi_{Xi}\overline{M}_{Xi} + \left(-\delta w,_X\right)_i \overline{M}_{Yi} + \left(\delta v,_X\right)_i \overline{M}_{Zi}\right\} = \delta\mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \quad i = 1,2$$

$$\delta\mathbf{d}_i = \left\{\delta u_i \quad \delta v_i \quad \delta w_i \quad \delta\varphi_{Xi} \quad -\delta w,_X \quad \delta v,_X\right\}^T = \left\{\delta u_i \quad \delta v_i \quad \delta w_i \quad \delta\varphi_{Xi} \quad \delta\varphi_{Yi} \quad \delta\varphi_{Zi}\right\}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_i = \left\{\overline{F}_{Xi} \quad \overline{F}_{Yi} \quad \overline{F}_{Zi} \quad \overline{M}_{Xi} \quad \overline{M}_{Yi} \quad \overline{M}_{Zi}\right\}^T$$

11

Formulación matricial del TTV (hip. Navier-Bernoulli y Coulomb)

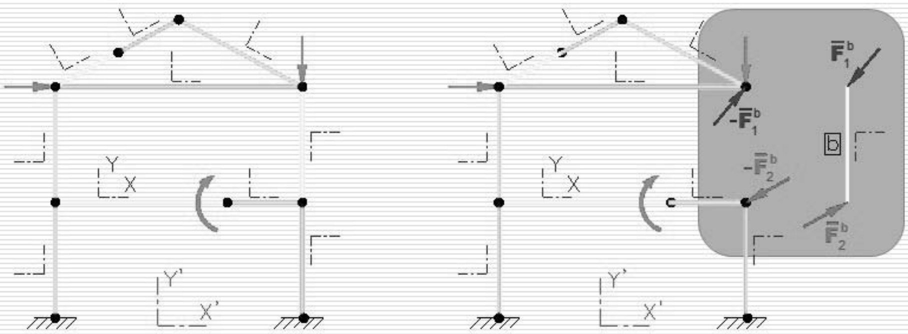
- Expresión matricial de $\delta\Pi^{(e)}$

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi^{(e)} &= \int_0^L \{\delta\varepsilon\, N + \delta\chi_Z\, M_Z + \delta\chi_Y\, M_Y + \delta\theta\, M_T\} dX - \\
&- \int_0^L \{q_X\, \delta u + q_Y\, \delta v + q_Z\, \delta w + m_X\, \delta\varphi_X\} dX - \\
&- \left\{\delta u_1 \overline{F}_{X1} + \delta v_1 \overline{F}_{Y1} + \delta w_1 \overline{F}_{Z1} + \delta\varphi_{X1} \overline{M}_{X1} + \left(-\delta w,_X\right)_1 \overline{M}_{Y1} + \left(\delta v,_X\right)_1 \overline{M}_{Z1}\right\} - \\
&- \left\{\delta u_2 \overline{F}_{X2} + \delta v_2 \overline{F}_{Y2} + \delta w_2 \overline{F}_{Z2} + \delta\varphi_{X2} \overline{M}_{X2} + \left(-\delta w,_X\right)_2 \overline{M}_{Y2} + \left(\delta v,_X\right)_2 \overline{M}_{Z2}\right\} \\
&= \int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dX - \int_0^L \delta\mathbf{d}^T \mathbf{q}\, dX - \sum_{i=1}^{2} \delta\mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i
\end{aligned}
$$

12

Formulación matricial del TTV (hip. Navier-Bernoulli y Coulomb)

- Aclaración: significado de las fuerzas $\overline{\mathbf{F}}_i$
  - $\overline{\mathbf{F}}_i$ son las fuerzas que actúan en los extremos de la barra; en una estructura, **las fuerzas que ejerce sobre una barra aislada el resto de ésta**.



13

Formulación matricial del TTV (hip. Navier-Bernoulli y Coulomb)

- Relaciones cinemáticas (teoría de Navier-Bernoulli)

$$\varepsilon = \frac{du}{dX}$$

$$\chi_Y = -\frac{d^2 w}{dX^2}$$

$$\chi_Z = \frac{d^2 v}{dX^2}$$

$$\theta = \frac{d\varphi_X}{dX}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \theta \\ \chi_Y \\ \chi_Z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{dX} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dX} \\ 0 & 0 & -\frac{d^2}{dX^2} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dX^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_X \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

14

Formulación matricial del TTV (hip. Navier-Bernoulli y Coulomb)

- Ecuaciones constitutivas
  (teoría de Navier-Bernoulli)

$$N = EA\varepsilon$$
$$M_Y = EI_Y\chi_Y$$
$$M_Z = EI_Z\chi_Z$$
$$M_T = GJ\varphi$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N \\ M_T \\ M_Y \\ M_Z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_Z \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \theta \\ \chi_Y \\ \chi_Z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

- J = módulo de torsión
- Hipótesis: centroide y centro de esfuerzos cortantes coinciden.

15

Discretización por elementos finitos
Problemas desacoplados

- Desacoplamiento

Nótese que las variables propias de cada problema sólo intervienen en los términos indicados en cada caso.

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi^{(e)} = & \int_0^L \{\delta\varepsilon\, N + \delta\chi_Z\, M_Z + \delta\chi_Y\, M_Y + \delta\theta\, M_T\} dX - \\
& - \int_0^L \{q_X\, \delta u + q_Y\, \delta v + q_Z\, \delta w + m_X\, \delta\varphi_X\} dX - \\
& - \{\delta u_1 \overline{F}_{X1} + \delta v_1 \overline{F}_{Y1} + \delta w_1 \overline{F}_{Z1} + \delta\varphi_{X1} \overline{M}_{X1} + (-\delta w,_X)_1 \overline{M}_{Y1} + (\delta v,_X)_1 \overline{M}_{Z1}\} - \\
& - \{\delta u_2 \overline{F}_{X2} + \delta v_2 \overline{F}_{Y2} + \delta w_2 \overline{F}_{Z2} + \delta\varphi_{X2} \overline{M}_{X2} + (-\delta w,_X)_2 \overline{M}_{Y2} + (\delta v,_X)_2 \overline{M}_{Z2}\}
\end{aligned}
$$

- Problema axil→ N, ε, u, q_X, F_X
- Problema torsión→ M_T, θ, φ_X, m_X, M_X
- Problema flexión plano XY→ M_Z, χ_Z, v, q_Y, F_Y
- Problema flexión plano XZ→ M_Y, χ_Y, w, q_Z, F_Z

17

Discretización por elementos finitos Problemas desacoplados

- En conclusión: la respuesta más general de una viga se estudia mediante **cuatro problemas desacoplados**.
- Eso permite plantear este punto como:
  - Estudio de la barra sometida a axil
  - Extrapolación de los resultados al caso (análogo) de la barra a torsión
  - Estudio de la barra sometida a flexión en el plano XY
  - Extrapolación de los resultados al caso (análogo) de la barra sometida a flexión en el plano XZ
- Nos centraremos en la barra recta de sección constante.

18

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Desplazamientos y deformaciones

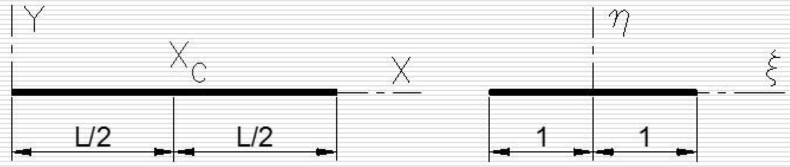
$$\mathbf{d} = \{u(X)\} \qquad \underbrace{\{\varepsilon\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\frac{d}{dX}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\{u\}}_{\mathbf{d}}$$

- Condiciones a cumplir por la función de forma:
  - Deformaciones → derivadas primeras de **d**
    - Deben existir las derivadas primeras ≠0
      → funciones de interpolación al menos lineales
    - Se requiere continuidad C^0 en el contorno
- Las cumple una interpolación **lineal**

20

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Coordenadas normalizadas



$$\xi = 2\,\frac{X - X_C}{L} \quad \rightarrow \quad d\xi = 2\,\frac{dX}{L}$$

$$dX = \frac{L}{2}\,d\xi$$

$$\int_0^L f(X)\,dX = \int_{-1}^{1} g(\xi)\,\frac{L}{2}\,d\xi$$

21

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

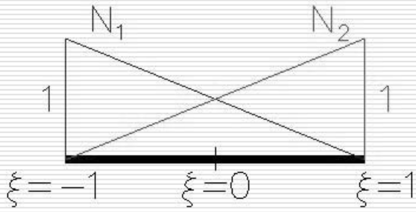
- Interpolación: polinomios de Lagrange de primer orden (2 nodos)

$$L_i^n(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}$$

n → número de nodos
i → nodo donde la función vale 1

$$N_1(\xi) = L_1^2(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_2 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_2(\xi) = L_2^2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$



22

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Interpolación:

$$\hat{\mathbf{d}} = \{\hat{u}\} = \left[N_1(\xi) \;\vdots\; N_2(\xi) \right] \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\xi}{dX} = \frac{2}{L}$$

- Deformaciones

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\hat{\varepsilon}\} = \left[\frac{d}{dX} \right] \{\hat{u}\} = \left[\frac{2}{L} \frac{d}{d\xi} \right] \left[N_1(\xi) \;\vdots\; N_2(\xi) \right] \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{2}{L} \frac{dN_1}{d\xi} \;\vdots\; \frac{2}{L} \frac{dN_2}{d\xi} \right]}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_e} = \left[-\frac{1}{L} \;\vdots\; \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{a}_e$$

Válido para cualquier función de interpolación

23

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Deformaciones virtuales

$$\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\delta\hat{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \vdots & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\hat{u}_1 \\ \delta\hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\delta\mathbf{a}_\mathbf{e}$$

- Esfuerzos

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \rightarrow \quad \{\hat{\sigma}\} = [EA] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \vdots & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & \vdots & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}$$

24

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Matriz de rigidez

$$\int_0^L \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}\, dX = \int_{-1}^1 \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathbf{a}_\mathbf{e} \frac{L}{2} d\xi =$$

$$= \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} [EA] \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi\, \mathbf{a}_\mathbf{e} = \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [\xi]_{-1}^1 \mathbf{a}_\mathbf{e} =$$

$$= \underbrace{\{\delta\hat{u}_1 \quad \delta\hat{u}_2\}}_{\delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^{(e)}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_\mathbf{e}} = \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e}$$

25

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Fuerzas nodales debidas a cargas en el interior del dominio

$$\int_0^L \delta\hat{\mathbf{d}}^T \mathbf{q}\,dX = \int_{-1}^{1} \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{N}^T \mathbf{q}\frac{L}{2}\,d\xi = \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix} q_X(\xi)\frac{L}{2}\,d\xi$$

$$= \underbrace{\{\delta\hat{u}_1 \quad \delta\hat{u}_2\}}_{\delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{4}\int_{-1}^{1}(1-\xi)q_X(\xi)d\xi \\ \frac{L}{4}\int_{-1}^{1}(1+\xi)q_X(\xi)d\xi \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_e} = \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{f}_e$$

  - Si q_X=cte. → $\mathbf{f}_e = \left\{\frac{q_X L}{2} \quad \frac{q_X L}{2}\right\}^T$

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Fuerzas puntuales en los extremos

$$\sum_{i=1}^{2} \delta\mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \cong \delta\hat{u}_1 \overline{F}_{X1} + \delta\hat{u}_2 \overline{F}_{X2} = \underbrace{\left\{\delta\hat{u}_1 \quad \delta\hat{u}_2\right\}}_{\delta\mathbf{a}_e^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{F}_{X1} \\ \overline{F}_{X2} \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{F}}} = \delta\mathbf{a}_e^T\, \overline{\mathbf{F}}$$

- Funcional de trabajos virtuales de la barra

$$\delta\Pi^{(e)} = \int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\, \boldsymbol{\sigma}\, dX - \int_0^L \delta\mathbf{d}^T\, \mathbf{q}\, dX \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T - \sum_{i=1}^{2} \delta\mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \cong$$

$$\cong \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{f}_e - \delta\mathbf{a}_e^T\, \overline{\mathbf{F}} = \delta\mathbf{a}_e^T \left(\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_e - \overline{\mathbf{F}}\right)$$

- Relación de rigidez de la barra (cond. equilibrio)

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$$

27

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Analogía con el problema de torsión

Axil	Torsión
u	φ_X
N	M_T
EA	GJ
q_X	m_X
$\overline{F}_{Xi}$	$\overline{M}_{Xi}$

28

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a axil

- Resultados del problema de torsión
  (basados en la analogía; con las mismas funciones de forma)

$$\mathbf{a}_e = \{\varphi_{X1} \quad \varphi_{X2}\} \qquad \overline{\mathbf{F}} = \{\overline{F}_{X1} \quad \overline{F}_{X2}\}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{GJ}{L} & -\dfrac{GJ}{L} \\ -\dfrac{GJ}{L} & \dfrac{GJ}{L} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-\xi)m_X(\xi)d\xi \\ \dfrac{L}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+\xi)m_X(\xi)d\xi \end{bmatrix}$$

29

Discretización por elementos finitos

El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Desplazamientos y deformaciones

$$\mathbf{d} = \{v(X)\} \qquad \underbrace{\{\chi_Z\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\frac{d^2}{dX^2}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\{v\}}_{\mathbf{d}}$$

Giro unitario alrededor del eje Z

- Condiciones a cumplir por la función de forma:
  - Deformaciones → derivadas segundas de **d**
    - Deben existir las derivadas segundas ≠0
      → funciones de interpolación al menos cuadráticas
    - Se requiere continuidad C^1 en el contorno
- Las cumple una interpolación **cúbica**
  (para garantizar la continuidad en el contorno)

31

Discretización por elementos finitos

El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Interpolación cúbica (justificación)
  - Parámetros nodales: se necesitan 4 para garantizar la continuidad C^1.

$$v_1 \qquad\qquad\qquad\qquad v_2$$

$$\left\{dv/dX\right\}_1 \qquad\qquad \left\{dv/dX\right\}_2$$

  - Cuatro parámetros definen un polinomio cúbico

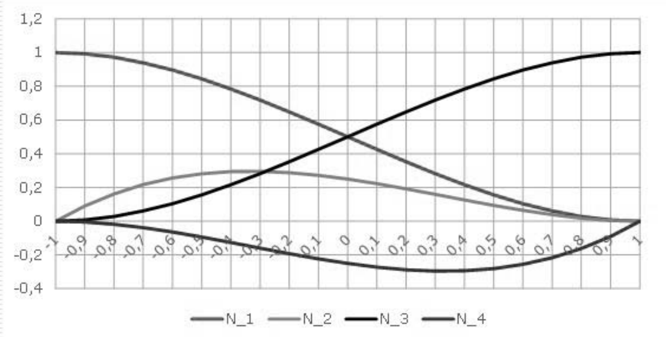
$$v = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Funciones de forma Hermíticas (1)

$$N_1(\xi)=\frac{1}{4}\left(2-3\xi+\xi^3\right) \qquad N_2(\xi)=\frac{1}{4}\left(1-\xi-\xi^2+\xi^3\right)$$

$$N_3(\xi)=\frac{1}{4}\left(2+3\xi-\xi^3\right) \qquad N_4(\xi)=\frac{1}{4}\left(-1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)$$



33

Discretización por elementos finitos

El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Funciones de forma Hermíticas (2)

$$\{\hat{v}\} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ (d\hat{v}/d\xi)_1 \\ \hat{v}_2 \\ (d\hat{v}/d\xi)_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dX} &= \frac{2}{L} \\ \frac{dv}{dX} &= \frac{dv}{d\xi}\frac{d\xi}{dX} = \frac{2}{L}\frac{dv}{d\xi} \\ \frac{d^2v}{dX^2} &= \frac{4}{L^2}\frac{d^2v}{dX\xi^2} \end{aligned}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & \frac{L}{2}N_2 & N_3 & \frac{L}{2}N_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ (d\hat{v}/dX)_1 \\ \hat{v}_2 \\ (d\hat{v}/dX)_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a_e}} \rightarrow \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{N}\mathbf{a_e}$$

34

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Deformaciones

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\hat{\chi}_Z\} = \left[\frac{d^2}{dX^2}\right]\{\hat{v}\} = \left[\frac{4}{L^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\right]\left[N_1 \quad \frac{L}{2}N_2 \quad N_3 \quad \frac{L}{2}N_4\right]\begin{Bmatrix}\hat{v}_1\\ (d\hat{v}/dX)_1\\ \hat{v}_2\\ (d\hat{v}/dX)_2\end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d^2v}{dX^2} = \frac{4}{L^2}\frac{d^2v}{dX\xi^2}}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{4}{L^2}\frac{d^2N_1}{d\xi^2} \quad \frac{2}{L}\frac{d^2N_2}{d\xi^2} \quad \frac{4}{L^2}\frac{d^2N_3}{d\xi^2} \quad \frac{2}{L}\frac{d^2N_4}{d\xi^2}\right]}_{\mathbf{B}}\underbrace{\begin{Bmatrix}\hat{v}_1\\ (d\hat{v}/dX)_1\\ \hat{v}_2\\ (d\hat{v}/dX)_2\end{Bmatrix}}_{\mathbf{a_e}} = \mathbf{Ba_e}$$

$$\overbrace{\left[\frac{6\xi}{L^2} \quad \frac{-1+3\xi}{L} \quad -\frac{6\xi}{L^2} \quad \frac{1+3\xi}{L}\right]}$$

35 35

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Deformaciones virtuales

$$\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\delta\hat{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{L^2} & \frac{-1+3\xi}{L} & -\frac{6\xi}{L^2} & \frac{1+3\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\hat{v}_1 \\ \left(d(\delta\hat{v})/dX\right)_1 \\ \delta\hat{v}_2 \\ \left(d(\delta\hat{v})/dX\right)_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}$$

- Esfuerzos

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \leftrightarrow \quad \{\hat{M}_Z\} = [EI_Z]\{\hat{\chi}_Z\}$$

36 36

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Matriz de rigidez

$$\int_0^L \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,dX = \int_{-1}^{1} \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathbf{a}_\mathbf{e}\,\frac{L}{2}\,d\xi =$$

$$= \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} \dfrac{6\xi}{L^2} \\ \dfrac{-1+3\xi}{L} \\ -\dfrac{6\xi}{L^2} \\ \dfrac{1+3\xi}{L} \end{Bmatrix} \left[EI_Z\right] \begin{bmatrix} \dfrac{6\xi}{L^2} & \dfrac{-1+3\xi}{L} & -\dfrac{6\xi}{L^2} & \dfrac{1+3\xi}{L} \end{bmatrix} \frac{L}{2}\,d\xi\,\mathbf{a}_\mathbf{e} = \ldots$$

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Matriz de rigidez

$$\ldots = \delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{T}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{6EI_Z}{L^2} & -\frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{6EI_Z}{L^2} \\ \frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4EI_Z}{L} & -\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2EI_Z}{L} \\ -\frac{12EI_Z}{L^3} & -\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{12EI_Z}{L^3} & -\frac{6EI_Z}{L^2} \\ \frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2EI_Z}{L} & -\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4EI_Z}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}\mathbf{a}_{\mathbf{e}} = \delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{T}\mathbf{K}\mathbf{a}_{\mathbf{e}}$$

38 38

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Fuerzas nodales debidas a cargas en el interior del dominio

$$\int_0^L \delta\hat{\mathbf{d}}^T \mathbf{q}\,dX = \int_{-1}^{1} \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{N}^T \mathbf{q}\frac{L}{2}\,d\xi = \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_1(\xi)q_Y(\xi)d\xi \\ \frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_2(\xi)q_Y(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_3(\xi)q_Y(\xi)d\xi \\ \frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_4(\xi)q_Y(\xi)d\xi \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_e} = \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{f}_e$$

$$\boxed{\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & \frac{L}{2}N_2 & N_3 & \frac{L}{2}N_4 \end{bmatrix}}$$

- Si q_Y=cte. → $\mathbf{f}_e = \left\{ \frac{q_Y L}{2} \quad \frac{q_Y L^2}{12} \quad \frac{q_Y L}{2} \quad -\frac{q_Y L^2}{12} \right\}^T$

39 39

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Fuerzas puntuales en los extremos

$$\sum_{i=1}^{2} \delta \mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \cong \delta \hat{v}_1 \overline{F}_{Y1} + \left(\delta \hat{v},_X\right)_1 \overline{M}_{Z1} + \delta \hat{v}_2 \overline{F}_{Y2} + \left(\delta \hat{v},_X\right)_2 \overline{M}_{Z2} =$$

$$= \underbrace{\left\{ \delta \hat{v}_1 \quad \left(\delta \hat{v},_X\right)_1 \quad \delta \hat{v}_2 \quad \left(\delta \hat{v},_X\right)_2 \right\}}_{\delta \mathbf{a}_e^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{F}_{Y1} \\ \overline{M}_{Z1} \\ \overline{F}_{Y2} \\ \overline{M}_{Z2} \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{F}}} = \delta \mathbf{a}_e^T \, \overline{\mathbf{F}}$$

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Funcional de trabajos virtuales de la barra

$$\delta\Pi^{(e)} = \int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dX - \int_0^L \delta\mathbf{d}^T \mathbf{q}\, dX \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T - \sum_{i=1}^{2} \delta\mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \cong$$

$$\cong \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{f}_\mathbf{e} - \delta\mathbf{a}_e^T \overline{\mathbf{F}} = \delta\mathbf{a}_e^T \left(\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}}\right)$$

- Relación de rigidez de la barra (cond. equilibrio)

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$$

41 41

Discretización por elementos finitos

El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Analogía con el problema de flexión (plano XZ)

Plano XY	Plano XZ
v	w
φ_Z $(=dv/dX)$	φ_Y $(=-dw/dX)$
M_Z	M_Y
EI_Z	EI_Y
q_Y	q_Z
$\overline{F}_{Yi}$	$\overline{F}_{Zi}$
$\overline{M}_{Zi}$	$\overline{M}_{Yi}$

42 42

Discretización por elementos finitos
El problema de la barra sometida a flexión (plano XY)

- Resultados del problema de flexión (plano YZ)

(basados en la analogía; con las mismas funciones de forma)

$$\mathbf{a}_e = \left\{ \hat{w}_1 \quad \left(-\hat{w},_X\right)_1 \quad \hat{w}_2 \quad \left(-\hat{w},_X\right)_2 \right\}^T$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \left\{ \overline{F}_{Z1} \quad \overline{M}_{Y1} \quad \overline{F}_{Z2} \quad \overline{M}_{Y2} \right\}^T$$

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_1(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ -\frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_2(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_3(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ -\frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_4(\xi) q_Y(\xi) d\xi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_Y}{L^3} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} & -\frac{6EI_Y}{L^2} \\ -\frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{4EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{2EI_Y}{L} \\ -\frac{12EI_Y}{L^3} & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ -\frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{2EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{4EI_Y}{L} \end{bmatrix}$$

43 43

Resumen de resultados

- **Barra de pórtico plano**: axil + flexión XY

$$\mathbf{a}_e = \{\hat{u}_1 \quad \hat{v}_1 \quad \hat{\varphi}_{Z1} \quad \hat{u}_2 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{\varphi}_{Z2}\}^T \quad \text{siendo:} \quad \hat{\varphi}_{Z1} = (\hat{v},_X)_1 \quad , \quad \hat{\varphi}_{Z2} = (\hat{v},_X)_2$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{F}_{X1} \quad \overline{F}_{Y1} \quad \overline{M}_{Z1} \quad \overline{F}_{X2} \quad \overline{F}_{Y2} \quad \overline{M}_{Z2}\}^T$$

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_1(\xi) q_X(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_2(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_3(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_4(\xi) q_X(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_5(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_6(\xi) q_Y(\xi) d\xi \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3) \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \\ N_4(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_5(\xi) &= \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3) \\ N_6(\xi) &= \frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3) \end{aligned}$$

¡Ojo! Ha cambiado la numeración de funciones de forma

45

Resumen de resultados

- **Barra de pórtico plano**: axil + flexión XY

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4EI_Z}{L} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2EI_Z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3} & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & -\frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2EI_Z}{L} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4EI_Z}{L} \end{bmatrix}$$

Resumen de resultados

- **Barra de emparrillado plano**: torsión + flexión XZ

$$\mathbf{a}_e = \{\hat{w}_1 \quad \hat{\varphi}_{X1} \quad \hat{\varphi}_{Y1} \quad \hat{w}_2 \quad \hat{\varphi}_{X2} \quad \hat{\varphi}_{Y2}\}^T \quad \text{siendo}: \quad \hat{\varphi}_{Y1} = (-\hat{w},_X)_1 \quad , \quad \hat{\varphi}_{Y2} = (-\hat{w},_X)_2$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{F}_{Z1} \quad \overline{M}_{X1} \quad \overline{M}_{Y1} \quad \overline{F}_{Z2} \quad \overline{M}_{X2} \quad \overline{M}_{Y2}\}^T$$

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_2(\xi) q_Z(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_1(\xi) m_X(\xi) d\xi \\ -\frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_3(\xi) q_Z(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_5(\xi) q_Z(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_4(\xi) m_X(\xi) d\xi \\ -\frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_6(\xi) q_Z(\xi) d\xi \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3) \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \\ N_4(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_5(\xi) &= \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3) \\ N_6(\xi) &= \frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3) \end{aligned}$$

47

Resumen de resultados

- **Barra de emparrillado plano**: torsión + flexión XZ

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} \\ -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} \end{bmatrix}$$

48

Resumen de resultados

□ Barra de estructura de tipo general

$$\mathbf{a}_e = \{\hat{u}_1 \quad \hat{v}_1 \quad \hat{w}_1 \quad \hat{\varphi}_{X1} \quad \hat{\varphi}_{Y1} \quad \hat{\varphi}_{Z1} \quad \hat{u}_2 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{w}_1 \quad \hat{\varphi}_{X2} \quad \hat{\varphi}_{Y2} \quad \hat{\varphi}_{Z2}\}^T$$

$$\text{siendo:} \quad \hat{\varphi}_{Y1} = (-\hat{w},_X)_1 \quad , \quad \hat{\varphi}_{Z1} = (\hat{v},_X)_1 \quad , \quad \hat{\varphi}_{Y2} = (-\hat{w},_X)_2 \quad , \quad \hat{\varphi}_{Z2} = (\hat{v},_X)_2$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{F}_{X1} \quad \overline{F}_{Y1} \quad \overline{F}_{Z1} \quad \overline{M}_{X1} \quad \overline{M}_{Y1} \quad \overline{M}_{Z1} \quad \overline{F}_{X2} \quad \overline{F}_{Y2} \quad \overline{F}_{Z2} \quad \overline{M}_{X2} \quad \overline{M}_{Y2} \quad \overline{M}_{Z2}\}^T$$

Resumen de resultados

- **Barra de estructura de tipo general**

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{e1} \\ \mathbf{f}_{e2} \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}_{e1} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_1(\xi) q_X(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_2(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_2(\xi) q_Z(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_1(\xi) m_X(\xi) d\xi \\ -\frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_3(\xi) q_Z(\xi) d\xi \\ \frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_3(\xi) q_Y(\xi) d\xi \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}_{e1} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_4(\xi) q_X(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_5(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_5(\xi) q_Z(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_4(\xi) m_X(\xi) d\xi \\ -\frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_6(\xi) q_Z(\xi) d\xi \\ \frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1} N_6(\xi) q_Y(\xi) d\xi \end{bmatrix}$$

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \qquad N_2(\xi) = \frac{1}{4}\left(2-3\xi+\xi^3\right) \qquad N_3(\xi) = \frac{1}{4}\left(1-\xi-\xi^2+\xi^3\right)$$

$$N_4(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \qquad N_5(\xi) = \frac{1}{4}\left(2+3\xi-\xi^3\right) \qquad N_6(\xi) = \frac{1}{4}\left(-1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)$$

50

Resumen de resultados

- **Barra de estructura de tipo general**

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_Z}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_Z}{L} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L}
\end{bmatrix}
$$

Precisión de los resultados

- El planteamiento anterior proporciona **los valores exactos** de la solución **en los nodos**.
  - Esto no es habitual en el MEF
  - Se debe a haber utilizado **la función de forma natural** (solución de la parte homogénea de la ecuación diferencial que gobierna el problema).
  - Esta propiedad de la función de forma natural se cumple en todos los elementos finitos unidmensionales (rectos o curvos).
    - Esta propiedad la citan y utilizan numerosos autores, por ejemplo
      - HINTON, E. Y OWEN, D.R.J. *An Introduction to Finite Element Computations*. Pinerigde Press Ltd, 1979. Pág. 131.
      - OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. Pág. 36.
      - YAMADA, Y. Y EZAWA, Y. "On curved finite elements for the analysis of circular arches". *Int. J. Numer. Meth. Eng*. **11**: 1635-1651, 1977
    - Para su demostración refieren a
      - TONG, P. "Exact solutions of certain problems by the finite elements method", *AIAAJ*, **7**: 178-180, 1969
      - ZIENKIEWICZ, O.C. Y MORGAN, K. *Finite Element and Approximations*. Wiley, 1980

53

Precisión de los resultados

- Precisión de los desplazamientos y esfuerzos en puntos del interior del elemento:
  - **No son exactos**: su valor depende de la interpolación, que ni siquiera tiene porqué ser un polinomio del mismo orden que la solución exacta.

    $$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{N}\mathbf{a}_e \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{a}_e \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e$$

  - Esto, en la práctica profesional, **no es un problema**: basta colocar un nodo donde sea necesario conocer valores exactos.

