

© Copyright: M^a José Jiménez Martínez, A. Marqués Mateu, J.M. Paredes Asencio, M.
Villar Cano

E-mail: mjjimenez@cgf.upv.es

RECEPCIÓN: 20-01-2011

APROBACIÓN: 27-01-2011

PROGRESO EN LA PRÁCTICA DEL AJUSTE
GAUSSIANO DE UNA RED LOCAL: MÉTODO DE
TRIANGULACIÓN

M.J. Jiménez Martínez, A. Marqués Mateu, J.M. Paredes Asencio, M. Villar Cano

VALENCIA, ENERO 2011

Índice general

1. Introducción y planteamiento del trabajo	4
1.1. Localización de la Red de Prueba	6
1.2. Monumentación, materiales y características constructivas	6
1.3. Especificaciones técnicas de las estaciones totales utilizadas	9
2. Resultados de la Observación. Vector de Observables	12
2.1. Observaciones angulares azimutales	12
2.1.1. Test de adherencia de Pearson	13
2.2. Observaciones distanciométricas	17
2.2.1. Test de adherencia de Pearson	18
3. El vector de coordenadas aproximadas X_a. Consistencia de la Figura	20
3.1. Cálculo de la Consistencia de la Figura y optimización del camino de cálculo del vector X_a	21
3.2. Un primer ajuste. La red Libre Triangulada	26
3.3. Cálculo de las coordenadas aproximadas y de los azimutes	29
3.3.1. Cálculo de las coordenadas aproximadas por el camino de mejor consistencia angular	29
3.3.2. Cálculo de las coordenadas aproximadas por el camino de mejor consistencia distanciométrica	31
3.3.3. Cálculo de azimutes	33
4. Ponderación de observables	36
4.1. Varianza del observable de peso unidad	36
4.2. Ponderación según las características técnicas de la instrumentación	37
4.3. Ponderación según los observables de la red	38
4.4. La ponderación y cálculo en la práctica de una red triangulaterada con homogeneización de datos	39

4.4.1.	Método de cálculo de la triangulación en ajuste gaussiano determinista con homogeneización de datos	40
4.4.2.	El factor de conversión y el peso de las formas lineales de azimut	54
4.4.3.	El factor de conversión y peso de las formas lineales de distancia	55
4.4.3.1.	Pesos homogeneizados	57
5.	Resolución de la red triangulaterada	58
5.1.	Formas lineales de azimut	58
5.1.1.	Ecuaciones de azimut factorizadas	59
5.2.	Formas lineales de distancia	59
5.2.1.	Ecuaciones de distancia factorizadas	60
5.3.	Síntesis y resultado del ajuste de la red triangulaterada	60
5.3.1.	La matriz A, la matriz de pesos P, el vector de términos independientes K, y la matriz S	61
5.3.1.1.	Un ejemplo aclaratorio	63
5.3.2.	El vector de variables, el vector de residuos y la varianza a posteriori del observable de peso unidad	66
5.3.3.	Las matrices de criterio : matriz cofactor de las variables o parámetros, matriz cofactor de los residuos, matriz cofactor de los observables corregidos, matriz varianza-covarianza de las variables o parámetros, matriz varianza-covarianza a posteriori de los residuos, y matriz varianza-covarianza a posteriori de los observables corregidos	68
5.3.4.	Comprobación de los observables: fiabilidad interna de la red	69
5.3.5.	Comprobación de los observables: fiabilidad externa de la red	72
5.4.	Semiejes de la elipse standard	75
5.5.	Nota sobre la constante K	76
6.	Figuras de error	78
6.1.	La podaria o curva pedal	78
6.2.	La elipse asociada a la curva pedal	80
6.3.	Probabilidades de error asociadas a las figuras de error	80
7.	Cálculo del porcentaje de error en ajuste gaussiano determinista	83
7.1.	Teoría sobre el cálculo de porcentaje de error en ajuste gaussiano determinista	83
7.2.	Error o perturbación db	94
7.3.	Error o perturbación db con ponderación clásica	98
7.4.	Error o perturbación dS	100

8. Conclusiones	102
8.1. Resultados finales	102
8.2. Protocolo de cálculo y de análisis del método de triangulación .	104
8.2.1. Los observables	105
8.2.2. Las coordenadas aproximadas	105
8.2.3. La solución pseudoinversa	108
8.2.4. El método de ponderación de la triangulación	109
8.2.4.1. Varianza del observable de peso unidad de los ob- servables de la red topográfica	110
8.2.4.2. Los errores angulares y lineales proyectados en el cuadrilátero de ponderación	111
8.2.4.3. Factor de conversión y peso de las formas lineales de ángulo	113
8.2.4.4. Factor de conversión y peso de las formas lineales de distancia	114
8.2.4.5. Pesos homogeneizados	115
8.2.5. Análisis de los resultados parciales	115
8.2.5.1. La matriz A, la matriz de pesos P, el vector de términos independientes K	115
8.2.5.2. El vector de variables, el vector de residuos y la varianza a posteriori del observable de peso unidad	116
8.2.5.3. Matrices de criterio	116
8.2.5.4. La fiabilidad interna y externa	116
8.2.5.5. Semiejes de la elipse standard	117
8.2.6. Figuras de error y fiabilidad	117
8.2.7. Cálculo del porcentaje de error	120
8.2.7.1. Error o perturbación db	120
8.2.7.2. Error o perturbación dS	121
9. Bibliografía	123

Capítulo 1

Introducción y planteamiento del trabajo

El alto nivel de calidad constructiva, automatización y precisión de los modernos instrumentos de Topografía Clásica supera amplia y generalmente cualquier exigencia real y práctica de tolerancia en los trabajos topográficos usuales, confiando a operadores y calculistas un amplio coeficiente de seguridad que ampara satisfactoriamente su trabajo. Lo mismo puede decirse, aún con algunas reservas y en tono menor, cuando la instrumentación es GPS. En cualquier caso, los vectores de observables tratados según rutina en ajustes gaussianos (y no gaussianos) facilitan resultados aceptables con figuras de error de magnitudes muy inferiores a las prescripciones establecidas y en consecuencia, no comprobadas ni contrastadas con la realidad física.

Ello da lugar a que el proyecto topográfico aparezca como innecesario, sustituyéndose por una rutina operativa que permanentemente ha demostrado y demuestra su eficacia práctica. Sin embargo, no es menos cierto que, especialmente en aplicaciones que se han dado en llamar no topográficas, como el control de deformaciones en Industria y Obra Civil, el escenario está cambiando rápidamente hacia necesidades reales mucho más duras, poniendo en peligro el cómodo binomio instrumentación - tolerancia inicialmente establecido. Merece la pena pues, reflexionar sobre la doctrina aplicada, gaussiana a lo largo de este trabajo, completándola con los requisitos teóricos de aplicación que permitan, no mejorar en gabinete los resultados de campo, que es misión peligrosa por ilusoria, sino predecir y contrastar matemática y estadísticamente con alto nivel de fiabilidad los resultados parciales, intermedios, y finales.

En el presente trabajo y los que esperamos le sigan se aplicará la teoría clásica de "Ajuste de redes microgeodésicas por el método de Gauss Markov", desarrollada, y establecida con algunas innovaciones cuya importancia dejamos al buen criterio del lector, sobre una red local de prueba formada por cuatro vértices señalados y monumentados al efecto en el Campus de Vera de la Universidad Politécnica de Valencia.

Procede en primer lugar clarificar algunos supuestos y cuestiones, a saber:

No entraremos en estudios ni cuestiones de elección y optimización de localización, instrumentación, metodología de observación, estacionamiento, ni ecuaciones de

observador.

No se imponen en principio exigencias específicas ni generales previas de precisión. Ni tolerancias. Ni hablamos de alta precisión.

Nos interesa específica y fundamentalmente en esta primera fase del trabajo establecer y garantizar al máximo la fiabilidad y poder de afirmación de algoritmos, datos de partida, y resultados parciales y totales. Ello conlleva analizar todas las hipótesis, todos los algoritmos y todos los resultados intermedios, parciales y finales, y contrastarlos rigurosamente con la realidad física por medio del ajuste de la red observada. La precisión alcanzada, por el momento, es una consecuencia, no una imposición previa. Su previsión y fijación dentro de un Proyecto riguroso se abordará cuando se trate del Diseño de Redes propiamente dicho.

Se utilizarán vectores de observables clásicos (angulares y/o distanciométricos), en la acepción más general, contrastando y verificando previamente su adecuación estadística para ser utilizados en el proceso Gaussiano, con una información de precisión adicional a efectos de la necesaria ponderación, tratándolos por separado o mezclándolos en redes mixtas. Posteriormente nos ocuparemos de los observables GPS.

Más adelante y en una segunda fase estableceremos las condiciones de Diseño de la red para que dichos resultados parciales y finales puedan predecirse en magnitud y con alto poder de afirmación.

Después extenderemos el análisis con el mismo rigor no solo a los vértices de la red sino a cualquier punto arbitrario o área de su zona de influencia, que llamaremos de precisión específica, consiguiendo información tan exacta como en los vértices de estación. Posteriormente, se establecerá una doctrina complementaria de deformaciones de la realidad física a lo largo del tiempo, con idénticas características a las descritas.

Y finalmente, sobre todo en cálculo de deformaciones, abordaremos las redes tridimensionales con orientación arbitraria de triedro. Siempre con justificación rigurosa de lo que se haya conseguido en cada caso y se pueda predecir.

También estableceremos el proyecto de Diseño a partir de un condicionado previo y cifrado de obligado cumplimiento.

Para terminar, estableceremos un análisis crítico y riguroso de la doctrina del método Gauss-Marcoviano, con sus puntos fuertes y débiles. Y si en algún supuesto, o incluso en general, se llegara a constatar que no es de aplicación, total o parcialmente, se establecerá así.

Sin embargo, antes de rechazar el método, se recomendará su prudente sustitución por otro indiscutiblemente mejor y a lo menos igual de riguroso, que será ineludible justificar en detalle.

La tarea descrita tiene vocación de Tesis Doctoral, tal vez más de una, y de libro de más que moderada extensión. En principio y en las páginas que siguen desarrollaremos la praxis del método que damos en llamar “Triangulación con observables clásicos” presentando alguna novedad sobre la metodología usualmente empleada. Futuras publicaciones esperamos que continúen el Proyecto enunciado, hasta darle buen fin.

1.1. Localización de la Red de Prueba

En el entorno de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Geodésica, Cartográfica y Topográfica, según se representa en la fotografía aérea de la Fig 1.1. Formando un cuadrilátero de lados comprendidos entre 64 y 69 metros.

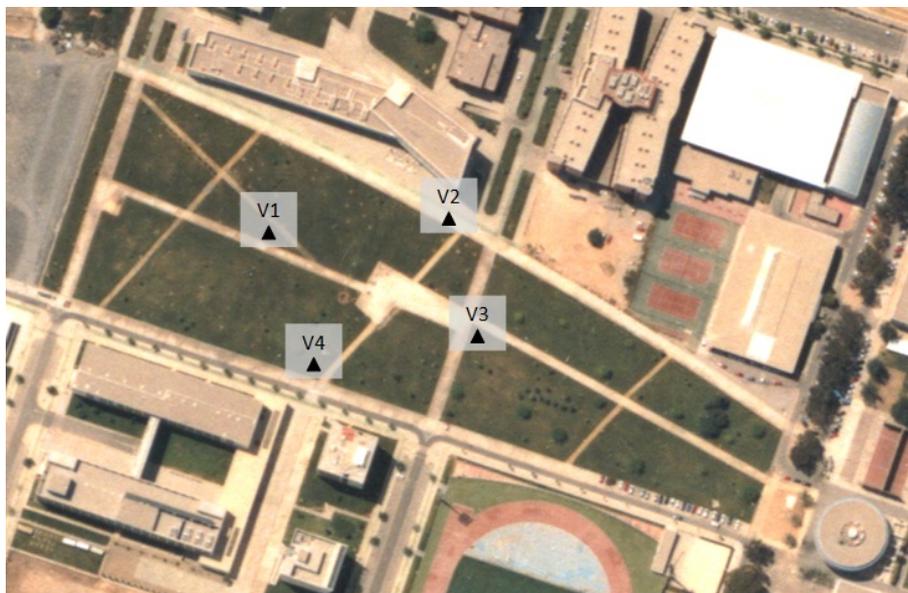


Figura 1.1: Localización de la Red de Prueba

1.2. Monumentación, materiales y características constructivas

Tres de los cuatro pilares forman parte de la red de calibración de la Universidad Politécnica de Valencia¹ que se pretende densificar con un nuevo vértice.

Dichos pilares V1, V3 y V4 son de acero inoxidable de 1.2 m de altura y diámetro exterior de 22 cm. Se construyeron en doble tubo concéntrico con una cámara de aire que separa el tubo interior anclado directamente a cimentación, del tubo exterior cuyas funciones básicas son de protección tanto frente a posibles agresiones externas como a la posible dilatación por insolación directa. Ver Fig.1.2.

¹Cfr. “Base de calibración de la Universidad Politécnica de Valencia: descripción y medición”. José Luis Berné, Inge Revhaug, Pascual Garrigues, Luis García-Asenjo, Sergio Baselga, Sergio Navarro. Actas del IX Congreso Nacional TOPCART, Valencia 2008.



Figura 1.2: Estación total sobre vértice V3

La cimentación consiste, en una zapata de hormigón armado, de dimensiones aproximadas: 100 x 100 x 60 cm que queda por debajo de la cubierta vegetal (Fig. 1.2) .



Figura 1.3: Prisma sobre el vértice V1

Los pilares van rematados por su parte superior con una base de acero inoxidable nivelada y con rosca macho solidaria de paso estándar 5/8, protegida con cubierta de acero inoxidable cuando no se observa.

En cuanto al pilar V2 es de acero y está anclado sobre el hormigón de la vía del campus universitario, tiene una altura de 1.3 m., y en la parte superior tres

alineaciones para estacionar la basada (Fig. 1.4, Fig. 1.5, y Fig. 1.6).

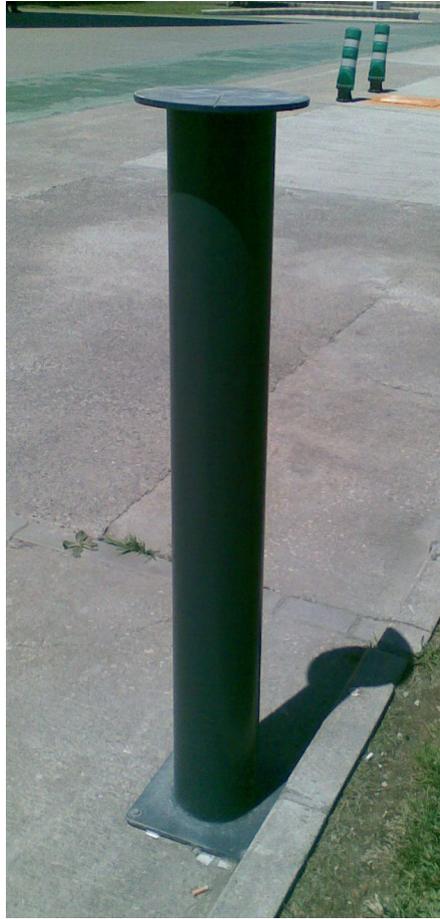


Figura 1.4: Pilar del vértice V2



Figura 1.5: Detalle del pilar V2



Figura 1.6: Basada y prisma sobre el vértice V2

1.3. Especificaciones técnicas de las estaciones totales utilizadas

Se utilizaron las distancias medidas con la estación total MS 1A de la marca Topcon, y los ángulos medidos con la S6, de la marca Trimble.

Las desviaciones típicas de los errores angulares obtenidos a partir de la libreta de campo de la estación total MS 1A superaron las previstas por el catálogo del fabricante. Fuera por defecto de corrección del instrumento, o error de operador, se prefirió repetir la observación con la otra estación total.

El cuadro de características técnicas de catálogo está contenido en el cuadro 1.1.

Fabricante	Topcon	Trimble
Modelo	MS 1A	S6
Precisión angular	3 ^{cc}	6 ^{cc}
Precisión distanciométrica	1 mm + 1 ppm	3 mm + 2 ppm
Sensibilidad del nivel electrónico	-	-
Compensador automático	2 ejes	2 ejes
Aumentos	30	30

Cuadro 1.1: Característica técnicas de la instrumentación

La medida de precisión angular (entendida como repetibilidad) está expresada como la desviación típica de una coordenada medida una vez en CD y CI. Y la medida de precisión en distancia está expresada como la desviación típica de una coordenada medida una vez en CD y CI. Según las normas ISO 17123.

En conjunto la preparación del trabajo se ha procurado realizar minuciosamente y por lo que respecta a la instrumentación puede resistir sin mengua la comparación con cualquier otra firma constructora acreditada internacionalmente en el campo de la Ingeniería Cartográfica.

La observación se ha realizado por especialistas del Laboratorio de Instrumentos Topográficos² de la Escuela de Ingeniería Geodésica de la Universidad Politécnica de Valencia, cuya cualificación y buen hacer está fuera de toda duda .

Por todo ello se sigue adelante con la tranquilidad de conciencia de no saberlo hacer mejor.



Figura 1.7: Estación Total *Topcon MS 1A*

²El trabajo de observación ha recaído directamente sobre José Manuel Paredes Asencio.



Figura 1.8: Estación Total *Trimble S6*

Capítulo 2

Resultados de la Observación. Vector de Observables

2.1. Observaciones angulares azimutales

El resultado de campo de la observación angular horizontal se resume en el cuadro 2.1. Se observaron independientemente las 12 lecturas azimutales de la red, (tres por vértice), con la numeración indicada.

no.	Observación	Media [$^{\circ}$]	σ_i [cc]	n_i	$\frac{\sigma_i}{\sqrt{n_i}} = \sigma_{Ti}$ [cc]
L1	V1-V4	87,6817	5,4831	13	1,52
L2	V1-V3	42,4931	5,1888	13	1,44
L3	V1-V2	0,0009	5,3541	26	1,05
L4	V2-V3	70,6808	3,71	14	0,99
L5	V2-V4	129,7559	4,8255	7	1,82
L6	V2-V1	187,3250	3,7161	7	1,40
L7	V3-V4	24,3619	4,6766	22	1
L8	V3-V1	67,9869	8,6613	11	2,61
L9	V3-V2	108,8502	4,1341	11	1,25
L10	V4-V3	193,9946	7,4239	12	2,14
L11	V4-V2	137,5574	5,7971	12	1,67
L12	V4-V1	82,8070	6,504	24	1,33

Cuadro 2.1: Lecturas azimutales horizontales

Es el objetivo del trabajo densificar la Red de Calibración de la Universidad Politécnica de Valencia con un nuevo punto, denominado señalado y monumentado como V_2 .

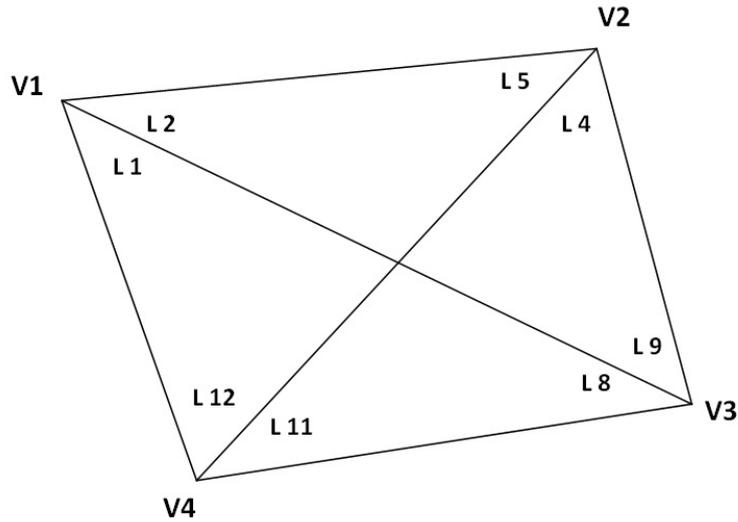


Figura 2.1: Croquis de la observación

En dicho cuadro se representan de izquierda a derecha y por columnas, la numeración de las lecturas azimutales, su identificación por vértices (Estación-Destacado), las medias aritméticas en grados centesimales $[\theta]$, las desviaciones típicas de una observación genérica en dmgr., $\sigma_i^{[cc]}$, el número de observaciones por destacado n_i , y las desviaciones típicas de las medias aritméticas en dmgr. $\sigma_{T_i}^{[cc]}$.

2.1.1. Test de adherencia de Pearson

La correcta aplicación del ajuste por mínimos cuadrados requiere como condición previa la distribución normal de cada uno de los observables, que implica así mismo la distribución normal de los residuos. Toda la doctrina se sostiene y desarrolla a partir de la más rigurosa cumplimentación de las expresiones bien conocidas

$$O = O_{m,1} \sim N(O_{T_{m,1}}, \sum_{o_{m,m}}) \equiv N(O_T, s^2Q) \quad (1)$$

$$E(R) = 0$$

$$R \sim N(0, \sum_{o_{m,m}}) \equiv N(0, s^2Q) \quad (2)$$

Que reproducimos con la notación de rutina usual. Es por tanto ineludible cerciorarse de que todos y cada uno de los observables que intervengan en los cálculos satisfagan (1) y (2), debiendo ser rechazados los que no lo hagan. A este efecto se ha contrastado cada uno de ellos a través del Test de Adherencia de Pearson, que también damos por conocido¹.

¹Vease cualquier Manual de Estadística. O bien “Tratado de Topografía” Tomo I. Pag.36 y sig. M.Chueca et alt.

Referente a la aplicación particular en el caso que nos ocupa, merece la pena tener en cuenta una cuestión previa importante. La suposición como hipótesis nula de que la distribución es normal, conducente en la práctica más extendida a adoptar un nivel de significación de uno o a lo más cinco por ciento, a efectos de prevenir la comisión del posible error de orden uno (rechazo de la hipótesis nula siendo cierta) no es aconsejable en nuestra opinión, por poco rigurosa. En nuestro caso, redes caracterizadas en general por el escaso número de vértices, es asequible lograr que el número de lecturas y de observables sea siempre superabundante y no se debe vacilar en desprenderse de un cierto número de ellos si son sospechosos, aún en grado menor, de no cumplir la condición de normalidad. El óptimo del parámetro contrastado es cero y a ello debe tenderse porque el riesgo contrario (error de orden dos, aceptación de la hipótesis nula, siendo errónea o aceptación de observables de distribución no normal) es mucho más peligroso. Así hemos rechazado el observable angular L8 (lectura V3-V1) con un nivel de significación aproximado de un 49%. En cuanto a las once restantes lecturas angulares puede asegurarse con alto poder de afirmación que su distribución es adecuada. Veamos la secuencia de cálculo de un observable aceptado.

