

# AJUSTE GAUSSIANO DE REDES POR EL MÉTODO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS

M.J. Jiménez Martínez, N. Quesada Olmo, M. Villar Cano, J.M. Paredes  
Asencio, A. Marqués Mateu

13 de septiembre de 2011

© Copyright: María Jesús Jiménez Martínez, Nieves Quesada Olmo, Miriam Villar  
Cano, José Manuel Parades Asencio, Ángel Marqués Mateu  
E-mail: [mjjimenez@cgf.upv.es](mailto:mjjimenez@cgf.upv.es), [niequeol@cgf.upv.es](mailto:niequeol@cgf.upv.es), [mivilca@upvnet.upv.es](mailto:mivilca@upvnet.upv.es),  
[jparedes@cgf.upv.es](mailto:jparedes@cgf.upv.es), [amarques@cgf.upv.es](mailto:amarques@cgf.upv.es)  
RECEPCIÓN: 15-09-2011  
APROBACIÓN: 22-09-2011

# AJUSTE GAUSSIANO DE REDES POR EL MÉTODO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS

## Resumen:

El método de incrementos de coordenadas es un ajuste Gauss Markov sobre redes microgeodésicas. El método se aplica a observables angulares, distanciométricos y GNSS, por separado o de manera conjunta. El método propone un protocolo de actuación y de predicción análisis e interpretación de los resultados eficaz. Demostramos que es importante que los observables que formen parte del ajuste mínimo cuadrático tengan pesos similares.

El método resuelve el problema de las covarianzas a priori entre observables, como sucede habitualmente con los observables GNSS.

Proponemos la aplicación del método de triangulación homogénea (publicado en [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv-digital)) y del método de incrementos de coordenadas sobre una misma red para verificar la validez de los resultados obtenidos.

## PALABRAS CLAVES:

METODO GAUSS-MARCOV, MICROGEODESIA, REDES LOCALES, AJUSTE MINIMO CUADRATICO, REDES GNSS

# AJUSTE GAUSSIANO DE REDES POR EL MÉTIDO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS

## **Abstract:**

We want to introduce a new way of performing the Gauss Markov adjustment of a micro geodetic net with 'Coordinate increases'. It could be applied to angular and distance measurements, also to GNSS observations. We find it is effective and efficient for the prediction, analysis and interpretation of the results.

We demonstrate the importance of the similarity of all measurement weights used in the adjustment. It is also clear that is a good way to avoid dealing with the a priori covariance between measurements.

In order to assure the validity of the obtained values we propose checking them using both methods: 'Coordinate increases' and 'Homogeneous triangulation' (published in [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital))

## **KEY WORDS:**

GAUSS-Marcova METHOD, MICROGEODESIA, local networks, SET MINIMUMSQUARED, GNSS NETWORK

AJUSTE GAUSSIANO DE REDES POR EL  
MÉTODO DE INCREMENTOS DE  
COORDENADAS

M.J. Jiménez Martínez, N. Quesada Olmo, M. Villar Cano, J.M. Paredes Asencio, A. Marqués Mateu

13 de septiembre de 2011

# Índice general

<b>1. En torno a la Teoría y Praxis de aplicación</b>	<b>9</b>
1.1. OBJETO . . . . .	9
<b>2. Teoría sobre el ajuste gaussiano por incrementos de coordenadas</b>	<b>14</b>
2.1. SOBRE LA GEOMETRÍA DE LAS SOLUCIONES POSIBLES EN EL AJUSTE GAUSS-MARCOV DE UNA RED LOCAL . . . . .	14
2.2. LAS COVARIANZAS A PRIORI EN LAS MATRICES DE DISEÑO DE OBSERVABLES . . . . .	20
2.3. CASO DE OBSERVABLES GNSS Y RELACIONADOS CON ELLOS . . . . .	23
2.4. TEORÍA Y PRAXIS DE AJUSTE DOBLE POR INCREMENTOS DE COORDENADAS: UNA SOLUCIÓN RIGUROSA . . . . .	28
2.5. POSIBLES SOLUCIONES APROXIMADAS . . . . .	33
2.6. SÍNTESIS Y CONCLUSIÓN . . . . .	36
<b>3. Aplicación del método de incrementos de coordenadas en una red     clásica</b>	<b>40</b>
3.1. RESOLUCIÓN POR TRIANGULATERACIÓN . . . . .	41
3.1.1. MONUMENTACIÓN, MATERIALES Y CARACTERÍSTICAS CONS- TRUCTIVAS . . . . .	41
3.1.2. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DE LA ESTACIÓN TOTAL UTI- LIZADA . . . . .	41

3.1.3.	OBSERVACIONES ANGULARES AZIMUTALES . . . . .	42
3.1.4.	OBSERVACIONES DISTANCIOMÉTRICAS . . . . .	44
3.1.5.	CÁLCULO DE LA CONSISTENCIA DE LA FIGURA Y OPTIMIZACIÓN DEL CAMINO DE CÁLCULO DEL VECTOR $X_a$ .	45
3.1.5.1.	CÁLCULO DE LAS COORDENADAS APROXIMADAS POR EL CAMINO DE MEJOR CONSISTENCIA ANGULAR . . . . .	46
3.1.5.2.	CÁLCULO DE LAS COORDENADAS APROXIMADAS POR EL CAMINO DE MEJOR CONSISTENCIA DISTANCIOMÉTRICA . . . . .	48
3.1.5.3.	LAS COORDENADAS APROXIMADAS DEFINITIVAS .	50
3.1.6.	EL FACTOR DE CONVERSIÓN Y EL PESO DE LAS FORMAS LINEALES DE AZIMUT . . . . .	50
3.1.7.	EL FACTOR DE CONVERSIÓN Y PESO DE LAS FORMAS LINEALES DE DISTANCIA . . . . .	51
3.1.8.	LOS PESOS HOMOGENEIZADOS . . . . .	52
3.1.9.	ECUACIONES DE AZIMUT Y DE DISTANCIA FACTORIZADAS	53
3.1.10.	EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD . . . . .	54
3.1.11.	LAS MATRICES DE CRITERIO: MATRIZ COFACTOR DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ COFACTOR DE LOS RESIDUOS, MATRIZ COFACTOR DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS RESIDUOS, Y MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS . . . . .	56

3.1.12. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD INTERNA DE LA RED . . . . .	57
3.1.13. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EXTERNA DE LA RED . . . . .	60
3.1.14. SEMIEJES DE LA ELIPSE STANDARD . . . . .	63
3.1.15. LA ELIPSE ASOCIADA A LA CURVA PEDAL . . . . .	64
3.1.16. PROBABILIDADES ASOCIADAS A LAS FIGURAS DE ERROR . . . . .	65
3.1.17. ERROR O PERTURBACIÓN db . . . . .	68
3.1.18. RESULTADOS FINALES DE LA RED TRIANGULATERADA . . . . .	70
3.2. RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS	71
3.2.1. TEST DE PEARSON. CÁLCULO DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS OBSERVABLES CLÁSICOS	73
3.2.2. LAS COORDENADAS APROXIMADAS . . . . .	77
3.2.3. FORMAS LINEALES ESPECÍFICAS DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS . . . . .	77
3.2.4. LAS MATRICES DE PESOS . . . . .	81
3.2.4.1. SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA GEOMETRÍA DEL CUADRILÁTERO DE PONDERACIÓN Y DE SU AZIMUT	88
3.2.5. SÍNTESIS Y RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED POR EL MÉTODO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS . . . . .	90
3.2.5.1. LA MATRIZ $A_1$ , LA MATRIZ DE PESOS $P_1$ , EL VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES $K_1$ , Y LA MATRIZ $S_1$ DE LA SUBRED 1 . . . . .	90
3.2.5.2. LA MATRIZ $A_2$ , LA MATRIZ DE PESOS $P_2$ , EL VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES $K_2$ , Y LA MATRIZ $S_2$ DE LA SUBRED 2 . . . . .	91



3.2.5.3.	EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD EN LA SUBRED 1 . . . . .	92
3.2.5.4.	EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD EN LA SUBRED 2 . . . . .	93
3.2.5.5.	EL RESULTADO DEL AJUSTE DOBLE POR INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS PARÁMETROS $dx_{V2}$ Y $dy_{V2}$ DE LAS SUBREDES 1 Y 2 . . . . .	93
3.2.5.6.	LAS MATRICES DE CRITERIO : MATRIZ COFACTOR DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ COFACTOR DE LOS RESIDUOS, MATRIZ COFACTOR DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS RESIDUOS, Y MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS DE LA SUBRED 1 . . . . .	94
3.2.5.7.	LAS MATRICES DE CRITERIO : MATRIZ COFACTOR DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ COFACTOR DE LOS RESIDUOS, MATRIZ COFACTOR DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS RESIDUOS, Y MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS DE LA SUBRED 2 . . . . .	95

3.2.5.8. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD INTERNA DE LA SUBRED 1 . . . . .	96
3.2.5.9. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD INTERNA DE LA SUBRED 2 . . . . .	98
3.2.5.10. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EXTERNA DE LA SUBRED 1 . . . . .	99
3.2.5.11. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EXTERNA DE LA SUBRED 2 . . . . .	100
3.2.5.12. SEMIEJES DE LA ELIPSE STANDARD DE LAS SUBREDES 1 Y 2 . . . . .	101
3.2.5.13. LAS ELIPSES ASOCIADAS A LA CURVAS PEDALES DE LAS SUBREDES 1 Y 2 . . . . .	103
3.2.5.14. PROBABILIDADES DE ERROR ASOCIADAS A LAS FIGURAS DE ERROR DE LAS SUBREDES 1 Y 2 . . . . .	104
3.2.5.15. ERROR O PERTURBACIÓN db DE LAS SUBREDES 1 Y 2 . . . . .	106
3.2.5.16. RESULTADOS FINALES DE LA RED POR INCREMENTOS PARCIALES . . . . .	106

<b>4. Resolución de la red de observables clásicos junto a observables GNSS por el método de triangulateración</b>	<b>109</b>
4.1. OBJETO . . . . .	109
4.2. EL VECTOR DE OBSERVABLES GNSS . . . . .	110
4.3. LAS COORDENADAS APROXIMADAS . . . . .	110
4.4. LA MATRIZ DE PESOS . . . . .	111
4.5. ECUACIONES DE DISTANCIA GNSS FACTORIZADAS . . . . .	114

4.6. MATRIZ DE DISEÑO A, VECTOR K DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES Y MATRIZ DE PESOS DE LA RED CON DESCENTRADO . . . . .	115
4.6.1. RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED TRIANGULATERADA CON DESCENTRADO . . . . .	116
4.7. MATRIZ DE DISEÑO A, VECTOR K DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES Y MATRIZ DE PESOS DE LA RED SIN DESCENTRADO . . . . .	121
4.7.1. RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED TRIANGULATERADA SIN DESCENTRADO . . . . .	122
4.8. ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS Y MATRICES DE CRITERIO DE LA TRIANGULATERACIÓN CLÁSICA CON OBSERVABLES ADICIONALES GNSS . . . . .	127
4.9. FIABILIDAD INTERNA Y FIABILIDAD EXTERNA DE LA TRIANGULATERACIÓN CLÁSICA CON OBSERVABLES ADICIONALES GNSS . . . . .	131
4.10. RECINTOS DE ERROR . . . . .	133
4.11. ERRORES EN REDONDEO dS Y db . . . . .	134
4.12. CONCLUSIONES BÁSICAS . . . . .	135
<b>5. Una práctica usual desaconsejable: resolución de la red de observables clásicos junto a observables GNSS con matriz completa de pesos factorizada</b>	<b>137</b>
5.1. CÁLCULO DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS OBSERVABLES CLÁSICOS. TEST DE PEARSON . . . . .	138
5.2. CÁLCULO DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS VECTORES GNSS. TEST DE PEARSON . . . . .	140
5.3. LAS COORDENADAS APROXIMADAS . . . . .	145
5.4. MATRIZ DE DISEÑO A Y EL VECTOR K DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES . . . . .	145

5.4.1.	LA MATRIZ DE PESOS FACTORIZADA $P'$ . . . . .	146
5.4.2.	LAS MATRICES DE DISEÑO $A'$ Y $K'$ . . . . .	148
5.5.	RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED MIXTA POR INCREMENTOS CON MATRIZ DE PESOS FACTORIZADA . . . . .	150
<b>6.</b>	<b>Aplicación del método de incrementos de coordenadas en una red GNSS</b> . . . . .	<b>157</b>
6.1.	CÁLCULO DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS VECTORES GNSS. TEST DE PEARSON . . . . .	157
6.2.	LAS COORDENADAS APROXIMADAS . . . . .	159
6.3.	SÍNTESIS Y RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED GNSS POR EL MÉTODO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS . . . . .	160
6.3.1.	EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD EN LA SUBRED 1 GNSS . . . . .	164
6.3.2.	EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD EN LA SUBRED 2 GNSS . . . . .	165
6.3.3.	EL RESULTADO DEL AJUSTE DOBLE POR INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS PARÁMETROS $dx_{V2}$ Y $dy_{V2}$ DE LAS SUBREDES 1 Y 2 GNSS . . . . .	166
6.3.4.	LAS MATRICES DE CRITERIO DE LA SUBRED 1 . . . . .	166
6.3.5.	LAS MATRICES DE CRITERIO DE LA SUBRED 2 . . . . .	167
6.3.6.	COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD IN- TERNA DE LA SUBRED 1 . . . . .	168
6.3.7.	COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD IN- TERNA DE LA SUBRED 2 . . . . .	169

6.3.8. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EX- TERNA DE LA SUBRED 1 . . . . .	170
6.3.9. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EX- TERNA DE LA SUBRED 2 . . . . .	171
6.3.10. SEMIEJES DE LA ELIPSE STANDARD Y ELIPSES ASOCIADAS A LA CURVAS PEDALES DE LAS SUBREDES 1 Y 2 . . . . .	172
6.3.11. PROBABILIDADES DE ERROR ASOCIADAS A LAS FIGURAS DE ERROR DE LAS SUBREDES 1 Y 2 . . . . .	173
6.3.12. ERROR O PERTURBACIÓN $\delta b$ DE LAS SUBREDES 1 Y 2 . . . . .	175
6.3.13. RESULTADOS FINALES DE LA RED POR INCREMENTOS PAR- CIALES . . . . .	176
<b>7. Conclusiones</b>	<b>178</b>
7.1. EMPEZANDO POR EL PRINCIPIO: LA NORMALIDAD DEL VECTOR DE OBSERVABLES $O$ Y DEL VECTOR DE RESIDUOS $R$ . . . . .	178
7.2. EL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD. CUMPLIMIENTO DEL TEST FISHER-SNEDECOR . . . . .	182
7.3. LA PRECAUCIÓN DE HOMOGENEIZAR LOS PESOS . . . . .	185
7.4. SÍNTESIS FINAL . . . . .	189
<b>8. Bibliografía</b>	<b>192</b>

# Capítulo 1

## En torno a la Teoría y Praxis de aplicación

Esta publicación se refiere esencialmente, y aporta una experiencia puntual, en la investigación teórica y práctica de nuevos métodos de ajuste gaussiano en redes locales y microgeodésicas, subrayando las dificultades encontradas y las técnicas y criterios de diseño aplicados en las distintas fases, a efectos de conservar el poder de afirmación estadístico-probabilista y el rigor matemático imprescindible desde el principio del algoritmo hasta sus conclusiones finales y propuesta de resultados. Por ello entendemos necesario definir previamente el objeto específico perseguido, dentro de un escenario completo, y la doctrina matemática y estadística básica de aplicación, fundamentalmente en lo que contiene de novedoso.

### 1.1. OBJETO

La observación, cálculo y compensación por mínimos cuadrados de una red local o microgeodésica configuran una doctrina y praxis centenarias que todavía, hasta donde se nos alcanza, no han sido claramente superadas ni en rigor científico ni en utilidad práctica, a pesar de ciertos defectos y carencias que en algunos aspectos y en anteriores publicaciones, que oportunamente se citarán, ya hemos puesto de

manifiesto, como lo seguiremos haciendo en este trabajo y los que sigan, siempre con el esfuerzo añadido de subsanar o a lo menos aliviar cada deficiencia detectada. Entendemos que el tradicionalmente denominado ajuste de Gauss-Marcov continúa vigente en pleno siglo XXI. Quizás porque otros esfuerzos científicos, como los basados en los Test “robustos” o los muy recientes de utilización de técnicas bayesianas no hayan satisfecho las esperanzas que en ellos se fundaron o se encuentren todavía en fase de elaboración. Quizás también porque la investigación científica y la tecnología se hayan orientado más a la consecución de grandes rendimientos prácticos que a la mejora de las precisiones alcanzables. Y tal vez por todos los quizás juntos y porque la acelerada evolución y progreso de la instrumentación moderna ha alcanzado ya y ofrece precisiones, rendimientos y facilidad operativa que cubren ampliamente la gran mayoría de las exigencias de los trabajos usuales.

Así, resultados de ajustes con figuras de error submilimétricas de décimas y aún centésimas de milímetro aparecen frecuentemente en aplicaciones prácticas, libros y revistas especializados. Y merece la pena preguntarse si los trabajos a que se refieren requieren precisiones tales e incluso, si ello fuera cierto, es factible su contrastación real.

Después de todo, siquiera en aproximación de trazo grueso, tal parece anunciarse el robot cartográfico que cualquiera puede programar y abandonar a su suerte en el terreno en el convencimiento de que volverá con el trabajo encomendado impecablemente resuelto, sin intervención humana alguna. Con ello a nuestra vieja y noble profesión no le quedaría apenas futuro.

Sin embargo, nosotros entendemos que sí le queda, ilimitado e ilusionante, y que merece la pena empeñarse en su defensa. Porque nuestra experiencia nos dice que todavía es fundamental la actuación humana aplicando el arte y la ciencia de una ingeniería cartográfica de alto nivel experta en diseño, proyecto y observación para que la fiabilidad de los resultados intermedios y finales obtenidos e interpretados en gabinete sea correcta, lógica, y congruente con la realidad física y las previsiones

y necesarias exigencias establecidas de antemano.

Solamente así será posible aceptar el reto de una comprobación obligada y estricta de resultados sobre tolerancias de precisión muy estrechas en aquellos trabajos que verdaderamente lo requieran, arrojando solamente, y ya es bastante, el riesgo que entraña la condición imperfecta por humana de toda actuación técnica, por concienzuda e irreprochable que sea. Porque es imperativo prevenirse ante situaciones en que la discutible formulación de parámetros al límite del óptimo teórico y figuras de error minúsculas dejen de ser un mero y cotidiano alarde de excelencia aparente del trabajo y devengan en una ardua exigencia técnica de difícil y obligado cumplimiento e ineludible comprobación.

Para progresar en el camino descrito, entendemos necesaria una revisión detallada de los algoritmos y métodos clásicos de observación y cálculo. No se pretenderá, por entenderlo ilusorio, mejorar sustancialmente en gabinete la calidad de los trabajos observacionales. Pero sí se atenderá a comprobar paso a paso la adecuación y correcta significación física de cifras y niveles de fiabilidad de previsiones, parámetros, matrices y algoritmos de interpretación y control en general desde el principio del cálculo en gabinete hasta la obtención del resultado final. Avances en el concepto de observable y de recinto de error serán necesarios junto con progresos en el tratamiento matemático y estadístico de la información, parcial y global.

Así, hemos iniciado la obra con una primera publicación sobre el estudio en profundidad de la determinación y ajuste de un solo vértice variable de una microrred planimétrica, ampliable a tres dimensiones. Se ha estudiado la tipología existente de observables de acuerdo con la instrumentación más avanzada asequible procediendo a su homogeneización en magnitudes lineales desarrollando un nuevo método que denominamos de triangulateración. Simultáneamente se ha avanzado también en el estudio riguroso de la normalidad a priori de residuos y observables y muy especialmente en la ponderación de estos últimos con criterios innovadores, entendemos que más rigurosos y cercanos a la realidad física que los tradicionalmente empleados.



Por lo que concierne al presente trabajo, y siempre refiriéndonos a un solo vértice libre continuamos el proyecto proponiendo un nuevo método de ajuste que denominamos por incrementos de coordenadas, Mediante él avanzamos en el tratamiento de observables obtenidos con instrumentación de vanguardia, angulares, distanciométricos y GNSS, en su análisis geométrico y físico a priori y a posteriori, y en el problema de las covarianzas a priori entre observables. Se desarrollará la novedosa teoría de los lugares geométricos de afijos de vectores de observables en soluciones Gauss-Marcov a priori y se establecerá su relación con los recintos de error a posteriori en los respectivos espacios de los observables y las coordenadas compensadas, en este caso particular, bi o tridimensionales. En la fase siguiente ampliaremos el cálculo y determinación de vértices variables de la red a dos o más, sin limitación alguna y bi o tridimensionales. Posteriormente y manteniendo siempre el mismo rigor y poder de afirmación, a cualquier punto del espacio comprendido por o de influencia de la red, con aplicación de la doctrina contenida y desarrollada en lo que hemos denominado problemas del Datum y Principal de Diseño. Finalmente abordaremos el problema de la evolución temporal de las redes locales y microgeodésicas, sus variaciones, y la aplicación de las mismas al cálculo y determinación de deformaciones.

Los espacios de observables y coordenadas serán a partir de ahora siempre superiores a las cuatro dimensiones y por consiguiente los lugares geométricos y recintos de error que en ellos se establezcan requerirán un estudio en detalle y avanzado. Y fundamentalmente será preciso justificar con el debido rigor la deducción, individualizada o conjunta, y siempre con información geométrica y probabilística, de los recintos de error bi o tridimensionales acordes con nuestra realidad física y específicos de cualquier vértice o grupo de vértices concernidos. Se avanzará en la teoría que hemos llamado de zonas de especial significación.

Como objetivo final de ésta y sucesivas publicaciones, trataremos de llegar a establecer el iter completo de un proyecto actualizado Gauss-Marcov microgeodésico o de red local, en su más amplia acepción y variable en el tiempo. Se apoyarán por

supuesto las páginas que siguen en los trabajos ya publicados, que obligadamente hemos de dar por conocidos, en evitación de innecesarias repeticiones que harían excesivamente farragosa la exposición<sup>1</sup>.

En síntesis final. Reiteramos que la instrumentación topográfica y geodésica actual cubre ampliamente, por observación directa, las exigencias de precisión de la inmensa mayoría de las aplicaciones usuales. Ni se requiere ajuste alguno, ni compensación, ni otro expediente que aceptar como definitivos los puros datos de campo en la certeza de que, con un amplio coeficiente de seguridad que tampoco es preciso cifrar, bastan y sobran para resolver el trabajo encomendado. Adicionalmente, multitud de programas comerciales facilitan todo tipo de información e interpretación a nuestro juicio generalmente accesorias y a lo menos dudosamente fiables.

Pero existen y cabe pensar que existirán en el futuro cada vez más frecuentemente, aplicaciones que de verdad exijan precisiones muy estrechas y que necesariamente puedan y requieran ser comprobadas a posteriori rigurosamente. Sólo hacia ellas se dedican las páginas que siguen. A empeños de presente y futuro como éste se acostumbra a denominar investigación científica.

---

1

Como publicación inicial a la presente, M.J.JIMÉNEZ MARTÍNEZ, A.MARQUÉS MATEU, J.M.PAREDES ASENSIO, M.VILLAR CANO "Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local. Método de Triangulateración". Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv\\_digital](http://www.racv.es/racv_digital). Valencia 2010. También y procedente del mismo equipo de investigadores nos remitimos básicamente a las publicaciones: M.CHUECA, J.HERRÁEZ, J.L.BERNÉ "Tratado de Topografía". En tres tomos, especialmente el tercero "Microgeodesia y Redes locales". Ed. Paraninfo. Madrid. 1996. M.CHUECA, J.L.BERNÉ, A.B.ANQUELA, S.BASELGA "Avances en la interpretación de resultados en redes locales. Recintos de error.". Ed. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia 2001. M.CHUECA, J.L.BERNÉ, A.B.ANQUELA, S.BASELGA, "Microgeodesia y redes locales. Complementos docentes." Ed. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia 2004. M.CHUECA, A.B.ANQUELA, S.BASELGA, "Diseño de redes y control de deformaciones. Los problemas del datum y principal de diseño". Ed. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia 2007. Finalmente, las Tesis Doctorales de los Dres. A.B.ANQUELA, S.BASELGA e I.MAESTRO.

## Capítulo 2

# Teoría sobre el ajuste gaussiano por incrementos de coordenadas

### 2.1. SOBRE LA GEOMETRÍA DE LAS SOLUCIONES POSIBLES EN EL AJUSTE GAUSS-MARCOV DE UNA RED LOCAL

Si está justificado aceptar que el vector de observables  $O$  es un vector cuyas componentes son variables aleatorias, él y las consecuencias que de él se deriven pueden explicarse según un modelo estadístico. En dicho supuesto, la Red en estudio se resolverá a través suyo, relacionándolo con un modelo matemático. Así propondremos nuestra mejor solución.

Según es bien sabido, siendo

$O$  = el vector de observables, cuyos componentes en cualquier proporción son observables clásicos (angulares y distanciométricos), y GNSS, la solución de Gauss-Marcov exige que se cumpla la condición

$$O \sim N(O_T, \Sigma_o) = N(O_T, \sigma^2 \cdot Q) = N(O_T, \sigma^2 \cdot P^{-1}) \quad (1)$$

Aseguramos con los test estadísticos convenientes que nuestros observables son normales, como es el test de adherencia de Pearson.

Que implica que el vector de residuos cumpla la misma condición y

$$R \sim N(O_T, \Sigma_o) = N(O_T, \sigma^2 \cdot Q) = N(O_T, \sigma^2 \cdot P^{-1}) \quad (2)$$

Con la nomenclatura conocida

$C = O_T + R$  = vector de observables corregidos (es la solución de la red)

$R$  = vector de residuos o correcciones

$\sigma^2$  = factor de varianza, entendida como la varianza del observable de peso unidad

$\Sigma_o = \sigma^2 Q$  = matriz varianza covarianza del observable a priori

$P = Q^{-1} = \sigma^2 \cdot \Sigma_o^{-1}$  = matriz de pesos

Cumpléndose que la probabilidad del vector de observables será:

$$P(O) = P(O_1, y O_2, y O_3, \dots, y O_m) = P(R) =$$

$$= P(R_1, y R_2, y R_3, \dots, y R_m) = \prod_1^m \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h_i^2 \cdot R_i^2} = \prod_1^m \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_i}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_i}{\sigma_i}\right)^2} = \text{máximo}$$

siendo

$$h_i = \frac{1}{\sigma_i \cdot \sqrt{2}}$$

expresión que será de probabilidad máxima cuando se cumpla que:

$$\sum_1^m \left(\frac{R_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum_1^m \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot R_i^2 = \sum_1^m p_i \cdot R_i^2 = R^T \cdot P \cdot R = k^2 = \text{mínimo} \quad (3)$$

principio de los cuadrados mínimos. Buscamos de esta manera que la probabilidad de nuestros resultados sea la máxima alcanzable.

Siendo necesario para la licitud de (3) que sea

$\Sigma_o$  = matriz *diagonal* de varianzas de los observables  $O$  a priori

y por tanto

$Q =$  matriz *diagonal* cofactor  $= P^{-1}$  y

Cumplido lo que antecede, la condición Gauss-Marcov aplicable al ajuste de una red local o microgeodésica se expresa según

$$R^T \cdot P \cdot R = k^2 = \text{mínimo} \quad (4)$$

Con la teoría, algoritmo y notación usual, bien conocidos. *Donde merece la pena recordar las consideraciones efectuadas sobre el vector de residuos  $R$  en las publicaciones antes citadas<sup>1</sup> y la necesidad de contar a priori con un vector de observables, que implícitamente supone de residuos, excelente.*

La solución  $R$  de (4) también puede escribirse como el vector  $\sqrt{P} \cdot R$ , mínima norma euclídea de orden dos, tal que

$$|\sqrt{P} \cdot R|^2 = k^2 = \text{mínimo} \quad (5)$$

(4) y (5) son expresiones de la misma solución.

Su interpretación geométrica corresponde al lugar del afijo del vector  $R$ , haz de hiperelipsoides  $HE$  en el espacio  $m$ -dimensional  $E^m$ , de  $m$  ejes, referido a su centro y en ecuación canónica, en este caso, por ser  $P$  una matriz diagonal.

Y también al lugar del afijo del radio vector  $k$

$$|\sqrt{P} \cdot R|^2 = k^2 \quad (6)$$

que puede escribirse como

$$HES = R^T \cdot P \cdot R = (\sqrt{P} \cdot R)^T \cdot (\sqrt{P} \cdot R) = R'^T \cdot R'' = k^2 \quad (7)$$

---

<sup>1</sup>  
Ver p.ej. M.CHUECA, J.L.BERNÉ, A.B.ANQUELA, S.BASELGA, "Microgeodesia y redes locales. Complementos docentes." *Opus cit.* Pg. 9-14. Ed. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia 2004.

(6) y (7) expresan la misma forma cuadrática que define ahora una hiperesfera *HES* en el espacio  $m$ -dimensional  $E^m$ , referida a su centro, y radio  $k = |\sqrt{P} \cdot R|$ . *Analíticamente corresponde a una simple reducción del ajuste a pesos unidad.* Es decir, si el peso es el mismo para cada uno de los observables del ajuste podemos decir que el hiperelipsoide de observables es en este caso una hiperesfera, porque cada uno de los semiejes tiene la longitud del radio  $k$ .

Hiperelipsoide e hiperesfera son figuras homólogas y se deducen una de otra recíprocamente por una relación geométrica proyectiva, de la que nos hemos ocupado en otros trabajos.

Y conocida una solución  $R$ , se obtiene inmediatamente

$$\sqrt{P} \cdot R = R'' \quad (8)$$

y siendo

$$|\sqrt{P} \cdot R| = |R''| = k = \text{radio de HES} \quad (9)$$

Una vez definida la hiperesfera *HES*, cualquier otra solución arbitraria  $R'$  del ajuste sobre *HES* se podrá escribir según la ecuación:

$$\Gamma'^T \cdot R'' = R' \quad (10)$$

$$\Gamma' \cdot \Gamma'^T \cdot R'' = R'$$

siendo  $\Gamma'^T$  matriz cuadrada ortogonal rotación, siendo  $\Gamma'$  asimilable para fijar ideas a una matriz de cosenos directores o autovectores normalizados dispuestos en columnas y en el espacio euclídeo  $E^m$ .

El paso final de  $R'$  sobre la hiperesfera *HES* a  $R^*$  sobre el hiperelipsoide *HE* es sencillo.

Se tendrá

$$\sqrt{P} \cdot R^* = R' \quad (11)$$

$$R^* = (\sqrt{P})^{-1} \cdot R' \quad (12)$$

Lícito siempre por ser P matriz de rango completo y diagonal.

*De tal manera que la aplicación de la matriz rotación descrita corresponde y equivale analíticamente al paso de una solución Gauss-Marcov conocida de vectores y matrices:*

*x : vector de correcciones,*

*R : vector de residuos,*

*C : vector de observables compensados,*

*A : matriz de diseño,*

$$S = A^T \cdot P \cdot A,$$

a otra  $x^*$ ,  $R^*$ ,  $C^*$ ,  $A^*$ ,  $S^*$  inmediata a partir de  $\Gamma'$ , supuesto conocido.

*No existe solución del problema fuera del hiperelipsoide o hiperesfera, y todos sus puntos son solución. Es una definición geométrica exclusiva y excluyente, que equivale directa y recíprocamente a la analítica bien conocida.* Si los pesos son iguales la solución de entrada es la hiperesfera, que coincide con el hiperelipsoide, caso particular de todos los ejes iguales, si son diferentes la solución es el hiperelipsoide. Es posible transformar una solución sobre la HES a la solución sobre el HE, como ya hemos dicho, se deducen una de otra recíprocamente por una relación geométrica proyectiva.

*Por lo tanto, los componentes del vector R pueden variar para un  $k^2$  cualquiera, y resolver la cuestión, siempre supuesto  $k^2$  mínimo según conviene en nuestros ajustes cartográficos.*

*Y reiteramos que es fundamental tener en cuenta que la variación de los componentes de R modifica también los vectores C (vector de observables corregidos) y X (vector de coordenadas compensadas) y por lo tanto se refieren a distintas soluciones de la red calculables analíticamente a partir de los correspondientes modelos matemáticos y condicionados complementarios.*

La aparición de la tecnología GNSS, de universal aplicación, obliga a avanzar en

la teoría de los ajustes rigurosos de redes locales y microgeodésicas, quedando en nuestra opinión suficientemente justificada la procedencia de:

*a) Retomar la exposición en el supuesto de que las matrices  $\Sigma_o$ ,  $Q$  y  $P$  no sean diagonales ni (4) ecuación canónica de HE, superando el obstáculo de que en principio resulte incumplida la condición de Gauss-Marcov e ilícita la aplicación del algoritmo de mínimos cuadrados a la red en presencia.*

*b) Estudiar la evolución de la solución mínimo cuadrática  $C$ ,  $X$ , en función de los distintos condicionados a agregar al modelo matemático inicial, línea de investigación que dejaremos abierta por el momento.*

La cuestión estriba en cómo puede diseñarse el trabajo en lo concerniente a los datos de partida, especialmente por lo que respecta al vector de observables y sus matrices de varianzas y pesos, en su caso más general y supuesta a priori la aparición de covarianzas en ellas en orden a restablecer rigurosa y satisfactoriamente la licitud de la solución y algoritmo antes citados.

Es fundamental tener en cuenta desde el primer momento que el proyectista tiene plena libertad para elegir a priori los observables de partida más adecuados y para combinarlos entre sí formando otros de concepción distinta (generalmente homogeneizándolos todos en magnitudes lineales), generando así los componentes más adecuados del vector  $O$ .

Y todo confluye en definitiva en el estudio de las covarianzas que puedan presentarse en las matrices de diseño a priori generadas por el vector de observables  $O$ . Con todo ello podremos, entre otras cuestiones importantes, avanzar en la resolución rigurosa Gauss-Marcov de redes con observables GNSS, cuestión que en el momento presente entendemos que no está adecuadamente resuelta.



## 2.2. LAS COVARIANZAS A PRIORI EN LAS MATRICES DE DISEÑO DE OBSERVABLES

Supongamos ahora una matriz cualquiera ortogonal normalizada de autovectores columna  $\Gamma'$ , siendo su transpuesta  $\Gamma'^T$  representativa de la rotación más general en el espacio euclídeo  $E^m$ .

Así, siendo el sistema de formas lineales genérico

$$Ax - K = R \quad (13)$$

Por definición de transformación ortogonal en el sistema el vector  $R$  rotará a  $R'$  según

$$\Gamma'^T \cdot (Ax - K) = \Gamma'^T \cdot R = R' \quad (14)$$

y se cumplirá

$$|Ax - K| = |R| = |\Gamma'^T \cdot R| = |R'| \quad (15)$$

es decir

$$\begin{aligned} R'^T \cdot R &= (Ax - K)^T \cdot (Ax - K) = \\ &= (\Gamma'^T \cdot (Ax - K))^T \cdot (\Gamma'^T \cdot (Ax - K)) = (\Gamma'^T \cdot R)^T \cdot (\Gamma'^T \cdot R) = R'^T \cdot R' \end{aligned} \quad (16)$$

Por lo tanto, en el caso de observables del mismo peso,  $P = I$ , la hiperesfera genérica *HES* (7) se particulariza ahora en

$$|R|^2 = k^2 = \text{constante} = \text{radio de la esfera} \quad (17)$$

y representa a todas las soluciones Gauss-Marcov de la red, que pueden explicarse por la rotación (14) del vector  $R$ . *Con un mismo modelo matemático básico, a cada condicionado complementario le corresponderá una matriz rotación  $\Gamma'^T$*

representativa de una solución de la red, expresada por un vector  $R$  de módulo constante e igual a  $k$  y componentes variables  $R_i$  con  $i \in 1, 2, 3, \dots, m$ .

Si la matriz pesos es diagonal  $P = (\text{diag } p_i)$  con la notación usual, se cumplirá también teniendo en cuenta (7) y (14) que

$$\Gamma'^T \cdot \sqrt{P} \cdot (Ax - K) = \Gamma'^T \cdot \sqrt{P} \cdot R = \Gamma'^T \cdot R'' = R' \quad (18)$$

conservando la notación  $\Gamma'$  y  $R'$  por tener idéntico significado físico que en el caso anterior. Y se sigue

$$\begin{aligned} R^T \cdot P \cdot R &= R''^T \cdot R'' = (\sqrt{P} \cdot (Ax - K))^T \cdot (\sqrt{P} \cdot (Ax - K)) = \\ &= (\Gamma'^T \cdot \sqrt{P} \cdot (Ax - K))^T \cdot (\Gamma'^T \cdot \sqrt{P} \cdot (Ax - K)) = (\Gamma'^T \cdot R'')^T \cdot (\Gamma'^T \cdot R'') = R'^T \cdot R' \end{aligned} \quad (19)$$

Que es la generalización de la hiperesfera (11) a la (7), de ecuación (6). El vector  $R$  de partida referido al hiperelipsoide  $HE$  es ponderado según la matriz diagonal  $P$ , obteniéndose  $R''$  y quedando referido a la hiperesfera  $HES$ . La ulterior rotación  $\Gamma'^T$  da lugar a cualquier solución arbitraria, con el mismo condicionado del caso anterior de pesos unitarios.

Con lo que queda incluso reiteradamente justificada la interpretación geométrica establecida en el epígrafe anterior.

Pero si practicamos en (4) la rotación  $\Gamma'^T$  según (14) directamente al vector  $R$  del caso anterior, con  $P = (\text{diag } p_i)$ , se obtiene sucesivamente

$$\Gamma'^T \cdot R = R'$$

$$\Gamma' \cdot \Gamma'^T \cdot R = R = \Gamma' \cdot R' \quad (20)$$

$$R^T \cdot P \cdot R = (\Gamma' \cdot R')^T \cdot P \cdot (\Gamma' \cdot R') = R'^T \cdot \Gamma'^T \cdot P \cdot \Gamma' \cdot R' = R'^T \cdot P' \cdot R' \quad (21)$$

donde por definición de factorización,  $P'$  es una matriz completa.

Lo que en principio puede parecer paradójico, ya que  $P$  es una matriz diagonal de pesos y su inversa  $Q$  es la matriz cofactor de varianzas a priori, también diagonal, así como la matriz varianza covarianza a priori de observables  $\Sigma_o = s^2 \cdot P^{-1} = s^2 \cdot Q$ , siendo  $s^2$  el factor de varianza, definiéndose así los observables como estadísticamente independientes. Es lícito así mismo aceptar la hipótesis de Gauss Marcov y ajustar por mínimos cuadrados, si previamente se demuestra por aplicación del Test de Pearson o por cualquier otro procedimiento, que  $R$  y  $R'$  presentan distribuciones normales.

*Pero la aplicación de una rotación  $\Gamma^T$  al vector  $R$  genera  $P'$ , matriz de pesos generalizada, y  $Q'$  cofactor de varianzas, que son ahora dos matrices completas y en principio indicarían la aparente presencia de covarianzas inducidas artificialmente, sin justificación física alguna, entre los observables.*

*La explicación se encuentra en que la rotación del vector  $R$  hasta  $R'$  desplaza al afijo de este último fuera del hiperelipsoide canónico*

$$HE \equiv R'^T \cdot P' \cdot R' = k^2 = \text{mínimo}$$

*lugar de las soluciones de la red, situándole sobre el hiperelipsoide rotado del anterior alrededor de su centro*

$$R'^T P' R' = k^2$$

*Que es ajeno a aquellas. Así,  $R'$  no es solución de la red propuesta.*

*Recíprocamente, factorizar una matriz de pesos generalizada completa  $P$  a priori da lugar a*

$$R^T \cdot P \cdot R = R^T \cdot \Gamma \cdot V \cdot \Gamma^T \cdot R = (\Gamma^T \cdot R)^T \cdot V \cdot (\Gamma^T \cdot R) = R'^T \cdot V \cdot R' \quad (22)$$

*pasando ahora por medio de una rotación de sentido inverso a la anterior, de un hiperelipsoide cualquiera con centro en el de coordenadas, a su posición canónica*

respecto a los mismos ejes. Y en definitiva y con el mismo razonamiento del caso anterior, no es lícito ajustar la red con

$$P' = V = (\text{diag } \mu_i)$$

tomando como matriz de pesos  $P'$  la matriz diagonal de autovalores  $\mu_i$ ,  $i \in (1, 2, \dots, m)$  con la notación usual y  $R'$  vector de correcciones.

Es trivial que solamente podría aceptarse, y como solución aproximada, si la rotación es diferencial y despreciable. Pero no como práctica habitual, en nuestra opinión con evidente falta de rigor.

No es posible aplicar Gauss-Marcov con matrices de pesos completas ni resolver la aparición de covarianzas mediante una rotación. Pero ciñéndonos a observables GNSS vamos a ver que puede resolverse rigurosamente la cuestión actuando sobre ellos, modificándolos. Y más adelante logrando a priori unificar todos los pesos, alcanzando en el límite su hiperelipsoide la condición de hiperesfera.

### 2.3. CASO DE OBSERVABLES GNSS Y RELACIONADOS CON ELLOS

Es obvio que un observable aislado de  $O_i$ ,  $i =$  orden del observable,  $i \in (1, 2, \dots, m)$ ,  $m > n =$  número de coordenadas a determinar, es por definición estadísticamente independiente. Podrá estudiarse y establecerse su distribución, que será normal o no, pero solamente se podrá hablar de covarianzas cuando se considere su relación con el resto de los observables componentes del vector  $O$ . Esta relación debe establecerse en su caso por el proyectista y según veremos en seguida, puede actuar sobre ella con provecho para el trabajo en presencia.