54

Precisión de los resultados

- **Puntos óptimos para el cálculo de esfuerzos.** Se puede demostrar[1] que:
  - Si la ley de esfuerzos exacta –que, en general, **no** se conoce- es un polinomio de grado *n*, y la aproximación por elementos finitos uno de grado *n*-1, los valores de esta última en los puntos de cuadratura de Gauss-Legendre de orden *n* son exactos.
  - Si la diferencia entre las leyes exacta y aproximada es de más de un grado, los valores de la última en los puntos de cuadratura citados aproximan un término más del desarrollo en serie de Taylor de la ley exacta.

[1] OÑATE (1992. pág. 115 y s.s.)

55

Precisión de los resultados

Casos más habituales

- **Puntos óptimos para el cálculo de esfuerzos**.

  Como consecuencia de lo anterior:
  - Axiles o torsores
    - La interpolación adoptada origina leyes de esfuerzos constantes.
    - Si las leyes reales son constantes o lineales (q_X o m_X nulas o constantes), el valor en el centro del elemento es exacto.
    - En cualquier otro caso, es el más aproximado.
  - Flectores
    - La interpolación adoptada origina leyes de esfuerzos lineales.
    - Si las leyes reales son constantes, lineales o cuadráticas (q_Y o q_Z nulas o constantes), el valor en los puntos de Gauss para la cuadratura de orden 2 es exacto.
    - En cualquier otro caso, es el más aproximado.
  - Con independencia de lo anterior, **por equilibrio se puede conocer el valor exacto** de cualquier esfuerzo en cualquier punto.

56

Sistema global de ecuaciones. Ensamblaje

Sistema global de ecuaciones: ensamblaje

- Hasta aquí hemos obtenido, para cada barra de la estructura, una relación de rigidez -¡en ejes locales de barra!- de la forma

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^b & \mathbf{K}_{12}^b \\ \mathbf{K}_{21}^b & \mathbf{K}_{22}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^b \\ \mathbf{a}_2^b \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{e}1}^b \\ \mathbf{f}_{\mathbf{e}2}^b \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_1^b \\ \overline{\mathbf{F}}_2^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

  - El superíndice *b* se introduce para recordar que la relación corresponde a la barra *b*.

- El siguiente paso es expresar estas relaciones en ejes generales, obteniendo

$$\mathbf{K}'\mathbf{a}'_\mathbf{e} - \mathbf{f}'_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}}' = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}'^b_{11} & \mathbf{K}'^b_{12} \\ \mathbf{K}'^b_{21} & \mathbf{K}'^b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'^b_1 \\ \mathbf{a}'^b_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}'^b_{\mathbf{e}1} \\ \mathbf{f}'^b_{\mathbf{e}2} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{F}}'^b_1 \\ \overline{\mathbf{F}}'^b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

  - La prima indica que la relación está en ejes generales

58

Sistema global de ecuaciones: ensamblaje

- Cambio de sistema de referencia

$$\mathbf{a'}_i^b = \mathbf{T}^b \mathbf{a}_i^b \quad , \quad \mathbf{f'}_{\mathbf{e}i}^b = \mathbf{T}^b \mathbf{f}_{\mathbf{e}i}^b \quad , \quad \overline{\mathbf{F}}'^b_i = \mathbf{T}^b \overline{\mathbf{F}}_i^b \quad , \quad \mathbf{K}_{ij}^b = \mathbf{T}^b \mathbf{K}_{ij}^b \left(\mathbf{T}^b\right)^T$$

siendo

$$\mathbf{T}_{Pórtico}^b = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{Emparrillado}^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{General}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i'} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i'} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i'} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j'} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j'} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j'} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k'} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k'} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{i}\cdot\mathbf{i'} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i'} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i'} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j'} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j'} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j'} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k'} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k'} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k'} \end{bmatrix}$$

donde β (problemas planos) se mide desde el semieje X' global hasta el semieje X de la barra, en sentido contrario a las agujas del reloj.

Sistema global de ecuaciones: ensamblaje

- Ensamblaje barra b (*i-j*)

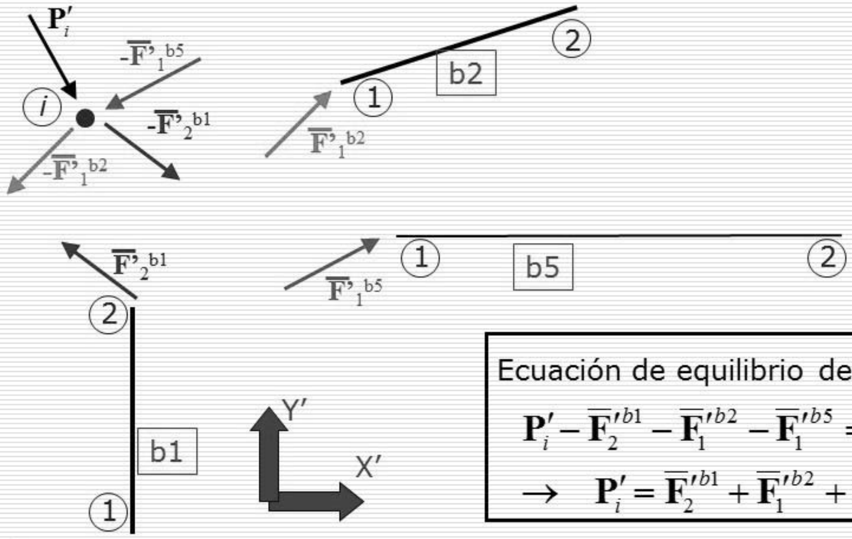
$$
\begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ j \to \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{F}}'^{b}_{1} \\ \overline{\mathbf{F}}'^{b}_{2} \end{Bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ = \end{array}
\begin{array}{cc} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ \downarrow & \downarrow \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \mathbf{K}'^{b}_{11} & \mathbf{K}'^{b}_{12} \\ \mathbf{K}'^{b}_{21} & \mathbf{K}'^{b}_{22} \end{bmatrix}} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'^{b}_{1} \\ \mathbf{a}'^{b}_{2} \end{Bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ - \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{f}'^{b}_{e1} \\ \mathbf{f}'^{b}_{e2} \end{Bmatrix} \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \begin{Bmatrix} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{F}}'^{b}_{1} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{F}}'^{b}_{2} \\ \vdots \\ \\ \end{Bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ = \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{i} & & \mathbf{j} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbf{K}'^{b}_{11} & & \mathbf{K}'^{b}_{12} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \mathbf{K}'^{b}_{21} & & \mathbf{K}'^{b}_{22} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_{1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{i} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{j} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{N} \end{Bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ + \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \begin{Bmatrix} \\ \vdots \\ \mathbf{f}'^{b}_{e1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}'^{b}_{e2} \\ \vdots \\ \\ \end{Bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \mathbf{i} \\ \\ \leftarrow \mathbf{j} \\ \\ \\ \end{array}
$$

60

Sistema global de ecuaciones: ensamblaje

- Interpretación del sistema de ecuaciones



Ecuación de equilibrio del nudo

$$\mathbf{P}'_i - \overline{\mathbf{F}}'^{b1}_2 - \overline{\mathbf{F}}'^{b2}_1 - \overline{\mathbf{F}}'^{b5}_1 = \mathbf{0}$$

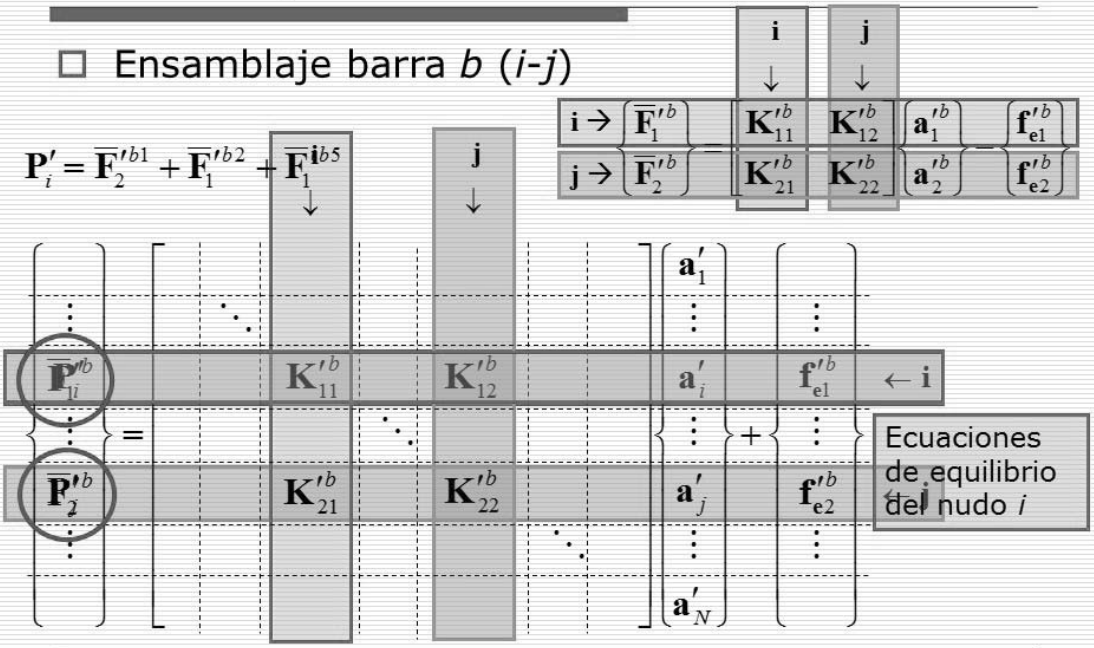
$$\rightarrow \quad \mathbf{P}'_i = \overline{\mathbf{F}}'^{b1}_2 + \overline{\mathbf{F}}'^{b2}_1 + \overline{\mathbf{F}}'^{b5}_1$$

61

Sistema global de ecuaciones: ensamblaje

- Ensamblaje barra *b* (*i*-*j*)

$$\mathbf{P}'_i = \overline{\mathbf{F}}_2'^{b1} + \overline{\mathbf{F}}_1'^{b2} + \overline{\mathbf{F}}_1'^{b5}$$



Un punto de vista alternativo:
el Cálculo Matricial de Estructuras

Un punto de vista alternativo: el cálculo matricial de estructuras

En cualquier barra, si se conocen:

- La geometría inicial
- Las fuerzas exteriores en el interior de la barra
- Los desplazamientos de los extremos
- Las fuerzas en los extremos de la barra (en equilibrio con las anteriores)

se puede calcular:

- Los esfuerzos en cualquier punto intermedio C, por equilibrio del tramo 1-C o del tramo C-2.
- Los desplazamientos del punto C, mediante las fórmulas de Navier-Bresse (o los teoremas de Mohr si se trata de una barra recta de sección constante).

64

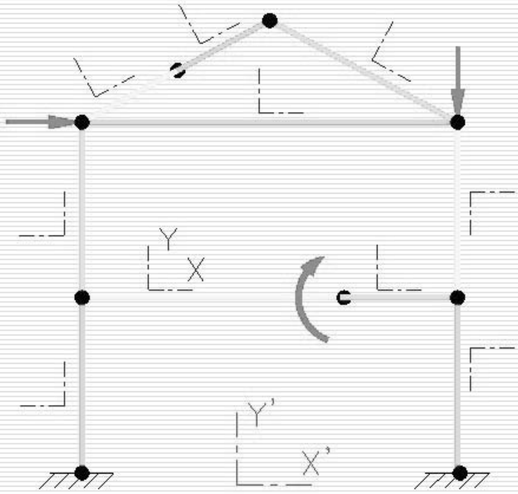
Un punto de vista alternativo: el cálculo matricial de estructuras

Así pues, para resolver una estructura de barras basta determinar:

- Los desplazamientos en los extremos de cada una de las barras
- Las fuerzas en los mismos puntos

Para hallarlos, sabemos que:

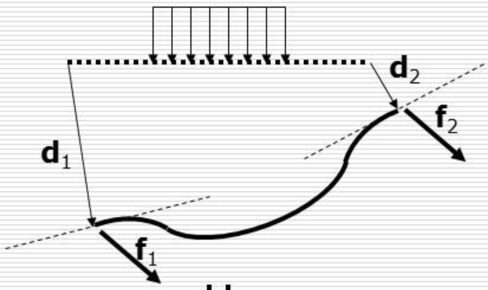
- Los desplazamientos de cada extremo de barra coinciden con los del nodo al que está unido.
- Todas las barras deben estar en equilibrio.
- Todos los nodos deben estar en equilibrio.



65

Un punto de vista alternativo: el cálculo matricial de estructuras

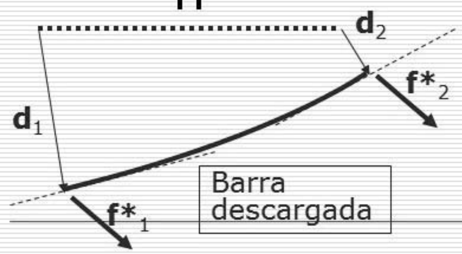
En cualquier barra en equilibrio, las fuerzas exteriores y los desplazamientos de los extremos se relacionan mediante:



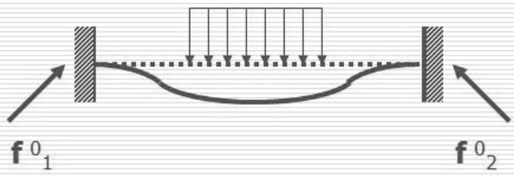
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^0 \\ \mathbf{f}_2^0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}^*_1 \\ \mathbf{f}^*_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^0 \\ \mathbf{f}_2^0 \end{Bmatrix}$$

=



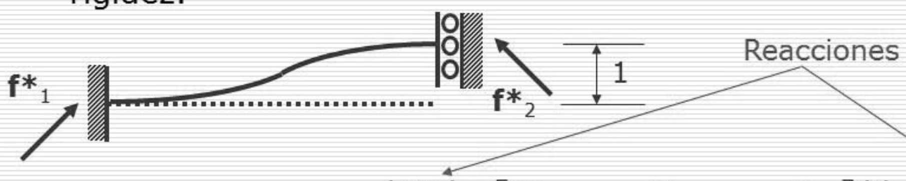
+



Un punto de vista alternativo: el cálculo matricial de estructuras

Determinación de la matriz de rigidez:

- ☐ Resolviendo *N* problemas de desplazamiento impuesto, sin cargas exteriores. En cada uno se impone el valor 1 a uno de los desplazamientos de los extremos y 0 a todos los demás. Proporciona una columna de la matriz de rigidez.

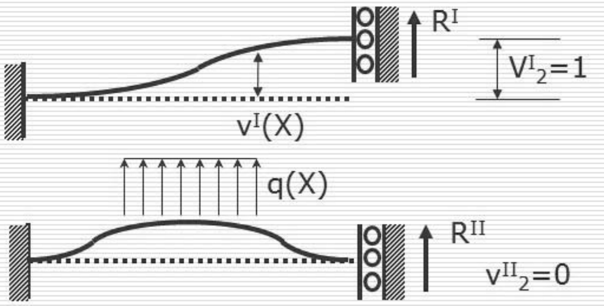


$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}^*_1 \\ \mathbf{f}^*_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} f^*_1 \\ \vdots \\ f^*_j \\ \vdots \\ f^*_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,j} & \cdots & K_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{j,1} & \cdots & K_{j,j} & \cdots & K_{j,N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N,1} & \cdots & K_{N,1} & \cdots & K_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{1,j} \\ \vdots \\ K_{j,j} \\ \vdots \\ K_{N,j} \end{Bmatrix}$$

Un punto de vista alternativo: el cálculo matricial de estructuras

Determinación de las fuerzas de empotramiento perfecto

- Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti



$v^I(X)$ es el desplazamiento de la viga descargada sometida a un desplazamiento impuesto v_2=1.

Es decir, es la solución de la parte homogénea de la ecuación diferencial correspondiente, con las constantes determinadas para que v^2=1 y los restantes desplazamientos nodales nulos.

Es la función de forma adoptada correspondiente al desplazamiento dual de R^{II}.

$$\int_0^L q(X)v^I(X)dX + R^{II}\underbrace{v_2^I}_{=1} = R^I\underbrace{v_2^{II}}_{=0}$$

$$R^{II} = -\int_0^L q(X)v^I(X)dX$$

$$\boxed{\mathbf{f}^0 = -\mathbf{f}_e}$$

68

Un punto de vista alternativo: el cálculo matricial de estructuras

Relación de rigidez de la estructura y postproceso

- Las relaciones de rigidez obtenidas implican implican el equilibrio de la barra.
- Los desplazamientos de los extremos de las barras se identifican con los de los nodos.
- Les ecuaciones de equilibrio de nudo se imponen mediante el ensamblaje convencional del sistema global de ecuaciones, como hemos visto en un punto anterior.
- Las condiciones de contorno cinemáticas se imponen como vimos en el tema 3.
- La resolución del sistema permite obtener los desplazamientos de todos los nodos.
- Luego, el análisis de la relación de rigidez de cada barra permite obtener las fuerzas en los extremos de la misma.

¡El mismo proceso que vimos en en MEF!

Un punto de vista alternativo: el cálculo matricial de estructuras

Coincidencia de la relación de rigidez

- Método Matricial de Cálculo de Estructuras

  $$\mathbf{K}_{MAT}\,\mathbf{d}+\mathbf{f}^{0}=\mathbf{f}$$

- Método de los elementos finitos

  $$\mathbf{K}_{MEF}\,\mathbf{a}_{\mathbf{e}}-\mathbf{f}_{\mathbf{e}}-\overline{\mathbf{F}}=\mathbf{0}$$

La solución del Método Matricial es exacta en los nodos. Así pues, estos resultados justifican que la solución por el MEF adoptada también lo es.

- Pero **d**=**a**$_e$ y $\mathbf{f}=\overline{\mathbf{F}}$; es sólo una cuestión de notación en cada método.
- Y, si en el MEF se adoptan las funciones de forma naturales, las propiedades vistas anteriormente exigen

  $$\mathbf{K}_{MAT}=\mathbf{K}_{MEF} \qquad \mathbf{f}^{0}=-\mathbf{f}_{\mathbf{e}}$$

  por lo que la relación obtenida es la misma en ambos casos.

Se comprueba fácilmente comparando los resultados anteriores con los que figuran en cualquier libro de Cálculo Matricial de Estructuras.

70

Bibliografía

Bibliografía

- OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (2.1 a 2.4, 2.8 a 2.9, 4.1 a 4.3)
- HINTON, E. Y OWEN, D.R.J. *An Introduction to Finite elements computations*. Pinerigde Press, Swansea, 1979. (5.2, 5.3)
- CELIGÜETA, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.). San Sebastián, 2011. (capítulo 3 y 9.1 a 9.3)
- SAEZ-BENITO, J.M. *Cálculo Matricial de Estructuras*. FEIN, Madrid, 1975
- CASANOVA, J. *Introducción a la Mecánica del Sólido Deformable.* Valencia, 2011. <https://poliformat.upv.es/access/content/group/GRA_12821_2014/Teor%C3%ADa/LibroCompleto_imp.pdf > [Consulta: 13/08/14]
- CASANOVA, J. *Fundamentos de Elasticidad Teórica*. Servicio de Publicaciones de la UPV, Valencia, 1993. Pág. 138 y ss.

72

Bibliografía

- YAMADA, Y. Y EZAWA, Y. On curved finite elements for the analysis of circular arches. *Int. J. Numer. Meth. Eng*. **11**: 1635-1651, 1977
- TONG, P. Exact solutions of certain problems by the finite elements method, *AIAAJ*, **7**: 178-180, 1969
- ZIENKIEWICZ, O.C. Y MORGAN, K. *Finite Element and Approximations*. Wiley, 1980
- LIVESLEY, R.K. *Métodos matriciales para cálculo de estructuras*. Blume, Madrid, 1970
- PRZEMIENIECKI, J.S. *Theory of Matrix Structural Analysis.* Dover, New york, 1985
- ALBIGES, M., COIN, A. Y JOURNET, H. *Estudio de las estructuras por los métodos matriciales*. Editores Técnicos Asociados S.A., Barcelona, 1971

Tema 08:

Estructuras de barras por el Método de los Elementos Finitos (II) —hipótesis de Timoshenko—

Introducción

Introducción

- Objetivos del tema:
  - Establecer la escritura matricial del TTV para la barra basada en la teoría de Timoshenko (flexión) y la teoría aproximada de la torsión no uniforme
  - Observar que en lo relativo a extensión y a torsión no hay diferencias con el planteamiento del tema anterior.
  - Formular por el MEF la respuesta de flexión mediante elementos lagrangianos lineales.
  - Observar el problema de bloqueo y describir los principales procedimientos para resolverlo
  - Formular por el MEF la respuesta de flexión mediante la función de forma natrual (solución exacta, libre de bloqueo).

3

Formulación matricial de TTV
(hipótesis de Timoshenko y de Coulomb)

Formulación matricial del TTV (hip. Timoshenko y Coulomb)

- El TTV para un estructura de barras (teoría de Navier-Bernoulli –flexión- y aproximada de la torsión no uniforme[1])

$$\delta\Pi' = \sum_{i=1}^{N} \delta\Pi'^{(e)} = 0 \qquad \forall\, \delta\mathbf{d} \in \mathscr{A}$$

$$\delta\Pi'^{(e)} = \delta\Pi^{(e)} + \text{cambio SDR}$$

> $\delta\Pi^{(e)}$ es un escalar, tiene el mismo valor en cualquier SDR.
> $\delta\Pi'^{(e)}$ es el mismo escalar, con los factores que los forman expresados en otro SDR.

$$\begin{aligned}\delta\Pi^{(e)} = {} & \int_0^L \left\{\delta\varepsilon\, N + \delta\chi_Z\, M_Z + \delta\chi_Y\, M_Y + \delta\gamma_{XY}\, V_Y + \delta\gamma_{XZ}\, V_Z + \delta\theta_X\, M_T\right\} dX - \\ & - \int_0^L \left\{q_X\, \delta u + q_Y\, \delta v + q_Z\, \delta w + m_X\, \delta\varphi_X + \cancelto{0}{m_Y\, \delta\varphi_Y} + \cancelto{0}{m_Z\, \delta\varphi_Z}\right\} dX - \\ & - \left\{\delta u_1 \overline{F}_{X1} + \delta v_1 \overline{F}_{Y1} + \delta w_1 \overline{F}_{Z1} + \delta\varphi_{X1} \overline{M}_{X1} + \delta\varphi_{Y1} \overline{M}_{Y1} + + \delta\varphi_{Z1} \overline{M}_{Z1}\right\} - \\ & - \left\{\delta u_2 \overline{F}_{X2} + \delta v_2 \overline{F}_{Y2} + \delta w_2 \overline{F}_{Z2} + \delta\varphi_{X2} \overline{M}_{X2} + \delta\varphi_{Y2} \overline{M}_{Y2} + + \delta\varphi_{Z2} \overline{M}_{Z2}\right\}\end{aligned}$$

[1] Casanova (2011, pág. 226 y ss.)

5

Formulación matricial del TTV (hip. Timoshenko y Coulomb)

- Expresión matricial de $\delta\Pi^{(e)}$

$$\int_0^L \{\delta\varepsilon\, N + \delta\chi_Z\, M_Z + \delta\chi_Y\, M_Y + \delta\gamma_{XY}\, V_Y + \delta\gamma_{XZ}\, V_Z + \delta\varphi\, M_T\} dX = \int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\, \boldsymbol{\sigma}\, dX$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \{\delta\varepsilon \quad \delta\gamma_{XY} \quad \delta\gamma_{XZ} \quad \delta\theta_X \quad \delta\chi_Y \quad \delta\chi_Z\}^T$$

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \{N \quad V_Y \quad V_Z \quad M_T \quad M_Y \quad M_Z\}^T$$

$$\int_0^L \{q_X\, \delta u + q_Y\, \delta v + q_Z\, \delta w + m_X\, \delta\varphi_X\} dX = \int_0^L \delta\mathbf{d}^T\, \mathbf{q}\, dX$$

$$\delta\mathbf{d} = \{\delta u \quad \delta v \quad \delta w \quad \delta\varphi_X \quad \delta\varphi_y \quad \delta\varphi_Z\}^T$$

$$\delta\mathbf{q} = \{q_X \quad q_Y \quad q_Z \quad m_X \quad \cancelto{0}{m_Y} \quad \cancelto{0}{m_Z}\}^T = \{q_X \quad q_Y \quad q_Z \quad m_X \quad 0 \quad 0\}^T$$

6

Formulación matricial del TTV (hip. Timoshenko y Coulomb)

- Expresión matricial de $\delta\Pi^{(e)}$

$$\left\{\delta u_i \overline{F}_{Xi} + \delta v_i \overline{F}_{Yi} + \delta w_i \overline{F}_{Zi} + \delta\varphi_{Xi}\overline{M}_{Xi} + \delta\varphi_{Yi}\overline{M}_{Yi} + \delta\varphi_{Zi}\overline{M}_{Zi}\right\} = \delta\mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \qquad i = 1,2$$

$$\delta\mathbf{d}_i = \left\{\delta u_i \quad \delta v_i \quad \delta w_i \quad \delta\varphi_{Xi} \quad \delta\varphi_{Yi} \quad \delta\varphi_{Zi}\right\}^T$$

$$\overline{\mathbf{F}}_i = \left\{\overline{F}_{Xi} \quad \overline{F}_{Yi} \quad \overline{F}_{Zi} \quad \overline{M}_{Xi} \quad \overline{M}_{Yi} \quad \overline{M}_{Zi}\right\}^T$$

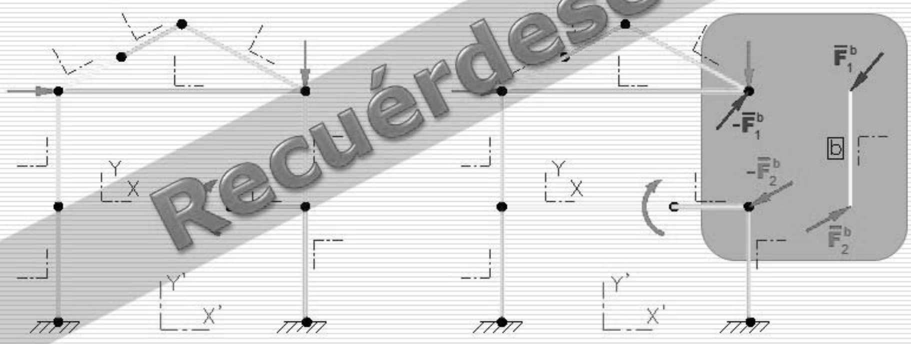
  - Finalmente

$$\begin{aligned}
\delta\Pi^{(e)} &= \int_0^L \left\{\delta\varepsilon\, N + \delta\chi_Z\, M_Z + \delta\chi_Y\, M_Y + \delta\gamma_{XY}\, V_Y + \delta\gamma_{XZ}\, V_Z + \delta\theta_X\, M_T\right\} dX - \\
&- \int_0^L \left\{q_X\, \delta u + q_Y\, \delta v + q_Z\, \delta w + m_X\, \delta\varphi_X\right\} dX - \\
&- \left\{\delta u_1 \overline{F}_{X1} + \delta v_1 \overline{F}_{Y1} + \delta w_1 \overline{F}_{Z1} + \delta\varphi_{X1}\overline{M}_{X1} + \delta\varphi_{Y1}\overline{M}_{Y1} + \delta\varphi_{Z1}\overline{M}_{Z1}\right\} - \\
&- \left\{\delta u_2 \overline{F}_{X2} + \delta v_2 \overline{F}_{Y2} + \delta w_2 \overline{F}_{Z2} + \delta\varphi_{X2}\overline{M}_{X2} + \delta\varphi_{Y2}\overline{M}_{Y2} + \delta\varphi_{Z2}\overline{M}_{Z2}\right\} = \\
&= \int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\, \boldsymbol{\sigma}\, dX - \int_0^L \delta\mathbf{d}^T\, \mathbf{q}\, dX - \sum_{i=1}^{2} \delta\mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i
\end{aligned}$$

7

Formulación matricial del TTV (hip. Timoshenko y Coulomb)

- Aclaración: significado de las fuerzas $\overline{\mathbf{F}}_i$
  - $\overline{\mathbf{F}}_i$ son las fuerzas que actúan en los extremos de la barra; en una estructura, **las fuerzas que ejerce sobre una barra aislada el resto de ésta**.