Consideremos la observación angular horizontal V1-V4 (Cfr. cuadro 2.2), señalada como L1 en el cuadro 2.1. La secuencia de cálculo de aplicación del Test de Pearson es la que sigue (ver el cuadro 2.3), de sencilla interpretación. Bajo la hipótesis nula: $H_0 =$ se acepta distribución normal.

Lecturas V1-V4 [g]
87,6811
87,6816
87,6816
87,6819
87,6812
87,6823
87,6818
87,6829
87,6819
87,6808
87,6819
87,6814
87,6821

Cuadro 2.2: Observaciones azimutales V1-V4

$$R = \max. - \min = 87,6829 - 87,6808 = 21^{cc} \rightarrow 27^{cc}$$

$$A = \frac{27}{n^{\circ} \text{intervalos}} = \frac{27}{3}$$

$$S_1 \equiv 87,68035-87,68125$$

$$S_2 \equiv 87,68125 - 87,68215$$

$$S_3 \equiv 87,68215 - 87,68305$$

$$h = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{5,4831 \cdot \sqrt{2}} = 0,1290$$

$$\Delta_1 = \frac{3 \cdot 9}{2} = 13,5 ; \Delta_2 = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$z_1 = 0,129 \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta_1 = 0,129 \cdot \sqrt{2} \cdot 13,5 = 2,4628 \sim 2,46$$

$$I_1 = 2 \cdot 0,4931 = 0,9862$$

$$z_2 = 0,129 \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta_2 = 0,129 \cdot \sqrt{2} \cdot 4,5 = 0,8209 \sim 0,82$$

$$I_2 = 2 \cdot 0,2939 = 0,5878 \rightarrow p_2 = 0,5878$$

$$p_1 = p_3 = \frac{0,9862 - 0,5878}{2} = 0,1992$$

Intervalos	n_j	p_j	$n \cdot p_j$	$n \cdot p_j - n_j$	$\frac{(n \cdot p_j - n_j)^2}{n \cdot p_j}$
S_1	3	0,1992	2,5896	-0,4104	0,065
S_2	8	0,5878	7,6414	-0,3586	0,0168
S_3	2	0,1992	2,5896	0,5896	0,1342
\sum	13	0,9862	12,8206	-0,1791	0,216

Cuadro 2.3: Secuencia de cálculo

Con el usual nivel de significación del 5% el resultado de test es en la distribución

χ^2_ν , ν =grados de libertad:

RC: $\{\chi^2_2 \geq 0,216\} \rightarrow \{0,216 \leq 5,99\} \rightarrow$ Aceptamos H_0 con un nivel de significación de 5%. E interpolando en las tablas de χ^2 , o directamente integrando se sigue:

$$y = \frac{0,216 - 0,211}{0,575 - 0,211} (0,25 - 0,10) + 0,1 = 0,1021 \equiv 10,21\%$$

Y en el caso que nos ocupa se puede escribir:

$$P(\chi_2^2 > 0,216) = 100 - 0,1021 = 89,79\%$$

Por consiguiente, con un nivel de aceptación del 89,79 % de los casos y para unos parámetros arbitrarios $\chi_2^2 > 0,216$, más desfavorables que el calculado, la distribución sería también normal. Indudablemente, puede aceptarse la hipótesis nula H_0 .

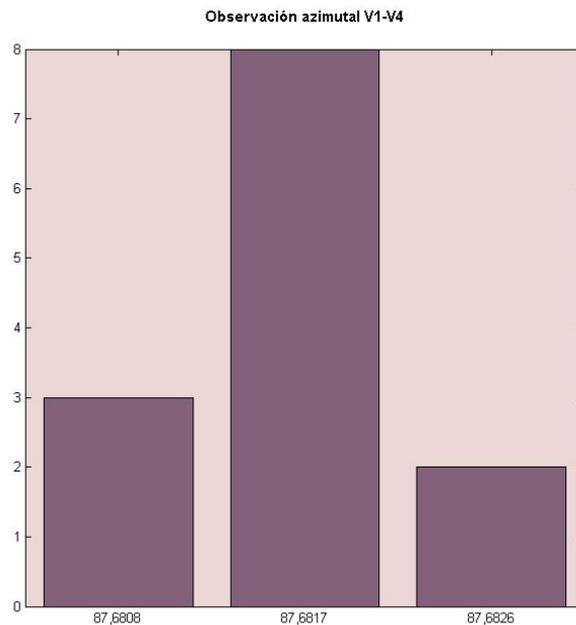


Figura 2.2: Histograma de frecuencias absolutas de la lectura azimutal V1-V4

Como complemento, en Fig. 2.2 se representa el histograma de frecuencias absolutas de la muestra que sugiere claramente una distribución normal.

Los niveles de aceptación de los ángulos interiores de la red resultan, con la aplicación reiterada del mismo algoritmo, los del cuadro 2.4.

no.	Lectura	Nivel de aceptación
L1	V1-V4	89,79 %
L2	V1-V3	85,72 %
L3	V1-V2	96,63 %
L4	V2-V3	100 %
L5	V2-V4	100 %
L6	V2-V1	100 %
L7	V3-V4	100 %
L8	V3-V1	49,20 %
L9	V3-V2	84,44 %
L10	V4-V3	89,91 %
L11	V4-V2	93,65 %
L12	V4-V1	69,60 %

Cuadro 2.4: Niveles de aceptación de las lecturas angulares horizontales

Como se puede apreciar en el cuadro 2.4 la lectura angular L8 (lectura V3-V1) tiene un nivel de aceptación en el entorno del 49 % comparativamente insuficiente y se rechaza.

2.2. Observaciones distanciométricas

Desde cada uno de los vértices se observan las tres distancias restantes. Las distancias reducidas, obtenidas a partir de las distancias geométricas y ángulos verticales, se encuentran en el cuadro 2.5. En él anotamos las distancias que hacen referencia al mismo eje de la red visadas desde los dos extremos (por ejemplo V1-V2 y V2-V1), y consideradas como suma el total de todas ellas. Así por ejemplo, 23 observaciones (V2-V1) + 10 observaciones (V1-V2) = 33 observaciones (V1-V2) + (V2-V1).

no.	Distancia reducida	Media [m]	$\sigma_i[mm]$	n_i	$\frac{\sigma_i}{\sqrt{n_i}} = \sigma_{Ti}[mm]$
D1	V1-V4	66,5965	0,2712	15	0,07
D2	V4-V1	66,5974	0,7536	20	0,1685
D3	(V1-V4) + (V4-V1)	66,5971	0,7500	35	0,126
D4	V3-V2	66,3912	0,3585	10	0,1134
D5	V2-V3	66,3919	0,8473	20	0,1895
D6	(V3-V2) + (V2-V3)	66,3917	0,7709	30	0,1406
D7	V2-V1	64,2143	0,2923	23	0,0609
D8	V1-V2	64,2142	0,3977	10	0,126
D9	(V1-V2) + (V2-V1)	64,21431	0,3301	33	0,0574
D10	V2-V4	83,1499	0,2998	10	0,0948
D11	V4-V2	83,1506	0,4328	10	0,1369
D12	(V2-V4) + (V4-V2)	83,1502	0,5108	20	0,1140
D13	V3-V4	68,5769	0,1160	19	0,0266
D14	V4-V3	68,5771	0,3283	10	0,1038
D15	(V3-V4) + (V4-V3)	68,5771	0,2300	29	0,0427
D16	V1-V3	103,6089	0,3858	15	0,0996
D17	V3-V1	103,6079	0,6384	10	0,2019
D18	(V3-V1) + (V1-V3)	103,6085	0,70	25	0,14

Cuadro 2.5: Lecturas de las distancias reducidas entre vértices. Las distancias que hemos utilizado para el ajuste de la red aparecen en negrita

2.2.1. Test de adherencia de Pearson

Al igual que con las observaciones angulares la correcta aplicación del ajuste por mínimos cuadrados requiere como condición previa la distribución normal de cada una de las distancias que utilicemos para calcular la red. En el cuadro 2.6 se puede leer el nivel de aceptación de cada una de las distancias medidas en la red. La diferencia con los resultados del test de Pearson con lecturas azimutales es claramente favorable a este último². Es obligado utilizar en el ajuste de la red las distancias correspondientes al vértice V_2 como único variable en este primer supuesto que superan ampliamente el test de Pearson (en negrita). Posteriormente abordaremos otras aplicaciones modificando el número de distancias reducidas a compensar y ajustar.

²Según J.M. Rüeger en su libro “Electronic Distance Measurement”, páginas 220 y 221, (editorial Springer-Verlag Berlin Heiderberg, Alemania 1996), las distancias observadas por distanciómetría no deberían usarse en un ajuste mínimo cuadrático, debido a los errores sistemáticos propios de estas mediciones. Copiamos un párrafo del texto mencionado:

“Please note that there is a very careles mixing and quasi-random errors (e.g. short periodic errors) with purely systematic errors (frecuency drift with temperature). Because of this, the eqs. of the accuracy of their instruments (in the following form $s = \pm(A + Bd)$, where A un mm, B in ppm, d = distance (in Km), the variance follows as $s^2 = (A + Bd)^2$ should not be used as a priori variances in least-squares adjustments. For example, under homogeneous temperature conditions in the field, the distance proportional term is likely to much smaller.”

no.	Distancia	Media [m]	Porcentaje de aceptación
D1	V1-V4	66,5965	74,34 %
D2	V4-V1	66,5974	No aceptamos la H_0
D3	(V1-V4) + (V4-V1)	66,5971	54,47 %
D4	V3-V2	66,3912	90,53 %
D5	V2-V3	66,3919	87,20 %
D6	(V3-V2) + (V2-V3)	66,3917	No aceptamos la H_0
D7	V2-V1	64,2143	67,90 %
D8	V1-V2	64,2142	No aceptamos la H_0
D9	(V1-V2) + (V2-V1)	64,2143	No aceptamos la H_0
D10	V2-V4	83,1499	89,32 %
D11	V4-V2	83,1506	No aceptamos la H_0
D12	(V2-V4) + (V4-V2)	83,1502	74,86 %
D13	V3-V4	68,5769	No aceptamos la H_0
D14	V4-V3	68,5771	No aceptamos la H_0
D15	(V3-V4) + (V4-V3)	68,5771	69,06 %
D16	V1-V3	103,6089	43,09 %
D17	V3-V1	103,6079	No aceptamos la H_0
D18	(V3-V1) + (V1-V3)	103,6085	91 %

Cuadro 2.6: Lecturas de las distancias reducidas entre vértices y porcentaje de aceptación del test de Pearson. Las distancias que hemos utilizado para el ajuste de la red triangulaterada aparecen en negrita

Se calcularon las correcciones debidas a las variaciones de presión y temperatura, según la ecuación del fabricante, y sus valores en todos los casos fueron despreciables, debido a la longitud de las visuales y a que los incrementos de temperatura y presión entre observaciones eran muy pequeños³.

³El instrumento determina y corrige las medidas efectuadas para una temperatura standard de 15°C, y una presión standard de 1023,25 hPa/750 mmHg. En nuestro trabajo la temperatura mínima fue de 14,4°C y la máxima 18,4°C. La presión mínima fue de 1008 hPa y la máxima 1013 hPa.

Capítulo 3

El vector de coordenadas aproximadas X_a . Consistencia de la Figura

Lograr que el vector de coordenadas aproximadas X_a sea de la mejor calidad posible es objetivo inesquivable. Recordemos que en la búsqueda de la mejor solución de la red se escribía que¹

$$X = X_a + x$$

implicando

$$x^T x = \textit{mínimo}$$

es decir

$$|x| = \textit{mínimo}$$

Por el momento, aceptándose la aplicación de matrices pseudoinversas en redes libres e inversas clásicas de Cayley en redes ligadas o deterministas. En su momento se verá que la “mejor solución” no tiene semejante carácter absoluto y varía con las características de la red en presencia y, sobre todo, con el condicionado físico y técnico que pretenda resolver.

Así, en el ajuste que nos ocupa consideraremos en principio como variables todas las coordenadas de los cuatro vértices (método de red libre) sólo a efectos posteriores

¹Cfr. M.Chueca et al. Microgeodesia y Redes locales, pg. 195 y sig., Complementos docentes pg. 38.

de fijar los vértices V_1 , V_3 y V_4 con las suficientes garantías y exclusivamente con nuestra propia observación de campo (método de red ligada) densificando la red con un nuevo vértice V_2 .

Debe tenerse presente que para el proyectista y/o calculista que el objeto del ajuste se dirige más a perfeccionar la interpretación con rigor y poder de afirmación de los resultados obtenidos antes que a mejorar los iniciales.

Nos referimos a la teoría expuesta que resumimos más adelante por su novedad sobre la geometría del error en el caso general de triangulación que resumimos, no obstante por su novedad más adelante, y su particularización en triangulación y trilateración. Así mismo a la teoría de Consistencia de Figuras, tanto en triangulación como en trilateración².

Se trata por tanto de optimizar el camino de cálculo a priori del vector X_a . Lo haremos para el caso de triangulación pura. Y como sabemos que las figuras de error en los vértices de la red triangulada y trilaterada independientemente son muy aproximadamente ortogonales³, el camino de máximo error en un supuesto coincidirá con el de mínimo error en el otro y recíprocamente.

La aplicación al caso que nos ocupa de la Teoría de Consistencia de Figuras en triangulación resuelve el problema. El camino de mínimo valor obtenido del parámetro de consistencia será el óptimo si se proyecta una triangulación. El de máximo valor, si se trata de trilateración. Entre ambos, todos los casos intermedios de redes mixtas triangulateradas.

3.1. Cálculo de la Consistencia de la Figura y optimización del camino de cálculo del vector X_a

Sea el esquema aproximado de la red representado en la Fig.3.1, que siempre podrá obtenerse a partir de los datos de campo.

²Cfr. M.Chueca et al. Métodos Topográficos pg. 366 y sig., pg. 407 y sig., pg. 442 y sig.

³Siendo el error del distanciómetro: $e = \text{Cte.} + k \text{ ppm.}$, la perpendicularidad de los ejes mayores (dirección de máximo error) de las elipses de error en un vértice cualquiera triangulado y trilaterado será tanto más exacta cuanto menor sea la constante. Matemáticamente ortogonales en el límite para $\text{Cte.} = 0$. El camino de los ejes de máximo error en un caso será el de los ejes de mínimo error en el otro y recíprocamente.

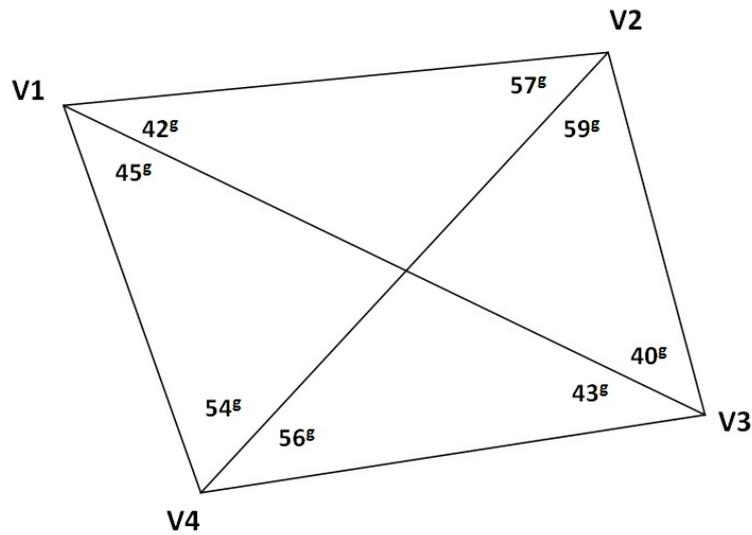


Figura 3.1: Croquis de la red

Siendo⁴ :

Q = número de direcciones observadas

P = número de ángulos observados

A = número de vértices de la triangulación

r = número de observaciones redundantes

K = parámetro de consistencia conjunta de la figura

se tendrá

$$Q = P + A = 8 + 4 = 12$$

$$r = Q - 3A + 4 = 12 - 3 \cdot 4 + 4 = 4$$

$$K = \frac{3A-4}{Q} = \frac{3 \cdot 4 - 4}{12} = \frac{8}{12} = 0,666 \approx 0,67$$

Los sucesivos valores de $V_{\alpha\beta}$ se pueden obtener por medio de la tabla de doble entrada que se adjunta, de interpretación inmediata.

⁴M.Chueca et alt. "Métodos Topográficos" Opus cit. Para un camino dentro de la red la expresión recomendada es $C = K \sum V_{\alpha\beta} \cdot V_{\alpha\beta}$ se tabula según se adjunta. Citando a diversos autores y según recomendación del National Geodetic Survey, de USA.

TABLA DE CÁLCULO DE $V_{\alpha\beta}$
(Graduación centesimal)

°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	95°	100°
10	530																		
15	370	231																	
20	305	176	126																
25	270	147	101	78															
30	249	130	86	64	51														
35	234	119	76	55	43	35													
40	224	111	69	49	37	30	25												
45	216	105	64	44	33	26	22	18											
50	209	100	60	41	30	23	19	16	13										
55	204	96	57	38	28	21	17	14	11	10									
60	199	93	54	36	26	19	15	12	10	8	7								
65	196	90	52	34	24	18	14	11	9	7	6	5							
70	192	87	50	32	23	17	13	10	8	6	5	4	3						
75	189	85	48	31	21	16	12	9	7	6	4	4	3	2					
80	186	83	47	30	20	15	11	8	6	5	4	3	2	2	1				
85	184	82	46	29	19	14	10	8	6	4	3	3	2	1	1	1			
90	181	80	44	28	19	13	9	7	5	4	3	2	2	1	1	1	0		
95	179	78	43	27	18	12	9	7	5	4	3	2	1	1	1	0	0	0	
100	177	77	42	26	17	12	8	6	4	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
105	175	75	41	25	16	11	8	6	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0
110	172	74	40	24	16	11	8	6	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0
115	170	73	39	24	15	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0
120	168	71	38	23	15	10	7	5	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
125	166	70	37	22	14	10	7	5	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
130	164	69	36	22	14	9	6	5	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
135	161	67	35	21	13	9	6	5	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
140	159	66	34	20	13	9	6	5	3	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
145	156	64	34	20	13	9	6	5	4	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
150	153	63	33	20	13	9	6	5	4	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
155	150	61	32	19	13	9	7	5	4	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
160	147	60	32	20	13	10	8												
165	143	59	32	20	15	12													
170	139	58	32	22	17														
175	135	58	35	26															
180	133	62	42																
185	137	62																	
190	177																		

Y la aplicación del método en los cuatro casos de caminos posibles, siempre empezando por el eje V3V4, es ya inmediato.

CADENA DE TRIÁNGULOS V3V4V2-V2V4V1

Triángulo V3V4V2

$$\alpha = 59^g$$

$$\beta = 40^g + 43^g = 83^g$$

$$V_{\alpha\beta} = 3,5$$

Triángulo V2V4V1

$$\alpha = 45^g + 42^g = 87^g$$

$$\beta = 54^g$$

$$V_{\alpha\beta} = 4$$

$$\Sigma = 3,5 + 4 = 7,5$$

$$C = 7,5 \cdot 0,67 = 5$$

CADENA DE TRIÁNGULOS V3V4V1-V3V1V2

Triángulo V3V4V1

$$\alpha = 45^g$$

$$\beta = 110^g$$

$$V_{\alpha\beta} = 5$$

Triángulo V3V1V2

$$\alpha = 59^g + 57^g = 116^g$$

$$\beta = 40^g$$

$$V_{\alpha\beta} = 7$$

$$\Sigma = 5 + 7 = 12$$

$$C = 12 \cdot 0,67 = 8$$

CADENA DE TRIÁNGULOS V3V4V2-V3V1V2

Triángulo V3V4V2

$$\alpha = 59^{\text{g}}$$

$$\beta = 56^{\text{g}}$$

$$V_{\alpha\beta} = 8$$

Triángulo V3V1V2

$$\alpha = 42^{\text{g}}$$

$$\beta = 40^{\text{g}}$$

$$V_{\alpha\beta} = 25$$

$$\Sigma = 25 + 5 = 33$$

$$C = 33 \cdot 0,67 = 22$$

CADENA DE TRIÁNGULOS V3V4V1-V4V1V2

Triángulo V3V4V1

$$\alpha = 45^{\text{g}}$$

$$\beta = 43^{\text{g}}$$

$$V_{\alpha\beta} = 20$$

Triángulo V4V1V2

$$\alpha = 57^{\text{g}}$$

$$\beta = 54^{\text{g}}$$

$$V_{\alpha\beta} = 9$$

$$\Sigma = 20 + 9 = 29$$

$$C = 29 \cdot 0,67 = 19$$

El camino V3V4V2-V2V4V1 resulta ser el más apropiado para la triangulación, caso que nos ocupa, con un parámetro de consistencia $C = 5$ (mejor consistencia

angular). En el triángulo V3V4V2 se partirá del lado V3V4 para calcular el V4V2 y seguidamente en el V2V4V1 se partirá del V2V4 y se calculará el V2V1.

Si se tratara de trilaterar, el camino mejor sería el V3V4V2-V3V1V2, con parámetro de consistencia $C = 22$ (mejor consistencia distanciométrica).

3.2. Un primer ajuste. La red Libre Triangulada

Es bien conocida la teoría del cálculo y ajuste de Redes Libres. Su origen básico, no se olvide, es la desconfianza en o probada carencia de los puntos de apoyo de precisión contrastada suficiente, en el trabajo en presencia, que transmitirían amplificados sus posible e inaceptables errores, a la red ligada, verdadera solución del problema. Si existen en número y calidad suficiente, utilizar el algoritmo y método de las redes libres encierra una contradicción en sí mismo.

También se ha puesto de manifiesto la serie de inconvenientes que presentan, en especial con respecto al establecimiento de recintos de error, generados particularmente por la inevitable presencia de variables libres teóricamente indeterminadas que transforman en cuádricas degeneradas los hiperelipsoides de incertidumbre. En nuestro caso, suponemos que no existe a priori ningún vértice privilegiado y se persigue exclusivamente conocer con la mayor precisión posible la métrica del espacio que cubren. Es frecuente que así suceda o que se pueda establecer dicho supuesto con provecho para el buen resultado del trabajo.

Así pues, con el objetivo de ofrecer siempre la solución final en forma de red ligada, resolvemos previamente la red libre generada por los datos disponibles. Se trata de clasificar con ella los vértices de la red en orden de obtener una primera información de la precisión esperable en ellos, en conjunto e individualizadamente.

Pueden utilizarse todos o parte de los datos goniométricos disponibles. En nuestro caso, resolvemos la red libre con siete de los ángulos útiles obtenidos.

Por el momento, tan solo nos interesan los datos de partida y la matriz varianza-covarianza de las variables corregidas.