En general y por lo tanto, una función cualquiera

$$G(O) = 0 \quad (23)$$

Supone la existencia de covarianzas  $\sigma_{ij}$  entre los observables de dichos subíndices.

En su caso más general, las matrices de diseño: varianza covarianza  $\Sigma_o$ , cofactor  $Q$  y de pesos  $P$  resultarían completas, así como sus inversas.

En la práctica y como supuesto y ejemplo más frecuente, si consideramos en planimetría la expresión de la distancia reducida  $l_{IJ}$  entre dos vértices I, J, referidos a unos ejes Oxy, puede escribirse en general, sean observables a priori, compensados a posteriori, o, simplemente, valores calculados

$$l_{IJ} = (\Delta x_{IJ}^2 + \Delta y_{IJ}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

e indudablemente, es lícito suponer que ningún observable del tipo  $lo_{IJ}$  guarda relación a priori con otro  $lo_{KL}$ . Por lo tanto, no se tendrán en cuenta covarianzas del tipo  $\sigma_{lo_{IJ}lo_{KL}}$  y su matriz varianza covarianza a priori  $\Sigma lo_{ij}$  resulta así una matriz diagonal y se representará, con todo rigor y como consecuencia de lo expuesto según

$$\Sigma lo_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{lo_{12}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{lo_{123}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{lo_{ij2}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{lo_{km}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{lo_{(n-3)(n-2)}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{lo_{(n-1)n}}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= (diag \sigma_{lo_{ij}}^2) \quad i, j \in 1, 2, 3, \dots, (n-1), n \quad i \neq j \quad (25)$$

y ello sean los observables de origen clásico o GNSS .

Evidentemente (25) genera así mismo la matriz de pesos a priori

$$\Sigma_{lo_{ij}}^{-1} = P_{lo_{ij}} = (diag \frac{1}{\sigma_{lo_{ij}}^2}) \quad (26)$$

*Siendo de aplicación toda la teoría conocida, recomendándose no obstante y por supuesto la ponderación según Pearson por la mediana.*

En consecuencia, se puede resolver la red por trilateración o lo que es más importante, agregar el paquete de observables a una red clásica mixta (de ángulos y distancias y resolver por triangulación, simplemente por decisión rigurosa y lícita del proyectista.

Pero si los observables son del tipo  $(\Delta x_{oIJ}, \Delta y_{oIJ})$  apareados, también caso planimétrico, o el proyectista estima más procedente considerarlos así, deberá tenerse en cuenta la existencia de covarianzas  $\sigma_{\Delta x_{oIJ}\Delta y_{oKL}}$  y las matrices varias veces citadas serán completas, de tipo banda, procedan indirectamente de observables clásicos o directamente de observables GNSS. Su estructura será como la que escribimos a continuación

Y retrocediendo al caso anterior, de nuevo los ceros de la matriz (27) ponen de manifiesto la independencia de las reducidas  $l_{oij}$  de cada eje observado. Y se reitera la imposibilidad de establecer a priori una relación funcional entre ellas y por lo tanto se confirma con todo rigor la estructura de la matriz varianza covarianza  $\Sigma l_{oij}$  como una matriz diagonal del tipo (25).

Retomando la exposición, con todo ello no hacemos sino respetar y adherirnos al consenso más generalizado de la opinión científica del momento. En la matriz (27) se representa según es usual con la notación subíndice IJ una pareja de observables planimétricos, GNSS, o clásicos, entre los vértices I,J, que hemos supuesto ordenados de alguna forma para simplificar la notación, proyecciones  $\Delta X, \Delta Y$ , de la reducida  $l_{oij}$  sobre los ejes coordenados, y siendo  $\sigma^2$  la varianza de los observables considerados. Se representan solo ejes observados y ordenados entre puntos consecutivos desde el 1-2 hasta el (n-1)-n, entendiéndose incluidos en la matriz todos los demás, caso más general posible, siendo n el número de coordenadas planas de la red.

La matriz (27) resulta simétrica y sus elementos distintos de cero se sitúan exclusivamente sobre la diagonal principal, la diagonal inmediatamente superior, y su simétrica respecto de la primera. No existe covarianza alguna entre coordenadas de vértices cuya reducida no haya sido observada y proyectada sobre los ejes según



la bien conocida tecnología GNSS o deducida a partir de observables clásicos.

En general, no se cumple la condición de probabilidad máxima observacional del método (3) y la matriz  $\Sigma_o$  y sus matrices deducidas  $Q$  y  $P$  impiden la aplicación rigurosa del algoritmo de mínimos cuadrados.

No obstante, está también en manos del proyectista elegir a su buen gobierno sus propios observables. Y contando con la disposición de éstos en abundancia, supuesto siempre asumible en microgeodesia donde el número de vértices de la red en general es escaso, prima la exactitud, y decae frente a ella la importancia de la reiteración observacional en campo, *siendo evidente que si se suprime un observable de la pareja  $\Delta X_{ij}$ ,  $\Delta Y_{ij}$ , desaparece la covarianza que relaciona a los dos. Dicha decisión es potestativa del proyectista y aplicada adecuada y reiteradamente permite suprimir todas las covarianzas y reducir al ajuste al supuesto fundamental  $\Sigma_o$ ,  $Q$ , y  $P$ , matrices diagonales.*

Se aplica el cálculo del ajuste por el procedimiento Gauss-Marcov y queda resuelto el problema, siendo posible desarrollar el principio expuesto en una metodología más amplia en algoritmo y aplicaciones que denominaremos “de ajuste gaussiano por incrementos de coordenadas” en la que ni tan siquiera se desaprovechan observables útiles.

Con ello queda resuelta la cuestión, entendemos que rigurosamente y en toda su generalidad. Con la ventaja adicional del empleo de matrices de diseño  $A$  de Elementos Exactos, como veremos más adelante.

Pueden así ajustarse rigurosamente redes GNSS, mixtas y clásicas, transformando los observables a la forma incremental desarrollada.



## 2.4. TEORÍA Y PRAXIS DE AJUSTE DOBLE POR INCREMENTOS DE COORDENADAS: UNA SOLUCIÓN RIGUROSA

En síntesis, una observación GNSS facilita la posición aproximada de un punto respecto a otro, con respecto a un sistema de coordenadas tridimensional que generalmente es el del elipsoide WGS84.

En la actualidad y en aplicaciones topográficas no existe mayor problema para trasladar los resultados de las observaciones, incluso a través del mismo instrumento y en tiempo real, a cualquier sistema OXYZ de coordenadas cartesianas rectangulares topográficas locales arbitrariamente escogido, con suficiente precisión y para cualquier exigencia razonable. A dicho sistema suponemos en cuanto sigue referidos los observables genéricos, sean o no GNSS, que designaremos con la notación  $\Delta X_{ij}$ ,  $\Delta Y_{ij}$ ,  $\Delta Z_{ij}$ , proyecciones sobre los ejes de la distancia entre los vértices  $I(X_i, Y_i, Z_i)$  y  $J(X_j, Y_j, Z_j)$ .

Así, entre dos puntos M y P se podrá escribir

$$X_M - X_P = \Delta X_{MPo} + R_{x_{MP}} \quad (28)$$

$$Y_M - Y_P = \Delta Y_{MPo} + R_{Y_{MP}} \quad (29)$$

$$Z_M - Z_P = \Delta Z_{MPo} + R_{Z_{MP}} \quad (30)$$

Extendidas las expresiones a todos los vértices de la red, se obtiene el sistema de formas lineales específicas, según metodología conocida,

$$AX = K + R \quad (31)$$

Cuya inmediata resolución por mínimos cuadrados proporciona directamente las coordenadas compensadas.

En el supuesto que de alguna manera se haya establecido un vector de coordenadas aproximadas  $X_a = X - x$ , se tendrá

$$X_{Ma} - X_{Pa} + x_M - x_P = \Delta X_{MPo} + R_{x_{MP}}$$

$$Y_{Ma} - Y_{Pa} + y_M - y_P = \Delta Y_{Mpo} + R_{Y_{MP}}$$

$$Z_{Ma} - Z_{Pa} + z_M - z_P = \Delta Z_{MPo} + R_{Z_{MP}}$$

Y sucesivamente

$$x_M - x_P = \Delta X_{MPo} - (X_{Ma} - X_{Pa}) + R_{x_{MP}}$$

$$y_M - y_P = \Delta Y_{Mpo} - (Y_{Ma} - Y_{Pa}) + R_{Y_{MP}}$$

$$z_M - z_P = \Delta Z_{MPo} - (Z_{Ma} - Z_{Pa}) + R_{Z_{MP}}$$

$$x_M - x_P = \Delta X_{MPo} - \Delta X_{MPa} + R_{x_{MP}} \quad (32)$$

$$y_M - y_P = \Delta Y_{Mpo} - \Delta Y_{MPa} + R_{Y_{MP}} \quad (33)$$

$$z_M - z_P = \Delta Z_{MPo} - \Delta Z_{MPa} + R_{Z_{MP}} \quad (34)$$

es decir

$$\text{Correcciones} = \text{Valores Observados} - \text{Valores Calculados} + \text{Residuos}$$

Sistema de formas lineales que puede escribirse en la forma usual (13), idéntico al utilizado en ajuste de redes clásicas, de observación azimutal y/o distanciométrica, que puede integrarse con ellas formando el conjunto de lo que llamaremos “red completa”.

*Es subrayable que, en el caso completo mencionado y a partir de los observables clásicos, siempre se podrá disponer a priori de un vector de coordenadas aproximadas  $X_a = X - x$ .*

La matriz de diseño A es del tipo de las que llamamos “de elementos exactos”, de teoría y praxis bien conocida.

Supuesta la dependencia de observables, que da lugar a que su matriz a priori de varianzas sea completa y de tipo banda como la (27) y convertidos y referidos los observables GNSS al sistema local de ejes del levantamiento, procede la ulterior aplicación del método y Test de Pearson para definir estadísticamente la mejor estimación de la matriz citada.

Hemos visto que la relación de dependencia de observables y su evaluación forma parte del trabajo y buen hacer subjetivo del proyectista. No son matemáticamente graduables, y menos aún rigurosamente cifrables, e igual que en las redes clásicas nos referíamos a posteriori a la cumplimentación sobrevenida de condiciones de geometricidad, *y aceptábamos la aparición de covarianzas, en redes GNSS obraremos igual. Solo que a priori, lo que es esencial para determinar la aplicación o no del ajuste gaussiano, aceptando que basta con tener en cuenta que el módulo del vector distancia entre dos vértices*

$$L^2_{MP} = \Delta X^2_{MP} + \Delta Y^2_{MP} + \Delta Z^2_{MP} \quad (35)$$

*corresponde a una realidad física indudable que implica aceptar la existencia de covarianzas entre los observables – componentes.*

En dicho supuesto y aplicado a planimetría, según venimos haciendo, sin dificultad alguna para completarlo con la altimetría cuando sea preciso, y así lo llevaremos a cabo en su momento, escribiremos la forma bidimensional

$$I^2_{MP} = \Delta X^2_{MP} + \Delta Y^2_{MP} \quad (36)$$

y también y con la notación bien conocida

$$l_{MP} = l_{MPca} + dl_{MPca} = l_{MPo} + R_{lMPo} \quad (37)$$

cuya forma lineal es

$$\begin{aligned} -\frac{X_{Pa}-X_{Ma}}{l_{MPca}} \cdot dX_M - \frac{Y_{Pa}-Y_{Ma}}{l_{MPca}} \cdot dY_M + \frac{X_{Pa}-X_{Ma}}{l_{MPca}} \cdot dX_P + \frac{Y_{Pa}-Y_{Ma}}{l_{MPca}} \cdot dY_P = \\ = l_{MP} - l_{MPca} + R_{lMPo} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta X_{MPa}}{l_{MPca}} \cdot dX_M - \frac{\Delta Y_{MPa}}{l_{MPca}} \cdot dY_M + \frac{\Delta X_{MPa}}{l_{MPca}} \cdot dX_P + \frac{\Delta Y_{MPa}}{l_{MPca}} \cdot dY_P = \\ = l_{MP} - l_{MPca} + R_{lMPo} \quad (38) \end{aligned}$$

con

$$I^2_{MPca} = l^2_{MPca} = \Delta X^2_{MPa} + \Delta Y^2_{MPa} \quad (39)$$

Y queda la cuestión fundamental a resolver en que condiciones puede aceptarse la cumplimentación de la condición Gauss–Marcov, junto con el adecuado tratamiento de las covarianzas a priori. En una palabra, la única opción sensata pasa por calcularse algún estimador fiable de la matriz  $\Sigma_o$  varianza covarianza de observables (27).

A juicio del proyectista, puede aceptarse la aplicación de cualquiera de los programas, instrumentales o no, que existen en el mercado para obtener  $\Sigma_o$ . Sin embargo, entendemos preferible y con mayor poder de afirmación realizar la estimación específica en cada ajuste y caso particular.

Un método adecuado es el clásico antes citado debido a Karl Pearson, que requiere la comprobación previa de la normalidad de las variables a estudiar.

Hecho esto, calcularemos para cada componente  $(\Delta X_{MPo}, \Delta Y_{MPo})$  de los lados observados  $l_{MPo} = O_i$  al variar  $M, P$ , los estadísticos siguientes con los que calculamos la matriz varianza covarianza  $\Sigma_o$ :

$$\hat{\sigma}_{\Delta X_{MP}}^2 = \frac{\Sigma(\Delta X_{MPo} - \bar{\Delta X}_{MPo})^2}{n_{MP} - 1} = \text{varianza de } \Delta X_{MPo} \quad (40)$$

$$\hat{\sigma}_{\Delta Y_{MP}}^2 = \frac{\Sigma(\Delta Y_{MPo} - \bar{\Delta Y}_{MPo})^2}{n_{MP} - 1} = \text{varianza de } \Delta Y_{MPo} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\Delta X_{MPo}, \Delta Y_{MPo}} &= \frac{\Sigma(\Delta X_{MPo} - \bar{\Delta X}_{MPo}) \cdot (\Delta Y_{MPo} - \bar{\Delta Y}_{MPo})}{n_{MP} - 1} = \\ &= \text{covarianza de } \Delta X_{MPo} \Delta Y_{MPo} \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C\hat{R}_{\Delta X_{MP}, \Delta Y_{MP}} &= \frac{\hat{\sigma}_{\Delta X_{MPo}, \Delta Y_{MPo}}}{\hat{\sigma}_{\Delta X_{MP}} \cdot \hat{\sigma}_{\Delta Y_{MP}}} = \\ &= \text{Coeficiente de correlación de } \Delta X_{MPo} \Delta Y_{MPo} \quad (43) \end{aligned}$$

Así puede formarse la matriz varianza covarianza a priori (27)  $\Sigma_o$ .

Pueden incluso calcularse y grafarse también las líneas de regresión y se recuerda que:

$$-1(\text{máxima correlación negativa}) \leq CR \leq +1(\text{máxima correlación positiva})$$

$$CR = 0, \text{ indica independencia de variables}$$

Pues bien, si después de aplicar con éxito el Test de Pearson, ratificando la distribución normal de las variables estudiadas, se forma  $\Sigma_{lo}$ , matriz varianza covarianza, y se aprecia que las covarianzas resultantes en conjunto son a juicio del proyectista suficientemente pequeñas, y si, además, los coeficientes de correlación se encuentran en el entorno de cero, puede afirmarse que no existe relación entre las variables  $\Delta X_{MPo}$ ,  $\Delta Y_{MPo}$ , a fortiori tampoco entre las  $l_{MPo}$  y en el caso que nos ocupa está justificado efectuar el ajuste gaussiano por el procedimiento usual a los observables GNSS, por separado en cualquiera de los dos casos supuestos y así mismo englobados en una red completa.

Naturalmente y según costumbre, ese desideratum no acostumbrará a suceder y serán mucho más frecuentes los casos dudosos.

*Entonces procede actuar sobre los observables, suprimiendo los suficientes para conseguir matrices parciales diagonales  $\Sigma'_o$  y aplicar a cada una de ellas el procedimiento general de ajuste.*

*Dichas matrices deben permitir en principio calcular la totalidad de las coordenadas de los vértices de la red, siendo buena práctica no desaprovechar trabajo útil de campo y utilizar todos los observables aceptados tras el Test de Pearson encuadrándolos adecuadamente en distintas matrices individualizadas. Se obtendrán así un mínimo de dos soluciones Gauss Marcov de la red, comparables y promediabiles.*

*También pueden formularse matrices que permitan calcular separadamente todas las correcciones "x" y todas las "y". Bastará para ello con formar separadamente las matrices de los observables  $\Delta X$  e  $\Delta Y$ . Teniendo en cuenta no obstante que ambas soluciones serán Gauss Marcov, pero su conjunto no lo será.*

*Caben por supuesto todas las combinaciones intermedias dictadas por el buen juicio del proyectista ante la exigencia y mejor cumplimentación del trabajo encomendado.*

## 2.5. POSIBLES SOLUCIONES APROXIMADAS

Suponemos determinada la matriz general (27)  $\Sigma_o$  a través del algoritmo de Pearson, según la doctrina referida aplicada específicamente al ajuste en presencia. El resultado obtenido es tal vez más artesanal, pero individualizado y difícilmente discutible, supuesto fruto de una observación adecuada instrumentalmente, metodológicamente rigurosa y suficientemente reiterada para que el vector de observables sea geodésica y estadísticamente correcto. En caso contrario, es inútil seguir adelante. De nuevo insistimos en considerar menos fiable la aplicación automática de programas comerciales acompañen o no a la instrumentación empleada.

A juicio del proyectista, puede suceder que considere las covarianzas obtenidas despreciables frente a las varianzas. Es un caso banal de resolución inmediata.

En general, aunque solo sea por inevitables errores de muestreo, siempre aparecerán covarianzas en mayor o menor magnitud y cuantía. Estas covarianzas aparentes estimadas deberán ser juzgadas y, en su caso, despreciadas y no se tendrán en cuenta, también según criterio del proyectista.

Es el caso de observables clásicos triangulados, trilaterados, y triangulaterados y observables GNSS triangulaterados, todos a priori independientes.

Sin embargo, si nos referimos específicamente al caso que nos ocupa, de observables GNSS o clásicos a priori dependientes, como los planimétricos  $\Delta X$  e  $\Delta Y$  contemplados en (4) y en dicho supuesto, es muy improbable que las covarianzas (42) resulten o puedan considerarse despreciables.

Un primer recurso consiste en factorizar  $\Sigma_o$ , completa, y en consecuencia  $Q$  y  $P$  que aceptamos como matriz de pesos generalizada. Así escribimos (22), con la notación usual

$$R^T \cdot \Gamma \cdot V \cdot \Gamma^T \cdot R = (\Gamma^T \cdot R)^T \cdot V \cdot (\Gamma^T \cdot R) = R'^T \cdot V \cdot R' = k^2 = \text{mínimo} \quad (44)$$

con

$$R' = \Gamma^T \cdot R \quad (45)$$

que no es una solución Gauss Marcov.

$R'$  es el vector  $R$  sometido a una rotación  $\Gamma^T$  siendo  $\Gamma$  matriz de autovectores columna de  $P$ .

$R'$  y  $R$  tendrán el mismo módulo y distintos componentes.

De tomarse  $R'$  por  $R$  y  $V$ , matriz diagonal de autovalores de  $P$  por  $P'$ , matriz diagonal de pesos, se obtendrán  $X'$  y  $C'$ , soluciones aproximadas distintas de  $X$  y  $C$ , que sabemos no gaussianas, por situarse el afijo de  $R'$  según hemos visto fuera

del lugar geométrico de  $R$ . Puede definirse como solución aproximada de la red, con un modelo matemático desconocido y distinto a la expresión general  $F(X) - C = 0$ , caso observaciones indirectas, de universal aplicación y único que consideramos, si resulta despreciable la rotación  $\Gamma^T$ .

Siempre teniendo en cuenta que el modelo matemático de obligado cumplimiento que define e individualiza la solución del ajuste y la correspondiente aplicación mínimo cuadrática gaussiana son teóricamente incompatibles por la condición de  $P$  como matriz banda.

La factorización permite la aplicación descrita con una aproximación que, a lo menos, es conveniente estudiar.

El criterio de aceptación o rechazo puede basarse en la propia matriz cuadrada  $\Gamma$  de rango completo  $R(\Gamma) = m =$  número de componentes  $R_i$  de  $R$  a determinar, que definimos como “columna” por estar formadas éstas por los componentes de los autovectores de  $P$  en dicha disposición, que representamos por la notación autovectores columna  $=v_i, i \in 1, 2, 3, \dots, m$

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \dots \\ v_{ik} \\ \dots \\ v_{im} \end{pmatrix} \quad (46)$$

matriz  $\Gamma = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_m)$

Será tanto más aceptable la solución propuesto cuanto mejor cumpla  $\Gamma$  la condición

$$\begin{aligned} v_{ik} &\cong 0 \implies k \neq j \\ v_{ij} &\cong 1 \end{aligned} \quad (47)$$

en el límite de dicho supuesto la transformación puede considerarse diferencial y despreciable. Llegando a ser  $\Gamma$  matriz próxima a la matriz identidad.



## 2.6. SÍNTESIS Y CONCLUSIÓN

La condición Gauss-Marcov aplicable al ajuste de una red local o microgeodésica se expresa según:

$$R^T \cdot P \cdot R = k^2 = \textit{mínimo}$$

siendo la matriz  $P$  generalizada, una matriz cuadrada, completa, simétrica, de rango completo y factorizable según (44), esta expresión representa un haz de hiperelipsoides concéntricos en el espacio euclídeo  $E^m$ , con centro en el de coordenadas, al variar el parámetro  $k^2$ . Cada  $k^2$  da lugar a un hiperelipsoide  $HEG$ . Insistimos en que existen covarianzas a priori entre los observables y sus residuos.

Las soluciones Gauss-Marcov del ajuste de una red local se generan y relacionan con aquella cuando el haz es canónico y  $k^2 = \textit{mínimo}$ . Entonces  $P = (\textit{diag}_{p_i})$  cuadrada, diagonal y de rango completo. El hiperelipsoide  $HE$  resultante, canónico, referido a sus ejes, es el lugar geométrico de los afijos de  $R$ , soluciones de la red. Un modelo matemático linealizado  $Ax - K = R$ , con  $R(A) = m - n$ , completo, particulariza  $R$  y da lugar a la solución determinista única que venimos estudiando, aplicada a la determinación de un solo vértice variable. Si  $R(A) < m - n$ , incompleto, caso red libre, habrá infinitas soluciones, situación de notable utilidad en otros aspectos de la teoría de redes, con determinación de más de un vértice variable y división de la red en distintas zonas específicas, que hoy no contemplamos. En cualquier caso, no existen covarianzas a priori entre los observables o sus residuos.

En el caso general, si  $k^2 = \textit{mínimo}$  se obtiene un hiperelipsoide genérico  $HEG'$  que no es una solución Gauss-Marcov rigurosa. La factorización de la matriz  $P$  conduce al mismo resultado que una rotación de argumento  $\Gamma^T$  siendo  $\Gamma$  matriz de autovectores columna de  $P$  y refiere  $HEG'$  a sus ejes, con expresión canónica (44)

$$HE' = R'^T \cdot V \cdot R' = k^2 = \textit{mínimo} \quad (48)$$

que es una solución Gauss-Marcov de una cierta red de matriz diagonal de pesos

$$P' = V = (\text{diag } v_i)$$

con un modelo matemático y condicionado complementario desconocidos, que puede aceptarse por aproximada de la red en presencia con todas las reservas necesarias y siempre de acuerdo con el contenido del epígrafe 2.5 anterior.

Así mismo y en el caso general, si todos los autovalores de  $P$  resultaran iguales, según  $v_i = v$ , se tendrá

$$\begin{aligned} R^T \cdot \Gamma \cdot V \cdot \Gamma^T \cdot R &= R^T \cdot \Gamma \cdot (\text{diag } v) \cdot \Gamma^T \cdot R = R^T \cdot v \cdot (\Gamma \cdot \Gamma^T) \cdot R = R^T \cdot v \cdot I \cdot R = \\ &= R^T \cdot (\text{diag } v) \cdot R = R^T \cdot V \cdot R = (\sqrt{v} \cdot R)^T \cdot (\sqrt{v}^T \cdot R) = R'^T \cdot R'' = k^2 = \\ &\text{mínimo} \quad (49) \end{aligned}$$

resultando  $HEG'$  particularizado como una hiperesfera  $HES'$ , de radio  $k$ , transformada por homotecia de la  $HES$  de radio  $\frac{1}{\sqrt{v}} \cdot k$ , lugar geométrico de soluciones rigurosas Gauss-Marcov de modelos desconocidos. No existen tampoco, como debe ser, covarianzas a priori.

Y es claro que una rotación arbitraria  $\Gamma'^T$  transforma  $HE$ , lugar de soluciones Gauss Marcov, en  $HEG'$  fuera de dicho lugar, originando la aparición de covarianzas inducidas a priori. Y cuanto se ha dicho de  $HE$  y  $HEG'$  puede decirse correlativamente del afijo del vector  $R$ , solución Gauss-Marcov, y del afijo del vector  $R'$ , rotado de  $R$  que no es solución.

En conclusión, la solución Gauss-Marcov es rigurosamente incompatible con las covarianzas estudiadas aparecidas a priori o inducidas, que siempre pueden explicarse a través de una rotación directa genérica de matriz  $\Gamma^T$  o  $\Gamma'^T$ , o una rotación inversa  $\Gamma$  o  $\Gamma'$ , del n-edro coordinado. Pueden evitarse modificando los observables, en especial los GNSS según se explica en los epígrafes anteriores, aplicando triangulateración o doble ajuste por incrementos de coordenadas. Con ello se resuelve rigurosamente el problema.

Merece la pena no obstante y en la práctica estudiar la posibilidad de existencia de solución aproximada.

*Finalmente, es claro que la solución HES, hiperesfera, permite una capacidad de proyecto y diseño muy superior a la HE, hiperelipsoide, y debe perseguirse. Conduce a proyectar redes de observables lo más aproximados a equiprecisos y a la aplicación ulterior de técnicas relacionadas con el conocido Problema de Diseño de Orden Dos PD2. En cualquier caso, nos hallamos de nuevo ante una cuestión de proyecto y tratamiento de pesos de observables. En otro orden de ideas, debe ser preceptivo para el proyectista garantizar la aplicación correcta a posteriori de los F-Test y  $\chi^2$  - Test en el entorno de sus óptimos respectivos asegurándose de que número de observables y redundancias estén relacionados convenientemente. En próximos trabajos D.m. abordaremos en detalle la doctrina y praxis concernidas.*

*Adelantamos que, para avanzar en el campo de los recintos de error en redes locales, cualquiera que sea su dimensión y sean totales o específicos, desarrollaremos alguna idea que entendemos novedosa sobre el paralelismo existente entre el hiperelipsoide a priori de observables (4)*

$$HE_o = R^T \cdot P \cdot R = R^T \cdot \sigma^2 \cdot \Sigma_0^{-1} \cdot R = k^2 = \text{mínimo} \quad (50)$$

*y el de correcciones a posteriori*

$$HE_{xx} = x^T \cdot S \cdot x = x^T \cdot A^T \cdot P \cdot A \cdot x = x^T \cdot \sigma^2 \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = f_\alpha^2 \quad (51)$$

*a los que por primera vez distinguimos por medio de los subíndices “o” y “xx”. Ambos, por ejemplo, dependen de P y del vector  $K = O_T - O_C$ , diferencia entre valores observados y calculados de los observables. Es decir y como era de esperar, de la calidad del trabajo en campo, exigiendo que sea excelente.*

*Es en nuestra opinión la gran verdad, que surgirá siempre a través de nuevos algoritmos (hiperpodarias, integrales múltiples extendidas a paraleletópodos, análisis multivariante, etc...). Hoy por hoy, y tal parece que durante un futuro no limitado,*

*exigiendo también la intervención humana directa, dentro de un marco tecnológico tipo de ingeniería superior.*

## Capítulo 3

# Aplicación del método de incrementos de coordenadas en una red clásica

Se vuelve a la red local situada en la Universidad Politécnica de Valencia sobre la que los autores realizaron un primer trabajo de ajuste y compensación planimétricos por el Método de Triangulación, con vector de observables mixto, compuesto por medidas angulares azimutales y distancias reducidas electrónicas, cuyo desarrollo y resultado se recoge en una publicación anterior<sup>1</sup>.

A partir de una nueva observación de la red en estudio se hará un primer ajuste por triangulación y una vez completado el cálculo se propone el ajuste por el método de incrementos de coordenadas.

Con ello será posible comparar rigurosamente la metodología y resultados del ajuste por triangulación y del ajuste por incrementos de coordenadas. Verificando la validez de ambos métodos de ajuste gaussiano determinista.

---

1

*Op. cit.* “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local...”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT., cuyo contenido, especialmente en datos y resultados, suponemos reproducido y utilizaremos sistemáticamente en las páginas que siguen.

### 3.1. RESOLUCIÓN POR TRIANGULATERACIÓN

Con el fin de verificar la bondad de los resultados del método de incrementos de coordenadas se resolverá la red por Triangulateración en primera instancia.

#### 3.1.1. MONUMENTACIÓN, MATERIALES Y CARACTERÍSTICAS CONSTRUCTIVAS

Tres de los cuatro pilares forman parte de la red de calibración de la Universidad Politécnica de Valencia<sup>2</sup> que se pretende densificar con un nuevo vértice.

Dichos pilares V1, V3 y V4 son de acero inoxidable de 1.2 m de altura y diámetro exterior de 22 cm. Se construyeron en doble tubo concéntrico con una cámara de aire que separa el tubo interior anclado directamente a cimentación, del tubo exterior cuyas funciones básicas son de protección tanto frente a posibles agresiones externas como a la posible dilatación por insolación directa.

En cuanto al pilar V2 es de acero y está anclado sobre el hormigón de la vía del campus universitario, tiene una altura de 1.3 m., y en la parte superior tres alineaciones para estacionar la basada.

#### 3.1.2. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DE LA ESTACIÓN TOTAL UTILIZADA

Se utilizaron las distancias y los ángulos medidos con la estación total TS15I de la marca Leica.

El cuadro de características técnicas de catálogo está contenido en el cuadro 3.1.

---

<sup>2</sup>

*Cfr.* “Base de calibración de la Universidad Politécnica de Valencia: descripción y medición”, de José Luis BERNÉ ET ALT. Actas del IX Congreso Nacional TOPCART, Valencia 2008.

Fabricante	Leica
Modelo	TS15I
Precisión angular	3 <sup>cc</sup>
Precisión distanciométrica	1 mm + 1,5 ppm
Compensador automático	2 ejes
Aumentos	30

Cuadro 3.1: Característica técnicas de la estación total de la casa Leica

La medida de precisión angular (entendida como repetibilidad) está expresada como la desviación típica de una coordenada medida una vez en CD y CI. Y la medida de precisión en distancia está expresada como la desviación típica de una coordenada medida una vez en CD y CI. Según las normas ISO 17123.

La observación se ha realizado por especialistas del Laboratorio de Instrumentos Topográficos<sup>3</sup> de la Escuela de Ingeniería Geodésica de la Universidad Politécnica de Valencia.

### 3.1.3. OBSERVACIONES ANGULARES AZIMUTALES

Se observaron independientemente los 12 azimutes de la red, (tres por vértice), con la nomenclatura indicada.

La correcta aplicación del ajuste por mínimos cuadrados requiere como condición previa la distribución normal de cada uno de los observables, que implica así mismo la distribución normal de los residuos. A este efecto se ha contrastado cada uno de los azimutes a través del Test de Adherencia de Pearson.

Los azimutes, junto a su número de lecturas por azimut:  $n$ , desviación típica y varianza, y el nivel de aceptación del Test de Pearson, son los siguientes:

---

<sup>3</sup>

El trabajo de observación ha recaído directamente sobre José Manuel PAREDES ASENCIO.

Azimut $\theta_{v4-v2}$
Azimut = 54,75546 <sup>g</sup>
n = 20
desviación típica = $\sigma = 1,7^{cc}$
varianza = $\sigma^2 = 2,85 \cdot 10^{-8}$
nivel de aceptación= 91 %

Azimut $\theta_{v2-v1}$
Azimut = 312,32077 <sup>g</sup>
n = 20
desviación típica = $\sigma = 5,9^{cc}$
varianza = $\sigma^2 = 3,49 \cdot 10^{-7}$
nivel de aceptación= 81 %

Azimut $\theta_{v3-v2}$
Azimut = 395,68190 <sup>g</sup>
n = 20
desviación típica = $d\alpha = 2,6^{cc}$
varianza = $\sigma^2 = 6,75 \cdot 10^{-8}$
nivel de aceptación= 76 %

Azimut: $\theta_{v2-v3}$
Azimut = 195,68170 <sup>g</sup>
n = 20
desviación típica = $d\alpha = 2,5^{cc}$
varianza = $\sigma^2 = 2,5 \cdot 10^{-7}$
nivel de aceptación= 86 %



Azimut: $\theta_{v2-v4}$
Azimut = 254.75551 <sup>g</sup>
n = 20
desviación típica = $d\alpha = 2,6$ <sup>cc</sup>
varianza = $\sigma^2 = 6.75 \cdot 10^{-8}$
nivel de aceptación = 79 %

El azimut  $\theta_{v2-v1}$  lo hemos rechazado por tener una varianza excesiva respecto al resto de azimutes, y puede desestabilizar la homogeneidad de los pesos.

Hemos considerado como único vértice libre el V2, por lo tanto, los azimutes entre vértices fijos no aparecen reflejados en este epígrafe.

El número de decimales afecta decisivamente al nivel de bondad que se obtenga en el Test de Pearson. El instrumento alcanza los 4 decimales, y la media entre círculo directo e inverso puede añadir uno más. De modo que hemos tomado los azimutes con 5 decimales, nos parece que no tiene sentido superar ese número.

### 3.1.4. OBSERVACIONES DISTANCIOMÉTRICAS

Desde cada uno de los vértices se observan las distancias a los tres vértices restantes. Las distancias reducidas se han obtenido a partir de las distancias geométricas y ángulos verticales.

Las distancias reducidas, junto a su número de lecturas por distancia: n, desviación típica, varianza, y nivel de aceptación del Test de Pearson, son las siguientes:

Distancia reducida V4V2
83,14996 m.
n = 20
desviación típica = $\sigma = 0,25$ mm.
varianza = $\sigma^2 = 6,2 \cdot 10^{-8}$ m.
nivel de aceptación = 87 %

Distancia reducida V3V2
66,38916 m.
n = 10
desviación típica = $\sigma = 0,22$ mm.
varianza = $\sigma^2 = 4,9 \cdot 10^{-8}$ m.
nivel de aceptación = 83 %

El resto de distancias no se ajustaban a las exigencias de normalidad, de desviación típica y de valor en el vector de términos independientes  $K$ .

Hemos aplicado el Test de Pearson a las distancias redondeando al cuarto decimal porque no es posible llegar a la centésima de milímetro en la observación de un vértice con la instrumentación de la que disponemos, y en la actualidad quizá con ninguna otra.

### 3.1.5. CÁLCULO DE LA CONSISTENCIA DE LA FIGURA Y OPTIMIZACIÓN DEL CAMINO DE CÁLCULO DEL VECTOR $X_a$

Sea el esquema aproximado de la red representado en la Fig.3.1, que siempre podrá obtenerse a partir de los datos de campo.

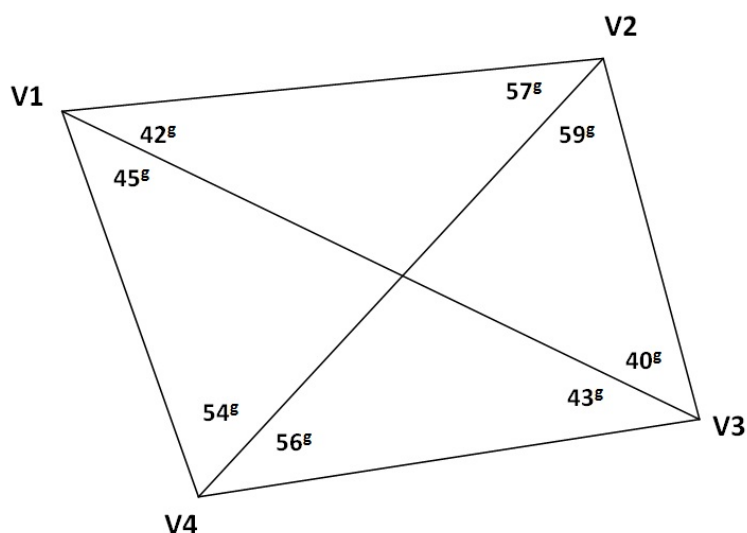


Figura 3.1: Croquis de la red

El camino  $V3V4V2-V2V4V1$  resulta ser el más apropiado para la triangulación, caso que nos ocupa, con un parámetro de consistencia  $C = 5$  (mejor consistencia angular). En el triángulo  $V3V4V2$  se partirá del lado  $V3V4$  para calcular el  $V4V2$  y seguidamente en el  $V2V4V1$  se partirá del  $V2V4$  y se calculará el  $V2V1$ .

Si se tratara de trilaterar, el camino mejor sería el  $V3V4V2-V3V1V2$ , con parámetro de consistencia  $C = 22$  (mejor consistencia distanciométrica).

### 3.1.5.1. CÁLCULO DE LAS COORDENADAS APROXIMADAS POR EL CAMINO DE MEJOR CONSISTENCIA ANGULAR

Hemos calculado las coordenadas aproximadas de nuestros vértices siguiendo el camino de mejor consistencia angular, que es el que ofrece la cadena de triángulos  $V3V4V2-V2V4V1$ . Lo hemos hecho siguiendo los pasos que siguen.

1. Elegimos arbitrariamente las coordenadas del vértice  $V4$ :

$$x_4 = 100 \text{ m.}$$

$$y_4 = 100 \text{ m.}$$

2. Adoptamos un azimut arbitrario V4-V3<sup>4</sup>:

$$\theta = 111,19012^g$$

3. Según la libreta de campo la distancia reducida V4-V3 es 68,57579 m.

4. Con la distancia y el azimut V4-V3 obtenemos las coordenadas de V3:

$$x_3 = 167,51914 \text{ m.}$$

$$y_3 = 88,00813 \text{ m.}$$

5. Por intersección directa, a partir de las coordenadas V3 y V4 y los ángulos  $56,43465^g$  y  $84,49178^g$  obtenemos las coordenadas de V2:

$$x_2 = 163,01957 \text{ m.}$$

$$y_2 = 154,24381 \text{ m.}$$

6. Finalmente, por intersección directa a partir de las coordenadas V2 y V4, y los ángulos  $57,56525^g$  y  $54,75547^g$  obtenemos las coordenadas de V1:

$$x_{1a} = 100 \text{ m.}$$

$$y_{1a} = 166,59479 \text{ m.}$$

Diremos que estas coordenadas aproximadas son las mejores para la triangulación pura, se identifican con el subíndice  $a$ .

---

4

A partir de la libreta de campo se obtiene este azimut aproximado, tomando como eje origen de lecturas azimutales el V4-V1.

### 3.1.5.2. CÁLCULO DE LAS COORDENADAS APROXIMADAS POR EL CAMINO DE MEJOR CONSISTENCIA DISTANCIOMÉTRICA

Hemos calculado las coordenadas aproximadas de nuestros vértices siguiendo el camino de mejor consistencia distanciométrica, que es el que ofrece la cadena de triángulos  $V_4V_3V_2-V_3V_1V_2$ . Las coordenadas de los vértices  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$  resultan las mismas que las que provienen del camino de mejor consistencia angular.

Y el vértice  $V_1$  lo calculamos con el triángulo  $V_3V_1V_2$  según la figura 3.2.

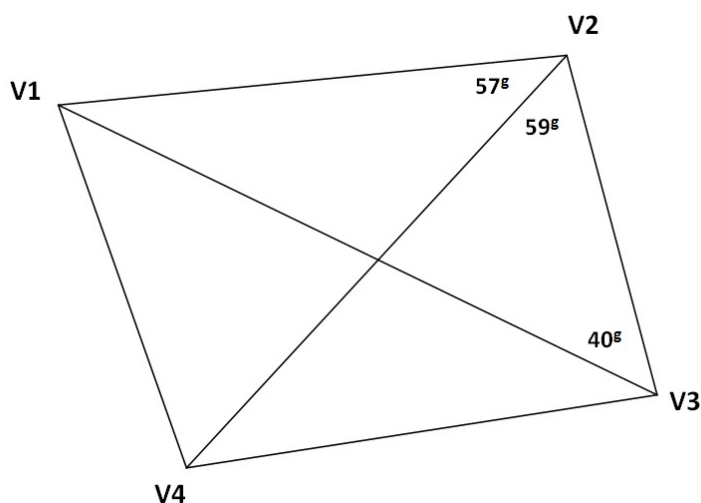


Figura 3.2: Croquis del triángulo  $V_3V_1V_2$

Con los ángulos interiores del triángulo  $V_3V_1V_2$ :

$$V_3 = 40,86761^g$$

$$V_2 = 59,07382^g + 57,56525^g = 116,63907^g$$

Y con las coordenadas de los vértices  $V_3$  y  $V_2$  obtenemos las nuevas coordenadas del vértice  $V_1$ :

$$x_{V1d} = 100,00254 \text{ m.}$$

$$y_{V1d} = 166,59455 \text{ m.}$$

Diremos que estas coordenadas aproximadas son las mejores para resolver la trilateración, se identifican con el subíndice  $d$ .