Recuérdese

8

Formulación matricial del TTV (hip. Timoshenko y Coulomb)

- Relaciones cinemáticas (teoría de Timoshenko-Coulomb)

$$\varepsilon = \frac{du}{dX}$$

$$\gamma_{XY} = -\varphi_Z + \frac{dv}{dX}$$

$$\gamma_{XZ} = \varphi_Y + \frac{dw}{dX}$$

$$\chi_Y = \frac{d\varphi_Y}{dX}$$

$$\chi_Z = \frac{d\varphi_Z}{dX}$$

$$\theta = \frac{d\varphi_X}{dX}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{XZ} \\ \theta \\ \chi_Y \\ \chi_Z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{dX} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dX} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dX} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dX} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dX} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_X \\ \varphi_Y \\ \varphi_Z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

9

Formulación matricial del TTV (hip. Timoshenko y Coulomb)

Ecuaciones constitutivas
(teoría de Timoshenko-Coulomb)

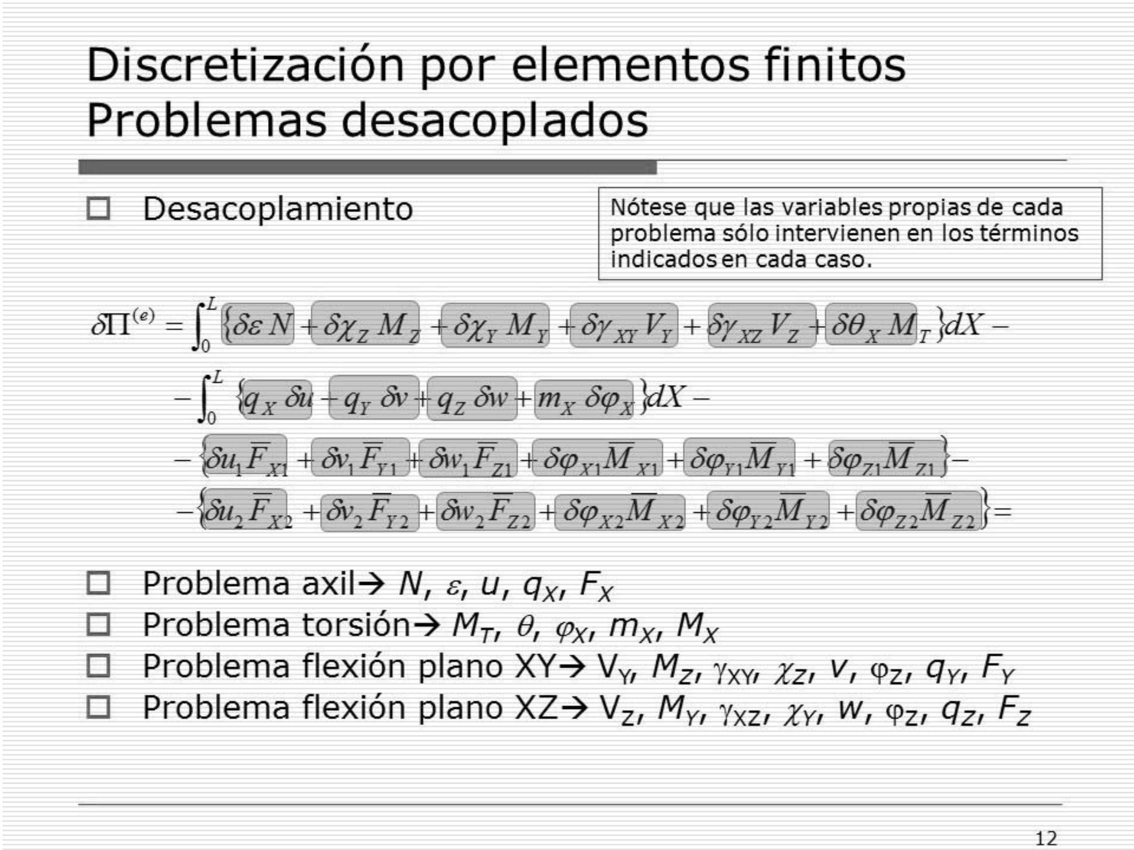
$$
\begin{aligned}
N &= \varepsilon EA \\
V_Y &= \gamma_{XY} GA_{VY} \\
V_Z &= \gamma_{XZ} GA_{VZ} \\
M_Y &= EI_Y \chi_Y \\
M_Z &= EI_Z \chi_Z \\
M_T &= GJ\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} N \\ V_Y \\ V_Z \\ M_T \\ M_Y \\ M_Z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & GA_{VY} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & GA_{VZ} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & EI_Y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_Z
\end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}
\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{XZ} \\ \theta \\ \chi_Y \\ \chi_Y \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}
$$

- J = módulo de torsión
- Hipótesis: centroide y centro de esfuerzos cortantes coinciden.

Discretización por elementos finitos

Problemas desacoplados



Discretización por elementos finitos Problemas desacoplados

- En conclusión: la respuesta más general de una viga se estudia mediante **cuatro problemas desacoplados**.
- Los problemas de **extensión** (axil) y de **torsión** están gobernados por las mismas ecuaciones del tema anterior → la solución allí obtenida sigue siendo válida
- Quedan por analizar
  - La barra sometida a flexión en el plano XY
  - La barra sometida a flexión en el plano XZ, por extrapolación de los resultados anteriores
- Nos centraremos en la barra recta de sección constante.

13

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Desplazamientos y deformaciones

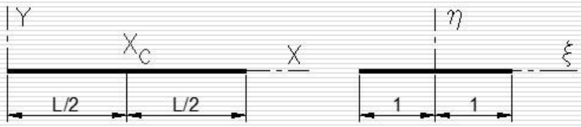
$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} v(X) \\ \varphi_Z(X) \end{Bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{Bmatrix} \gamma_{XY} \\ \chi_Z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{d}{dX} & -1 \\ 0 & \dfrac{d}{dX} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v \\ \varphi_Z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

- Condiciones a cumplir por la función de forma:
  - Deformaciones → derivadas primeras de **d**
    - Deben existir las derivadas primeras ≠0
→ funciones de interpolación al menos lineales
    - Se requiere continuidad C^0 en el contorno
- Las cumple una interpolación **lineal**

15

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Coordenadas normalizadas



$$\xi = 2\frac{X - X_C}{L} \quad \rightarrow \quad d\xi = 2\frac{dX}{L}$$

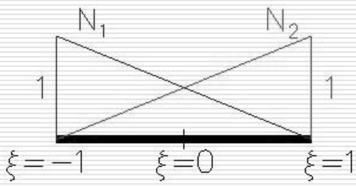
$$dX = \frac{L}{2}d\xi$$

$$\int_0^L f(X)dX = \int_{-1}^{1} g(\xi)\frac{L}{2}d\xi$$

- Interpolación: polinomios de Lagrange de primer orden (2 nodos)

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$



16

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Interpolación:

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\varphi}_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\varphi}_{Z1} \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\varphi}_{Z2} \end{Bmatrix}$$

- Deformaciones

$$\frac{d\xi}{dX} = \frac{2}{L}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{XY} \\ \hat{\chi}_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dX} & -1 \\ 0 & \dfrac{d}{dX} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\varphi}_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\dfrac{2}{L}} \dfrac{d}{d\xi} & -1 \\ 0 & \dfrac{2}{L}\dfrac{d}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\varphi}_{Z1} \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\varphi}_{Z2} \end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{2}(1-\xi) & \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{2}(1-\xi) \\ 0 & -\dfrac{1}{L} & 0 & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\varphi}_{Z1} \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\varphi}_{Z2} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a_e}} = \mathbf{B}\mathbf{a_e}$$

17

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Deformaciones virtuales

$$\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \delta\hat{\gamma}_{XY} \\ \delta\hat{\chi}_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{2}(1-\xi) & \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{2}(1-\xi) \\ 0 & -\dfrac{1}{L} & 0 & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\hat{v}_1 \\ \delta\hat{\varphi}_{Z1} \\ \delta\hat{v}_2 \\ \delta\hat{\varphi}_{Z2} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\,\delta\mathbf{a}_\mathbf{e}$$

- Esfuerzos

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \rightarrow \quad \{\hat{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \hat{V}_{XY} \\ \hat{M}_Z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} GA_{VY} & 0 \\ 0 & EI_Y \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{XY} \\ \hat{\chi}_Z \end{Bmatrix}$$

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Matriz de rigidez

$$\int_0^L \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,dX = \int_{-1}^{1}\delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathbf{a}_\mathbf{e}\frac{L}{2}d\xi = \ldots =$$

$$= \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T\int_{-1}^{1}\left\{GA_{VY}\begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1-\xi}{2L} & -\frac{1}{L^2} & \frac{1+\xi}{2L} \\ \frac{1-\xi}{2L} & \frac{(1-\xi)^2}{4} & -\frac{1-\xi}{2L} & \frac{1-\xi^2}{4} \\ -\frac{1}{L^2} & -\frac{1-\xi}{2L} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1+\xi}{2L} \\ \frac{1+\xi}{2L} & \frac{1-\xi^2}{4} & -\frac{1+\xi}{2L} & \frac{(1+\xi)^2}{4} \end{bmatrix} + EI_Z\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{1}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L^2} & 0 & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}\right\}\frac{L}{2}d\xi\,\mathbf{a}_\mathbf{e} = \ldots$$

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Matriz de rigidez

$$\ldots = \delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{T}\left\{\underbrace{GA_{VY}L\begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_V} + \underbrace{\frac{EI_Z}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_F}\right\}\mathbf{a}_{\mathbf{e}} = \ldots$$

20

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Matriz de rigidez

$$\ldots = \delta \mathbf{a}_e^T \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{a}_e =$$

$$= \delta \mathbf{a}_e^T \left[\mathbf{K}_F + \frac{12}{\alpha_Y} \mathbf{K}_V \right] \mathbf{a}_e$$

Factor de cortante *Y*

$$\alpha_Y = \frac{12 EI_Z}{GA_{VY} L^2}$$

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- **Factor de cortante**.
  - Definición:

$$\alpha_Y = \frac{12EI_Z}{GA_{VY}L^2} \quad , \quad \alpha_Z = \frac{12EI_Y}{GA_{VZ}L^2}$$

  - Cuantifica la influencia de la deformación por cortante en la solución del problema.
  - Para una viga completa:
    - Determina la cota máxima del error cometido al evaluar la flecha mediante la teoría de Navier-Bernoulli (en tanto por ciento de dicha flecha)[1].
    - En casos reales, suele ser del orden de las centésimas o menor.
    - ¡Ojo! Lo anterior sólo es válido para el factor de cortante de la viga completa, no para el de cada uno de los elementos finitos mediante los cuales se modela.

[1] Monleón (1999. Pág. 120 y s.s.)

22

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Fuerzas nodales debidas a cargas en el interior del dominio

$$\int_0^L \delta\hat{\mathbf{d}}^T\,\mathbf{q}\,dX = \int_{-1}^{1} \delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^T \mathbf{N}^T \mathbf{q}\,\frac{L}{2}\,d\xi =$$

$$= \underbrace{\left\{\delta\hat{v}_1 \quad \delta\hat{\varphi}_1 \quad \delta\hat{v}_2 \quad \delta\hat{\varphi}_2\right\}}_{\delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{4}\int_{-1}^{1}(1-\xi)\,q_Y(\xi)\,d\xi \\ \cancelto{0}{\frac{L}{4}\int_{-1}^{1}(1-\xi)\,m_Z(\xi)\,d\xi} \\ \frac{L}{4}\int_{-1}^{1}(1+\xi)\,q_Y(\xi)\,d\xi \\ \cancelto{0}{\frac{L}{4}\int_{-1}^{1}(1-\xi)\,m_Z(\xi)\,d\xi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_e} = \delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^T\,\mathbf{f}_e$$

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Fuerzas puntuales en los extremos del elemento

$$\sum_{i=1}^{2} \delta \mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \cong \delta \hat{v}_1 \overline{F}_{Y1} + \delta \hat{\varphi}_1 \overline{M}_{Z1} + \delta \hat{v}_2 \overline{F}_{Y2} + \delta \hat{\varphi}_2 \overline{M}_{Z2} =$$

$$= \underbrace{\left\{ \delta \hat{v}_1 \quad \delta \hat{\varphi}_1 \quad \delta \hat{v}_2 \quad \delta \hat{\varphi}_2 \right\}}_{\delta \mathbf{a}_e^T} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{F}_{Y1} \\ \overline{M}_{Z1} \\ \overline{F}_{Y2} \\ \overline{M}_{Z2} \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{F}}} = \delta \mathbf{a}_e^T \, \overline{\mathbf{F}}$$

Discretización por elementos finitos
Flexión mediante elementos lagrangianos lineales

- Funcional de trabajos virtuales de la barra

$$\delta\Pi^{(e)} = \int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\,\boldsymbol{\sigma}\,dX - \int_0^L \delta\mathbf{d}^T\,\mathbf{q}\,dX\delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T - \sum_{i=1}^{2}\delta\mathbf{d}_i^T\overline{\mathbf{F}}_i \cong$$

$$\cong \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T\mathbf{f}_e - \delta\mathbf{a}_e^T\,\overline{\mathbf{F}} = \delta\mathbf{a}_e^T\left(\mathbf{K}\,\mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_e - \overline{\mathbf{F}}\right)$$

- Relación de rigidez de la barra (cond. equilibrio)

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$$

25

Discretización por elementos finitos
Bloqueo e integración reducida

- El modelo desarrollado (y otros similares) presentan un inconveniente:

  Cuando la deformación por cortante es muy pequeña, sobreestiman la rigidez a cortante frente a la rigidez a flexión conduciendo a un resultado irreal.

- Este fenómeno se denomina **bloqueo** y hay varias técnicas para evitarlo.
- Para estudiarlo, en primer lugar conviene notar como varía el factor de cortante cuando la deformación por cortante es muy pequeña

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_{XY} \to 0 \\ \gamma_{XY} = \dfrac{V_Y}{GA_{VY}}\end{array}\right\} \Rightarrow GA_{VY} \to \infty \quad , \quad \alpha_Y = \frac{12EI_Z}{GA_{VY}L^2} \to 0$$

Teoría de Navier-Bernoulli

27

Discretización por elementos finitos
Bloqueo e integración reducida

- Consideremos una viga modelada mediante un único elemento lagrangiano lineal.
  - Condición de equilibrio

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{e} = \mathbf{f}_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{f}$$

$$\left(\mathbf{K}_F + \frac{12}{\alpha_Y}\mathbf{K}_V\right)\mathbf{a}_\mathbf{e} = \mathbf{f} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\alpha_Y \mathbf{K}_F + 12\mathbf{K}_V\right)\mathbf{a}_\mathbf{e} = \alpha_Y \mathbf{f}$$

  - Si la deformación por cortante es relevante, la expresión tiene sentido. (Con un número adecuado de elementos se puede resolver el problema.)
  - Paradójicamente, cuando menor es la deformación por cortante, menor es α y más pesa el término de cortante en la matriz de rigidez.

28

Discretización por elementos finitos
Bloqueo e integración reducida

- En el límite (teoría de Navier-Bernoulli)

  $$\left(\alpha_Y \mathbf{K}_F + 12\mathbf{K}_V\right)\mathbf{a_e} = \alpha_Y \mathbf{f} \xrightarrow{\alpha\to 0} \mathbf{K}_V \mathbf{a_e} = \mathbf{0}$$

- Esta situación se denomina **bloqueo**
  - El modelo no es capaz de representar deformaciones por cortante muy pequeñas
  - Cuando ocurre esto, aparece una sobrerigidización que minusvalora los desplazamientos, anulándolos en el límite.

- Esta misma situación se produce en placas si se utiliza elementos con deformación por cortante (teoría de Reissner-Mindlin) en placas donde esta es despreciable (teoría adecuada, la de Love-Kirchhoff).

29

Discretización por elementos finitos

Bloqueo e integración reducida

Integración reducida

- Una manera de resolver el problema anterior es forzar que la matriz $\mathbf{K}_V$ sea singular, lo que permite que se cumpla $\mathbf{K}_V\mathbf{a}_e=\mathbf{0}$ con $\mathbf{a}_e\neq\mathbf{0}$.
- Para hacer que $\mathbf{K}_V$ sea singular basta integrarla con un número de puntos de Gauss inferior al necesario para la integración exacta.
- El proceso puede resumirse del modo siguiente:
  - Se integra por separado, con diferente número de puntos de Gauss si es necesario, los términos de $\mathbf{K}_F$ y $\mathbf{K}_V$ (integración selectiva).
  - Se escoge un número de puntos de Gauss para $\mathbf{K}_V$ inferior al necesario.
- En general, esto da buenos resultados.

Discretización por elementos finitos
Bloqueo e integración reducida

Integración reducida (ejemplo)

$$\int_0^L \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,dX = \int_{-1}^{1} \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathbf{a}_\mathbf{e}\,\frac{L}{2}\,d\xi = \ldots =$$

$$= \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T\int_{-1}^{1}\left\{ \underbrace{GA_{VY}\begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1-\xi}{2L} & -\frac{1}{L^2} & \frac{1+\xi}{2L} \\ \frac{1-\xi}{2L} & \frac{(1-\xi)^2}{4} & -\frac{1-\xi}{2L} & \frac{1-\xi^2}{4} \\ -\frac{1}{L^2} & -\frac{1-\xi}{2L} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1+\xi}{2L} \\ \frac{1+\xi}{2L} & \frac{1-\xi^2}{4} & -\frac{1+\xi}{2L} & \frac{(1+\xi)^2}{4} \end{bmatrix}}_{\text{Términos cuadráticos: requieren dos puntos de Gauss}} + EI_Z \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{1}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L^2} & 0 & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}}_{\text{Términos constantes: requieren un punto de Gauss (como los lineales)}} \right\}\frac{L}{2}\,d\xi\,\mathbf{a}_\mathbf{e} = \ldots$$

Discretización por elementos finitos
Bloqueo e integración reducida

Integración reducida (ejemplo)

…pero integrándolo todo con un solo punto de Gauss

$$\ldots = \delta \mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{T} \left\{ \underbrace{GA_{VY}L \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \boxed{\frac{1}{2L} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2L} \quad \frac{1}{4}} \\ -\frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ \boxed{\frac{1}{2L} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2L} \quad \frac{1}{4}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_V} + \frac{EI_Z}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_F} \right\} \mathbf{a}_{\mathbf{e}} = \ldots$$

y la matriz $\mathbf{K}_V$ se convierte en singular.

El elemento así modificado presenta buen comportamiento para cualquier valor de α_Y.

32

Discretización por elementos finitos
Bloqueo e integración reducida

Otros problemas que presentan bloqueo:

- Elasticidad 2D y 3D con materiales casi incompresibles (ν próximo a 0,5).
- Vigas curvas (bloqueo de cortante y de axil)
- Placas con deformación por cortante…

Otras formas de solucionar el problema:

- Introducción de variables anodales para eliminar términos espúrios
- Interpolación de los desplazamientos basada en una interpolación de las deformaciones
- Uso de elementos híbridos/mixtos…

33

Discretización por elementos finitos
Bloqueo e integración reducida

Trascendencia real en la aplicación profesional:

- En barras rectas de sección constante los programas pensados para la aplicación profesional usan elementos que no presentan este problema (próxima sección).
- En los demás casos debemos saber que puede aparecer bloqueo.
- Bastará con que comprobemos nuestro programa procesando algún caso límite.
- Si puede aparecer bloqueo, normalmente el propio programa presentará elementos alternativos para los casos conflictivos.

34

Discretización por elementos finitos
Flexión usando la función de forma natural

Recuérdese

En problemas unidimensionales, los elementos finitos basado en el uso de la solución de la parte homogénea de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema como función de forma proporcionan los valores exactos de fuerzas y desplazamientos en los nodos.

36

Discretización por elementos finitos
Flexión usando la función de forma natural

- Interpolación → Función de forma natural (solución de la parte homogénea de la ecuación diferencial[1]):

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\varphi}_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(\xi) & N_{12}(\xi) & N_{12}(\xi) & N_{14}(\xi) \\ N_{21}(\xi) & N_{22}(\xi) & N_{23}(\xi) & N_{24}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\varphi}_{Z1} \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\varphi}_{Z2} \end{Bmatrix}$$

$$N_{11}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3 - (3+2\alpha_Y)\xi + 2(1+\alpha_Y)\right] \qquad N_{21}(\xi) = \frac{1}{2(1+\alpha_Y)L}\left[3\xi^2 - 3\right]$$

$$N_{12}(\xi) = \frac{L}{8(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3 - (1+\alpha_Y)\xi^2 - \xi + (1+\alpha_Y)\right] \qquad N_{22}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Y)}\left[3\xi^2 - 2(1+\alpha_Y)\xi - 1 + 2\alpha_Y\right]$$

$$N_{13}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Y)}\left[-\xi^3 + (3+2\alpha_Y)\xi + 2(1+\alpha_Y)\right] \qquad N_{23}(\xi) = \frac{1}{2(1+\alpha_Y)L}\left[-3\xi^2 + 3\right]$$

$$N_{14}(\xi) = \frac{L}{8(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3 + (1+\alpha_Y)\xi^2 - \xi - (1+\alpha_Y)\right] \qquad N_{24}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Y)}\left[3\xi^2 + 2(1+\alpha_Y)\xi - 1 + 2\alpha_Y\right]$$

[1] MONLEÓN (1999. Pág. 100 y s.s.) En el texto aparecen las funciones que determinan las reacciones de un fuerza puntual, que ya hemos visto que deben coincidir con las funciones de forma. Además, hay que hacer un cambio de variable de $\tau\in[0,1]$ a $\xi\in[-1,1]$.

37

Discretización por elementos finitos
Flexión usando la función de forma natural

- Deformaciones:

$$\frac{d\xi}{dX}=\frac{2}{L}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\begin{Bmatrix}\hat{\gamma}_{XY}\\ \hat{\chi}_Z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{dX} & -1\\ 0 & \dfrac{d}{dX}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{v}\\ \hat{\varphi}_Z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{\dfrac{2}{L}}\dfrac{d}{d\xi} & -1\\ 0 & \dfrac{2}{L}\dfrac{d}{d\xi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_{11}(\xi) & N_{12}(\xi) & N_{12}(\xi) & N_{14}(\xi)\\ N_{21}(\xi) & N_{22}(\xi) & N_{23}(\xi) & N_{24}(\xi)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{v}_1\\ \hat{\varphi}_{Z1}\\ \hat{v}_2\\ \hat{\varphi}_{Z2}\end{Bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24}\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\underbrace{\begin{Bmatrix}\hat{v}_1\\ \hat{\varphi}_{Z1}\\ \hat{v}_2\\ \hat{\varphi}_{Z2}\end{Bmatrix}}_{\mathbf{a_e}}=\mathbf{Ba_e}$$

$$B_{11}(\xi)=-B_{13}(\xi)=\frac{-\alpha_Y}{(1+\alpha_Y)L}$$

$$B_{12}(\xi)=B_{14}(\xi)=\frac{-\alpha_Y}{2(1+\alpha_Y)}$$

$$B_{21}(\xi)=-B_{23}(\xi)=\frac{6\xi}{(1+\alpha_Y)L^2}$$

$$B_{22}(\xi)=\frac{1}{(1+\alpha_Y)L}\left[3\xi-(1+\alpha_Y)\right]$$

$$B_{24}(\xi)=\frac{1}{(1+\alpha_Y)L}\left[3\xi+(1+\alpha_Y)\right]$$

Nótese que la primera fila de **B** es constante y la segunda lineal. En consecuencia, γ_{XY} y V_Y serán constantes en el elemento y χ_Z y M_Z variarán linealmente en él.

38

Discretización por elementos finitos
Flexión usando la función de forma natural

- Matriz de rigidez:

$$\int_0^L \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,dX = \int_{-1}^{1} \delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathbf{a}_{\mathbf{e}}\,\frac{L}{2}\,d\xi = \ldots =$$

$$= \delta\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & -\frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} \\ \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4+\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} & -\frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2-\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} \\ -\frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & -\frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & -\frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} \\ \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2-\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} & -\frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4+\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} \end{bmatrix} \mathbf{a}_{\mathbf{e}}$$

Nótese que, cuando α_Y tiende a cero, la matriz de rigidez tiende a la correspondiente a la teoría de Navier-Bernoulli. Por lo tanto, **no aparece ningún bloqueo.**

39

Discretización por elementos finitos

Flexión usando la función de forma natural

- Fuerzas nodales debidas a cargas en el interior del dominio

$$\int_0^L \delta\hat{\mathbf{d}}^T \mathbf{q}\, dX = \int_{-1}^{1} \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{N}^T \mathbf{q} \frac{L}{2} d\xi =$$

$$= \underbrace{\left\{\delta\hat{v}_1 \quad \delta\hat{\varphi}_1 \quad \delta\hat{v}_2 \quad \delta\hat{\varphi}_2\right\}}_{\delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{11}(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{12}(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{13}(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{14}(\xi) q_Y(\xi) d\xi \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_e} = \delta\mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{f}_e$$

40

Discretización por elementos finitos
Flexión usando la función de forma natural

- Fuerzas puntuales en los extremos del elemento

$$\sum_{i=1}^{2} \delta \mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \cong \delta \hat{v}_1 \overline{F}_{Y1} + \delta \hat{\varphi}_1 \overline{M}_{Z1} + \delta \hat{v}_2 \overline{F}_{Y2} + \delta \hat{\varphi}_2 \overline{M}_{Z2} = \ldots = \delta \mathbf{a}_e^T \, \overline{\mathbf{F}}$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \left(\overline{F}_{Y1} \quad \overline{M}_{Z1} \quad \overline{F}_{Y2} \quad \overline{M}_{Z2} \right)^T$$

- Funcional de trabajos virtuales de la barra

$$\delta \Pi^{(e)} = \int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \, \boldsymbol{\sigma} \, dX - \int_0^L \delta \mathbf{d}^T \, \mathbf{q} \, dX \delta \mathbf{a}_\mathbf{e}^T - \sum_{i=1}^{2} \delta \mathbf{d}_i^T \overline{\mathbf{F}}_i \cong$$

$$\cong \delta \mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{a}_\mathbf{e} - \delta \mathbf{a}_\mathbf{e}^T \mathbf{f}_e - \delta \mathbf{a}_e^T \, \overline{\mathbf{F}} = \delta \mathbf{a}_e^T \left(\mathbf{K} \, \mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_e - \overline{\mathbf{F}} \right)$$

- Relación de rigidez de la barra (cond. equilibrio)

$$\mathbf{K} \mathbf{a}_\mathbf{e} - \mathbf{f}_\mathbf{e} - \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$$

Como en el caso anterior

41

Discretización por elementos finitos Resumen de resultados

- **Barra de pórtico plano**: axil + flexión XY

$$\mathbf{a}_e = \{\hat{u}_1 \quad \hat{v}_1 \quad \hat{\varphi}_{Z1} \quad \hat{u}_2 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{\varphi}_{Z2}\}^T$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{F}_{X1} \quad \overline{F}_{Y1} \quad \overline{M}_{Z1} \quad \overline{F}_{X2} \quad \overline{F}_{Y2} \quad \overline{M}_{Z2}\}^T$$

¡Ojo! Ha cambiado la numeración de funciones de forma para adaptarla a la de una matriz **N** de 3x6

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{11}(\xi)q_X(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{22}(\xi)q_Y(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{23}(\xi)q_Y(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{14}(\xi)q_X(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{25}(\xi)q_Y(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{26}(\xi)q_Y(\xi)d\xi \end{bmatrix}$$

$$N_{11}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_{22}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3 - (3+2\alpha_Y)\xi + 2(1+\alpha_Y)\right]$$

$$N_{23}(\xi) = \frac{L}{8(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3 - (1+\alpha_Y)\xi^2 - \xi + (1+\alpha_Y)\right]$$

$$N_{14}(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$N_{25}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Y)}\left[-\xi^3 + (3+2\alpha_Y)\xi + 2(1+\alpha_Y)\right]$$

$$N_{26}(\xi) = \frac{L}{8(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3 + (1+\alpha_Y)\xi^2 - \xi - (1+\alpha_Y)\right]$$

43

Resumen de resultados

- **Barra de pórtico plano**: axil + flexión XY

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} \\
0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4+\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2-\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} \\
0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2-\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4+\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L}
\end{bmatrix}
$$

Haciendo $\alpha_Y=0$ se reduce a la matriz exacta de la teoría de Navier-Bernoulli.