Los datos de partida son los siguientes:

Vértices:

ID.	X [m]	Y [m]	
V1	100.0000	166.5974	APROX
V2	163.0146	154.2486	APROX
V3	167.5209	88.0108	APROX
V4	100.0000	100.0000	APROX

Observaciones:

no.	Observación	Media [°]	σ_i ["]	n_i	σ_{T_i} ["]
1	V2-V1-V3	42.49233	6.42112	13	1.78090
2	V3-V2-V4	59.07483	6.60087	7	2.49489
3	V4-V2-V1	57.56937	3.59232	7	1.35777
4	V4-V3-V1	43.62514	8.65185	11	2.60863
5	V1-V3-V2	40.86334	8.54720	11	2.57708
6	V1-V4-V2	54.75018	6.40786	12	1.84979
7	V2-V4-V3	56.43724	7.99384	12	2.30762

Matriz de diseño:

2753.88346	-5724.88200	1906.58794	9729.11364	-4660.47140	-4004.23164	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-4571.61469	-6453.25267	9566.84315	650.85272	-4995.22846	5802.39995
1906.58794	9729.11364	-6901.81641	-3926.71370	0.00000	0.00000	4995.22846	-5802.39995
4660.47140	4004.23164	0.00000	0.00000	-3037.48853	5136.07796	-1622.98287	-9140.30960
-4660.47140	-4004.23164	9566.84315	650.85272	-4906.37175	3353.37892	0.00000	0.00000
-9559.23006	-0.00000	4995.22846	-5802.39995	0.00000	0.00000	4564.00160	5802.39995
0.00000	0.00000	-4995.22846	5802.39995	-1622.98287	-9140.30960	6618.21133	3337.90966

Vector K de términos independientes:

-5.12717
 2.47021
 0.11813
 1.71876
 1.21016
 -0.01710
 0.03052

Matriz de pesos:

0.31530	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.16066	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.54244	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.14695	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.15057	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.29225	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.18779

Matriz E:

1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
-166.59739	100.00000	-154.24860	163.01455	-88.01078	167.52085	-100.00000	100.00000
100.00000	166.59739	163.01455	154.24860	167.52085	88.01078	100.00000	100.00000

Y la matriz varianza covarianza de las variables corregidas es:

Columnas 1 a 3		
1.67847459269453e-008	4.63597433915518e-009	-9.49419235105864e-010
6.09480384834078e-010	1.50139701478547e-008	6.20314781154276e-009
-3.13183301403419e-009	5.72808624195872e-009	9.30941105708176e-009
-4.70935180329005e-009	-5.86494803614763e-009	-2.46863153485762e-009
-1.01344175379585e-008	-1.19829365841887e-008	-8.38747569130873e-009
4.15754689899338e-009	-9.01268189747293e-009	-1.7449102845207e-009
-3.21393072670818e-009	-8.79540286439389e-009	-5.65309696707426e-009
1.11009429373052e-008	6.86178216251588e-009	4.87018524464713e-010
Columnas 4 a 6		
-5.18435567865157e-009	-1.18647850781851e-008	2.99806861364052e-010
-3.68253816539831e-009	-8.12512848810529e-009	-1.07431124867751e-008
-1.22969334784637e-009	-6.09233765784156e-009	-2.22767688297524e-009
8.3769188577474e-009	6.56181249634726e-009	-9.47790496111349e-010
6.07903605187271e-009	2.24794192681524e-008	4.21215966272708e-009
-3.24286999326218e-009	-2.27604398801504e-010	1.64418114682693e-008
1.39856616664156e-009	-3.38510918264345e-010	7.82445297458102e-009
-8.32523623502166e-009	-1.19075712172504e-008	-6.66034325960456e-009
Columnas 7 y 8		
-7.36014688633047e-009	1.20084146724186e-008	
-9.70286699907088e-009	2.71550813593387e-009	
-5.65577007513876e-009	-1.8673855519278e-009	
3.75291907799069e-009	-8.32796271887885e-009	
4.02397915989416e-009	-1.09951847635165e-008	
6.91200450819476e-009	-2.29784769704017e-009	
1.97845779282224e-008	-1.179359154455e-009	
-5.65343477323637e-009	2.09779732478252e-008	

En la diagonal principal, la varianza de las coordenadas de los cuatro puntos de la red. Despreciables en cualquier caso. Las desviaciones típicas apenas alcanzan la décima de milímetro.

La consecuencia es doble:

- 1.- Los vértices están determinados de forma equiprecisa y, en principio, con excelentes cifras.
- 2.- Cualquiera de ellos en conjunto con otro u otros o separadamente, puede adoptarse como fijo.

Visto lo expuesto, basta con un somero análisis de los resultados parciales del cálculo para cerciorarse de que no hay nada que destaque desfavorablemente hasta aconsejar su rechazo o repetición con otros datos de partida. Tal vez el término independiente de la forma lineal correspondiente al observable uno V2-V1-V3

destaque negativamente respecto a las otras por su mayor valor. O la desviación típica del observable de peso unidad a posteriori, $\sigma_0 = 0,88201$, con una hipótesis nula $H_0 = 1$, hubiera completado un excelente trabajo resultando más cercano a la unidad. Algo podría aducirse respecto a las unidades de longitud adoptadas y los coeficientes de la matriz de diseño A. Incluso sobre los pesos.

Vector de correcciones [m]:

-0.00003

+0.00006

-0.00001

-0.00017

+0.00011

+0.00011

-0.00007

+0.00001

Pero con un vector de residuos muy pequeño, indicando la excelente calidad de los observables, y sobre todo con el vector de correcciones a las coordenadas que se adjunta, tomado del listado, se aleja cualquier duda razonable en contra del trabajo realizado. Correcciones del orden de las centésimas de mm., absolutamente inapreciables, nos sitúan, en principio aparentemente, en el caso óptimo antes citado, adoptándose en consecuencia $X = X_a$.

Por consiguiente los resultados expuestos pueden elevarse a definitivos. Otra cuestión es su interpretación y cifrado riguroso de parámetros de error e incertidumbre, que será objeto de posterior análisis.

Queda abierto y justificado el camino para definir el vértice V_2 lo mejor posible manteniendo los otros tres fijos y a través de una red ligada.

Ello significa que es preciso asignarle unas coordenadas obtenidas a través de un cálculo sin reproche posible y en especial, interpretar los resultados matemática y estadísticamente con el máximo poder de afirmación. No se busca a ultranza la máxima precisión. Se pretende que sea cual fuere la alcanzada su veracidad quede fuera de duda. Por otra parte, es lógico esperar que se consiga por añadidura.

3.3. Cálculo de las coordenadas aproximadas y de los azimutes

3.3.1. Cálculo de las coordenadas aproximadas por el camino de mejor consistencia angular

Hemos calculado las coordenadas aproximadas de nuestros vértices siguiendo el camino de mejor consistencia angular, que es el que ofrece la cadena de triángulos $V3V4V2-V2V4V1$. Lo hemos hecho siguiendo los pasos que siguen.

1. Elegimos arbitrariamente las coordenadas del vértice V4:

$$x_4 = 100 \text{ m.}$$

$$y_4 = 100 \text{ m.}$$

2. Adoptamos un azimut aproximado V4-V3⁵:

$$\theta = 111,1874^g$$

3. Según la libreta de campo la distancia reducida V4-V3 es 68,577 m.

4. Con la distancia y el azimut V4-V3 obtenemos las coordenadas de V3:

$$x_3 = 167,5209 \text{ m.}$$

$$y_3 = 88,0108 \text{ m.}$$

5. Por intersección directa, a partir de las coordenadas V3 y V4 y los ángulos $56,43724^g$ y $84,48818^g$ obtenemos las coordenadas de V2:

$$x_2 = 163,0146 \text{ m.}$$

$$y_2 = 154,2486 \text{ m.}$$

6. Finalmente, por intersección directa a partir de las coordenadas V2 y V4, y los ángulos $57,56937^g$ y $54,75018^g$ obtenemos las coordenadas de V1:

$$x_{1a} = 100,0000 \text{ m.}$$

⁵A partir de la libreta de campo se obtiene este azimut aproximado, tomando como eje origen de lecturas azimutales el V4-V1

$$y_{1a} = 166,5974 \text{ m.}$$

Diremos que estas coordenadas aproximadas son las mejores para la triangulación pura, se identifican con el subíndice a . Obsérvese que son exactamente los mismos valores de la red libre triangulada con siete ángulos.

3.3.2. Cálculo de las coordenadas aproximadas por el camino de mejor consistencia distanciométrica

Hemos calculado las coordenadas aproximadas de nuestros vértices siguiendo el camino de mejor consistencia distanciométrica, que es el que ofrece la cadena de triángulos $V_4V_3V_2-V_3V_1V_2$. Las coordenadas de los vértices V_2 , V_3 y V_4 resultan las mismas que las que provienen del camino de mejor consistencia angular.

Y el vértice V_1 lo calculamos con el triángulo $V_3V_1V_2$ según la figura 3.2.

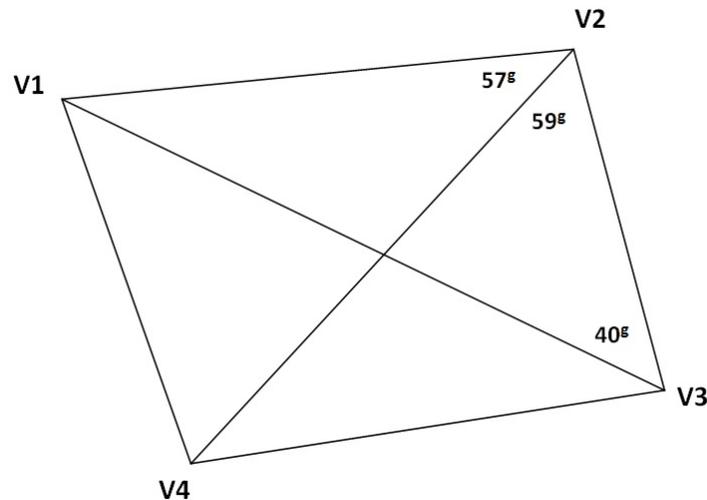


Figura 3.2: Croquis del triángulo $V_3V_1V_2$

Con los ángulos interiores del triángulo $V_3V_1V_2$:

$$V_3 = 40,86334^g$$

$$V_2 = 59,07483 + 57,56937 = 116,6442^g$$

Y con la distancia $V_3V_2 = 66,3917\text{ m}$ obtenemos las nuevas coordenadas del vértice V1:

$$x_{1d} = 99,99940 \text{ m.}$$

$$y_{1d} = 166,59777 \text{ m.}$$

Diremos que estas coordenadas aproximadas son las mejores para resolver la trilateración, se identifican con el subíndice d .

Si queremos calcular una triangulación las coordenadas aproximadas óptimas serán la media entre las coordenadas calculadas por el camino de mejor consistencia angular y las del camino de mejor consistencia distanciométrica. Resultando que las coordenadas del vértice V1 serán:

$$x_{1m} = (x_{1a} + x_{1d})/2 = 99,9997 \text{ m.}$$

$$y_{1m} = (y_{1a} + y_{1d})/2 = 166,59758 \text{ m.}$$

NOTA: Creemos que quizá sería más correcto ponderar los caminos de consistencia en función del número de observables de cada tipo: sabiendo que tenemos 5 observables de ángulo y solo 3 de distancia. De modo que podríamos ponderar siguiendo la ecuación que proponemos, y obtener la coordenada x_{1p} :

$$\begin{aligned} x_{1p} &= \frac{\text{número de observables angulares}}{\text{número total de observables}} \cdot x_{1a} + \frac{\text{número de observables distanciométricos}}{\text{número total de observables}} \cdot x_{1d} = \\ &= \frac{3}{8} \cdot 99,9994 + \frac{5}{8} \cdot 100 = 99,99977 \text{ m.} \end{aligned}$$

La diferencia con x_{1m} ($=99,9997 \text{ m.}$) es de 7 centésimas de mm.

En cuanto a la coordenada y :

$$y_{1p} = \frac{\text{número de observables angulares}}{\text{número total de observables}} \cdot y_{1a} + \frac{\text{número de observables distanciométricos}}{\text{número total de observables}} \cdot y_{1d} =$$

$$= \frac{5}{8} \cdot 166,5974 + \frac{3}{8} \cdot 166,59777 = 166,59754 \text{ m.}$$

La diferencia con y_{1m} (=166,59758 m.) es de cuatro centésimas de mm.

En cualquier caso, nos movemos obviamente en términos de magnitud despreciable⁶
Definitivamente la coordenada aproximada del vértice V1 en el ajuste de la red triangulaterada será:

$$x_{1m} = (x_{1a} + x_{1d})/2 = 99,9997 \text{ m.}$$

$$y_{1m} = (y_{1a} + y_{1d})/2 = 166,59758 \text{ m.}$$

Las coordenadas aproximadas que emplearemos en lo sucesivo son las que siguen:

Vértice	x [m]	y [m]
V ₁	99,9997	166,59758
V ₂	163,01455	154,2486
V ₃	167,52085	88,01078
V ₄	100	100

3.3.3. Cálculo de azimutes

Nuestras coordenadas aproximadas se han obtenido adoptando un azimut V4-V3 (Cfr. epígrafe 3.2.1):

$$\text{Azimut V4-V3} = \theta_{v_4-v_3} = 111,1874^g$$

siendo origen de azimutes el eje V4-V1, que implica que el azimut V4-V1 sea:
 $\theta_{v_4-v_1} = 0^g$

Sucesivamente podemos escribir los azimutes entre los vértices, y sus errores asociados siguiendo los de los cuadros siguientes⁷ :

Azimut: $\theta_{ij} = \theta_{v_4-v_2}$
Azimut = $54,75018^g$
desviación típica = $d\alpha = 1,84979^{cc}$

⁶Fundamentalmente se debe a la excelente configuración de la figura y la calidad de los observables empleados. En M.Chueca et alt. Métodos Opus cit. pg 451, en un ejemplo análogo de un cuadrilátero en trabajos de mapa, un estimador de consistencia $C = 3,35$ sitúa a priori el error máximo en la base de llegada en 29,9 cm. Con un camino de $C = 31,49$ el error alcanza 81 cm.

⁷Los azimutes provienen de la libreta de campo y de la corrida de azimutes.

El azimut $\theta_{v4-v2} = 54,75018^g$, tiene una desviación típica $d\alpha = 1,84979^{cc}$, que proviene directamente de la desviación típica de las lecturas de campo que sólo en este caso coinciden con el azimut, ya que $\theta_{v4-v1} = 0^g$.

Azimut: θ_{v1-v2}
Azimut = 112,3190 ^g
desviación típica = $d\alpha = 2,48526^{cc}$

El azimut θ_{v1-v2} se obtiene a partir de:

$$\theta_{v1-v2} = 200^g - 45,18867^g - 42,49233^g = 112,3190^g$$

$$\text{con una desviación típica } d\alpha = \sqrt{(1,73347^{cc})^2 + (1,78090^{cc})^2} = 2,48526^{cc}$$

siendo $1,73347^{cc}$ y $1,78090^{cc}$, las desviaciones típicas de los ángulos $45,18867^g$ y $42,49233^g$, obtenidas a partir de las lecturas de la libreta de campo.

Azimut: θ_{v3-v2}
Azimut = 395,6759 ^g
desviación típica = $d\alpha = 3,6669^{cc}$

El azimut θ_{v3-v2} se obtiene a partir de:

$$\theta_{v3-v2} = \theta_{v4-v3} + 200^g + 43,62514^g + 40,86334^g = 395,6759^g$$

$$\text{con una desviación típica } d\alpha = \sqrt{(2,57708^{cc})^2 + (2,60863^{cc})^2} = 3,6669^{cc}$$

siendo $2,57708^{cc}$ y $2,60863^{cc}$, las desviaciones típicas de los ángulos $43,62514^g$ y $40,86334^g$, obtenidas a partir de las lecturas de la libreta de campo.

Azimut: θ_{v2-v4}
Azimut = 254,74963 ^g
desviación típica = $d\alpha = 2,49489^{cc}$

El azimut θ_{v2-v4} se obtiene a partir de:

$$\theta_{v2-v4} = \theta_{v2-v1} + 59,07483^g = 254,74963^g$$

$$\text{con una desviación típica } d\alpha = 2,49489^{cc}$$

siendo $2,49489^{cc}$ la desviación típica de las lecturas de campo obtenida a partir de las lecturas del ángulo $59,07483^g$.

Azimut: θ_{v2-v3}
Azimut = 195,6748 ^g
desviación típica = $d\alpha = 2,8404^{cc}$

El azimut θ_{v2-v3} se obtiene a partir de:

$$\theta_{v2-v3} = \theta_{v1-v2} + 200^g - 57,56937^g - 59,07483^g = 195,6748^g$$

con una desviación típica $d\alpha = \sqrt{(1,35777^{cc})^2 + 2,49489)^2} = 2,8404^{cc}$

siendo $1,35777^{cc}$ y $2,49489$, las desviaciones típicas de los ángulos $57,56937^g$ y $59,07483^g$, obtenidas a partir de las lecturas de la libreta de campo.

Hemos considerado como único vértice libre el V2, por lo tanto, los azimutes entre vértices fijos no aparecen reflejados en este epígrafe.

Capítulo 4

Ponderación de observables

En este capítulo trataremos de establecer los primeros pesos de los observables en la ponderación previa al ajuste de la red trilaterada.

4.1. Varianza del observable de peso unidad

Con el fin de justificar la ponderación previa al ajuste, desarrollamos el planteamiento que sigue según teoría conocida .

Sea el vector de observables O , y el de observables promediados O_T .

Se tendrá , para un observable de orden i , ($i \in 1, 2, 3, \dots, m_i$, para $m_i > 1$):

$$\hat{\sigma}_{o_i}^2 = \frac{\sum(O_{T_i} - O_i)^2}{m_i - 1}$$

$$\hat{\sigma}_{o_{T_i}} = \frac{\hat{\sigma}_{o_i}}{\sqrt{m_i}} ; \text{ ambos valores son conocidos: } \hat{\sigma}_{o_i}^2 \text{ y } m_i$$

Por definición de peso:

$$P_{O_{T_i}} = \frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}_{O_{T_i}}^2} = \frac{\sigma^2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_{O_i}}{\sqrt{m_i}}\right)^2} = \sigma^2 \left(\frac{\sqrt{m_i}}{\hat{\sigma}_{O_i}}\right)^2 = \sigma^2 \frac{m_i}{\hat{\sigma}_{O_i}^2} \propto \frac{m_i}{\hat{\sigma}_{O_i}^2}$$

Siendo en esta última ecuación σ^2 el factor de varianza o varianza del observable de peso unidad. Directamente se deduce que los pesos serán siempre adimensionales.

4.2. Ponderación según las características técnicas de la instrumentación

Entendemos que la ponderación “clásica” es la que utiliza las características técnicas de los instrumentos, y considera el factor de varianza σ^2 igual a la unidad. El peso del observable responde a la ecuación:

$P_{O_{T_i}} = \frac{\sigma^2}{(\frac{\hat{\sigma}_{O_i}}{\sqrt{m_i}})^2}$, siendo $\sigma^2 = 1$, el valor de la varianza del observable de peso unidad y $\frac{\hat{\sigma}_{O_i}}{\sqrt{m_i}} = \hat{\sigma}_{O_{T_i}}$, la desviación típica del catálogo del fabricante del instrumento, que en nuestro caso es 6^{cc} .

En nuestro caso, según las especificaciones técnicas de los fabricantes, la Estación Total Trimble S6 tiene una desviación típica angular de 6^{cc} y la Estación Total Topcon MS 1A tiene una desviación típica distanciométrica de $1\text{mm} + 1\text{ ppm}$. Podemos obtener el peso en ambos casos, con $m_i = 1$:

$$P_{\text{ángulos}} = \frac{\sigma^2}{(\frac{\hat{\sigma}_{O_i}}{\sqrt{m_i}})^2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} = 0,027, \text{ para todos los observables angulares y}$$

en cuanto a los observables distanciométricos $\hat{\sigma}_2 = 1 + 0,1 = 1,1\text{ mm} = 0,0011\text{ m}$

$$P_{\text{distancias}} = \frac{\sigma^2}{(\frac{\hat{\sigma}_{O_i}}{\sqrt{m_i}})^2} = \frac{1}{(1+0,1)^2} = \frac{1}{1,21} = 0,83, \text{ para todos los observables distanciométricos.}$$

Las unidades de σ^2 , en este caso de valor 1, serán las de $\hat{\sigma}_{O_{T_i}}^2$. Es obvia la precaución de asegurar que las unidades del estimador de peso unidad σ^2 son las apropiadas para el trabajo. No tendría sentido por ejemplo y en nuestro caso que $\sigma^2 = 1$ metro². Lo veremos inmediatamente.

Es subrayable que según lo expuesto el observable tipo distanciométrico tiene aparentemente un peso casi 30 veces superior que el angular, lo que tiene muy poco sentido para un mismo instrumento bien proyectado y construido. Y basta con cambiar las unidades para tener las más dispares combinaciones¹.

Si $\sigma^2 = 1$ metro², el peso del observable distanciométrico sería:

$$P_{\text{distancias}} = \frac{\sigma^2}{(\frac{\hat{\sigma}_{O_i}}{\sqrt{m_i}})^2} = \frac{1}{(0,0011)^2} = 826446,3$$

Si $\sigma^2 = 1$ radian, el peso del observable angular sería:

¹El cálculo y compensación de una poligonal con observaciones angulares y distanciométricas puede llevar a que el peso de las distancias sea 10000 frente a un peso en los ángulos de 0,0025. Cfr. Chueca, M.; Anquela A.B.; Baselga, S: Diseño de redes y control de deformaciones. Los problemas del datum y principal de diseño. Página 59. Ed. Universidad Politécnica de Valencia. (2007). Valencia.

$$P_{distancias} = \frac{\sigma^2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_{O_i}}{\sqrt{m_i}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{6}{636620}\right)^2} = 1,1E + 10$$

Parece razonable esforzarse en ordenar la situación.

4.3. Ponderación según los observables de la red

Proponemos a continuación una ponderación que se apoya en los observables de la red topográfica que se pretende calcular. Los datos serán más reales que los que ofrece el catálogo y, en general, diferentes para cada observable, ajustándose así a lo que ha sido la observación de campo de la red, con sus características propias (entre las que se encuentran la ecuación del observador, el estacionamiento, las lecturas de campo con sus punterías, las condiciones atmosféricas, etc). Consideramos que el valor de la varianza del observable de peso unidad σ_0^2 que más se ajusta a su valor real es el de la mediana de los valores de $\hat{\sigma}_{o_{T_i}}$, obtenidos a partir de los datos de campo. Y así lo hemos hecho en nuestros cálculos, mejorando notablemente tanto el resultado como su interpretación, como veremos en epígrafes posteriores.

A partir de las ecuaciones:

$$\hat{\sigma}_{o_i}^2 = \frac{\sum(O_{T_i} - O_i)^2}{m_i - 1}$$

$$\sigma_{o_{T_i}} = \frac{\sigma_{o_i}}{\sqrt{m_i}}$$

calculamos $\sigma_{o_{T_i}}^2$ para cada observable de nuestra red.