Si queremos calcular una triangulación las coordenadas aproximadas óptimas serán la media entre las coordenadas calculadas por el camino de mejor consistencia angular y las del camino de mejor consistencia distanciométrica. Resultando que las coordenadas del vértice V1 serán:

$$x_{V1m} = (x_{V1a} + x_{V1d})/2 = \frac{100+100,00254}{2} = 100,00127 \text{ m.}$$

$$y_{V1m} = (y_{V1a} + y_{V1d})/2 = \frac{166,59479+166,59455}{2} = 166,59467 \text{ m.}$$

NOTA: Creemos que quizá sería más correcto ponderar los caminos de consistencia en función del número de observables de cada tipo: sabiendo que tenemos 5 observables de ángulo y 2 de distancia. De modo que podríamos ponderar siguiendo la ecuación que proponemos, y obtener la coordenada  $x_{V1p}$ :

$$\begin{aligned} x_{V1p} &= \frac{\text{número de observables angulares}}{\text{número total de observables}} \cdot x_{V1a} + \frac{\text{número de observables distanciométricos}}{\text{número total de observables}} \cdot x_{V1d} = \\ &= \frac{5}{7} \cdot 100 + \frac{2}{7} \cdot 100,00254 = 100,0007 \text{ m.} \end{aligned}$$

La diferencia con  $x_{V1m}$  (= 100,00127 m.) es de 5 décimas de mm., de modo que adoptamos la coordenada aproximada  $x_{V1} = 100,0007 \text{ m.}$

En cuanto a la coordenada  $y_{V1p}$ :

$$\begin{aligned} y_{V1p} &= \frac{\text{número de observables angulares}}{\text{número total de observables}} \cdot y_{V1a} + \frac{\text{número de observables distanciométricos}}{\text{número total de observables}} \cdot y_{V1d} = \\ &= \frac{5}{7} \cdot 166,59479 + \frac{2}{7} \cdot 166,59455 = 166,59472 \text{ m.} \end{aligned}$$

La diferencia con  $y_{V1m}$  (= 166,59467 m.) es de 5 centésimas de mm., nos movemos en términos de magnitud despreciable. Adoptamos  $y_{V1m} = 166,59472 \text{ m.}$

### 3.1.5.3. LAS COORDENADAS APROXIMADAS DEFINITIVAS

Finalmente las coordenadas aproximadas que emplearemos en lo sucesivo son las que siguen:

Vértice	X [m]	Y [m]
V <sub>1</sub>	100,0007	166,59472
V <sub>2</sub>	163,01957	154,24381
V <sub>3</sub>	167,51914	88,00813
V <sub>4</sub>	100	100

### 3.1.6. EL FACTOR DE CONVERSIÓN Y EL PESO DE LAS FORMAS LINEALES DE AZIMUT

Siguiendo el protocolo de actuación de la triangulación hemos calculado los factores de conversión y las varianzas  $\sigma_o^2$  (que en la publicación anterior<sup>5</sup> llamábamos varianzas proporcionales  $vp_{\alpha_{ij}}$ ) de todas las ecuaciones de azimut, que recogemos en las siguientes tablas:

Ecuación Azimut : $\theta_{ij} = \theta_{v4-v2}$	Factor $_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$\sigma_o^2 = vp_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = 54,75547 <sup>g</sup>	$8,64 \cdot 10^{-5}$	$2,13 \cdot 10^{-8} m^2$
<i>error angular</i> = $d\alpha = 1,7^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 83,14996$ m		
$\lambda_{ij} = 46,00^g$		

Ecuación Azimut : $\theta_{ij} = \theta_{v2-v1}$	Factor $_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$\sigma_o^2 = vp_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = 312,32076 <sup>g</sup>	$8,37 \cdot 10^{-5}$	$3,55 \cdot 10^{-7} m^2$
<i>error angular</i> = $d\alpha = 5,9^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 64,21704$ m		
$\lambda_{ij} = 100,00^g$		

5

Epígrafe 4.4 del artículo "Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local", de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT.

Ecuación Azimut : $\theta_{ij} = \theta_{v3-v2}$	$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$\sigma_o^2 = vp_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = $395,68190^g$	$8,06 \cdot 10^{-5}$	$4,39 \cdot 10^{-8} m^2$
$error\ angular = d\alpha = 2,6^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 66,38916\ m$		
$\lambda_{ij} = 56,29^g$		

Ecuación Azimut : $\theta_{ij} = \theta_{v2-v3}$	$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$\sigma_o^2 = vp_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = $195,68170^g$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2,75 \cdot 10^{-7} m^2$
$error\ angular = d\alpha = 5^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 66,38916\ m$		
$\lambda_{ij} = 100,00^g$		

Ecuación Azimut : $\theta_{ij} = \theta_{v2-v4}$	$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$\sigma_o^2 = vp_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = $254,75551^g$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,15 \cdot 10^{-7} m^2$
$error\ angular = d\alpha = 2,6^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 83,14996\ m$		
$\lambda_{ij} = 100,00^g$		

### 3.1.7. EL FACTOR DE CONVERSIÓN Y PESO DE LAS FORMAS LINEALES DE DISTANCIA

A continuación, las tablas con factores de conversión y varianzas de todas las ecuaciones de distancia:

Ecuación Distancia : $D_{v4-v2}$	$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij}$	$\sigma_o^2 = vp_{l_{ij}} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$
$error\ dist = dl = 2,5 \cdot 10^{-4} m$	0,7501	$3,5 \cdot 10^{-8} m^2$
Distancia = $l_{ij} = 83,14996\ m$		
$\lambda_{ij} = 46,00^g$		



Ecuación Distancia : $D_{v3-v2}$	$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij}$	$\sigma_o^2 = vp_{l_{ij}} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$
$error\ dist = dl = 2,2 \cdot 10^{-4} m$	0,634	$1,98 \cdot 10^{-8} m^2$
Distancia = $l_{ij} = 66,38916\ m$		
$\lambda_{ij} = 56,29^g$		

### 3.1.8. LOS PESOS HOMOGENEIZADOS

Una vez conocido las varianzas de cada una de las formas lineales de azimut y distancia, que hemos llamado en el epígrafe anterior  $\sigma_o^2 (= vp_i)$ , seleccionamos de entre todos ellos el valor de la mediana, que desde ese momento se convierte en el estimador de la varianza a priori del observable de peso unidad<sup>6</sup>  $\sigma_0^2$ .

La mediana es  $\sigma_0^2 = 4,39 \cdot 10^{-8}$ . Y finalmente calcularemos el peso de cada observable con la expresión:

$$P_{O_{Ti}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\sigma_{Ti}}^2} = \frac{\sigma_o^2}{vp_i^2}$$

Resultando:

$$P_{O_{1a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\sigma_{Ti}}^2} = 2,07$$

$$P_{O_{2a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\sigma_{Ti}}^2} = 0,12$$

$$P_{O_{3a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\sigma_{Ti}}^2} = 1$$

---

6

Consideramos que el valor de la varianza del observable de peso unidad  $\sigma_0^2$  que más se ajusta a su valor real es el de la mediana de los valores de  $\hat{\sigma}_{\sigma_{Ti}}$ , obtenidos a partir de los datos de campo. Y así lo hemos hecho en nuestros cálculos, mejorando notablemente tanto el resultado como su interpretación. Afirma Jean M. RÜEGER en el artículo "Precision of measurements and least squares", presentado en el 37th Australian Surveyors Congress, 13-19 April 1996 Perth, Western Australia: *...Not knowing what precision values to use, many student and professional surveyors resort to the "accuracy specifications" published by the manufacturers or some other magic "precision values" from textbooks. In most instances, these "accuracy specifications" and other "precision values" are totally inappropriate for the weighting of least squares data. They should not be used for this purpose.*

$$P_{O_{4a}} = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{oTi}^2} = 0,16$$

$$P_{O_{5a}} = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{oTi}^2} = 0,38$$

$$P_{O_{1d}} = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{oTi}^2} = 1,25$$

$$P_{O_{2d}} = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{oTi}^2} = 2,22$$

### 3.1.9. ECUACIONES DE AZIMUT Y DE DISTANCIA FACTORIZADAS

Las 5 formas lineales azimutales y las 2 formas lineales de distancia del sistema de ecuaciones que resolveremos por el método de variación de coordenadas, constituyen la matriz A y el vector de términos independientes K:

	variable $dx_{v2}$	variable $dy_{v2}$	$d\theta_{v2}$	K
Azimut $\theta_{v4-v2}$	4994,70575	-5802,76734	0	$-4,95 \cdot 10^{-2}$
Azimut $\theta_{v2-v1}$	-6125,11174	-4767,88240	-1	-2,09
Azimut $\theta_{v3-v2}$	9567,28096	649,93143	0	$-2,94 \cdot 10^{-2}$
Azimut $\theta_{v2-v3}$	5348,84348	5610,29059	-1	$-1,74 \cdot 10^{-1}$
Azimut $\theta_{v2-v4}$	776,26827	-842,40818	-1	2,27
Distancia $D_{v4-v2}$	0,75791	0,65236	0	$3,53 \cdot 10^{-4}$
Distancia $D_{v3-v2}$	-0,06778	0,99770	0	$8,22 \cdot 10^{-4}$

Las diferencias entre los valores del vector K se deben fundamentalmente a las unidades del tipo de ecuación (azimut/distancia).

Según la teoría expuesta anteriormente sobre el método de cálculo de la triangulación en ajuste gaussiano<sup>7</sup>, es imprescindible convertir las unidades

<sup>7</sup>

Nos referimos de nuevo al artículo “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano...”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT.

angulares de las ecuaciones de azimut en unidades lineales  $[m]$ . Conocido el factor de conversión de cada una de las ecuaciones de azimut multiplicaremos ordenadamente a las 7 ecuaciones para obtener las nuevas expresiones resultantes:

	variable $dx_{v2}$	variable $dy_{v2}$	$d\theta_{v2}$	$K$
Azimut $\theta_{v4-v2}$	0,43154	-0,50136	0	$-4,27 \cdot 10^{-6}$
Azimut $\theta_{v2-v1}$	-0,51278	-0,39916	-1	$-1,75 \cdot 10^{-4}$
Azimut $\theta_{v3-v2}$	0,77164	0,05242	0	$-2,37 \cdot 10^{-6}$
Azimut $\theta_{v2-v3}$	0,55780	0,58506	-1	$-1,82 \cdot 10^{-5}$
Azimut $\theta_{v2-v4}$	0,10139	-0,11003	-1	$2,96 \cdot 10^{-4}$
Distancia $D_{v4-v2}$	0,56851	0,48934	0	$2,65 \cdot 10^{-4}$
Distancia $D_{v3-v2}$	-0,04296	0,63245	0	$5,21 \cdot 10^{-4}$

La factorización del vector  $K$  ha convertido en unidades lineales  $[m]$  sus valores y eso nos permite advertir errores que no hayamos detectado antes.

### 3.1.10. EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD

El resultado se expresa según:

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2}$ ,
- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2}$
- y por último el diferencial del error debido al descentrado de la línea de ceros del limbo:  $d\theta_{v2}$ , en el vértice  $V2$ . Este error está asociado sólo a la ecuación de azimut, y no a la ecuación de ángulo. No aporta nada a nuestro resultado, pero asume la existencia de ese error y le da un valor, completando así las correcciones del vértice  $V2$ . Si el parámetro  $d\theta_{v2}$  no estuviera incluido en el sistema de ecuaciones normales quedarían afectados desfavorablemente los valores  $dx_{V2}$  y  $dy_{V2}$ . Cuando estudiemos los errores de redondeo eliminaremos no obstante este parámetro, sin perjuicio de la calidad del resultado final, de forma matemáticamente rigurosa.

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2}=1.149E-004$ diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2}=5.015E-004$ diferencial del descentrado  $\theta$ :  $d\theta_{V2}=-1.197E-004$ **RESIDUOS [m]**

-1.98E-004

3.559E-005

1.173E-004

4.95E-004

-2.198E-004

4.574E-005

-2.087E-004

**Varianza de la medida de peso ud. = 6.2E-008 m<sup>2</sup>****Desv. típica de la medida de peso ud. = 2.5E-004 m**

Los residuos son muy similares y podemos comprobar que tanto las observaciones distanciométricas como las azimutales son de análoga precisión.

La desviación típica a posteriori del observable de peso unidad  $2,5 \cdot 10^{-4} m$  es la esperable, considerando que la desviación típica a priori<sup>8</sup> del observable de peso unidad es  $2,1 \cdot 10^{-4} m$  (recordemos que es el valor de la mediana de los valores obtenidos a partir de las estadísticas de la libreta de campo). La diferencia entre la desviación típica a priori y a posteriori, confirma la bondad del cálculo y trabajo.

No se olvide que la varianza a posteriori del observable de la medida de peso unidad es un parámetro fundamental entre otras cosas porque multiplica a las matrices de criterio del ajuste.

---

8

Siendo el vector de observables  $O$ , el de observables promediados  $O_T$ , el factor de varianza de peso unidad  $\sigma^2$ , para un observable de orden  $i$ , ( $i \in 1, 2, 3, \dots, m_i$ , para  $m_i > 1$ ), se obtendrá a partir de la ecuación:

$$\hat{\sigma}_{o_i}^2 = \frac{\sum (O_{T_i} - O_i)^2}{m_i - 1}$$

El valor de la varianza muestral es muy próxima a la que propone el fabricante de la estación total que hemos utilizado. Podría justificarse la utilización de la varianza poblacional en lugar de la muestral.

### 3.1.11. LAS MATRICES DE CRITERIO: MATRIZ COFACTOR DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ COFACTOR DE LOS RESIDUOS, MATRIZ COFACTOR DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS RESIDUOS, Y MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

**Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.**

+000.68197976 +000.01823947 +000.06855640  
+000.01823947 +000.55952194 +000.00513607  
+000.06855640 +000.00513607 +001.52206269

**Matriz cofactor de los RESIDUOS**

+000.22334435 +000.06440368 -000.20574663 +000.02746301 -000.03190138 -000.02869836 +000.18468484  
+000.06440368 +006.46092520 +000.34083251 -001.18275611 -001.54228960 +000.35829711 +000.13213281  
-000.20574663 +000.34083251 +000.59091691 -000.26629570 +000.00449318 -000.32095172 -000.00480268  
+000.02746301 -001.18275611 -000.26629570 +004.39481043 -001.47694457 -000.34600367 -000.19636561  
-000.03190138 -001.54228960 +000.00449318 -001.47694457 +001.10891021 +000.03253929 +000.04095410  
-000.02869836 +000.35829711 -000.32095172 -000.34600367 +000.03253929 +000.43546747 -000.16267775  
+000.18468484 +000.13213281 -000.00480268 -000.19636561 +000.04095410 -000.16267775 +000.22637808

**Matriz cofactor de los observables corregidos**

+000.25974743 -000.06440368 +000.20574662 -000.02746302 +000.03190138 +000.02869835 -000.18468485  
-000.06440368 +001.87240813 -000.34083251 +001.18275611 +001.54228959 -000.35829711 -000.13213282  
+000.20574662 -000.34083251 +000.40908308 +000.26629570 -000.00449319 +000.32095172 +000.00480267  
-000.02746302 +001.18275611 +000.26629570 +001.85518956 +001.47694456 +000.34600366 +000.19636561  
+000.03190138 +001.54228959 -000.00449319 +001.47694456 +001.52266873 -000.03253930 -000.04095411  
+000.02869835 -000.35829711 +000.32095172 +000.34600366 -000.03253930 +000.36453252 +000.16267774  
  
-000.18468485 -000.13213282 +000.00480267 +000.19636561 -000.04095411 +000.16267774 +000.22407236

**Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS**

+000.00000004 +000.00000000 +000.00000000  
 +000.00000000 +000.00000003 +000.00000000  
 +000.00000000 +000.00000000 +000.00000009

**Matriz varianza-cov a posteriori de los residuos**

+000.00000001 +000.00000000 -000.00000001 +000.00000000 -000.00000000 -000.00000000 +000.00000001  
 +000.00000000 +000.00000040 +000.00000002 -000.00000007 -000.00000010 +000.00000002 +000.00000000  
 -000.00000001 +000.00000002 +000.00000003 -000.00000002 +000.00000000 -000.00000002 -000.00000000  
 +000.00000000 -000.00000007 -000.00000002 +000.00000027 -000.00000009 -000.00000002 -000.00000001  
 -000.00000000 -000.00000010 +000.00000000 -000.00000009 +000.00000006 +000.00000000 +000.00000000  
 -000.00000000 +000.00000002 -000.00000002 -000.00000002 +000.00000000 +000.00000002 -000.00000001  
 +000.00000001 +000.00000000 -000.00000000 -000.00000001 +000.00000000 -000.00000001 +000.00000001

**Matriz varianza-cov a posteriori de los observables corregidos**

+000.00000001 -000.00000000 +000.00000001 -000.00000000 +000.00000000 +000.00000000 -000.00000001  
 -000.00000000 +000.00000011 -000.00000002 +000.00000007 +000.00000009 -000.00000002 -000.00000001  
 +000.00000001 -000.00000002 +000.00000002 +000.00000001 -000.00000000 +000.00000002 +000.00000000  
 -000.00000000 +000.00000007 +000.00000001 +000.00000011 +000.00000009 +000.00000002 +000.00000001  
 +000.00000000 +000.00000009 -000.00000000 +000.00000009 +000.00000009 -000.00000000 -000.00000000  
 +000.00000000 -000.00000002 +000.00000002 +000.00000002 -000.00000000 +000.00000002 +000.00000001  
 -000.00000001 -000.00000001 +000.00000000 +000.00000001 -000.00000000 +000.00000001 +000.00000001

En una primera interpretación, todas tienen sus términos aceptablemente pequeños. No obstante, la información que ofrecen es claramente insuficiente a efectos de interpretar resultados con el poder de afirmación que entendemos adecuado. Para ello y en primer lugar, acudiremos a la fiabilidad, interna y externa, de la red y sus recintos de error.

### 3.1.12. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD INTERNA DE LA RED

Se entiende por fiabilidad interna de la red, como su capacidad de detección y control de posibles errores “groseros” en los observables. A través de ella, es posible cifrar la sensibilidad de la red ante los errores groseros. En nuestro caso, dadas las precauciones que hemos tomado desde el inicio, es sólo otra manera de comprobar que la repetibilidad y exactitud de los observables son las previstas.

La redundancia de un observable es un parámetro adimensional, y nos muestra lo bien o mal que está “controlado” dicho observable <sup>9</sup>. La expresión que nos permite

---

<sup>9</sup>  
*Cfr.* M. CHUECA ET. ALT. “Tratado de Topografía” Tomo III, pag. 295 y siguientes.

calcular el número de redundancias de un observable es:

$$r_i = p_i \cdot q_i$$

donde

$r_i$  : redundancia de un observable

$p_i$  : peso de un observable

$q_i$  : elemento de orden  $ii$  de la matriz cofactor de los residuos a posteriori

Nuestras redundancias son homogéneas y próximas a  $\frac{4}{7} = 0,57$ . Todas están en torno a la redundancia media 0,57, que en la práctica es el valor óptimo, puesto que la suma de las redundancias debe valer 4, redundancia total de la red.

#### Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red

##### Comprobaciones de REDUNDANCIAS

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

1 +002.07 +000.22334435 +000.46232281

2 +000.12 +006.46092520 +000.77531102

3 +001 +000.59091691 +000.59091691

4 +000.16 +004.39481043 +000.70316966

5 +000.38 +001.10891021 +000.42138588

6 +001.25 +000.43546747 +000.54433433

7 +002.22 +000.22637808 +000.50255935

Suma de Redundancias = +004

El parámetro de Baarda depende del nivel de significación  $\alpha$  y de la potencia del test  $\beta$ , en nuestro caso se ha establecido  $\alpha = 5\%$  y  $\beta = 80\%$ . El parámetro de Baarda se obtiene a partir de la expresión:

$$w_i = \frac{R_i}{\sigma_{R_i}}$$

El parámetro de Baarda es el que se emplea para eliminar o rechazar un observable. Además este parámetro permite controlar los errores groseros introducidos en la red. De este modo un observable será rechazado cuando el parámetro de Baarda sea superior al punto porcentual establecido para el nivel de significación, que

para nosotros es 3,29 ( $w_i < 3,29$ ). Todos los parámetros de Baarda en nuestro caso se encuentran en el intervalo  $[+0,94 - 1,75] < 3,29$ , y por tanto todos los observables son aceptados.

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**  
**Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)**

Ob. Residuo ( $R_i$ ) Err.cuad( $\sigma_i$ ) Var.de Baarda ( $w_i$ ).

1	-000.00019760	+000.00011855	-001.66678204
2	+000.00003558	+000.00063763	+000.05581478
3	+000.00011734	+000.00019283	+000.60853094
4	+000.00049541	+000.00052589	+000.94203679
5	-000.00021983	+000.00026416	-000.83217929
6	+000.00004574	+000.00016554	+000.27631601
7	-000.00020873	+000.00011935	-001.74878912

El mínimo error detectable para un observable se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\nabla_{O_i} = \frac{\delta \cdot \sigma_i}{\sqrt{r_i}}$$

Siendo  $\delta$  el parámetro de translación, función de  $\alpha = 5\%$  y  $\beta = 80\%$ , y que tiene un valor de 4,12.

En consecuencia el error máximo que puede deslizarse en uno de nuestros observables y no ser detectado es de 0,00196 metros (observable nº 5), que se encuentra en el listado de Fiabilidad interna de la red.

El parámetro de homogeneidad,  $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$ , confirma la información facilitada por los números de redundancia.



**Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red**

Valor de para el nivel de significación  $\alpha$ , y potencia  $\beta$  del test ,  $\delta= 4.12$

Ob.  $(\sigma_i)$   $(\sqrt{r_i})$   $(\nabla_{O_i})$  -Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$

1 +000.00012785 +000.67994324 +000.00077468 +006.05932929

2 +000.00034326 +000.88051747 +000.00160615 +004.67906670

3 +000.00016044 +000.76871120 +000.00085993 +005.35962007

4 +000.00034168 +000.83855212 +000.00167875 +004.91323063

5 +000.00030954 +000.64914242 +000.00196465 +006.34683525

6 +000.00015145 +000.73779017 +000.00084578 +005.58424353

7 +000.00011874 +000.70891421 +000.00069012 +005.81170463

Sin embargo, la fiabilidad interna en sí misma no facilita información sobre la repercusión última que puede tener la aparición de errores como los descritos en las coordenadas de los vértices de la red, solución del problema. El análisis de la fiabilidad externa de la red nos dirá cómo influirá en dichos resultados los errores no detectados por el análisis de la fiabilidad interna.

### 3.1.13. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EXTERNA DE LA RED

Una aceptable fiabilidad interna de la red puede no ser suficiente para garantizar la calidad del ajuste. El debido rigor en el trabajo requiere completar su estudio con la descripción de la fiabilidad externa, para que no se deteriore la calidad exigible en la precisión por los errores despreciados o no detectados.

La fiabilidad externa quedará definida por los siguientes elementos:

1 - Los parámetros de homogeneidad  $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1 - r_i}$  , (conocido  $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$ ).

La calidad del ajuste es inversamente proporcional al valor de los parámetros de homogeneidad. Es claro que en una red tan pequeña como la estudiada la información que ofrecen tanto  $\mu_{Exi}$  como  $\mu_{INi}$  es muy escasa. Sin embargo en una red amplia puede ser muy importante poner de manifiesto las diferencias de nivel de control entre unas zonas y otras.

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

O.- $\sqrt{1-r_i}$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1-r_i}$

1 +000.73326474 +004.44309255

2 +000.47401368 +002.21794166

3 +000.63959603 +003.42799173

4 +000.54482137 +002.67683306

5 +000.76066688 +004.82782743

6 +000.67503011 +003.76953257

7 +000.70529472 +004.09896459

2 - Los vectores son  $\nabla_{x_{O_i}} = (A^T P A)^{-1} A^T P e_i \nabla_{O_i}$  .

Un error no detectado  $\nabla_{O_i}$  (calculado en el apartado anterior dedicado a la fiabilidad interna) en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable según:

*error*  $dx_{V_2}$  = Variable 1, *error*  $dy_{V_2}$  = Variable 2 y *error*  $d\theta_{v_2}$  = Variable 3, según el listado siguiente.

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

**Vectores de fiabilidad externa:**

Observable ... ( 1 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00045727  
 Variable o Parámetro 2... -000.00043722  
 Variable o Parámetro 3... +000.00004331  
 Observable ... ( 2 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -000.00008202  
 Variable o Parámetro 2... -000.00004584  
 Variable o Parámetro 3... -000.00030053  
 Observable ... ( 3 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00045335  
 Variable o Parámetro 2... +000.00003732  
 Variable o Parámetro 3... +000.00004572  
 Observable ... ( 4 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00008663  
 Variable o Parámetro 2... +000.00008928  
 Variable o Parámetro 3... -000.00039775  
 Observable ... ( 5 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -000.00000106  
 Variable o Parámetro 2... -000.00004842  
 Variable o Parámetro 3... -000.00113156  
 Observable ... ( 6 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00041932  
 Variable o Parámetro 2... +000.00030042  
 Variable o Parámetro 3... +000.00004386  
 Observable ... ( 7 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -000.00002721  
 Variable o Parámetro 2... +000.00054095  
 Variable o Parámetro 3... +000.00000046

Renunciando por el momento al parámetro o variable 3:  $d\theta_{v2}$  , la composición cuadrática de los errores transmitidos por los observables, supuesto el caso más desfavorable, resulta:

Observable	$\sqrt{\text{error } dx^2 + \text{error } dy^2}$
1	0,63 mm
2	0,09 mm
3	0,45 mm
4	0,13 mm
5	0,04 mm
6	0,50 mm
7	0,54 mm

En ninguno de los casos se supera el milímetro. Parece que la precisión en la determinación del vértice  $V_2$  es próxima al milímetro.

### 3.1.14. SEMIEJES DE LA ELIPSE STANDARD

Conocida la matriz  $S = (A^T P A)$

**MATRIZ S**

$$S = A^T P A = \begin{pmatrix} 1,4742 & -0,0474 & -0,0662 \\ -0,0474 & 1,7888 & -0,0039 \\ -0,0662 & -0,0039 & 0,6600 \end{pmatrix}$$

y conocida la desviación típica del observable de peso unidad a posteriori  $\sigma_0 = 2,508 \cdot 10^{-4} m^2$ , podemos calcular, según teoría conocida<sup>10</sup>, los semiejes de la elipse estándar de error.

En primer lugar obtendremos los autovalores de la matriz S:

autovalores de S

$$\mu_1 = 1,4726$$

$$\mu_2 = 1,7959$$

$$\mu_3 = 0,6546$$

<sup>10</sup>

Cfr. M. CHUECA et. alt. "Tratado de Topografía" Tomo III, pag. 273 y siguientes.

No obstante, el tercer autovalor corresponde al descentrado y en el caso que nos ocupa puede ser ignorado. Sólo se utilizarán los dos primeros para formar la elipse de error del vértice en estudio.

Y en segundo y último lugar calcularemos los semiejes genéricos, según la ecuación

$\Phi_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$ , y serán los que siguen:

$$\Phi_1 = 2,07 \cdot 10^{-4}m$$

$$\Phi_2 = 1,87 \cdot 10^{-4}m$$

### 3.1.15. LA ELIPSE ASOCIADA A LA CURVA PEDAL

Se puede demostrar que la elipse asociada a la podaria es de la forma:

$$ES \equiv \sigma_x^2 \cdot y^2 - 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y + \sigma_y^2 \cdot x^2 = (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy})$$

Elipse genérica standard de incertidumbre a posteriori en coordenadas cartesianas para un punto compensado cualquiera de la red, en nuestro caso el vértice  $V_2$ , en función de su matriz varianza covarianza  $\sigma_{xxV_2}$ , referida al sistema de ejes locales con origen en  $V_2$  y paralelos a los del levantamiento  $OXY$ .

A partir de la matriz varianza covarianza de las variables o parámetros de la red triangulaterada (con eliminación del descentrado) obtenemos:

$$\sigma_x^2 = 0,00000004 \text{ m}^2$$

$$\sigma_y^2 = 0,00000003 \text{ m}^2$$

$$2\sigma_{xy} = 0$$

Los semiejes de la elipse en dirección y módulo, se calculan a partir de la ecuación de la elipse asociada a la podaria:

$$0,00000004 \cdot y^2 - 0 \cdot x \cdot y + 0,00000003 \cdot x^2 = (0,00000004 \cdot 0,00000003)$$

siendo fácil calcular a partir de ella los semiejes mayor y menor:

$$a = 2,00 \cdot 10^{-4}m$$

$$b = 1,73 \cdot 10^{-4}m$$

En general, errores máximo y mínimo en valor absoluto.

La semejanza entre ejes deriva en similitud entre podaria elipse y circunferencia de incertidumbre.

### 3.1.16. PROBABILIDADES ASOCIADAS A LAS FIGURAS DE ERROR

Una primera reflexión se plantea sobre la impropia denominación tradicional de la elipse *ES* como figura de error “standard”. En efecto, el recinto que corresponde a esa denominación, de probabilidad constante, es el delimitado por la podaria. Es más, la probabilidad asociada a la elipse mal llamada standard es variable en cada caso. No obstante, seguiremos denominándola así, bien entendido lo que antecede.

Puede estimarse la probabilidad asociada a la elipse standard, según se ha definido y aceptado. Bastará con calcular la relación existente entre las áreas delimitadas por las dos superficies de error, en su caso más general.

Conocida el área de la podaria y el área de la elipse se puede estimar en primera aproximación y sin exigencias de rigor teórico la probabilidad asociada a la elipse a partir de la probabilidad conocida de la podaria.

Siendo la probabilidad de la podaria  $1\sigma^2$ (una varianza)  $\langle \rangle \pm 1\sigma$  (una desviación típica),  $\langle 0,68 \rangle$ , y la probabilidad de la elipse asociada a  $K^2\sigma^2$ (varianzas)  $\langle \rangle \pm K\sigma$  (desviaciones típicas) con:

$$\text{Área Podaria} = A_P = \pi \cdot \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\text{Área Elipse} = A_E = \pi \cdot ab$$

$$K^2 = \frac{A_E}{A_P} = \frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{2 \cdot 2,00 \cdot 10^{-4} \cdot 1,73 \cdot 10^{-4}}{(2,00 \cdot 10^{-4})^2 + (1,73 \cdot 10^{-4})^2} = \frac{6,92 \cdot 10^{-8}}{6,9929 \cdot 10^{-8}} = \pm 0,9895$$

$$K = \pm 0,9947$$

Prob ES  $\langle \rangle \pm \sqrt{\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\sigma^2\right)} = \pm K\sigma = \pm 0,9895 \cdot 0,68 = 0,6764$  desviaciones típicas

Así en nuestra red:

A la elipse standard de semiejes mayor y menor:

$$a = 2,07 \cdot 10^{-4}m$$

$$b = 1,87 \cdot 10^{-4}m$$

se asocia una fiabilidad del  $67,64\% = 67,6\%$ .

Una homotecia de razón adecuada según rutina de la distribución normal practicada a la figura descrita genera el recinto de incertidumbre con la probabilidad que se precise.

Si en la tabla de la integral de Gauss<sup>11</sup> buscamos la abscisa z correspondiente a un área de  $I = 0,99$  obtenemos :

$$z_t = \pm 2,575$$

y si recordamos que el área de error de la elipse correspondía a:

$$z_a = \pm 0,676$$

---

11

“Tratado de Topografía” Tomo I, Manuel CHUECA et al., páginas 23 y 24. Editorial Paraninfo. Madrid, 1996.

resulta

$$\frac{z_t}{z_a} \simeq 4$$

Multiplicaremos por 4 los semiejes de la elipse standard para conseguir el área de error de probabilidad 99 %:

$$4 \cdot a = 2,07 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 8,28 \cdot 10^{-4} m = 0,83 \text{ mm}$$

$$4 \cdot b = 1,87 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 7,48 \cdot 10^{-4} m = 0,75 \text{ mm}$$

Podemos decir finalmente que después de la compensación de la triangulación las correcciones del único vértice libre  $V_2$  son:

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**

diferencial de la coordenada x:  $dx_{V_2} = 1.203E-004 \text{ m}$

diferencial de la coordenada y:  $dy_{V_2} = 5.019E-004 \text{ m}$

que modifican las coordenadas aproximadas del vértice  $V_2$  :

$$x_{V_2} = 163,01957 \text{ m.}$$

$$y_{V_2} = 154,24381 \text{ m.}$$

que definitivamente serán:

$$X'_{V_2} = 163,0196 + 0,00012 = 163,01972 \text{ m}$$

$$Y'_{V_2} = 154,2438 + 0,00050 = 154,24430 \text{ m}$$

Y finalmente, la posición exacta y siempre desconocida del vértice que podemos llamar  $V_{2E}$  se encontrará en el interior de la elipse (con semiejes:  $0,83 \cdot 10^{-4} m$ , y



$0,75 \cdot 10^{-4}m$ ) de centro el vértice  $V_2$  (compensado rigurosamente) con una fiabilidad del 99 % .

En consecuencia, tal parece que todos los números que hemos realizado hasta ahora conducen a definir las coordenadas del vértice  $V_2$  con cifras exactas hasta los milímetros. Afinar más se nos antoja aventurado, y todavía lo será más cuando nos ocupemos de las posibles perturbaciones en los elementos del sistema lineal de ecuaciones normales, tarea que emprendemos a continuación.

### 3.1.17. ERROR O PERTURBACIÓN $db$

La expresión final de cómo afecta el error relativo  $\frac{\|db\|}{\|b\|}$  al error relativo del vector de correcciones  $\frac{\|dx\|}{\|x\|}$  es:

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = k \cdot \frac{[TrB]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot P \cdot diag(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot P \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|}$$

La matriz  $S$  y sus autovalores son:

**MATRIZ S**

$$S = A^T P A = \begin{matrix} 1,4742 & -0,0474 & -0,0662 \\ -0,0474 & 1,7888 & -0,0039 \\ -0,0662 & -0,0039 & 0,6600 \end{matrix}$$

autovalores de S

$$\mu_1 = 1,4742$$

$$\mu_2 = 1,7888$$

$$\mu_3 = 0,6546$$

Los dos primeros autovalores son los que corresponden a  $dx$  y  $dy$ , y el tercero al  $d\theta$ , valor que no afecta a nuestros resultados bajo ningún punto de vista. Es precisamente ese valor el que provoca que el parámetro  $k$  (condicionamiento de

la matriz  $S$ ) pueda alcanzar el valor de 2,7435, valor muy superior al 1, que es el óptimo. Es precisamente el coeficiente  $k$  quien provoca que:  $\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 1,2517$ .

En consecuencia y con el fin de mejorar el valor de  $k$ , damos un paso más.

Sea nuestro sistema de ecuaciones normales:

$$S \cdot x = A^T \cdot P \cdot A \cdot x = A^T \cdot P \cdot K = b$$

$$S \cdot x = b$$

Y eliminando por sustitución la ecuación del parámetro  $d\theta$  se obtiene<sup>12</sup>:

$$S' \cdot x = A'^T \cdot P \cdot A' \cdot x = A'^T \cdot P \cdot K' = b'$$

#### MATRIZ A'

$$A'(1, 1) = .43154$$

$$A'(1, 2) = -.50135$$

$$A'(2, 1) = -.51278$$

$$A'(2, 2) = -.39916$$

$$A'(3, 1) = .77164$$

$$A'(3, 2) = 5.242E-002$$

$$A'(4, 1) = .5578$$

$$A'(4, 2) = .58506$$

$$A'(5, 1) = .10139$$

$$A'(5, 2) = -.11003$$

$$A'(6, 1) = .5685$$

$$A'(6, 2) = .48933$$

$$A'(7, 1) = -4.296E-002$$

$$A'(7, 2) = .63245$$

---

12

Según teoría sobre eliminación del descentrado en redes de triangulación, *cfr.* M. CHUECA et. al. "Tratado de Topografía" Tomo II, pag. 424 y siguientes.

**VECTOR K' [m]**

$$K'(1) = -4.27E-006$$

$$K'(2) = -1.75E-004$$

$$K'(3) = -2.4E-006$$

$$K'(4) = -1.818E-005$$

$$K'(5) = 2.96E-004$$

$$K'(6) = 2.65E-004$$

$$K'(7) = 5.21E-004$$

Y a partir de las matrices  $A'$ ,  $K'$  y la matriz conocida de pesos  $P$ , obtenemos  $b'$  y  $S'$ ,

$$b' = A'^T \cdot P \cdot K' = \begin{bmatrix} 0,0015 \\ 0,0089 \end{bmatrix}$$

$$S' = A'^T \cdot P \cdot A' = \begin{bmatrix} 1,4742 & -0,0474 \\ -0,0474 & 1,7888 \end{bmatrix}$$

y el número de condición de  $S$ :

$$k' = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = \frac{1,7888}{1,4742} = 1,22$$

Obtenemos:

$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 0,12$ , como error relativo de un 12 % sobre las variables:  $d_x = 0,12 \text{ mm}$  y  $d_y = 0,5 \text{ mm}$ .

### 3.1.18. RESULTADOS FINALES DE LA RED TRIANGULATERADA

En primer lugar, hay que definir el resultado en las variables  $dx_{V_2}$  y  $dy_{V_2}$ .

El vértice  $V_2$  se ha determinado con una fiabilidad del 99 % según un recinto de error definido por una elipse estándar asociada a una podaria (con semiejes:  $0,69 \cdot 10^{-4}m$ , y  $0,56 \cdot 10^{-4}m$ ) de centro el vértice  $V_2$  (compensado rigurosamente).

Dentro de él debe ubicarse el punto exacto.

Existe el riesgo añadido de que cálculos y redondeos den lugar a un error relativo máximo adicional en coordenadas de un 12 %.

Nuestra mejor solución (con las reservas de instrumentación, observación y replanteo, las formuladas al principio del trabajo) es:

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2} = 163,0196 + 0,00012 = 163,01972 \simeq 163,020 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2} = 154,2438 + 0,0005 = 154,2443 \simeq 154,244 \text{ m}$$

Con un recinto de error elipsoidal, con 0,99 de fiabilidad, de semiejes:

$$a = \textit{semieje mayor} \cdot (1 + 0,12) = 0,83 \cdot 1,12 \simeq 0,93 \text{ mm}$$

$$b = \textit{semieje menor} \cdot (1 + 0,12) = 0,75 \cdot 1,12 \simeq 0,84 \text{ mm}$$

Podemos aceptar con suficiente poder de afirmación, que incluso si se produjera el error de redondeo, la precisión del vértice  $V_2$  estaría rondando el milímetro.

### 3.2. RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS

Una vez resuelta la red de observables clásicos por triangulación lo haremos por el método de incrementos de coordenadas.

La resolución de la red por ambos métodos, permite contrastar los resultados, porque en ambas son valores lineales. Y así comparar: el vector  $K$ , los estimadores a priori y a posteriori, las matrices de criterio, las variables o parámetros ..., y asegurar que el resultado guarda una conformidad en un ajuste y otro.

El estudio de la normalidad de los datos de campo que se hizo en la triangulación, la obtención de las coordenadas aproximadas, el cálculo de las

varianzas a partir de la libreta de campo, y la valoración del cuadrilátero de compensación de los observables de la triangulación resultan fundamentales en el ajuste por incrementos de coordenadas, siendo un primer análisis de los datos de campo que permite valorar la cota de error y la bondad de los observables.

Con alguna adaptación, el método sigue una ponderación similar a la propuesta en la Triangulación, basada en la proyección lineal de las desviaciones típicas de los errores angulares y lineales de los observables clásicos. Los cuadriláteros de ponderación de los azimutes y distancias de la red triangulada dimensionan los pesos de los observables, que en este caso son los incrementos de coordenadas. Cuando los observables provienen de vectores GNSS, se utiliza la varianza de la libreta de campo. La novedad del método es que resuelve el problema de las covarianzas de los incrementos de coordenadas (considerados como observables) provenientes de las lecturas angulares y distanciométricas clásicas o de los vectores GNSS.

Desaconsejamos la resolución conjunta de incrementos de coordenadas, provenientes de observables clásicos y GNSS, debido a las diferencias excesivas<sup>13</sup> que se producen en la ponderación de unos y otros, lo que afecta negativamente a los resultados, su análisis e interpretación.

La aplicación de la teoría del método de incrementos se expone sintéticamente en los epígrafes siguientes, sobre el ejemplo real adoptado.

---

13

Las precisiones de los equipos de topografía clásica son mejores, por el momento, a las precisiones de los equipos GNSS, y en consecuencia los pesos de unos y otros observables resultan claramente diferentes.

### 3.2.1. TEST DE PEARSON. CÁLCULO DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS OBSERVABLES CLÁSICOS

Es determinante decidir el número de decimales de los observables y el número de lecturas de cada observable antes de someterlos al test de normalidad. El instrumento de medición que hemos utilizado discrimina hasta el cuarto decimal en observables angulares y las medias, entre círculo directo e inverso, en algunos casos provocan un quinto decimal. La precisión que establece el catálogo del equipo es de 3 segundos sexagesimales, y repitiendo las lecturas de un mismo observable tiene sentido llegar al segundo o el medio segundo, es decir llegar al cuarto o quinto decimal. En cuanto a las distancias reducidas se aprecian con un número prácticamente ilimitado de decimales porque provienen del producto de la distancia geométrica por su coseno. La precisión que establece el catálogo del equipo es de  $1 \text{ mm} \pm 1,5 \text{ ppm}$  y tiene sentido llegar hasta la décima de milímetro, pero no más, un total de 4 decimales. El número de decimales como hemos dicho es una variable que definitivamente nos facilita que los observables superen con éxito el test de Pearson, pero nos parece que no responde a la realidad tomar demasiados porque corremos el peligro de tomar por normal un observable que no lo es. En cuanto al número de lecturas, como tenemos abundantes datos de campo podemos decidir el número de lecturas que adoptamos para cada observable. Tomar 7, 15 ó 20 lecturas afectará a la varianza del observable y al porcentaje de bondad del test de Pearson. Lo realmente importante es tener muchos observables y de calidad para poder seleccionar los que más nos interesen.