Resumen de resultados

- **Barra de emparrillado plano**: torsión + flexión XZ

$$\mathbf{a}_e = \{\hat{w}_1 \quad \hat{\varphi}_{X1} \quad \hat{\varphi}_{Y1} \quad \hat{w}_2 \quad \hat{\varphi}_{X2} \quad \hat{\varphi}_{Y2}\}^T$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{F}_{Z1} \quad \overline{M}_{X1} \quad \overline{M}_{Y1} \quad \overline{F}_{Z2} \quad \overline{M}_{X2} \quad \overline{M}_{Y2}\}^T$$

¡Ojo! Numeración de funciones de forma correspondiente a la matriz **N** de 3x6 de emparrillado plano.

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{11}(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{22}(\xi) q_X(\xi) d\xi \\ -\frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{13}(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{15}(\xi) q_Y(\xi) d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{24}(\xi) q_X(\xi) d\xi \\ -\frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{16}(\xi) q_Y(\xi) d\xi \end{bmatrix}$$

$$N_{11}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Z)}\left[\xi^3 - (3+2\alpha_Z)\xi + 2(1+\alpha_Z)\right]$$

$$N_{13}(\xi) = \frac{L}{8(1+\alpha_Z)}\left[\xi^3 - (1+\alpha_Z)\xi^2 - \xi + (1+\alpha_Z)\right]$$

$$N_{15}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Z)}\left[-\xi^3 + (3+2\alpha_Z)\xi + 2(1+\alpha_Z)\right]$$

$$N_{16}(\xi) = \frac{L}{8(1+\alpha_Z)}\left[\xi^3 + (1+\alpha_Z)\xi^2 - \xi - (1+\alpha_Z)\right]$$

$$N_{22}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_{24}(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

45

Resumen de resultados

- **Barra de emparrillado plano**: torsión + flexión XZ

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4+\alpha_Z}{1+\alpha_Z}\frac{EI_Y}{L} & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2-\alpha_Z}{1+\alpha_Z}\frac{EI_Y}{L} \\ -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2-\alpha_Z}{1+\alpha_Z}\frac{EI_Y}{L} & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4+\alpha_Z}{1+\alpha_Z}\frac{EI_Y}{L} \end{bmatrix}$$

Haciendo α_Z=0 se reduce a la matriz exacta de la teoría de Navier-Bernoulli.

46

Resumen de resultados

- **Barra de estructura de tipo general**

$$\mathbf{a}_e = \{\hat{u}_1 \quad \hat{v}_1 \quad \hat{w}_1 \quad \hat{\varphi}_{X1} \quad \hat{\varphi}_{Y1} \quad \hat{\varphi}_{Z1} \quad \hat{u}_2 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{w}_1 \quad \hat{\varphi}_{X2} \quad \hat{\varphi}_{Y2} \quad \hat{\varphi}_{Z2}\}^T$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{F}_{X1} \quad \overline{F}_{Y1} \quad \overline{F}_{Z1} \quad \overline{M}_{X1} \quad \overline{M}_{Y1} \quad \overline{M}_{Z1} \quad \overline{F}_{X2} \quad \overline{F}_{Y2} \quad \overline{F}_{Z2} \quad \overline{M}_{X2} \quad \overline{M}_{Y2} \quad \overline{M}_{Z2}\}^T$$

$$N_{1-1}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_{2-2}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3 - (3+2\alpha_Y)\xi + 2(1+\alpha_Y)\right]$$

$$N_{3-3}(\xi) = \frac{1}{4(1+\alpha_Z)}\left[\xi^3 - (3+2\alpha_Z)\xi + 2(1+\alpha_Z)\right]$$

$$N_{4-4}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_{3-5}(\xi) = \frac{L}{8(1+\alpha_Z)}\left[\xi^3 - (1+\alpha_Z)\xi^2 - \xi + (1+\alpha_Z)\right]$$

$$N_{2-6}(\xi) = \frac{L}{8(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3 - (1+\alpha_Y)\xi^2 - \xi + (1+\alpha_Y)\right]$$

¡Ojo! Numeración de funciones de forma correspondiente a la matriz **N** de 6x12 de barra de tipo general.

47

Resumen de resultados

- **Barra de estructura de tipo general**

$$N_{1-7}(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$N_{2-8}(\xi)=\frac{1}{4(1+\alpha_Y)}\left[-\xi^3+(3+2\alpha_Y)\xi+2(1+\alpha_Y)\right]$$

$$N_{3-9}(\xi)=\frac{1}{4(1+\alpha_Z)}\left[-\xi^3+(3+2\alpha_Z)\xi+2(1+\alpha_Z)\right]$$

$$N_{4-10}(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$N_{3-11}(\xi)=\frac{L}{8(1+\alpha_Z)}\left[\xi^3+(1+\alpha_Z)\xi^2-\xi-(1+\alpha_Z)\right]$$

$$N_{2-12}(\xi)=\frac{L}{8(1+\alpha_Y)}\left[\xi^3+(1+\alpha_Y)\xi^2-\xi-(1+\alpha_Y)\right]$$

48

Resumen de resultados

- **Barra de estructura de tipo general**

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{e1} \\ \mathbf{f}_{e2} \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}_{e1} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{1-1}(\xi)q_X(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{2-2}(\xi)q_Y(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{3-3}(\xi)q_Z(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{4-4}(\xi)m_X(\xi)d\xi \\ -\frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{3-5}(\xi)q_Z(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{2-6}(\xi)q_Y(\xi)d\xi \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}_{e1} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{1-7}(\xi)q_X(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{2-8}(\xi)q_Y(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{3-9}(\xi)q_Z(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{4-10}(\xi)m_X(\xi)d\xi \\ -\frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{3-11}(\xi)q_Z(\xi)d\xi \\ \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_{2-12}(\xi)q_Y(\xi)d\xi \end{bmatrix}$$

Resumen de resultados

□ Barra de estructura de tipo general

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4+\alpha_Z}{1+\alpha_Z}\frac{EI_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2-\alpha_Z}{1+\alpha_Z}\frac{EI_Y}{L} & 0 \\
0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4+\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2-\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2-\alpha_Z}{1+\alpha_Z}\frac{EI_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha_Z}\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4+\alpha_Z}{1+\alpha_Z}\frac{EI_Y}{L} & 0 \\
0 & \frac{1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2-\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L} & 0 & \frac{-1}{1+\alpha_Y}\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4+\alpha_Y}{1+\alpha_Y}\frac{EI_Z}{L}
\end{bmatrix}
$$

Bibliografía

Bibliografía

- OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (4.4 y 4.6)
- HINTON, E. Y OWEN, D.R.J. *An Introduction to Finite elements computations*. Pinerigde Press, Swansea, 1979. (5.5)
- CELIGÜETA, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.). San Sebastián, 2011. (9.4)
- MONLEÓN, S. *Análisis de vigas, arcos, placas y láminas. Una presentación unificada*. Servicio de Publicaciones de la U.P.V., Valencia, 1999. Pág. 100 y s.s.
- CASANOVA, J. *Introducción a la Mecánica del Sólido Deformable.* Valencia, 2011. <https://poliformat.upv.es/access/content/group/GRA_12821_2014/Teor%C3%ADa/LibroCompleto_imp.pdf > [Consulta: 13/08/14]

52

Bibliografía

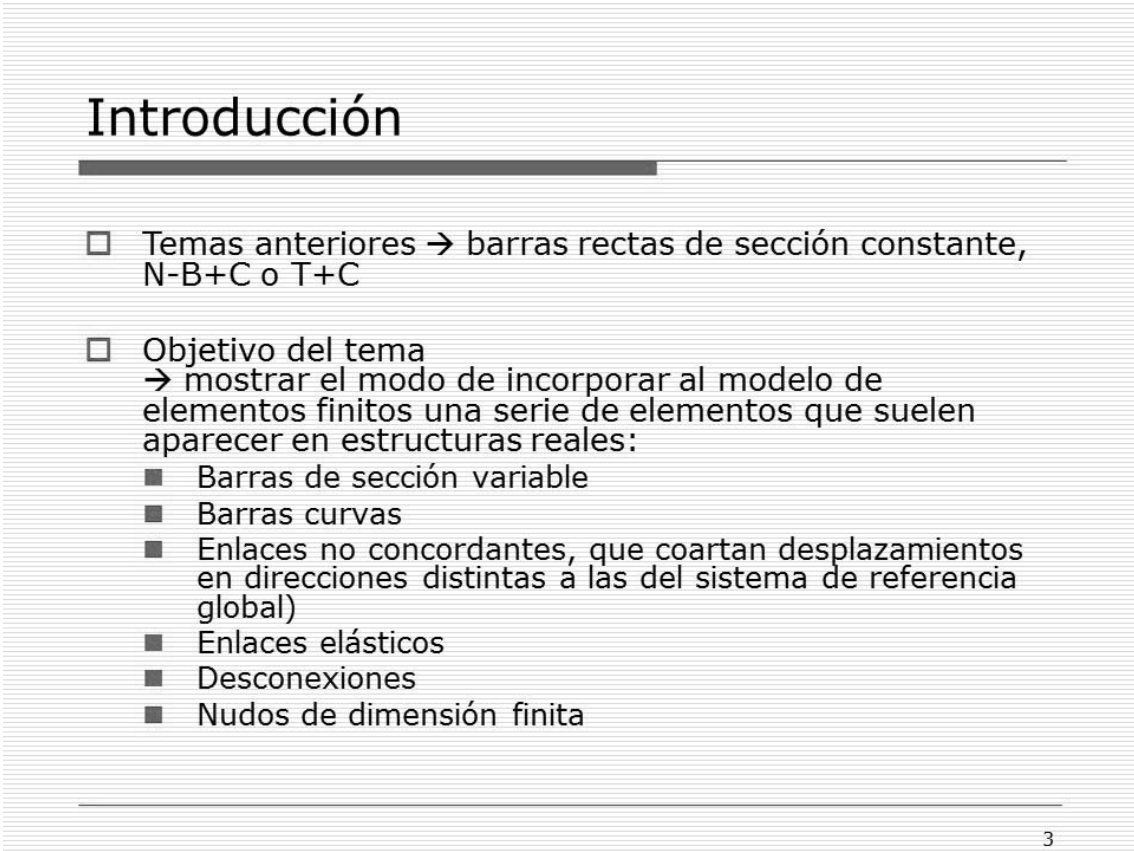
- SAEZ-BENITO, J.M. *Cálculo Matricial de Estructuras*. FEIN, Madrid, 1975
- LIVESLEY, R.K. *Métodos matriciales para cálculo de estructuras*. Blume, Madrid, 1970
- PRZEMIENIECKI, J.S. *Theory of Matrix Structural Analysis.* Dover, New york, 1985
- ALBIGES, M., COIN, A. Y JOURNET, H. *Estudio de las estructuras por los métodos matriciales*. Editores Técnicos Asociados S.A., Barcelona, 1971

53

Tema 09:

Elementos y técnicas complementarias para el modelado de estructuras de barras

Introducción



Barras de sección variable

Barras de sección variable

- Características geométricas de la sección transversal:
  - Sólo intervienen en las relaciones constitutivas de la barra (matriz **D** en nuestra formulación)
  - Si la barra es de sección variable, las características geométricas serán función de punto

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N(X) \\ V_Y(X) \\ V_Z(X) \\ M_T(X) \\ M_Y(X) \\ M_Z(X) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} E\,A(X) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G\,A_{VY}(X) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\,A_{VZ}(X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G\,J(X) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E\,I_Y(X) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E\,I_Z(X) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}(X)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon(X) \\ \gamma_{XY}(X) \\ \gamma_{XZ}(X) \\ \theta(X) \\ \chi_Y(X) \\ \chi_Y(X) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

5

Barras de sección variable

- La matriz **D** sólo interviene en la definición de la matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{1} [\mathbf{B}(\xi)]^T \mathbf{D}(\xi)\,\mathbf{B}(\xi)\,\frac{L}{2}\,d\xi$$

- Para determinar la matriz de rigidez de la barra de sección variable basta:
  - Expresar **D**(X) en función de ξ mediante el cambio de variable
  - Integrar
- Como las funciones de forma ya no serán solución de la parte homogénea de la ecuación diferencial
  → la solución no será exacta en los nodos
- La matriz de rigidez exacta se puede obtener por métodos de Resistencia de Materiales (recuérdese tema 7)

6

Barras de sección variable

- Los programas convencionales de Cálculo de Estructuras no suelen permitir programar la forma de variación de las características mecánicas: $A(X)$, $A_{VY}(X)$, $A_{VZ}(X)$, $J(X)$, $I_Y(X)$ e $I_Z(X)$.

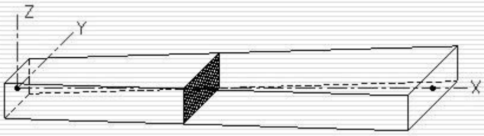
- En su lugar, tienen predefinidos algunos modos de variación sencillos: variación lineal, parabólica, cúbica…

- Mediante el uso de estos modos sencillos, y subdividiendo cada barra en un número suficiente de elementos, se puede resolver cualquier problema.

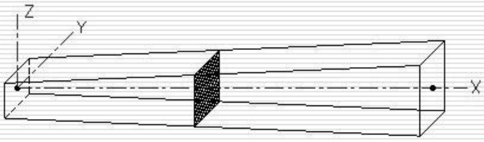
7

Barras de sección variable

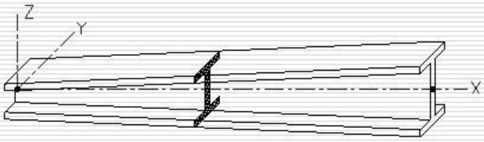
Ejemplos de tipos sencillos de variación



A	A_{VY}	A_{VZ}	J	I_Y	I_Z
Lin	Lin	Lin	Lin	Lin	Cub



A	A_{VY}	A_{VZ}	J	I_Y	I_Z
Lin	Lin	Lin	Lin	Cub	Lin

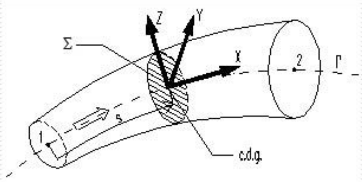


A	A_{VY}	A_{VZ}	J	I_Y	I_Z
Lin	Lin	Lin	Lin	$\cong$Cua	$\cong$Cub

8

Barras curvas

- Cinemática y estática de la viga curva:
  - Exigen el análisis de un tramo diferencial de viga
  - Esto requiere un sistema de referencia curvilíneo



  - En problemas planos (directriz y dir.ppal.inercia) puede ser el triedro de Frênet.
  - Las ecuaciones cinemáticas y de equilibrio del sólido 3D, en coords. curvilíneas, tienen expresiones diferentes a las de la viga recta (derivadas covariantes)

11

Barras curvas

- Ecuaciones del arco plano de sección constante (se presentan como ejemplo)[1]

$$\varepsilon_S = \frac{du}{dS} - \frac{v}{\rho} \qquad N_S = E\overline{A}\,\varepsilon_S \qquad \frac{V_Y}{\rho} - \frac{dN_S}{dS} - q_S = 0$$

$$V_Y = G\overline{A}\,\gamma_{SY}$$

$$\gamma_{SY} = \frac{u}{\rho} - \varphi_Z + \frac{dv}{dX} \qquad M_Z = EI_Z\,\chi_Y \qquad -\frac{N_S}{\rho} - \frac{dV_Y}{dS} - q_Y = 0$$

$$\chi_Y = \frac{d\varphi_Y}{dX} \qquad \overline{A} = \int_\Sigma \frac{d\Sigma}{1+\frac{Y}{\rho}} \qquad -V_Y - \frac{dM_Z}{dS} - m_Z = 0$$

ρ es el radio de curvatura de la directriz en el punto estudiado

- Evidentemente, la expresión del funcional de trabajos virtuales también es diferente a la de la barra recta

[1] MONLEÓN, (1999. Pág. 61 y s.s.)

12

Barras curvas

Formulación por el M.E.F.:

- No se puede extrapolar de la formulación de la barra recta
  → funcional de trabajos virtuales diferente
- Cada posible curva directriz requiere un cálculo específico
  → integración sobre la directriz concreta
- Puede presenta problemas de bloqueo por sobrerrigidización debida al cortante o al axil
- Se han propuesto numerosas técnicas para evitarlos (funciones de forma específicas, integración reducida, formulaciones híbridas...)
  →no evitan el cálculo específico para cada directriz

Barras curvas

Formulación por el M.E.F.:

- El siglo pasado se publicaron las matrices de rigidez para una serie de directrices concretas (arco circunferencial, parabólico, elíptico…)
- Hoy, mediante programas de cálculo simbólico y usando los procedimientos de la Resistencia de Materiales, se puede obtener la matriz de rigidez y las fuerzas nodales exactas de cualquier viga curva razonablemente esbelta.
- La amplitud de la problemática y la diversidad de soluciones explican que los programas de cálculo de estructuras de orientación profesional no suelan incluir barras curvas.

14

Barras curvas

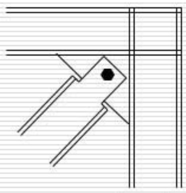
Tratamiento práctico de las barras curvas:
(En aplicaciones de ámbito profesional)

- La directriz se aproxima por una poligonal de lados rectos inscrita en ella.
- El número de tramos debe ser suficiente (existe una recomendación de que cada uno no represente un arco de curva de más de 15º).
- La aproximación a los esfuerzos de la barra curva es mejor en la zona central de los tramos rectos que en los vértices, donde pueden aparecer valores espurios.

Desconexiones

Desconexiones

- La fuerza generalizada en el extremo de la barra dual del movimiento desconectado siempre es **nula**



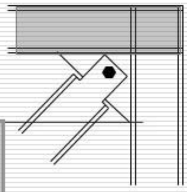
- Esto permite eliminar el movimiento desconectado de la relación de rigidez de la barra mediante **condensación estática**

$$\mathbf{K}^{*e} = \mathbf{K}^e_{CC} - \mathbf{K}^e_{CE}\left[\mathbf{K}^e_{EE}\right]^{-1}\mathbf{K}^e_{EC} \qquad \mathbf{f}^{*e} = \mathbf{f}^e_C - \mathbf{K}^e_{CE}\left[\mathbf{K}^e_{EE}\right]^{-1}\mathbf{f}^e_E$$

- La matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales se completan con ceros para recuperar las dimensiones originales
- Como en la relación de rigidez modificada ya no aparece el movimiento desconectado, éste no se compatibiliza

18

Desconexiones



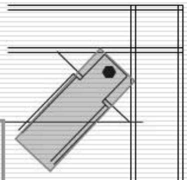
- Ensamblaje barra totalmente conectada

$$
\begin{array}{c}
\\ \mathrm{i}\rightarrow \\ \mathrm{j}\rightarrow
\end{array}
\begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_1'^{b} \\ \overline{\mathbf{F}}_2'^{b} \end{Bmatrix}
=
\begin{array}{cc}
\mathrm{i} & \mathrm{j} \\
\downarrow & \downarrow \\
\multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}'^{b} & \mathbf{K}_{12}'^{b} \\ \mathbf{K}_{21}'^{b} & \mathbf{K}_{22}'^{b} \end{bmatrix}}
\end{array}
\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1'^{b} \\ \mathbf{a}_2'^{b} \end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\mathrm{e}1}'^{b} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{e}2}'^{b} \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{Bmatrix} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{F}}_1'^{b} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{F}}_2'^{b} \\ \vdots \\ \\ \end{Bmatrix}
=
\begin{array}{ccccc}
 & \mathrm{i} & & \mathrm{j} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
\multicolumn{5}{c}{\begin{bmatrix}
 & & & & \\
\ddots & & & & \\
 & \mathbf{K}_{11}'^{b} & & \mathbf{K}_{12}'^{b} & \\
 & & \ddots & & \\
 & \mathbf{K}_{21}'^{b} & & \mathbf{K}_{22}'^{b} & \\
 & & & & \ddots \\
 & & & &
\end{bmatrix}}
\end{array}
\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N' \end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\mathrm{e}1}'^{b} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\mathrm{e}2}'^{b} \\ \vdots \\ \\ \end{Bmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \mathrm{i} \\ \\ \leftarrow \mathrm{j} \\ \\ \\ \end{array}
$$

19

Desconexiones



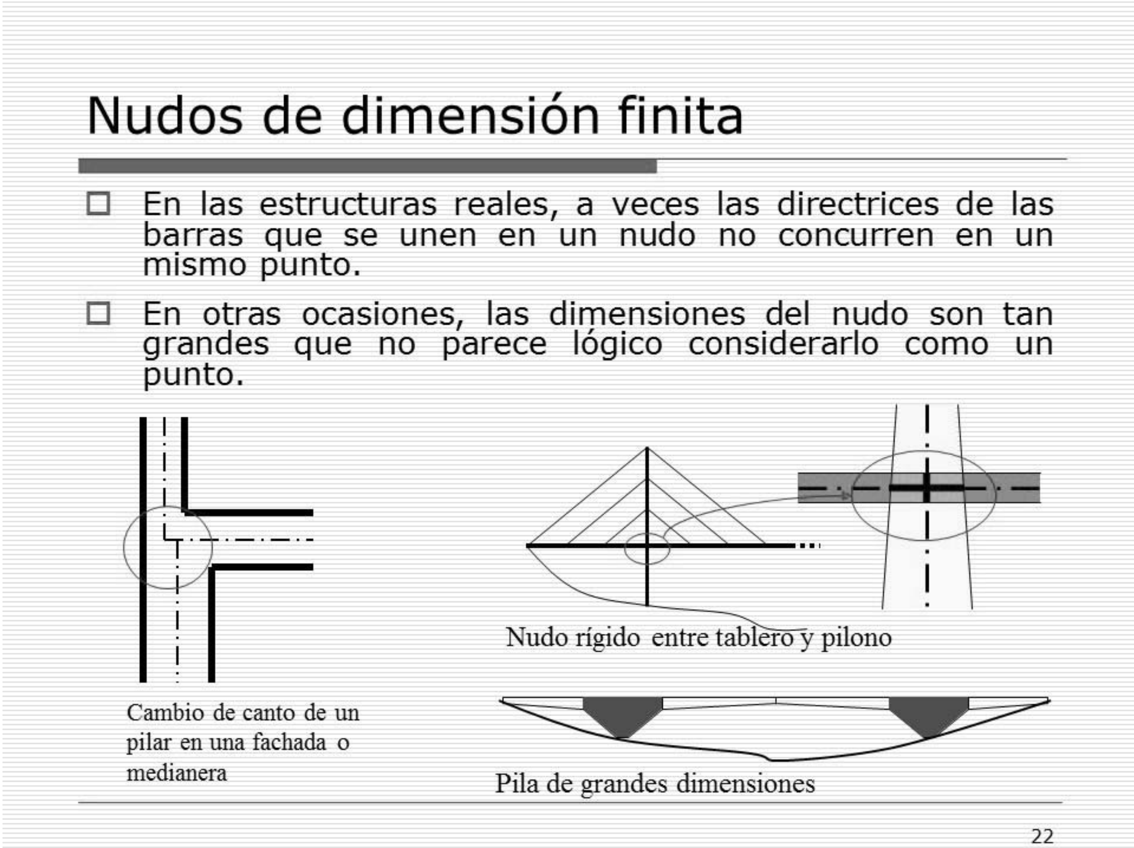
- Ensamblaje barra desconectada

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{k} & \mathbf{j} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{i}\rightarrow \\ \mathbf{j}\rightarrow \end{array} & \begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{F}}'^b_1\\ \bar{\mathbf{F}}'^b_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'^b_{11} & \mathbf{K}'^b_{12}\\ \mathbf{K}'^b_{21} & \mathbf{K}'^b_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{a}'^b_1\\ \mathbf{a}'^b_2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mathbf{f}'^b_{e1}\\ \mathbf{f}'^b_{e2}\end{Bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \begin{array}{ccccc} \mathbf{k} & & \mathbf{j} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \end{array} & & & & \\ \begin{Bmatrix} \\ \bar{\mathbf{F}}'^b_1 \\ \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{F}}'^b_2 \\ \vdots \\ \\ \end{Bmatrix} & = & \begin{bmatrix} & & & & \\ \mathbf{K}'^b_{11} & & \mathbf{K}'^b_{12} & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{K}'^b_{21} & & \mathbf{K}'^b_{22} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_k \\ \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_N \end{Bmatrix} & + & \begin{Bmatrix} \\ \mathbf{f}'^b_{e1} \\ \\ \vdots \\ \mathbf{f}'^b_{e2} \\ \vdots \\ \\ \end{Bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \leftarrow \mathbf{k} \\ \\ \\ \leftarrow \mathbf{j} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

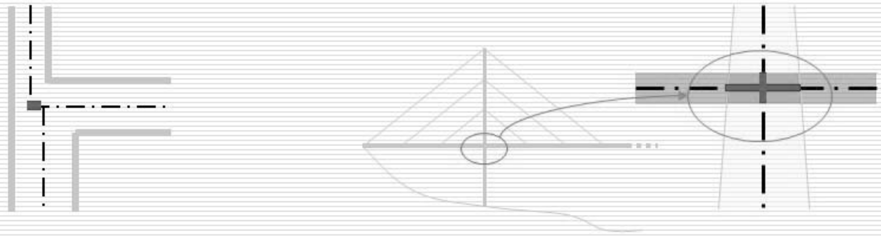
20

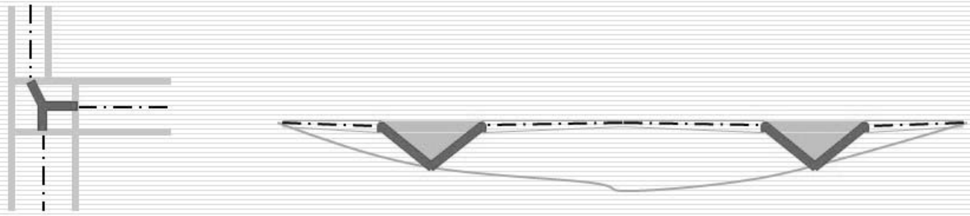
Nudos de dimensión finita



Nudos de dimensión finita

- Se suele resolver suponiendo parte del área común como rígida → **nudo de dimensión finita**

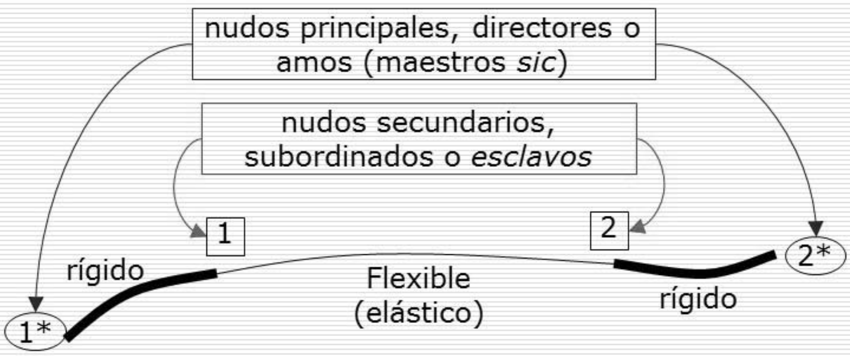




23

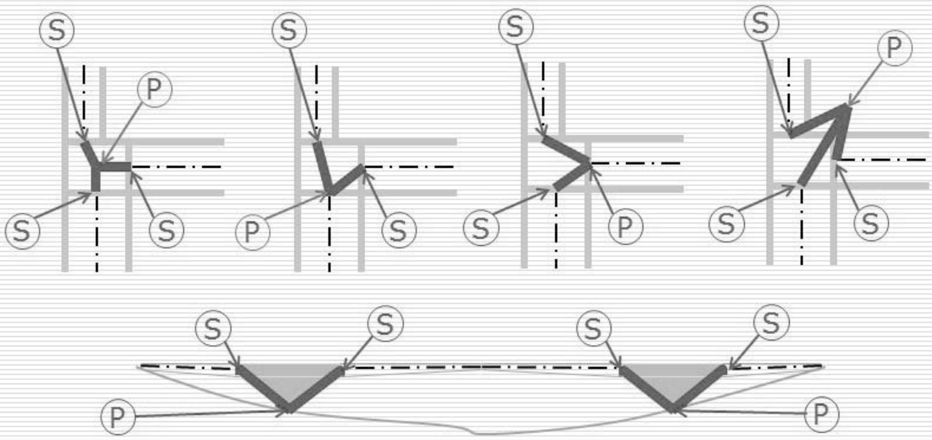
Nudos de dimensión finita

- Formulación
  - Para introducirlos se consideran barras ficticias con extremos rígidos, que van de nudo principal a nudo principal



Nudos de dimensión finita

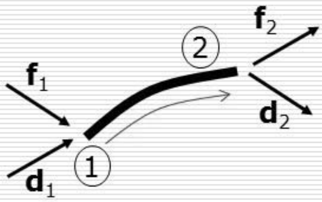
- Nomenclatura:
  - **Nudo secundario**: es el extremo de la directriz de la barra, en el contorno del área rígida.
  - **Nudo principal**: punto donde se situará el nudo en el modelo matemático. Se puede elegir arbitrariamente.