De entre los valores $\sigma_{o_{T_i}}^2$ seleccionamos la mediana, y desde ese momento la mediana se convierte en la varianza del observable de peso unidad σ_0^2 .

Una vez conocidos σ_0^2 y $\sigma_{o_{T_i}}^2$ obtenemos el peso de cada uno de los observables según la ecuación:

$$P_{O_{T_i}} = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{o_{T_i}}^2}$$

En el caso de la ponderación de ángulos de la red triangulada y sirviéndonos de los datos que refleja el cuadro 4.1, vamos a obtener los pesos de seis ángulos interiores.

no.	Observación	Media	$\hat{\sigma}_{o_i} [cc]$	n_1	$\sigma_{o_{T_i}} [cc]$
1	V2-V1-V3	42,49233	6,42112	13	1,78090
2	V3-V2-V4	59,07483	6,60087	7	2,49489
3	V4-V2-V1	57,56937	3,59232	7	1,35777
4	V1-V3-V2	40,86334	8,54720	11	2,57708
5	V1-V4-V2	54,75018	6,40786	12	1,84979
6	V2-V4-V3	56,43724	7,99384	12	2,30762

Cuadro 4.1: Observaciones angulares de la red

La mediana de los valores $\sigma_{O_i} = \{1, 35777, 1, 78090, 1, 84979, 2, 30762, 2, 49489, 2, 57708\}$ es $4, 3734 = \frac{1,84979^2 + 2,30762^2}{2}$

y entonces la varianza del observable de peso unidad será $\sigma_0^2 = 4, 3734$.

Y en consecuencia los pesos de los seis observables angulares:

$$P_{O_1} = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{O_{T_1}}^2} = \frac{4,3734}{1,78090^2} = 1, 37$$

$$P_{O_2} = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{O_{T_2}}^2} = \frac{4,3734}{2,49489^2} = 0, 70$$

$$P_{O_3} = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{O_{T_3}}^2} = \frac{4,3734}{1,35777^2} = 2, 39$$

$$P_{O_4} = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{O_{T_4}}^2} = \frac{4,3734}{2,57708^2} = 0, 66$$

$$P_{O_5} = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{O_{T_5}}^2} = \frac{4,3734}{1,84979^2} = 1, 29$$

$$P_{O_6} = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{O_{T_6}}^2} = \frac{4,3734}{2,30762^2} = 0, 82$$

Con los pesos de los observables distanciométricos se sigue la misma rutina de cálculo.

Así, en el caso de red triangulada o trilaterada, esta ponderación es rigurosa, y se adapta a cada levantamiento en particular, como demuestran los resultados obtenidos en diferentes redes, en los que el estimador de la varianza a posteriori coincidía con el valor propuesto para ese parámetro a priori alcanzando en algunos casos el 99 % y el 100 % de similitud.

Sin embargo, si la red contiene simultáneamente observaciones azimutales y distanciométricas es preciso arbitrar un nuevo método que presentamos a continuación.

4.4. La ponderación y cálculo en la práctica de una red triangulaterada con homogeneización de datos

En las condiciones de red mixta descritas el problema de la ponderación resulta capital, fundamentalmente por las diferentes unidades lineales y angulares que pueden arbitrariamente usarse.

A efectos de abordar ésta y otras cuestiones que también se expondrán desarrollamos el método de cálculo que llamaremos “triangulateración”.

4.4.1. Método de cálculo de la triangulación en ajuste gaussiano determinista con homogeneización de datos

La expresión general de una forma lineal genérica de observación azimutal² en el lado ij, estación en i (x_i, y_i) , vértice visado j (x_j, y_j) , coordenadas aproximadas tomadas del vector X_a , según notación usual será:

$$\delta_{ij} = \delta_{ijca} + d\delta_{ijca} = \delta_{ijc} + r\delta_{ijc} \quad (1)$$

donde

δ_{ij} =azimut compensado de lado ij

δ_{ijca} =azimut calculado de lado ij

$d\delta_{ijca}$ = diferencial de δ_{ijca}

δ_{ijc} =azimut observado de lado ij

$r\delta_{ijc}$ =residuo de δ_{ijc}

siendo el desarrollo de (1)

$$-d\delta_{oi} - \mu \frac{y_j - y_i}{l_{ijca}^2} dx_i + \mu \frac{x_j - x_i}{l_{ijca}^2} dy_i + \mu \frac{y_j - y_i}{l_{ijca}^2} dx_j - \mu \frac{x_j - x_i}{l_{ijca}^2} dy_j = \delta_{ijc} - \delta_{ijca} - r\delta_{ijc} \quad (2)$$

donde

δ_{oi} =descentrado de la estación i

$d\delta_{oi}$ = diferencial de δ_{oi}

$l_{ijca}^2 = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ = distancia reducida calculada de lado ij

$\mu = 636620$ dmgr/radian

y el sistema de formas lineales será, con la notación matricial bien conocida

²De acuerdo con la teoría desarrollada en M. Chueca et al., Métodos pg. 420 y sig. "Forma lineal de observación angular. Descentrado".

$$A_1 \cdot x - K_1 = R_1 \quad (3)$$

cuya resolución es sencilla, con posibilidad adicional de eliminación de los descentrados a lo largo del algoritmo, según se sabe.

Evidentemente, los residuos de los observables azimutales, elementos del vector R_1 , se miden en dmgr en el caso expuesto.

Y si sobre la misma red, simultanea o separadamente, se practican observaciones distanciométricas de las distancias reducidas de sus lados, será preciso agregar nuevas formas lineales de expresión general análoga a (1).

$$l_{ij} = l_{ijca} + dl_{ijca} = l_{ijo} + r l_{ijo} \quad (4)$$

con la misma notación.

Y la forma lineal genérica desarrollada será

$$-\frac{x_j - x_i}{l_{ijca}^2} dx_i - \frac{y_j - y_i}{l_{ijca}^2} dy_i + \frac{x_j - x_i}{l_{ijca}^2} dx_j + \frac{y_j - y_i}{l_{ijca}^2} dy_j = l_{ijo} - l_{ijca} - r l_{ijo} \quad (5)$$

y será preciso adicionar al sistema de formas lineales (3) el generado por las (5), que escribimos como

$$A_2 x - K_2 = R_2 \quad (6)$$

Y es claro que los residuos de los observables distanciométricos, elementos del vector R_2 , se medirán en unidades de longitud. Supongamos milímetros en el caso expuesto, sólo a efectos de fijar ideas.

Así el ajuste de la triangulación deberá resolver conjuntamente (3) y (6), es decir

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot x - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Donde el subíndice “1” corresponde a formas lineales de observables-azimutes y el “2” al de observables-distancias reducidas, asimilable también, según veremos, a observables GPS.

que para simplificar escribimos según rutina como

$$Ax - K = R \quad (8)$$

La pregunta es ¿qué significado físico tiene $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ = ángulos y distancias? (por ejemplo dmgr y mm). Y lo tenga o no: ¿Es lícito resolver la cuestión con la condición gaussiana $R^T P R = \text{mínimo}$? ¿Sin tener en cuenta que el estimador de la varianza del observable de peso unidad a posteriori carece también de significado físico? ¿Y que la matriz de pesos a priori está dividida en dos grupos sin relación entre sí, o a lo menos de muy confusa interpretación?.

Sea como fuere, la interpretación geométrica de una estación de triangulación cualquiera en $O \equiv i(x_i, y_i)$ desde la que se levanta el vértice $M \equiv j(x_j, y_j)$ es la de la figura 4.1, donde se explicitan los observables correspondientes a la medición azimutal $\alpha = \delta_{ijo}$ y la distanciométrica reducida $\rho = l_{ijo}$.

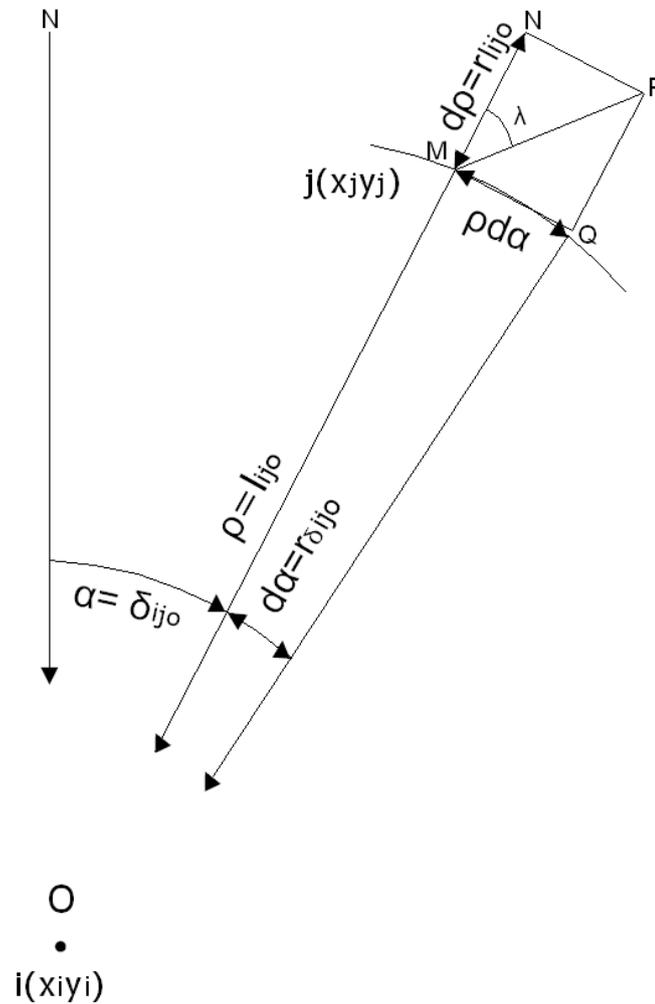


Figura 4.1: Cuadrilátero de ponderación

Con el convenio de azimutes topográficos dextrorsum de N a S pasando por el E adoptado en la expresión (1). Los errores o correcciones de observación se representan por $d\alpha$ y $d\rho$.

Entendiendo que se conserva la aproximación de primer orden del desarrollo en serie del modelo matemático $F(X) - C = 0$ de la red detenido en el primer término lineal que aceptamos como suficiente a cualquier efecto, puede escribirse

$$d\alpha = r_{\delta_{ijo}} \quad (9)$$

$$d\rho = r_{l_{ijo}} \quad (10)$$

El supuesto, es riguroso a partir del postulado de independencia a priori de los observables, que impide, cualquier transmisión de error de otras estaciones. El problema de error de estacionamiento no se contempla en el algoritmos de ajuste de redes. No es preciso considerar los signos en $\rho \cdot d\alpha$ ni $d\rho$, por dar lugar a varianzas, desviaciones típicas y pesos que, por definición, conservan la ambigüedad o son escalares al cuadrado, siempre positivos.

En virtud de lo expuesto, la corrección en el vértice M se explica geoméricamente por la composición de dos errores lineales:

$$\rho \cdot d\alpha = \rho \cdot r_{\delta ij o} = MQ = \text{arc } \rho \cdot d\alpha = \text{cuerda } \rho \cdot d\alpha \quad (11)$$

$$d\rho = r_{lij o} = MN \quad (12)$$

cuya resultante es el vector MP , corrección total. Y en el detalle ampliado de la figura 4.2 proyectando Q y N sobre MP se tendrá

$MR = SP = \rho \cdot d\alpha \cdot \text{sen}\lambda = \rho \cdot r_{\delta ij o} \cdot \text{sen}\lambda = el_{ij\delta}$ = estimador específico de la componente escalar de corrección azimutal en el módulo MP

$MS = RP = d\rho \cdot \text{cos}\lambda = r_{lij o} \cdot \text{cos}\lambda = el_{ij\rho}$ = estimador específico de la componente escalar de corrección distanciométrica en el módulo MP

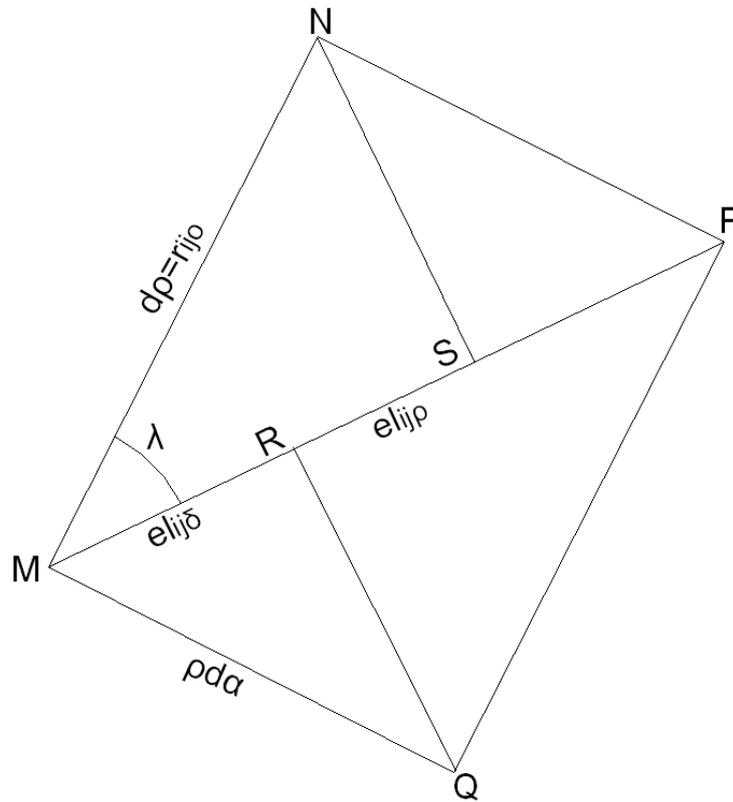


Figura 4.2: Cuadrilátero de ponderación ampliado

Ambas magnitudes lineales escalares cumpliéndose evidentemente, por ser iguales los triángulos rectángulos en R y en S , MQR y NSP (ángulos en Q y N iguales por lados paralelos, valiendo λ , e iguales los catetos MQ y NP , lados de $MNPQ$, rectángulo), que

$$MR + MS = SP + MS = MP = \text{módulo del vector } MP, \text{ corrección total.}$$

Siendo indudable la ventaja de dicha interpretación del error a priori en Diseño. Un error en un vértice de diez diezmilgrados significa en principio poco. Pero transmitido por un lado de longitud $\rho = 10 \text{ Km.}$ significa 15,7 cm en dirección normal a ρ .

Con lo que se consigue homogeneizar en valores lineales errores y correcciones azimutales y distanciométricas asociadas a un lado genérico de la red, objetivo

que se pretendía alcanzar. Efectivamente, de alguna manera, sea a partir de datos de catálogo o, lo que entendemos más acertado, utilizando medias, varianzas y desviaciones típicas de observables reiterados con resultados positivos en aplicación del Test de Pearson, se conocerán estimadores suficientemente aproximados de:

$$d\alpha = d\delta_{ijo} \approx r_{\delta_{ijo}} \approx e_{\delta_{ijo}} \quad (13)$$

Error cuadrático o desviación típica asociado a la medición azimutal de la distancia reducida genérica l_{ij} correspondiente al lado de igual denominación.

Y de

$$d\rho = dl_{ijo} \approx r_{l_{ijo}} \approx e_{l_{ijo}} \quad (14)$$

Error cuadrático o desviación típica asociado a la medición distanciométrica de la distancia reducida genérica l_{ij} correspondiente al lado de igual denominación.

Y en general se podrá escribir en Fig. 4.2 y para una doble medición genérica azimutal y distanciométrica:

$$el_{ij\delta} = \rho_{ij} \cdot e_{\delta_{ijo}} \cdot \text{sen}\lambda_i = \rho \cdot d\alpha \cdot \text{sen}\lambda = el_{\delta} \quad (15)$$

$$el_{ij\rho} = e_{l_{ijo}} \cdot \text{cos}\lambda_i = d\rho \cdot \text{cos}\lambda = el_{\rho} \quad (16)$$

Formulación de los errores cuadráticos o desviaciones típicas expresados en unidades de longitud de los dos grupos de observables (azimutales y distanciométricos respectivamente) referidos por proyección ortogonal a la corrección total MP y conocidos también a priori por serlo α, ρ , observables, $d\alpha, d\rho$, estimadores de sus errores, y $\lambda = \text{arctg} \frac{\rho \cdot d\alpha}{d\rho}$.

A continuación, adoptando la notación más sencilla, para simplificar la escritura de los cálculos que siguen y dando por supuesta su exacta interpretación genérica, específica y geométrica, el peso de la forma lineal de azimut podrá formularse como

$$p_{\delta ij} \propto \frac{1}{el_{ij\delta}^2} = \frac{1}{el_{ij\delta}^2} = \frac{1}{\rho^2 \cdot d\alpha^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda}$$

conocidos también a priori. Que por cierto es más claro escribir:

$$p_{\delta ij} = \frac{1}{\rho^2 \cdot d\alpha^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda} = \frac{1}{\rho_{ij0}^2 \cdot d\alpha_{ij0}^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda_{ij}} = \frac{1}{l_{ij0}^2 \cdot d\alpha_{ij0}^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda_{ij}}$$

y mejor aún

$$p_{\delta ij} = \frac{1}{\frac{1}{\mu^2} \cdot \rho^2 \cdot d\alpha^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{\mu^2} \cdot \rho_{ij0}^2 \cdot d\alpha_{ij0}^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda_{ij}} = \frac{1}{\frac{1}{\mu^2} \cdot l_{ij0}^2 \cdot d\alpha_{ij0}^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda_{ij}} \quad (17)$$

poniendo de manifiesto que $d\alpha$ se expresa en dmgr.

y el peso de la forma lineal de distancia reducida podrá formularse como

$$p_{lij} \propto \frac{1}{el_{ij\rho}^2} = \frac{1}{el_{ij\rho}^2} = \frac{1}{d\rho_{ij0}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}} = \frac{1}{dl_{ij0}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}} = \frac{1}{d\rho^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}} \quad (18)$$

Establecidos así los pesos de las formas lineales azimutales y distanciométricas en función de los errores específicos antes definidos, todos ellos expresados en unidades de longitud, será preciso reformular también los residuos a priori en las formas lineales iniciales de acuerdo con los nuevos supuestos.

El residuo más general de una observación azimutal podrá escribirse como:

$$r_{\delta ij0}(\text{dmgr}) \llcorner \lrcorner l_{ij0} \frac{r_{\delta ij0}}{\mu} \quad (\text{en las unidades elegidas para las distancias reducidas } l_{ij})$$

que estará sobre MQ . Será preciso proyectar como se hizo anteriormente, sobre MP , teniéndose:

$$l_{ij0} \frac{r_{\delta ij0}}{\mu} \cdot \text{sen} \lambda_{ij} = rl_{ij\delta} \quad (19)$$

y en cuanto a la observación distanciométrica, proyectando también sobre MP

$$r_{lij0} \cos \lambda_{ij} = rl_{ij\rho} \quad (20)$$

y despejando en (19) los residuos azimutales iniciales

$$r_{\delta ij0} = \mu \cdot \frac{1}{l_{ij0} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}} \cdot rl_{ij\delta} \quad (21)$$

y sustituyendo R_1 en (3), se tendrá en forma matricial

$$A_1 \cdot x - K_1 = \text{diag } \mu \cdot \frac{1}{l \cdot \text{sen} \lambda} \cdot Rl_1 \quad (22)$$

$$\text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l \cdot \text{sen} \lambda \cdot A_1 \cdot x - \text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l \cdot \text{sen} \lambda \cdot K_1 = Rl_1 = \text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l \cdot \text{sen} \lambda \cdot R_1 \quad (23)$$

y en notación simplificada

$$Al_1 \cdot x - Kl_1 = Rl_1 \quad (24)$$

Sistema de formas lineales transformado de las azimutales (3), del que se conocen todos los coeficientes y términos.

con posterior ponderación según (17)

$$p_{\delta ij} = \frac{1}{\frac{1}{\mu^2} \cdot l_{ij}^2 \cdot d\alpha_{ij}^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda_{ij}}$$

Por consiguiente, las formas lineales de azimut ponderadas adoptarán la expresión:

$$\begin{aligned} & \text{diag } \sqrt{p_{\delta ij}} \cdot Al_1 \cdot x - \text{diag } \sqrt{p_{\delta ij}} \cdot Kl_1 = \\ & = \text{diag } \sqrt{p_{\delta ij}} \cdot \text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij} \cdot Al_1 \cdot x - \text{diag } \sqrt{p_{\delta ij}} \cdot \text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij} \cdot K_1 = \\ & = \text{diag } \mu \cdot \frac{1}{l_{ij} \cdot d\alpha_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}} \cdot \text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij} \cdot Al_1 \cdot x - \\ & - \text{diag } \mu \cdot \frac{1}{l_{ij} \cdot d\alpha_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}} \cdot \text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij} \cdot K_1 = \\ & = \text{diag } \mu \cdot \frac{1}{l_{ij} \cdot d\alpha_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}} \cdot \text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij} \cdot R_1 \end{aligned}$$

es decir, teniendo en cuenta con notación simplificada, que

$$\text{diag } \mu \cdot \frac{1}{l \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda} \cdot \text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l \cdot \text{sen} \lambda = \text{diag } \frac{1}{d\alpha}$$

en definitiva queda

$$\text{diag } \frac{1}{d\alpha} \cdot A_1 \cdot x - \text{diag } \frac{1}{d\alpha} \cdot Kl_1 = \text{diag } \frac{1}{d\alpha} \cdot Rl_1$$

Que es la expresión de las formas lineales de azimut ponderadas en la forma clásica, notación simplificada.

Y por lo tanto, con la misma notación, siendo

$$Rl_1 = \left[\text{diag } \frac{1}{\mu} \cdot l \cdot \text{sen} \lambda \right] \cdot R_1$$

$$Pl_1 = \text{diag } P_{\delta ij} = \text{diag } \frac{1}{\frac{1}{\mu^2} \cdot \rho_{ij}^2 \cdot d\alpha_{ij}^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda_{ij}} =$$

$$= \text{diag} \frac{1}{l_{ij0}^2 \cdot \frac{d\alpha_{ij0}^2}{\mu^2} \cdot \text{sen}^2 \lambda_{ij}} = \left[\text{diag} \frac{1}{l_{ij0}^2 \cdot \text{sen}^2 \lambda_{ij}} \right] \cdot P_1$$

y se cumplirá que

$$R_1^T \cdot P_1 \cdot R_1 = Rl_1^T \cdot Pl_1 \cdot Rl_1$$

y a fortiori

$$R_1^T \cdot P_1 \cdot R_1 = Rl_1^T \cdot Pl_1 \cdot Rl_1 = \text{mínimo}$$

Evidentemente con un único mínimo común correspondiente a la solución Gauss-Markov. Estamos hablando tan solo de la misma solución, con distinto tratamiento a pesos y residuos.