Los observables azimut[grados centesimales] para calcular los incrementos entre vértices, sus promedios[grados centesimales], varianzas [grados centesimales<sup>2</sup>] y desviaciones típicas [grados centesimales] son los que siguen:

AZ V4V2	AZ V2V1	AZV3V2	AZV2V3	AZV2V4
54.7554	87.6799	395.68265	195.68185	254.7554
54.75535	87.67975	395.68125	195.6811	254.75535
54.75535	87.6796	395.68215	195.6823	254.75535
54.7553	87.67915	395.68215	195.68245	254.7553
54.7553	87.6795	395.68145	195.68175	254.7553
54.7558	87.6791	395.6812	195.68185	254.7558
54.75515	87.67985	395.6819	195.68165	254.75515
54.75565	87.6792	395.6823	195.68175	254.75565
54.7554	87.68	395.6826	195.68155	254.7554
54.7554	87.68005	395.6823	195.68085	254.7554
54.7555	87.67845	395.6818	195.6814	254.7555
54.7555	87.678	395.68225	195.68225	254.75635
54.75565	87.67965	395.68165	195.68175	254.75565
54.75585	87.6789	395.68265	195.6815	254.75585
54.7554	87.67875	395.68115	195.68255	254.7554
54.75545	87.67925	395.68165	195.681	254.75545
54.7554	87.6785	395.68205	195.68135	254.7554
54.75545	87.6796	395.68155	195.6811	254.75545
54.75555	87.6784	395.68125	195.6815	254.75555
54.7555	87.67905	395.68205	195.68245	254.7555

	AZ V4V2	AZ V2V1	AZV3V2	AZV2V3	AZV2V4
<b>Promedio</b>	54.75546	312.32077	395.6819	195.68170	254.75551
<b>Varianza</b>	2.85E-08	3.49E-07	6.75E-08	2.53E-07	6.75E-08
<b>Desviación típica</b>	0.0001688	0.00059078	0.00025986	0.00050327	0.00025986

En el apartado 3.1.3 analizamos la normalidad de los azimutes, y todos superaban el porcentaje de bondad del Test de Pearson con más del 75 %.

En cuanto a las distancias reducidas es necesario que sean 5, tantas como azimutes, para calcular los incrementos entre vértices. Se hizo una nueva observación para añadir 2 nuevas distancias a las 3 que se utilizaron en la triangulación, que también siguen distribuciones normales.

Dist V4V2	Dist V2V1	Dist V3V2	Dist V2V3	Dist V2V4
83.1495	66.3893	64.216	66.3895	83.1499
83.1499	66.3891	64.2159	66.3895	83.1501
83.1498	66.3889	64.2161	66.3893	83.1503
83.1494	66.389	64.2164	66.3892	83.1499
83.1498	66.3888	64.2163	66.3891	83.1499
83.1497	66.3894	64.2164	66.3897	83.1499
83.1498	66.3892	64.2164	66.3889	83.1499
83.1501	66.3891	64.2163	66.389	83.1497
83.1501	66.3893	64.216	66.3893	83.1498
83.1501	66.3895	64.2162	66.3891	83.1495
83.1503		64.2163	66.3892	83.1499
83.1501		64.2161	66.3894	83.1496
83.15		64.2164	66.3892	83.1501
83.1503		64.2161	66.3893	83.1498
83.1499		64.2164	66.3891	83.1499
83.1501		64.2162	66.3894	83.1496
83.1503		64.2163	66.3893	83.1499
83.1498		64.2164	66.3893	83.1497
83.1501		64.2162	66.3892	83.15
83.1501		64.2162	66.3886	83.15
		64.2167	66.3893	83.1497
		64.2163	66.3888	83.1495
		64.2162	66.3891	83.15
		64.2164	66.3895	83.1499
		64.2165	66.3889	83.1495
		64.2161	66.3892	83.1498
		64.2168	66.3897	83.15
		64.2162	66.389	83.1494
			66.3896	83.1499
			66.3895	83.1498
			66.3888	83.15
			66.3891	83.1497
			66.3894	83.1498
			66.3895	83.1499
			66.3892	83.1501
			66.3891	83.1499
			66.3892	83.1499
			66.3893	83.1501
			66.3888	83.1501
			66.3895	83.15

Las diferencias en el número n de lecturas por distancia reducida se debe fundamentalmente a la búsqueda de la normalidad de los datos y de la varianza, para lograr que haya similitud entre los lados del cuadrilátero de ponderación.

Las tres distancias añadidas  $V2V1 = 64,2163$  m.,  $V2V3 = 66,3892$  m. y  $V2V4 = 83,1499$  m. tienen un porcentajes de bondad de 76 %, 99 % y 79 % respectivamente. En la imagen de la figura 3.3 representamos la curva de distribución de la distancia V2V3.



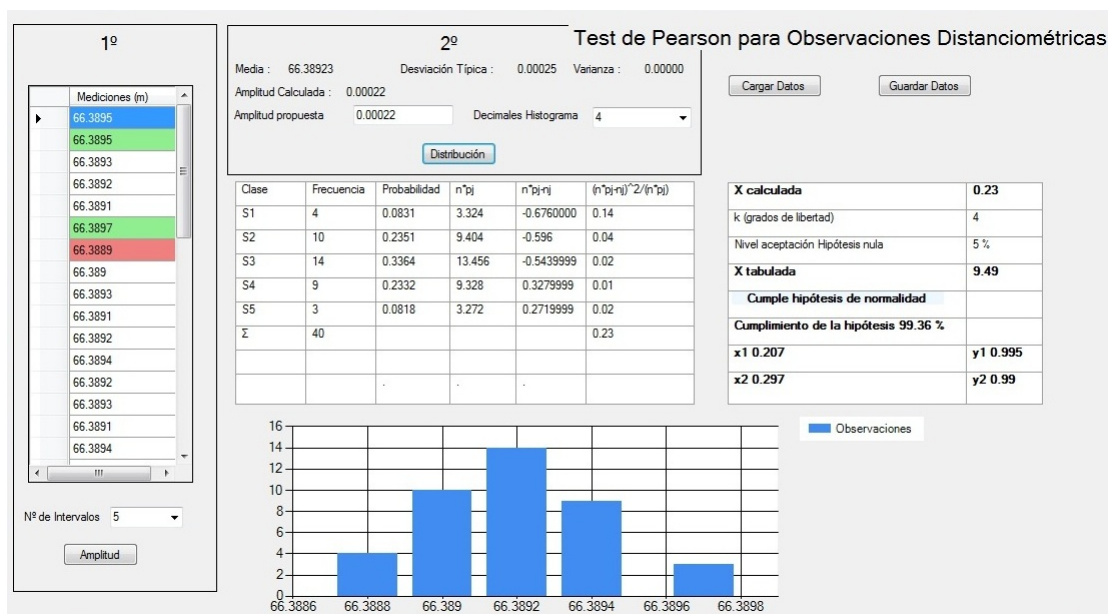


Figura 3.3: Observaciones, media, desviación típica, porcentaje de aceptación y curva de distribución de la distancia V2V3

A partir de los promedios de azimutes [grados centesimales] y distancias reducidas [metros] calculamos los incrementos [metros] observados de la red.

	<b>Dist V4V2</b>	<b>Dist V2V1</b>	<b>Dist V3V2</b>	<b>Dist V2V3</b>	<b>Dist V2V4</b>
<b>Promedio</b>	83.1500	64.2170	66.3892	66.3892	83.1499
<b>Varianza</b>	6.25E-08	1.60E-07	4.93E-08	6.46E-08	4.06E-08
<b>Desviación típica</b>	0.0002501	0.0004006	0.0002221	0.0002542	0.0002014

Los incrementos finales [metros] son los siguientes:

<b><math>\Delta X</math> V4V2</b>	<b><math>\Delta Y</math> V4V2</b>	<b><math>\Delta X</math> V2V1</b>	<b><math>\Delta Y</math> V2V1</b>	<b><math>\Delta X</math> V3V2</b>	<b><math>\Delta Y</math> V3V2</b>
63.0198	54.2440	-63.0174	12.3506	-4.4996	66.2365
<b><math>\Delta X</math> V2V3</b>	<b><math>\Delta Y</math> V2V3</b>	<b><math>\Delta X</math> V2V4</b>	<b><math>\Delta Y</math> V2V4</b>		
4.4998	-66.2366	-63.0198	-54.2439		

### 3.2.2. LAS COORDENADAS APROXIMADAS

Las coordenadas aproximadas que emplearemos según estudiamos en el epígrafe 3.1.5, calculadas por el mejor camino de consistencia distanciométrica, son las que siguen:

Vértice	X [m]	Y [m]
V <sub>1</sub>	100,00127	166,59472
V <sub>2</sub>	163,01957	154,24381
V <sub>3</sub>	167,51914	88,00813
V <sub>4</sub>	100	100

### 3.2.3. FORMAS LINEALES ESPECÍFICAS DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS

Siguiendo el texto del epígrafe teórico 2.4 los observables genéricos, sean o no GNSS, los escribimos con la notación  $\Delta X_{ij}$ ,  $\Delta Y_{ij}$ ,  $\Delta Z_{ij}$ , y son las proyecciones sobre los ejes de la distancia entre los vértices I ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) y J ( $X_j, Y_j, Z_j$ ).

A partir de los observables clásicos (azimutes y distancias) calculamos los incrementos entre el vértice libre V2 y los vértices ligados V1, V3 y V4. Esos incrementos constituyen los observables que forman el sistema lineal de ecuaciones.

Conocido el vector de coordenadas aproximadas  $X_a = X - x$ , entre dos puntos M y P se podrá escribir:

$$x_M - x_P = \Delta X_{MPo} - \Delta X_{MPa} + R_{x_{MP}}$$

$$y_M - y_P = \Delta Y_{MPo} - \Delta Y_{MPa} + R_{y_{MP}}$$

$$z_M - z_P = \Delta Z_{MPo} - \Delta Z_{MPa} + R_{z_{MP}}$$

es decir

$$\text{Correcciones} = \text{Valores Observados} - \text{Valores Calculados} + \text{Residuos}$$

que equivale a

$$AX = K + R$$

cuya resolución por mínimos cuadrados proporciona directamente las coordenadas compensadas.

Siendo la matriz  $A$ , constituida por las 10 formas lineales incremento de coordenada calculados en el epígrafe 3.2.1:

MATRIZ A		
	xV2	yV2
$\Delta X V4V2$	1	0
$\Delta Y V4V2$	0	1
$\Delta X V2V3$	-1	0
$\Delta Y V2V3$	0	-1
$\Delta X V2V4$	-1	0
$\Delta Y V2V4$	0	-1
$\Delta X V2V1$	-1	0
$\Delta Y V2V1$	0	-1
$\Delta X V3V2$	1	0
$\Delta Y V3V2$	0	1

La matriz de diseño  $A$  es del tipo de las que llamamos “de elementos exactos”.

Y el vector  $K = \text{Incrementos Observados} - \text{Incrementos Calculados}$ , en metros:

VECTOR K
0.00026
0.00023
0.00027
-0.00081
-0.00030
-0.00019
0.00088
-0.00083
-0.00006
0.00082

Apoyándonos en el ajuste por triangulación previo de la red hemos decidido eliminar los incrementos de coordenadas  $\Delta X_{V2V1}$ ,  $\Delta Y_{V2V1}$ . El valor del elemento del vector  $K$  referido a la distancia V2V1 alcanzaba en la triangulación el milímetro, un valor excesivo comparado con el resto de elementos de ese vector  $K$ . Y, en la red ajustada por incrementos de coordenadas, el valor de los elementos de  $K$  referido a los observables  $\Delta X_{V2V1}$ ,  $\Delta Y_{V2V1}$  es de 0,88 mm y 0,83 mm respectivamente, valores altos que nos confirman en la decisión de no utilizar esos dos incrementos en el sistema de ecuaciones lineales definitivo.

Sabemos que cada componente  $\Delta X_{MPo}$ ,  $\Delta Y_{MPo}$ , con vértices genéricos M, P de la red, tiene varianzas y covarianzas que podemos calcular a partir de la libreta de campo con las siguientes expresiones:

$$\hat{\sigma}_{\Delta X_{MP}}^2 = \frac{\Sigma(\Delta X_{MPo} - \bar{\Delta X}_{MPo})^2}{n_{MP} - 1} = \text{varianza de } \Delta X_{MPo}$$

$$\hat{\sigma}_{\Delta Y_{MP}}^2 = \frac{\Sigma(\Delta Y_{MPo} - \bar{\Delta Y}_{MPo})^2}{n_{MP} - 1} = \text{varianza de } \Delta Y_{MPo}$$

$$\hat{\sigma}_{\Delta X_{MPo}, \Delta Y_{MPo}} = \frac{\Sigma(\Delta X_{MPo} - \bar{\Delta X}_{MPo}) \cdot (\Delta Y_{MPo} - \bar{\Delta Y}_{MPo})}{n_{MP} - 1} = \text{covarianza de } \Delta X_{MPo} \Delta Y_{MPo}$$

Así puede formarse la matriz varianza covarianza a priori  $\Sigma_o$  de la ecuación (27).

Nos encontramos con una matriz varianza covarianza banda, con dependencia entre las variables que constituyen una pareja de incrementos de coordenadas, siendo el resto de los elementos de la matriz nulos.

Para evitar el problema de las covarianzas entre los incrementos de la red se resuelven dos redes con incrementos coaligados separados alternativamente en cada una de ellas, de modo que se eliminan las covarianzas que incomodan.

Distribuyendo los incrementos en dos matrices parciales de diseño  $A_1$  y  $A_2$ , consiguiendo así matrices parciales diagonales  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , y aplicando, a cada una de ellas, el procedimiento general de ajuste. De modo que obtenemos las mismas variables en cada una de las subredes y luego hacemos la media entre los dos resultados.

Otra opción sería resolver cada una de las variables  $\Delta X_{MPo}$ ,  $\Delta Y_{MPo}$  con su propio sistema, que por separado, responden a un ajuste Gauss-Marcov, aunque no de manera conjunta.

Las matrices parciales de diseño  $A_1$  y  $A_2$ , que proceden de la matriz  $A$  son:

<b>MATRIZ A1</b>		
	xv2	yv2
<b><math>\Delta X V4V2</math></b>	1	0
<b><math>\Delta X V2V3</math></b>	-1	0
<b><math>\Delta Y V2V4</math></b>	0	-1
<b><math>\Delta Y V3V2</math></b>	0	1

<b>MATRIZ A2</b>		
	xv2	yv2
<b><math>\Delta Y V4V2</math></b>	0	1
<b><math>\Delta Y V2V3</math></b>	0	-1
<b><math>\Delta X V2V4</math></b>	-1	0
<b><math>\Delta X V3V2</math></b>	1	0

Disociamos definitivamente las parejas de incrementos en cada subred, y así se anulan sus covarianzas. La separación alternativa también tendrá en cuenta el peso del incremento de coordenada, intentando que en cada uno de los sistemas de ecuaciones las varianzas se parezcan. Lo veremos a continuación cuando estudiemos la matrices de los pesos.

En cuanto a los vectores  $K_1$  y  $K_2$ , que se obtienen a partir de  $K$ :

<b>VECTOR K1</b>
0.00026
0.00027
-0.00019
0.00082
<b>VECTOR K2</b>
0.00023
-0.00081
-0.00030
-0.00006

### 3.2.4. LAS MATRICES DE PESOS

Llegamos ahora a un capítulo determinante en el diseño de la red. Veamos por qué.

Con alguna adaptación, el método de incrementos sigue una ponderación similar a la que propusimos en el método de triangulación<sup>14</sup>, basada en la proyección lineal de las desviaciones típicas de los errores angulares y distanciométricos de los observables clásicos.

En la figura 3.6 aparece la interpretación geométrica de la observación del vértice  $M \equiv j(x_j, y_j)$  desde la estación  $O \equiv i(x_i, y_i)$ . Siendo el azimut  $\theta_{ijo} = \alpha = \delta_{ijo}$  y la distancia reducida  $Dist_{ijo} = \rho = l_{ijo}$ .

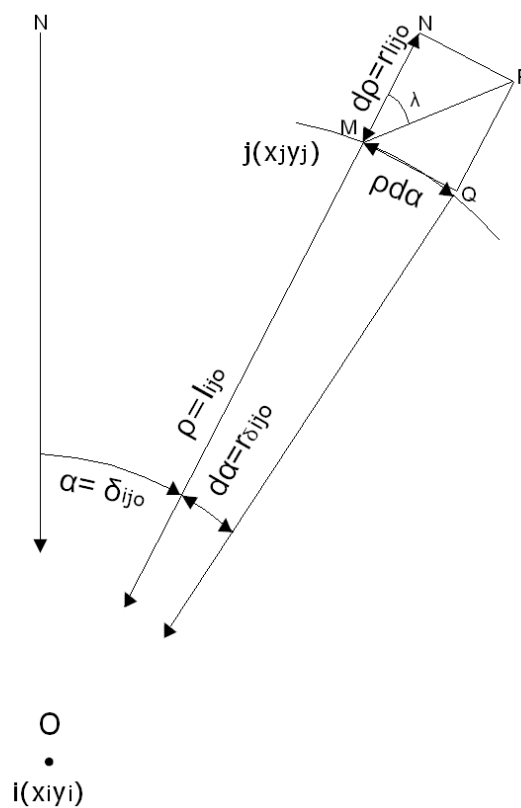


Figura 3.4: Cuadrilátero de ponderación. Se levanta el vértice  $M$  desde la estación  $O$ . El error debido al distanciómetro ( $d\rho$ ) y la proyección del error acimutal ( $\rho \cdot d\alpha$ ) dan lugar al vector  $MP$ , error total del vértice  $M$

14

Cuyo desarrollo teórico y práctico se recoge en el epígrafe 4.4 del artículo “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano...”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT.

Los errores o correcciones de la observación se representan por  $d\alpha$  (error del azimut  $\alpha$ ) y  $d\rho$  (error de la distancia  $\rho$ ). Recordemos de nuevo que ambos errores se obtienen a partir de la desviación típica de los observables de la libreta de campo.

El error total en el levantamiento del vértice  $M$  se explica geoméricamente por la composición de dos errores lineales:

- la proyección lineal del error  $d\alpha$  sobre su cuerda:  $\rho \cdot d\alpha$
- y el error lineal debido a la distancia:  $d\rho$

cuya resultante es el vector  $MP$ , corrección total del cuadrilátero de ponderación.

(Para que la ponderación sea equilibrada es necesario que los dos errores lineales anteriores sean similares. Ese debe ser el criterio principal del diseñador del proyecto. Siendo los cuadriláteros de ponderación de todos los vértices similares en tamaño y forma, podemos asegurar resultados a posteriori acordes con la previsión, y un análisis e interpretación de los resultados coherente ).

(La corrección total  $MP$ , diagonal del cuadrilátero, será la que determine el valor de la varianza de cada una de las formas lineales que hemos llamado incremento de coordenada y también su peso).

Iniciamos el cálculo de las varianzas y de los pesos de los observables incremento de coordenada.

1. Conocidos el azimut  $\theta_{OM}$ , la distancia  $\rho_{OM}$ , el error angular  $d\alpha_{OM}$ , y el error distanciométrico  $d\rho_{OM}$ , calculamos el valor de  $\lambda_{OM}$ , según la expresión:

$$\lambda = \arctg \frac{\rho \cdot d\alpha}{d\rho}$$

2. Obtenemos la proyección de los lados del cuadrilátero de ponderación sobre la diagonal  $MP$  según las ecuaciones:

$$L_{d\alpha} = \text{proyección del lado función de } d\alpha = (\rho \cdot d\alpha \cdot 1000 \cdot \text{sen}\lambda) / 636620$$

( siempre que las unidades de  $d\alpha$  sean grados centesimales y de  $\rho$  sean metros)

$$L_{d\rho} = \text{proyección del lado función de } d\rho = d\rho \cdot \cos\lambda$$

3. Calculamos la diagonal del cuadrilátero de ponderación, que responde a la ecuación:

$$MP = L_{d\alpha} + L_{d\rho}$$

En los cuadros 3.2 y 3.3 hemos calculado el valor de  $\lambda$ ,  $L_{d\alpha}$ ,  $L_{d\rho}$ , y de las diagonales de los cuadriláteros de ponderación para cada pareja de azimut y distancia de nuestra red, a partir de sus valores conocidos:  $d\alpha$ ,  $\rho$ , y  $d\rho$ .

	$\theta_{v4-v2}$	$\theta_{v3-v2}$	$\theta_{v2-v3}$	$\theta_{v2-v4}$
$\theta[g]$	54,75547	395,68190	195,68170	254,75551
$d\alpha^2[g^2]$	2,85E-08	6,75E-08	2,53E-07	6,75E-08
$d\alpha[g]$	0,00017	0,00026	0,00050	0,00026
$\lambda[g]$	<b>46,0</b>	<b>56,3</b>	<b>71,3</b>	<b>65,9</b>
$L_{d\alpha}[m]$	0,00015	0,00021	0,00047	0,00029
<b>diag [m]</b>	<b>0,00033</b>	<b>0,00035</b>	<b>0,00058</b>	<b>0,00039</b>

Cuadro 3.2: En negrita, los valores  $\lambda$  y las diagonales de los cuadriláteros de ponderación, de los observables azimut

	$Dist_{V4V2}$	$Dist_{V3V2}$	$Dist_{V2V3}$	$Dist_{V4V2}$
$\rho[m]$	83,15000	66,38920	66,38920	83,14990
$d\rho^2[m^2]$	6,25E-08	4,93E-08	6,46E-08	4,06E-08
$d\rho[m]$	0,00025	0,00022	0,00025	0,00020
$\lambda[g]$	<b>46,0</b>	<b>56,3</b>	<b>71,3</b>	<b>65,9</b>
$L_{d\rho}[m]$	0,00019	0,00014	0,00011	0,00010
<b>diag [m]</b>	<b>0,00033</b>	<b>0,00035</b>	<b>0,00058</b>	<b>0,00039</b>

Cuadro 3.3: En negrita, los valores de  $\lambda$  y de las diagonales de los cuadriláteros de ponderación, de los observables distancia



4. Obtenemos las varianzas de los observables incremento de coordenada, que serán las proyecciones de la diagonal genérica  $MP$  del cuadrilátero sobre los ejes de coordenadas.

Así las desviaciones típicas de los incrementos  $\Delta X_{OM}$ ,  $\Delta Y_{OM}$ , serán:

$$\sigma_{\Delta X_{OM}} = | MP \cdot \text{sen}(\theta + \lambda) |$$

$$\sigma_{\Delta Y_{OM}} = | MP \cdot \text{cos}(\theta + \lambda) |$$

En el cuadro 3.4 se muestra el listado de desviaciones típicas y varianzas de los observables de nuestra red.

	$\Delta X_{v4-v2}$	$\Delta Y_{v4-v2}$	$\Delta X_{v3-v2}$	$\Delta Y_{v3-v2}$	$\Delta X_{v2-v3}$	$\Delta Y_{v2-v3}$	$\Delta X_{v2-v4}$	$\Delta Y_{v2-v4}$
$\sigma_{\Delta xy}$	0,00033	0,00033	0,00026	0,00024	0,00051	0,00029	0,00037	0,00037
$\sigma_{\Delta xy}^2$	1,11E-07	1,11E-07	6,52E-08	5,76E-08	2,56E-07	8,36E-08	1,40E-07	1,40E-07

Cuadro 3.4: Desviaciones típicas y varianzas de los observables incremento de coordenada

5. Una vez conocido las varianzas de cada una de las formas lineales de incremento seleccionamos de entre ellas el valor de la mediana, que desde ese momento se convierte en el estimador de la varianza a priori del observable de peso unidad  $\sigma_0^2$ . Como tenemos dos ajustes tendremos también dos medianas, una para cada subred.

Distribuyendo los incrementos en dos matrices parciales, como vimos en el apartado 3.2.3, formamos dos sistemas de formas lineales: la subred 1 y la subred 2.

La mediana (varianza a priori del observable de peso unidad) de la subred 1 es  $\sigma_0^2 = 1,266 \cdot 10^{-7} m^2$ .

Y finalmente calcularemos el peso de cada observable de la subred 1 con la expresión:

$$P_{O_{T_i}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\sigma_{T_i}}^2} = \frac{\sigma_o^2}{v\pi i^2}$$

Y los pesos de la subred 1 son los del cuadro 3.5.

	Mediana = $\sigma_o^2 [m^2]$	Varianza = $\hat{\sigma}_{\sigma_{T_i}}^2 [m^2]$	Peso = $P_{O_{T_i}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\sigma_{T_i}}^2}$
$\Delta X_{v4-v2}$	$1,266 \cdot 10^{-7} m^2$	$1,116 \cdot 10^{-7}$	1,1
$\Delta X_{v2-v3}$	$1,266 \cdot 10^{-7}$	$2,56 \cdot 10^{-7}$	0,4
$\Delta Y_{v2-v4}$	$1,266 \cdot 10^{-7}$	$1,40 \cdot 10^{-7}$	0,9
$\Delta Y_{v3-v2}$	$1,266 \cdot 10^{-7}$	$5,76 \cdot 10^{-8}$	2,1

Cuadro 3.5: Mediana, varianzas y pesos de los observables de la subred 1

La mediana de la subred 2 (varianza a priori del observable de peso unidad) es  $\sigma_0^2 = 9,76 \cdot 10^{-8} m^2$ . Y calcularemos los pesos de la subred 2, que aparecen en el cuadro 3.6.

	Mediana = $\sigma_o^2 [m^2]$	Varianza = $\hat{\sigma}_{\sigma_{T_i}}^2 [m^2]$	Peso = $P_{O_{T_i}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\sigma_{T_i}}^2}$
$\Delta Y_{v4-v2}$	$9,76 \cdot 10^{-8}$	$1,116 \cdot 10^{-7}$	0,9
$\Delta Y_{v2-v3}$	$9,76 \cdot 10^{-8}$	$2,56 \cdot 10^{-7}$	1,2
$\Delta X_{v2-v4}$	$9,76 \cdot 10^{-8}$	$1,40 \cdot 10^{-7}$	0,7
$\Delta X_{v3-v2}$	$9,76 \cdot 10^{-8}$	$5,76 \cdot 10^{-8}$	1,5

Cuadro 3.6: Mediana, varianzas y pesos de los observables de la subred 2

En el caso en que se cumpla alguna de estas condiciones:

$$(\theta_{OM} + \lambda) \simeq 100^g$$

$$(\theta_{OM} + \lambda) \simeq 200^g$$

$$(\theta_{OM} + \lambda) \simeq 300^g$$

$$(\theta_{OM} + \lambda) \simeq 400^g$$

se produce una descompensación aparente en los pesos, aunque el cuadrilátero sea de lados iguales. Y esa situación la encontramos entre los vértices V4 y V2:

$$(\theta_{V_4V_2} + \lambda_{V_4V_2}) = 54,75546 + 46 = 100,75546^g$$

$$(\theta_{V_2V_4} + \lambda_{V_2V_4}) = 254,75551 + 65 = 309,75546^g$$

Y las varianzas de los observables de la red de incrementos serán:

$$\sigma_{\Delta X_{V_4V_2}}^2 = (MP \cdot \text{sen}(\theta_{V_4V_2} + \lambda_{V_4V_2}))^2 = (83,1495 \cdot \text{sen}(100,75546))^2 = 6912,94$$

$$\sigma_{\Delta Y_{V_4V_2}}^2 = (MP \cdot \text{cos}(\theta_{V_4V_2} + \lambda_{V_4V_2}))^2 = (83,14996 \cdot \text{cos}(100,75546))^2 = 0,97$$

$$\sigma_{\Delta X_{V_2V_4}}^2 = (MP \cdot \text{sen}(\theta_{V_2V_4} + \lambda_{V_2V_4}))^2 = (83,1494 \cdot \text{sen}(309,75546))^2 = 6752,84$$

$$\sigma_{\Delta Y_{V_2V_4}}^2 = (MP \cdot \text{cos}(\theta_{V_2V_4} + \lambda_{V_2V_4}))^2 = (83,1494 \cdot \text{cos}(309,75546))^2 = 161,04$$

Pero hay que hacer notar que la casual posición horizontal de la diagonal genérica  $MP$  en el caso  $(\theta_{OM} + \lambda) \simeq 100^g$  podría ser vertical si  $\lambda < 0$ , que implicaría que  $(\theta_{OM} - \lambda) \simeq 0^g$ . Se puede ver en las figuras 3.7 y 3.8 las posiciones aleatorias  $+\lambda$  y  $-\lambda$  del error total  $MP$  y su influencia sobre las proyecciones de los ejes de esa diagonal. Si pasáramos de la posición  $+\lambda$  a  $-\lambda$  se invertirían los valores de  $\sigma_{\Delta X_{V_4V_2}}^2$  por los de  $\sigma_{\Delta Y_{V_4V_2}}^2$ .

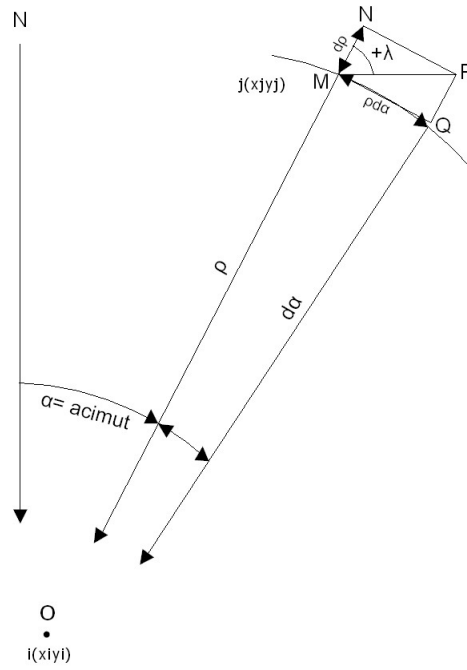


Figura 3.5: Posición del cuadrilátero de compensación en el caso  $(\theta_{OM} + \lambda) \simeq 100^\circ$

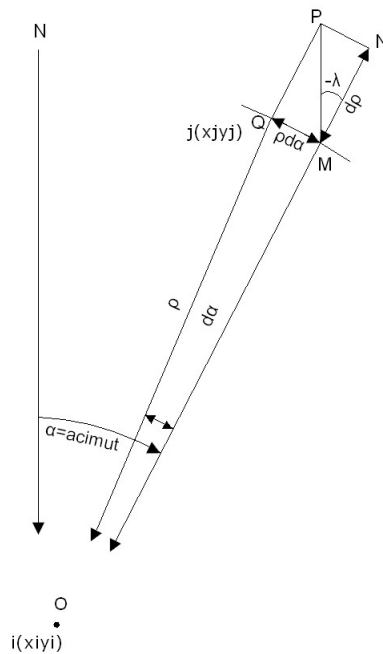


Figura 3.6: Posición del cuadrilátero de compensación en el caso  $(\theta_{OM} - \lambda) \simeq 0^\circ$

Ante esta situación optamos por asignar la peor situación tanto para  $\sigma_{\Delta X_{V_4V_2}}^2$  como para  $\sigma_{\Delta Y_{V_4V_2}}^2$ . Como hemos disociado las parejas de incrementos en redes diferentes podemos coger el peor supuesto para ambos. Lo que supone que la varianza coincidirá con el cuadrado de la longitud de la diagonal  $MP$ . Que en el caso concreto que nos ocupa es:

$$\sigma_{\Delta X_{V_4V_2}}^2 = (0,00033)^2 m^2 \text{ y } \sigma_{\Delta Y_{V_4V_2}}^2 = (0,00033)^2 m^2$$

$$\sigma_{\Delta X_{V_2V_4}}^2 = (0,00039)^2 m^2 \text{ y } \sigma_{\Delta Y_{V_2V_4}}^2 = (0,00039)^2 m^2$$

### 3.2.4.1. SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA GEOMETRÍA DEL CUADRILÁTERO DE PONDERACIÓN Y DE SU AZIMUT

Queremos insistir en la importancia de la geometría del cuadrilátero de compensación, función directa de los errores  $d\alpha$  (error del azimut  $\alpha$ ) y  $d\rho$  (error de la distancia  $\rho$ ) sobre los errores de las coordenadas de los vértice o sobre sus incrementos.

Como muestran las figuras 3.9 y 3.10, un cuadrilátero con ejes desiguales provoca errores desiguales en sus coordenadas, debido a la proyección del error total (diagonal  $MP$ ) sobre los ejes coordenados.

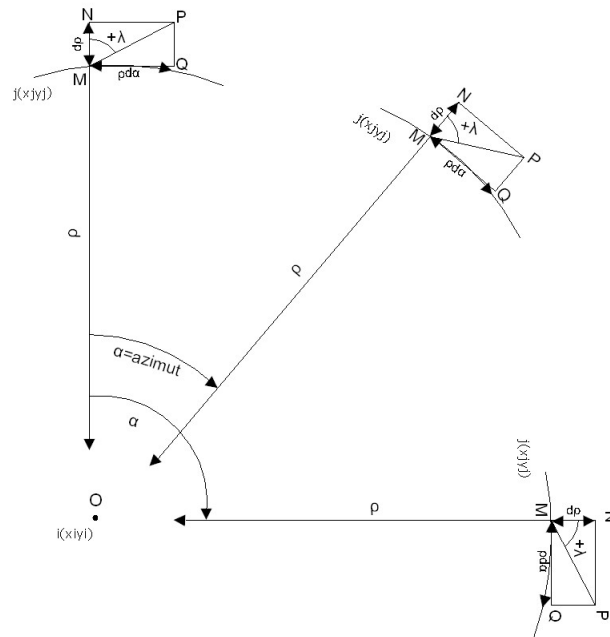


Figura 3.7: Cuadrilátero de ponderación de lados desiguales, con predominio de  $\rho \cdot d\alpha$  sobre  $dp$ . La proyección del error  $MP$  del vértice  $M$  en los ejes  $XY$  provoca variaciones muy importantes en el cálculo de las coordenadas de los vértices, lo que influirá decisivamente en la ponderación de la red de incrementos

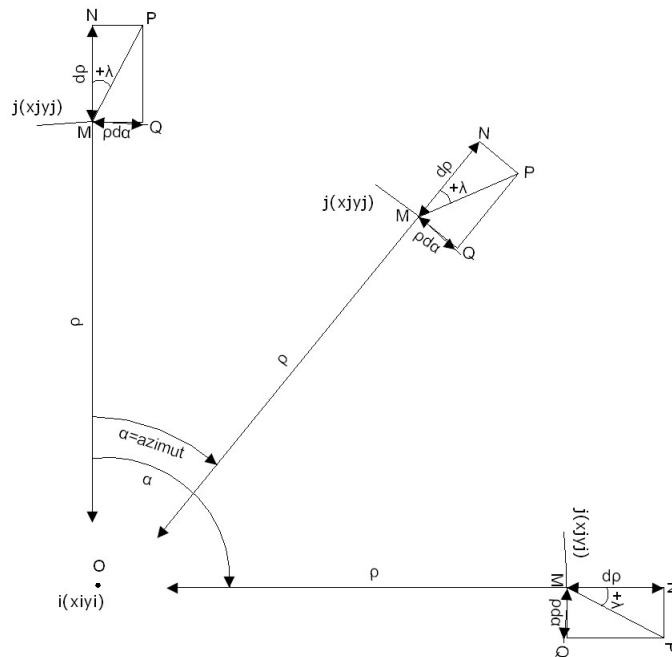


Figura 3.8: Cuadrilátero de ponderación de lados desiguales, con predominio de  $dp$  sobre  $\rho \cdot d\alpha$ . El azimut afecta decisivamente a la proyección de la diagonal  $MP$

Por último es bueno subrayar que el azimut del vértice a levantar influye en los errores de las coordenadas de ese vértice. Si por algún motivo necesitamos que disminuya o aumente el error, en una de las coordenadas del vértice, podremos conseguirlo modificando la orientación de los ejes XY del levantamiento. Puede suceder que un cuadrilátero con ejes desiguales provoque errores similares en los incrementos de coordenadas si el azimut es próximo a  $50^g$  ó  $250^g$ .

### 3.2.5. SÍNTESIS Y RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED POR EL MÉTODO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS

Conocidas las matrices parciales de diseño  $A_1$ ,  $A_2$ , los vectores  $K_1$ ,  $K_2$  y las matrices de pesos  $P_1$  y  $P_2$ . Iniciamos el ajuste de la subred 1 y la subred 2.

#### 3.2.5.1. LA MATRIZ $A_1$ , LA MATRIZ DE PESOS $P_1$ , EL VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES $K_1$ , Y LA MATRIZ $S_1$ DE LA SUBRED 1

##### MATRIZ $A_1$

$$A_1(1, 1) = 1$$

$$A_1(1, 2) = 0$$

$$A_1(2, 1) = -1$$

$$A_1(2, 2) = 0$$

$$A_1(3, 1) = 0$$

$$A_1(3, 2) = -1$$

$$A_1(4, 1) = 0$$

$$A_1(4, 2) = 1$$

##### VECTOR $K_1$ [m]

$$k_1(1) = 2.6E-004$$

$$k_1(2) = 2.7E-004$$

$$k_1(3) = -1.9E-004$$

$$k_1(4) = 8.2E-004$$

**MATRIZ DIAGONAL  $P_1$  [adimensional]**

Peso del observable 1 1.1

Peso del observable 2 .4

Peso del observable 3 .9

Peso del observable 4 2.1

Por último, la matriz S:

**MATRIZ S**

$$S = A^T P A = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

### 3.2.5.2. LA MATRIZ $A_2$ , LA MATRIZ DE PESOS $P_2$ , EL VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES $K_2$ , Y LA MATRIZ $S_2$ DE LA SUBRED 2

**MATRIZ  $A_2$** 

$$A_2(1, 1) = 0$$

$$A_2(1, 2) = 1$$

$$A_2(2, 1) = 0$$

$$A_2(2, 2) = -1$$

$$A_2(3, 1) = -1$$

$$A_2(3, 2) = 0$$

$$A_2(4, 1) = 1$$

$$A_2(4, 2) = 0$$

**VECTOR  $K_2$  [m]**

$$k_2(1) = 2.3E-004$$

$$k_2(2) = -8E-004$$

$$k_2(3) = -3E-004$$

$$k_2(4) = -6E-005$$



**MATRIZ DIAGONAL  $P_2$  [adimensional]**

Peso del observable 1 .9

Peso del observable 2 1.2 P

eso del observable 3 .7

Peso del observable 4 1.5

Por último, la matriz S:

**MATRIZ S**

$$S = A^T P A = \begin{pmatrix} 2,2 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix}$$

**3.2.5.3. EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD EN LA SUBRED 1**

El resultado se expresa según:

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2}$ ,
- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2}$

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**

diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 1.2E-004$

diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = 6.3E-004$

**RESIDUOS [m]**

-1.4E-004

-3.9E-004

-4.4E-004

-1.9E-004

**Varianza de la medida de peso ud. = 1.7E-007  $m^2$**

**Desv. típica de la medida de peso ud. = 4.0E-004 m**

La desviación típica a posteriori del observable de peso unidad es la esperable, considerando que la desviación típica a priori del observable de peso unidad es  $3,6 \cdot 10^{-4} m$ . La diferencia entre la desviación típica a priori y a posteriori es de cuatro centésimas de milímetro, confirmando la bondad del cálculo y trabajo.

#### 3.2.5.4. EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD EN LA SUBRED 2

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**  
diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 5.4E-005$   
diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = 5.6E-004$   
**RESIDUOS [m]**  
3.3E-004  
2.4E-004  
2.45E-004  
1.1E-004  
**Varianza de la medida de peso ud. = 1.1E-007 m<sup>2</sup>**  
**Desv. típica de la medida de peso ud. = 3.4E-004 m**

La desviación típica a posteriori del observable de peso unidad es la esperable, considerando que la desviación típica a priori del observable de peso unidad es  $3,1 \cdot 10^{-4} m$ . La diferencia entre la desviación típica a priori y a posteriori es de tres centésimas de milímetro, es un buen resultado.

#### 3.2.5.5. EL RESULTADO DEL AJUSTE DOBLE POR INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS PARÁMETROS $dx_{V2}$ Y $dy_{V2}$ DE LAS SUBREDES 1 Y 2

Hemos obtenido dos soluciones de las mismas variables, que procedes de las subredes 1 y 2. Ambas soluciones son promediabiles, y es así como llegamos a la solución final:

Diferencial de la coordenada X:

$$dx_{V2-RI} = (1,2 \cdot 10^{-4} + 5,4 \cdot 10^{-5})/2 = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Diferencial de la coordenada Y:

$$dy_{V2-RI} = (6,3 \cdot 10^{-4} + 5,6 \cdot 10^{-4})/2 = 5,95 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Resultado que coincide satisfactoriamente con el correspondiente al ajuste de la red triangulaterada, que recordamos fueron:

Diferencial de la coordenada X en la red triangulaterada:

$$dx_{V2-TT} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Diferencial de la coordenada Y en la red triangulaterada:

$$dy_{V2-TT} = 5,02 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Subrayamos que las diferencias entre la solución de la red triangulaterada y la solución de la red por incrementos son de décimas y centésimas de milímetro:

$$dx_{V2-TT} - dx_{V2-RI} = 1,2 \cdot 10^{-4} - 0,9 \cdot 10^{-4} = 0,00003 \text{ m.}$$

$$dy_{V2-TT} - dy_{V2-RI} = 5,02 \cdot 10^{-4} - 5,95 \cdot 10^{-4} = -0,0001 \text{ m.}$$

Ambos métodos confirman el resultado y la equivalencia de aplicación de cualquiera de ellos.