25

Nudos de dimensión finita

- Resultados auxiliares
  - Ecuaciones de equilibrio de una barra cargada exclusivamente en los nudos



$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{H}_{1-2}\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$$

$\mathbf{H}_{1-2}$ = matriz de equilibrio del tramo 1-2

  - Relación entre los desplazamientos de los dos extremos de un tramo **rígido**

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{H}_{1-2}^T \mathbf{d}_1$$

Contragradiencia
$\mathbf{H}_{1-2}$ = matriz de equilibrio del tramo 1-2

26

Nudos de dimensión finita

- Resultados auxiliares

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_Z & \Delta_Y & 1 & 0 & 0 \\ \Delta_Z & 0 & -\Delta_X & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta_Y & \Delta_X & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Estructura 3D)

$$\Delta_X = X_2 - X_1$$
$$\Delta_Y = Y_2 - Y_1$$
$$\Delta_Z = Z_2 - Z_1$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta_Y & \Delta_X & 1 \end{bmatrix}$$

(Pórtico plano)

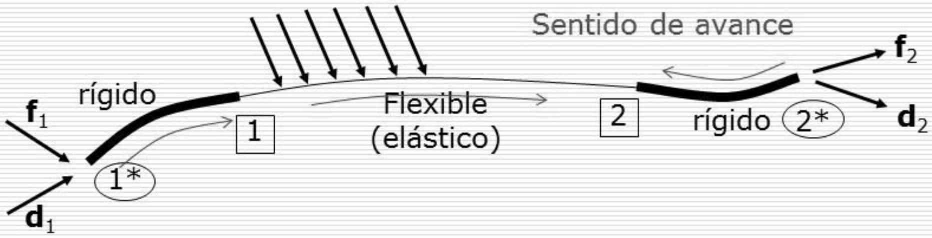
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Delta_Y & 1 & 0 \\ -\Delta_X & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Emparrillado plano)

27

Nudos de dimensión finita

- Matriz de rigidez y fuerzas nodales en la barra con extremos rígidos (<u>sin cargas sobre los tramos rígidos</u>)



  - $\mathbf{K}_{ij}^{*} = \mathbf{H}_i \mathbf{K}_{ij} \mathbf{H}_j^{t} \qquad \mathbf{f}_i^{(e)*} = \mathbf{H}_i \mathbf{f}_{i'}^{(e)} \qquad i, j = 1,2$
  - $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i*\text{-}i}$ matriz de equilibrio del tramo rígido i^*-i.
  - $\mathbf{K}_{ij}$ submatriz de la matriz de rigidez del tramo elástico 1-2

nudo principal

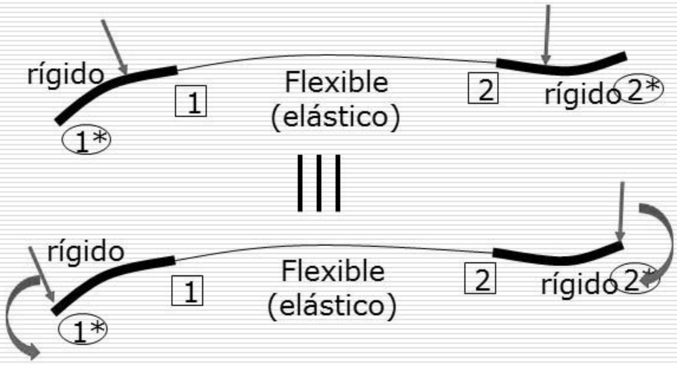
$$\Delta_X = X_i - X_{i*} \qquad \Delta_Y = Y_i - Y_{i*} \qquad \Delta_Z = Z_i - Z_{i*}$$

nudo secundario

28

Nudos de dimensión finita

- Tratamiento de las cargas sobre los tramos rígidos
  - No afectan a la matriz de rigidez
  - Se sustituyen por un sistema estáticamente equivalente en el nudo principal correspondiente



29

Nudos de dimensión finita

- **Constricciones** o **vinculaciones**
  → condiciones que restringen algunos grados de libertad de un nudo, condicionándolos al movimiento de otro como si ambos pertenecieran al mismo elemento rígido, que puede ser una línea, un plano, etc..
- Son como ***nudos de dimensión finita parciales***, que sólo afectan a algunos grados de libertad del nudo.
- Ejemplos:
  - Algunos grados de libertad de dos nudos diferentes han de tener el mismo valor.
  - Un elemento estructural plano se considera infinitamente rígido en su plano (forjado, diafragma).

30

Nudos de dimensión finita

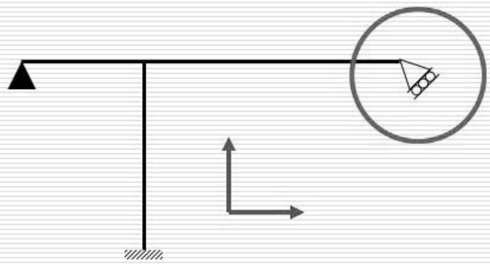
- **Tratamiento de las vinculaciones**
  - Similar al de los nudos de dimensión finita.
  - Basado en una matriz de equilibrio modificada,
    - conserva las filas y columnas correspondientes a los g.d.l. condicionados, y
    - sustituye por ceros con un 1 en la diagonal principal las restantes filas y columnas
  - El ensamblaje es más complejo
    - Los g.d.l. condicionados se asocian al nudo principal
    - Los restantes se asocian a los nudos secundarios, que siguen existiendo en el modelo

31

Enlaces no concordantes

Enlaces no concordantes

- **Apoyo no concordante** → el que impide un desplazamiento en una dirección diferente a las de los ejes del sistema de referencia global.

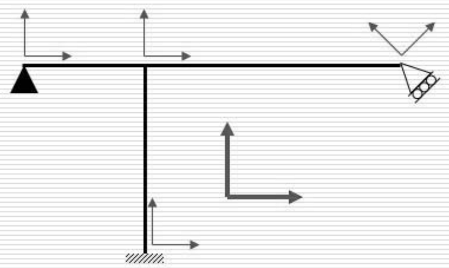


- No se pueden definir directamente sus desplazamientos virtuales cinemáticamente admissibles, ni por lo tanto sus condiciones de contorno, en el S.D.R. global.

33

Enlaces no concordantes

- Para resolver este problema, se sustituye el S.D.R. global por un **S.D.R. local de nudo** en cada uno de estos

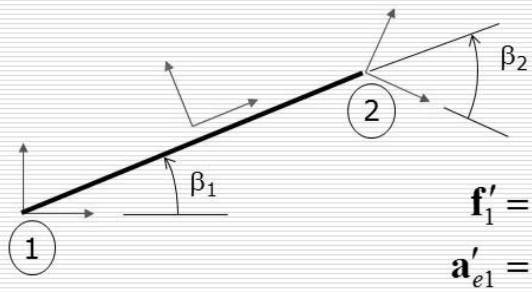


  - Las fuerzas y los desplazamientos de cada nudo se expresan en un S.D.R. diferente

34

Enlaces no concordantes

- En cada barra hay que considerar dos matrices de cambio de S.D.R., una en cada extremo



$$\mathbf{f}_1' = \mathbf{T}_1\mathbf{f}_1 \qquad \mathbf{f}_2' = \mathbf{T}_2\mathbf{f}_2$$

$$\mathbf{a}_{e1}' = \mathbf{T}_1\mathbf{a}_{e1} \qquad \mathbf{a}_{e2}' = \mathbf{T}_2\mathbf{a}_{e2}$$

$$\boxed{\mathbf{T}_1\,(\beta_1) \neq \mathbf{T}_2\,(\beta_2)}$$

35

Enlaces no concordantes

Relación de rigidez de la barra en ejes locales de barra

$$\begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_1 \\ \overline{\mathbf{F}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{e1} \\ \mathbf{a}_{e2} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{e1} \\ \mathbf{f}_{e2} \end{Bmatrix}$$

Cambio S.D.R.

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{T}_1^{\mathrm{t}}\mathbf{f}_1' \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{T}_2^{\mathrm{t}}\mathbf{f}_2'$$

$$\mathbf{a}_{e1} = \mathbf{T}_1^{\mathrm{t}}\mathbf{a}_{e1}' \qquad \mathbf{a}_{e2} = \mathbf{T}_2^{\mathrm{t}}\mathbf{a}_{e2}'$$

Relación de rigidez de la barra en ejes locales de nudo

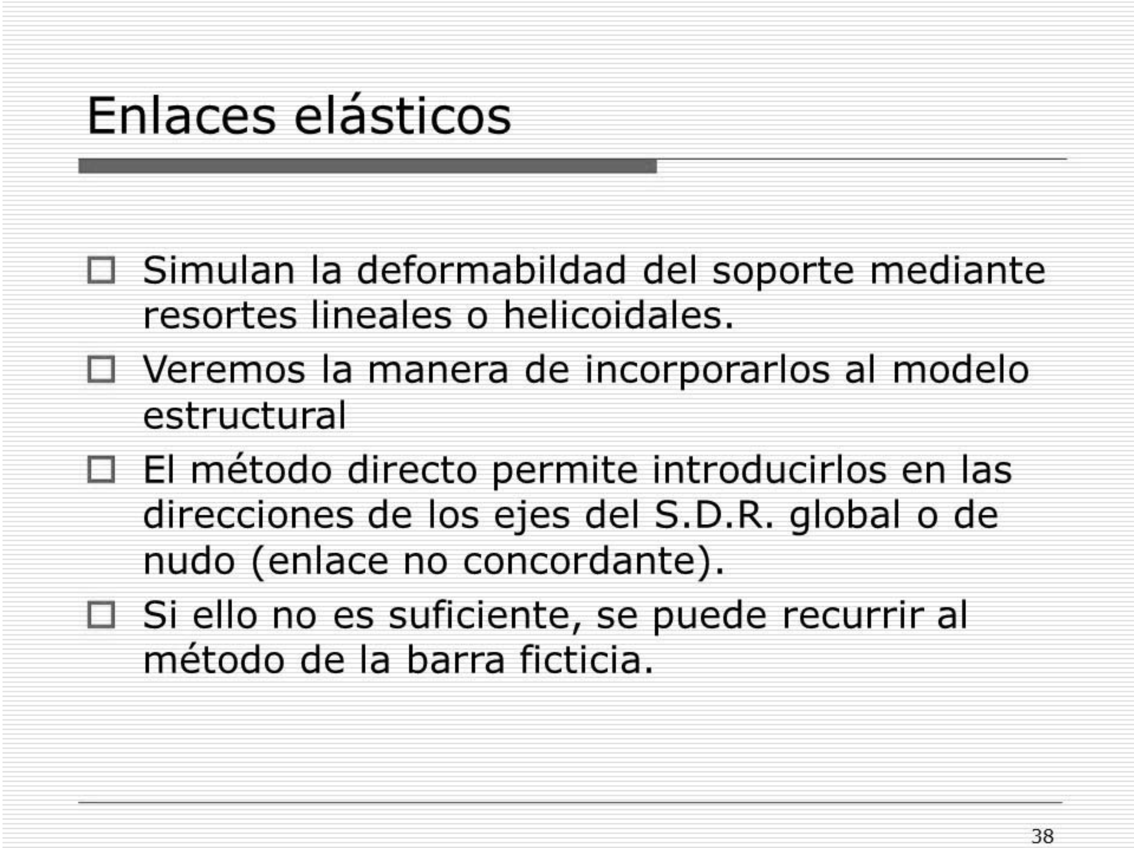
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1^{\mathrm{t}}\overline{\mathbf{F}}_1' \\ \mathbf{T}_2^{\mathrm{t}}\overline{\mathbf{F}}_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1^{\mathrm{t}}\mathbf{a}_{e1}' \\ \mathbf{T}_2^{\mathrm{t}}\mathbf{a}_2' \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1^{\mathrm{t}}\mathbf{f}_{e1}' \\ \mathbf{T}_2^{\mathrm{t}}\mathbf{f}_{e2}' \end{Bmatrix}$$

Montaje convencional

$$\left.\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_1' \\ \overline{\mathbf{F}}_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1\mathbf{K}_{11}\mathbf{T}_1^{\mathrm{t}} & \mathbf{T}_1\mathbf{K}_{12}\mathbf{T}_2^{\mathrm{t}} \\ \mathbf{T}_2\mathbf{K}_{21}\mathbf{T}_1^{\mathrm{t}} & \mathbf{T}_2\mathbf{K}_{22}\mathbf{T}_2^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{e1}' \\ \mathbf{a}_{e2}' \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{e1}' \\ \mathbf{f}_{e2}' \end{Bmatrix} \\ &\begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_1' \\ \overline{\mathbf{F}}_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}' & \mathbf{K}_{12}' \\ \mathbf{K}_{21}' & \mathbf{K}_{22}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{e1}' \\ \mathbf{a}_{e2}' \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{e1}' \\ \mathbf{f}_{e2}' \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{K}_{ij}' = \mathbf{T}_i\mathbf{K}_{ij}\mathbf{T}_j^{\mathrm{t}}$$

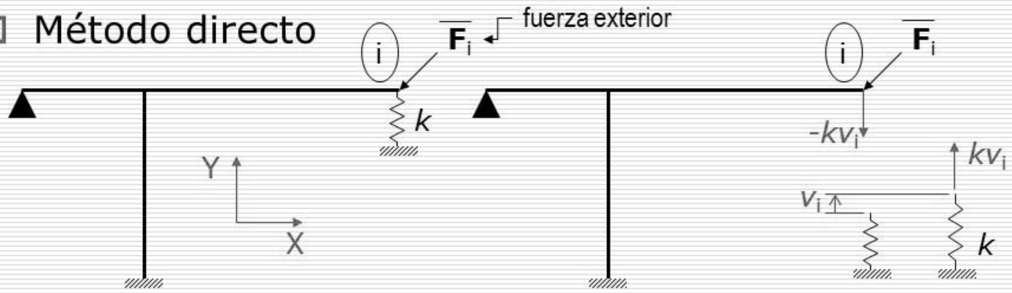
36

Enlaces elásticos



Enlaces elásticos

- Método directo



Relaciones de rigidez de la estructura completa

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{1X} \\ \overline{F}_{1Y} \\ \vdots \\ \overline{F}_{iY} - kv_i \\ \vdots \\ \overline{M}_{NZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2j} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{j1} & K_{j2} & \cdots & K_{jj} & \cdots & K_{jN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{Nj} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ \theta_{NZ} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{1X} \\ f_{1Y} \\ \vdots \\ f_{iY} \\ \vdots \\ m_{NZ} \end{Bmatrix}$$

j es el número de orden del gdl v_i en el modelo estructural completo.

39

Enlaces elásticos

- Método directo

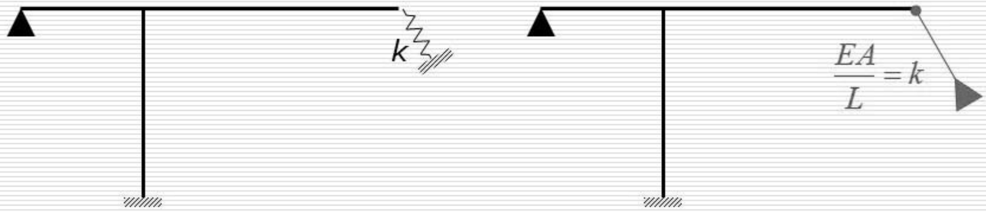
$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{1X} \\ \overline{F}_{1Y} \\ \vdots \\ \overline{F}_{iY} - kv_i \\ \vdots \\ \overline{M}_{NZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2j} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{j1} & K_{j2} & \cdots & K_{jj} & \cdots & K_{jN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{Nj} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ \theta_{NZ} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{1X} \\ f_{1Y} \\ \vdots \\ f_{iY} \\ \vdots \\ m_{NZ} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{1X} \\ \overline{F}_{1Y} \\ \vdots \\ \overline{F}_{iY} \\ \vdots \\ \overline{M}_{NZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2j} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{j1} & K_{j2} & \cdots & K_{jj} + k & \cdots & K_{jN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{Nj} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ \theta_{NZ} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{1X} \\ f_{1Y} \\ \vdots \\ f_{iY} \\ \vdots \\ m_{NZ} \end{Bmatrix}$$

40

Enlaces elásticos

- Sustitución por una barra ficticia



41

Bibliografía

BARRAS CURVAS Y BARRAS DE SECCIÓN VARIABLE

- OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (13.1 a 13.5)
- MONLEÓN, S. *Análisis de vigas, arcos, placas y láminas. Una presentación unificada*. Servicio de Publicaciones de la U.P.V., Valencia, 1999. (Capítulo 5 y 6.3)
- SAMARTÍN A. Y GONZÁLEZ, J. R.*Cálculo Matricial de Estructuras*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 2001. (7.4 y 7.8)
- BRAVO, G. Y MARTÍN, A. Tratamiento de elementos rectos y curvos de sección variable por métodos matriciales. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para CAlculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 5, 1, 3-38(1989)

43

Bibliografía

DESCONEXIONES

- SAMARTÍN A. Y GONZÁLEZ, J. R.*Cálculo Matricial de Estructuras*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 2001. (7.1)

NUDOS DE DIMENSIÓN FINITA

- LIVESLEY, R. K. *Métodos matriciales para cálculo de estructuras*, Blume, Madrid, 1970. (5.6)
- SAMARTÍN A. Y GONZÁLEZ, J. R.*Cálculo Matricial de Estructuras*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 2001. (7.6)
- SAEZ-BENITO, J.M. *Cálculo Matricial de Estructuras*. FEIN, Madrid, 1975. (IV.8)

Bibliografía

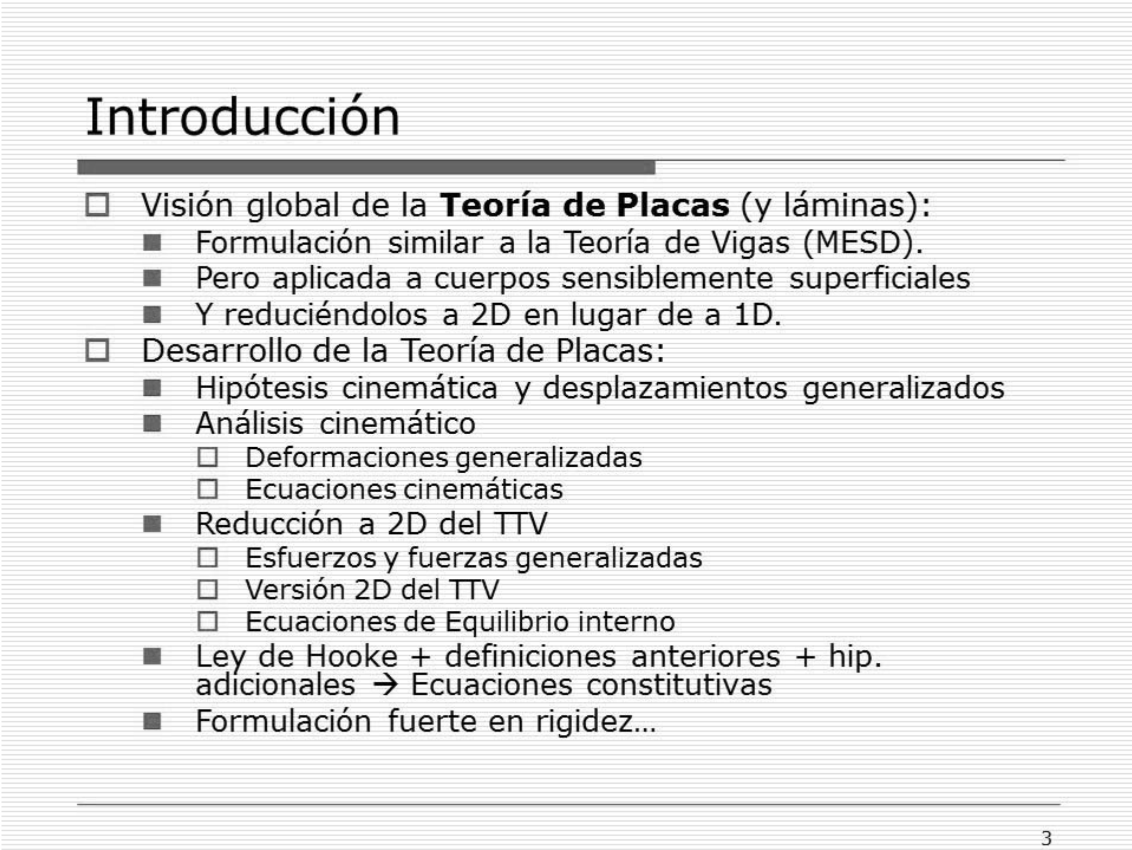
ENLACES NO CONCORDANTES Y ENLACES ELÁSTICOS

- SAMARTÍN A. Y GONZÁLEZ, J. R. *Cálculo Matricial de Estructuras*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 2001. (5.5)
- SAEZ-BENITO, J.M. *Cálculo Matricial de Estructuras*. FEIN, Madrid, 1975. (III.8)

Tema 10:

Introducción a la Teoría de Placas

Introducción



Introducción

- Lámina
  - Sólido de forma curvada
  - Una dimensión notablemente menor que las otras dos
  - Es capaz de resistir y de transmitir cargas
- Ejemplos:
  - El caso de un buque
  - Algunas cubiertas
  - Las torres de refrigeración
  - El revestimiento de un túnel o falso túnel
  - Las paredes de los depósitos y silos ...
  - La cáscara de un huevo o de una tortuga, o el cráneo humano.

4

Introducción

- Placa
  - Lámina de forma plana
- Ejemplos:
  - Losas cimentación
  - Algunos forjados
  - Muros
  - Puentes losa
  - El tablero de una mesa
  - Las tapas de registro…
  - Elementos parciales de estructuras más complejas

5

Introducción

- Teoría de placas

  Teoría simplificada, derivada de la elasticidad lineal, que permite resolver el problema elástico de una placa sometida a una solicitación genérica con aproximación suficiente para la aplicación práctica.

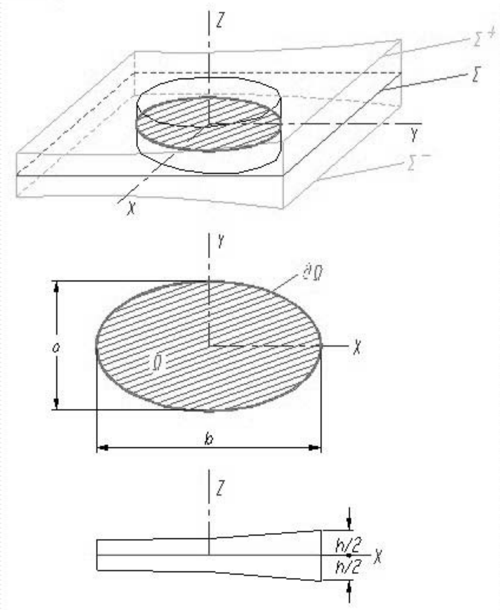
- Denominaciones:
  - Teoría de placas
  - Tensión plana generalizada (estado membrana) → Lajas

6

Introducción

- PLACA:

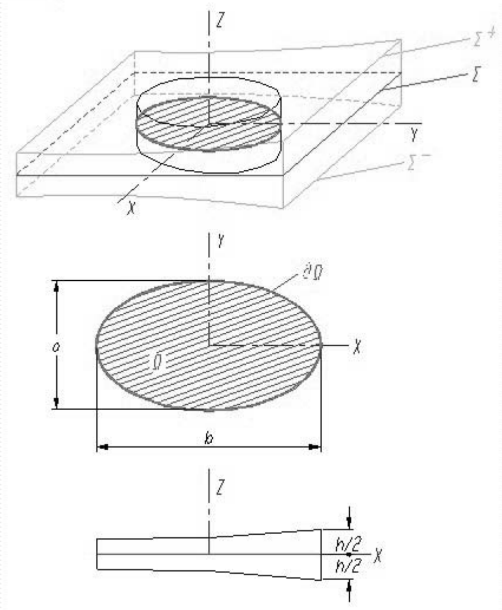
  Sólido limitado por dos superficies, Σ^+ y Σ^-, simétricas respecto a un plano de referencia Σ (habitualmente, el plano medio), y por un cilindro $\partial\Lambda$ de generatrices perpendiculares al plano Σ que tiene como directriz una curva cerrada $\partial\Omega$ contenida en este plano, que cumple que el grosor h, en cualquier punto, es mucho menor que la menor dimensión del área Ω intersección de la placa con el plano de referencia, $\min\{a, b\}$.



7

Introducción

- Notación
  - Ω^+ es la cara superior de la placa,
  - Ω^- es la cara inferior de la placa,
  - Ω es la intersección del cuerpo con el plano medio Σ,
  - $\partial\Omega$ es el contorno de Ω,
  - $\partial\Lambda$ es la superficie lateral (cilindro de directriz $\partial\Omega$ y generatrices paralelas a Z)
  - h, grosor, que se mide desde Σ^+ a Σ^+ en dirección perpendicular a Σ.
- Sistema de referencia
  - Cartesiano, dextrógiro y siendo $Z = 0$ el plano de referencia (ver figura).