Del mismo modo, en observaciones distanciométricas, será preciso multiplicar en primer lugar a los dos miembros de cada una de las formas lineales por el factor

$$\cos \lambda_{ij}$$

(siendo los residuos distanciométricos, si operamos en (20):

$$r_{lij0} = \frac{1}{\cos \lambda_{ij}} r_{lij\rho} \quad (25)$$

con lo que las formas lineales de distancias sustituyendo en (6) , se expresan en notación simplificada, según:

$$\text{diag} \cos \lambda \cdot A_2 \cdot x - \text{diag} \cdot \cos \lambda \cdot K_2 = \text{diag} \cos \lambda \cdot R_2 \quad (26)$$

$$\text{diag} \cos \lambda \cdot A_2 \cdot x - \text{diag} \cdot \cos \lambda \cdot K_2 = \text{diag} \cos \lambda \cdot R_2 = Rl_2 \quad (27)$$

$$Al_2x - Kl_2 = Rl_2 \quad (28)$$

con posterior ponderación según (18) de acuerdo con

$$p_{lij} = \frac{1}{d\rho_{ij0}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}} = \frac{1}{dl_{ij0}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}}$$

Por consiguiente, las formas lineales de distancia ponderadas adoptarán la expresión:

$$\begin{aligned} & \text{diag} \sqrt{p_{lij}} \cdot Al_2x - \text{diag} \sqrt{p_{lij}} \cdot Kl_2 = \\ & = \text{diag} \sqrt{p_{lij}} \cdot \text{diag} \cos \lambda_{ij} \cdot A_2x - \text{diag} \sqrt{p_{lij}} \cdot \text{diag} \cos \lambda_{ij} \cdot K_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{diag} \frac{1}{dl_{ij} \cdot \cos \lambda_{ij}} \cdot \text{diag} \cos \lambda_{ij} \cdot A_2 x - \text{diag} \frac{1}{dl_{ij} \cdot \cos \lambda_{ij}} \cdot \text{diag} \cos \lambda_{ij} \cdot K_2 = \\
 &= \text{diag} \frac{1}{dl_{ij} \cdot \cos \lambda_{ij}} \cdot \text{diag} \cos \lambda_{ij} \cdot R_2
 \end{aligned}$$

es decir, teniendo en cuenta con notación simplificada, que

$$\text{diag} \frac{1}{dl \cdot \cos \lambda} \cdot \text{diag} \cos \lambda = \text{diag} \frac{1}{dl}$$

en definitiva queda

$$\text{diag} \frac{1}{dl} \cdot A_2 x - \text{diag} \frac{1}{dl} K_2 = \text{diag} \frac{1}{dl} R_2$$

Que es la expresión de las formas lineales de distancia ponderadas en la forma clásica, notación simplificada.

Y por lo tanto, con la misma notación, siendo

$$Rl_2 = [\text{diag} \cos \lambda] \cdot R_2$$

$$Pl_2 = \text{diag} P_{ij} = \text{diag} \frac{1}{(dl \cdot \cos \lambda)^2} = [\text{diag} \frac{1}{\cos^2 \lambda}] \cdot P_2$$

se cumplirá que

$$R_2^T \cdot P_2 \cdot R_2 = Rl_2^T \cdot Pl_2 \cdot Rl_2$$

y a fortiori

$$R_2^T \cdot P_2 \cdot R_2 = Rl_2^T \cdot Pl_2 \cdot Rl_2 = \text{mínimo}$$

Evidentemente con un único mínimo común correspondiente a la solución Gauss-Markov. De nuevo estamos hablando tan solo de la misma solución, con distinto tratamiento a pesos y residuos.

Y si consideramos el sistema de triangulación conjunto, evidentemente se tendrá sumando (24) y (28):

$$\begin{pmatrix} Al_1 \\ Al_2 \end{pmatrix} \cdot x - \begin{pmatrix} Kl_1 \\ Kl_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rl_1 \\ Rl_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

de forma simplificada

$$Alx - Kl = Rl \quad (30)$$

Sistema final conjunto de formas lineales de coeficientes y términos conocidos. Listo para aplicación.

Siendo la matriz P

$$P = \begin{pmatrix} Pl_1 & 0 \\ 0 & Pl_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{diag } p_{\delta_{ij}} & 0 \\ 0 & \text{diag } l_{\delta_{ij}} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Y su condición de mínimo

$$\begin{pmatrix} Rl_1 \\ Rl_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Pl_1 & 0 \\ 0 & Pl_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rl_1 \\ Rl_2 \end{pmatrix} = \text{mínimo} \quad (32)$$

Desarrollemos la expresión anterior

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Rl_1 \\ Rl_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Pl_1 & 0 \\ 0 & Pl_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rl_1 \\ Rl_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Rl_1^T & Rl_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Pl_1 & 0 \\ 0 & Pl_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rl_1 \\ Rl_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Rl_1^T \cdot Pl_1 & Rl_2^T \cdot Pl_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rl_1 \\ Rl_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rl_1^T \cdot Pl_1 \cdot Rl_1 + & Rl_2^T \cdot Pl_2 \cdot Rl_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_1^T \cdot P_1 \cdot R_1 + & R_2^T \cdot P_2 \cdot R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como debía ser.

Y de nuevo un mínimo común Gauss-Marcov, y seguimos hablando en cualquier caso de la misma solución, con distinto tratamiento a pesos y residuos.

La expresión (32) permite ajustar rigurosamente la red resolviendo adecuadamente las cuestiones que señalábamos al principio. Todos los resultados, parámetros, estimadores, vectores y matrices de criterio y diseño presentan idénticos poder de afirmación e interpretación física que en el caso de la triangulación o trilateración simple. Obviamente en la figura 4.2 se deduce que no existe dirección privilegiada de transformación, corrección o deformación de la red a priori. El ángulo λ_i es esencialmente variable en cada punto y con él la dirección y sentido del vector MP .

Como casos particulares del más general desarrollado, la triangulación deviene en trilateración pura para

$$\lambda_i = \lambda = 0$$

en dicho supuesto $\text{sen}\lambda = 0$, y (23) y (24), correcciones azimutales, dan lugar a un sistema de formas lineales idénticamente nulo. Con $\text{cos}\lambda = 1$, (25), (26), (27), y el sistema resultante (28) son idénticos a (4), (5) y (6), correcciones distanciométricas y expresiones de la trilateración.

Se deduce en la figura 4.3 una sencilla interpretación geométrica del ajuste de una red por trilateración. Las correcciones MN en el vértice M serán siempre en el sentido de los lados o ejes trilaterados ρ . Dicha condición geométrica dominante a priori no tiene normalmente ningún respaldo en la realidad física y merece ser tomada en cuenta en la práctica profesional. Otra cosa es que en el ulterior ajuste se compongan los distintos vectores corrección como el MN generados desde distintos vértices de estación y en distintas direcciones, pero el hecho inicial es indiscutible.

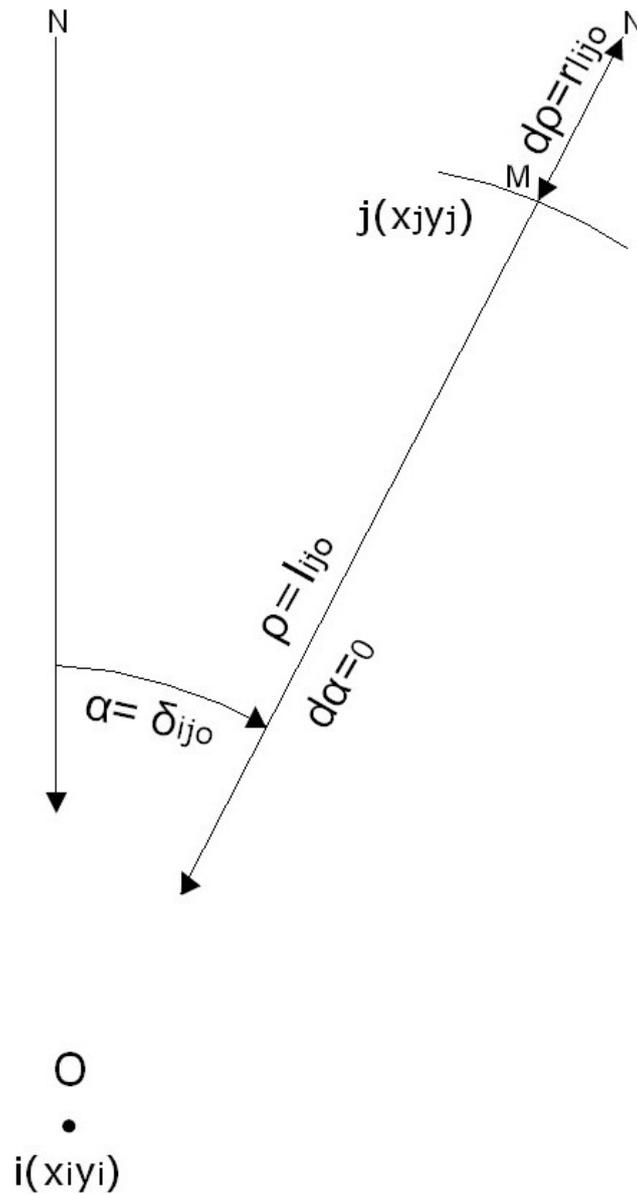


Figura 4.3: Geometría de la ponderación de la trilateración pura

Del mismo modo en la figura 4.4, la triangulación deviene en triangulación pura para

$$\lambda_i = \lambda = \frac{1}{2}\pi$$

$$\rho_i = \rho = l = 1$$

La segunda expresión es implícita en (1), expresión formada por diferenciales de ángulo en radianes, equivalentes a longitudes de cuerdas o arcos de radio unidad. En dicho supuesto $\cos\lambda = 0$ y (27) y (28), correspondientes a la trilateración, resulta un sistema de formas lineales idénticamente nulo. Con $\sin\lambda = 1$, $l = 1$, (23) y (24), correcciones azimutales, dan lugar a un sistema resultante como el (3), expresión diferencial de una red triangulada.

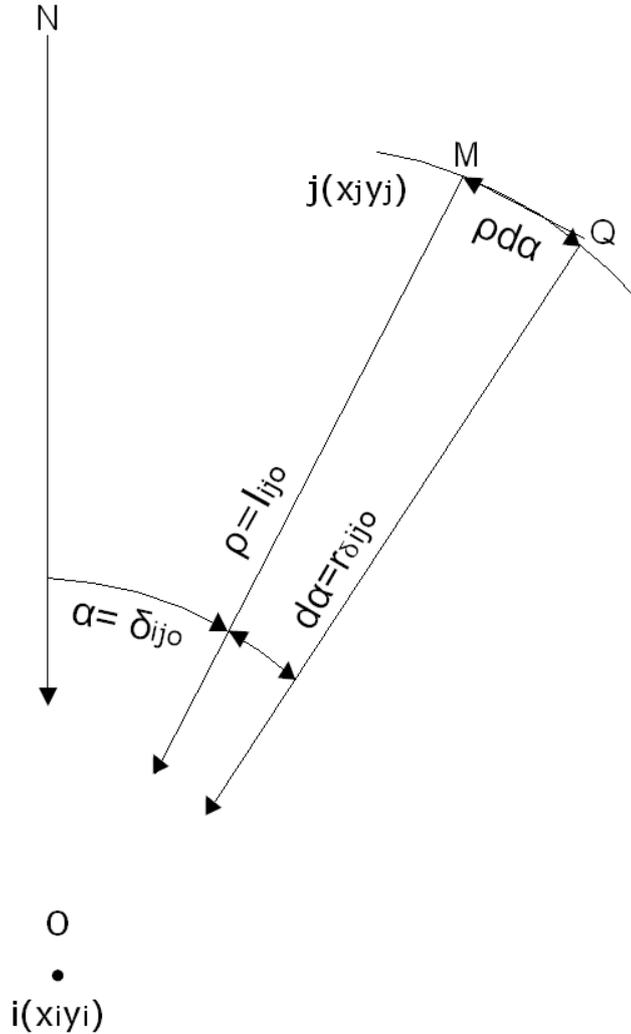


Figura 4.4: Geometría de la ponderación de la triangulación pura

Y de nuevo se deduce una sencilla interpretación geométrica del ajuste de una red por triangulación. Las correcciones en los vértices como MQ serán siempre perpendiculares a los ejes ρ , que necesariamente se habrán calculado, en el vértice visado M . Condición geométrica dominante a priori, a la que es aplicable la consideración correspondiente anterior en trilateración.

Resulta que sólo la práctica y resultados de los ajustes por triangulación están exentos a priori de condicionados geométricos. Sería deseable encontrar también una interpretación geométrica adecuada para el caso de formas lineales de ángulo, que evitaría el enojoso descentrado.

En cuanto a los observables GPS es cuestión que se abordará más adelante.

4.4.2. El factor de conversión y el peso de las formas lineales de azimut

Con el fin de homogeneizar unidades multiplicamos a cada una de las formas lineales azimutales por el factor adecuado.

El factor que multiplica a la forma lineal azimutal ij es:

$$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$$

siendo l_{ij} : la distancia reducida entre los vértices ij ;

$\mu = 636620$;

λ : ángulo interior del cuadrilátero de error del azimut ij

En el caso del azimut θ_{v4-v2} :

$$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu} = \frac{83,15023 \cdot \text{sen} 44,22}{636620} = 8,36 \cdot 10^{-5}$$

Con el fin de ponderar calcularemos un valor proporcional al peso, que como sabemos multiplicará a la forma lineal azimutal ij , y responde a la ecuación:

$$p_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha_{ij} \cdot \text{sen} \lambda}{\mu} \right)^2$$

siendo $d\alpha$: el error angular azimutal entre los vértices ij , obtenido a partir de la desviación típica de las lecturas angulares de la libreta de campo;

En el caso del azimut θ_{v4-v2} :

$$p_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu} \right)^2 = \left(\frac{83,15023 \cdot 1,84979 \cdot \text{sen} 44,22}{636620} \right)^2 = 2,3409 \cdot 10^{-8} m^2$$

A continuación, las tablas con factores de conversión y pesos proporcionales de todas las ecuaciones de azimut:

Ecuación de Azimut : $\theta_{ij} = \theta_{v4-v2}$	$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$p_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = $54,75018^g$	$8,36 \cdot 10^{-5}$	$2,37 \cdot 10^{-8}$
<i>error angular</i> = $d\alpha = 1,84979^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 83,15023$ m		
$\lambda_{ij} = 44,22^g$		

Ecuación de Azimut: θ_{v1-v2}	$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$p_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = $112,3190^g$	$6,588 \cdot 10^{-5}$	$2,56 \cdot 10^{-8}$
<i>error angular</i> = $d\alpha = 2,48526^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 64,21431$ m		
$\lambda_{ij} = 45,31^g$		

Ecuación de Azimut: θ_{v3-v2}	$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$p_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = $395,6759^g$	$7,611 \cdot 10^{-5}$	$7,95 \cdot 10^{-8}$
<i>error angular</i> = $d\alpha = 3,6669^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 66,39615$ m		
$\lambda_{ij} = 52,08^g$		

Ecuación de Azimut: θ_{v2-v4}	$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$p_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = $254,74963^g$	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$10,61 \cdot 10^{-8}$
<i>error angular</i> = $d\alpha = 2,49489^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 83,15023$ m		
$\lambda_{ij} = 90^g$		

Ecuación de Azimut: θ_{v2-v3}	$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen} \lambda_{ij}}{\mu}$	$p_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda}{\mu}\right)^2$
Azimut = $195,6748^g$	$1,04 \cdot 10^{-4}$	$8,77 \cdot 10^{-8}$
<i>error angular</i> = $d\alpha = 2,8404^{cc}$		
Distancia = $l_{ij} = 66,39165$ m		
$\lambda_{ij} = 90^g$		

4.4.3. El factor de conversión y peso de las formas lineales de distancia

Con el fin de homogeneizar unidades multiplicamos a cada una de las formas lineales de distancia por el factor adecuado.

El factor que multiplica a la forma lineal distanciométrica i j es:

$$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij},$$

siendo λ : ángulo interior del cuadrilátero de error de la distancia i j

En el caso de la distancia D_{v4-v2} el factor será:

$$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij} = \cos 44,22 = 0,7683$$

Con el fin de ponderar calcularemos un valor proporcional al peso, que como sabemos multiplicará a la forma lineal azimutal ij, y responde a la ecuación:

$$p_{l_{ij}} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$$

siendo dl_{ij} : el error distanciométrico entre los vértices i, j obtenido a partir de la desviación típica de las lecturas distanciométricas de la libreta de campo;

En el caso de la distancia D_{v4-v2} el valor proporcional al peso será:

$$p_{l_{ij}} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij} = (2,998 \cdot 10^{-4})^2 \cdot \cos^2 44,2$$

A continuación, las tablas con factores de conversión y pesos proporcionales de todas las ecuaciones de distancia:

Ecuación de Distancia : D_{v4-v2}	$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij}$,	$p_{l_{ij}} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$
<i>error distanciométrico</i> = $dl = 2,998 \cdot 10^{-4}m$	0,7683	0,2303
Distancia = $l_{ij} = 83,15023$ m		
$\lambda_{ij} = 44,22^g$		

Ecuación de Distancia : D_{v3-v2}	$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij}$,	$p_{l_{ij}} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$
<i>error distanciométrico</i> = $dl = 3,585 \cdot 10^{-4}m$	0,6836	0,2450
Distancia = $l_{ij} = 66,39165$ m		
$\lambda_{ij} = 52,08$		

Ecuación de Distancia : D_{v1-v2}	$Factor_{ij} = \cos \lambda_{ij}$,	$p_{l_{ij}} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$
<i>error distanciométrico</i> = $dl = 2,9230 \cdot 10^{-4}m$	0,7572	0,2213
Distancia = $l_{ij} = 64,21431$ m		
$\lambda_{ij} = 45,31$		

4.4.3.1. Pesos homogeneizados

Una vez conocido el valor proporcional al peso de cada una de las formas lineales de azimut y distancia, que hemos llamado en epígrafes anteriores p_i , seleccionamos de entre todos ellos el valor de la mediana, que desde ese momento se convierte en el estimador de la varianza a priori del observable de peso unidad σ_0^2 .

La mediana la ocupan los valores $0.2303 \cdot 10^{-4}$ y $0.2450 \cdot 10^{-4}$, y la media de ellos es $0,23765 \cdot 10^{-4}$. Y finalmente calcularemos el peso de cada observable con la expresión:

$$P_{O_{Ti}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = \frac{\sigma_o^2}{p_i^2}$$

siendo $\sigma_o^2 = (0,23765 \cdot 10^{-4})^2 = 5,664710^{-8}$

Resultando:

$$P_{O_{1a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = 2,3409$$

$$P_{O_{2a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = 2,1025$$

$$P_{O_{3a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = 0,7099$$

$$P_{O_{4a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = 0,5318$$

$$P_{O_{5a}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = 0,6435$$

$$P_{O_{1d}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = 1,0609$$

$$P_{O_{2d}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = 0,9409$$

$$P_{O_{3d}} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{O_{Ti}}^2} = 1,1449$$

Capítulo 5

Resolución de la red triangulaterada

5.1. Formas lineales de azimuth

Las formas lineales azimutales del sistema de ecuaciones que resolveremos por el método de variación de coordenadas, junto a sus factores de conversión, son las siguientes:

Ecuación de Azimut: $\theta_{v4-v2} = 54,75018^g$
$4995.2285 \cdot dx - 5802.3999 \cdot dy = -5.0361E-002 + \text{Residuo}$
factor de conversión = $8,36 \cdot 10^{-5}$

Ecuación de Azimut: $\theta_{v1-v2} = 112,3190^g$
$-1906.5976 \cdot dx - 9729.0597 \cdot dy = -6.7232 + \text{Residuo}$
factor de conversión = $6,588 \cdot 10^{-5}$

Ecuación de Azimut: $\theta_{v3-v2} = 395,6759^g$
$9566.8432 \cdot dx + 650.8527 \cdot dy = 2.9651 + \text{Residuo}$
factor de conversión = $7,611 \cdot 10^{-5}$

Ecuación de Azimut: $\theta_{v2-v4} = 254,74963^g$
$4995.2285 \cdot dx - 5802.3999 \cdot dy - \text{descentrado}(V2) = 1.2423 + \text{Residuo}$
factor de conversión = $1,31 \cdot 10^{-4}$

Ecuación de Azimut: $\theta_{v2-v3} = 195,6748^g$
$9566.8432 \cdot dx + 650.8527 \cdot dy - \text{descentrado}(V2) = -1.2423 + \text{Residuo}$
factor de conversión = $1,04 \cdot 10^{-4}$

Se ha supuesto único vértice libre, el V2.

Una ventaja añadida por no utilizar ecuaciones de ángulo es que evitamos la acumulación de errores en algunos de ellos, lo que resulta evidente y constatable en los ángulos exteriores de la red, últimos de cada vuelta de horizonte.

5.1.1. Ecuaciones de azimut factorizadas

Según la teoría expuesta anteriormente sobre el Método de cálculo de la triangulación en ajuste gaussiano, es imprescindible convertir las unidades angulares de las ecuaciones de azimut en unidades lineales. Conocido el factor de conversión de cada una de las ecuaciones de azimut multiplicaremos ordenadamente a las 5 ecuaciones para obtener las nuevas expresiones resultantes:

Ecuación de Azimut : $\theta_{v4-v2} = 54,75018^g$
$0.4176 \cdot dx - 0.4851 \cdot dy = -4.21E-006 + \text{Residuo}$

Ecuación de Azimut : $\theta_{v1-v2} = 112,3190^g$
$-0.1256 \cdot dx - 0.6409 \cdot dy = -4.42E-004 + \text{Residuo}$

Ecuación de Azimut : $\theta_{v3-v2} = 395,6759^g$
$0.7281 \cdot dx + 4.95E-002 \cdot dy = 2.25E-004 + \text{Residuo}$

Ecuación de Azimut : $\theta_{v2-v4} = 254,74963^g$
$0.4176 \cdot dx - 0.4851 \cdot dy - 0.1385 \cdot \text{descentrado}(V2) = 1.72E-004 + \text{Residuo}$

Ecuación de Azimut : $\theta_{v2-v3} = 254,74963^g$
$0.7281 \cdot dx + 4.95E-002 \cdot dy - 0.1043 \cdot \text{descentrado}(V2) = -1.29E-004 + \text{Residuo}$

5.2. Formas lineales de distancia

Las formas lineales distanciométricas del sistema de ecuaciones que resolveremos por el método de variación de coordenadas son las siguientes:

	Distancia [m]	Ecuación de distancia
V2-V4	83,1499	$0.7578 \cdot dx + 0.6524 \cdot dy = 9.7268E-004 + \text{Residuo}$
V3-V2	66,3912	$-6.7875E-002 \cdot dx + 0.9977 \cdot dy = 2.7036E-004 + \text{Residuo}$
V2-V1	64,2143	$0.9813 \cdot dx - 0.1923 \cdot dy = 8.3858E-004 + \text{Residuo}$

Y sus factores de conversión son:

	factor de conversión
V2-V4	0,7683
V3-V2	0,6836
V2-V1	0,7572

5.2.1. Ecuaciones de distancia factorizadas

Conocido el factor de conversión de cada una de las ecuaciones de distancia multiplicaremos ordenadamente a las 3 ecuaciones para obtener las nuevas expresiones resultantes:

	Distancia [m]	Ecuación de distancia
V2-V4	83,1499	$0.7431 \cdot dx - 0.1456 \cdot dy = 6.05E-004 + \text{Residuo}$
V3-V2	66,3912	$0.5822 \cdot dx + 0.5012 \cdot dy = 7.68E-004 + \text{Residuo}$
V2-V1	64,2143	$-4.64E-002 \cdot dx + 0.6820 \cdot dy = 2.05E-004 + \text{Residuo}$

5.3. Síntesis y resultado del ajuste de la red triangulada

La red queda definida por un vértice libre, V2, y el resto de vértices, los consideramos ligados, V1, V3, V4.