**3.2.5.6. LAS MATRICES DE CRITERIO : MATRIZ COFACTOR DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ COFACTOR DE LOS RESIDUOS, MATRIZ COFACTOR DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS RESIDUOS, Y MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS DE LA SUBRED 1**

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

**Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.**

+000.66666666 +000

+000 +000.33333333

**Matriz cofactor de los RESIDUOS.**

+000.24242424 +000.66666666 +000 +000

+000.66666666 +001.83333333 +000 +000

+000 +000 +000.77777777 +000.33333333

+000 +000 +000.33333333 +000.14285714

**Matriz cofactor de los observables corregidos.**

+000.66666666 -000.66666667 +000 +000

-000.66666667 +000.66666666 +000 +000

+000 +000 +000.33333333 -000.33333333

+000 +000 -000.33333333 +000.33333333

**Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS.**

+000.00000011 +000

+000 +000.00000005

**Matriz varianza-cov a posteriori de los residuos.**

+000.00000004 +000.00000011 +000 +000

+000.00000011 +000.00000030 +000 +000

+000 +000 +000.00000012 +000.00000005

+000 +000 +000.00000005 +000.00000002

**Matriz varianza-cov a posteriori de los observables corregidos.**

+000.00000011 -000.00000011 +000 +000

-000.00000011 +000.00000011 +000 +000

+000 +000 +000.00000005 -000.00000006

+000 +000 -000.00000006 +000.00000005

**3.2.5.7. LAS MATRICES DE CRITERIO : MATRIZ COFACTOR DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ COFACTOR DE LOS RESIDUOS, MATRIZ COFACTOR DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA DE LAS VARIABLES O PARÁMETROS, MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS RESIDUOS, Y MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA A POSTERIORI DE LOS OBSERVABLES CORREGIDOS DE LA SUBRED 2**

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

**Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.**

+000.45454545 +000

+000 +000.47619047

**Matriz cofactor de los RESIDUOS.**

+000.63492063 +000.47619047 +000 +000

+000.47619047 +000.35714285 +000 +000

+000 +000 +000.97402597 +000.45454545

+000 +000 +000.45454545 +000.21212121

**Matriz cofactor de los observables corregidos.**

+000.47619047 -000.47619048 +000 +000

-000.47619048 +000.47619047 +000 +000

+000 +000 +000.45454545 -000.45454545

+000 +000 -000.45454545 +000.45454545

**Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS.**

+000.00000005 +000

+000 +000.00000005

**Matriz varianza-cov a posteriori de los residuos.**

+000.00000007 +000.00000005 +000 +000

+000.00000005 +000.00000004 +000 +000

+000 +000 +000.00000011 +000.00000005

+000 +000 +000.00000005 +000.00000002

**Matriz varianza-cov a posteriori de los observables corregidos.**

+000.00000005 -000.00000005 +000 +000

-000.00000005 +000.00000005 +000 +000

+000 +000 +000.00000005 -000.00000005

+000 +000 -000.00000005 +000.00000005

**3.2.5.8. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD INTERNA DE LA SUBRED 1**

Las redundancias son homogéneas y próximas a  $\frac{2}{4} = 0,5$ . Todas están en torno a la redundancia media 0,5, que en la práctica es el valor óptimo, puesto que la suma de las redundancias debe valer 2, redundancia total de la red.

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de REDUNDANCIAS**

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

1 +001.1 +000.24242424 +000.266  
 2 +000.4 +001.83333333 +000.733  
 3 +000.9 +000.77777777 +000.7  
 4 +002.1 +000.14285714 +000.3

Suma de Redundancias = +002

El parámetro de Baarda es el que se emplea para eliminar o rechazar un observable. Todos los parámetros de Baarda en nuestro caso se encuentran en el intervalo  $[-0,70-1,23] < 3,29$ , y por tanto todos los observables son aceptados.

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)**

Ob. Residuo ( $R_i$ ) Err.cuad( $\sigma_i$ ) Var.de Baarda ( $w_i$ ).

1 -000.00014133 +000.00020073 -000.70406395  
 2 -000.00038867 +000.00055203 -000.70406395  
 3 -000.00044100 +000.00035956 -001.22649662  
 4 -000.00018900 +000.00015409 -001.22649662

El error máximo que puede deslizarse en uno de nuestros observables y no ser detectado es de  $\nabla_{O_i} = 0,000077$  metros, ocho centésimas de milímetro, realmente despreciable (observable nº 1). En la triangulateración el mínimo error detectable era 0,00196 metros, muy superior a éste.

**Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red**

Valor de para el nivel de significación  $\alpha$ , y potencia  $\beta$  del test ,  $\delta = 4.12$

Ob.  $(\sigma_i)$   $(\sqrt{r_i})$   $(\nabla_{O_i})$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{IN_i} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$

1 +000.00033288 +000.51639777 +000.00007735 +000.23237900  
 2 +000.00033288 +000.85634883 +000.00004664 +000.14012980  
 3 +000.00023538 +000.83666002 +000.00003376 +000.14342743  
 4 +000.00023538 +000.54772255 +000.00005157 +000.21908902

### 3.2.5.9. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD INTERNA DE LA SUBRED 2

Los parámetros de fiabilidad interna son muy similares a los de la subred 1. Las redundancias son homogéneas y próximas a  $\frac{2}{4} = 0,5$ , más próximas a la redundancia media 0,5 que en la subred 1.

#### Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red

##### Comprobaciones de REDUNDANCIAS

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia

1 +000.9 +000.63492063 +000.57142857

2 +001.2 +000.35714285 +000.42857142

3 +000.7 +000.97402597 +000.68181818

4 +001.5 +000.21212121 +000.31818181

Suma de Redundancias = +002

Todos los parámetros de Baarda se encuentran en el intervalo  $[0,73-1,21] < 3,29$ , y por tanto todos los observables son aceptados.

#### Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red

##### Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)

Ob. Residuo ( $R_i$ ) Err.cuad( $\sigma_i$ ) Var.de Baarda ( $w_i$ ).

1 +000.00032571 +000.00026959 +001.20816313

2 +000.00024428 +000.00020219 +001.20816313

3 +000.00024545 +000.00033391 +000.73507948

4 +000.00011454 +000.00015582 +000.73507948

El error máximo que puede deslizarse en uno de nuestros observables y no ser detectado es de  $\nabla_{O_i} = 0,000048$  metros, cinco centésimas de milímetro del observable n<sup>o</sup> 4.

**Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red**

Valor de para el nivel de significación  $\alpha$ , y potencia  $\beta$  del test ,  $\delta= 4.12$

Ob.— $(\sigma_i)$ — $(\sqrt{r_i})$ — $(\nabla_{O_i})$ —Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$

1 +000.00023347 +000.75592894 +000.00003706 +000.15874507

2 +000.00023347 +000.65465367 +000.00004279 +000.18330302

3 +000.00022810 +000.82572282 +000.00003315 +000.14532721

4 +000.00022810 +000.56407607 +000.00004852 +000.21273726

**3.2.5.10. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EXTERNA DE LA SUBRED 1**

Es claro que la subred es más pequeña que la red triangulaterada por tanto el parámetro de homogeneidad  $\mu_{Exi}$  ofrece muy poca información.

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

O.— $\sqrt{1-r_i}$ — Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1-r_i}$

1 +000.85634883 +000.19899748

2 +000.51639777 +000.07236272

3 +000.54772255 +000.07855844

4 +000.83666002 +000.18330302

En cuanto al error no detectado  $\nabla_{O_i}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable  $dx_{V2}$  y  $dy_{V2}$  según los valores de la tabla siguiente. El error no detectado afectaría en centésimas de milímetro a las variables.



**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

**Vectores de fiabilidad externa:**

Observable ... ( 1 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00005672  
 Variable o Parámetro 2... +000  
 Observable ... ( 2 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -000.00001244  
 Variable o Parámetro 2... +000  
 Observable ... ( 3 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000  
 Variable o Parámetro 2... -000.00001013  
 Observable ... ( 4 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000  
 Variable o Parámetro 2... +000.00003609

La composición cuadrática de los errores transmitidos a las variables  $dx_{V2}$  y  $dy_{V2}$  por los observables, supuesto el caso más desfavorable, resulta su composición cuadrática, que en ningún caso alcanza la décima de milímetro.

Observable	$\sqrt{error\ dx^2 + error\ dy^2}$
1	0,057 mm
2	0,012 mm
3	0,010 mm
4	0,036 mm

**3.2.5.11. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EXTERNA DE LA SUBRED 2**

El error no detectado  $\nabla_{O_i}$  afectaría en centésimas de milímetro a las variables  $dx_{V2}$  y  $dy_{V2}$  según los valores de la tabla siguiente:

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

**Vectores de fiabilidad externa:**

Observable ... ( 1 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000  
 Variable o Parámetro 2... +000.00010513  
 Observable ... ( 2 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00007008  
 Variable o Parámetro 2... +000  
 Observable ... ( 3 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000  
 Variable o Parámetro 2... +000.00010513  
 Observable ... ( 4 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00019824  
 Variable o Parámetro 2... +000

Como en la subred 1 la composición cuadrática de los errores transmitidos tampoco supera la décima de milímetro.

Observable	$\sqrt{error\ dx^2 + error\ dy^2}$
1	0,1 mm
2	0,07 mm
3	0,1 mm
4	0,1 mm

**3.2.5.12. SEMIEJES DE LA ELIPSE STANDARD DE LAS SUBREDES 1 Y 2**

Siguiendo el texto del epígrafe 3.1.14 podemos escribir:

Siendo las matrices  $S = (A^T P A)$  de las subredes 1 y 2:

**MATRIZ  $S_1$  de la subred 1**

$$S = A^T P A = \begin{matrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

**MATRIZ  $S_2$  de la subred 2**

$$S = A^T P A = \begin{matrix} 2,2 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{matrix}$$

obtendremos los autovalores de las matrices S de las subredes 1 y 2:

**Autovalores de  $S_1$  de la subred 1**

$$\mu_1 = 1.5$$

$$\mu_2 = 3.0$$

**Autovalores de  $S_2$  de la subred 2**

$$\mu_1 = 2.2$$

$$\mu_2 = 2.1$$

Y conocidas la desviaciones típicas del observable de peso unidad a posteriori de las subredes 1 y 2:

$$\sigma_0 \text{ subred 1} = 4 \cdot 10^{-4} m.$$

$$\sigma_0 \text{ subred 2} = 3,4 \cdot 10^{-4} m.$$

podemos calcular, los semiejes de las elipses estándar de error del vértice  $V_2$ :

Los semiejes genéricos, según la ecuación  $\Phi_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$ , y serán los que siguen,

semiejes subred 1:

$$\Phi_{1 \text{ subred 1}} = 3,27 \cdot 10^{-4} m$$

$$\Phi_{2 \text{ subred 1}} = 2,31 \cdot 10^{-4} m$$

semiejes subred 2:

$$\Phi_{1 \text{ subred 2}} = 2,33 \cdot 10^{-4} m$$

$$\Phi_{2 \text{ subred 2}} = 2,28 \cdot 10^{-4} m$$

semiejes que definen un círculo en lugar de una elipse.

### 3.2.5.13. LAS ELIPSES ASOCIADAS A LA CURVAS PEDALES DE LAS SUBREDES 1 Y 2

Siguiendo el texto del epígrafe 3.1.15, a partir de la matriz varianza covarianza de las variables o parámetros de la subred 1 obtenemos:

$$\sigma_x^2 = 0,00000011 \text{ m}^2$$

$$\sigma_y^2 = 0,00000005 \text{ m}^2$$

$$2\sigma_{xy} = 0$$

siendo fácil calcular los semiejes mayor y menor:

$$a_{subred1} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$b_{subred1} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

En general  $a$  y  $b$  son los errores máximo y mínimo en valor absoluto.

Con la matriz varianza covarianza de las variables o parámetros de la subred 2 siendo conocido  $\sigma_x^2 = 0,00000005 \text{ m}^2 = 0,05 \text{ mm}^2$ ,  $\sigma_y^2 = 0,05 \text{ mm}^2$ , y  $\sigma_{xy} = 0$ , la curva podaria queda determinada según

$$\sigma_r^2 = 0,05 \cdot (\cos^2 w + \text{sen}^2 w) = (x^2 + y^2)^2$$

o bien

$$0,05 \cdot (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$$

es decir

$$x^2 + y^2 = 0,05$$

resultando una circunferencia de  $0,22 \text{ mm}$ . de radio, centrada en el vértice  $V_2$ .

$$r = a_{subred2} = b_{subred2} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

### 3.2.5.14. PROBABILIDADES DE ERROR ASOCIADAS A LAS FIGURAS DE ERROR DE LAS SUBREDES 1 Y 2

Conocida el área de la podaria y el área de la elipse se puede estimar, siguiendo la teoría expuesta en el epígrafe 3.1.16, la probabilidad asociada a la elipse a partir de la probabilidad conocida de la podaria.

En la subred 1, siendo la probabilidad de la podaria  $1 \cdot \sigma^2$  (una varianza)  $\langle \rangle \pm 1 \cdot \sigma$  (una desviación típica),  $\langle 0,68 \rangle$ , y la probabilidad de la elipse asociada a  $K^2 \cdot \sigma^2$  (varianzas)  $\langle \rangle \pm K \cdot \sigma$  (desviaciones típicas) con:

$$K_{subred\ 1}^2 = \frac{A_E}{A_P} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} = \frac{2 \cdot (3,3 \cdot 10^{-4}) \cdot (2,2 \cdot 10^{-4})}{(3,3 \cdot 10^{-4})^2 + (2,2 \cdot 10^{-4})^2} = \frac{14,52 \cdot 10^{-8}}{15,73 \cdot 10^{-8}} = \pm 0,9231$$

$$K = \pm 0,9608$$

$$\text{Prob ES } \langle \rangle \pm \sqrt{\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\sigma^2\right)} = \pm K \cdot \sigma = \pm 0,9608 \cdot 0,68 = 0,6533 \text{ desviaciones típicas}$$

Así en nuestra subred 1:

A la elipse standard de semiejes mayor y menor:

$$a_{subred\ 1} = 3,27 \cdot 10^{-4} m$$

$$b_{subred\ 1} = 2,31 \cdot 10^{-4} m$$

se asocia una fiabilidad del  $65,33\% = 65,3\%$ .

Una homotecia de razón adecuada según rutina de la distribución normal practicada a la figura descrita, genera el recinto de incertidumbre con la probabilidad que se precise.

Si en la tabla de la integral de Gauss<sup>15</sup> buscamos la abscisa  $z$  correspondiente a un área de  $I = 0,99$  obtenemos :

---

<sup>15</sup>

“Tratado de Topografía” Tomo I, Manuel CHUECA et alt, páginas 23 y 24. Editorial Paraninfo. Madrid, 1996.

$$z_t = \pm 2,575$$

y si recordamos que el área de error de la elipse correspondía a:

$$z_a = \pm 0,628$$

resulta

$$\frac{z_t}{z_a} \simeq 4$$

Multiplicaremos por 4 los semiejes de la elipse standard para conseguir el área de error de probabilidad 99 %:

$$4 \cdot a_{subred\ 1} = 3,27 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 13,08 \cdot 10^{-4} m = 1,3\ mm$$

$$4 \cdot b_{subred\ 1} = 2,31 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 9,24 \cdot 10^{-4} m = 0,9\ mm$$

En la subred 2 sabemos que la superficie de error es un círculo:

$$a_{subred\ 2} = b_{subred\ 2} = 2,2 \cdot 10^{-4} m$$

La elipse y su podaria standard óptimas que denominamos ESO y PSO se confunden en la circunferencia CS standard, y se tiene:

$$\text{Probabilidad CS} = \text{Probabilidad ESO} =$$

$$= \text{Probabilidad PSO} \langle \rangle \sqrt{\frac{2R^2}{R^2+R^2}\sigma^2} = \pm 1\sigma \langle \rangle 0,68 \text{ (probabilidad standard)}$$

Una homotecia de razón adecuada según rutina de la distribución normal practicada a las figuras descritas genera el recinto de incertidumbre con la probabilidad que se precise.

Así en nuestra subred 2:

A la circunferencia standard de radio 0,22 mm se asocia una fiabilidad del 68 %.

A la circunferencia de radio  $(2 \cdot 0,22 \text{ mm}) = 0,44 \text{ mm}$  se asocia una fiabilidad del 95 %.

A la circunferencia de radio  $(2 \cdot 5 \cdot 2,2 \text{ mm}) = 0,55 \text{ mm}$  se asocia una fiabilidad del 99 %.

### 3.2.5.15. ERROR O PERTURBACIÓN db DE LAS SUBREDES 1 Y 2

Siguiendo el mismo método de cálculo que en el epígrafe 3.1.17 obtenemos:

en la subred 1

$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 0,22$ , error relativo de un 22 % sobre las variables:  $dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 0,12 \text{ mm}$   
y  $dy_{V_2 \text{ subred } 1} = 0,63 \text{ mm}$ .

en la subred 2

$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 0,184$ , error relativo de un 18,4 % sobre las variables:  $dx_{V_2 \text{ subred } 2} = 3,12 \text{ mm}$   
y  $dy_{V_2 \text{ subred } 2} = 0,5 \text{ mm}$ .

### 3.2.5.16. RESULTADOS FINALES DE LA RED POR INCREMENTOS PARCIALES

**En cuanto a los resultados de la subred 1:**

El vértice  $V_2$  se ha determinado con una fiabilidad del 99 % según un recinto de error definido por una elipse estándar asociada a una podaria (con semiejes:  $13,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ , y  $9,02 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ) de centro el vértice  $V_2$ .

Existe el riesgo añadido de que cálculos y redondeos den lugar a un error relativo máximo adicional en coordenadas de un 22 % sobre las variables calculadas:  $dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 0,12 \text{ mm}$  y  $dy_{V_2 \text{ subred } 1} = 0,63 \text{ mm}$ .

La solución de la subred 1 será

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 163,0196 + 0,00012 = 163,01972 \simeq 163,020 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2 \text{ subred } 1} = 154,2438 + 0,00063 = 154,2443 \simeq 154,244 \text{ m}$$

Solución igual a la que se obtuvo en la red triangulaterada:

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2 \text{ triangulateración}} = 163,0196 + 0,00012 = 163,01972 \simeq 163,020 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2 \text{ triangulateración}} = 154,2438 + 0,0005 = 154,2442 \simeq 154,244 \text{ m}$$

Y tendrá un recinto de error elipsoidal, con 0,99 de fiabilidad, de semiejes:

$$a_{\text{subred } 1} = \text{semieje mayor}_{\text{subred } 1} \cdot (1 + 0,22) = 1,3 \cdot 1,22 \simeq 1,58 \text{ mm}$$

$$b_{\text{subred } 1} = \text{semieje menor}_{\text{subred } 1} \cdot (1 + 0,22) = 0,9 \cdot 1,22 \simeq 1,1 \text{ mm}$$

### En cuanto a los resultados de la subred 2:

El vértice  $V_2$  se ha determinado con una fiabilidad del 99 % según un recinto de error definido por un círculo (con radio:  $5,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ ) de centro el vértice  $V_2$ .

Existe el riesgo añadido de que cálculos y redondeos den lugar a un error relativo máximo adicional en coordenadas de un 18,4 % sobre las variables calculadas:

$$dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 0,054 \text{ mm} \text{ y } dy_{V_2 \text{ subred } 1} = 0,56 \text{ mm}.$$

La solución de la subred 2 será

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 163,0196 + 0,000054 = 163,01965 \simeq 163,020 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2 \text{ subred } 1} = 154,2438 + 0,00056 = 154,24436 \simeq 154,244 \text{ m}$$

(es el mismo resultado que se obtuvo en la red triangulaterada y en la subred 1)

Y esa solución tendrá un recinto de error circular, con 0,99 de fiabilidad, de radio:

$$r = \text{radio} \cdot (1 + 0,18) = 0,55 \cdot 1,18 = 0,65 \text{ mm}$$



De nuevo, como en el caso de la red triangulaterada, se está en el entorno de la precisión de 1 mm con fiabilidad de 0,99. Lo que confirma el rigor y veracidad del nuevo método de ajuste estudiado, de incrementos de coordenadas, y su equivalencia en fiabilidad y resultados con el de triangulateración.

Tan solo nos falta aplicarlo a observables GNSS, logrando así, entendiendo que en situación pionera, resolver con rigor el inevitable problema de las covarianzas a priori entre parejas de observables de dicho tipo.

## Capítulo 4

# Resolución de la red de observables clásicos junto a observables GNSS por el método de triangulateración

### 4.1. OBJETO

Se trata de agregar a la red de observables clásicos del artículo ya citado<sup>1</sup> distancias reducidas GNSS. Para conseguir éstas últimas se ha partido de las correspondientes distancias inclinadas entre vértices, observadas con equipos GNSS Leica System 1200<sup>2</sup>, y se han reducido al sistema de referencia local practicando una nivelación de precisión clásica complementaria.

Y de nuevo se insiste en que no se considera primordial la precisión absoluta que alcancen los resultados. Antes bien, se estudiará el efecto que provoca en los

---

<sup>1</sup>  
*Cfr.* “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano...”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT.

<sup>2</sup>  
Medición en modo post-proceso estático, con señal de frecuencia L1. Los vectores GNSS, en componentes cartesianas geocéntricas, se han calculado con el programa Geolab. Se han cotejado los resultados obtenidos con otros programas, como son el TTC (Trimble Total Control), Bernesse y DDBASE.

mismos, obtenidos a partir de observables clásicos, la adición de observables GNSS, así como la fiabilidad en su interpretación a posteriori.

## 4.2. EL VECTOR DE OBSERVABLES GNSS

Se han observado todos los lados y diagonales de la red, y para comprobar la normalidad de la distribución de las distancias se les aplica, como es habitual, el Test de Pearson.

Siendo el vértice incógnita V2, son utilizables las distancias GNSS V1-V2, V3-V2 y V4-V2.

Se aceptan los observables

- V1-V2 con un parámetro  $\chi^2 = 0,44$  y  $n = 2$  grados de libertad, nivel de afirmación positivo de 80,55 %.
- V3-V2 con un parámetro  $\chi^2 = 0,46$  y  $n = 2$  grados de libertad, nivel de afirmación positivo de 79,91 %.

Se rechaza el observable

- V4-V2 con un parámetro  $\chi^2 = 2,60$  y  $n = 2$  grados de libertad, nivel de afirmación positivo de 28,05 %.

Queda el vector de observables configurado con 10 observables, de los que 8, son “clásicos” y corresponden al trabajo inicial (5 de azimut y 3 de distancia reducida electrónica) añadiendo 2 distancias reducidas GNSS, obtenidas según se ha explicado.

## 4.3. LAS COORDENADAS APROXIMADAS

Las coordenadas aproximadas<sup>3</sup> que emplearemos son las que siguen:

<sup>3</sup>

*Cfr.* epígrafe 3.3.2 del artículo “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano...”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT..

Vértice	X [m]	Y [m]
V <sub>1</sub>	99,9997	166,59758
V <sub>2</sub>	163,01455	154,2486
V <sub>3</sub>	167,52085	88,01078
V <sub>4</sub>	100	100

#### 4.4. LA MATRIZ DE PESOS

Conocemos el peso y la varianzas de cada una de las formas lineales clásicas de azimut y distancia<sup>4</sup>.

Para obtener el peso de las 2 observaciones GNSS calculamos en primer lugar las desviaciones típicas de las distancias GNSS V1-V2 y V3-V2, a partir de los datos de campo.

periodo de observación	$D_{v1-v2}$ [m]	$D_{v3-v2}$ [m]
1	64,2182	66,3799
2	64,2147	66,3844
3	64,2133	66,3850
4	64,2152	66,3832
5	64,21525	66,3934
6	64,2170	66,3934
7	64,21325	66,3874
8	64,2128	66,3843
media [m]	64,21497	66,3864
$\sigma_0$ [m] = <i>error dist</i> = <i>dl</i>	0,001915	0,004824

Cuadro 4.1: Observaciones de campo GNSS, valor medio y desviación típica

A continuación, y siguiendo el método de triangulateración, calculamos las tablas con factores de conversión y varianzas proporcionales de las 2 ecuaciones de distancia:

---

<sup>4</sup>

*Cfr.* epígrafe 4.4.3.1 del artículo “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano...”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT.

Ecuación Distancia : $D_{v3-v2}$	$\lambda_{ij}^g = \arctg \frac{\rho \cdot d\alpha}{dl}$	$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij}$	$\sigma_o^2 = v\rho l_{ij} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$
$error\ dist = dl = 48 \cdot 10^{-4} m$	$5,0608^g$	$0,9968$	$2,289 \cdot 10^{-5} [m^2]$
Distancia = $l_{ij} = 66,38637 m$			
$error\ angular = d\alpha = 3,66^{cc}$			

Ecuación Distancia : $D_{v1-v2}$	$\lambda_{ij}^g = \arctg \frac{\rho \cdot d\alpha}{dl}$	$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij}$	$\sigma_o^2 = v\rho l_{ij} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$
$error\ dist = dl = 19 \cdot 10^{-4} m$	$8,3513^g$	$0,9914$	$3,548 \cdot 10^{-6} [m^2]$
Distancia = $l_{ij} = 64,2149 m$			
$error\ angular = d\alpha = 2,48^{cc}$			

Los valores del parámetro  $\lambda_{ij}$ :  $5,06^g$  y  $8,3513^g$ , dan lugar a cuadriláteros de ponderación con lados absolutamente diferentes que provocarán correcciones en  $dx$ , y  $dy$  sobre los ejes grandes y pequeñas alternativamente, *cfr.* figura 3.10.

Las varianzas de las 5 formas lineales de azimuth, 3 formas lineales de distancia reducida (obtenidas con estación total) y 2 formas lineales de distancia reducida GNSS son :

Forma lineal	varianza: $\sigma_0^2 [m^2]$
$\theta_{v4-v2}$	$2,37 \cdot 10^{-8}$
$\theta_{v1-v2}$	$2,56 \cdot 10^{-8}$
$\theta_{v3-v2}$	$7,95 \cdot 10^{-8}$
$\theta_{v2-v4}$	$10,61 \cdot 10^{-8}$
$\theta_{v2-v3}$	$8,77 \cdot 10^{-8}$
$D_{v4-v2}$	$4,85 \cdot 10^{-8}$
$D_{v3-v2}$	$6,00 \cdot 10^{-8}$
$D_{v1-v2}$	$4,89 \cdot 10^{-8}$
$D_{v3-v2} GNSS$	$354,82 \cdot 10^{-8}$
$D_{v1-v2} GNSS$	$2289,5 \cdot 10^{-8}$

Cuadro 4.2: Las varianzas de las distancias GNSS son muy superiores a las varianzas del resto de los observables

Seleccionamos de entre todas las varianzas el valor de la mediana, que desde ese momento se convierte en el estimador de la varianza a priori del observable de peso unidad  $\sigma_0^2 = 6,975 \cdot 10^{-8}$ .

Haciendo notar que la mediana =  $6,975 \cdot 10^{-8}$  y la media =  $269,23 \cdot 10^{-8}$ , no tienen valores próximos.

Y los pesos de las 10 formas lineales son:

$$P_{O_{1a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{2,37 \cdot 10^{-8}} = 2,94$$

$$P_{O_{2a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{2,56 \cdot 10^{-8}} = 2,72$$

$$P_{O_{3a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{7,95 \cdot 10^{-8}} = 0,88$$

$$P_{O_{4a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{10,61 \cdot 10^{-8}} = 0,66$$

$$P_{O_{5a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{8,77 \cdot 10^{-8}} = 0,80$$

$$P_{O_{1d}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{4,85 \cdot 10^{-8}} = 1,44$$

$$P_{O_{2d}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{6,00 \cdot 10^{-8}} = 1,16$$

$$P_{O_{3d}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{4,89 \cdot 10^{-8}} = 1,43$$

$$P_{O_{1d GNSS V3V2}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{354,82 \cdot 10^{-8}} = 1,96 \cdot 10^{-2}$$

$$P_{O_{2d GNSS V1V2}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\partial T_i}^2} = \frac{6,975 \cdot 10^{-8}}{2289,5 \cdot 10^{-8}} = 3,05 \cdot 10^{-3}$$

El resultado es que la matriz de varianzas a priori y la de pesos no son homogéneas. Y eso sabemos que no es bueno para la interpretación de resultados. Así, lo que antecede conduce a una sencilla reflexión.

Consideremos las desviaciones típicas de los dos observables GNSS y la desviación típica media de los observables clásicos:

$$\hat{\sigma}_{1d\text{GNSS } V3V2} = \sqrt{354,82 \cdot 10^{-8}} = 1,88 \cdot 10^{-3} m \cong 2 \text{ mm.}$$

$$\hat{\sigma}_{2d\text{GNSS } V1V2} = \sqrt{2289,5 \cdot 10^{-8}} = 4,78 \cdot 10^{-3} m \cong 5 \text{ mm.}$$

$$\hat{\sigma}_{OT\alpha,d}^2 = \left(\frac{48,10^{-8}}{8}\right)^2 = 6 \cdot 10^{-8} m^2$$

$$\hat{\sigma}_{OT\alpha,d} = (6 \cdot 10^{-8})^{1/2} = 2,45 \cdot 10^{-4} m \cong 0,25 \text{ mm}$$

Podemos afirmar que los observables clásicos son notablemente más precisos que los GNSS. Y en nuestro caso, la relación de desviaciones típicas a priori puede expresarse como

$$\frac{2}{0,25} \leq \frac{\hat{\sigma}_{OT\text{GNSS}}}{\sigma_{OT\alpha,d}} \leq \frac{5}{0,25}$$

$$8 \leq \frac{\hat{\sigma}_{OT\text{GNSS}}}{\sigma_{OT\alpha,d}} \leq 20$$

para conseguir una triangulación mixta correcta (“estética”) es preciso diseñar la red reiterando más los observables GNSS que los clásicos. Y ello teniendo presente que la práctica indicada tiene límites bien conocidos: aumentar el número de observaciones no implica forzosamente que la varianza del observable GNSS disminuya.

## 4.5. ECUACIONES DE DISTANCIA GNSS FACTORIZADAS

Las 2 ecuaciones factorizadas de distancia GNSS las añadiremos a las 8 restantes<sup>5</sup> para formar la matriz de diseño A y completar el vector K.

Ecuaciones	variable $dx_{v2}$	variable $dy_{v2}$	$d\theta_{v2}$	$K$ [m]
Distancia $D_{v3-v2\text{GNSS}}$	$-6,77 \cdot 10^{-2}$	0,9945	0	$-4,52 \cdot 10^{-3}$
Distancia $D_{v1-v2\text{GNSS}}$	0,9729	-0,1906	0	$1,43 \cdot 10^{-3}$

<sup>5</sup>

Cfr. epígrafes 5.1 y 5.2 del artículo “Progreso en la práctica del ajuste...”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT.

## 4.6. MATRIZ DE DISEÑO A, VECTOR K DE TÉRMI- NOS INDEPENDIENTES Y MATRIZ DE PESOS DE LA RED CON DESCENTRADO

Las matrices de diseño que resultan de los cálculos previos son las que siguen:

### MATRIZ A

$A(1, 1) = 0.4176$   
 $A(1, 2) = -0.4851$   
 $A(1, 3) = 0$   
 $A(2, 1) = -0.1256$   
 $A(2, 2) = -0.6409$   
 $A(2, 3) = 0$   
 $A(3, 1) = 0.7281$   
 $A(3, 2) = 4.95E-002$   
 $A(3, 3) = 0$   
 $A(4, 1) = 0.4176$   
 $A(4, 2) = -0.4851$   
 $A(4, 3) = 0.1385$   
 $A(5, 1) = 0.7281$   
 $A(5, 2) = 4.95E-002$   
 $A(5, 3) = 0.1043$   
 $A(6, 1) = 0.5822$   
 $A(6, 2) = 0.5012$   
 $A(6, 3) = 0$   
 $A(7, 1) = -4.64E-002$   
 $A(7, 2) = .6820$   
 $A(7, 3) = 0$   
 $A(8, 1) = 0.7431$   
 $A(8, 2) = -0.1456$   
 $A(8, 3) = 0$   
 $A(9, 1) = -6.77E-002$   
 $A(9, 2) = 0.9945$   
 $A(9, 3) = 0$   
 $A(10, 1) = 0.9729$   
 $A(10, 2) = -0.1906$   
 $A(10, 3) = 0$



**VECTOR K [m]**

$$k(1) = -4.21E-006$$

$$k(2) = -4.42E-004$$

$$k(3) = 2.25E-004$$

$$k(4) = 1.72E-004$$

$$k(5) = -1.29E-004$$

$$k(6) = 7.68E-004$$

$$k(7) = 2.05E-004$$

$$k(8) = 6.05E-004$$

$$k(9) = -4.52E-003$$

$$k(10) = 1.43E-003$$

**MATRIZ DIAGONAL P [adimensional]**

$$\text{Peso del observable 1 } 2.94$$

$$\text{Peso del observable 2 } 2.72$$

$$\text{Peso del observable 3 } 0.88$$

$$\text{Peso del observable 4 } 0.66$$

$$\text{Peso del observable 5 } 0.8$$

$$\text{Peso del observable 6 } 1.44$$

$$\text{Peso del observable 7 } 1.16$$

$$\text{Peso del observable 8 } 1.43$$

$$\text{Peso del observable 9 } 1.96E-002$$

$$\text{Peso del observable 10 } 3.05E-003$$

### 4.6.1. RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED TRIANGULATED-RADA CON DESCENTRADO

El resultado se expresa según:

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2}$ ,

- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2}$

- y por último el diferencial del error debido al descentrado de la línea de ceros del limbo:

$d\theta_{v2}$ , en el vértice V2.

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**

diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 6.459E-004$

diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = 4.433E-004$

diferencial del descentrado  $\theta$ :  $d\theta_{V2} = -1.925E-003$

**RESIDUOS [m]**

5.89E-005

7.675E-005

2.673E-004

-3.838E-004

4.205E-004

-1.697E-004

6.737E-005

-1.895E-004

4.9171E-003

-8.860E-004

**Varianza de la medida de peso ud. = 1.28E-007 m<sup>2</sup>**

**Desv. típica de la medida de peso ud. = 3.59E-004 m**

A continuación los listados parámetros y matrices de criterio de la red mixta en estudio, que más tarde interpretaremos:

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

**Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.**

+0.41911511 +0.00540705 -1.93060819  
 +0.00540705 +0.35169784 +0.63697887  
 -1.93060819 +0.63697887 +56.94877144

**Matriz cofactor de los RESIDUOS**

+0.18647512 -0.08624255 -0.11719073 +0.00079709 -0.00087324 -0.01599365 +0.12281447 -0.15262193 +0.17909616 -0.19981512  
 -0.08624255 +0.21570398 +0.05204202 -0.06328543 +0.06933030 +0.14597748 +0.15158478 +0.00877496 +0.22104043 +0.01149447  
 -0.11719073 +0.05204202 +0.91292680 +0.07312840 -0.08011347 -0.18851722 -0.00038618 -0.22385362 -0.00055122 -0.29307980  
 +0.00079709 -0.06328543 +0.07312840 +0.57800107 -0.63321043 +0.09546370 +0.05024050 +0.05892007 +0.07325755 +0.07714290  
 -0.00087324 +0.06933030 -0.08011347 -0.63321043 +0.69369325 -0.10458218 -0.05503936 -0.06454798 -0.08025495 -0.08451142  
 -0.01599365 +0.14597748 -0.18851722 +0.09546370 -0.10458218 +0.46087996 -0.11091597 -0.15721337 -0.16172928 -0.20583550  
 +0.12281447 +0.15158478 -0.00038618 +0.05024050 -0.05503936 -0.11091597 +0.69792572 +0.04659754 -0.23935611 +0.06100135  
 -0.15262193 +0.00877496 -0.22385362 +0.05892007 -0.06454798 -0.15721337 +0.04659754 +0.46158060 +0.06796117 -0.31123263  
 +0.17909616 +0.22104043 -0.00055122 +0.07325755 -0.08025495 -0.16172928 -0.23935611 +0.06796117 +50.67137551 +0.08896872  
 -0.19981512 +0.01149447 -0.29307980 +0.07714290 -0.08451142 -0.20583550 +0.06100135 -0.31123263 +0.08896872 +327.46137428

**Matriz cofactor de los observables corregidos**

+0.15366093 +0.08624254 +0.11719072 -0.00079710 +0.00087323 +0.01599365 -0.12281448 +0.15262192 -0.17909616 +0.19981511  
 +0.08624254 +0.15194307 -0.05204202 +0.06328542 -0.06933031 -0.14597749 -0.15158478 -0.00877497 -0.22104043 -0.01149448  
 +0.11719072 -0.05204202 +0.22343682 -0.07312841 +0.08011346 +0.18851722 +0.00038617 +0.22385362 +0.00055121 +0.29307980  
 -0.00079710 +0.06328542 -0.07312841 +0.93715044 +0.63321042 -0.09546371 -0.05024050 -0.05892007 -0.07325755 -0.07714290  
 +0.00087323 -0.06933031 +0.08011346 +0.63321042 +0.55630674 +0.10458218 +0.05503935 +0.06454798 +0.08025495 +0.08451141  
 +0.01599365 -0.14597749 +0.18851722 -0.09546371 +0.10458218 +0.23356448 +0.11091596 +0.15721336 +0.16172927 +0.20583550  
 0 -0.12281448 -0.15158478 +0.00038617 -0.05024050 +0.05503935 +0.11091596 +0.16414323 -0.04659755 +0.23935611 -0.06100136  
 +0.15262192 -0.00877497 +0.22385362 -0.05892007 +0.06454798 +0.15721336 -0.04659755 +0.23772009 -0.06796118 +0.31123263  
 -0.17909616 -0.22104043 +0.00055121 -0.07325755 +0.08025494 +0.16172927 +0.23935611 -0.06796118 +0.34903265 -0.08896872  
 +0.19981511 -0.01149448 +0.29307980 -0.07714290 +0.08451141 +0.20583550 -0.06100136 +0.31123263 -0.08896872 +0.40747817

**Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS**

+0.00000005 +0.00000000 -0.00000025  
 +0.00000000 +0.00000004 +0.00000008  
 -0.00000025 +0.00000008 +0.00000734

**Matriz varianza-cov a posteriori de los residuos**

+0.00000002 -0.00000001 -0.00000002 +0.00000000 -0.00000000 -0.00000000 +0.00000001 -0.00000002 +0.00000002 -0.00000003  
 -0.00000001 +0.00000002 +0.00000000 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000000 +0.00000002 +0.00000000  
 -0.00000002 +0.00000000 +0.00000011 +0.00000000 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000000 -0.00000003 -0.00000000 -0.00000004  
 +0.00000000 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000007 -0.00000008 +0.00000001 +0.00000000 +0.00000000 +0.00000000 +0.00000000  
 -0.00000000 +0.00000000 -0.00000001 -0.00000008 +0.00000008 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001  
 -0.00000000 +0.00000001 -0.00000002 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000005 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000002 -0.00000003  
 +0.00000001 +0.00000001 -0.00000000 +0.00000000 -0.00000001 -0.00000001 +0.00000008 +0.00000000 -0.00000003 +0.00000000  
 -0.00000002 +0.00000000 -0.00000003 +0.00000000 -0.00000001 -0.00000002 +0.00000000 +0.00000005 +0.00000000 -0.00000004  
 +0.00000002 +0.00000002 -0.00000000 +0.00000000 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000003 +0.00000000 +0.00000653 +0.00000001  
 -0.00000003 +0.00000000 -0.00000004 +0.00000000 -0.00000001 -0.00000003 +0.00000000 -0.00000004 +0.00000001 +0.00004220

**Matriz varianza-cov a posteriori de los observables corregidos**

+0.00000001 +0.00000001 +0.00000001 -0.00000000 +0.00000000 +0.00000000 -0.00000002 +0.00000001 -0.00000002 +0.00000002  
 +0.00000001 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000000 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000002 -0.00000000 -0.00000003 -0.00000000  
 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000001 +0.00000002 +0.00000000 +0.00000002 +0.00000000 +0.00000003  
 -0.00000000 +0.00000000 -0.00000001 +0.00000012 +0.00000008 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001  
 +0.00000000 -0.00000001 +0.00000001 +0.00000008 +0.00000007 +0.00000001 +0.00000000 +0.00000000 +0.00000000 +0.00000001  
 +0.00000001  
 +0.00000000 -0.00000002 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000001 +0.00000003 +0.00000001 +0.00000002 +0.00000002 +0.00000002  
 -0.00000002 -0.00000002 +0.00000000 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000001 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000003 -0.00000001  
 +0.00000001 -0.00000000 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000003 -0.00000001 +0.00000004  
 -0.00000002 -0.00000003 +0.00000000 -0.00000001 +0.00000001 +0.00000002 +0.00000003 -0.00000001 +0.00000004 -0.00000001  
 +0.00000002 -0.00000000 +0.00000003 -0.00000001 +0.00000001 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000004 -0.00000001 +0.00000005

Listados de comprobación de la fiabilidad interna de la red:

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de REDUNDANCIAS**

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

- 1 +2.94 +0.18647512 +0.54823686
- 2 +2.72 +0.21570398 +0.58671483
- 3 +0.88 +0.91292680 +0.80337559
- 4 +0.66 +0.57800107 +0.38148070
- 5 +0.8 +0.69369325 +0.55495460
- 6 +1.44 +0.46087996 +0.66366714
- 7 +1.16 +0.69792572 +0.80959384
- 8 +1.43 +0.46158060 +0.66006026
- 9 +0.0196 +50.67137551 +0.99315896
- 10 +0.00305 +327.46137428 +0.99875719

Suma de Redundancias = +7

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)**

Ob. Residuo ( $R_i$ ) Err.cuad( $\sigma_i$ ) Var.de Baarda ( $w_i$ ).