8

Hipótesis fundamentales

Hipótesis fundamentales

- Hipótesis de pequeños desplazamientos
- Hipótesis cinemática
  - **Love-Kirchhoff**:
    Una placa se deforma de manera que las normales a la superficie media inicial permanecen rectas, indeformadas y normales a la superficie media deformada durante todo el proceso.
  - **Reissner-Mindlin**:
    Una placa se deforma de manera que las normales a la superficie media inicial permanecen rectas e indeformadas durante todo el proceso.
- Hipótesis constitutiva:
  - Ley de Hooke Generalizada + $\sigma_Z=0$

10

Cinemática

Cinemática

- Campo de desplazamientos
  - Love-Kirchhoff

$$u^*(X,Y,Z)=\boxed{u(X,Y)}-Zw_{,X}(X,Y)$$

$$v^*(X,Y,Z)=\boxed{v(X,Y)}-Zw_{,Y}(X,Y)$$

$$w^*(X,Y,Z)=\boxed{w(X,Y)}$$

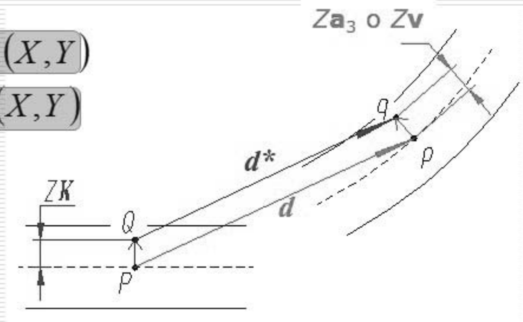
  - Reissner-Mindlin

$$u^*(X,Y,Z)=\boxed{u(X,Y)}+Z\boxed{\varphi_X(X,Y)}$$

$$v^*(X,Y,Z)=\boxed{v(X,Y)}+Z\boxed{\varphi_Y(X,Y)}$$

$$w^*(X,Y,Z)=\boxed{w(X,Y)}$$

Desplazamientos generalizados



12

Cinemática

- Deformaciones (Love-Kirchhoff)

$$\varepsilon^*_X = \boxed{\varepsilon_X} - Z\boxed{\chi_{XX}}$$
$$\varepsilon^*_Y = \boxed{\varepsilon_Y} - Z\boxed{\chi_{YY}}$$
$$\varepsilon^*_{XY} = \boxed{\varepsilon_{XY}} - Z\boxed{\chi_{XY}}$$
$$\varepsilon^*_Z = \varepsilon^*_{XZ} = \varepsilon^*_{YZ} = 0$$

Deformaciones generalizadas

- Ecuaciones cinemáticas (Love-Kirchhoff)

$$\varepsilon_X = u,_X \qquad \chi_{XX} = w,_{XX}$$
$$\varepsilon_Y = v,_Y \qquad \chi_{YY} = w,_{YY}$$
$$\varepsilon_{XY} = \frac{1}{2}\left(u,_Y + v,_X\right) \qquad \chi_{XY} = w,_{XY}$$

13

Cinemática

- Deformaciones (Reissner-Mindlin)

$$\varepsilon^*_X = \varepsilon_X - Z\chi_{XX} \qquad \varepsilon^*_{XZ} = \varepsilon_{XZ}$$

$$\varepsilon^*_Y = \varepsilon_Y - Z\chi_{YY} \qquad \varepsilon^*_{YZ} = \varepsilon_{YZ}$$

$$\varepsilon^*_{XY} = \varepsilon_{XY} - Z\chi_{XY} \qquad \varepsilon^*_Z = 0$$

Deformaciones generalizadas

- Ecuaciones cinemáticas (Reissner-Mindlin)

$$\varepsilon_X = u,_X \qquad \chi_{XX} = -\varphi_X,_X \qquad \varepsilon_{XZ} = \frac{1}{2}\left(\varphi_X + w,_X\right)$$

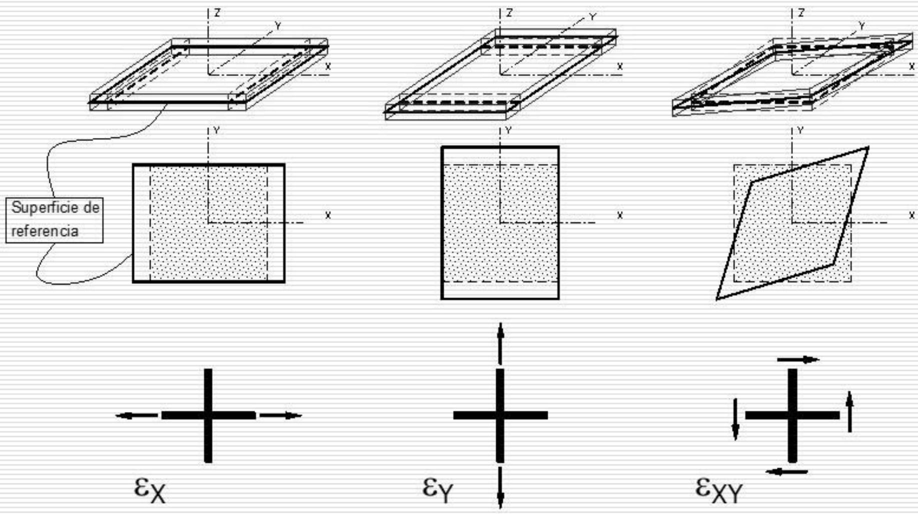
$$\varepsilon_Y = v,_Y \qquad \chi_{YY} = -\varphi_Y,_Y \qquad \varepsilon_{YZ} = \frac{1}{2}\left(\varphi_Y + w,_Y\right)$$

$$\varepsilon_{XY} = \frac{1}{2}\left(u,_Y + v,_X\right) \qquad \chi_{XY} = \frac{1}{2}\left(-\varphi_X,_Y - \varphi_Y,_X\right)$$

14

Cinemática

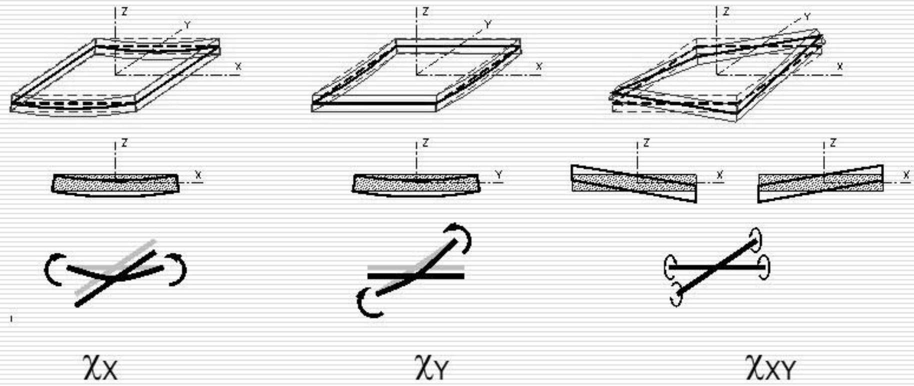
- Interpretación física deformaciones generalizadas (Love-Kirchhoff y Reissner-Mindlin)



15

Cinemática

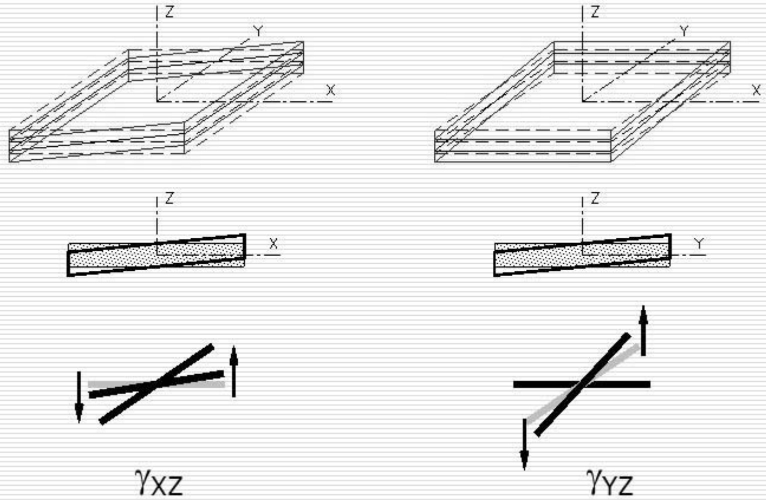
- Interpretación física deformaciones generalizadas (Love-Kirchhoff y Reissner-Mindlin)



16

Cinemática

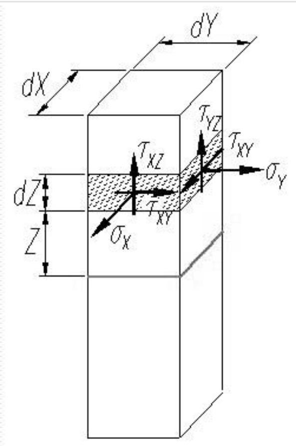
- Interpretación física deformaciones generalizadas (sólo Reissner-Mindlin)

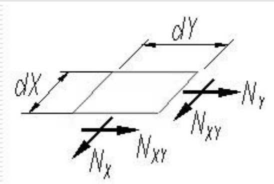


17

Estática

- Esfuerzos de membrana
  (Love-Kirchhoff y Reissner-Mindlin)





$$N_X = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_X dZ$$

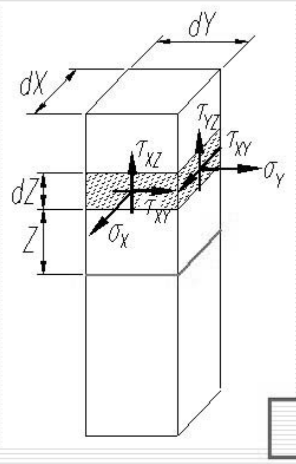
$$N_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_Y dZ$$

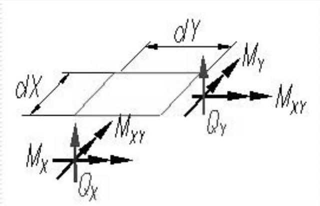
$$N_{XY} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{XY} dZ$$

19

Estática

- Esfuerzos de flexión –o de placa– (Love-Kirchhoff y Reissner-Mindlin)





En la teoría de Love-Kirchhoff no aparecen los cortantes

$$M_X = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\sigma_X dZ$$

$$M_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\sigma_Y dZ$$

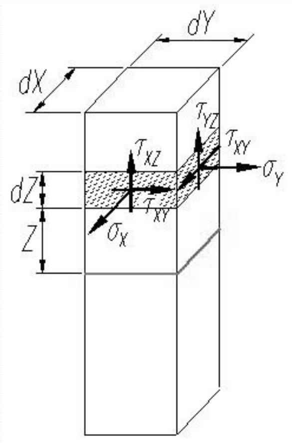
$$M_{XY} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\tau_{XY} dZ$$

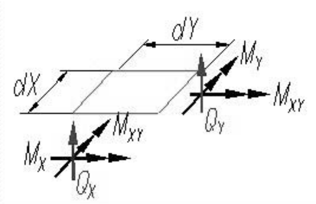
Notación !!

20

Estática

- Esfuerzos de flexión –o de placa– (sólo Reissner-Mindlin)





En la teoría de Love-Kirchhoff no aparecen los cortantes

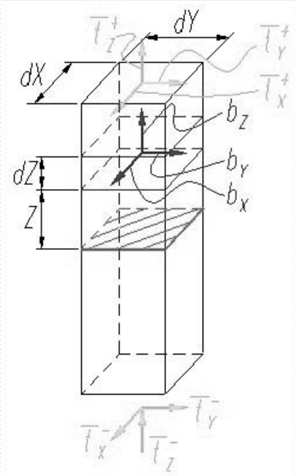
$$Q_X = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{XZ} dZ$$

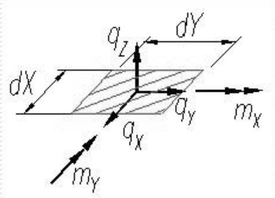
$$Q_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{YZ} dZ$$

21

Estática

- Fuerzas generalizadas en el interior del dominio (I) (Love-Kirchhoff y Reissner-Mindlin)





$$q_X = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_X dZ + \bar{t}_X^+ + \bar{t}_X^-$$

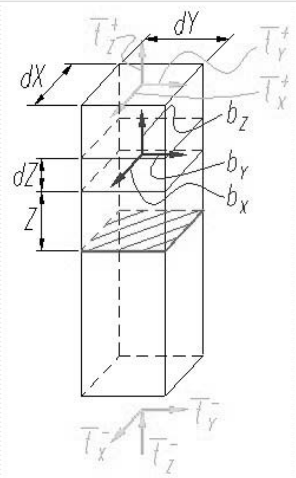
$$q_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_Y dZ + \bar{t}_Y^+ + \bar{t}_Y^-$$

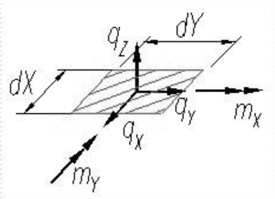
$$q_Z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_Z dZ + \bar{t}_Z^+ + \bar{t}_Z^-$$

22

Estática

- Fuerzas generalizadas en el interior del dominio (II) (Love-Kirchhoff y Reissner-Mindlin)





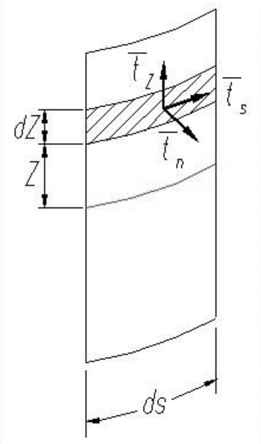
Suelen despreciarse

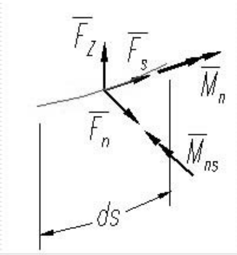
$$m_X = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z b_X dZ + \frac{h}{2}\bar{t}_X^{+} - \frac{h}{2}\bar{t}_X^{-}$$

$$m_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z b_Y dZ + \frac{h}{2}\bar{t}_Y^{+} - \frac{h}{2}\bar{t}_Y^{-}$$

Estática

- Fuerzas generalizadas en el contorno (Reissner-Mindlin)





$$\bar{F}_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{t}_n dZ$$

$$\bar{F}_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{t}_s dZ$$

$$\bar{F}_Z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{t}_Z dZ$$

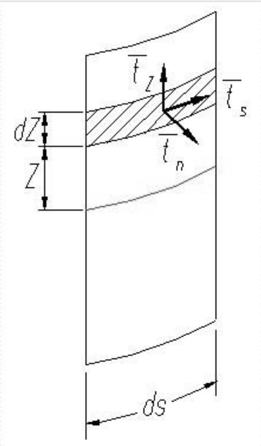
$$\bar{M}_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\bar{t}_n dZ$$

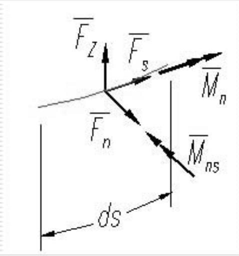
$$\bar{M}_{ns} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\bar{t}_s dZ$$

24

Estática

- Fuerzas generalizadas en el contorno (Love-Kirchhoff)





Fuerza $\mathscr{F}_Z$ efectiva

$$\overline{F}_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{t}_n dZ$$

$$\overline{F}_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{t}_s dZ$$

$$\overline{M}_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\bar{t}_n dZ$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}_Z &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{t}_Z dZ \\ \overline{M}_{ns} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\bar{t}_s dZ \end{aligned}\right\} \leftarrow \quad \overline{\mathscr{F}}_Z = \overline{F}_Z + \overline{M}_{ns},_s$$

Estática

- Ecuaciones de equilibrio interno (Reissner-Mindlin)

$$N_{X,X} + N_{XY,Y} + q_X = 0$$
$$N_{Y,Y} + N_{XY,X} + q_Y = 0$$
$$Q_{X,X} + Q_{Y,Y} + q_Z = 0$$
$$-M_{XY,X} - M_{Y,Y} + Q_Y - \cancel{m_Y} = 0$$
$$M_{X,X} + M_{XY,Y} - Q_X + \cancel{m_X} = 0$$

- Ecuaciones de equilibrio interno (Love-Kirchhoff)

$$N_{X,X} + N_{XY,Y} + q_X = 0$$
$$N_{Y,Y} + N_{XY,X} + q_Y = 0$$
$$M_{X,XX} + 2M_{XY,XY} + M_{Y,YY} + \cancel{m_X}_{,X} + \cancel{m_Y}_{,Y} + q_Z = 0$$

26

Estática

- Condiciones de contorno (Reissner-Mindlin)

$$u_n = \bar{u}_n \quad \text{o} \quad N_n - \bar{F}_n = 0$$
$$v_s = \bar{v}_s \quad \text{o} \quad N_{ns} - \bar{F}_s = 0$$
$$w = \bar{w} \quad \text{o} \quad Q_n - \bar{F}_Z = 0$$
$$\varphi_s = \bar{\varphi}_s \quad \text{o} \quad M_s - \bar{M}_{sn} = 0$$
$$\varphi_n = \bar{\varphi}_n \quad \text{o} \quad M_n - \bar{M}_n = 0$$

- Condiciones de contorno (Love-Kirchhoff)

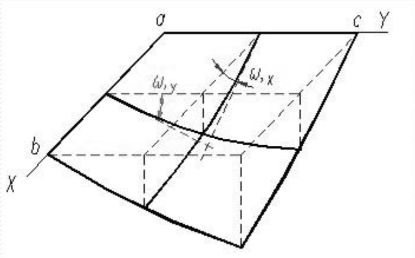
$$u_n = \bar{u}_n \quad \text{o} \quad N_n - \bar{F}_n = 0$$
$$v_s = \bar{v}_s \quad \text{o} \quad N_{ns} - \bar{F}_s = 0$$
$$w,_n = \bar{w},_n \quad \text{o} \quad M_n - \bar{M}_n = 0$$
$$w = \bar{w} \quad \text{o} \quad \left(Q_n + M_{ns},_s\right) - \left(\bar{F}_Z + \bar{M}_{ns},_s\right) = 0$$

27

Estática

- Condición de contorno de borde libre de Kirchhoff (Love-Kirchhoff)
  - Desplazamientos generalizados en el contorno
    - *u*, *v* y $w,_n$ son independientes
    - *w* determina $w,_s$
  - Condiciones de contorno cinemáticas independientes

$$u(s)=\bar{u}(s)$$
$$v(s)=\bar{v}(s)$$
$$w,_n(s)=\bar{w},_n(s)$$
$$w(s)=\bar{w}(s)\Rightarrow w,_s(s)=\bar{w},_s(s)$$

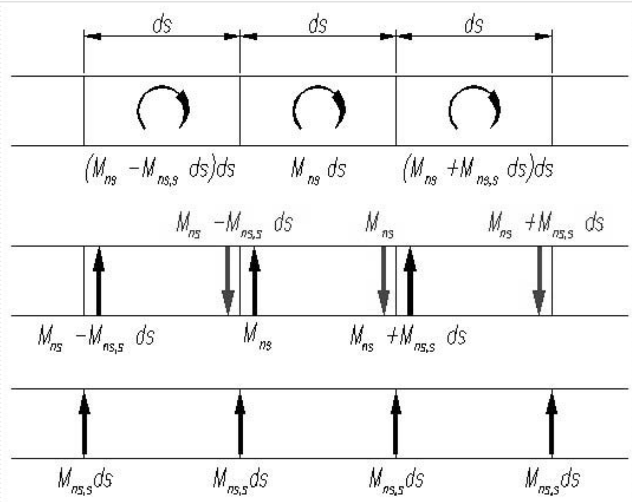


Observe que *w(s)* determina *w(s)*$,_s$ pero no *w(s)*$,_n$

28

Estática

- Condición de contorno de borde libre de Kirchhoff (Love-Kirchhoff)

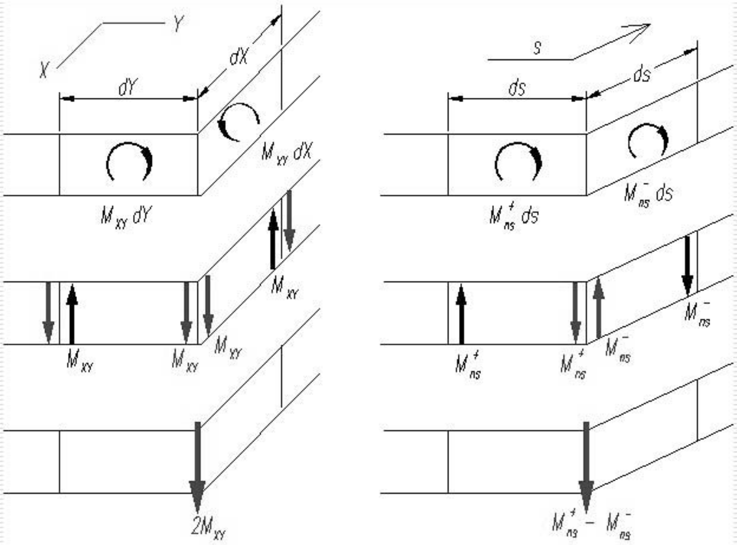


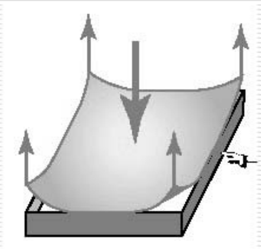
$$\underbrace{\left(Q_n + M_{ns,s}\right)}_{=\,V_n \ \text{Cortante efectivo}} - \underbrace{\left(\overline{F}_Z + \overline{M}_{ns,s}\right)}_{=\ \text{Fuerza exterior efectiva}} = 0$$

29

Estática

- Reacciones de Kirchhoff (Love-Kirchhoff)

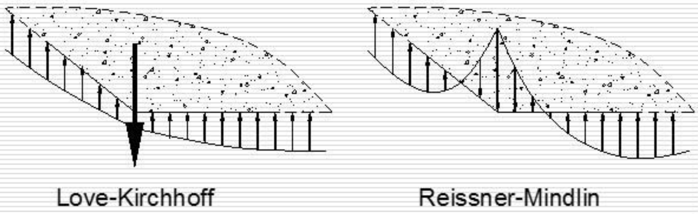


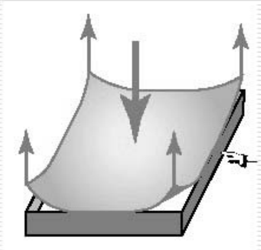


30

Estática

- "Reacciones de Kirchhoff" y placas de Reissner-Mindlin





31

Relaciones constitutivas

- Love-Kirchhoff y Resinner-Mindlin

$$N_X = A(\varepsilon_X + \nu\varepsilon_Y) \qquad M_X = -D(\chi_{XX} + \nu\chi_{YY})$$

$$N_Y = A(\varepsilon_Y + \nu\varepsilon_X) \qquad M_Y = -D(\chi_{YY} + \nu\chi_{XX})$$

$$N_{XY} = A(1-\nu)\varepsilon_{XY} \qquad M_{XY} = -D(1-\nu)\chi_{XY}$$

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2} \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

- Sólo Reissner-Mindlin (se añaden a las anteriores)

$$Q_Z = C\varepsilon_{XY}$$

$$Q_Z = C\varepsilon_{XZ}$$

$$C = 2\kappa Gh$$

κ Es el factor de corrección del cortante, que suele tomarse igual a 5/6 (recuérdese las vigas de Timoshenko y el factor correspondiente a sección rectangular).

33

Distribuciones tensionales

Distribuciones tensionales

- Love-Kirchhoff y Resinner-Mindlin

$$\sigma_X = \frac{N_X}{h} + \frac{12M_X}{h^3} Z$$

$$\sigma_Y = \frac{N_Y}{h} + \frac{12M_Y}{h^3} Z$$

$$\tau_{XY} = \frac{N_{XY}}{h} + \frac{12M_{XY}}{h^3} Z$$

$$\sigma_Z = 0$$

$$\tau_{XZ} = \frac{6Q_X}{h^3}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - Z^2\right)$$

$$\tau_{YZ} = \frac{6Q_Y}{h^3}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - Z^2\right)$$

Justificación y obtención similares a las de la fórmula de Zhuravski en vigas

35

Bibliografías

Bibliografía

- REDDY, J. N., *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics.* John Wiley, New York, 1984
- MONLEÓN, S., *Análisis de Vigas, Arcos, Placas y Láminas: una Presentación Unificada.* Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1999.
- UGURAL, A.C. *Stresses in Plates and Shells* (2a ed.). McGraw-Hill, New York, 1999.
- TIMOSHENKO, S.P. Y WOINOWSKY-KIEGER, S., *Teoría de placas y láminas*. Ed. Urmo, Bilbao, 1975.

37

Bibliografía

- OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (Capítulos 8 y 9)
- CELIGÜETA, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.), San Sebastián, 2011. (Capítulo 7 y 8)
- ÁLVAREZ, R. ET AL. *Teoría General del MEF*. [en línea] UNED, Madrid, 2000. <http://www.uned.es/dpto-icf/ampliacion_estructuras/images/AF1TeoriaGraldelMEF.pdf > [Consulta: 14/12/2014] (Capítulo 6 y 7)

Tema 11:

Placas de Love-Kirchhoff por el Método de los Elementos Finitos

Introducción

Introducción

- Objetivos del tema:
  - Establecer la escritura matricial del TTV para la lámina plana (placa) de Love-Kirchhoff mostrando el desacoplamiento entre los estados membrana y placa
  - Mostrar las particularidades de las condiciones de contorno del problema de placa: condición de borde libre de Kirchhoff y reacciones de Kirchhoff
  - Identificar formalmente el estado membrana con el de tensión plana → misma formulación por el MEF.

3

Introducción

- Objetivos del tema:
  - Formular por el MEF la respuesta de placa (o de flexión) ...
    - ...describiendo algunos de los elementos finitos utilizados (los primeros, los más sencillos...), incluyendo rectángulos, triángulos y cuadriláteros
    - ...mostrando las dificultades de obtener elementos conformes y las posibilidades de resolución mediante elementos no conformes
    - ...señalando como, en general, la distorsión isoparamétrica no es suficiente para generar elementos útiles por problemas de grado de continuidad
    - ...presentando *grosso modo* algunos de los elementos sofisticados que han permitido resolver algunos de los problemas anteriores.

4

Introducción

- Observaciones:
  - Recordemos que la finalidad de la asignatura es proporcionar al alumno los conocimientos suficientes para utilizar con solvencia un programa comercial de cálculo de estructuras de orientación profesional
  - Para ello no necesita conocer un abultado catálogo de elementos finitos con las características de cada uno. Es suficiente con que conozca las características generales de cada familia y los problemas que podría encontrar para poder escoger en el improbable caso de tener esa opción.
  - Por ello se ha optado por dar una descripción sucinta de algunas funciones de forma sencillas, escogidas por su importancia o su interés didáctico, y una visión cualitativa de los procedimientos de obtención de otras más sofisticadas.

5

Introducción

- Observaciones (2):
  - Los desarrollos presentados en este tema pueden seguirse y ampliarse en Zienkiewicz (1980), Oñate (1992), Zienkiewicz y Taylor (1995), Celigüeta (2000) o Álvarez *el al.* (2000).
  - El tratamiento de los elementos presentados de forma cualitativa puede consultarse en Zienkiewicz (1980), Oñate (1992), Zienkiewicz y Taylor (1995).
  - En estos mismos textos, y con mayor extensión Zienkiewicz y Taylor (1995), pueden encontrarse comparaciones numéricas de los resultados obtenidos con distintos elementos.
  - En las referencias que figuran al final del tema se incluye las correspondientes a los congresos y artículos en los que se presentaron algunos de los elementos tratados. Muchas de ellas son accesibles por internet. Se facilitan como información adicional; no se espera que el estudiante se dirija a ellas sin haber consultado previamente las mencionadas en los párrafos anteriores.

6

Formulación matricial del TTV

El TTV en una placa de Love-Kirchhoff

Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Love-Kirchhoff

- Funcional[1]

$$\begin{aligned}\delta\Pi = \iint_{\Omega} \big(&\delta\varepsilon_X N_X + \delta\varepsilon_Y N_Y + 2\delta\varepsilon_{XY} N_{XY} - \\ &- \delta\chi_{XX} M_X - \delta\chi_{YY} M_Y - 2\delta\chi_{XY} M_{XY}\big) d\Omega \\ - \iint_{\Omega} \big\{&q_X \delta u + q_Y \delta v + q_Z \delta w - \cancelto{0}{m_X \delta w,_X} - \cancelto{0}{m_Y \delta w,_Y}\big\} d\Omega \\ - \oint_{\partial\Omega} \big\{&\overline{F}_n \delta u_n + \overline{F}_s \delta v_s + \overline{F}_Z \delta w - \overline{M}_n \delta w,_n - \overline{M}_{ns} \delta w,_s\big\} ds = 0 \\ &\forall\, \delta\mathbf{d} \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

[1] Adaptado de Reddy (1984, pág. 316).

8

Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Love-Kirchhoff

- Desacoplamiento

Estado membrana

$$\delta\Pi = \iint_\Omega \left(\delta\varepsilon_X N_X + \delta\varepsilon_Y N_Y + 2\delta\varepsilon_{XY} N_{XY}\right) d\Omega -$$

$$- \iint_\Omega \left\{q_X \delta u + q_Y \delta v\right\} d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \left\{\overline{F}_n \delta u_n + \overline{F}_s \delta v_s\right\} ds +$$

$$+ \iint_\Omega \left(-\delta\chi_{XX} M_X - \delta\chi_{YY} M_Y - 2\delta\chi_{XY} M_{XY}\right) d\Omega -$$

$$- \iint_\Omega \left\{q_Z \delta w\right\} d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \left\{\overline{F}_Z \delta w - \overline{M}_n \delta w,_n - \overline{M}_{ns} \delta w,_s\right\} ds = 0$$

Estado placa (flexión) $\quad \forall\, \delta\mathbf{d} \in \mathcal{A}$

9

Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Love-Kirchhoff

- Fuerzas en el contorno en el estado placa
(específico de la teoría Love-Kirchhoff)

$$\overline{M}_{ns}\delta w,_s = \left(\overline{M}_{ns}\delta w\right),_s - \overline{M}_{ns},_s\,\delta w$$

$$\oint_{\partial\Omega}\left\{\overline{F}_Z\delta w - \overline{M}_n\delta w,_n - \overline{M}_{ns}\delta w,_s\right\}ds =$$

$$= \oint_{\partial\Omega}\left\{\overline{F}_Z\delta w - \overline{M}_n\delta w,_n - \left(\overline{M}_{ns}\delta w\right),_s + \overline{M}_{ns},_s\,\delta w\right\}ds =$$

$$= \oint_{\partial\Omega}\left\{\underbrace{\left(\overline{F}_Z + \overline{M}_{ns},_s\right)}_{\text{Fuerza efectiva}}\delta w - \overline{M}_n\delta w,_n\right\}ds - \underbrace{\oint_{\partial\Omega}\left(\overline{M}_{ns}\delta w\right),_s\,ds}_{\text{Integral } I_C}$$

10

Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Love-Kirchhoff

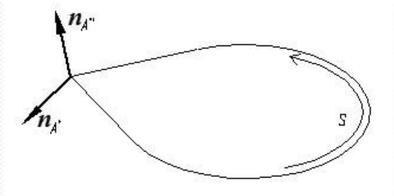
- Fuerzas en el contorno en el estado placa
  - Análisis de la integral I_C
    - Si el contorno es una curva suave (sin vértices) → Integral cerrada de una diferencial exacta

$$\oint_{\partial\Omega} \left(\overline{M}_{ns}\delta w\right)_{,s} ds = 0$$

    - Si el contorno tiene vértices

$$\oint_{\partial\Omega} \left(\overline{M}_{ns}\delta w\right)_{,s} ds = \left[\overline{M}_{ns}\delta w\right]_{A'}^{A''} =$$

$$= \underbrace{\left[\left(\overline{M}_{ns}\right)_{A''} - \left(\overline{M}_{ns}\right)_{A'}\right]}\delta w_A$$



Fuerza vertical que forma parte de la **reacción de Kirchhoff.**
Es un fuerza vertical porque el factor que la multiplica en la expresión del trabajo virtual es un desplazamiento vertical.

Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Love-Kirchhoff

- Fuerzas en el contorno en el estado placa
  - En la primera parte del desarrollo se ha obtenido la fuerza efectiva.
  - En la segunda se ha hallado la parte de la reacción de Kirchhoff debida a momentos exteriores.
  - En la práctica, ninguna de estas componentes es relevante porque no suelen considerarse momentos torsores exteriores.
    (¿Qué puede producirlos en el contorno de una placa?)
  - El desarrollo analítico del funcional para llegar a las ecuaciones de equilibrio interno y las condiciones de contorno de la placa hubiera conducido a la demostración rigurosa de la la condición de borde libre de Kirchhoff y de la existencia de las reacciones de Kirchhoff.