Las coordenadas aproximadas son la media ponderada entre las que provienen del camino de mejor consistencia y las que provienen del camino de peor consistencia. La ponderación es la propia de la triangulación.

Hemos utilizado 5 azimutes y 3 distancias (sólo tenemos un vértice libre, el sistema no admite otras).

El estimador de la desviación típica a priori del observable de peso unidad es 0.23 mm.

En el listado de resultados de la resolución del sistema de ecuaciones normales, se obtienen sucesivamente:

- Las matrices de diseño del sistema normal. A saber, la matriz S, la A, la de pesos P, y el vector de términos independientes K.
- El resultado de las variables (diferencial de la coordenada x: dx_{V2} , diferencial de la coordenada y: dy_{V2} y el diferencial del error debido a la línea de ceros del limbo: $d\theta$), los residuos y la varianza a posteriori del observable de peso unidad.

- Las matrices de criterio a posteriori del ajuste, a saber: matriz cofactor de las variables o parámetros, matriz cofactor de los residuos, matriz cofactor de los observables corregidos, matriz varianza covarianza de las variables o parámetros, matriz varianza covarianza a posteriori de los residuos, y matriz varianza covarianza a posteriori de los observables corregidos.
- Comprobación de los observables: fiabilidad interna y fiabilidad externa de la red.

5.3.1. La matriz **A**, la matriz de pesos **P**, el vector de términos independientes **K**, y la matriz **S**

La matriz **A**, el vector **K**, la matriz diagonal de pesos **P**, y la matriz **S**:

MATRIZ A

```

A( 1, 1) = 0.4176
A( 1, 2) = -0.4851
A( 1, 3) = 0
A( 2, 1) = -0.1256
A( 2, 2) = -0.6409
A( 2, 3) = 0
A( 3, 1) = 0.7281
A( 3, 2) = 4.95E-002
A( 3, 3) = 0
A( 4, 1) = 0.4176
A( 4, 2) = -0.4851
A( 4, 3) = 0.1385
A( 5, 1) = 0.7281
A( 5, 2) = 4.95E-002
A( 5, 3) = 0.1043
A( 6, 1) = 0.5822
A( 6, 2) = 0.5012
A( 6, 3) = 0
A( 7, 1) = -4.64E-002
A( 7, 2) = 0.6820
A( 7, 3) = 0
A( 8, 1) = 0.7431
A( 8, 2) = -0.1456
A( 8, 3) = 0

```

VECTOR K [m]

$$k(1) = -4.21E-006$$

$$k(2) = -4.42E-004$$

$$k(3) = 2.25E-004$$

$$k(4) = 1.72E-004$$

$$k(5) = -1.29E-004$$

$$k(6) = 7.68E-004$$

$$k(7) = 2.05E-004$$

$$k(8) = 6.05E-004$$

MATRIZ DIAGONAL P [adimensional]

Peso del observable 1 2.29

Peso del observable 2 2.11

Peso del observable 3 0.70

Peso del observable 4 0.51

Peso del observable 5 0.61

Peso del observable 6 1.1

Peso del observable 7 0.90

Peso del observable 8 1.11

Por último, la matriz S:

MATRIZ S

$$S = A^T P A = \begin{bmatrix} 2,2038 & -0,1778 & 0,0758 \\ -0,1778 & 2,2473 & -0,0311 \\ 0,0758 & -0,0311 & 0,0164 \end{bmatrix}$$

Debemos extremar las precauciones con el diseño de la matriz A , porque diferencias notables entre sus elementos producen grandes inestabilidades en el sistema de ecuaciones y sus resultados pueden ser irreales. Ello es tanto más cierto cuando el resultado esperable es muy pequeño, como sucede con las redes de alta precisión. Buscaremos una matriz de diseño A “estética” y matemáticamente estable, con elementos muy similares. La nueva factorización y ponderación propuesta en la triangulación cumple indudablemente este requisito, como se desprende de su misma expresión consignada.

En cuanto a la matriz de los pesos, siguiendo con la idea anterior, si tiene valores muy diferentes entre sí, adulterará la matriz A y empeorará su condicionamiento

y el resultado. Este nuevo problema no nos afecta porque todos nuestros pesos son de valores próximos a la unidad, fruto también de la metodología empleada.

El vector K también tiene su significado¹: así, valores similares en sus elementos nos garantizan observaciones con errores asociados parecidos. Si uno de ellos destacara excesivamente del resto sería conveniente prescindir de él, por no ser un buen observable. La similitud de valores de los elementos del vector K , también es un garante más de la estabilidad del sistema de ecuaciones normales. La homogeneización de unidades nos permite en una red triangulada conocer en valor y unidades cada uno de los elementos del vector K , y comparar formas lineales de azimut con las de distancias, situación imposible si no seguimos el protocolo establecido en la nueva metodología y aplicamos la que podemos llamar clásica.

Siendo la matriz $S = A^T \cdot P \cdot A$, y para insistir en la importancia de los elementos de las matrices de diseño exponemos a continuación un ejemplo de aplicación de una red triangulada con modificaciones sucesivas en la matriz de diseño S .

5.3.1.1. Un ejemplo aclaratorio

Permítasenos la digresión del sencillo ejemplo que sigue, a efectos de aclarar y ratificar conceptos anteriormente expuestos.

Se observan los puntos destacados A, B, C, D, relacionados en sentido dextrorsum, con los resultados siguientes:

$$\text{Ángulo AOB} = \alpha_1 = 30,1615^g$$

$$\text{Ángulo BOC} = \alpha_2 = 40,2709^g$$

$$\text{Ángulo COD} = \alpha_3 = 29,5681^g$$

$$\text{Ángulo AOC} = \alpha_4 = 70,4327^g$$

$$\text{Ángulo BOD} = \alpha_5 = 69,8381^g$$

Observados desde la estación O, como muestra la figura 5.1.

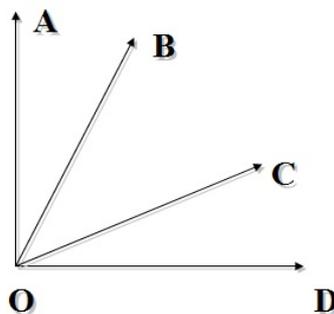


Figura 5.1: Destacados A, B, C y D visados desde el vértice O

¹En primer lugar y siguiendo el epígrafe 5.5 de esta misma publicación (“Nota sobre la constante K ”), el vector K se comporta como constante a lo largo de todo el ajuste.

Se trata de ajustar rigurosamente los ángulos anteriores, forzando al ángulo AOD a valer exactamente 100 grados centesimales.

Las formas lineales en observaciones indirectas serán las adjuntas:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & +\alpha_3 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30,1615 & +r_1 \\ 40,2709 & +r_2 \\ 29,5681 & +r_3 \\ 70,4327 & +r_4 \\ 70,4327 & +r_5 \\ 100 & +r_6 \end{pmatrix}$$

Con peso unitario las tres primeras y doble las dos siguientes y teniendo en cuenta que la última es de peso infinito. Tomaremos en el listado un peso de 9999, suficiente para el cálculo.

Todo ello como sigue:

MATRIZ A

$A(1, 1) = 1$
 $A(1, 2) = 0$
 $A(1, 3) = 0$
 $A(2, 1) = 0$
 $A(2, 2) = 1$
 $A(2, 3) = 0$
 $A(3, 1) = 0$
 $A(3, 2) = 0$
 $A(3, 3) = 1$
 $A(4, 1) = 1$
 $A(4, 2) = 1$
 $A(4, 3) = 0$
 $A(5, 1) = 0$
 $A(5, 2) = 1$
 $A(5, 3) = 1$
 $A(6, 1) = 1$
 $A(6, 2) = 1$
 $A(6, 3) = 1$

VECTOR K [grados]

$k(1) = 30.1615$
 $k(2) = 40.2709$
 $k(3) = 29.5681$
 $k(4) = 70.4327$
 $k(5) = 69.8381$
 $k(6) = 100$

MATRIZ DIAGONAL P [*adimensional*]

Peso de la medida 1: 1

Peso de la medida 2: 1

Peso de la medida 3: 1

Peso de la medida 4: 2

Peso de la medida 5: 2

Peso de la medida 6: 9999

El estimador del error cuadrático de la medida de peso unidad es = 4.34E-004

Los ángulos corregidos son:

$$\text{Ángulo AOB} = \alpha_{1c} = 30,16172^g$$

$$\text{Ángulo BOC} = \alpha_{2c} = 40,27076^g$$

$$\text{Ángulo COD} = \alpha_{3c} = 29,56752^g$$

$$\text{Ángulo AOC} = \alpha_{4c} = \alpha_{1c} + \alpha_{2c} = 70,43248^g$$

$$\text{Ángulo BOD} = \alpha_{5c} = \alpha_{2c} + \alpha_{3c} = 69,83828^g \text{ c.d.s.}$$

y por supuesto:

$$\alpha_{1c} + \alpha_{2c} + \alpha_{3c} = 100^g, \text{ exacto con cuatro decimales.}$$

A continuación aplicaremos de nuevo el método de observaciones indirectas, incrementando sucesivamente el peso de la última forma lineal, lo que no solo es correcto, sino que teóricamente es cada vez más riguroso, y emplearemos para ello el mismo programa y el mismo ordenador hasta ahora utilizado.

El peso de la medida 6 pasa de 9999 a 999999, repetimos el ajuste y mejora. Disminuyen los residuos (es importante que baje el sexto) y el estimador de la varianza del observable de peso unidad es = 4.34E-004

RESIDUOS

Residuos ponderados sin ponderar ($E = A * x - k$)

2.20E-004..... 2.20E-004

-1.40E-004..... -1.40E-004

-5.80E-004..... -5.80E-004

-3.11E-004..... -2.20E-004

2.54E-004..... 1.80E-004

4.32E-008..... 4.32E-011

Ha mejorado el resultado. Además de las dos circunstancias favorables anteriores, obsérvese que el residuo de la sexta forma lineal disminuye más y más, como debía suceder.

Repetimos el ajuste. El peso de la medida 6 pasa de 9999 a 9999999999.

RESIDUOS

Residuos ponderados sin ponderar ($E = A * x - k$)
 2.93E-004..... 2.93E-004
 -1.03E-004..... -1.03E-004
 -5.86E-004..... -5.86E-004
 -1.56E-004..... -1.10E-004
 2.98E-004..... 2.11E-004
 10.4125..... 1.041E-004

El estimador del error cuadrático de la medida de peso unidad ahora es = 6.0117

Es evidente que se degradan aceleradamente los resultados. Empiezan a deteriorarse también los valores de los ángulos corregidos. Se pierde la quinta cifra decimal respecto a los valores anteriores. Sin embargo es subrayable que hasta aquí los valores corregidos de los ángulos han permanecido practicamente constantes.

Repetimos el ajuste. El peso de la medida 6 pasa de 9999 a 999999999999. Todos los resultados, ángulos ajustados inclusive, son inaceptables o absurdos:

INCÓGNITAS = $(A_t * A)^{-1} * A_t * k$

30.1658
 40.2701
 29.5662
 Residuos ponderados sin ponderar ($E = A * x - k$)
 4.33E-003..... 4.33E-003
 -8.17E-004..... -8.17E-004
 -1.85E-003..... -1.85E-003
 4.54E-003..... 3.21E-003
 -2.51E-003..... -1.77E-003
 2157.6881..... 2.16E-003
 Estimador del error cuadrático de la medida de peso ud. = 1245.7418

Y sin embargo, todo lo que se ha hecho es incrementar el peso de la sexta forma lineal, práctica teóricamente irreprochable (forzando al ángulo AOD a valer exactamente 100 grados centesimales). Es preciso preservarse de las matrices con elementos aproximados de magnitudes muy dispares, circunstancia común en la práctica, sobre todo en las matrices de pesos, especialmente si no se toman precauciones en la elección de unidades. En caso contrario, la pérdida de precisión por simple redondeo automático y mantenido en el ordenador puede dar disgustos muy importantes.

5.3.2. El vector de variables, el vector de residuos y la varianza a posteriori del observable de peso unidad

Volvemos a nuestra red inicial.

El resultado se expresa según:

- diferencial de la coordenada x: dx_{V2} ,
- diferencial de la coordenada y: dy_{V2}
- y por último el diferencial del error debido al descentrado de la línea de ceros del limbo: $d\theta_{v2}$, en el vértice V2. Este error está asociado sólo a la ecuación de azimut,

y no a la ecuación de ángulo. No aporta nada a nuestro resultado, pero asume la existencia de ese error y le da un valor, completando así las correcciones del vértice V_2 . Si el parámetro $d\theta_{v_2}$ no estuviera incluido en el sistema de ecuaciones normales quedarían afectados desfavorablemente los valores dx_{V_2} y dy_{V_2} . Cuando estudiemos los errores de redondeo eliminaremos no obstante este parámetro, sin perjuicio de la calidad del resultado final, de forma matemáticamente rigurosa.

```

VARIABLES O PARÁMETROS [m]
6.37E-004
4.72E-004
-1.82E-003
RESIDUOS [m]
4.12E-005
5.94E-005
2.62E-004
-3.88E-004
4.26E-004
-1.60E-004
8.73E-005
-2.00E-004
Varianza de la medida de peso ud. = 6.7E-008 m2
Desv. típica de la medida de peso ud. = 2.59E-004 m

```

Los residuos son muy similares y podemos comprobar que tanto las observaciones distanciométricas como las azimutales son de análoga precisión ($6,37 \cdot 10^{-4} m$ y $4,72 \cdot 10^{-4} m$).

La desviación típica a posteriori del observable de peso unidad es la esperable, considerando que la desviación típica a priori del observable de peso unidad es $2,3 \cdot 10^{-4} m$ (recordemos que es el valor de la mediana de los valores obtenidos a partir de las estadísticas de la libreta de campo). La diferencia entre la desviación típica a priori y a posteriori es de tres centésimas de milímetro, confirmando la bondad del cálculo y trabajo.

No se olvide que la varianza a posteriori del observable de la medida de peso unidad es un parámetro fundamental además porque multiplica a las matrices de criterio que exponemos a continuación.

5.3.3. Las matrices de criterio : matriz cofactor de las variables o parámetros, matriz cofactor de los residuos, matriz cofactor de los observables corregidos, matriz varianza-covarianza de las variables o parámetros, matriz varianza-covarianza a posteriori de los residuos, y matriz varianza-covarianza a posteriori de los observables corregidos

Para la presentación de las matrices cofactor y varianza-cov se ofrece el formato +eeee.ddddd

Matriz cofactor de las Variables o PARÁMETROS.

+000.53323711 +000.01398919 -002.44201593
 +000.01398919 +000.45279754 +000.78831188
 -002.44201593 +000.78831188 +070.92405034

Matriz cofactor de los RESIDUOS

+000.23330960 -000.10991471 -000.14660857 +000.00032762 -000.00035953 -000.01853162 +000.15583602 -000.19156134
 -000.10991471 +000.27897220 +000.06974387 -000.08242082 +000.09044866 +000.19054025 +000.19558967 +000.01392255
 -000.14660857 +000.06974387 +001.12384648 +000.09424436 -000.10342384 -000.24278090 -000.00418560 -000.28427669
 +000.00032762 -000.08242082 +000.09424436 +000.71445506 -000.78404351 +000.12365798 +000.06568107 +000.07566613
 -000.00035953 +000.09044866 -000.10342384 -000.78404351 +000.86040992 -000.13570237 -000.07207846 -000.08303606
 -000.01853162 +000.19054025 -000.24278090 +000.12365798 -000.13570237 +000.63994408 -000.14559885 -000.20167742
 +000.15583602 +000.19558967 -000.00418560 +000.06568107 -000.07207846 -000.14559885 +000.85194252 +000.05616421
 -000.19156134 +000.01392255 -000.28427669 +000.07566613 -000.08303606 -000.20167742 +000.05616421 +000.57241458

Matriz cofactor de los observables corregidos

+000.19387651 +000.10991471 +000.14660856 -000.00032762 +000.00035953 +000.01853161 -000.15583602 +000.19156134
 +000.10991471 +000.19665204 -000.06974387 +000.08242081 -000.09044866 -000.19054026 -000.19558967 -000.01392256
 +000.14660856 -000.06974387 +000.28480261 -000.09424437 +000.10342383 +000.24278089 +000.00418559 +000.28427668
 -000.00032762 +000.08242081 -000.09424437 +001.16595110 +000.78404351 -000.12365799 -000.06568107 -000.07566613
 +000.00035953 -000.09044866 +000.10342383 +000.78404351 +000.69359162 +000.13570236 +000.07207845 +000.08303606
 +000.01853161 -000.19054026 +000.24278089 -000.12365799 +000.13570236 +000.30265181 +000.14559884 +000.20167742
 -000.15583602 -000.19558967 +000.00418559 -000.06568107 +000.07207845 +000.14559884 +000.21086967 -000.05616421

 +000.19156134 -000.01392256 +000.28427668 -000.07566613 +000.08303606 +000.20167742 -000.05616421 +000.30102414

```

Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS
+000.00000003 +000.00000000 -000.00000016
+000.00000000 +000.00000003 +000.00000005
-000.00000016 +000.00000005 +000.00000478

Matriz varianza-cov a posteriori de los residuos
+000.00000001 -000.00000001 -000.00000001 +000.00000000 -000.00000000 -000.00000000 +000.00000001 -000.00000001
-000.00000001 +000.00000001 +000.00000000 -000.00000001 +000.00000000 +000.00000001 +000.00000001 +000.00000000
-000.00000001 +000.00000000 +000.00000007 +000.00000000 -000.00000001 -000.00000002 -000.00000000 -000.00000002
+000.00000000 -000.00000001 +000.00000000 +000.00000004 -000.00000005 +000.00000000 +000.00000000 +000.00000000
-000.00000000 +000.00000000 -000.00000001 -000.00000005 +000.00000005 -000.00000001 -000.00000000 -000.00000001
-000.00000000 +000.00000001 -000.00000002 +000.00000000 -000.00000001 +000.00000004 -000.00000001 -000.00000001
+000.00000001 +000.00000001 -000.00000000 +000.00000000 -000.00000000 -000.00000001 +000.00000005 +000.00000000
-000.00000001 +000.00000000 -000.00000002 +000.00000000 -000.00000001 -000.00000001 +000.00000000 +000.00000003

Matriz varianza-cov a posteriori de los observables corregidos
+000.00000001 +000.00000000 +000.00000000 -000.00000000 +000.00000000 +000.00000000 -000.00000001 +000.00000001
+000.00000000 +000.00000001 -000.00000000 +000.00000000 -000.00000001 -000.00000001 -000.00000001 -000.00000000
+000.00000000 -000.00000000 +000.00000001 -000.00000001 +000.00000000 +000.00000001 +000.00000000 +000.00000001
-000.00000000 +000.00000000 -000.00000001 +000.00000007 +000.00000005 -000.00000001 -000.00000000 -000.00000001
+000.00000000 -000.00000001 +000.00000000 +000.00000005 +000.00000004 +000.00000000 +000.00000000 +000.00000000
+000.00000000 -000.00000001 +000.00000001 -000.00000001 +000.00000000 +000.00000002 +000.00000000 +000.00000001
-000.00000001 -000.00000001 +000.00000000 -000.00000000 +000.00000000 +000.00000000 +000.00000001 -000.00000000

+000.00000001 -000.00000000 +000.00000001 -000.00000001 +000.00000000 +000.00000001 -000.00000000 +000.00000002
    
```

En una primera interpretación, todas tienen sus términos aceptablemente pequeños. No obstante, la información que ofrecen es claramente insuficiente a efectos de interpretar resultados con el poder de afirmación que entendemos adecuado. Para ello y en primer lugar, acudiremos a la definición de la llamada fiabilidad, interna y externa, de la red y sus recintos de error.

5.3.4. Comprobación de los observables: fiabilidad interna de la red

Se entiende por fiabilidad interna de la red, como su capacidad de detección y control de posibles errores “groseros” en los observables. A través de ella, es posible cifrar la sensibilidad de la red ante los errores groseros. En nuestro caso, dadas las precauciones que hemos tomado desde el inicio, es sólo otra manera de comprobar que la repetibilidad y exactitud de los observables son las previstas.

La redundancia de un observable es un parámetro adimensional, y nos muestra lo bien o mal que está “controlado” dicho observable ². La expresión que nos permite calcular el número de redundancias de un observable es:

$$r_i = p_i \cdot q_i$$

donde

²Cfr. M. Chueca et. alt. “Tratado de Topografía” Tomo III, pag. 295 y siguientes.

r_i : redundancia de un observable

p_i : peso de un observable

q_i : elemento de orden ii de la matriz cofactor de los residuos a posteriori

Nuestras redundancias son homogéneas y próximas a $\frac{5}{8} = 0,625$. Todas están en torno a la redundancia media 0,625, que en la práctica es el valor óptimo, puesto que la suma de las redundancias debe valer 5, redundancia total de la red.

Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red

Comprobaciones de REDUNDANCIAS

Observación. Peso. Cofactor. Redundancia.

1	+002.3409	+000.23330960	+000.54615445
2	+002.1025	+000.27897220	+000.58653906
3	+000.7099	+001.12384648	+000.79781862
4	+000.5318	+000.71445506	+000.37994720
5	+000.6435	+000.86040992	+000.55367378
6	+001.0609	+000.63994408	+000.67891668
7	+000.9409	+000.85194252	+000.80159272
8	+001.1449	+000.57241458	+000.65535745

Suma de Redundancias = +005

El parámetro de Baarda depende del nivel de significación α y de la potencia del test β , en nuestro caso se ha establecido $\alpha = 5\%$ y $\beta = 80\%$. El parámetro de Baarda se obtiene a partir de la expresión:

$$w_i = \frac{R_i}{\sigma_{R_i}}$$

El parámetro de Baarda es el que se emplea para eliminar o rechazar un observable. Además este parámetro permite controlar los errores groseros introducidos en la red. De este modo un observable será rechazado cuando el parámetro de Baarda sea superior al punto porcentual establecido para el nivel de significación, que para nosotros es 3.29 ($w_i < 3.29$). Todos los parámetros de Baarda en nuestro caso se encuentran en el intervalo $[+1.80, -1.80] < 3.29$, y por tanto todos los observables son aceptados.