1 +0.00005890 +0.00015503 +0.37997818  
 2 +0.00007674 +0.00016673 +0.46029871  
 3 +0.00026726 +0.00034302 +0.77913091  
 4 -0.00038386 +0.00027294 -1.40637382  
 5 +0.00042052 +0.00029901 +1.40637381  
 6 -0.00016974 +0.00024372 -0.69643543  
 7 +0.00006736 +0.00029992 +0.22461335  
 8 -0.00018954 +0.00024391 -0.77708806  
 9 +0.00491714 +0.00255557 +1.92408598  
 10 -0.00088605 +0.00649661 -0.13638636

**Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red**

Valor de para el nivel de significación  $\alpha$ , y potencia  $\beta$  del test ,  $\delta= 4.12$

Ob.  $(\sigma_i)$   $(\sqrt{r_i})$   $(\nabla_{O_i})$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$

1 +0.00014073 +0.74043018 +0.00078307 +5.56433283  
 2 +0.00013994 +0.76597312 +0.00075271 +5.37877876  
 3 +0.00016970 +0.89631221 +0.00078004 +4.59661256  
 4 +0.00034754 +0.61764124 +0.00231831 +6.67053897  
 5 +0.00026777 +0.74495275 +0.00148092 +5.53055208  
 6 +0.00017350 +0.81465768 +0.00087747 +5.05733888  
 7 +0.00014545 +0.89977432 +0.00066601 +4.57892592  
 8 +0.00017504 +0.81244092 +0.00088765 +5.07113792  
 9 +0.00021209 +0.99657360 +0.00087685 +4.13416526  
 10 +0.00022917 +0.99937840 +0.00094477 +4.12256257

Listados de comprobación de la fiabilidad externa de la red:

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

O. $\rightarrow\sqrt{1-r_i}$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1-r_i}$

1 +0.67213327 +3.73997325

2 +0.64287258 +3.45786942

3 +0.44342351 +2.03824608

4 +0.78645997 +5.24611191

5 +0.66711722 +3.68952658

6 +0.57994211 +2.93296379

7 +0.43635553 +1.99803969

8 +0.58304351 +2.95669407

9 +0.08271057 +0.34193920

10 +0.03525348 +0.14533471

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

**Vectores de fiabilidad externa:**

Observable ... ( 1 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +0.00039690  
 Variable o Parámetro 2... -0.00038758  
 Variable o Parámetro 3... -0.00256750  
 Observable ... ( 2 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -0.00011487  
 Variable o Parámetro 2... -0.00046288  
 Variable o Parámetro 3... -0.00033937  
 Observable ... ( 3 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +0.00020965  
 Variable o Parámetro 2... +0.00001465  
 Variable o Parámetro 3... -0.00094327  
 Observable ... ( 4 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -0.00014534  
 Variable o Parámetro 2... -0.00012260  
 Variable o Parámetro 3... +0.01036204  
 Observable ... ( 5 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +0.00012328  
 Variable o Parámetro 2... +0.00010399  
 Variable o Parámetro 3... +0.00540905  
 Observable ... ( 6 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +0.00031174  
 Variable o Parámetro 2... +0.00022670  
 Variable o Parámetro 3... -0.00101684  
 Observable ... ( 7 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -0.00001218  
 Variable o Parámetro 2... +0.00018511  
 Variable o Parámetro 3... +0.00040482  
 Observable ... ( 8 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +0.00039433  
 Variable o Parámetro 2... -0.00005990  
 Variable o Parámetro 3... -0.00193878  
 Observable ... ( 9 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -0.00000040  
 Variable o Parámetro 2... +0.00000600  
 Variable o Parámetro 3... +0.00001313  
 Observable ... ( 10 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +0.00000117  
 Variable o Parámetro 2... -0.00000018  
 Variable o Parámetro 3... -0.00000576

## 4.7. MATRIZ DE DISEÑO $\tilde{A}$ , VECTOR $K$ DE TÉRMI- NOS INDEPENDIENTES Y MATRIZ DE PESOS DE LA RED SIN DESCENTRADO

La matriz  $A$  de diseño que resulta de eliminar el error debido al descentrado de la línea de ceros del limbo:  $d\theta_{v2}$ , en el vértice  $V2$ , es la que sigue:

**MATRIZ A**

A( 1, 1) = 0.4176  
A( 1, 2) = -0.4851  
A( 2, 1) = -0.1256  
A( 2, 2) = -0.6409  
A( 3, 1) = 0.7281  
A( 3, 2) = 4.95E-002  
A( 4, 1) = -0.2986  
A( 4, 2) = -0.4214  
A( 5, 1) = 0.2384  
A( 5, 2) = 0.3365  
A( 6, 1) = 0.5822  
A( 6, 2) = 0.5012  
A( 7, 1) = -4.64E-002  
A( 7, 2) = 0.6820  
A( 8, 1) = 0.7431  
A( 8, 2) = -0.1456  
A( 9, 1) = -6.77E-002  
A( 9, 2) = 0.9945  
A( 10, 1) = 0.9729  
A( 10, 2) = -0.1906

El vector  $K$  y la matriz de los pesos, como debe ser, son las mismas que en la red con descentrado.

#### 4.7.1. RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED TRIANGULATEDADA SIN DESCENTRADO

El resultado se expresa según:

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2}$ ,
- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2}$

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**

diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 6.2491E-004$

diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = 3.997E-004$

**RESIDUOS [m]**

7.129E-005

1.074E-004

2.498E-004

-5.27E-004

4.125E-004

-2.039E-004

3.8585E-005

-1.988E-004

4.875E-003

-8.982E-004

**Varianza de la medida de peso ud. = 1.2587E-007 m<sup>2</sup>**

**Desv. típica de la medida de peso ud. = 3.547E-004 m**

A continuación los listados parámetros y matrices de criterio de la red mixta en estudio, que interpretaremos y analizaremos en los epígrafes posteriores.

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

**Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.**

+0.41504605 -0.00407930

-0.00407930 +0.33672652

**Matriz cofactor de los RESIDUOS**

+0.18686435 -0.08376232 -0.11946751 -0.01720668 +0.01374715 -0.01933805 +0.12069781 -0.15429821 +0.17600973 -0.20200986  
 -0.08376232 +0.22344493 +0.04670927 -0.10551088 +0.08425145 +0.13673403 +0.14453413 +0.00544781 +0.21075935 +0.00713813  
 -0.11946751 +0.04670927 +0.91580441 +0.09594740 -0.07660447 -0.18268574 +0.00467056 -0.22241667 +0.00682244 -0.29119829  
 -0.01720668 -0.10551088 +0.09594740 +1.41937658 +0.07647406 -0.14166089 +0.09027200 +0.07033423 +0.13163087 +0.09208842  
 +0.01374715 +0.08425145 -0.07660447 +0.07647406 +1.18893723 -0.11311054 -0.07208569 -0.05615134 -0.10511234 -0.07351880  
 -0.01933805 +0.13673403 -0.18268574 +0.14166089 -0.11311054 +0.47155622 -0.10236238 -0.15381651 -0.14925661 -0.20138785  
 +0.12069781 +0.14453413 +0.00467056 +0.09027200 -0.07208569 -0.10236238 +0.70429762 +0.04984232 -0.23006479 +0.06524981  
 -0.15429821 +0.00544781 -0.22241667 +0.07033423 -0.05615134 -0.15381651 +0.04984232 +0.46209215 +0.07269268 -0.31056276  
 +0.17600973 +0.21075935 +0.00682244 +0.13163087 -0.10511234 -0.14925661 -0.23006479 +0.07269268 +0.09516379  
 -0.20200986 +0.00713813 -0.29119829 +0.09208842 -0.07351880 -0.20138785 +0.06524981 -0.31056276 +0.09516379 +327.46225147

**Matriz cofactor de los observables corregidos**

+0.15327169 +0.08376231 +0.11946750 +0.01720667 -0.01374715 +0.01933804 -0.12069781 +0.15429820 -0.17600973 +0.20200985  
 +0.08376231 +0.14420212 -0.04670927 +0.10551088 -0.08425146 -0.13673403 -0.14453414 -0.00544781 -0.21075936 -0.00713814  
 +0.11946750 -0.04670927 +0.22055922 -0.09594740 +0.07660447 +0.18268573 -0.00467056 +0.22241667 -0.00682245 +0.29119828  
 +0.01720667 +0.10551088 -0.09594740 +0.09577493 -0.07647406 -0.14166089 -0.09027201 -0.07033424 -0.13163088 -0.09208842  
 -0.01374715 -0.08425146 +0.07660447 -0.07647406 +0.06106276 +0.11311054 +0.07208568 +0.05615134 +0.10511234 +0.07351879  
 +0.01933804 -0.13673403 +0.18268573 -0.14166089 +0.11311054 +0.22288821 +0.10236237 +0.15381651 +0.14925661 +0.20138784  
 -0.12069781 -0.14453414 -0.00467056 -0.09027201 +0.07208568 +0.10236237 +0.15777134 -0.04984232 +0.23006479 -0.06524982  
 +0.15429820 -0.00544781 +0.22241667 -0.07033424 +0.05615134 +0.15381651 -0.04984232 +0.23720854 -0.07269268 +0.31056276  
 -0.17600973 -0.21075936 -0.00682245 -0.13163088 +0.10511234 +0.14925661 +0.23006479 -0.07269268 +0.33548429 -0.09516379  
 +0.20200985 -0.00713814 +0.29119828 -0.09208842 +0.07351879 +0.20138784 -0.06524982 +0.31056276 -0.09516379 +0.40660098



**Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS**

+0.00000005 -0.00000000  
 -0.00000000 +0.00000004

**Matriz varianza-cov a posteriori de los residuos**

+0.00000002 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000000 +0.00000000 -0.00000000 +0.00000001 -0.00000002 +0.00000002 -0.00000003  
 -0.00000001 +0.00000002 +0.00000000 -0.00000001 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000000 +0.00000002 +0.00000000  
 -0.00000002 +0.00000000 +0.00000011 +0.00000001 -0.00000001 -0.00000002 +0.00000000 -0.00000003 +0.00000000 -0.00000004  
 -0.00000000 -0.00000001 +0.00000001 +0.00000017 +0.00000000 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000000 +0.00000001 +0.00000001  
 +0.00000000 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000014 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000001  
 -0.00000000 +0.00000001 -0.00000002 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000005 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000002 -0.00000003  
 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000000 +0.00000001 -0.00000001 -0.00000001 +0.00000008 +0.00000000 -0.00000003 +0.00000000  
 -0.00000002 +0.00000000 -0.00000003 +0.00000000 -0.00000001 -0.00000002 +0.00000000 +0.00000005 +0.00000000 -0.00000004  
 +0.00000002 +0.00000002 +0.00000000 +0.00000001 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000003 +0.00000000 +0.00000638 +0.00000001  
 -0.00000003 +0.00000000 -0.00000004 +0.00000001 -0.00000001 -0.00000003 +0.00000000 -0.00000004 +0.00000001 +0.00004121

**Matriz varianza-cov a posteriori de los observables corregidos**

+0.00000001 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000000 -0.00000000 +0.00000000 -0.00000002 +0.00000001 -0.00000002 +0.00000002  
 +0.00000001 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000001 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000002 -0.00000000 -0.00000003 -0.00000000  
 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000002 -0.00000000 +0.00000002 -0.00000000 +0.00000003  
 +0.00000000 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000001 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000001 -0.00000001 -0.00000002 -0.00000001  
 -0.00000000 -0.00000001 +0.00000000 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000001 +0.00000000 +0.00000000 +0.00000001 +0.00000000  
 +0.00000000 -0.00000002 +0.00000002 -0.00000002 +0.00000001 +0.00000002 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000002  
 -0.00000002 -0.00000002 -0.00000000 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000001 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000002 -0.00000001  
 +0.00000001 -0.00000000 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000001 -0.00000001 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000003  
 -0.00000002 -0.00000003 -0.00000000 -0.00000002 +0.00000001 +0.00000001 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000004 -0.00000001  
 +0.00000002 -0.00000000 +0.00000003 -0.00000001 +0.00000000 +0.00000002 -0.00000001 +0.00000003 -0.00000001 +0.00000005

Listados de comprobación de la fiabilidad interna de la red:

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de REDUNDANCIAS**

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

- 1 +2.94 +0.18686435 +0.54938121
- 2 +2.72 +0.22344493 +0.60777021
- 3 +0.88 +0.91580441 +0.80590788
- 4 +0.66 +1.41937658 +0.93678854
- 5 +0.8 +1.18893723 +0.95114978
- 6 +1.44 +0.47155622 +0.67904096
- 7 +1.16 +0.70429762 +0.81698523
- 8 +1.43 +0.46209215 +0.66079177
- 9 +0.0196 +50.68492386 +0.99342450
- 10 +0.00305 +327.46225147 +0.99875986

Suma de Redundancias = +8

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)**

Ob. Residuo ( $R_i$ ) Err.cuad( $\sigma_i$ ) Var.de Baarda ( $w_i$ ).

1	+0.00007128	+0.00015336	+0.46480606
2	+0.00010736	+0.00016770	+0.64016368
3	+0.00024977	+0.00033952	+0.73565127
4	-0.00052702	+0.00042269	-1.24681795
5	+0.00041246	+0.00038685	+1.06619289
6	-0.00020387	+0.00024363	-0.83677042
7	+0.00003858	+0.00029774	+0.12957863
8	-0.00019883	+0.00024117	-0.82440853
9	+0.00487516	+0.00252587	+1.93008772
10	-0.00089821	+0.00642027	-0.13990239

**Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red**

Valor de para el nivel de significación  $\alpha$ , y potencia  $\beta$  del test ,  $\delta= 4.12$

Ob.  $(\sigma_i)$   $(\sqrt{r_i})$   $(\nabla_{O_i})$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$

1	+0.00013890	+0.74120254	+0.00077208	+5.55853460
2	+0.00013472	+0.77959618	+0.00071201	+5.28478725
3	+0.00016662	+0.89772372	+0.00076469	+4.58938523
4	+0.00010979	+0.96787837	+0.00046738	+4.25673319
5	+0.00008767	+0.97526908	+0.00037036	+4.22447513
6	+0.00016750	+0.82403941	+0.00083746	+4.99976082
7	+0.00014092	+0.90387235	+0.00064235	+4.55816572
8	+0.00017279	+0.81289099	+0.00087579	+5.06833019
9	+0.00020549	+0.99670683	+0.00084945	+4.13361268
10	+0.00022623	+0.99937974	+0.00093266	+4.12255705

Listados de comprobación de la fiabilidad externa de la red:

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

O. $\rightarrow\sqrt{1-r_i}$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1-r_i}$

1 +0.67128145 +3.73134117

2 +0.62628251 +3.30976983

3 +0.44055886 +2.02189436

4 +0.25141888 +1.07022311

5 +0.22102084 +0.93369705

6 +0.56653246 +2.83252683

7 +0.42780224 +1.94999352

8 +0.58241585 +2.95187584

9 +0.08108940 +0.33519221

10 +0.03521552 +0.14517799

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red****Vectores de fiabilidad externa:**

Observable ... ( 1 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... +0.00039792  
Variable o Parámetro 2... -0.00037465  
Observable ... ( 2 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... -0.00009589  
Variable o Parámetro 2... -0.00041696  
Observable ... ( 3 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... +0.00020322  
Variable o Parámetro 2... +0.00000921  
Observable ... ( 4 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... -0.00003770  
Variable o Parámetro 2... -0.00004340  
Observable ... ( 5 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... +0.00002891  
Variable o Parámetro 2... +0.00003328  
Observable ... ( 6 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... +0.00028893  
Variable o Parámetro 2... +0.00020066  
Observable ... ( 7 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... -0.00001642  
Variable o Parámetro 2... +0.00017125  
Observable ... ( 8 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... +0.00038700  
Variable o Parámetro 2... -0.00006520  
Observable ... ( 9 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... -0.00000054  
Variable o Parámetro 2... +0.00000558  
Observable ... ( 10 )———[*m*]  
Variable o Parámetro 1... +0.00000115  
Variable o Parámetro 2... -0.00000019

## 4.8. ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS Y MATRICES DE CRITERIO DE LA TRIANGULATERACIÓN CLÁSICA CON OBSERVABLES ADICIONALES GNSS

En los epígrafes 4.6.1 y 4.7.1 se han reproducido los listados correspondientes al ajuste de la red con y sin descentrado. Puede apreciarse que los resultados son

perfectamente comparables. En las redes con y sin descentrado, las correcciones a las coordenadas aproximadas a priori en la expresión  $X = X_a + x$ , objetivo fundamental del ajuste, son:

- Con descentrado

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 6,46 \cdot 10^{-4}m. \langle \rangle 0,65 \text{ mm.}$ ,

- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = 4,43 \cdot 10^{-4}m. \langle \rangle 0,44 \text{ mm.}$

- Sin descentrado

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 6,25 \cdot 10^{-4}m. \langle \rangle 0,63 \text{ mm,}$

- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = 4,00 \cdot 10^{-4}m. \langle \rangle 0,40 \text{ mm}$

coincidiendo la cifra de las décimas de mm., que como vamos a ver más adelante, no es significativa.

Sucede lo mismo, aun cuando en menor cuantía relativa, con el resto de los componentes, más secundarios, del algoritmo. Por ejemplo con el vector de observables compensado  $C = O_T + R$ , según puede constatarse, y con los resultados intermedios y finales de ambos listados.

Por consiguiente y para simplificar, se utiliza en adelante solamente uno de ellos. Siendo indiferente la elección se inclina por el listado con descentrado. Por supuesto se tendrá siempre presente el ajuste “clásico” de triangulateración inicial<sup>6</sup>, sin observables GNSS. Así, su resultado en las correcciones consignadas es:

- Triangulateración clásica

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 6,37 \cdot 10^{-4}m. \langle \rangle 0,64 \text{ mm,}$

- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = 4,72 \cdot 10^{-4}m. \langle \rangle 0,47 \text{ mm}$

La introducción de los dos observables GNSS con pesos más de un centenar de veces inferiores al promedio de los observables clásicos lógicamente y así lo hemos verificado, apenas influye en los resultados del ajuste, la ponderación provoca que que suceda así.

---

6

*Cfr.* “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local: Método de Triangulateración”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT.

Sin embargo, con la interpretación de los resultados cambia de manera notable, según se expone en detalle a continuación:

- Desviación típica y varianza del observable de peso unidad. F-Test de Snedecor

En el ajuste triangulaterado clásico, los datos y resultados son los siguientes

A priori

$$\sigma_o = 2,3 \cdot 10^{-4}m$$

$$\sigma_o^2 = 5,3 \cdot 10^{-8}m^2$$

A posteriori

$$\hat{\sigma}_o = 2,6 \cdot 10^{-4}m$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = 6,7 \cdot 10^{-8}m^2$$

obteniendo

$$F = \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} = \frac{6,7 \cdot 10^{-8}}{5,3 \cdot 10^{-8}} = 1,26$$

Un valor excelente.

En el caso que nos ocupa, con observables clásicos y GNSS:

A priori

$$\sigma_o = 2,64 \cdot 10^{-4}m$$

$$\sigma_o^2 = 6,975 \cdot 10^{-8}m^2$$

A posteriori

$$\hat{\sigma}_o = 3,6 \cdot 10^{-4}m$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = 1,29 \cdot 10^{-7} m^2$$

obteniendo

$$F = \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} = \frac{1,29 \cdot 10^{-7}}{6,975 \cdot 10^{-8}} = 1,85$$

El deterioro en calidad de interpretación es evidente, pasamos de una  $F = 1,26$  a otra  $F = 1,85$ . Y todo como resultado del desequilibrio, o falta de homogeneidad, de pesos en el vector de observables, introduciendo dos de calidad muy inferior al resto, como son los observables GNSS.

Siendo predecible lo que antecede, comienza a hacerse evidente la notable sensibilidad del método de triangulación.

- Las matrices varianza covarianza de parámetros, residuos y observables:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{RR}$  y  $\sigma_{CC}$  permanecen aproximadamente constantes.

Llama la atención sobre el hecho de que las matrices  $\sigma_{RR}$  y  $\sigma_{CC}$  resultan completas y sus diagonales principales distintas. Con todo ello se incumple la condición a priori de Gauss Marcov necesaria para practicar sucesivas iteraciones directamente a partir de aquellas, obligando a artificios de los que es lícito desconfiar vehementemente.

A los efectos que nos ocupan la información a obtener de las matrices citadas es mas bien escasa. Por ello es imperativo completarla con otros algoritmos y criterios que siguen.

En cualquier caso y elemento a elemento, las varianzas y covarianzas de la matriz  $\sigma_{xx}$  triangulaterada clásica son inferiores, y por tanto, mejores que sus homólogas en los ajustes agregando observables GNSS. Véanse a continuación ambas matrices, caso red mixta con descentrado.

Matriz  $\sigma_{xx}$  triangulaterada clásica

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-8} & 0 & 1,6 \cdot 10^{-8} \\ 0 & 3 \cdot 10^{-8} & 5 \cdot 10^{-8} \\ 1,6 \cdot 10^{-8} & 5 \cdot 10^{-8} & 4,78 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Matriz  $\sigma_{xx}$  triangulaterada mixta con observables GNSS y descentrado

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-8} & 0 & -2,5 \cdot 10^{-8} \\ 0 & 4 \cdot 10^{-8} & 8 \cdot 10^{-8} \\ -2,5 \cdot 10^{-8} & 8 \cdot 10^{-8} & 7,34 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

La precisión se ha deteriorado. Veremos en qué cuantía.

## 4.9. FIABILIDAD INTERNA Y FIABILIDAD EXTERNA DE LA TRIANGULATERACIÓN CLÁSICA CON OB- SERVABLES ADICIONALES GNSS

El cuadro de redundancias de la red clásica es el siguiente:

### Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red

#### Comprobaciones de REDUNDANCIAS

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

1	+002.3409	+000.23330960	+000.54615445
2	+002.1025	+000.27897220	+000.58653906
3	+000.7099	+001.12384648	+000.79781862
4	+000.5318	+000.71445506	+000.37994720
5	+000.6435	+000.86040992	+000.55367378
6	+001.0609	+000.63994408	+000.67891668
7	+000.9409	+000.85194252	+000.80159272
8	+001.1449	+000.57241458	+000.65535745

Suma de Redundancias = +005

Las redundancias son homogéneas y próximas a  $\frac{5}{8} = 0,625$ . Todas están en torno a la redundancia media 0,625.

El cuadro de redundancias de la red mixta es:



**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de REDUNDANCIAS**

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

1	+2.94	+0.18647512	+0.54823686
2	+2.72	+0.21570398	+0.58671483
3	+0.88	+0.91292680	+0.80337559
4	+0.66	+0.57800107	+0.38148070
5	+0.8	+0.69369325	+0.55495460
6	+1.44	+0.46087996	+0.66366714
7	+1.16	+0.69792572	+0.80959384
8	+1.43	+0.46158060	+0.66006026
9	+0.0196	+50.67137551	+0.99315896
10	+0.00305	+327.46137428	+0.99875719

Suma de Redundancias = +7

La redundancia media es 0,70. Como en el caso anterior, los observables clásicos agrupan sus redundancias alrededor de la media 0,70. Los GNSS alcanzan el óptimo.... e introducen una fuerte heterogeneidad en la tabla. Obviamente todo se explica a partir de los valores comparativamente muy superiores de sus cofactores, consecuencia de su también comparativamente escasa precisión.

Es otro resultado artificial y adverso de la descompensación relativa de los pesos, que se transmite al resto del Test de Baarda, desvirtuando sus resultados.

Siguiendo el análisis comparativo, el cuadro de mínimo error detectable de la red clásica es el siguiente:

Ob. — mínimo error detectable ( $\nabla O_i$ ) [m]

1	—	0.00063759
2	—	0.00061964
3	—	0.00063938
4	—	0.00187465
5	—	0.00119775
6	—	0.00071450
7	—	0.00054887
8	—	0.00072527

y en la red mixta:

Ob.—mínimo error detectable ( $\nabla_{O_i}$ ) [m]

1	0.00078307
2	0.00075271
3	0.00078004
4	0.00231831
5	0.00148092
6	0.00087747
7	0.00066601
8	0.00088765
9	0.00087685
10	0.00094477

Los dos cuadros resultan muy similares, más desfavorable el segundo, con un valor máximo de 2,31 mm. en el observable n<sup>o</sup> 4, superior a 1,48 mm. en el mismo observable y cuadro primero.

Lo mismo puede decirse y con el mismo reparo de la fiabilidad externa, cuyo detalle ya no se considera necesario reproducir. En la red clásica triangulaterada el error transmitido a las coordenadas no sobrepasan los 0,3 mm. en la red mixta 0,4 mm.

## 4.10. RECINTOS DE ERROR

Las figuras de error en el vértice V2 son las que siguen:

- Red clásica.

Los semiejes de la elipse standard ES calculados directamente son

$$a = b = 0,17 \text{ mm.}$$

Y ES resulta ser un círculo.

Calculando directamente la directriz de la curva podaria, que matemáticamente es ES se obtiene la elipse de semiejes

$$a = 0,181 \text{ mm.}$$

$$b = 0,167 \text{ mm.}$$

La pequeña diferencia existente es seguramente debida a inevitables errores de redondeo en el proceso de cálculo.

$$\text{Superficie de la podaria} = 0,10 \text{ mm}^2$$

- Red mixta

Los semiejes de la elipse standard ES calculados directamente son

$$a = 0,26 \text{ mm.}$$

$$b = 0,21 \text{ mm.}$$

Y calculando directamente la directriz de la curva podaria, se sigue

$$a = 0,22 \text{ mm.}$$

$$b = 0,20 \text{ mm.}$$

Siendo también aplicable a la diferencia encontrada la consideración anterior sobre el error de redondeo.

$$\text{Superficie de la podaria} = 0,14 \text{ mm}^2$$

## 4.11. ERRORES EN REDONDEO dS Y db

El error dS es despreciable en cualquier caso. Sin embargo el error db es realmente importante. Resulta un coeficiente de mayoración del 38 % en la red clásica, que pasa al 39 % en la mixta.

## 4.12. CONCLUSIONES BÁSICAS

En resumen, con un 68 % de fiabilidad, (que puede reducirse o elevarse lo que se quiera aplicando el adecuado coeficiente multiplicador), el recinto de error en la red mixta puede definirse en el caso que nos ocupa por una curva podaria de semieje “a” un 43 % mayor que el correspondiente a la clásica, un semieje “b” un 26 % mayor, y encerrando una superficie un 40 % mayor. Todos los semiejes en el entorno de los 0,2 mm.

A todo ello hay que agregar un coeficiente de mayoración de un 38 % aproximadamente debido al error db, y el resultado, con una fiabilidad adecuada, de a lo menos un 95 % ronda la precisión milimétrica. Tal vez se puedan tomar más precauciones y trabajar con mayor rigor. Nosotros nos conformamos con lo expuesto.

A lo expuesto debemos agregar que sería muy bueno diseñar a priori la red de forma que no existiera o se minimizara la descompensación apreciada en la matriz de pesos. Se debe tener muy en cuenta.

Y todo parece indicar que los observables mejores y más fiables, (fundamentalmente porque se puede predecir mejor peso y precisión y su determinación es físicamente más simple y alejada de errores sistemáticos instrumentales y ambientales), son los azimutales clásicos, después los distanciométricos electrónicos, y finalmente los GNSS. Naturalmente, el rendimiento en el trabajo está en relación inversa a la prelación establecida.

Que en cualquier caso es imperativo utilizar observación clásica para definir el vector  $X_a$  de coordenadas aproximadas. Y que, dependiendo de la precisión exigida, puede establecerse un programa adecuado de observación que ahorre tiempo y dinero, de tal manera que en definitiva se consiga lo mejor posible que  $\Sigma_o \approx \text{diag } \sigma_o^2 = P^{-1}$  programando debidamente el empleo selectivo, en presencia y número, de observables azimutales, distanciométricos y GNSS. En el caso de que los pesos de las formas lineales fueran iguales el hiperelipsoide de observables

$R^T \cdot P \cdot R = k^2 = \text{mínimo}$  (conocido) se transforma en hiperesfera y si, a posteriori, la hiperpodaria de correcciones a coordenadas se transforma en hiperesfera, se resuelve el problema de las figuras de error específicas de los vértices de la red, y así lo estudiaremos en la siguiente publicación. Con todo esto queremos insistir en la necesidad de que los observables tengan pesos lo más similares posibles, y lo ideal sería que fueran iguales. Descartando mediciones con instrumentos de precisiones no homogéneas, hoy por hoy es el caso que plantean los observables GNSS respecto a los clásicos (azimutes y distancias).

Y cuanto más asequible sea acercarse a los óptimos enunciados, más rigurosa y fiable será la aplicación del ajuste gaussiano y la interpretación de sus resultados, cualquiera que sean los observables, clásicos y/o GNSS, reducidos o no a lineales. No parece tener sentido la resolución de la red mixta por el método de incrementos en ajuste doble, decisión que tomamos apoyándonos en los resultados desfavorables de la red mixta triangulaterada y en la falta de homogeneidad de los pesos. Sin embargo sí nos parece interesante, aunque sólo para clarificar ideas, resolver la red mixta (constituida por azimutes, distancias y vectores GNSS) calculando los pesos a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz completa varianza covarianza, según es práctica habitual muy extendida, y así lo haremos en el siguiente capítulo 5.

## Capítulo 5

# Una práctica usual desaconsejable: resolución de la red de observables clásicos junto a observables GNSS con matriz completa de pesos factorizada

En las conclusiones de la triangulación hemos discutido sobre la conveniencia del ajuste de Gauss-Marcov de una red mixta con observables de diferente precisión, como son las mediciones clásicas y GNSS. Sin embargo este capítulo lo dedicamos a ajustar una red de observables clásicos junto a observables GNSS, mostrando sus, a nuestro entender, riesgos evidentes.

A continuación y siguiendo la práctica muy extendida del momento, vamos a resolver la red de incrementos de coordenadas (clásicos y GNSS) **factorizando la matriz de pesos generalizada completa  $P$** , evidentemente sin seguir la propuesta del ajuste doble por incrementos resuelta teórica y prácticamente en los capítulos 2 y 3.

El vector de observables corresponde al del ejemplo del capítulo 4. A partir de los mismos datos de campo: clásicos y GNSS, calcularemos los incrementos de coordenadas en el sistema de referencia local.

## 5.1. CÁLCULO DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS OBSERVABLES CLÁSICOS. TEST DE PEARSON

A partir de los azimutes y distancias reducidas calculamos los incrementos de coordenadas entre vértices de la red junto a sus varianzas y covarianzas según (40), (41) y (42).

Los incrementos que han superado el test de Pearson son los del cuadro 5.1.

Incremento	Porcentaje de aceptación
$\Delta X V1V2$	97,54 %
$\Delta Y V1V2$	81,37 %
$\Delta X V2V4$	90,89 %
$\Delta Y V2V4$	82,08 %
$\Delta X V4V2$	90,89 %
$\Delta Y V4V2$	77,13 %

Cuadro 5.1: Incrementos de coordenadas entre vértices con el porcentaje de aceptación del test de Pearson de los observables clásicos

En los cuadros 5.2, 5.3 y 5.4 se encuentran los listados de: azimutes , distancias reducidas, incrementos de coordenadas, varianzas y covarianzas de los incrementos.

Azimut V1V2	Distancia V2V1	$\Delta X$ V1-V2	$\Delta Y$ V1-V2
112.3189	64.2145	63.0160	-12.3484
112.3191	64.2141	63.0156	-12.3485
112.3191	64.2143	63.0158	-12.3486
112.3199	64.2141	63.0155	-12.3493
112.3185	64.2141	63.0157	-12.3479
112.3182	64.2142	63.0159	-12.3477
112.3188	64.2141	63.0157	-12.3482
112.3186	64.2141	63.0157	-12.3480
112.3184	64.2142	63.0158	-12.3479
112.3203	64.2140	63.0153	-12.3497
112.3192	64.2143	63.0158	-12.3487
112.3195	64.2142	63.0156	-12.3490
112.3185	64.2140	63.0156	-12.3479
	<b>Covarianza <math>\Delta X \Delta Y</math> V1-V2</b>	<b>Varianza <math>\Delta X</math> V1-V2</b>	<b>Varianza <math>\Delta Y</math> V1-V2</b>
	-3.56E-09	1.82E-08	6.98E-10

Cuadro 5.2: Azimutes  $[g]$ , distancias reducidas $[m]$ , incrementos de coordenadas V1V2 $[m]$ , varianzas $[m^2]$  y covarianzas $[m^2]$ .

Azimut V2V4	Distancia V2V4	$\Delta X$ V2-V4	$\Delta Y$ V2-V4
254.7512	83.1500	-63.0162	-54.2483
254.7498	83.1500	-63.0150	-54.2497
254.7500	83.1500	-63.0152	-54.2495
254.7509	83.1501	-63.0161	-54.2487
254.7494	83.1501	-63.0148	-54.2502
254.7489	83.1500	-63.0143	-54.2506
254.7495	83.1502	-63.0149	-54.2501
254.7487	83.1495	-63.0137	-54.2505
254.7497	83.1493	-63.0144	-54.2493
254.7514	83.1497	-63.0162	-54.2479
254.7496	83.1495	-63.0145	-54.2496
	<b>Covarianza <math>\Delta X \Delta Y</math> V2-V4</b>	<b>Varianza <math>\Delta X</math> V2-V4</b>	<b>Varianza <math>\Delta Y</math> V2-V4</b>
	4.45E-08	5.16E-08	3.83E-08

Cuadro 5.3: Azimutes  $[g]$ , distancias reducidas $[m]$ , incrementos de coordenadas V2V4 $[m]$ , varianzas $[m^2]$  y covarianzas $[m^2]$ .



Azimut V4V2	Distancia V4V2	$\Delta X$ V4-V2	$\Delta Y$ V4-V2
54.7501	83.1500	63.0153	54.2494
54.7504	83.1500	63.0156	54.2491
54.7503	83.1500	63.0155	54.2492
54.7497	83.1501	63.0150	54.2499
54.7501	83.1501	63.0154	54.2495
54.7504	83.1500	63.0156	54.2491
54.7508	83.1502	63.0160	54.2488
54.7489	83.1495	63.0139	54.2503
54.7502	83.1493	63.0149	54.2488
54.7505	83.1497	63.0154	54.2488
54.7493	83.1495	63.0142	54.2499
	<b>Covarianza <math>\Delta X \Delta Y</math> V4-V2</b>	<b>Varianza <math>\Delta X</math> V4-V2</b>	<b>Varianza <math>\Delta Y</math> V4-V2</b>
	4.45E-08	5.16E-08	3.83E-08

Cuadro 5.4: Azimutes  $[g]$ , distancias reducidas  $[m]$ , incrementos de coordenadas V4V2  $[m]$ , varianzas  $[m^2]$  y covarianzas  $[m^2]$ .

## 5.2. CÁLCULO DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS VECTORES GNSS. TEST DE PEARSON

La observación de campo se hizo con los equipos GNSS Leica System 1200 (cfr. epígrafe 4.1).

En primer lugar se calculan los vectores GNSS cartesianos geocéntricos y después los incrementos de coordenadas entre vértices.

A continuación es necesario hacer una conversión de los incrementos cartesianos geocéntricos a nuestro sistema geodésico local. Y para obtener los incrementos

de coordenadas topográficas a partir de incrementos de coordenadas cartesianas geocéntricas utilizamos la expresión:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \\ \Delta z_{ij} \end{pmatrix} = R^T(\varphi_i, \lambda_i) \cdot \begin{pmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{pmatrix}$$

siendo la matriz de rotación ortonormal:

$$R(\varphi_i, \lambda_i) = \begin{pmatrix} -\text{sen}\lambda_i & -\text{sen}\varphi_i \cdot \text{cos}\lambda_i & \text{cos}\varphi_i \cdot \text{cos}\lambda_i \\ \text{cos}\lambda_i & -\text{sen}\varphi_i \cdot \text{sen}\lambda_i & \text{cos}\varphi_i \cdot \text{sen}\lambda_i \\ 0 & \text{cos}\varphi_i & \text{sen}\varphi_i \end{pmatrix}$$

Utilizamos la latitud media y longitud media de los vértices de los vectores cartesianos geocéntricos GNSS:  $\varphi_i$  y  $\lambda_i$ .

Por último aplicaremos una rotación azimutal a cada pareja de incrementos para hacerlos coincidir con los del levantamiento clásico de la red. No hay una rotación única para todos los ejes.

En cuadros sucesivos podemos ver los incrementos GNSS. Las varianzas y covarianzas se han calculado según (40) (41) y (42).

V1V2					
$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$			
-63.02036337	12.34805512	0.159288035			
-63.01634611	12.35014223	0.158881074			
-63.01526469	12.34859275	0.144630122			
-63.01728622	12.34843373	0.154451941			
-63.01736812	12.34787642	0.156068323			
-63.01942609	12.34645718	0.162310961			
-63.0151727	12.34871167	0.154846647			
-63.01418203	12.35129165	0.150385451			
Media					
$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$			
-63.01692617	12.34869509	0.155107819			
Varianza					
$\sigma^2_{\Delta x}$	$\sigma^2_{\Delta y}$	$\sigma^2_{\Delta z}$			
0.00000458	0.00000214	0.00003101			
Desviación estándar					
$\sigma_{\Delta x}$	$\sigma_{\Delta y}$	$\sigma_{\Delta z}$			
0.002141122	0.001464017	0.005569057			
Covarianzas			Matriz varianza covarianza		
$\sigma_{\Delta x, \Delta y}$	$\sigma_{\Delta x, \Delta z}$	$\sigma_{\Delta y, \Delta z}$	0.00000458	2.29628E-06	-8.74292E-06
2.00925E-06	-7.65005E-06	-3.14295E-06	2.29628E-06	0.00000214	-3.59195E-06
2.29628E-06	-8.74292E-06	-3.59195E-06	-8.74292E-06	-3.59195E-06	0.00003101

Cuadro 5.5: Incrementos de coordenadas V1V2 GNSS, medias[m], varianzas [ $m^2$ ] y covarianzas [ $m^2$ ]

V2V3					
$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$			
-4.493659509	66.22807379	0.161051234			
-4.514271678	66.23115238	0.175706976			
-4.51850811	66.23138732	0.170315552			
-4.511586664	66.23011034	0.180329189			
-4.505147859	66.24079564	0.194248108			
-4.501465972	66.24094079	0.210239438			
-4.4936174	66.23548715	0.186091607			
-4.507406341	66.23143468	0.200708125			
Media					
$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$			
-4.505707941	66.23367276	0.184836279			
Varianza					
$\sigma^2_{\Delta x}$	$\sigma^2_{\Delta y}$	$\sigma^2_{\Delta z}$			
0.00008347	0.00002393	0.00026680			
Desviación estándar					
$\sigma_{\Delta x}$	$\sigma_{\Delta y}$	$\sigma_{\Delta z}$			
0.009136112	0.004891326	0.016334155			
Covarianzas			Matriz varianza covarianza		
$\sigma_{\Delta x, \Delta y}$	$\sigma_{\Delta x, \Delta z}$	$\sigma_{\Delta y, \Delta z}$	0.00008347	9.26855E-06	1.5032E-05
8.10998E-06	1.3153E-05	5.29811E-05	9.26855E-06	0.00002393	6.05499E-05
9.26855E-06	1.5032E-05	6.05499E-05	1.5032E-05	6.05499E-05	0.00026680

Cuadro 5.6: Incrementos de coordenadas V2V3 GNSS, medias[m] , varianzas [m<sup>2</sup>]y covarianzas[m<sup>2</sup>]

Los incrementos GNSS bidimensionales superan sobradamente el test de normalidad. El porcentaje de aceptación se recoge en el cuadro 5.7. Se prescinde de la tercera coordenada  $z_{ij}$ , porque el levantamiento es bidimensional.

Incremento	Porcentaje de aceptación
$\Delta X$ V1V2	93,99 %
$\Delta Y$ V1V2	93,99 %
$\Delta X$ V2V3	98,76 %
$\Delta Y$ V2V3	89,01 %

Cuadro 5.7: Porcentaje de aceptación del test de Pearson de los incrementos de coordenadas GNSS

La matriz varianza covarianza de todos los incrementos de coordenadas de la red es la del cuadro 5.8.

	$\Delta X$ V1-V2 GNSS	$\Delta Y$ V1-V2 GNSS	$\Delta X$ V2-V3 GNSS	$\Delta Y$ V2-V3 GNSS	$\Delta X$ V1-V2	$\Delta Y$ V1-V2	$\Delta X$ V2-V4	$\Delta Y$ V2-V4	$\Delta X$ V4-V2	$\Delta Y$ V4-V2
$\Delta X$ V1-V2 GNSS	4.58E-06	2.30E-06	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Delta Y$ V1-V2 GNSS	2.30E-06	2.14E-06	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Delta X$ V2-V3 GNSS	0	0	8.35E-05	9.27E-06	0	0	0	0	0	0
$\Delta Y$ V2-V3 GNSS	0	0	9.27E-06	2.39E-05	0	0	0	0	0	0
$\Delta X$ V1-V2	0	0	0	0	1.82E-08	-3.56E-09	0	0	0	0
$\Delta Y$ V1-V2	0	0	0	0	-3.56E-09	6.98E-10	0	0	0	0
$\Delta X$ V2-V4	0	0	0	0	0	0	5.16E-08	4.45E-08	0	0
$\Delta Y$ V2-V4	0	0	0	0	0	0	4.45E-08	3.83E-08	0	0
$\Delta X$ V4-V2	0	0	0	0	0	0	0	0	5.16E-08	4.45E-08
$\Delta Y$ V4-V2	0	0	0	0	0	0	0	0	4.45E-08	3.83E-08

Cuadro 5.8: Matriz varianza covarianza  $\Sigma_o$  de los incrementos de coordenadas clásicos y GNSS, unidades  $m^2$

### 5.3. LAS COORDENADAS APROXIMADAS

Las coordenadas aproximadas son las que siguen:

Vértice	X [m]	Y [m]
V <sub>1</sub>	99,9997	166,59758
V <sub>2</sub>	163,01455	154,2486
V <sub>3</sub>	167,52085	88,01078
V <sub>4</sub>	100	100

### 5.4. MATRIZ DE DISEÑO A Y EL VECTOR K DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES

Las formas lineales del sistema de ecuaciones quedan definidas por la matriz  $A$  y vector  $K$  de términos independientes, estando a la espera de definir la matriz de los pesos  $P$ .