12

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado membrana

- Expresión matricial de la parte del funcional asociada al estado membrana

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{F}_n\delta u_n + \overline{F}_s\delta v_s = \\ &= \overline{F}_X\delta u + \overline{F}_Y\delta v\end{aligned}}$$

$$\delta\Pi_M = \iint_\Omega \left(\delta\varepsilon_X N_X + \delta\varepsilon_Y N_Y + 2\delta\varepsilon_{XY}N_{XY}\right)d\Omega -$$

$$-\iint_\Omega \left\{q_X\delta u + q_Y\delta v\right\}d\Omega - \oint_{\partial\Omega}\left\{\overline{F}_n\delta u_n + \overline{F}_s\delta v_s\right\}ds =$$

$$= \iint_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}_M^T\,\boldsymbol{\sigma}_M\,d\Omega - \iint_\Omega \delta\mathbf{d}_M^T\,\mathbf{q}_M\,d\Omega - \oint_{\partial\Omega}\delta\mathbf{d}_M^T\,\overline{\mathbf{F}}_M\,ds$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_M = \left(\delta\varepsilon_X \quad \delta\varepsilon_Y \quad \delta\gamma_{XY}\right)^T = \left(\delta\varepsilon_X \quad \delta\varepsilon_Y \quad 2\delta\varepsilon_{XY}\right)^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \left(N_X \quad N_Y \quad N_{XY}\right)^T$$

$$\delta\mathbf{d}_M = \left(u \quad v\right)^T \qquad \mathbf{q}_M = \left(q_X \quad q_Y\right)^T \qquad \overline{\mathbf{F}}_M = \left(\overline{F}_X \quad \overline{F}_Y\right)^T$$

14

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado membrana

- Estado membrana: deformaciones

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_M} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_M} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}_M}$$

$$N_X = A(\varepsilon_X + \nu\varepsilon_Y)$$
$$N_Y = A(\varepsilon_Y + \nu\varepsilon_X)$$
$$N_{XY} = A(1-\nu)\varepsilon_{XY} = \frac{A}{2}(1-\nu)\gamma_{XY}$$
$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

- Estado membrana: tensiones

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \mathbf{D}_M \boldsymbol{\varepsilon}_M \quad , \quad \mathbf{D}_M = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

15

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado membrana

- Estado membrana. Analogía con el estado de tensión plana
  - La expresión matricial del TTV es formalmente idéntica en ambos casos
  - Los vectores de desplazamientos $\mathbf{d_M}$ y $\mathbf{d}$, y de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ también son formalmente idénticos. Las matrices $\mathbf{L_M}$ y $\mathbf{L}$ coinciden.
  - En el estado membrana, el vector de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{M}=(N_X,N_YN_{XY})$ sustituye al de tensiones $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_X,\sigma_Y,\sigma_{XY})$ del de tensión plana. Nótese que el primero es el resultado de integrar sobre el espesor el segundo.
  - Las matrices $\mathbf{D_M}$ y $\mathbf{D}$ son formalmente iguales. De hecho, la del estado membrana es, simplemente, el resultado de multiplicar por *h* la de tensión plana.

Los problemas de estado membrana y tensión plana son análogos. Por el MEF se resuelven del mismo modo y usando los mismos elementos finitos.

16

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado placa

- Expresión matricial de la parte del funcional asociada al estado placa

$$\delta\Pi_P = \iint_\Omega \left(-\delta\chi_{XX}M_X - \delta\chi_{YY}M_Y - 2\delta\chi_{XY}M_{XY}\right)d\Omega -$$

$$- \iint_\Omega \left\{q_Z\delta w\right\}d\Omega - \oint_{\partial\Omega}\left\{\overline{\mathcal{F}}_Z\delta w - \overline{M}_n\delta w,_n\right\}ds =$$

$$= \iint_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^T\,\boldsymbol{\sigma}_P\,d\Omega - \iint_\Omega \delta\mathbf{d}_P^T\,\mathbf{q}_P\,d\Omega - \oint_{\partial\Omega}\delta\mathbf{d}_P^T\,\overline{\mathbf{F}}_P\,ds$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_P = \left(-\delta\chi_{XX} \quad -\delta\chi_{YY} \quad -2\delta\chi_{XY}\right)^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}_P = \left(M_X \quad M_Y \quad M_{XY}\right)^T$$

$$\delta\mathbf{d}_P = \left\{\delta w\right\} \qquad \mathbf{q}_P = \left\{q_Z\right\}$$

$$\delta\mathbf{d}_P^C = \left(\delta w \quad -\delta w,_n\right)^T \qquad \overline{\mathbf{F}}_M = \left(\overline{\mathcal{F}}_Z \quad \overline{M}_n\right)^T$$

18

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado placa

- Estado placa: deformaciones

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} -\chi_{XX} \\ -\chi_{YY} \\ -2\chi_{XY} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\partial^2/\partial X^2 \\ -\partial^2/\partial Y^2 \\ -2\,\partial^2/\partial X\partial Y \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_P} \underbrace{\begin{Bmatrix} w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}_P}$$

Nótese que el signo menos se incluye en el vector de deformaciones

$$M_X = -D(\chi_{XX} + \nu\chi_{YY})$$
$$M_Y = -D(\chi_{YY} + \nu\chi_{XX})$$
$$M_{XY} = -D(1-\nu)\chi_{XY}$$
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

- Estado placa: tensiones

$$\boldsymbol{\sigma}_P = \mathbf{D}_P \boldsymbol{\varepsilon}_P \quad , \quad \mathbf{D}_P = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}$$

19

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado placa

- Estado placa: Desplazamientos en el contorno

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} w \\ -w,_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}_P^C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -n_x \dfrac{\partial}{\partial X} - n_Y \dfrac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_P^C} \underbrace{\{w\}}_{\mathbf{d}_P}$$

- Más sobre el contorno
  - En general, sobre el contorno $\overline{M}_{ns} = \overline{M}_n = 0$
    - $\overline{F}_Z = \overline{\mathcal{F}}_Z$
    - El término que depende de la derivada normal no es necesario
  - Programas comerciales de orientación profesional
    - No suelen considerar las fuerzas en el contorno.
    - De existir, el analista ha de transformarlas en fuerzas en los nodos.

20

Discretización por elementos finitos

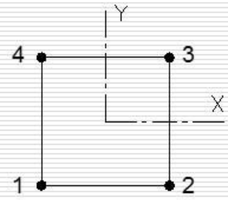
- Estado membrana → como Elasticidad 2D
- **Sólo estudiaremos el estado placa** (flexión)
  - Prescindiremos de los subíndices *P*
- Campo de desplazamientos estado placa
  $\mathbf{d} = \{w(X, Y)\}$
- Condiciones que han de cumplir las funciones de interpolación
  - Deformaciones → derivadas segundas de **d**
    - Deben existir las derivadas segundas ≠0
      → funciones de interpolación al menos cuadráticas
    - Se requiere **continuidad C^1** en el contorno

22

Discretización por elementos finitos
Elementos rectangulares

- Grados de libertad por nodo (elección usual)

$$w_i \quad , \quad \varphi_{Xi} = \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)_i \quad , \quad \varphi_{Yi} = \left(\frac{\partial w}{\partial Y}\right)_i$$



- 4 nodos = 12 g.d.l. = 12 constantes

$$1$$
$$\xi \quad \eta$$
$$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$$
$$\xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3$$

Cúbico = 10 const.

$$\xi^4 \quad \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \eta^4$$

Cuártico =15 const.

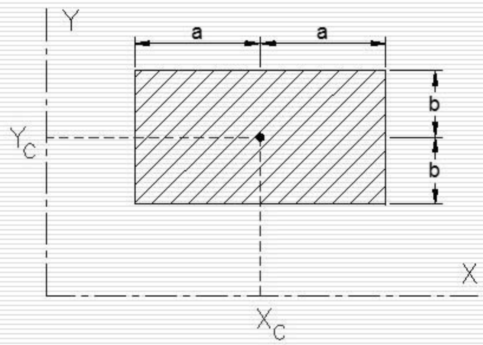
$$\xi^5 \quad \xi^4\eta \quad \xi^3\eta^2 \quad \xi^2\eta^3 \quad \xi\eta^4 \quad \eta^5$$
$$\xi^6 \quad \xi^5\eta \quad \xi^4\eta^2 \quad \xi^3\eta^3 \quad \xi^2\eta^4 \quad \xi\eta^5 \quad \eta^6$$

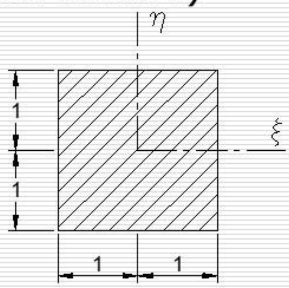
- No se puede utilizar un polinomio completo
- La elección de los 12 términos a conservar no es evidente.

24

Discretización por elementos finitos
Elementos rectangulares

- Coordenadas normalizadas (recordatorio)





$$\xi = \frac{X - X_C}{a} \quad \rightarrow \quad d\xi = \frac{dX}{a}$$

$$\eta = \frac{Y - Y_C}{a} \quad \rightarrow \quad d\eta = \frac{dY}{a}$$

$$dA = dXdY = ab\,d\xi d\eta$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(X,Y)\,dYdX = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)\,ab\,d\eta d\xi$$

25

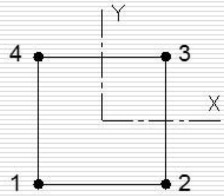
Discretización por elementos finitos
Elementos rectangulares

- Elemento MZC[1]

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 XY + \alpha_6 Y^2 + \alpha_7 X^3 + \alpha_8 X^2 Y +$$
$$+ \alpha_9 XY^2 + \alpha_{10} Y^3 + \alpha_{11} X^3 Y + \alpha_{12} XY^3$$

- Usando coordenadas normalizadas

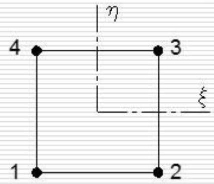
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \xi & & \eta & & & & & \\
 & & & & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 & & & & \\
 & & & \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 & & & \\
 & & \xi^4 & & \xi^3\eta & & \xi^2\eta^2 & & \xi\eta^3 & & \eta^4 & & \\
 & \xi^5 & & \xi^4\eta & & \xi^3\eta^2 & & \xi^2\eta^3 & & \xi\eta^4 & & \eta^5 & \\
\xi^6 & & \xi^5\eta & & \xi^4\eta^2 & & \xi^3\eta^3 & & \xi^2\eta^4 & & \xi\eta^5 & & \eta^6
\end{array}$$



[1] MELOSH (1961, 1963), ZIENKIEWICZ y CHEUNG (1964)

Discretización por elementos finitos
Elementos rectangulares

- Elemento MZC



$$w = \mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)}$$

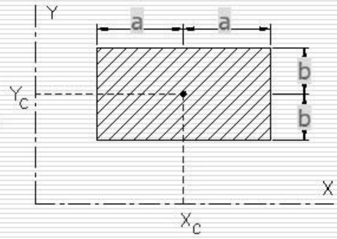
$$\mathbf{N} = \left[N_1 \quad \widehat{N}_1 \quad \breve{N}_1 \quad N_2 \quad \widehat{N}_2 \quad \breve{N}_3 \quad N_3 \quad \widehat{N}_3 \quad \breve{N}_3 \quad N_4 \quad \widehat{N}_4 \quad \breve{N}_4 \right]$$

$$\mathbf{a}^{(e)} = \left(w_1 \quad \varphi_{X1} \quad \varphi_{Y1} \quad w_2 \quad \varphi_{X2} \quad \varphi_{Y2} \quad w_3 \quad \varphi_{X3} \quad \varphi_{Y3} \quad w_4 \quad \varphi_{X4} \quad \varphi_{Y4} \right)$$

$$N_i = (1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\left(2+\xi_i\xi+\eta_i\eta-\xi^2-\eta^2\right)/8$$

$$\widehat{N}_i = a\left(\xi^2-1\right)(\xi+\xi_i)(1+\eta_i\eta)/8$$

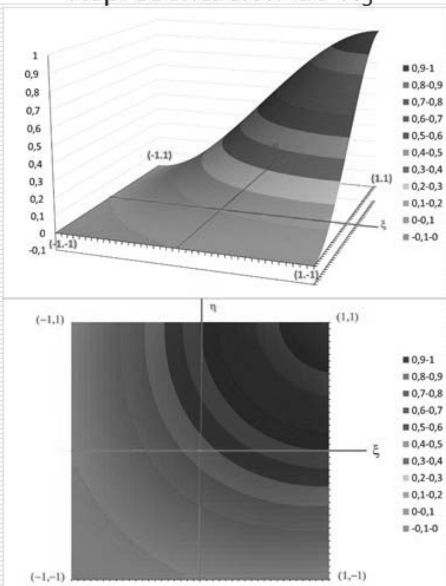
$$\breve{N}_i = b\left(\eta^2-1\right)(\eta+\eta_i)(1+\xi_i\xi)/8$$



a,b

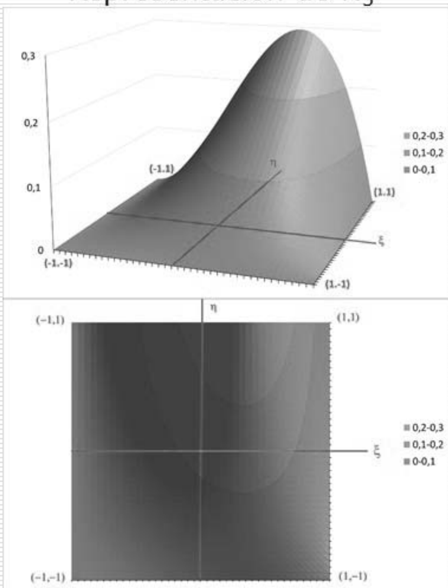
Discretización por elementos finitos
Elementos rectangulares

Representación de N_3

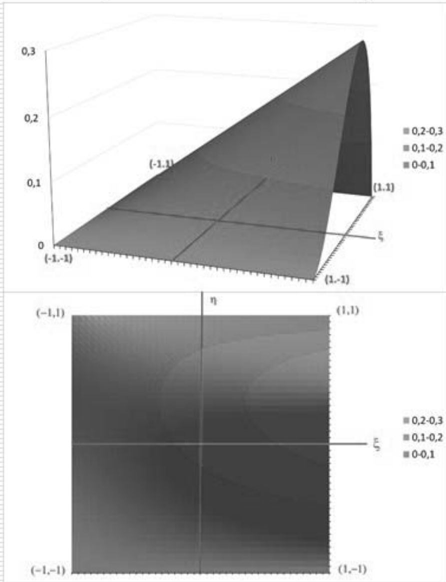


Discretización por elementos finitos Elementos rectangulares

Representación de $\widehat{N}_3$



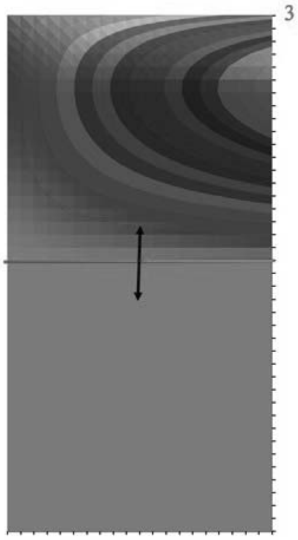
Representación de $\breve{N}_3$

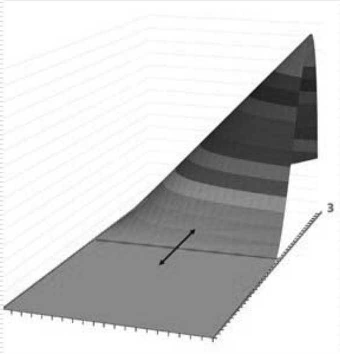


29

Discretización por elementos finitos
Elementos rectangulares

- Elemento **no conforme**





- 2 elementos adyacentes
- $\varphi_{Y,3}=1$, resto parámetros nodales nulos
- En la línea de separación dw/dY adopta valores diferentes a cada lado

30

Discretización por elementos finitos Elementos rectangulares

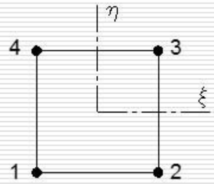
- Propiedades del elemento MZC

  - Es un elemento **no conforme**
  - El elemento rectangular satisface el test de la parcela
    → la solución aproximada tiende a la exacta al disminuir el tamaño de la malla
  - El elemento isoparamétrico distorsionado no satisface el test de la parcela, luego no permite obtener la solución exacta
  - Sólo es útil si la placa se puede discretizar mediante rectángulos

31

Discretización por elementos finitos
Elementos rectangulares

- El elemento BFS[1]



  - Adopta como g.d.l. en cada nodo

    $$w_i \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)_i \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial Y}\right)_i \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X \partial Y}\right)_i$$

  - La función de interpolación es un producto de dos polinomios de Hermite de tercer grado, uno en cada dirección
  - Es un elemento **conforme**
  - La extrapolación a elementos cuadrangulares requeriría usar como variables nodales **todas** las derivadas segundas, lo cual, en la práctica, supone un elemento muy poco eficiente por el tamaño de la matriz de rigidez.

[1] Bogner, Fox y Schmidt (1965)

32

Discretización por elementos finitos Elementos triangulares

- Coordenadas de área (recordatorio)

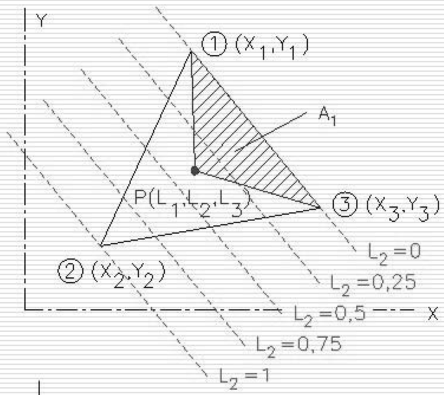
$$X = L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3$$

$$Y = L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + L_3 Y_3$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

$$\boxed{L_i = (a_i + b_i X + c_i Y)/2A}$$

$$\left.\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i &= Y_j - Y_k \\ c_i &= X_k - X_j \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (i,j,k) = (1{,}2{,}3),\\ (3{,}1{,}2),\\ (2{,}3{,}1) \end{aligned}$$



$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix} = 2 * \text{Área del triangulo}$$

$$\boxed{L_i = \frac{A_i}{A}}$$

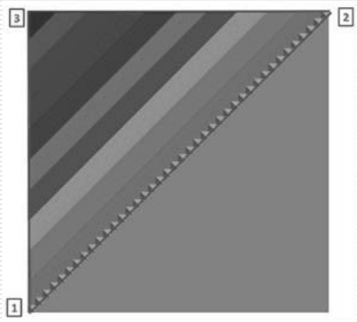
34

Discretización por elementos finitos
Elementos triangulares

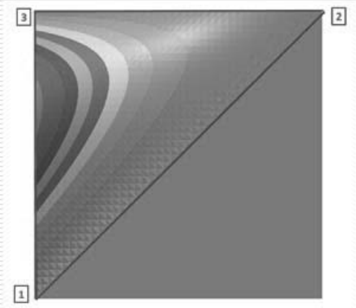
- Elemento CKZ[1]
  - Polinomio

$$w = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 \boxed{L_3} + \alpha_4\left(L_1 L_2^2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) + \alpha_5\left(\boxed{L_1 L_3^2} + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) +$$
$$+ \alpha_6\left(L_2 L_1^2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) + \alpha_7\left(L_2 L_3^2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) + \alpha_8\left(L_3 L_1^2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) +$$
$$+ \alpha_9\left(L_3 L_2^2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right)$$

L_3:



$L_1 L_3^2$:



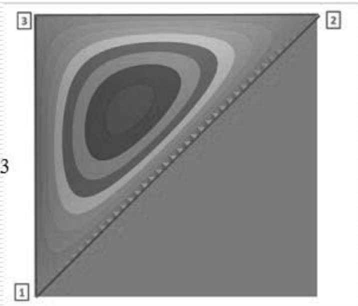
[1] Cheung, King y Zienkiewicz (1968).
Desarrollo inicial Bazeley, Cheung, Irons y Zienkiewicz (1965)

Discretización por elementos finitos
Elementos triangulares

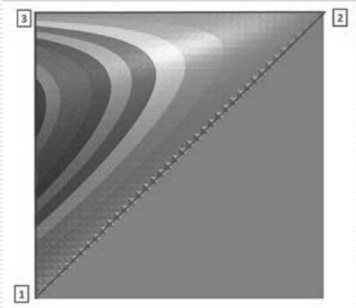
- Elemento CKZ
  - Polinomio

$$w=\alpha_1 L_1+\alpha_2 L_2+\alpha_3 L_3+\alpha_4\left(L_1 L_2^2+\tfrac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right)+\alpha_5\boxed{\left(L_1 L_3^2+\tfrac{1}{2}\boxed{L_1 L_2 L_3}\right)}+$$
$$+\alpha_6\left(L_2 L_1^2+\tfrac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right)+\alpha_7\left(L_2 L_3^2+\tfrac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right)+\alpha_8\left(L_3 L_1^2+\tfrac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right)+$$
$$+\alpha_9\left(L_3 L_2^2+\tfrac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right)$$

$L_1 L_2 L_3$



$\left(L_1 L_3^2+\tfrac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right)$



Discretización por elementos finitos
Elementos triangulares

- Elemento CKZ
  - Expresión convencional

$$w = \mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & \widehat{N}_1 & \breve{N}_1 & N_2 & \widehat{N}_2 & \breve{N}_2 & N_3 & \widehat{N}_3 & \breve{N}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{pmatrix} w_1 & \varphi_{X1} & \varphi_{Y1} & w_2 & \varphi_{X2} & \varphi_{Y2} & w_3 & \varphi_{X3} & \varphi_{Y3} \end{pmatrix}$$

$$N_1 = L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2$$

$$\widehat{N}_1 = b_3\left(L_1^2 L_2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) - b_2\left(L_1^2 L_3 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right)$$

$$\breve{N}_i = c_3\left(L_1^2 L_2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) - c_2\left(L_1^2 L_3 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right)$$

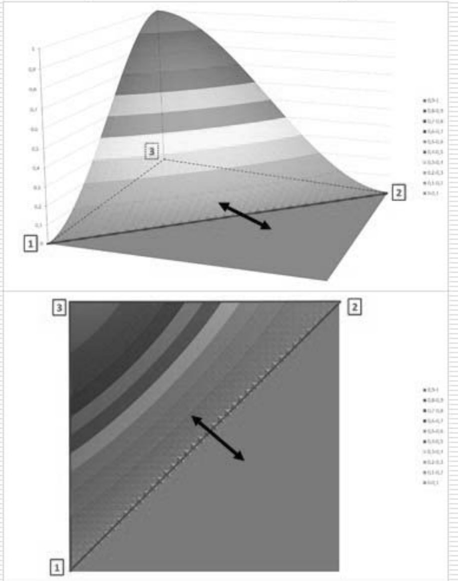
$$b_1 = y_2 - y_3 \quad , \quad c_1 = x_3 - x_2 \ldots$$

Los restantes valores se obtienen mediante permutaciones cíclicas de los índices 1,2,3.

37

Discretización por elementos finitos Elementos triangulares

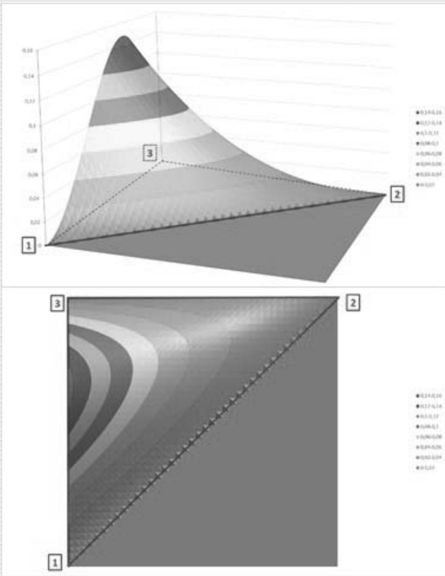
Representación de N_3



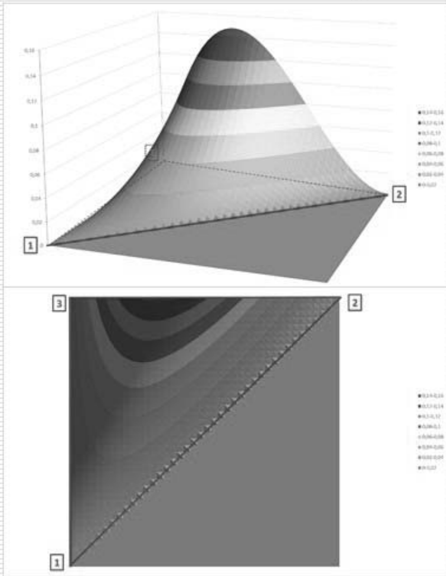
Elemento
no conforme

Discretización por elementos finitos
Elementos triangulares

Representación de $\widehat{N}_1$



Representación de $\breve{N}_3$



39

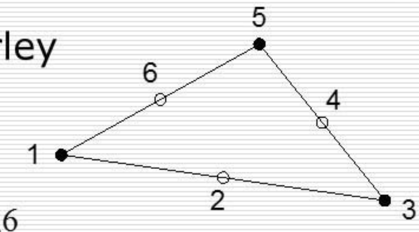
Discretización por elementos finitos Elementos triangulares

- Propiedades del elemento CKZ
  - Se trata de un elemento **no conforme**
  - Al aumentar la subdivisión converge monotónamente a la solución exacta
  - Por ser triangular permite adaptarse a cualquier contorno.
  - Se han propuesto algunas modificaciones de este elemento que mejoran su comportamiento. Cabe citar la de Spetch (1988):
    - Sustituye los términos cúbicos por términos cuárticos
    - Cumple el criterio de la parcela
    - Proporciona buenos resultados.

40

Discretización por elementos finitos Elementos triangulares

- Elemento de 6 nodos de Morley



  - Grados de libertad

$$w_i \quad i = 1,3,5 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i \quad i = 2,4,6$$

  - Aproximación de *w* polinómica de 2º grado
    - Deformaciones constantes en el elemento
  - Es el elemento de placa más sencillo posible
  - No garantiza la continuidad de los giros (no respeta la exigencia de continuidad C[1]).
  - Pese a ello, converge.

[1] Morley (1968), Morley (1971)

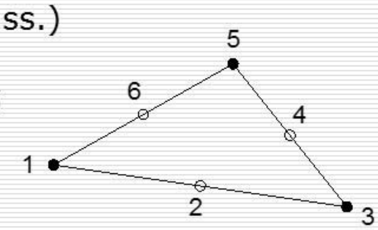
41

Discretización por elementos finitos
Elementos triangulares

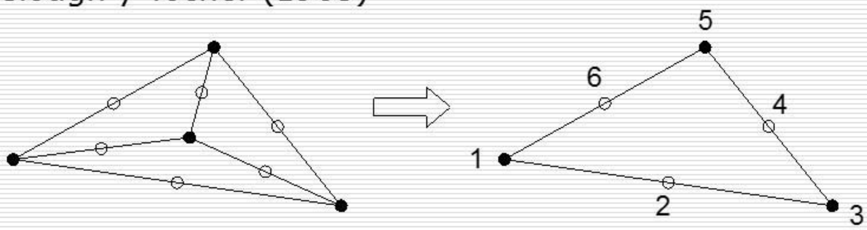
- Elementos triangulares conformes
  - Zienkiewicz (1980, pág. 290 y ss.)

$$\left(w_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right)_i \right) \quad , \quad i = 1,3,5$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \quad , \quad i = 2,4,6$$



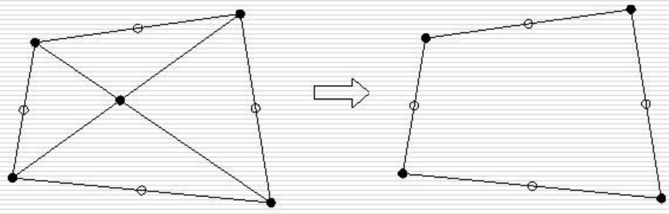
  - Clough y Tocher (1965)



42

Discretización por elementos finitos
Elementos cuadriláteros conformes

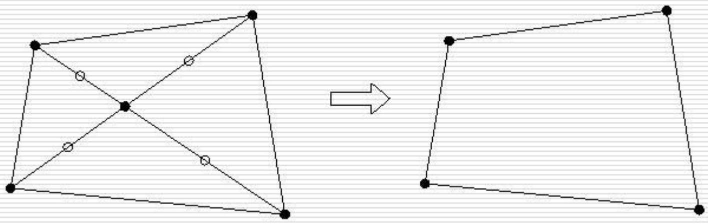
- Sanders (1964), de Veubeke (1965, 1968)



$$\bullet \quad \begin{pmatrix} w_i \\ \left(\partial w / \partial X\right)_i \\ \left(\partial w / \partial Y\right)_i \end{pmatrix}$$

$$\circ \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i$$

- Clough y Felippa (1965)



44

Bibliografía

Bibliografía

- Zienkiewicz, O.C. *El método de los elementos finitos*. Reverté, Barcelona, 1980. (Capítulo 10)
- Oñate, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (Capítulo 8)
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. *El método de los elementos finitos. Volumen 2:Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y No Linealidad*, (4ª ed.) McGraw-Hill, Madrid, y CIMNE, Barcelona, 1995. (Capítulo 1)
- Celigüeta, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.), San Sebastián, 2011. (Capítulo 7)
- Álvarez, R. et al. *Teoría General del MEF*. [en línea] UNED, Madrid, 2000. <http://www.uned.es/dpto-icf/ampliacion_estructuras/images/AF1TeoriaGraldelMEF.pdf > [Consulta: 14/12/2014] (Capítulo 6)
- Reddy, J. N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. Wiley, New York, 1983. (Capítulo 4)

Bibliografía

- MELOSH, R. J.. "A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending", Journal of the Aerospace Sciences, Vol. **28**, **1,** (1961), pp. 34-42
- MELOSH, R.J. "Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method", A.I.A.A.J. Vol. **1**, **7**, (1963) pp. 1631-1637
- ZIENKIEWICZ, O.C. y CHEUNG, Y.K. "The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs", *Proc. Inst. Civ, Engng*. Vol. **28**, **4**, (1964) pp. 471-488
- BOGNER, F. K., FOX, R.L. Y SCHMIT, L.A. "The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae", *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech*. Air Force Inst. Of Tech. Wright Patterson A.F. Base, Ohio, (1965), pp. 397-443.
- BAZELEY, G. P., CHEUNG, Y. K., IRONS, B. M., Y ZIENKIEWICZ, O. C. "Triangular elements in plate bending–conforming and nonconforming solutions". *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech*. Air Force Inst. Of Tech. Wright Patterson A.F. Base, Ohio, (1965), pp. 547-576.