Comprobaciones de Fiabilidad Interna de la red

Comprobaciones de Error grosero (TEST DE BAARDA)

Ob. Residuo (R_i) Err.cuad(σ_i) Var.de Baarda (w_i).

1	+000.00004124	+000.00012546	+000.32871355
2	+000.00005945	+000.00013719	+000.43339309
3	+000.00026218	+000.00027535	+000.95213905
4	-000.00038791	+000.00021954	-001.76685555
5	+000.00042569	+000.00024093	+001.76685555
6	-000.00016054	+000.00020778	-000.77261671
7	+000.00008737	+000.00023974	+000.36445253
8	-000.00020036	+000.00019651	-001.01955530

El mínimo error detectable para un observable se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\nabla_{O_i} = \frac{\delta \cdot \sigma_i}{\sqrt{r_i}}$$

Siendo δ el parámetro de translación, función de $\alpha = 5\%$ y $\beta = 80\%$, y que tiene un valor de 4.12.

En consecuencia el error máximo que puede deslizarse en uno de nuestros observables y no ser detectado es de 0.00187 metros (observable n^o 4).

El parámetro de homogeneidad, $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$, confirma la información facilitada por los números de redundancia.

Comprobaciones de Fiabilidad interna de la red

Valor de para el nivel de significación α , y potencia β del test , $\delta = 4.12$

Ob. (σ_i) $(\sqrt{r_i})$ (∇_{O_i}) Parámetro de Homogeneidad $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$

1	+000.00011436	+000.73902263	+000.00063759	+005.57493072
2	+000.00011518	+000.76585838	+000.00061964	+005.37958462
3	+000.00013861	+000.89320693	+000.00063938	+004.61259295
4	+000.00028046	+000.61639857	+000.00187465	+006.68398690
5	+000.00021632	+000.74409259	+000.00119775	+005.53694532
6	+000.00014289	+000.82396400	+000.00071450	+005.00021841
7	+000.00011927	+000.89531710	+000.00054887	+004.60172151
8	+000.00014251	+000.80954150	+000.00072527	+005.08930048

Sin embargo, la fiabilidad interna en sí misma no facilita información sobre la repercusión última que puede tener la aparición de errores como los descritos en las coordenadas de los vértices de la red, solución del problema. El análisis de la fiabilidad externa de la red nos dirá cómo influirá en dichos resultados los errores no detectados por el análisis de la fiabilidad interna.

5.3.5. Comprobación de los observables: fiabilidad externa de la red

Una aceptable fiabilidad interna de la red puede no ser suficiente para garantizar la calidad del ajuste. El debido rigor en el trabajo requiere completar su estudio con la descripción de la fiabilidad externa, para que no se deteriore la calidad exigible en la precisión por los errores despreciados o no detectados.

La fiabilidad externa quedará definida por los siguientes elementos:

1 - Los parámetros de homogeneidad $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1 - r_i}$, (conocido $\mu_{INi} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$).

La calidad del ajuste es inversamente proporcional al valor de los parámetros de homogeneidad. Es claro que en una red tan pequeña como la estudiada la información que ofrecen tanto μ_{Exi} como μ_{INi} es muy escasa. Sin embargo en una red amplia puede ser muy importante poner de manifiesto las diferencias de nivel de control entre unas zonas y otras.

2 - Los vectores son $\nabla_{xO_i} = (A^T P A)^{-1} A^T P e_i \nabla_{O_i}$.

Un error no detectado ∇_{O_i} en el observable de orden i afectaría a cada variable según:

$$error \, dx_{V_2} = \text{Variable 1}$$

$$error \, dy_{V_2} = \text{Variable 2}$$

$$error \, d\theta_{v_2} = \text{Variable 3, según el listado siguiente.}$$

Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red

O.- $\sqrt{1-r_i}$ Parámetro de Homogeneidad $\mu_{Exi} = \mu_{INi}\sqrt{1-r_i}$

1 +000.67368059 +003.75572265

2 +000.64300927 +003.45912282

3 +000.44964583 +002.07403322

4 +000.78743431 +005.26320064

5 +000.66807650 +003.69910306

6 +000.56664214 +002.83333446

7 +000.44542931 +002.04974165

8 +000.58706264 +002.98773818

Comprobaciones de Fiabilidad Externa de la red**Vectores de fiabilidad externa:**

Observable ... (1)———[*m*]
Variable o Parámetro 1... +000.00032223
Variable o Parámetro 2... -000.00031912
Variable o Parámetro 3... -000.00209286
Observable ... (2)———[*m*]
Variable o Parámetro 1... -000.00009894
Variable o Parámetro 2... -000.00038036
Variable o Parámetro 3... -000.00025862
Observable ... (3)———[*m*]
Variable o Parámetro 1... +000.00017654
Variable o Parámetro 2... +000.00001479
Variable o Parámetro 3... -000.00078934
Observable ... (4)———[*m*]
Variable o Parámetro 1... -000.00012195
Variable o Parámetro 2... -000.00010431
Variable o Parámetro 3... +000.00839503
Observable ... (5)———[*m*]
Variable o Parámetro 1... +000.00010346
Variable o Parámetro 2... +000.00008849
Variable o Parámetro 3... +000.00436121
Observable ... (6)———[*m*]
Variable o Parámetro 1... +000.00024064
Variable o Parámetro 2... +000.00017820
Variable o Parámetro 3... -000.00077821
Observable ... (7)———[*m*]
Variable o Parámetro 1... -000.00000785
Variable o Parámetro 2... +000.00015914
Variable o Parámetro 3... +000.00033616
Observable ... (8)———[*m*]
Variable o Parámetro 1... +000.00032734
Variable o Parámetro 2... -000.00004611
Variable o Parámetro 3... -000.00160215

Renunciando por el momento al parámetro o variable 3: $d\theta_{v2}$, la composición cuadrática de los errores transmitidos por los observables, supuesto el caso más desfavorable, resulta:

Observable	$\sqrt{\text{error } dx^2 + \text{error } dy^2}$
1	0,45 mm
2	0,31 mm
3	0,17 mm
4	0,15 mm
5	0,12 mm
6	0,29 mm
7	0,15 mm
8	0,30 mm

El peor de los casos sería el que hiciera simultáneos todos los errores de la tabla anterior, y en ese caso, la composición cuadrática de todos ellos alcanzaría el valor de 0,74 mm. Parece que la precisión en la determinación del vértice V_2 es claramente submilimétrica. Si el resultado es satisfactorio o no, es cuestión de la tolerancia preestablecida.

5.4. Semiejes de la elipse standard

Conocida la matriz $S = (A^T P A)$

MATRIZ S

$$S = A^T P A = \begin{bmatrix} 2,2038 & -0,1778 & 0,0758 \\ -0,1778 & 2,2473 & -0,0311 \\ 0,0758 & -0,0311 & 0,0164 \end{bmatrix}$$

y conocida la desviación típica del observable de peso unidad $\sigma_0 = 2,59 \cdot 10^{-4}$, podemos calcular, según teoría conocida³, los semiejes de la elipse standard de error.

En primer lugar obtendremos los autovalores de la matriz S:

autovalores de S

$$\mu_1 = 2.4069$$

$$\mu_2 = 2.0471$$

$$\mu_3 = 0.0135$$

³Cfr. M. Chueca et. alt. "Tratado de Topografía" Tomo III, pag. 273 y siguientes.

No obstante, el tercer autovalor corresponde al descentrado y en el caso que nos ocupa puede ser ignorado. Sólo se utilizarán los dos primeros para formar la elipse de error del vértice en estudio.

Y en segundo y último lugar calcularemos los semiejes genéricos, según la ecuación $\Phi_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$, y serán los que siguen:

$$\Phi_1 = 1,67 \cdot 10^{-4}m$$

$$\Phi_2 = 1,81 \cdot 10^{-4}m$$

5.5. Nota sobre la constante K

A partir del modelo matemático general de la red $F_i(X, C) = 0$ y en el desarrollo del ajuste de una Red, caso general, se tiene que

$$K = -F_i(X_a, O_T) \quad (1)$$

Y como en la solución del ajuste

$$x = S^{-1} \cdot A^T \cdot M^{-1} \cdot K \quad (2)$$

Y según teoría⁴, K sigue valiendo (1) se deduce que en el entorno de (X_a, O_T) , K puede considerarse constante.

Del mismo modo y considerando que también $X_a = Cte.$ a lo largo de todo el cálculo, K puede desarrollarse en serie de Taylor en función lineal solamente de O_T deteniendo el desarrollo en su término de primer grado.

Se escribe pues⁵:

$$\begin{aligned} K + dK &\cong K = -F_i(O_T + dO_T) = -F_i(O_T) - \frac{\delta F_i}{\delta O_T} \cdot dO_T = \\ &= -F_i(O_T) - BR = Cte. - BR \quad (3) \end{aligned}$$

deduciéndose inmediatamente

$$Q_K = (-B) \cdot Q_R \cdot (-B) = B \cdot Q \cdot B^T = B \cdot P^{-1} \cdot B^T = M \quad (4)$$

con la notación establecida.

En el caso de observaciones indirectas el modelo matemático es de la forma

⁴Cfr. M. Chueca et. alt. "Tratado de Topografía" Tomo III, pag. 17 ecuación (37).

⁵Cfr. M. Chueca et. alt. "Tratado de Topografía" Tomo III, pag. pg. 21 ecuaciones (38) a (40) y sig.

$$F(X) - C = 0 \quad (5)$$

prescindiendo de subíndices, y con $B = -I$ resulta

$$Q_K = Q = P^{-1} \quad (6)$$

Pero también puede escribirse en (1) con la notación usual

$$K = -F_i(X_a) + O_T = O_T - O_C = O_T + Cte. \quad (7)$$

De donde se sigue

$$Q_K = Q_{O_T} \quad (8)$$

Pero según (6)

$$\Sigma_O = diag \sigma_i^2 = s^2 \cdot Q$$

$$Q_K = Q = \frac{1}{s^2} diag \sigma_i^2 \quad (9)$$

y también se puede escribir según (8)

$$\Sigma_{O_T} = diag \frac{\sigma_i^2}{n_i} = s^2 \cdot Q_{O_T}$$

$$Q_K = Q_{O_T} = \frac{1}{s^2} \cdot diag \frac{\sigma_i^2}{n_i} \neq Q \quad (10)$$

que resulta a lo menos paradójico.

Parece que la explicación se encuentra en que, en el caso (7) de observaciones indirectas, no ha sido preciso desarrollar nada ni despreciar nada. El resultado es que aceptando (6) en vez de (8) se adopta también un coeficiente de seguridad que no debe ignorarse en el proyecto, a priori cifrable en el factor n_i , divisor de las varianzas de los observables.

Ahora bien, en el caso en que $n_i = n = Cte.$, (10) puede escribirse

$$\Sigma_{O_T} = diag \frac{\sigma_i^2}{n_i} = s^2 \cdot Q_{O_T}$$

$$Q_K = Q_{O_T} = \frac{1}{s^2} \cdot diag \frac{\sigma_i^2}{n_i} = \frac{1}{s^2 \cdot n} \cdot diag \sigma_i^2 = \frac{1}{s'^2} \cdot diag \sigma_i^2 = Q \quad (11)$$

adoptando el factor de varianza s' en vez de s . Siendo ambos arbitrarios la cuestión queda resuelta.

Una única recomendación que, como siempre, es de sentido común. Tampoco es indiferente mezclar observables con número de reiteraciones muy distintos. No solo desequilibra como hemos visto la cuestión de los pesos. También influye en el estricto desarrollo teórico.

Capítulo 6

Figuras de error

Este capítulo tiene como objetivo determinar las figuras de error asociadas a un vértice obtenido a partir de observaciones angulares o distanciométricas, y calcular la fiabilidad asociada a las superficies de esas figuras. El método que utilizamos puede aplicarse, y así se hace, tanto a triangulaciones como a trilateraciones y poligonaciones, y en general a cualquier determinación por coordenadas de un vértice genérico. En el caso que nos ocupa las figuras de error y las fiabilidades las calcularemos del vértice libre V_2 , determinado por el método de la triangulación.

6.1. La podaria o curva pedal

Se define como el lugar geométrico de los afijos de los vectores con origen en el vértice en estudio, argumento arbitrario, y módulo igual a una desviación típica de error lineal en el eje considerado.

Su ecuación en polares es:

$$PS \equiv \sigma_r^2 = \sigma_x^2 \cdot \cos^2 w + \sigma_y^2 \cdot \sen^2 w + 2\sigma_{xy} \sen w \cdot \cos w,$$

con la notación usual: argumento w , radio vector r

Y la ecuación en cartesianas de la podaria será de la forma:

$$PS \equiv \sigma_x^2 \cdot x^2 + \sigma_y^2 \cdot y^2 + 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y = (x^2 + y^2)^2$$

Geométricamente se trata de la curva pedal del centro de la elipse standard¹:

$$ES \equiv \sigma_x^2 \cdot y^2 - 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y + \sigma_y^2 \cdot x^2 = (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy})$$

sobre sus tangentes, de forma bien conocida.

La superficie encerrada por la curva PS se acepta como recinto de error con fiabilidad 0,6826 donde se encuentra el vértice exacto desconocido.

¹Cfr. M. Chueca et. alt. "Tratado de Topografía" Tomo III, pag. 281, fórmula (804).

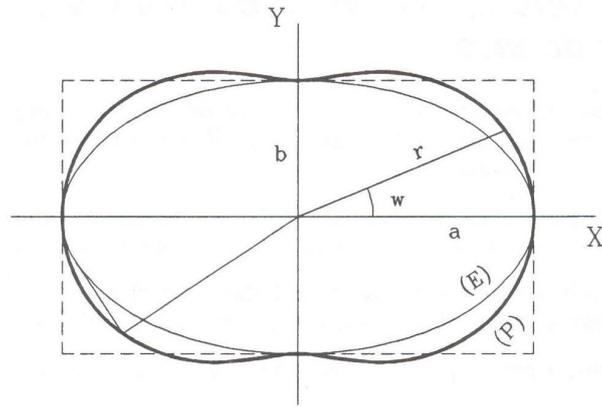


Figura 6.1: La podaria o curva pedal (P) y elipse asociada (E)

σ_{xxV_2} = Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS [m^2]

$$+000.000000003 \quad +000.000000000$$

$$+000.000000000 \quad +000.000000003$$

$$\sigma_x^2 = 0,000000003 \text{ m}^2, \sigma_x = 0,1732 \text{ mm}$$

$$\sigma_y^2 = 0,000000003 \text{ m}^2, \sigma_y = 0,1732 \text{ mm}$$

$$\sigma_{xy} = 0 \text{ m}^2$$

Aplicando en nuestro caso a V_2 y siendo conocido σ_x^2 , σ_y^2 , y σ_{xy} , la curva podaria queda determinada según

$$\sigma_r^2 = 0,03 \cdot (\cos^2 w + \text{sen}^2 w) = (x^2 + y^2)^2$$

o bien

$$0,03 \cdot (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$$

es decir

$$x^2 + y^2 = 0,03$$

En polares y cartesianas, resultando una circunferencia de $0,1732 \text{ mm}$. de radio, centrada en el vértice V_2 .

6.2. La elipse asociada a la curva pedal

Según hemos adelantado, con cierta prolijidad aunque sencillamente, se puede demostrar que la elipse asociada a la podaria será de la forma:

$$ES \equiv \sigma_x^2 \cdot y^2 - 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y + \sigma_y^2 \cdot x^2 = (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)$$

Elipse genérica standard de incertidumbre a posteriori en coordenadas cartesianas para un punto compensado cualquiera de la red, en nuestro caso el vértice V_2 , en función de su matriz varianza covarianza σ_{xxV_2} , referida al sistema de ejes locales con origen en V_2 y paralelos a los del levantamiento OXY.

Los semiejes de la elipse (errores máximo y mínimo) en dirección y módulo se calculan con la expresión siguiente:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}] = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 0,00000003) = 0,00000003 \text{ m}^2$$

con el signo + se obtiene el semieje mayor:

$$\sigma_{r_1} = +a_L = +0,1732 \text{ mm} = a$$

con el signo - se obtiene el semieje menor:

$$\sigma_{r_2} = -a_L = -0,1732 \text{ mm} = b$$

En general, errores máximo y mínimo en valor absoluto que en nuestro caso resultan iguales y la elipse una circunferencia c.d.s.

6.3. Probabilidades de error asociadas a las figuras de error

Una primera reflexión se plantea sobre la impropia denominación tradicional de la elipse ES como figura de error "standard". En efecto, el recinto que corresponde a esa denominación, de probabilidad constante, es el delimitado por la podaria. Es más, la probabilidad asociada a la elipse mal llamada standard es variable en cada caso. No obstante, seguiremos denominándola así, bien entendido lo que antecede.

Por otra parte es claro que podaria y elipse sólo dependen de σ_{xxV_2} . Es preciso preguntarse qué papel desempeñan el resto de las covarianzas de la matriz σ_{xx} correspondientes a pares de coordenadas de distintos puntos de la red. También lo veremos. Pero en el supuesto presente sólo tenemos un vértice libre y no es pues caso de estudio presente.

Sin embargo, sí puede estimarse la probabilidad asociada a la elipse standard, según se ha definido y aceptado. Bastará con calcular la relación existente entre las áreas delimitadas por las dos superficies de error, en su caso más general.

Conocida el área de la podaria y el área de la elipse se puede estimar en primera aproximación y sin exigencias de rigor teórico la probabilidad asociada a la elipse a partir de la probabilidad conocida de la podaria.

Siendo la probabilidad de la podaria $1\sigma^2$ (una varianza) $\langle \rangle \pm 1\sigma$ (una desviación típica), $\langle 0,68 \rangle$, y la probabilidad de la elipse asociada a $K^2\sigma^2$ (varianzas) $\langle \rangle \pm K\sigma$ (desviaciones típicas) con:

$$\text{Área Podaria} = A_P = \pi \cdot \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\text{Área Elipse} = A_E = \pi \cdot ab$$

$$K^2 = \frac{A_E}{A_P} = \pm \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\text{Prob ES} \langle \rangle \pm \sqrt{\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\sigma} = \pm K\sigma \text{ desviaciones típicas}$$

donde $k \leq 1$, pues lo que sí suponemos:

$$\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$$

se sigue

$$a^2 + b^2 \geq 2ab;$$

$$(a + b)^2 \geq 0$$

$a \geq b$ cierto por hipótesis. (a, b semiejes mayor y menor de la elipse)

y por definición de ambas curvas de nuevo encontraremos el óptimo en nuestro proyecto cuando $a = b = R = 0,1732mm$. La elipse y su podaria standard óptimas que denominamos ESO y PSO se confunden en la circunferencia CS standard, y se tiene:

$$\text{Probabilidad CS} = \text{Probabilidad ESO} =$$

$$= \text{Probabilidad PSO} \langle \rangle \sqrt{\frac{2R^2}{R^2+R^2}} \sigma^2 = \pm 1\sigma \langle \rangle 0,68$$

probabilidad standard. Una homotecia de razón adecuada según rutina de la distribución normal practicada a las figuras descritas genera el recinto de incertidumbre con la probabilidad que se precise. (P.ej. son muy usadas la razón 2 y 2,5 que corresponden a fiabilidad 0,95 y 0,99).

Así en nuestra red:

A la circunferencia standard de radio $0,1732 \text{ mm}$ se asocia una fiabilidad del 68 %.

A la circunferencia de radio $(2 \cdot 0,1732 \text{ mm}) = 0,3464 \text{ mm}$ se asocia una fiabilidad del 95 %.

A la circunferencia de radio $(2,5 \cdot 0,1732 \text{ mm}) = 0,4330 \text{ mm}$ se asocia una fiabilidad del 99 %.

Podemos decir finalmente que después de la compensación de la triangulación las correcciones del único vértice libre V_2 son:

VARIABLES O PARÁMETROS [m]

diferencial de la coordenada x: $dx_{V_2} = 6.370\text{E}-004 \text{ m}$

diferencial de la coordenada y: $dy_{V_2} = 4.720\text{E}-004 \text{ m}$

que modifican las coordenadas aproximadas del vértice V_2 , que definitivamente serán:

$$X_{V_2} = 163,0146 \text{ m} + 0,00064 = 163,01524 \text{ m}$$

$$Y_{V_2} = 154,2486 \text{ m} + 0,00047 = 154,24907 \text{ m}$$

Y finalmente, la posición exacta y siempre desconocida del vértice que podemos llamar V_{2E} se encontrará en el interior del círculo de centro el vértice V_2 (compensado rigurosamente) y de radio $0,4330 \text{ mm}$ con una fiabilidad del 99 % .

En consecuencia, tal parece que todos los números que hemos realizado hasta ahora conducen a definir las coordenadas del vértice V_2 con cifras exactas hasta los milímetros. Afinar más se nos antoja aventurado, y todavía lo será más cuando cuando nos ocupemos de las posibles perturbaciones en los elementos del sistema lineal de ecuaciones normales, tarea que emprendemos a continuación.

Tal vez se acostumbre a definir la condición submilimétrica en la precisión de redes con alguna alegría. Pues tal vez.

Y quizá parezca desmesurado el esfuerzo realizado para estudiar un sólo vértice y su resultado más bien magro. Pues quizá.

Capítulo 7

Cálculo del porcentaje de error en ajuste gaussiano determinista

En este capítulo estudiamos el error debido al cálculo numérico del sistema matricial de ecuaciones normales: $x = S^{-1} \cdot b$, refiriéndonos sólo a la solución determinista.

Podemos evaluar el error relativo transmitido al vector de correcciones x por:

- el error existente en el vector b y
- el correspondiente error de la matriz S .

Por lo que respecta a la matriz de diseño $A_{m,n}$, sus elementos carecen de información específica de error y sólo pueden considerarse como exactos en todas sus cifras, hasta el último decimal adoptado, como corresponde a la mejor solución asequible a priori.

Las formas de ángulo de la matriz de diseño A podrían ser más problemáticas que las de distancia, simplemente por las unidades (radianes o diezmiligrados igualmente peligrosos). Pero, en nuestro caso, restamos este problema porque hemos aplicado un factor de conversión de unidades angulares a unidades lineales, en las formas de ángulo, como ya hemos visto en epígrafes anteriores.

Intentando paliar el error debido a las operaciones que efectúa el ordenador en la resolución del ajuste es importante no utilizar números con muchas cifras enteras y decimales y con mayor razón evitar el empleo de números muy grandes y muy pequeños simultáneamente. Entonces indefectiblemente aparecen los redondeos y muy peligrosamente.