#### Matriz A

$\Delta X V1V2$ GNSS	1	0
$\Delta Y V1V2$ GNSS	0	1
$\Delta X V2V3$ GNSS	-1	0
$\Delta Y V2V3$ GNSS	0	-1
$\Delta X V1V2$	1	0
$\Delta Y V1V2$	0	1
$\Delta X V2V4$	-1	0
$\Delta Y V2V4$	0	-1
$\Delta X V4V2$	1	0
$\Delta Y V4V2$	0	1

Cuadro 5.9: Matriz de diseño A de elementos exactos

	<u>Vector K</u>
$\Delta X V1-V2$ GNSS	0.001776
$\Delta Y V1-V2$ GNSS	0.000475
$\Delta X V2-V3$ GNSS	-0.000590
$\Delta Y V2-V3$ GNSS	0.004149
$\Delta X V1-V2$	0.000544
$\Delta Y V1-V2$	0.000000
$\Delta X V2-V4$	-0.000486
$\Delta Y V2-V4$	-0.000878
$\Delta X V4-V2$	-0.000610
$\Delta Y V4-V2$	-0.000734

Cuadro 5.10: El vector K [metros]

#### 5.4.1. LAS MATRIZ DE PESOS FACTORIZADA $P'$

Volviendo a las conocida expresión del peso, función de la matriz varianza covarianza:

$$P = Q^{-1} = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_o^{-1} = \text{matriz de pesos}$$

siendo  $\Sigma_o =$  matriz varianza covarianza

Siguiendo la teoría propuesta de entre las varianzas de  $\Sigma_o$  seleccionamos la mediana, que se convierte en el estimador de la varianza a priori del observable de peso unidad, en este caso tiene el valor  $\sigma_0^2 = 0,000000051619 \text{ m}^2$ .

Conocidos  $\Sigma_o$  y  $\sigma_0^2$  calculamos la matriz  $P (= \sigma_0^2 \cdot \Sigma_o^{-1})$ .

Podemos factorizar la matriz de pesos generalizada completa  $P$ , (*cfr.* expresión [22]) según:

$$P = \Gamma \cdot V \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot P' \cdot \Gamma^T$$

siendo  $V$ ,  $\Gamma$  matrices de autovalores y autovectores respectivamente, obtenidos por la descomposición en valores singulares de la matriz  $P$ ,

$P'$  es la matriz de pesos diagonalizada.

Los autovalores son los siguientes:

**DIAGONAL DE LA MATRIZ DE AUTOVALORES  $V$   $m^2$ , dimensiones 10 x 10**

0.0000000087·10<sup>6</sup>

0.000000068 ·10<sup>6</sup>

0.0000000061 ·10<sup>6</sup>

0.0000000023·10<sup>6</sup>

0.0000027·10<sup>6</sup>

4.60 ·10<sup>6</sup>

0.00000057·10<sup>6</sup>

0.13·10<sup>6</sup>

0.00000057·10<sup>6</sup>

-0.0033·10<sup>6</sup>

Eliminamos el último observable de la matriz  $\Sigma_o$  porque su autovalor es negativo ( $-0,0033 \cdot 10^6 m^2$ ). No tiene sentido que un peso sea negativo<sup>1</sup>. Y volvemos a calcular los autovalores de la matriz  $V_1$  de dimensiones 9 x 9. Los autovalores son ahora:

**DIAGONAL DE LA MATRIZ DE AUTOVALORES  $V_1[m^2]$ , dimensiones 9 x 9**

0.0000000087·10<sup>6</sup>

0.000000068 ·10<sup>6</sup>

0.0000000061 ·10<sup>6</sup>

0.0000000023·10<sup>6</sup>

0.0000027·10<sup>6</sup>

4.60 ·10<sup>6</sup>

0.00000057·10<sup>6</sup>

0.13·10<sup>6</sup>

0.000001·10<sup>6</sup>

Y los autovectores:

---

1

Es por cierto algo inevitable virtud de la propia teoría conocida. Recordemos que la eliminación de un observable (método de los ajustes coordinados) pasa precisamente por cambiar de signo su peso, pasando a negativo.



**MATRIZ DE AUTOVECTORES  $\Gamma$** , dimensiones 9 x 9

-0.8571	0.5152	0	0	0	0	0	0	0
-0.5152	-0.8571	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.9886	0.1503	0	0	0	0	0
0	0	-0.1503	-0.9886	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.9813	-0.1923	0	0	0
0	0	0	0	0.1923	-0.9813	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.7578	0.6524	0
0	0	0	0	0	0	-0.6524	-0.7578	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1.0000

La diferencia entre los autovalores que constituyen la diagonal de la matriz de pesos  $P'$ , alcanza el orden  $10^9$ . Hay variaciones muy importantes en la matriz de pesos del sistema. Uno de los observables de mayor peso es GNSS, el n<sup>o</sup> 8, con un valor de  $0,13 \cdot 10^6$ .

La patente descompensación de la matriz  $P'$  hace inadecuado el método de interpretación de los resultados, el estudio de los parámetros y la comprobación de la fiabilidad interna y externa de la red, como veremos en el epígrafe 5.5 dedicado a los resultados. Así debe suceder, pues el nuevo vector de residuos  $R' = \Gamma^T \cdot R$  está fuera del lugar geométrico de las soluciones Gauss-Marcov, según en su momento se demostró.

#### 5.4.2. LAS MATRICES DE DISEÑO $A'$ Y $K'$

Las nuevas matrices de diseño  $A'$  y  $K'$  se calculan con:

$$\Gamma^T \cdot (Ax - K) = (A'x - K') \quad (\text{cfr. expresión [14]})$$

Y son las que siguen:

**MATRIZ A'**

$$A'(1, 1) = -.8571$$

$$A'(1, 2) = -.5152$$

$$A'(2, 1) = .5152$$

$$A'(2, 2) = -.8571$$

$$A'(3, 1) = .9886$$

$$A'(3, 2) = .1503$$

$$A'(4, 1) = -.1503$$

$$A'(4, 2) = .9886$$

$$A'(5, 1) = -.9813$$

$$A'(5, 2) = .1923$$

$$A'(6, 1) = -.1923$$

$$A'(6, 2) = -.9813$$

$$A'(7, 1) = .7578$$

$$A'(7, 2) = .6524$$

$$A'(8, 1) = -.6524$$

$$A'(8, 2) = .7578$$

$$A'(9, 1) = 1$$

$$A'(9, 2) = 0$$

**VECTOR K'**

$$k'(1) = -1.8E-003$$

$$k'(2) = 5E-004$$

$$k'(3) = 0$$

$$k'(4) = -4.2E-003$$

$$k'(5) = -5E-004$$

$$k'(6) = -1E-004$$

$$k'(7) = 9E-004$$

$$k'(8) = 3E-004$$

$$k'(9) = 5.99E-004$$

Hay que hacer notar que la matriz  $A'$  ya no es de elementos exactos, pudiendo aumentar los errores de redondeo debidos al cálculo numérico del sistema matemático (fundamentalmente el db).

Y por último la matriz  $P'$ , constituida por los autovalores de  $V_1$ :

**MATRIZ DE PESOS P'**

Peso del observable 1 9E-003

Peso del observable 2 7.1E-002

Peso del observable 3 6E-004

Peso del observable 4 2E-003

Peso del observable 5 2.7

Peso del observable 6 4603534

Peso del observable 7 0.6

Peso del observable 8 129531

Peso del observable 9 1

## 5.5. RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED MIXTA POR INCREMENTOS CON MATRIZ DE PESOS FACTORIZADA

El resultado se expresa según:

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2}$ ,
- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2}$

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**

diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = -2.78E-004$

diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = 1.56E-004$

**RESIDUOS [m]**

1.96E-003

-7.77E-004

-2.51E-004

4.40E-003

8.03E-004

-7.22E-010

-1.01E-003

-3.40E-007

-8.78E-004

**Varianza de la medida de peso ud. = 4.62E-007 m<sup>2</sup>**

**Desv. típica de la medida de peso ud. = 6.80E-004 m**

Observando la matriz de pesos  $P'$  podemos decir que  $dx_{V2}$  dependerá fundamentalmente de los observables 6 y 8 (sobre cuya calidad nos hemos extendido ante-

riormente y volveremos sobre ella), y  $dy_{V2}$  de los observables 5, 7 y 9. Los restantes observables: 1, 2, 3, y 4, prácticamente no afectan al resultado final.

La relación entre la varianza el observable de peso unidad a priori  $\sigma_0^2 = 5,1 \cdot 10^{-8} m^2$  y a posteriori  $\sigma_0^2 = 4,62 \cdot 10^{-7} m^2$  es :

$$F = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{4,62 \cdot 10^{-7}}{5,1 \cdot 10^{-8}} = 9,06$$

El valor 9,06 está muy lejos del valor 1. El deterioro en calidad de interpretación es evidente y de nuevo podemos decir que el desequilibrio proviene de la falta de homogeneidad de los pesos.

En los listados siguientes se encuentran las matrices de criterio: matriz cofactor de las variables o parámetros, matriz cofactor de los residuos, matriz cofactor de los observables corregidos, matriz varianza-covarianza de las variables o parámetros, matriz varianza-covarianza a posteriori de los residuos y matriz varianza-covarianza a posteriori de los observables corregidos.

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

**Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.**

+000.000122 -000.000022

-000.000022 +000.000000611

La matriz cofactor de las variables tiene valores absolutamente diferentes en la diagonal. Los semiejes de la elipse estándar de error serán muy distintos.



La matriz varianza covarianza de los observables corregidos a posteriori es igual a cero, que es lo mismo que decir que los observables no tienen errores después del ajuste.

Listados de comprobación de la fiabilidad interna de la red:

#### Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red

##### Comprobaciones de REDUNDANCIAS

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

1 +000.009 +111.111103888 +000.999999934

2 +000.07 +014.285708658 +000.999999606

3 +000.0006 +1666.666655342+000.999999993

4 +000.002 +499.999998476 +000.999999996

5 +002.7 +000.370357739 +000.999965897

6 +4603533 +000 +000.000000779

7 +000.6 +001.666661539 +000.999996923

8 +129531 +000.000000000 +000.000049105

9 +001 +000.999987763 +000.999987763

Suma de Redundancias = +007

La redundancia media es 0,77, que en la práctica sería el valor óptimo de proyecto. Los observables 6 y 8 no se ajustan a la redundancia media, no están controlados en absoluto y pueden albergar un error grosero. Y son precisamente (como es lógico) los de más peso por lo que determinan el resultado. Y sin embargo apenas intervienen en el resultado el resto de observables, que presentan un coeficiente cercano a la unidad, óptimo.

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)**

Ob. Residuo ( $R_i$ ) Err.cuad( $\sigma_i$ ) Var.de Baarda ( $w_i$ ).

1	+000.001957790	+000.007169341	+000.273078105
2	-000.000777340	+000.002570700	-000.302384596
3	-000.000251435	+000.027766739	-000.009055251
4	+000.004396424	+000.015208469	+000.289077347
5	+000.000802989	+000.000413915	+001.939986178
6	-000.000000001	+000.000000000	-002.581368973
7	-000.001008714	+000.000878060	-001.148798933
8	-000.000000034	+000.000000013	-002.563853122
9	-000.000878113	+000.000680139	-001.291078502

**Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red**

Valor de para el nivel de significación  $\alpha$ , y potencia  $\beta$  del test ,  $\delta= 4.12$

Ob.  $(\sigma_i)$   $(\sqrt{r_i})$   $(\nabla_{O_i})$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{INi} = \frac{\delta_\alpha}{\sqrt{r_i}}$

1	+000.000001827	+000.999999967	+000.000000219	+000.120000003
2	+000.000001613	+000.999999803	+000.000000193	+000.120000023
3	+000.000002288	+000.999999996	+000.000000274	+000.120000000
4	+000.000000839	+000.999999998	+000.000000100	+000.120000000
5	+000.000002417	+000.999982948	+000.000000290	+000.120002046
6	+000.000000316	+000.000883095	+000.000043075	+135.885589586
7	+000.000001540	+000.999998461	+000.000000184	+000.120000184
8	+000.000001889	+000.007007505	+000.000032360	+017.124496221
9	+000.000002379	+000.999993881	+000.000000285	+000.120000734

Según el listado anterior el mínimo error detectable:  $\nabla_{O_i}$  es de 0,000043 metros.

Un error de centésimas de milímetros es inaceptablemente pequeño. Y lógicamente un error no detectado de centésimas no afectará a las variables  $dx_{V2}$  y  $dy_{V2}$ , como se pone de manifiesto en los vectores de fiabilidad externa de la red.

La calidad del ajuste es inversamente proporcional al valor de los parámetros de homogeneidad ( $\mu_{Exi}$  y  $\mu_{INi}$ ). Podemos decir de nuevo que los observables 6 y 8 tienen un bajo nivel de control.

A continuación los listados de comprobación de la fiabilidad externa de la red:

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

O.- $\sqrt{1-r_i}$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1-r_i}$

- 1 +000.000254957 +000.000030594
- 2 +000.000627599 +000.000075311
- 3 +000.000082428 +000.000009891
- 4 +000.000055201 +000.000006624
- 5 +000.005839759 +000.000700783
- 6 +000.999999610 +135.885536601
- 7 +000.001754005 +000.000210481
- 8 +000.999975447 +017.124075765
- 9 +000.003498134 +000.000419778

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

**Vectores de fiabilidad externa:**

- Observable ... ( 1 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... -000.000000000
- Variable o Parámetro 2... +000
- Observable ... ( 2 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... +000.000000000
- Variable o Parámetro 2... -000.000000000
- Observable ... ( 3 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... +000
- Variable o Parámetro 2... -000.000000000
- Observable ... ( 4 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... -000.000000000
- Variable o Parámetro 2... +000
- Observable ... ( 5 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... -000.000000000
- Variable o Parámetro 2... +000.000000000
- Observable ... ( 6 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... -000.000041532
- Variable o Parámetro 2... -000.000035757
- Observable ... ( 7 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... +000.000000000
- Variable o Parámetro 2... -000.000000000
- Observable ... ( 8 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... -000.000040404
- Variable o Parámetro 2... +000.000007917
- Observable ... ( 9 )-----[m]
- Variable o Parámetro 1... +000.000000000
- Variable o Parámetro 2... -000.000000000



Sin más argumentación ni comentarios, todo parece conducir a desaconsejar el método, en teoría y praxis.

## Capítulo 6

# Aplicación del método de incrementos de coordenadas en una red GNSS

A partir de una nueva observación exclusiva GNSS de la red en estudio, se propone finalmente su ajuste según la teoría del método gaussiano determinista por incrementos de coordenadas. Ventaja previa y básica frente a las redes mixtas es que los observables tienen precisiones similares.

### 6.1. CÁLCULO DE LOS INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS VECTORES GNSS. TEST DE PEARSON

La observación de campo se hizo con los equipos GNSS Leica System 1200<sup>1</sup>.

---

1

Medición en modo post-proceso estático, con señal de frecuencia L1 y L2 combinadas. Los vectores GNSS, en componentes cartesianas geocéntricas, se han calculado con el programa TTC (Trimble Total Control).

Repetimos el proceso de cálculo para obtener los incrementos GNSS y sus varianzas, tal y como se explicó en el epígrafe 5.2.

#### Incrementos observados

$\Delta X V1V2(1)$ GNSS	63.0160
$\Delta Y V1V2(1)$ GNSS	-12.3539
$\Delta X V3V2(1)$ GNSS	-4.5059
$\Delta Y V3V2(1)$ GNSS	66.2321
$\Delta X V4V2(1)$ GNSS	63.0132
$\Delta Y V4V2(1)$ GNSS	54.2474
$\Delta X V1V2(2)$ GNSS	63.0225
$\Delta Y V1V2(2)$ GNSS	-12.3505
$\Delta X V3V2(2)$ GNSS	-4.5049
$\Delta Y V3V2(2)$ GNSS	66.2176
$\Delta X V4V2(2)$ GNSS	63.0156
$\Delta Y V4V2(2)$ GNSS	54.2495

Cuadro 6.1: Incrementos GNSS observados [m] en el plano topográfico del levantamiento

Todos los incrementos GNSS bidimensionales superan sobradamente el test de normalidad de Pearson, tomando cuatro decimales, llegando así a la décima de milímetro. El porcentaje de aceptación se recoge en el cuadro 6.3., que en ningún caso es inferior al 83 %. Podemos disponer de todos los incrementos en el ajuste de la red.

Incremento	Porcentaje de aceptación	Incremento	Porcentaje de aceptación
$\Delta X V1V2 (1)$	93,78 %	$\Delta X V1V2 (2)$	98,07 %
$\Delta Y V1V2 (1)$	83,42 %	$\Delta Y V1V2 (2)$	87,49 %
$\Delta X V3V2 (1)$	98,78 %	$\Delta X V3V2 (2)$	89,01 %
$\Delta Y V3V2 (1)$	97,28 %	$\Delta Y V3V2 (2)$	85,57 %
$\Delta X V4V2 (1)$	92,68 %	$\Delta X V4V2 (2)$	95,86 %
$\Delta Y V4V2 (1)$	92,68 %	$\Delta Y V4V2 (2)$	93,79 %

Cuadro 6.2: Porcentaje de aceptación del test de Pearson de los incrementos de coordenadas GNSS

Se prescinde de la tercera coordenada  $z_{ij}$  porque el levantamiento es bidimensional.

## 6.2. LAS COORDENADAS APROXIMADAS

Las coordenadas aproximadas<sup>2</sup> que emplearemos son las que siguen, calculadas por el camino de mejor consistencia distanciométrica:

Vértice	X [m]	Y [m]
V <sub>1</sub>	99,99940	166,59777
V <sub>2</sub>	163,01455	154,2486
V <sub>3</sub>	167,52085	88,01078
V <sub>4</sub>	100	100

Reiteramos que las mejores coordenadas aproximadas de la red son las obtenidas por topografía clásica. Cualquier otro procedimiento en principio nos parece desaconsejable.

### Incrementos calculados

$\Delta X$ V1V2(1) GNSS	63.0152
$\Delta Y$ V1V2(1) GNSS	-12.3492
$\Delta X$ V3V2(1) GNSS	-4.5063
$\Delta Y$ V3V2(1) GNSS	66.2378
$\Delta X$ V4V2(1) GNSS	63.0146
$\Delta Y$ V4V2(1) GNSS	54.2486
$\Delta X$ V1V2(2) GNSS	63.0152
$\Delta Y$ V1V2(2) GNSS	-12.3492
$\Delta X$ V3V2(2) GNSS	-4.5063
$\Delta Y$ V3V2(2) GNSS	66.2378
$\Delta X$ V4V2(2) GNSS	63.0146
$\Delta Y$ V4V2(2) GNSS	54.2486

Cuadro 6.3: Incrementos calculados [m] a partir de observaciones clásicas

---

2

*Cfr.* epígrafe 3.3.2 del artículo “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano...”, de M<sup>a</sup> Jesús JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT..

El vector  $K$  lo calcularemos con los incrementos que provienen del cuadro 6.3 y con los incrementos obtenidos a partir de los vectores GNSS (incrementos observados del cuadro 6.1), según la expresión usual:

$$K = \text{Incrementos Observados} - \text{Incrementos Calculados}$$

### 6.3. SÍNTESIS Y RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA RED GNSS POR EL MÉTODO DE INCREMENTOS DE COORDENADAS

En el cuadro 6.4 se encuentran las matrices completas de diseño de la red de incrementos de coordenadas GNSS.

Si nos fijamos en la matriz de pesos hay cuatro observables que tienen peso muy inferior a 1, dos son incrementos de X y otros dos son incrementos de Y:

$$P_{\Delta X_{V3V2}(1)} = 0,11$$

$$P_{\Delta X_{V4V2}(1)} = 0,083$$

$$P_{\Delta Y_{V4V2}(2)} = 0,066$$

$$P_{\Delta Y_{V3V2}(2)} = 0,071$$

Pesos tan pequeños desvirtúan el sistema de formas lineales, no aportan información de relevancia al resultado, y empeoran la interpretación del ajuste.

En cuanto al peso  $P_{\Delta Y_{V3V2}(1)} = 0,25$ , de valor muy inferior a 1, decidimos eliminar dos lecturas de la muestra con el objetivo de mejorar su varianza y su peso. Hemos alcanzando así un peso  $P_{\Delta Y_{V3V2}(1)} = 1$ . La muestra modificada, con dos lecturas menos, supera el test de Pearson con un nivel de aceptación del 96 %. Hemos hecho

lo mismo con el peso  $P_{\Delta X_{V_3V_2}(1)} = 0,11$  para conseguir finalmente que alcance un nuevo peso  $P_{\Delta X_{V_3V_2}(1)} = 0,5$ .

Decidimos eliminar los observables que tienen los siguientes pesos:

$$P_{\Delta X_{V_4V_2}(1)} = 0,083$$

$$P_{\Delta Y_{V_4V_2}(2)} = 0,066$$

$$P_{\Delta Y_{V_3V_2}(2)} = 0,071$$

Con los observables modificados y con los que tienen un peso de valor 1, según la teoría del método de incrementos de coordenadas, dividimos el sistema de formas lineales en dos subsistemas para evitar las covarianzas. Las submatrices de diseño resultantes son las del cuadro 6.5.

	<b>Matriz A</b>	<b>Vector K (metros)</b> (K=observado - calculado)	<b>Matriz de Pesos</b>
$\Delta X$ V1V2(1) GNSS	1	$\Delta X$ V1V2(1) GNSS	$\Delta X$ V1V2(1) GNSS
$\Delta Y$ V1V2(1) GNSS	0	$\Delta Y$ V1V2(1) GNSS	$\Delta Y$ V1V2(1) GNSS
$\Delta X$ V3V2(1) GNSS	1	$\Delta X$ V3V2(1) GNSS	$\Delta X$ V3V2(1) GNSS
$\Delta Y$ V3V2(1) GNSS	0	$\Delta Y$ V3V2(1) GNSS	$\Delta Y$ V3V2(1) GNSS
$\Delta X$ V4V2(1) GNSS	1	$\Delta X$ V4V2(1) GNSS	$\Delta X$ V4V2(1) GNSS
$\Delta Y$ V4V2(1) GNSS	0	$\Delta Y$ V4V2(1) GNSS	$\Delta Y$ V4V2(1) GNSS
$\Delta X$ V1V2(2) GNSS	1	$\Delta X$ V1V2(2) GNSS	$\Delta X$ V1V2(2) GNSS
$\Delta Y$ V1V2(2) GNSS	0	$\Delta Y$ V1V2(2) GNSS	$\Delta Y$ V1V2(2) GNSS
$\Delta X$ V3V2(2) GNSS	1	$\Delta X$ V3V2(2) GNSS	$\Delta X$ V3V2(2) GNSS
$\Delta Y$ V3V2(2) GNSS	0	$\Delta Y$ V3V2(2) GNSS	$\Delta Y$ V3V2(2) GNSS
$\Delta X$ V4V2(2) GNSS	1	$\Delta X$ V4V2(2) GNSS	$\Delta X$ V4V2(2) GNSS
$\Delta Y$ V4V2(2) GNSS	0	$\Delta Y$ V4V2(2) GNSS	$\Delta Y$ V4V2(2) GNSS

1  
1  
0.11  
0.25  
0.083  
0.066  
1  
1  
0.14  
0.071  
1  
1

Cuadro 6.4: Matriz  $A$ , vector  $K$  y matriz de pesos  $P$  de la red de incrementos GNSS

	Matriz A	Vector K	Matriz de Pesos
$\Delta X V1V2(1)$ GNSS	1	$\Delta X V1V2(1)$ GNSS	$\Delta X V1V2(1)$ GNSS
$\Delta Y V4V2(2)$ GNSS	0	$\Delta Y V4V2(2)$ GNSS	$\Delta Y V4V2(2)$ GNSS
$\Delta X V1V2(2)$ GNSS	1	$\Delta X V1V2(2)$ GNSS	$\Delta X V1V2(2)$ GNSS
$\Delta Y V3V2(1)$ GNSS	0	$\Delta Y V3V2(1)$ GNSS	$\Delta Y V3V2(1)$ GNSS
$\Delta X V1V2(2)$ GNSS	0	$\Delta X V1V2(2)$ GNSS	$\Delta X V1V2(2)$ GNSS
$\Delta X V3V2(1)$ GNSS	1	$\Delta X V3V2(1)$ GNSS	$\Delta X V3V2(1)$ GNSS
$\Delta Y V1V2(2)$ GNSS	1	$\Delta Y V1V2(2)$ GNSS	$\Delta Y V1V2(2)$ GNSS
$\Delta X V3V2(1)$ GNSS	0	$\Delta X V3V2(1)$ GNSS	$\Delta X V3V2(1)$ GNSS
$\Delta Y V1V2(1)$ GNSS	0	$\Delta Y V1V2(1)$ GNSS	$\Delta Y V1V2(1)$ GNSS
$\Delta X V4V2(2)$ GNSS	1	$\Delta X V4V2(2)$ GNSS	$\Delta X V4V2(2)$ GNSS

Cuadro 6.5: En el listado aparecen sucesivamente las submatrices  $A_1$  y  $A_2$ , diferenciadas en el primer y segundo bloque de la matriz A. Lo mismo sucede con los vectores  $K_1$  y  $K_2$  y las matrices de pesos  $P_1$  y  $P_2$

En el cuadro 6.6 podemos ver las varianzas de los incrementos GNSS, la mediana de



las varianzas y los pesos. La mediana es la varianza del observable de peso unidad  $\sigma_o^2$ . Los pesos están calculados con la varianza  $\hat{\sigma}_{\sigma_{Ti}}^2$  y la mediana  $\sigma_o^2$  a partir de la expresión:

$$P_{O_{Ti}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{\sigma_{Ti}}^2}$$

Varianzas de los observables		Calculo de los pesos		
$\Delta X V1V2(1)$ GNSS	0.00001	$\Delta X V1V2(1)$ GNSS	0.00001/0.00001=1	
$\Delta Y V4V2(2)$ GNSS	0.00001	$\Delta Y V4V2(2)$ GNSS	0.00001/0.00001=1	
$\Delta X V1V2(2)$ GNSS	0.00001	$\Delta X V1V2(2)$ GNSS	0.00001/0.00001=1	
$\Delta Y V3V2(1)$ GNSS	0.00001	$\Delta Y V3V2(1)$ GNSS	0.00001/0.00001=1	Mediana= 0.00001
$\Delta Y V1V2(2)$ GNSS	0.00001	$\Delta Y V1V2(2)$ GNSS	0.00001/0.00001=1	
$\Delta X V3V2(1)$ GNSS	0.00002	$\Delta X V3V2(1)$ GNSS	0.00001/0.00002=0.5	
$\Delta Y V1V2(1)$ GNSS	0.00001	$\Delta Y V1V2(1)$ GNSS	0.00001/0.00001=1	
$\Delta X V4V2(2)$ GNSS	0.00001	$\Delta X V4V2(2)$ GNSS	0.00001/0.00001=1	

Cuadro 6.6: Varianzas [ $m^2$ ] de los incrementos de coordenadas GNSS, mediana [ $m^2$ ] y finalmente pesos

Las covarianzas no las hemos calculado porque no afectan al doble sistema algebraico de incrementos. Incluso, aunque resultaran nulas sería más riguroso considerarlo debido a error muestral.

Conocidas las matrices parciales de diseño  $A_1$ ,  $A_2$ , los vectores  $K_1$ ,  $K_2$  y las matrices de pesos  $P_1$  y  $P_2$ . Iniciamos el ajuste de la subred 1 y la subred 2.

### 6.3.1. EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD EN LA SUBRED 1 GNSS

El resultado se expresa según:

- diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2}$ ,
- diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2}$

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**  
diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 4.095E-003$   
diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = -1.465E-003$

**RESIDUOS [m]**

3.275E-003  
-2.355E-003  
-3.275E-003  
2.355E-003

**Varianza de la medida de peso ud. = 1.63E-005 m<sup>2</sup>**

**Desv. típica de la medida de peso ud. = 4.03E-003 m**

La desviación típica a posteriori del observable de peso unidad es la esperable, considerando que la desviación típica a priori del observable de peso unidad es  $3 \cdot 10^{-3} m$ . La diferencia entre la desviación típica a priori  $3 \cdot 10^{-3} m$  y a posteriori  $4 \cdot 10^{-3} m$  es de 1 milímetro, confirmando la bondad del cálculo y trabajo.

### 6.3.2. EL VECTOR DE VARIABLES, EL VECTOR DE RESIDUOS Y LA VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD EN LA SUBRED 2 GNSS

**VARIABLES O PARÁMETROS [m]**  
diferencial de la coordenada x:  $dx_{V2} = 0.67E-003$   
diferencial de la coordenada y:  $dy_{V2} = -3.01E-003$

**RESIDUOS [m]**

-1.7E-003  
6.93E-004  
1.7E-003  
-3.47E-004

**Varianza de la medida de peso ud. = 3.07E-006 m<sup>2</sup>**

**Desv. típica de la medida de peso ud. = 1.75E-003 m**

La diferencia entre la desviación típica a priori  $3 \cdot 10^{-3} m$  y a posteriori  $1,75 \cdot 10^{-3} m$  es de 1,25 mm.

### 6.3.3. EL RESULTADO DEL AJUSTE DOBLE POR INCREMENTOS DE COORDENADAS A PARTIR DE LOS PARÁMETROS $dx_{V2}$ Y $dy_{V2}$ DE LAS SUBREDES 1 Y 2 GNSS

Hemos obtenido dos soluciones de las mismas variables, que proceden de las subredes 1 y 2. Ambas soluciones son promediadas, y es así como llegamos a la solución final:

Diferencial de la coordenada x:

$$dx_{V2} = (3,27 \cdot 10^{-3} + 0,67 \cdot 10^{-3})/2 = 3,94 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Diferencial de la coordenada y:

$$dy_{V2} = (-1,46 \cdot 10^{-3} - 3,01 \cdot 10^{-3})/2 = -4,47 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

### 6.3.4. LAS MATRICES DE CRITERIO DE LA SUBRED 1

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

**Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.**

+000.5 +000

+000 +000.5

**Matriz cofactor de los RESIDUOS.**

+000.5 +000 -000.50000000 +000

+000 +000.5 +000 -000.50000000

-000.50000000 +000 +000.5 +000

+000 -000.50000000 +000 +000.5

**Matriz cofactor de los observables corregidos.**

+000.5 +000 +000.5 +000

+000 +000.5 +000 +000.5

+000.5 +000 +000.5 +000

+000 +000.5 +000 +000.5

**Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS.**

+000.00000813 +000

+000 +000.00000813

**Matriz varianza-cov a posteriori de los residuos.**

+000.00000813 +000 -000.00000814 +000

+000 +000.00000813 +000 -000.00000814

-000.00000814 +000 +000.00000813 +000

+000 -000.00000814 +000 +000.00000813

**Matriz varianza-cov a posteriori de los observables corregidos.**

+000.00000813 +000 +000.00000813 +000

+000 +000.00000813 +000 +000.00000813

+000.00000813 +000 +000.00000813 +000

+000 +000.00000813 +000 +000.00000813

### 6.3.5. LAS MATRICES DE CRITERIO DE LA SUBRED 2

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

**Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.**

+000.667 +000

+000 +000.5

**Matriz cofactor de los RESIDUOS.**

+000.5 +000 -000.50 +000

+000 +001.333 +000 -000.667

-000.5 +000 +000.5 +000

+000 -000.667 +000 +000.333

**Matriz cofactor de los observables corregidos.**

++000.5 +000 +000.5 +000

+000 +000.667 +000+000.667

+000.5 +000 +000.5 +000 +000

+000.667 +000 +000.667

**Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS.**

+000.00000204 +000

+000 +000.00000153

**Matriz varianza-cov a posteriori de los residuos.**

+000.00000153 +000 -000.00000154 +000

+000 +000.00000409 +000 -000.00000205

-000.00000154 +000 +000.00000153 +000

+000 -000.00000205 +000 +000.00000102

**Matriz varianza-cov a posteriori de los observables corregidos.**

+000.00000153 +000 +000.00000153 +000

+000 +000.00000204 +000 +000.00000204

+000.00000153 +000 +000.00000153 +000

+000 +000.00000204 +000 +000.00000204

### 6.3.6. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD INTERNA DE LA SUBRED 1

La redundancia de un observable es un parámetro adimensional, y nos muestra lo bien o mal que está “controlado” dicho observable. Nuestras redundancias son homogéneas e iguales  $\frac{2}{4} = 0,5$ . Estamos ante la situación óptima.

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de REDUNDANCIAS**

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

1 +001 +000.5 +000.5

2 +001 +000.5 +000.5

3 +001 +000.5 +000.5

4 +001 +000.5 +000.5

Suma de Redundancias = +002

El parámetro de Baarda es el que se emplea para eliminar o rechazar un observable. Todos los parámetros de Baarda en nuestro caso se encuentran en el intervalo  $[-1,14, +1,14] < 3,29$ , y por tanto todos los observables son aceptados.

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**  
**Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)**

Ob. Residuo ( $R_i$ ) Err.cuad( $\sigma_i$ ) Var.de Baarda ( $w_i$ ).

1	+000.003275	+000.00285233	+001.14818139
2	-000.00235500	+000.00285233	-000.82563883
3	-000.00327500	+000.00285233	-001.14818139
4	+000.002355	+000.00285233	+000.82563883

El error máximo que puede deslizarse en uno de nuestros observables y no ser detectado es de  $\nabla_{O_i} = 0,00048$  metros, 0,48 milímetros.

**Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red**

Valor de para el nivel de significación  $\alpha$ , y potencia  $\beta$  del test ,  $\delta = 4.12$

Ob.  $(\sigma_i)$   $(\sqrt{r_i})$   $(\nabla_{O_i})$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{INi} = \frac{\delta_{\alpha}}{\sqrt{r_i}}$

1	+000.00285233	+000.70710678	+000.00048405	+000.16970562
2	+000.00285233	+000.70710678	+000.00048405	+000.16970562
3	+000.00285233	+000.70710678	+000.00048405	+000.16970562
4	+000.00285233	+000.70710678	+000.00048405	+000.16970562

### 6.3.7. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD INTERNA DE LA SUBRED 2

Los parámetros de fiabilidad interna son muy similares a los de la subred 1. Las redundancias son homogéneas y próximas a  $\frac{2}{4} = 0,5$ .

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**

**Comprobaciones de REDUNDANCIAS**

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia

1	+001	+000.5	+000.5
2	+000.5	+001.33333333	+000.66666666
3	+001	+000.5	+000.5
4	+001	+000.33333333	+000.33333333
Suma de Redundancias = +002			
Suma de Redundancias = +002			

Todos los parámetros de Baarda se encuentran en el intervalo  $[-1,37,+1,37] < 3,29$ , y por tanto todos los observables son aceptados.

**Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red**  
**Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)**

Ob. Residuo ( $R_i$ ) Err.cuad( $\sigma_i$ ) Var.de Baarda ( $w_i$ ).

1 -000.00170000 +000.00123900 -001.37206874  
 2 +000.00069333 +000.00202328 +000.34267676  
 3 +000.0017 +000.00123900 +001.37206874  
 4 -000.00034667 +000.00101164 -000.34267677

El error máximo que puede deslizarse en uno de nuestros observables y no ser detectado es de  $\nabla_{O_i} = 0,00030$  metros.

**Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red**

Valor de para el nivel de significación  $\alpha$ , y potencia  $\beta$  del test ,  $\delta= 4.12$

Ob.  $(\sigma_i)$   $(\sqrt{r_i})$   $(\nabla_{O_i})$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$

1 +000.00123900 +000.70710678 +000.00021026 +000.16970562  
 2 +000.00143067 +000.81649658 +000.00021026 +000.14696938  
 3 +000.00123900 +000.70710678 +000.00021026 +000.16970562  
 4 +000.00143067 +000.57735026 +000.00029736 +000.20784609

### 6.3.8. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EXTERNA DE LA SUBRED 1

Es claro que la subred es más pequeña que la red triangulaterada por tanto el parámetro de homogeneidad  $\mu_{Exi}$  ofrece muy poca información.

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

O.  $-\sqrt{1-r_i}$  Parámetro de Homogeneidad  $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1-r_i}$

1 +000.70710678 +000.12  
 2 +000.70710678 +000.12  
 3 +000.70710678 +000.12  
 4 +000.70710678 +000.12

En cuanto al error no detectado  $\nabla_{O_i}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable  $dx_{V_2}$  y  $dy_{V_2}$  según los valores de la tabla siguiente.

**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

**Vectores de fiabilidad externa:**

Observable ... ( 1 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00024202  
 Variable o Parámetro 2... +000  
 Observable ... ( 2 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000  
 Variable o Parámetro 2... +000.00024202  
 Observable ... ( 3 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.00024202  
 Variable o Parámetro 2... +000  
 Observable ... ( 4 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000  
 Variable o Parámetro 2... +000.00024202

La composición cuadrática de los errores transmitidos a las variables  $dx_{V_2}$  y  $dy_{V_2}$  por los observables, supuesto el caso más desfavorable, resulta su composición cuadrática, que en ningún caso supera el milímetro.

Observable	$\sqrt{error\ dx^2 + error\ dy^2}$
1	0,24 mm
2	0,24mm
3	0,24 mm
4	0,24 mm

**6.3.9. COMPROBACIÓN DE LOS OBSERVABLES: FIABILIDAD EXTERNA DE LA SUBRED 2**

El error no detectado  $\nabla_{O_i}$  afectaría en centésimas de milímetro a las variables  $dx_{V_2}$  y  $dy_{V_2}$  según los valores de la tabla siguiente:



**Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**

**Vectores de fiabilidad externa:**

Observable ... ( 1 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000  
 Variable o Parámetro 2... +000.01588419  
 Observable ... ( 2 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000  
 Variable o Parámetro 2... -000.02445533  
 Observable ... ( 3 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... -000.01054781  
 Variable o Parámetro 2... +000  
 Observable ... ( 4 )———[m]  
 Variable o Parámetro 1... +000.03308661  
 Variable o Parámetro 2... +000

La composición cuadrática de los errores transmitidos no alcanza la décima de milímetro.

Observable	$\sqrt{error\ dx^2 + error\ dy^2}$
1	0,015 mm
2	0,024mm
3	0,010 mm
4	0,033 mm

**6.3.10. SEMIEJES DE LA ELIPSE STANDARD Y ELIPSES ASOCIADAS A LA CURVAS PEDALES DE LAS SUBREDES 1 Y 2**

**Subred 1**

Semiejes de la elipse standard, que en este caso resulta un circulo:

$$\Phi_{1\ subred\ 1} = 2,85 \cdot 10^{-3}m$$

$$\Phi_{2\ subred\ 1} = 2,85 \cdot 10^{-3}m$$

Semiejes de la elipse asociada a la podaria, también coincidente con un círculo de radio  $= a_{subred\ 1} = b_{subred\ 1}$ :

$$a_{subred\ 1} = 2,86 \cdot 10^{-3}m$$

$$b_{subred\ 1} = 2,86 \cdot 10^{-3}m$$

## Subred 2

Semiejes de la elipse standard:

$$\Phi_{1\ subred\ 1} = 1,42 \cdot 10^{-3}m$$

$$\Phi_{2\ subred\ 1} = 1,23 \cdot 10^{-3}m$$

Semiejes de la elipse asociada a la podaria,

$$a_{subred\ 2} = 1,44 \cdot 10^{-3}m$$

$$b_{subred\ 2} = 1,20 \cdot 10^{-3}m$$

### 6.3.11. PROBABILIDADES DE ERROR ASOCIADAS A LAS FIGURAS DE ERROR DE LAS SUBREDES 1 Y 2

#### Subred 1

A la circunferencia standard de radio  $2,85\ mm$  se asocia una fiabilidad del 68 %.

A la circunferencia de radio  $= (2 \cdot 2,85\ mm) = 5,7\ mm$  se asocia una fiabilidad del 95 %.

A la circunferencia de radio  $= (2,5 \cdot 2,85\ mm) = 7,13\ mm$  se asocia una fiabilidad del 99 %.

#### Subred 2

Conocida el área de la podaria y el área de la elipse se puede estimar siguiendo la teoría expuesta en el epígrafe 3.1.16 la probabilidad asociada a la elipse a partir de la probabilidad conocida de la podaria.

En la subred 2 siendo la probabilidad de la podaria  $1 \cdot \sigma^2$  (una varianza)  $\langle \rangle \pm 1 \cdot \sigma$  (una desviación típica),  $\langle 0,68 \rangle$ , y la probabilidad de la elipse asociada a  $K^2 \cdot \sigma^2$  (varianzas)  $\langle \rangle \pm K \cdot \sigma$  (desviaciones típicas) con:

$$K_{subred\ 2}^2 = \frac{A_E}{A_P} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} = \frac{2 \cdot (1,44 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,2 \cdot 10^{-3})}{(1,44 \cdot 10^{-3})^2 + (1,2 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{0,3456 \cdot 10^{-5}}{0,3514 \cdot 10^{-5}} = \pm 0,9835$$

$$K = \pm 0,9917$$

$$\text{Prob ES } \langle \rangle \pm \sqrt{\left(\frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \sigma^2\right)} = \pm K \cdot \sigma =$$

$$= \pm 0,9917 \cdot 0,68 = 0,6743 \text{ desviaciones típicas}$$

Así, en nuestra red:

A la elipse standard de semiejes mayor y menor:

$$a_{subred\ 2} = 1,44 \cdot 10^{-3} m$$

$$b_{subred\ 2} = 1,20 \cdot 10^{-3} m$$

se asocia una fiabilidad del  $67,43\% = 67,4\%$ .