47

Bibliografía

- CHEUNG, Y. K., KING, I. P., Y ZIENKIEWICZ, O. C. "Slab bridges with arbitrary shape and support conditions: a general method of analysis based on finite elements". In *ICE Proceedings,* vol. **40**, **1**, (1968) pp. 9-36.
- SPECHT, B. "Modified shape functions for the three-node plate bending element passing the patch test". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, vol. **26**, **3**, pp. 705-715.
- MORLEY, L. S. D. "The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems". *Aero. Quart*, vol. **19**, (1968), pp. 149-169.
- MORLEY, L. S. D. "The constant-moment plate-bending element". *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. **6**, **1**, (1971) pp. 20-24.
- CLOUGH, R. W., TOCHER, J. L. "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending". *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech*. Air Force Inst. Of Tech. Wright Patterson A.F. Base, Ohio, (1965), pp 515-545.

Bibliografía

- SANDER, G. « Bornes superiores et inferieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion ». *Bull. Soc. Royale Sciences Liege*, vol. **33**, (1964) pp. 7-8.
- DE VEUBEKE, B.F. "Bending and stretching of plates", Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Air Force Inst. Of Tech. Wright Patterson A.F. Base, Ohio, (1965).
- DE VEUBEKE, B.F. "A conforming finite element for plate bending". *International Journal of Solids and Structures*, vol. **4**, **1**, (1968), pp. 95-108.
- CLOUGH, R.W., Y FELIPPA, C.A. "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending". *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech*. Air Force Inst. Of Tech. Wright Patterson A.F. Base, Ohio, (1965), pp. 399-440.

Tema 12:

Placas de Reissner-Mindlin por el Método de los Elementos Finitos

Introducción

Introducción

- Objetivos del tema:
  - Establecer la escritura matricial del TTV para la lámina plana (placa) de Reissner-Mindlin mostrando el desacoplamiento entre los estados membrana y placa
  - Identificar formalmente el estado membrana con el de tensión plana → misma formulación por el MEF.
  - Formular por el MEF la respuesta de placa y mostrar que se puede determinar usando los mismos elementos finitos que en elasticidad 2D.
  - Justificar la aparición del bloqueo y describir las técnicas para evitarlo.

3

Formulación matricial del TTV

El TTV en una placa de Reissner-Mindlin

Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Reissner-Mindlin

- Funcional[1]

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi = \iint_{\Omega} \big(& \delta\varepsilon_X N_X + \delta\varepsilon_Y N_Y + 2\delta\varepsilon_{XY} N_{XY} - \\
& - \delta\chi_{XX} M_X - \delta\chi_{YY} M_Y - 2\delta\chi_{XY} M_{XY} + \\
& + 2Q_X \delta\varepsilon_{XZ} + 2Q_Y \delta\varepsilon_{YZ} \big) d\Omega \\
& - \iint_{\Omega} \left\{ q_X \delta u + q_Y \delta v + q_Z \delta w + \cancelto{0}{m_X \delta\varphi_X} + \cancelto{0}{m_Y \delta\varphi_Y} \right\} d\Omega \\
& - \oint_{\partial\Omega} \left\{ \overline{F}_n \delta u_n + \overline{F}_s \delta v_s + \overline{F}_Z \delta w + \overline{M}_n \delta\varphi_n + \overline{M}_{ns} \delta\varphi_s \right\} ds = 0 \\
& \qquad \forall\, \delta\mathbf{d} \in \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

[1] Reddy (1984, pág. 357). En realidad, define la energía potencial, de cuya expresión es inmediato extrapolar la del trabajo virtual.

5

Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Reissner-Mindlin

- Desacoplamiento

Estado membrana

$$\delta\Pi = \iint_{\Omega}\left(\delta\varepsilon_X N_X + \delta\varepsilon_Y N_Y + 2\delta\varepsilon_{XY} N_{XY}\right)d\Omega -$$

$$-\iint_{\Omega}\left\{q_X \delta u + q_Y \delta v\right\}d\Omega - \oint_{\partial\Omega}\left\{\overline{F}_n \delta u_n + \overline{F}_s \delta v_s\right\}ds +$$

$$+\iint_{\Omega}\left(-\delta\chi_{XX} M_X - \delta\chi_{YY} M_Y - 2\delta\chi_{XY} M_{XY} +\right.$$

$$\left. + 2Q_X \delta\varepsilon_{XZ} + 2Q_Y \delta\varepsilon_{YZ}\right)d\Omega$$

$$-\iint_{\Omega}\left\{q_Z \delta w\right\}d\Omega - \oint_{\partial\Omega}\left\{\overline{F}_Z \delta w + \overline{M}_n \delta\varphi_n + \overline{M}_{ns} \delta\varphi_s\right\}ds = 0$$

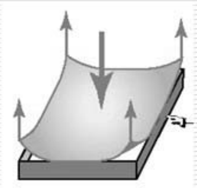
Estado placa (flexión)

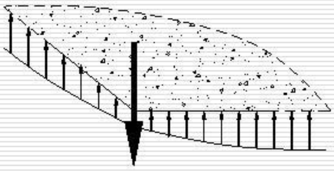
$$\forall\, \delta\mathbf{d} \in \mathcal{A}$$

6

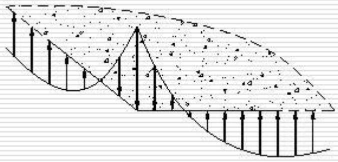
Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Reissner-Mindlin

- Fuerzas en el contorno
  - En la expresión del trabajo virtual no interviene $\delta w_{,s}$ por lo que no aparecen fuerzas efectivas ni reacciones de Kirchhoff.
  - Esto no contradice la existencia de "reacciones" en las esquinas.





Love-Kirchhoff



Reissner-Mindlin

Formulación matricial del TTV
El TTV en una placa de Reissner-Mindlin

- Estado membrana
  - Respecto al estado membrana, no hay diferencias con el modelo basado en la hipótesis de Love-Kirchhoff.
  - Todo lo visto en el tema anterior sigue siendo válido.

- En adelante nos ocuparemos, exclusivamente, del estado placa.

8

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado placa

- Expresión matricial de la parte del funcional asociada al estado placa

Escogemos escribirlo así por conveniencia para desarrollos posteriores

$$\delta\Pi_P = \iint_\Omega \left(-\delta\chi_{XX} M_X - \delta\chi_{YY} M_Y - 2\delta\chi_{XY} M_{XY} + \right.$$

$$\left. + 2Q_X \delta\varepsilon_{XZ} + 2Q_Y \delta\varepsilon_{YZ} \right) d\Omega$$

$$- \iint_\Omega \{ q_Z \delta w \} d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \left\{ \overline{F}_Z \delta w + \overline{M}_n \delta\varphi_n + \overline{M}_{ns} \delta\varphi_s \right\} ds =$$

$$= \boxed{\iint_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}_F^T \boldsymbol{\sigma}_F \, d\Omega + \iint_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}_Q^T \boldsymbol{\sigma}_Q \, d\Omega} - \iint_\Omega \delta\mathbf{d}_P^T \mathbf{q}_P \, d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \delta\mathbf{d}_P^T \overline{\mathbf{F}}_P \, ds$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_F = \left(-\delta\chi_{XX} \quad -\delta\chi_{YY} \quad -2\delta\chi_{XY} \right)^T \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_F = \left(2\delta\varepsilon_{XZ} \quad 2\delta\varepsilon_{YZ} \right)^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}_F = \left(M_X \quad M_Y \quad M_{XY} \right)^T \qquad \boldsymbol{\sigma}_Q = \left(Q_X \quad Q_X \right)^T$$

$$\delta\mathbf{d}_P = \left\{ \delta w \quad \delta\varphi_X \quad \delta\varphi_Y \right\}^T \qquad \mathbf{q}_P = \left\{ q_Z \quad \cancelto{0}{m_X} \quad \cancelto{0}{m_Y} \right\}^T$$

$$\delta\mathbf{d}_P^C = \left(\delta w_{,n} \quad \delta\varphi_n \quad \delta\varphi_s \right)^T \qquad \overline{\mathbf{F}}_P = \left(\overline{F}_Z \quad \overline{M}_n \quad \overline{M}_{ns} \right)^T$$

10

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado placa

- Estado placa: deformaciones

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} -\chi_{XX} \\ -\chi_{YY} \\ -2\chi_{XY} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_F} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial X & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial Y \\ 0 & \partial/\partial Y & \partial/\partial X \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_F} \underbrace{\begin{Bmatrix} w \\ \varphi_X \\ \varphi_Y \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}_P}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{XZ} \\ 2\varepsilon_{YZ} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_Q} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \gamma_{XZ} \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_Q} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial/\partial X & -1 & 0 \\ \partial/\partial Y & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_Q} \underbrace{\begin{Bmatrix} w \\ \varphi_X \\ \varphi_Y \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}_P}$$

$$\chi_{XX} = -\varphi_{X,X}$$
$$\chi_{YY} = -\varphi_{Y,Y}$$
$$\chi_{XY} = \frac{1}{2}\left(-\varphi_{X,Y} - \varphi_{Y,X}\right)$$

$$\varepsilon_{XZ} = \frac{1}{2}\left(\varphi_Y + w,_X\right)$$
$$\varepsilon_{YZ} = \frac{1}{2}\left(\varphi_X + w,_X\right)$$

11

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado placa

- Estado placa: tensiones

$$\boldsymbol{\sigma}_F = \mathbf{D}_F \boldsymbol{\varepsilon}_F \qquad , \qquad \mathbf{D}_F = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\nu\right) \end{bmatrix}$$

Nótese que, como en el caso de Love-Kirchhoff, que el signo menos de las ecuaciones constitutivas se ha incluído en el vector de deformaciones

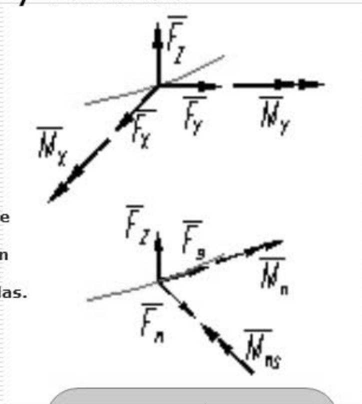
$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \mathbf{D}_Q \boldsymbol{\varepsilon}_Q \qquad , \qquad \mathbf{D}_Q = \kappa G h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Formulación matricial del TTV
Expresión matricial: estado placa

- Estado placa: desplazamientos y fuerzas generalizadas en el contorno

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} w \\ \varphi_n \\ \varphi_s \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}_P^C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_X & n_Y \\ 0 & -n_Y & n_X \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_C} \underbrace{\begin{Bmatrix} w \\ \varphi_X \\ \varphi_Y \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}_P}$$

Opcional. Se puede trabajar con las fuerzas generalizadas.



Fuerzas generalizadas teoría de placas

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{F}_Z \\ \overline{M}_n \\ \overline{M}_{ns} \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{F}}_P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -n_Y & n_X \\ 0 & -n_X & -n_Y \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^*_C} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{F}_Z \\ \overline{M}_X \\ \overline{M}_Y \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{F}}_{P\{X,Y,Z\}}},$$

Componentes cartesianas convencionales

$$\overline{M}_X = -\int_{-h/2}^{h/2} Z\,\bar{t}_Y\,dZ$$

$$\overline{M}_Y = \int_{-h/2}^{h/2} Z\,\bar{t}_X\,dZ$$

13

Discretización por elementos finitos

Discretización por elementos finitos

- Discretización del campo de desplazamientos (formulación genérica, para un elemento de *n* nodos)

$$\hat{\mathbf{d}}_P = \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\varphi}_X \\ \hat{\varphi}_Y \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} N_1 & 0 & 0 & & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & & 0 & 0 & N_n \end{array}\right]}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{X1} \\ \varphi_{Y1} \\ \hline \vdots \\ \hline w_n \\ \varphi_{Xn} \\ \varphi_{Yn} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}^{(e)}}$$

- Discretización del campo de desplazamientos en el contorno

$$\mathbf{d}_P^C = \mathbf{T}_C \, \mathbf{d}_P \rightarrow \hat{\mathbf{d}}_P^C = \mathbf{T}_C \, \mathbf{N} \, \mathbf{a}^{(e)}$$

15

Discretización por elementos finitos

- Discretización del campo de deformaciones

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F = \begin{Bmatrix} -\hat{\chi}_{XX} \\ -\hat{\chi}_{YY} \\ -2\hat{\chi}_{XY} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}_F\,\mathbf{d}_P = \mathbf{L}_F\,\mathbf{N}\,\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{B}_F\,\mathbf{a}^{(e)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q = \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{XZ} \\ \hat{\gamma}_{XZ} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}_Q\,\mathbf{d}_P = \mathbf{L}_Q\,\mathbf{N}\,\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{B}_Q\,\mathbf{a}^{(e)}$$

$$\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F = \mathbf{B}_F\,\delta\mathbf{a}^{(e)} \qquad \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_q = \mathbf{B}_Q\,\delta\mathbf{a}^{(e)}$$

16

Discretización por elementos finitos

- Discretización del funcional (1)

$$\delta\hat{\Pi}_P = \iint_\Omega \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F^T \,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_F \, d\Omega + \iint_\Omega \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^T \,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_Q \, d\Omega - \iint_\Omega \delta\hat{\mathbf{d}}_P^T \,\mathbf{q}_P \, d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \delta\hat{\mathbf{d}}_P^T \,\overline{\mathbf{F}}_P \, ds =$$

$$= \iint_\Omega \delta\mathbf{a}^{(e)^T} \,\mathbf{B}_F^T \,\mathbf{D}_F \,\mathbf{B}_F \,\mathbf{a}^{(e)} d\Omega + \iint_\Omega \delta\mathbf{a}^{(e)^T} \,\mathbf{B}_Q^T \,\mathbf{D}_Q \,\mathbf{B}_Q \,\mathbf{a}^{(e)} d\Omega -$$

$$- \iint_\Omega \delta\mathbf{a}^{(e)^T} \,\mathbf{N}^T \,\mathbf{q}_P \, d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \delta\mathbf{a}^{(e)^T} \,\mathbf{N}^T \,\mathbf{T}_C^T \,\overline{\mathbf{F}}_P \, ds =$$

$$= \delta\mathbf{a}^{(e)^T} \left[\underbrace{\iint_\Omega \mathbf{B}_F^T \,\mathbf{D}_F \,\mathbf{B}_F d\Omega}_{\mathbf{K}_F} + \underbrace{\iint_\Omega \mathbf{B}_Q^T \,\mathbf{D}_Q \,\mathbf{B}_Q \, d\Omega}_{\mathbf{K}_Q} \right] \mathbf{a}^{(e)} -$$

$$- \delta\mathbf{a}^{(e)^T} \left(\underbrace{\iint_\Omega \mathbf{N}^T \,\mathbf{q}_P \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \,\mathbf{T}_C^T \,\overline{\mathbf{F}}_P \, ds}_{\mathbf{f}} \right)$$

17

Discretización por elementos finitos

- Discretización del funcional (2)

$$\delta\hat{\Pi}_P = \delta\mathbf{a}^{(e)T}\left(\left[\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_Q\right]\mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}\right)$$

- TTV

$$\delta\hat{\Pi}_P = \delta\mathbf{a}^{(e)T}\left(\left[\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_Q\right]\mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}\right) = 0 \qquad \forall\,\delta\mathbf{a}^{(e)} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_Q\right]\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{f}$$

18

Discretización por elementos finitos

- Expresión alternativa de las matrices de rigidez

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}_F &= \iint_\Omega \mathbf{B}_F^T\,\mathbf{D}_F\,\mathbf{B}_F\,d\Omega \\ \mathbf{D}_F &= \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\nu\right) \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{K}_F = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\widetilde{\mathbf{K}}_F$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}_Q &= \iint_\Omega \mathbf{B}_Q^T\,\mathbf{D}_Q\,\mathbf{B}_Q\,d\Omega \\ \mathbf{D}_Q &= \kappa G h\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{K}_Q = \kappa G h\,\widetilde{\mathbf{K}}_Q$$

19

Discretización por elementos finitos

- Expresión alternativa de la cond. de equilibrio

$$\left[\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_Q\right]\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{f}$$

$$\left[\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\widetilde{\mathbf{K}}_F + \kappa Gh\,\widetilde{\mathbf{K}}_Q\right]\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{f}$$

Cantidad del orden de magnitud de la flecha en la placa de Love-Kirchhoff. Recuérdese $\Delta w = \frac{q_Z}{D}$

$$\left[\widetilde{\mathbf{K}}_F + \alpha\,\widetilde{\mathbf{K}}_Q\right]\mathbf{a}^{(e)} = \frac{12\left(1-\nu^2\right)}{Eh^3}\mathbf{f} = \boxed{\mathbf{f}^*} \qquad \alpha = \frac{12\kappa\left(1-\nu^2\right)G}{Eh^2}$$

$$\left[\frac{1}{\alpha}\widetilde{\mathbf{K}}_F + \widetilde{\mathbf{K}}_Q\right]\mathbf{a}^{(e)} = \frac{\mathbf{f}^*}{\alpha} \xrightarrow{h\to 0\Rightarrow\alpha\to\infty} \boxed{\widetilde{\mathbf{K}}_Q\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{0}}$$

¡Bloqueo para placas delgadas!

20

Discretización por elementos finitos

- Condiciones que han de cumplir las funciones de interpolación
  - Deformaciones → derivadas primeras de **d**
    - Deben existir las derivadas primeras ≠0
      → funciones de interpolación al menos lineales
    - Se requiere **continuidad C^0** en el contorno

- Son idénticas a las que aparecieron en elasticidad bidimensional
  - El problema de placas de Reissner-Mindlin se resuelve con los mismos elementos finitos que el de elasticidad bidimensional.
  - Pero cuando las placas son **delgadas** pueden presentar **bloqueo**.

21

Técnicas para evitar el bloqueo

Introducción

Técnicas para evitar el bloqueo Introducción

- Observaciones previas
  - El análisis por el MEF, mediante la teoría de Reissner-Mindlin, de una placa moderadamente gruesa se puede llevar a cabo usando los elementos finitos descritos al tratar la Elasticidad 2D.
  - Sólo surgen dificultades al tratar de utilizar los mismos elementos y procedimientos a placas delgadas.
  - El objetivo de las técnicas que se va a describir sucintamente es lograr elementos capaces de procesar tanto placas delgadas como moderadamente gruesas.

23

Técnicas para evitar el bloqueo
Introducción

- Como en la viga de Timoshenko, para evitar el bloqueo hay que conseguir que $\mathbf{K}_Q$ se vuelva singular sin que ello afecte a $\mathbf{K}_F$.

$$\left[\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_Q\right]\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{f}$$

- Hay varias técnicas para conseguirlo:
  - Integración reducida/selectiva
  - Deformaciones de cortante impuestas
  - Elementos discretos de Kirchhoff (DK) -sólo válidos para placas delgadas-
  - Elementos mixtos (interpolan independientemente desplazamientos y esfuerzos)... ← fuera del ámbito de la asignatura

24

Técnicas para evitar el bloqueo
Introducción

- No se van a presentar ejemplos de elementos finitos basados en ninguna de estas técnicas.

- El lector interesado encontrará:
  - Un catálogo extenso de elementos con sus justificaciones en Oñate (1992, capítulo 9)
  - El desarrollo de algunos elementos para ilustrar los procedimientos en Celigüeta (2000, capítulo 8) y Álvarez et al. (2000, capítulo 7).

25

Técnicas para evitar el bloqueo
Integración reducida/selectiva

- Nomenclatura
  - Integración completa: la que usa los puntos de Gauss necesarios para la integración exacta.
  - Subintegración: la que usa menos puntos de Gauss.

- Integración **reducida**: se subintegra tanto $\mathbf{K}_F$ como $\mathbf{K}_Q$.
- Integración **selectiva**: se integra exactamente $\mathbf{K}_F$ y se subintegra $\mathbf{K}_Q$.

27

Técnicas para evitar el bloqueo Integración reducida/selectiva

- Índice de coacción, IC
  - Se calcula en un elemento aislado, con dos lados adyacentes empotrados y los otros dos libres
  - IC = GDL – 2 x NPG
    - GDL → grados de libertad del elementos con la sustentación definida
    - NPG → número de puntos de Gauss
    - 2 x NPG = número de coacciones necesarias para imponer $\gamma_{XY}=0$ y $\gamma_{XZ}=0$ en los puntos de Gauss
  - Valores de IC. Si
    - $IC \geq 4$ → $\mathbf{K}_C$ es singular y no hay bloqueo
    - $IC \leq 0$ → bloqueo: $\mathbf{K}_C$ no es singular
    - $0 < IC < 4$: valores próximos a cero indican elementos que pueden sufrir bloqueo y valores mayores pueden funcionar bien

28

Técnicas para evitar el bloqueo Integración reducida/selectiva

- Mecanismos inducidos por la integración R/S (1)
  - Mecanismo = deformación del elemento que no consume energía de deformación; p.e: movimiento de sólido rígido
  - Están asociados a valores propios nulos de la matriz de rigidez.
    - Los vectores propios determinan la combinación de desplazamientos nodales que define el mecanismo.
  - Todos los elementos finitos tienen, al menos, el número de mecanismos que define los movimientos de sólido rígido posibles.
    - Las condiciones de contorno cinemáticas coartan estos movimientos en el conjunto de la estructura

29

Técnicas para evitar el bloqueo Integración reducida/selectiva

- Mecanismos inducidos por la integración R/S (2)
  - La integración reducida/selectiva puede inducir mecanismos adicionales a los movimientos de sólido rígido
  - Estos mecanismos pueden **propagarse** entre elementos, si los desplazamientos necesarios para producirlos en elementos adyacentes son compatibles. En otro caso no se propagan.
  - En la medida de lo posible, **deben evitarse los mecanismos espurios**.
  - Los mecanismos espurios propagables que no se coartan por las condiciones de contorno cinemáticas inhabilitan al elemento para resolver problemas:
    - Como no producen trabajo virtual, no se pueden determinar mediante el TTV y hacen singular la matriz de rigidez (u originan desplazamientos arbitrarios debidos a errores numéricos inevitables en el proceso).

30

Técnicas para evitar el bloqueo Deformación por cortante impuesta

- Fundamento
  - En una placa de Love-Kirchhoff las distorsiones angulares son nulas
  - Un elemento de Reissner-Mindlin permite analizar placas delgadas si, en el límite, cuando $h \rightarrow 0$, $\gamma_{XY} \rightarrow 0$ y $\gamma_{XZ} \rightarrow 0$. Si no, presenta bloqueo.
  - El método de la deformación por cortante impuesta consiste en definir un nuevo campo de distorsiones angulares basado en el inicial del elemento pero que sea capaz de cumplir la condición anterior.

32

Técnicas para evitar el bloqueo Deformación por cortante impuesta

- Fundamento
  - Expresión alternativa de las dist. angulares

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q = \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{XZ} \\ \hat{\gamma}_{XZ} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}=\mathbf{B}(\xi,\eta)} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{X1} \\ \varphi_{Y1} \\ \vdots \\ \varphi_{Yn} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{21} & \cdots \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(w_1,\varphi_{X1},\varphi_{Y1}\ldots)} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

  - Cada coeficiente α_{ij} del polinomio depende de pocos parámetros nodales.
  - Si algún coeficiente α_{ij} depende de un solo parámetro sólo se anulará para un valor concreto de este, usualmente cero. Así se produce el bloqueo.
  - Si los coeficientes sólo dependen de los giros ocurre algo parecido.
  - El campo de deformaciones por cortante impuesto se diseña para evitar estas características.

Técnicas para evitar el bloqueo Deformación por cortante impuesta

- Procedimiento
  - Se define una interpolación de las distorsiones angulares que cumpla las condiciones anteriores

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q = \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{XZ} \\ \hat{\gamma}_{XZ} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\gamma \, \boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma_{XZ\_1} \quad \gamma_{YZ\_1} \quad \gamma_{XZ\_2} \quad \gamma_{yZ\_2} \quad \cdots \quad \gamma_{XZ\_m} \quad \gamma_{YZ\_m} \right)^T$$

$\mathbf{N}_\gamma$ es una matriz de funciones de forma y $\boldsymbol{\gamma}$ un vector que agrupa las distorsiones angulares en una serie de puntos de colocación escogidos *a priori*.

  - Introduciendo en la relación anterior la interpolación de desplazamientos del elemento se obtiene la nueva matriz **B** a utilizar (matriz sustituta)

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q = \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{XZ} \\ \hat{\gamma}_{XZ} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\gamma \, \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{N}_\gamma \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{Q1} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{Qm} \end{bmatrix} \mathbf{a}^{(e)} = \widetilde{\mathbf{B}}_Q \, \mathbf{a}^{(e)}$$

34

Técnicas para evitar el bloqueo Deformación por cortante impuesta

- Procedimiento

  - Para facilitar la comprensión del procedimiento, sólo se han descrito los pasos fundamentales.
  - Se han omitido los cambios de coordenadas y de sistema de referencia necesarios según las definiciones de las funciones de forma y las distorsiones en los puntos de colocación escogidas.
  - El lector interesado puede consultar todos estos detalles en Oñate (1995, punto 9.6).

35

Técnicas para evitar el bloqueo
Elementos discretos de Kirchhoff

- Son elementos de placa de Love-Kirchhoff definidos modificando elementos de Reissner-Mindlin.
  - Cumplen $\gamma_{XZ} = \gamma_{YZ} = 0$ (como las placas L-K) en una serie de puntos.
  - Dichos puntos pueden ser los de integración o algunos puntos del contorno.
- Mantienen la continuidad C^0 propia de los elementos de R-M.
- Sólo sirven para analizar placas L-K.
- Pueden interpretarse como una variación de los métodos de deformación por cortante impuesta, en los que se buscaría que las distorsiones angulares fueran realmente nulas en todo el elemento.

37

Bibliografía

Bibliografía y referencias

- OÑATE, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, Barcelona, 1992. (Capítulo 9)
- ZIENKIEWICZ, O.C. Y TAYLOR, R.L. *El método de los elementos finitos. Volumen 2:Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y No Linealidad,* (4ª ed.) McGraw-Hill, Madrid, y CIMNE, Barcelona, 1995. (Capítulo 2)
- CELIGÜETA, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.), San Sebastián, 2011. (Capítulo 8)
- ÁLVAREZ, R. ET AL. *Teoría General del MEF*. [en línea] UNED, Madrid, 2000. <http://www.uned.es/dpto-icf/ampliacion_estructuras/images/AF1TeoriaGraldelMEF.pdf > [Consulta: 14/12/2014] (Capítulo 7)
- REDDY, J. N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. Wiley, New York, 1983. (Capítulo 4)

39