Una homotecia de razón adecuada según rutina de la distribución normal practicada a la figura descrita, genera el recinto de incertidumbre con la probabilidad que se precise.

Si en la tabla de la integral de Gauss<sup>3</sup> buscamos la abscisa z correspondiente a un área de  $I = 0,99$  obtenemos :

---

3

“Tratado de Topografía” Tomo I, Manuel CHUECA et alt, páginas 23 y 24. Editorial Paraninfo. Madrid, 1996.

$$z_t = \pm 2,575$$

y si recordamos que el área de error de la elipse correspondía a:

$$z_a = \pm 0,674$$

resulta

$$\frac{z_t}{z_a} = 3,82 \simeq 4$$

Multiplicaremos por 4 los semiejes de la elipse standard para conseguir el área de error de probabilidad 99 %:

$$4 \cdot a = 1,44 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 5,76 \cdot 10^{-3} m = 5,8 \text{ mm}$$

$$4 \cdot b = 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 4,8 \cdot 10^{-3} m = 4,8 \text{ mm}$$

### 6.3.12. ERROR O PERTURBACIÓN db DE LAS SUBREDES 1 Y 2

Siguiendo el mismo método de cálculo que en el epígrafe 3.1.17 obtenemos los errores debidos al db:

**En la subred 1**

$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 0,25$ , error relativo de un 25 % sobre las variables:  $dx_{V2 \text{ subred } 1} = 4,095 \cdot 10^{-3}$ , mm y  $dy_{V2 \text{ subred } 1} = -1,465 \cdot 10^{-3}$  mm.

**En la subred 2**

$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 0,41$ , error relativo de un 41 % sobre las variables:  $dx_{V2 \text{ subred } 2} = 0,67 \cdot 10^{-3}$  mm y  $dy_{V2 \text{ subred } 2} = -3,01 \cdot 10^{-3}$  mm.

### 6.3.13. RESULTADOS FINALES DE LA RED POR INCREMENTOS PARCIALES

#### En cuanto a los resultados de la subred 1:

El vértice  $V_2$  se ha determinado con una fiabilidad del 99 % según un recinto de error definido por un círculo (con radio:  $2,86 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ ) de centro el vértice  $V_2$ .

Existe el riesgo añadido de que cálculos y redondeos den lugar a un error relativo máximo adicional en coordenadas de un 25 % sobre las variables calculadas:

$$dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 4,1 \text{ mm} \text{ y } dy_{V_2 \text{ subred } 1} = -1,47 \text{ mm}.$$

La solución de la subred 1 será

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 163,01455 + 0,0041 = 163,01865 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2 \text{ subred } 1} = 154,2486 - 0,00147 = 154,2471 \text{ m}$$

Solución próxima a la que se obtuvo en la red triangulaterada, se entiende que no pueden ser iguales porque los observables GNSS son de menor precisión que los clásicos. Así la diferencia no obstante entre ambos resultados es de 1,3 mm y 3,1 mm, perfectamente razonable.

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2 \text{ triangulateración}} = 163,01455 + 0,00012 = 163,01972 \simeq 163,020 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2 \text{ triangulateración}} = 154,2486 + 0,0005 = 154,2442 \simeq 154,244 \text{ m}$$

Y la solución de la subred 1 tendrá un recinto de error circular, con 0,99 de fiabilidad, de radio:

$$r = \text{radio} \cdot (1 + 0,25) = 2,86 \cdot 1,25 = 3,58 \text{ mm}$$

#### En cuanto a los resultados de la subred 2:

El vértice  $V_2$  se ha determinado con una fiabilidad del 99 % según un recinto de error definido por una elipse estándar asociada a una podaria (con semiejes:  $1,44 \cdot 10^{-3}m$  , y  $1,20 \cdot 10^{-3}m$ ) de centro el vértice  $V_2$ .

Existe el riesgo añadido de que cálculos y redondeos den lugar a un error relativo máximo adicional en coordenadas de un 41 % sobre las variables calculadas:  
 $dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 0,67 \text{ mm}$  y  $dy_{V_2 \text{ subred } 1} = -3,01 \text{ mm}$ .

La solución de la subred 2 será

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2 \text{ subred } 1} = 163,01455 + 0,0067 = 163,0213 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2 \text{ subred } 1} = 154,2486 - 0,00301 = 154,2456 \text{ m}$$

Que difieren de la red triangulaterada en 1,3 mm y 1,6 mm respectivamente.

Y tendrá un recinto de error elipsoidal, con 0,99 de fiabilidad, de semiejes:

$$a = \text{semieje mayor}_{\text{subred } 1} \cdot (1 + 0,41) = 1,44 \cdot 1,41 \simeq 2,03 \text{ mm}$$

$$b = \text{semieje menor}_{\text{subred } 1} \cdot (1 + 0,41) = 1,20 \cdot 1,41 \simeq 1,69 \text{ mm}$$

# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1. EMPEZANDO POR EL PRINCIPIO: LA NORMALIDAD DEL VECTOR DE OBSERVABLES $O$ Y DEL VECTOR DE RESIDUOS $R$

El resultado de la observación de una red, sea el que fuere el método de observación (clásico, GNSS, mixto), es un vector columna de  $m$  observables  $O = O_{m,1}$ , cuyas componentes es preceptivo lograr que sean variables aleatorias independientes normales.

Si se ha reiterado la observación más de una vez, práctica usual, se acepta como valor más probable la media aritmética. Y el vector columna de  $m$  valores más probables será  $O_T = O_{Tm,1}$ .

Toda la doctrina expuesta en esta publicación tiene su fundamento en que se cumpla lo mejor posible que el vector de valores más probables  $O_T = O_{Tm,1}$  sea aproximadamente igual al vector  $O = O_{m,1}$ , y que su distribución se pueda verificar que es normal:

$$O = O_{m,1} \sim N(O_{Tm,1}, \Sigma_{om,m}) \equiv N(O_T, \Sigma_o) \quad (7a)$$

siendo  $\Sigma_o = \sigma^2 Q =$  matriz varianza covarianza de los observables a priori

Es fundamental tener presente que los resultados del ajuste de la red serán fiables si se cumple la condición de normalidad. Por lo que debe aplicarse a todos los observables un test de normalidad, habiendo elegido en nuestro caso el de adherencia de Pearson como más adecuado.

En cuanto a los residuos si se cumple la hipótesis Gauss-Marcov los residuos  $R$  cumplirán que:

$$E(R) = 0$$

$$R \sim N(0, \Sigma_o) \equiv N(0, \Sigma_o) \quad (7b)$$

aceptamos a priori que las componentes del vector de residuos son normales y centradas (variables aleatorias), lo que sucederá si:

$$O \simeq O_T \simeq C \simeq O_e \quad (7c)$$

siendo vector columna de  $m$  observables  $O$ , el vector de los valores más probables  $O_T$ , el vector de observables compensados  $C$  ( $C = O_T + R$ ), y por último  $O_e$  el desconocido vector de valores exactos.

Y si se cumple (7c) se cumplirá también que:

$$\rho \simeq R \simeq r_e \simeq 0 \quad (7d)$$

siendo el vector de residuos a priori  $\rho$ , el vector de residuos a posteriori  $R$  y el desconocido vector de residuos exactos  $r_e$ . En dicho supuesto podemos utilizar indistintamente  $\rho$  y  $R$ , unificando su notación en  $R$ .

Para comprobar que nuestros observables cumplen (7a) y (7b) es aconsejable verificar a priori si se cumple que  $A \cdot S^{-1} \cdot A^T \cdot P \rightarrow 0^1$ , cuanto más próximos

---

1

Expresión que se deduce simplifcadamente a continuación.

Si es favorable el resultado del Test de Normalidad o Adherencia de Pearson, se cumple (7a) y 7(b). No obstante, cuanto mejor se cumpla el F-Test, bajo la hipótesis nula  $H_o : \sigma_o^2 = \hat{\sigma}_o^2$  puede aceptarse:



a cero sean los elementos de la matriz ( $m \times m$ ) resultante, mejor se cumplirá la condición de Gauss-Marcov y más fiable el ajuste de la red.

En la red triangulaterada de siete observables sin descentrado del epígrafe 3.1 hemos calculado la matriz  $A \cdot S^{-1} \cdot A^T \cdot P$ , y como puede comprobarse en el listado siguiente sus valores son próximos a cero.

**MATRIZ (7x7)  $A \cdot S^{-1} \cdot A^T \cdot P$**

```

0.5397 -0.0060 0.1920 -0.0006 0.0213 0.0288 -0.3814
-0.0767 0.0498 -0.2821 -0.0523 -0.0038 -0.3723 -0.2847
0.4495 -0.0517 0.4029 0.0495 0.0185 0.3752 0.0055
-0.0085 -0.0606 0.3127 0.0650 0.0007 0.4559 0.4260
0.1303 -0.0018 0.0483 0.0003 0.0052 0.0098 -0.0894
0.0591 -0.0598 0.3286 0.0632 0.0033 0.4478 0.3675

-0.4122 -0.0241 0.0026 0.0311 -0.0158 0.1936 0.4897
    
```

**Podemos decir que el vector de observables es de alta calidad cuando se ajusta a los condicionados (7a) y (7b). En gabinete no es posible subsanar las deficiencias de la observación de campo, porque los observables no mejoran con el cálculo.**

**No se puede aplicar indiscriminadamente el método de Gauss-Marcov. Cuando la hipótesis de partida se cumple parcial o deficientemente la solución es menos fiable, y puede llegar a carecer de sentido el ajuste mínimo cuadrático, siendo mejor buscar una solución alternativa.**

---


$$R \sim N(0, Q_{RR})$$

Pero en la expresión (59) de la página 24 del texto “Tratado de Topografía” Tomo III, de M. CHUECA, se deduce que:

$$Q_{RR} = Q - Q_{CC}$$

que implica siempre  $Q_{RR} \neq Q$

siendo  $Q_{RR}$ ,  $Q$ , y  $Q_{CC}$  matrices cofactor de residuos a posteriori, matriz cofactor a priori y matriz cofactor de observables compensados a posteriori.

Desarrollando la fórmula  $Q_{RR} = Q - Q_{CC}$  y aplicándola tan solo al caso particular de observaciones indirectas, llegamos a la expresión (164) (de la pg. 45 del texto “Tratado de Topografía” Tomo III, de M. CHUECA):

$$Q_{RR} = Q - Q_{CC} = E \cdot Q$$

$$\text{donde } E = I - A \cdot S^{-1} \cdot A^T \cdot P$$

Por consiguiente, en buena praxis estadística es aconsejable comprobar a priori si tiende a cero la expresión:  $A \cdot S^{-1} \cdot A^T \cdot P \rightarrow 0$  y cuanto menor sean los elementos de la matriz ( $m \times m$ ) resultante, mayor poder de afirmación tendrá el ajuste propuesto.

La condición de mínimos cuadrados es la que se deriva del modelo estadístico Gauss-Marcov, es decir la solución más probable si los observables están normalmente distribuidos. Al compensar se homogeneizan los errores y se obtiene una solución que, si la red es de alta precisión, es casi coincidente con cualquier solución sin compensar, como hemos comprobado en los ajustes de la presente publicación. Sirva de ejemplo el resultado del ajuste de la red de observables clásicos triangulaterada del epígrafe 3.1.8, las coordenadas finales  $(X_{V_{2C}}, Y_{V_{2C}})$ , que es la solución más probable del ajuste, son iguales a las aproximadas iniciales  $(X_{V_2}, Y_{V_2})$  hasta el milímetro, siendo las correcciones obtenidas en el ajuste  $dx_{V_2}$  y  $dy_{V_2}$ :

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2} = 163,0196 + 0,00012 = 163,01972 \simeq 163,020 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2} = 154,2438 + 0,0005 = 154,2443 \simeq 154,244 \text{ m}$$

**Es esencial entender que el método de Gauss-Marcov se justifica porque además de proporcionar la solución más probable permite fundamentalmente la interpretación de cada variable del ajuste (residuos, observables compensados, coordenadas, etc) y la obtención de recintos de error con probabilidades asociadas, cifrando su precisión y su incertidumbre con el mayor rigor posible. Nuestra pretensión básica es predecir y justificar los resultados en cada una de sus fases. No tanto mejorar los resultados como establecer rigurosamente su interpretación<sup>2</sup>.**

---

2

*“It is unfortunate that least-squares adjustment is most often associated only with high-precision surveying...least-squares adjustmen is a device for carrying out objective **quality control of measurements** by processing sets of redundant observations according to mathematically well-defined rules”.* Alfred LEICK “GPS. Satellite Surveying”, pag. 92 y 93. 2004. Méjico.

## 7.2. EL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD. CUMPLIMIENTO DEL TEST FISHER-SNEDECOR

Consideramos que el valor de la varianza del observable de peso unidad  $\sigma_0^2$  que más se ajusta a su valor real es el de la mediana muestral<sup>3</sup> de los valores de  $\hat{\sigma}_{o_i}^2$ , obtenidos en campo.

A partir de la ecuación:

$$\hat{\sigma}_{o_i}^2 = \frac{\sum(O_{T_i} - O_i)^2}{m_i - 1}$$

calculamos  $\hat{\sigma}_{o_i}^2$  para cada observable de nuestra red. Las unidades de  $\hat{\sigma}_{o_i}^2$  deben ser lineales, se hará la conversión de las varianzas de los ángulos y las distancias según las ecuaciones de los epígrafes 3.1.6 y 3.1.7 respectivamente.

**De entre los valores  $\hat{\sigma}_{o_i}^2$  seleccionamos la mediana, y desde este momento la mediana se convierte en la varianza del observable de peso unidad  $\sigma_0^2$  a priori.** En la curva normal teórica mediana y media coinciden. En nuestros cálculos deberán ser muy próximas si las distribuciones muestrales son representativas. **Cuanto más se asemejen entre sí la mediana y la media de las varianzas a priori  $\hat{\sigma}_{o_i}^2$  de los observables de la red, mejor y más fiables serán los resultados y su interpretación.**

Como idea básica está claro que cualquier hipótesis a priori que se haya aceptado debe ser contrastada a posteriori. Y como nunca sucederá exactamente lo previsto será preciso interpretar las discrepancias y cifrar en términos de probabilidad la fiabilidad del resultado. Así compararemos la varianza del observable de peso unidad a priori y a posteriori, y será necesario que se cumpla el F-Test, bajo la hipótesis nula  $H_o : \sigma_o^2 = \hat{\sigma}_o^2$ .

---

3

También podría utilizarse en lugar de la varianza muestral:  $\hat{\sigma}_{o_i}^2 = \frac{\sum(O_{T_i} - O_i)^2}{m_i - 1}$ , la varianza poblacional  $\sigma_{\sigma_{T_i}}^2 = \frac{\sigma_{o_i}^2}{m_i}$ . Estadísticamente ambos estimadores son correctos.

Si nuestros estimadores del observable de peso unidad a priori y a posteriori pasan el test estamos seguros de que no se ha rechazado una red aceptable<sup>4</sup>, los estimadores a priori y a posteriori son compatibles estadísticamente y significa que la ponderación efectuada es homogénea, realista y representativa de la realidad física. Esto será menos cierto cuanto más dispares sean los estimadores a priori y a posteriori. Eso no quiere decir que baste con ello siendo riguroso para aceptar el ajuste. Una cosa es no rechazar, otra muy distinta, aceptar.

La varianza del observable de peso unidad a posteriori responde a la ecuación:

$$\sigma_o^2 = \sigma_{o1}^2 = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m-n} = \frac{1}{m-n} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} p_i \cdot R_i^2 \quad (7e)$$

siendo  $p_i$  pesos a priori y  $R_i$  residuos a posteriori

Una vez conocido a partir de los datos de campo las varianzas de cada observable del ajuste seleccionamos de entre todas ellas el valor de la mediana, según ya se dijo, como la varianza del observable de peso unidad a priori, que sabemos proviene de:

$$\hat{\sigma}_{oi}^2 = \sigma_{o2}^2 = \frac{\sum (O_{Ti} - O_i)^2}{m_i - 1} = \frac{\sum (\rho)^2}{m_i - 1} \quad (7f)$$

siendo  $\rho$  los residuos a priori

y que una vez determinada será el estimador a priori  $\sigma_{o2}^2$ , con esa nomenclatura para poder distinguirlo del estimador a posteriori  $\sigma_{o1}^2$ .

A partir de las ecuación (7e) y (7f) obtenemos:

$$\frac{\sigma_{o1}^2}{\sigma_{o2}^2} \cdot (m - n) = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sigma_{o2}^2} \cdot p_i \cdot R_i^2 = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sigma_{o2}^2} \cdot \frac{\sigma_{o2}^2}{\sigma_i^2} \cdot R_i^2 =$$

---

<sup>4</sup> Lo que se conoce como error estadístico de primer orden. Ojalá pudiéramos estudiarlo bajo la hipótesis alternativa  $H_1 : \sigma_o^2 \neq \hat{\sigma}_o^2$ . Pero no sabemos como...

$$= \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot R_i^2 = \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{R_i}{\sigma_i}\right)^2 = (\chi^2)_{m-n}$$

Cuanto más se parezcan  $\sum_{i=1}^{i=m} (R_i^2)$  y  $\sum_{i=1}^{i=m} (\sigma_i^2)$  más se aproximarán los valores  $\sigma_{01}^2$  y  $\sigma_{02}^2$ , y mayor fiabilidad tendrá nuestro ajuste. Que es lo mismo que decir que un residuo cualquiera a posteriori cumpla  $R_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ , siendo  $\sigma_i^2$  la varianza a priori del observable del que proviene. Sabemos que el peso  $p_i$  es función de la varianza  $\sigma_i^2$ .

Sirva de ejemplo la red de observables GNSS resuelta por incrementos, de matriz  $A$  y vector  $K$ :

**MATRIZ A**

A( 1, 1) = 1  
 A( 1, 2) = 0  
 A( 2, 1) = 0  
 A( 2, 2) = 1  
 A( 3, 1) = 1  
 A( 3, 2) = 0  
 A( 4, 1) = 0  
 A( 4, 2) = 1

**VECTOR K**

k( 1) = -1.4E-003  
 k( 2) = 5.5E-003  
 k( 3) = 5.1E-003  
 k( 4) = -4.4E-003

Podemos observar el paralelismo que existe entre los pesos y los cuadrados de los residuos:

**MATRIZ DE PESOS**

Peso del observable 1 1  
 Peso del observable 2 1  
 Peso del observable 3 1  
 Peso del observable 4 .25

**VARIABLES O PARÁMETROS**

1.85E-003  
 3.52E-003

**RESIDUOS**

3.25E-003  
 -1.98E-003  
 -3.25E-003  
 7.92E-003

Varianza de la medida de peso ud. = 2.07E-005 Desv. típica de la medida de peso ud. = 4.51E-003

circunstancia que afecta directamente a la relación entre estimadores a priori  $\sigma_o = 3 \cdot 10^{-3} \text{m}$ , y a posteriori  $\sigma_o = 4,51 \cdot 10^{-3} \text{m}$ .

Pero no es suficiente para aceptar la red pasar el F-test porque existe el riesgo de aceptar una red rechazable<sup>5</sup>. No conocemos hasta ahora el test definitivo y es preciso tomar cuantas precauciones adicionales podamos y sepamos. Parece razonable que haya que pasar más filtros (fiabilidad interna y externa de la red, recintos de error con probabilidades asociadas...).

**Por último insistir en que si el estimador de la varianza de peso unidad a priori proviene de las varianzas de los observables aceptados, que forman parte del ajuste, mejora indudablemente la predicción de la varianza a posteriori<sup>6</sup> del observable de peso unidad.** Se entiende que los residuos calculados y ajustados tengan la desviación típica asignada desde un comienzo a los observables sin ajustar.

No se olvide que la varianza a posteriori del observable de la medida de peso unidad es un parámetro fundamental porque además multiplica a las matrices de criterio, matrices básicas en la interpretación de los resultados.

### 7.3. LA PRECAUCIÓN DE HOMOGENEIZAR LOS PESOS

Conseguiremos el objetivo primordial del ajuste mínimo cuadrático (interpretar y predecir resultados) siempre que logremos una ponderación homogénea y representativa de la realidad física. Sin descompensaciones producidas por pesos enormes y muy pequeños simultánea y comparativamente.

La solución de la red es la que minimiza la suma de las correcciones ponderadas

---

5

Error estadístico de segundo orden.

6

La varianza del observable de peso unidad a posteriori en su caso más general es:  $\sigma_o^2 = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m - R(A)} = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m - R(S)}$ , y en el caso determinista que nos ocupa es  $\sigma_o^2 = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m - n}$ .

al cuadrado y se expresa según el algoritmo:

$$R^T \cdot P \cdot R = k^2 = \text{mínimo}$$

siendo evidente que la matriz de pesos es determinante en la solución del ajuste y en todos los resultados.

La matriz  $P$  afecta al sistema de formas lineales, así, pesos muy pequeños anulan la influencia de los observables, hasta hacer inútil su inclusión en el ajuste o hacer inútil la aplicación del método, que puede ser redundante sólo en teoría. Los observables de peso muy grande serán siempre los que determinen el resultado del ajuste. Nos puede servir de ejemplo la comparación entre la red clásica y la red de observables GNSS y clásicos, del epígrafe 4.8. El deterioro en calidad de interpretación provocada por la heterogeneidad de los pesos es evidente, pasamos de una  $F = 1,26$  a otra  $F = 1,85$ . Si nuestros observables tienen varianzas muy diferentes a priori (y los pesos también serán diferentes) no parece lógico que procedan de una misma distribución normal. En la red del epígrafe 5.5 “Resultados del ajuste de la red mixta con matriz de pesos factorizada” la matriz  $P'$  de pesos alcanza valores absolutamente dispares después de la factorización:

#### **MATRIZ DE PESOS P'**

Peso del observable 1 9E-003

Peso del observable 2 7.1E-002

Peso del observable 3 6E-004

Peso del observable 4 2E-003

Peso del observable 5 2.7

Peso del observable 6 4603534

Peso del observable 7 0.6

Peso del observable 8 129531

Peso del observable 9 1

Y la relación entre la varianza el observable de peso unidad a priori  $\sigma_0^2 = 5,1 \cdot 10^{-8} m^2$  y a posteriori  $\sigma_0^2 = 4,62 \cdot 10^{-7} m^2$  es :

$$F = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{4,62 \cdot 10^{-7}}{5,1 \cdot 10^{-8}} = 9,06$$

El valor 9,06 está muy lejos del valor 1. El deterioro en calidad de interpretación es evidente y de nuevo podemos decir que el desequilibrio proviene de la falta de homogeneidad de los pesos. Nos remitimos de nuevo al epígrafe 5.5 para recordar que las consecuencias de la matriz de pesos con grandes diferencias entre sus valores provoca interpretaciones absurdas en los parámetros de fiabilidad interna y externa: son precisamente los observables de mayor peso los que no están controlados en absoluto (número de control  $\simeq 0$ ) lo que implica que pueden tener errores groseros porque no se ajustan a la redundancia media, lo que sucede con el observable clásico n<sup>06</sup> y el observable GNSS n<sup>08</sup>, sorprende que siendo este último de menor precisión tenga mayor peso. Sin embargo los observables de menor peso tienen un número de control  $\simeq 1$ , que es el óptimo.

Se derivan otras importantes consecuencias de la mezcla indiscriminada de observables con diferentes precisiones, así sabemos que conocida la matriz  $S$  :

$$S = (A^T P A)$$

los semiejes de la elipse estándar de error se obtienen a partir de sus autovalores, según la ecuación:

$$\Phi_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$$

La matriz de pesos no homogénea altera la longitud de los ejes llegando en casos extremos a dar lugar a autovalores  $\mu_i$  próximos a cero, de semiejes inmensos, y autovalores  $\mu_k$  grandes de semiejes diminutos<sup>7</sup>.

La elipse de error asociada a la podaria es de la forma:

$$ES \equiv \sigma_x^2 \cdot y^2 - 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y + \sigma_y^2 \cdot x^2 = (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy})$$

y se calcula a partir de la matriz varianza covarianza de las variables o parámetros de la red:  $Q_{xx} = S^{-1} = (A^T P A)^{-1}$ . Vuelve a ser definitiva la influencia de la

---

<sup>7</sup> Estamos rondando, como sucede en análisis de correcciones a variables en redes libres, el hiperelipsoide degenerado en hipercuádrica cilíndrica.



matriz de los pesos  $P$  en la figura de error, mejorando o empeorando su forma y dimensiones.

En cuanto al error o perturbación  $db$  decir que su ecuación depende del condicionamiento  $k$  de la matriz  $S$ , definidos por el mayor y menor autovalor de  $S$ ,  $k = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}}$ . La expresión de cómo afecta el error relativo  $\frac{\|db\|}{\|b\|}$  al error relativo del vector de correcciones  $\frac{\|dx\|}{\|x\|}$  es:

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|}$$

Si los autovalores máximo y mínimo de  $S$  son muy diferentes, y el valor de  $k$ , muy distinto de 1, el error de redondeo puede modificar el resultado en un porcentaje altísimo. De nuevo interesa que los pesos sean homogéneos.

En el caso de utilizar ángulos y distancias el mejor modo, a nuestro entender, de encontrar la homogeneidad de pesos es tener unidades lineales en ambas observaciones y en las varianzas que utilizaremos para su ponderación. Aconsejamos por ello el nuevo método de triangulateración.

Para que la compensación sea homogénea es necesario conseguir que el cuadrilátero de ponderación se parezca a un cuadrado en cualquier caso (*cfr.* figuras 3.7 y 3.8).

La factorización de la matriz completa de pesos  $P$  a priori, situación habitual en una red GNSS, será según expresión (22) :

$$\begin{aligned} R^T \cdot P \cdot R &= R^T \cdot \Gamma \cdot V \cdot \Gamma^T \cdot R = \\ &= (\Gamma^T \cdot R)^T \cdot V \cdot (\Gamma^T \cdot R) = R'^T \cdot V \cdot R' \end{aligned}$$

siendo las matrices de autovectores y autovalores de  $P$ :  $\Gamma$  y  $V$

la factorización de  $P$  puede aniquilar la homogeneidad de los pesos y además, y como hemos demostrado en el epígrafe 2.2, el resultado del ajuste no es solución Gauss-Marcov por no pertenecer a su lugar geométrico, lo que no implica

obtener una resultado desfavorable o absurdo de las correcciones a las coordenadas aproximadas obtenidas en el ajuste, pero sí implica error teórico de concepto y el nulo o escaso poder de afirmación de la interpretación del algoritmo.

No es posible, en general, aplicar Gauss-Marcov con matrices de pesos completas ni resolver la aparición de covarianzas mediante una rotación, derivada o no de factorización previa. La solución Gauss-Marcov es rigurosamente incompatible con las covarianzas estudiadas aparecidas a priori o inducidas, que siempre pueden explicarse a través de una rotación directa genérica de matriz  $\Gamma^T$  o  $\Gamma'^T$ , o una rotación inversa  $\Gamma$  o  $\Gamma'$ , del n-edro coordenado. Se resuelve rigurosamente el problema modificando los observables, en especial los GNSS aplicando triangulateración o doble ajuste por incrementos de coordenadas.

## 7.4. SÍNTESIS FINAL

En resumen el método de ajuste mínimo cuadrático Gauss-Marcov avanzado que desarrollamos y proponemos:

- No pretende mejorar el trabajo de campo. Sí la interpretación de resultados.
- A este efecto es necesario que en la observación se tome el número suficiente de lecturas para poder seleccionar el número que interese en el proyecto.

El número de lecturas  $n$  sabemos que afecta directamente a la varianza del observable (y ésta, a su vez, al peso), al estudio de la normalidad del observable y también al error o perturbación  $db$ , según se deduce de la expresión:

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = k \cdot \frac{[TrB]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot P \cdot \text{diag}(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot P \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|}$$

siendo  $n = N_i$

- Es preciso conseguir que los observables del ajuste sean variables aleatorias independientes normales. Es necesario que superen el test de normalidad, en nuestro caso el test de adherencia de Pearson como más adecuado.

- Los pesos deben ser homogéneos.
- Es imprescindible que la varianza del observable de peso unidad a priori y a posteriori superen el test de Fisher-Snedecor. Si utilizamos el método de incrementos de coordenadas, puede ayudarnos a lograr este propósito, estudiar los valores de los residuos del ajuste doble de incrementos de coordenadas, y en función de ellos, decidir qué observables formarán parte de cada uno de los sistemas de ecuaciones, ya que en el caso determinista que nos ocupa la varianza del observable de peso unidad a posteriori es función de los residuos  $R$ , siendo  $\sigma_o^2 = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m-n}$ .
- Se deben tomar otras precauciones como son: el estudio de la fiabilidad interna y externa de la red, el análisis de las figuras de error con fiabilidades asociadas, y la estimación de los errores de cálculo.
- Así las cosas los métodos de ajuste gaussiano de triangulación y de incrementos de coordenadas se pueden aplicar con todo rigor a observables GNSS o a observables clásicos siempre que se cumplan las exigencias previas y el protocolo establecido. La aplicación de los dos métodos sobre una misma red puede ser útil para verificar la validez de los resultados obtenidos y su interpretación.
- Y debe tenerse presente que los resultados y su interpretación en una red de observables clásicos junto a observables GNSS ajustada por el método de triangulación o por el método de incrementos de coordenadas son peores generalmente que si se emplean por separado ambos tipos de observables. Se podrán combinar satisfactoriamente solamente si se logra que sus varianzas sean similares y con ello que también lo sean sus pesos.

Los métodos de triangulación e incrementos de coordenadas suponen a nuestro entender un valioso avance en la teoría y praxis de la Microgeodesia, pero en modo alguno su automatización. El buen hacer, el arte y la ciencia del ingeniero proyectista siguen siendo insustituibles por programa informático alguno.

En sucesivos trabajos D.m. seguiremos avanzando en la línea de investigación emprendida. Ampliaremos la teoría y praxis presente con otras cuestiones

relevantes, como por ejemplo el estudio riguroso de recintos de error, su extensión a todos los puntos de una red, su extensión a los puntos que componen el modelo de un terreno y también a la variación en el tiempo de redes y modelos, osea, el cálculo de deformaciones.

# Capítulo 8

# Bibliografía

# Bibliografía

- [1] ANQUELA, A.B.; CHUECA, M.; BERNÉ, J.L., *Aportación al problema general de redes locales de alta precisión: condicionantes específicos de fijación de criterios teóricos y prácticos, de calificación de parámetros intermedios y resultados finales*, Tesis Doctoral, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2001.
- [2] ASHKENAZI, V., *Models for control in National and continental Network*, *Bulletin Geodesique*, Vol. 55, 1981.
- [3] ASHKENAZI, V., *Criterion for optimisation Boletino di Geodesia e Scienze Affine*.
- [4] BAARDA, W., *Measures for the accuracy of geodetic networks*, Hungría, Sopron, 1977.
- [5] BAARDA, W., *S-transformations and Criterion Matrices*, *Netherlands Geodetic Commission*, Vol. 5, núm. 1, 1973.
- [6] BAARDA, W., *Statistical concepts in Geodesia*, Delft, Holanda, *Rijkscommissie voor geodesie*.
- [7] BAARDA, W., *Statistical Transformations and Criterion Matrices*, Delft, Holanda, *Rijkscommissie voor geodesie*.
- [8] BANNISTER, A.; RAYMOND, S., *Técnicas modernas en topografía*, R. S. Méjico, 1984.

- [9] BASELGA, S., *Aplicación informática para el diseño y compensación de redes locales, Proyecto Fin de Carrera de Ingeniería en Geodesia y Cartografía*, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2000.
- [10] BASELGA, S.; CHUECA, M.; BERNÉ, J.L., *Cálculo, compensación e interpretación de resultados en redes locales de alta precisión observadas por GPS y Topografía Clásica con aplicación de análisis estadístico multivariante y técnicas de estimación robusta*, Tesis doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.
- [11] BELAYEV, V., *Optimal weighting in linear function estimation*, *Journal of Geodesy*, 1996.
- [12] BERNÉ, J. L.; HERRÁEZ, J., *Instrumentos modernos en Topografía*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [13] BERNÉ, J. L.; BASELGA, S.; ANQUELA, A. B., *RedTop. Aplicación Informática para el Diseño, Análisis y Compensación de Redes Topográficas*, Valencia, Editorial de la Universidad Politécnica, 2000.
- [14] BJERHAMMAR, A., *Theory of errors and generalized matrix inverses*, *Elsevier*, 1973.
- [15] BEZOARI, G.; MARTÍ, C.; SELVINI, A., *Topografía. Cartografía*, Milán, *Hoepli*, 1994.
- [16] BLACHUT, T. J. A., CHRZANOWSKI, A., SAASTAMOINEN J.H., *Cartografía y levantamientos Urbanos*, Méjico, Librería del Congreso, 1980.
- [17] BLACKIE AND SON LTD. Lauf. G. B., *The method of least Squares*.
- [18] BOMFORD, G., *Geodesy*, Londres, *Oxford University Press*, 1971.
- [19] BURNSIDE, C. D., *Electromagnetic Distance measurements*, *Crosby Lockwood*, 1971.

- [20] CAMACHO, A.; MARTÍN, M., *Constreñimientos internos en la compensación de estaciones*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1986.
- [21] CASPARY, W. F., *Concepts of network and deformation analysis*, School of Surveying, Australia, The University of New South Wales, Monograph XI, 1987.
- [22] CHEN, Y. Q., *Analysis of deformations. Surveys A. generalized Method*, Canadá, Dep. Sur. Eng. Fredericton.
- [23] CHUECA, M., *Topografía*, Madrid, Dossat. S.A., 1982.
- [24] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Análisis de errores*, Valencia, Tomo I, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [25] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Nivelación*, Valencia, Tomo II, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [26] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Poligonación*, Valencia, Tomo III, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [27] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Triangulación*, Valencia, Tomo IV, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [28] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Redes topográficas y locales*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1994.
- [29] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Ampliación de redes topográficas y locales*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1995.
- [30] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia*, Madrid, Ed. Paraninfo, 1996.
- [31] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Métodos Topográficos*, Madrid, Ed. Paraninfo, 1996.



- [32] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L., *Ampliación de Redes Topográficas y locales. Cuestiones de Diseño*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.
- [33] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Avances en la interpretación de resultados en Redes Locales*. Recintos de Error, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2001.
- [34] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.
- [35] CHUECA, M.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los Problemas del Datum y Principal de Diseño*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2007.
- [36] DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F., *Topografía general y aplicada*, Madrid, Dossat, 1978.
- [37] ESPIGA GÓMEZ LOBO, *El tratamiento matricial del método de los mínimos cuadrados*, Madrid, Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.
- [38] FERRER TORIO, B.; PINA, B., *Métodos topográficos*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1991.
- [39] FERRER TORIO, R.; PINA, B., *Introducción a la topografía*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1991.
- [40] FERRER TORIO, A., y otros, *Topografía aplicada a la Ingeniería Civil*, Cantabria, Universidad de Cantabria, 1992.
- [41] GRAFAREND, E. W., “*Optimisation of Geodetic Networks*”. Bollettino di Geodesia e Science Affini.
- [42] GROTEN. E.; STRAU, B., *GPS - Techniques Applied to Geodesy and Surveying*, Berlín, Springer Nerlag, 1988.

- [43] HEISKANEN y MORITZ, *Geodesia Física*, Madrid, IGN.
- [44] HIRVONEN, R. A., *Adjustment by least squares in Geodesy and Photogrammetry*, Ungar Pub, 1971.
- [45] HOFMAN-WELLWN HOF., *GPS. Theory and Practice*, New York, Lichtenegger and Collins, Springer-Verlay, 1994.
- [46] HOTINE, M., *Mathematical Geodesy*, Washington D.C., U. S. Department of Commerce, 1969.
- [47] ISAHÍ PRECISSION CO.LTC, “*Principios de la medición electrónica*”, Revista Topográfica y Cartográfica, núms. 28 y 29.
- [48] JIMÉNEZ MARTÍNEZ, M.J.; MARQUÉS MATEU, A.; PAREDES ASENSIO, J.M.; VILLAR CANO, M., “*Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local. Método de Triangulación*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: [www.racv.es/racv\\_digital](http://www.racv.es/racv_digital), 2010.
- [49] JORDAN, W., *Tratado general de topografía*, Barcelona, Gustavo Gilí, 1974.
- [50] KENNIE and G. PETRIE, *Engineering Surveying Technology*
- [51] KINCAID, D.; CHENEY, W., *Análisis Numérico: las Matemáticas del Cálculo Científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
- [52] LEICK, A., *GPS. Satellite Surveying*, New York, John Wiley and Sons, 1990.
- [53] LEICK, A., *GPS. Satellite Surveying*, New York, John Wiley and Sons, 2004.
- [54] LEVALLOIS, *Geodesie Générale*, París, Eyrolles, 1970.
- [55] LÓPEZ CUERVO, *Topografía*, Madrid, Mundi Prensa, 1994.
- [56] MAESTRO, I., BASELGA, S., CHUECA, M., *Contribución al estudio microgeodésico de deformaciones: diseño de redes mediante el cálculo y modelización de la incertidumbre*, Tesis Doctoral, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2005.

- [57] MARTÍN ASÍN, F., *Geodesia y Cartografía matemática*, Madrid, Paraninfo, 1989.
- [58] MARUSSI, A., *Intrinsic Geodesy*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1985.
- [59] MIKHAIL, E. M.; ACKERMAN, F., *Observations and least squares*, New York, IAP. Dun-Donneley Pub, 1976.
- [60] MIKHAIL and ACKERMANN, *Analysis and Adjustments of Survey Measurements*, New York, Van Nostrand.
- [61] MONTES DE OCA, M., *Topografía*, R. S. México, 1985.
- [62] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., *Ajuste de redes geodésicas en un arco Tridimensional*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [63] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., “*Análisis de redes libres*”, Asamblea nacional de Geodesia y Geofísica, Madrid, 1987.
- [64] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., “*Concepto de precisión y fiabilidad en redes Geodésicas*”. Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.
- [65] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A. y VALBUENA DURAN, J. L., *Determinación de movimientos pequeños por procedimientos de trilateración. Aplicación a la auscultación de presas. Particularización a la presa del Atazar*, Santander, E.T.S.I.Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [66] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., *Distanciometría electrónica de precisión. Distanciómetros submilimétricos*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [67] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., *Medida electrónica de los parámetros topográficos*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.

- [68] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., VII *Curso de Geodesia Superior. Instrumentos, teoría y funcionamiento*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1991.
- [69] OJEDA RUIZ, J. L., *Métodos topográficos y oficina técnica*, Madrid, El Autor, 1984.
- [70] OLLIVIER, F., *Instruments Topographiques*, París, Eyrolles, 1995.
- [71] POPE, A. J., *The statistics of the residuals and the detection of outliers*, Grenoble, IUGG XVIII, General Assembly, 1975.
- [72] RICHARDUS, P.; ALIMAN, J., *Project Surveying*, Amsterdam, North-Holland Publising Co., 1966.
- [73] RICHARDUS. P., *Project Surveying*, Netherlands, A. Balkema, 1977.
- [74] RÜEGER, J.M., *Electronic Distance Measurement*, Berlin Heiderberg, Alemania Edit. Springer-Verlag, 1996.
- [75] RÜEGER, J.M., "Precision of measurements and least squares", 37th Australian Surveyors Congress, Perth, Western Australia, 13-19 April 1996.
- [76] RUIZ MORALES. M., *Manual de Geodesia y Topografía*, Granada, Proyecto Sur, 1991.
- [77] RUSSELL, C; WOLF, P.R., *Elementary Surveying*, Harper and Row Publishers, Inc., 1984.
- [78] SEVILLA, M. J.; NÚÑEZ, A., *Ajuste y análisis estadístico de ondulaciones del geode*, Madrid, Física de la Tierra, U. Complutense, 1980
- [79] SEVILLA, M. J., *Colocación mínimos cuadrados*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1987.
- [80] SEVILLA, M. J., *Curso de Geodesia Superior*, Madrid, U.C., 1987.

- [81] SEVILLA, M. J.; MUÑOZ, P. VELASCO, J.; ROMERO, P., “*Calibración de un distanciómetro de infrarrojos en una base interferométrica*”. Topografía y Cartografía, Vol. III, 1987.
- [82] SEVILLA, M. J., *Compensación de redes de nivelación trigonométrica*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1989.
- [83] SEVILLA, M. J., *Soluciones progresivas en el método mínimos cuadrados*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1989.
- [84] SEVILLA, M. J., *Física de la Tierra II*, Madrid, Universidad Complutense, 1990.
- [85] SEVILLA, M. J., “*Refracción atmosférica y su influencia en la medida electromagnética de distancias*”, Madrid, VII Curso de Geodesia Superior, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1991.
- [86] STRANG, G., *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Madrid, Addison-Wesley, 1990.
- [87] TORGE WOLFGANG, *Geodesia física*, Madrid, Diana, 1983.
- [88] VALBUENA DURAN. J. L., “*Distanciometría electrónica, calibración y puesta a punto*”, Topografía y Cartografía, Vol. IV, 1989.
- [89] VANICEK, P., y KRAKWSKY, E., *Geodesy*, Amsterdam, North Holland, 1986.
- [90] WELLACH, W., *A review of the adjustment of the free network*. Survey Review, XXV, 194, 1979.
- [91] ZAKATOV, *Curso de Geodesia Superior*, Moscú, Mir.
- [92] ZUND, Joseph, *Foundations*.