7.1. Teoría sobre el cálculo de porcentaje de error en ajuste gaussiano determinista

Con la notación usual. Sea el sistema de ecuaciones normales solución de la red:

$$S \cdot x = A^T \cdot P \cdot A \cdot x = A^T \cdot P \cdot K = A^T \cdot P \cdot (O_T - O_C) = b$$

Es evidente, que nuestro objetivo fundamental y prácticamente único es definir el vector de correcciones x con la mayor precisión posible. Y después de nuestras reflexiones sobre las redes libres y ligadas, refiriéndonos tan solo a la solución determinista

$$x = S^{-1} \cdot b$$

previa determinación de los vértices más precisos (de varianza mínima) que se tomarán como exactos eligiéndolos en la matriz varianza covarianza de todas las correcciones definida en la solución seudo inversa

$$\sigma_{xx} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot S^+$$

Dicho esto, es claro que a lo largo del algoritmo de cálculo y programa que se emplee, las únicas fuentes de error posibles procederán de los valores adoptados para S , S^{-1} , y b , matrices, vectores y sus elementos que llamamos “de diseño”.

Y como todo el resto de nuestro esfuerzo, se sustenta sobre un trabajo de campo sintetizado en el vector de observables $O \sim N(O_T, \sum_o) = N(O_T, \text{diag } \sigma_i^2) = N(O_T, \text{diag } \sigma_o^2 \cdot Q)$ con la notación convenida.

Quiere decirse que solamente los valores de los observables representados por los elementos del vector O y sus medias por O_T podemos considerarlos a priori como números aproximados reuniendo los requisitos imprescindibles para ello, a saber, conocimiento de sus errores cuadráticos (desviaciones típicas σ_i , su distribución, normal en nuestro caso, y por tanto la posibilidad de establecer cotas de error de poder de afirmación arbitrario, hasta ser asintótico con la certeza).

En puro rigor, no conocemos valores aproximados en el sentido aritmético de “número de cifras exactas” a priori. Por lo tanto, este dato se deducirá en su caso y a posteriori de la secuencia de cálculos en el algoritmo operativo. Para ello, los valores de X_a , coordenadas aproximadas a priori, y $O_c = F(X_a)$, observables calculados en el modelo matemático $F(X)-C = \theta$ deberán recibir el tratamiento inicial de valores exactos. Al fin y al cabo, es la mejor solución que puede arbitrarse antes de iniciar el cálculo del ajuste y a través de él.

Con ello, toda la profusa doctrina existente de Álgebra Lineal y sus aplicaciones en procesos de cálculo con números aproximados y redondeos se simplifica sensiblemente, aplicándola estrictamente a nuestros fines. Y hablaremos de redondeo cuando haya algo que redondear, evidentemente.

Entrando ya en materia, supongamos la existencia de un error db en la formulación y cálculo del término independiente b del sistema de ecuaciones normales antes formulado. Podrá escribirse

$$S \cdot (x + dx) = S \cdot x' = b' = b + db$$

Y operando según teoría conocida

$$S \cdot dx = S \cdot (x' - x) = db$$

$$dx = (x' - x) = S^{-1} \cdot db$$

Multiplicando y dividiendo por $Sx = b$ se tiene sucesivamente

$$dx = S^{-1} \cdot \frac{S \cdot x}{b} \cdot db$$

y por definición de norma

$$\|dx\| = \|x' - x\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \|x\| \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = \|S^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \|x\| \cdot \frac{\|b-b'\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|x'-x\|}{\|x\|} \leq \|S^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \frac{\|b-b'\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq \|S^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|}$$

y siendo S, S^{-1} , simétricas y definido positivas, en aplicación directa del Cociente de Rayleigh a ambas

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq \|S^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = \frac{1}{\mu_{\text{mínimo}}} \cdot \mu_{\text{máximo}} \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|}$$

y en definitiva, podemos formular la expresión del error relativo transmitido al vector de correcciones x por el correspondiente error existente en b según

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|}$$

donde $k = n^0$ de condición de la matriz de diseño S . El porcentaje de error o error relativo en x será igual o menor al error relativo en b multiplicado por k . S estará tanto mejor condicionada cuanto menor sea k , que suponemos conocido. En principio, es todo lo que necesitamos, si somos capaces de gestionar bien la fórmula y su significado físico.

Tratemos de cifrar $\frac{\|db\|}{\|b\|}$ estableciendo un estimador adecuado de db .

Siendo

$$A^T \cdot P \cdot K = A^T \cdot P \cdot (O_T - O_C) = b$$

Es claro que el posible error en b solo puede proceder de uno o varios de los factores que le conforman.

Por lo que respecta a $A_{m,n}$, matriz de diseño, sus elementos en una red que entendemos por el momento clásica, procederán solamente de observaciones angulares y/o distanciométricas y en cualquier caso habrán sido calculados a partir del vector de coordenadas aproximadas X_a , constantes a lo largo de todo el proceso, y que según hemos convenido, deben recibir el tratamiento de exactos.

Sus expresiones, con la notación usual, serán de la forma $\pm \left[\frac{x_k - x_j}{l_{jk}^2} \right]$

o bien $-\left[\frac{x_k - x_j}{l_{jk}^2} + \frac{x_j - x_i}{l_{ij}^2} \right]$ en formas lineales de ángulo

y de la forma $\pm \left[\frac{x_k - x_j}{l_{jk}} \right]$ en formas de lado.

Adelantamos que es importante tener en cuenta para lo que sigue que los valores anteriores son siempre menores o a lo sumo iguales a la unidad (cocientes de incrementos de coordenadas por cuadrados de las longitudes o longitudes de los ejes correspondientes). Y la sencillez de las operaciones matemáticas utilizadas, una simple resta seguida de división, permiten que los consideremos así mismo exactos.

Sin embargo, en las formas de ángulo, si no se opera en radianes es preciso multiplicar por el coeficiente de conversión correspondiente, que llega a valer 636.620 dmgr/radian si se opera en diezmiligrados centesimales con el consiguiente incremento de las cifras resultantes y las consecuencias que veremos de ello se derivan.

Sea como fuere, insistimos en que los elementos de la matriz A carecen de información específica de error y solo pueden considerarse como exactos en todas sus cifras, hasta el último decimal adoptado, como corresponde a la mejor solución asequible a priori. ¿Y si A es, a priori, de elementos exactos? Lo veremos.

Por lo que respecta a los pesos, midiendo las relaciones de precisión entre observables, son obviamente números adimensionales y por supuesto también los mejores asequibles. Les es aplicable el párrafo anterior, y también la consideración anteprecedente, porque en principio nada impide multiplicarlos a todos por cualquier número, no influyendo teóricamente en el resultado final. Sin embargo, se reitera y recuerda que un solo observable que en teoría tiene un peso infinito, según el ejemplo que se expuso en páginas anteriores, puede en la práctica destrozar el resultado de un ajuste al realizar los cálculos correspondientes con los medios informáticos a nuestro alcance y sus redondeos inherentes.

Es preciso facilitar el trabajo del ordenador no obligándole a operar con números de muchas cifras enteras y decimales o, peor todavía, con números muy grandes y muy pequeños simultáneamente. Entonces indefectiblemente sí que aparecen los redondeos y muy peligrosamente.

Según el modelo matemático general del caso de observaciones indirectas,

$$F(X) - C = 0$$

único que tenemos en cuenta, se verifica que

$$O_c = F(X_a)$$

cifra sin información de error, que es preciso también considerar a priori como exacta a efectos de cálculo, según ya se dijo.

En definitiva se tendrá

$$b = A \cdot^T P \cdot K = A \cdot^T P \cdot (O_T - O_C) = A^T \cdot P \cdot O_T - A^T \cdot P \cdot O_C$$

Y tomando en su caso alguna precaución en la magnitud de los datos introducidos, según hemos advertido, y teniendo en cuenta que los cálculos necesarios para obtener A , P , y O_C son así lo suficientemente sencillos como para que cualquier equipo informático los realice sin redondeo alguno, podemos escribir (y creo que no está en nuestras manos escribir otra cosa) que:

$$b = \alpha \cdot O_T + \beta$$

Con $\alpha = A^T \cdot P$ y $\beta = -A^T \cdot P \cdot O_C$, constantes exentas de error atribuible ni a priori ni adquirido por cálculo.

Así resulta b función tan solo de la variable aleatoria a priori O_T , y por tanto, también variable aleatoria. Su matriz varianza covarianza es ya inmediata aplicando el teorema de propagación de las varianzas según:

$$\alpha_b = \alpha \cdot \sigma_{OT} \cdot \alpha^T = A^T \cdot P \cdot \sigma_{OT} \cdot P \cdot A = B$$

con la notación usual de subíndice simple (α_b, σ_{OT}) indicando matriz a priori, donde

$$\sigma_{OT} = \text{diag}(\sigma_{OT_i}^2) = \text{diag}\left(\frac{\sigma_i^2}{N_i}\right)$$

siendo como sabemos

σ_i^2 = estimador de la varianza del observable de orden i = elemento de orden i en la matriz a priori de varianzas de observables $\Sigma_o = (\text{diag} \sigma_i^2)$

N_i = número de observaciones efectuadas al observable de orden i

Evidentemente la matriz B es cuadrada de orden n y simétrica. Se demuestra sencillamente que la suma de sus autovalores es igual a su traza, suma de los elementos de su diagonal principal.

Por lo tanto considerando como su diferencial, con la interpretación estadística inherente de error a esperar, a la desviación típica de cada elemento del vector b , escribiremos

$$\sigma_{bi}^2 = db_i^2$$

$$\sigma_{bi} = db_i$$

$$\sum_1^n \sigma_{bi}^2 = \sum_1^n db_i^2 = \text{Tr} B$$

Y concluyendo, hay que esperar en b un error a priori igual a la norma vectorial euclídea de su vector diferencial db , es decir

$$\|db\| = |\text{vec. diag} \sigma_{bi}^2| = \left[\text{Tr}(A^T \cdot P \cdot \text{diag}(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot P \cdot A) \right]^{\frac{1}{2}} = [\text{Tr} B]^{\frac{1}{2}}$$

Siendo un estimador asesgado y consistente de db_i (promedio)

$$db_i^2(\text{promedio}) = \hat{\sigma}_{bi}^2(\text{promedio}) = \left[\frac{\text{Tr} B}{n} \right]$$

$$db_i = \hat{\sigma}_{bi}(\text{promedio}) = \left[\frac{\text{Tr} B}{n} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sin embargo, es claro que db es un vector sin significación física, variando sus componentes de valor según el sistema de unidades adoptado. Por ello y según se dijo, solo es representativo el valor del error relativo, fijo e igual a

$$\frac{\|db\|}{\|b\|}$$

En definitiva, escribiremos,

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = k \cdot \frac{[TrB]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot P \cdot diag(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot P \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|}$$

(Donde si $\sigma_i \rightarrow 0$ los observables resultan muy precisos y el error relativo tiende también a cero c.d.s.)

Expresión final, que resuelve la cuestión, conocida en todos sus términos y que proponemos con una nueva llamada a la precaución en el empleo de números demasiado grandes (o simultáneamente grandes y pequeños) en las matrices y vectores antes indicados, cuidando las unidades empleadas, a efectos de favorecer la mecánica informática del cálculo. Establecida en función del vector o matriz diagonal de varianzas independientes de O_T para cada elemento y distribución normal, puede afectarse rigurosamente del coeficiente de fiabilidad que se desee alcanzar.

Supongamos ahora que se adopta el procedimiento clásico de ponderación según la matriz de pesos a priori de observables. Veremos que el resultado es muy distinto del anterior.

$$P = diag \frac{1}{\sigma_i^2}$$

que implica un factor de varianza, o valor de la varianza del observable de peso unidad $\sigma^2 = s^2 = 1$.

Operando se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{\|dx\|}{\|x\|} &\leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = k \cdot \frac{[TrB]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot P \cdot diag(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot P \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \\ &= \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot diag(\frac{1}{\sigma_i^2}) \cdot diag(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot diag(\frac{1}{\sigma_i^2}) \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \\ &= \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot diag(\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot N_i}) \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} \end{aligned}$$

Expresión del error relativo que tiende a infinito si $\sigma_i^2 \rightarrow 0$, con significado físico inaceptable,

corroborándose lo expuesto si generalizando se adopta:

$$P = \text{diag} \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$$

se sigue

$$\begin{aligned} \frac{\|dx\|}{\|x\|} &\leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = k \cdot \frac{[TrB]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot P \cdot \text{diag}(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot P \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \\ &= \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot \text{diag}(\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}) \cdot \text{diag}(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot \text{diag}(\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}) \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \\ &= \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot \text{diag}(\frac{\sigma^4}{\sigma_i^2 \cdot N_i}) \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} \end{aligned}$$

expresión que no significa nada, ni física ni matemáticamente, al depender del factor de varianza, por definición arbitrario. Y no queremos decir con ello que el resultado del ajuste sea rechazable. Solamente apuntamos que la ponderación clásica de formas lineales dificulta la determinación de los porcentajes de error estudiados hasta hacerla inviable.

Pero no olvidemos que hemos aprendido a preferir otras matrices de pesos. Y es preciso aceptar que la aplicación de las expresiones anteriores requieren como condición previa la ponderación por el procedimiento de la mediana, deducido del análisis de Pearson. Y si se trata de una red mixta, resulta preceptivo ajustar por triangulateración. A lo mejor es imperativo ponderar por Pearson¹.

En cuanto al denominador del segundo término de la inecuación, solución de la red, es reiterativo que una vez más el problema se traslada a la correcta determinación de los autovalores y autovectores de la matriz S . Y sobre todo, a acceder a la información de la precisión alcanzada en ellos.

Efectivamente, volviendo a la expresión fundamental del sistema de ecuaciones normales, se tendrá

$$S \cdot x = A^T \cdot P \cdot K$$

$$x = S^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot K$$

y verificándose que

$$S = \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot (\text{diag } \mu) \cdot \Gamma^T$$

¹A lo menos, haciéndolo así explicamos con cierto éxito el error de redondeos y cálculos.

$$S^{-1} = \Gamma \cdot \Lambda^{-1} \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot (\text{diag } \frac{1}{\mu}) \cdot \Gamma^T$$

podemos expresar

$$\begin{aligned} x &= S^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot K = \Gamma \cdot \Lambda^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot A^T \cdot P \cdot K = \\ &= \Gamma \cdot (\text{diag } \frac{1}{\mu}) \cdot \Gamma^T \cdot A^T \cdot P \cdot K \end{aligned}$$

y sustituir $\|x\|$ en la expresión del error relativo antes deducida

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|}$$

despejando

$$\|dx\| \leq k \cdot \|x\| \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|}$$

con rigurosa coherencia, escaso volumen de cálculo que evita redondeos, y posibilidad de formulación de parámetros de fiabilidad.

Finalmente cuanto menor sea k mejor condicionada estará S y menor será el error relativo en b . Por propia definición $k \geq 1$. Pero si diseñamos la red aplicando el PD2 (problema de diseño de orden 2), optimizaremos el resultado obteniendo una Hiperesfera de Correcciones a las variables, con todos los autovalores de S iguales y $k = 1$.

Adicionalmente, se obtiene ahora con riguroso poder de afirmación el estimador antes calculado

$$db_i = \hat{\sigma}_{bi} = \left[\frac{\text{Tr } B}{n} \right]^{\frac{1}{2}}$$

constante para cualquier i .

Al principio de estas páginas decíamos que las fuentes de posible error en x son S y b . Hemos estudiado la influencia de b . En cuanto a la de S , si tenemos acceso a adecuada información de autovalores y autovectores, utilizando la forma factorial de S y S^{-1} , la cuestión se resuelve también con sencillez.

En efecto, considerando la existencia de un error o perturbación dS , cualquiera que sea su origen, en la matriz S , podemos escribir en la expresión del sistema de ecuaciones normales

$$(S + dS) \cdot (x + dx) = b$$

$$S \cdot x + x \cdot dS + S \cdot dx + dx \cdot dS = b$$

Y con $S \cdot x = b$

$$S \cdot dx + dS \cdot (x + dx) = 0$$

$$dx = -S^{-1} \cdot dS \cdot (x + dx) = -S^{-1} \cdot dS \cdot x'$$

de donde

$$\|dx\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|dS\| \cdot \|x + dx\|$$

$$\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} = \frac{\|dx\|}{\|x'\|} \leq \|S^{-1}\| \cdot \|dS\|$$

y multiplicando y dividiendo al segundo miembro de la inecuación por $\|S\|$

$$\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} \leq \|S\| \cdot \|S^{-1}\| \cdot \frac{\|dS\|}{\|S\|}$$

y en definitiva

$$\frac{\|dx\|}{\|x'\|} = \frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} \leq k \cdot \frac{\|dS\|}{\|S\|}$$

que resuelve el problema en principio, quedando por determinar $\|dS\|$.

S puede expresarse en forma factorial según

$$S = \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot (diag \mu) \cdot \Gamma^T$$

Con la notación establecida.

Es claro que la perturbación diferencial dS tendrá su origen en perturbaciones análogas en sus matrices de autovectores y autovalores componentes. Se podrá escribir.

$$dS = d\Gamma \cdot d\Lambda \cdot d\Gamma^T = d\Gamma \cdot (diag d\mu) \cdot d\Gamma^T$$

debiendo tenerse en cuenta que, con toda generalidad, $d\Gamma$ significa “otra matriz ortogonal de autovectores distinta de Γ ” y parece lícito suponer que la expresión anterior puede explicarse como una rotación diferencial en el espacio normado unitario E^n de la misma condición geométrica que $S = \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Gamma^T$. En dicho supuesto se tendrá

$$\|dS\| \leq \|d\Gamma\| \cdot \|(diag d\mu)\| \cdot \|d\Gamma^T\|$$

y como $d\Gamma$ y $d\Gamma^T$, matrices ortogonales, sus normas serán iguales a la unidad y se tendrá

$$\|dS\| \leq \|(diag d\mu)\| = d\mu_{m\acute{a}ximo}$$

y por consiguiente

$$\frac{\|dx\|}{\|x'\|} = \frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} \leq k \cdot \frac{\|dS\|}{\|S\|} = k \cdot \frac{d\mu_{m\acute{a}ximo}}{\mu_{m\acute{a}ximo}}$$

expresión definitiva, que aún puede desarrollarse substituyendo k por su valor resultando

$$\frac{\|dx\|}{\|x'\|} = \frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} \leq k \cdot \frac{\|dS\|}{\|S\|} = k \cdot \frac{d\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{máximo}}} = \frac{d\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = \frac{|M' - \text{Traza } S|}{n \cdot \mu_{\text{mínimo}}}$$

siendo M' la suma de los autovalores de la matriz S y si fuera una hiperesfera:

$$\mu_i = \mu = \text{constante, y}$$

$$k = 1$$

donde, siguiendo el criterio establecido, $d\mu_{\text{máximo}}$ representa la precisión con que se sea capaz de determinar el autovalor μ . Sin importar demasiado que sea en forma de desviación típica, cota de error, o número e cifras exactas. Y de nuevo todo sería perfecto determinando los autovalores de S y su precisión con alto nivel de afirmación.

Es interesante y útil efectuar cálculos análogos partiendo de un error diferencial en dS^{-1} . Así, escribiremos siguiendo la rutina establecida

$$x = S^{-1} \cdot b$$

$$x' = x + dx = (S^{-1} + dS^{-1}) \cdot b$$

$$x' - x = dx = S^{-1} \cdot b + dS^{-1} \cdot b - S^{-1} \cdot b = dS^{-1} \cdot b$$

$$x' - x = dx = dS^{-1} \cdot S \cdot x$$

$$\|x' - x\| \leq \|dS^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{\|x' - x\|}{\|x\|} = \frac{\|dx\|}{\|x\|} \cdot \left\| \frac{dS^{-1}}{S^{-1}} \right\| \cdot \|S\| \cdot \|S^{-1}\| = k \cdot \left\| \frac{dS^{-1}}{S^{-1}} \right\|$$

y también como en el caso anterior se tendrá

$$\|dS^{-1}\| \leq \|d\Gamma\| \cdot \left\| \left(\text{diag } d\frac{1}{\mu} \right) \right\| \cdot \|d\Gamma^T\|$$

$$\|dS^{-1}\| \leq \|d\Gamma\| \cdot \left\| \left(\text{diag } -\frac{1}{\mu^2} d\mu \right) \right\| \cdot \|d\Gamma^T\|$$

$$\|dS^{-1}\| = \left\| \left(\text{diag } -\frac{1}{\mu^2} d\mu \right) \right\|$$

$$\|dS^{-1}\| = \frac{1}{\mu_{\text{mínimo}}^2} d\mu_{\text{mínimo}}$$

$$\frac{\|x'-x\|}{\|x\|} = \frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|dS^{-1}\|}{\|S^{-1}\|} = k \cdot \frac{\frac{1}{\mu_{\text{mínimo}}^2} \cdot d\mu_{\text{mínimo}}}{\frac{1}{\mu_{\text{mínimo}}}} = k \cdot \frac{d\mu_{\text{mínimo}}}{\mu_{\text{mínimo}}}$$

expresión definitiva, análoga a la anteriormente deducida, y que también puede desarrollarse más sustituyendo k por su valor según

$$\frac{\|x'-x\|}{\|x\|} = \frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{d\mu_{\text{mínimo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}^2} \cdot d\mu_{\text{mínimo}}$$

Y al estribillo. Si somos capaces de determinar los autovalores como deseamos, tenemos resuelta buena parte de nuestra investigación. No obstante, a lo mejor con un poco de astucia sorprendemos desprevenido al problema y lo tomamos por sorpresa. Veamos como.

Sea la matriz cuadrada, simétrica y definido positiva de diseño $S_{n,n}$, que conocemos en la mejor expresión que seamos capaces de alcanzar.

Se tendrá, con la notación usual:

$$\text{Traza } S = \text{Tr } S = \sum_1^n s_{ii} = \sum_1^n \mu_i = M$$

Resaltamos el hecho de que $S = A^T \cdot P \cdot A$ se obtiene con muy escaso volumen de cálculo. Y que no tenemos otra alternativa que suponer (y conseguir) que S sea de verdad nuestro mejor dato y tratarlo como exacto.

Y supongamos que por algún procedimiento, utilizando el equipo y programa que sea, hemos determinado los autovalores de S , lo que requiere un proceso de cálculo prolijo. Sea su suma M' .

Parece claro que un estimador de los errores conjuntos de cálculo y redondeo cometidos a través de la aplicación del algoritmo será

$$E_A = M' - M = M' - \text{Tr}S$$

La cota media de error para un autovalor cualquiera será

$$E\mu_i = \frac{E_A}{n} = \frac{M' - \text{Tr}S}{n} = \frac{M' - M}{n} = \text{conocido}$$

y es de esperar que, si no se ha conseguido una hiperesfera de error se esté cerca de ella, con lo que todos los autovalores estén comprendidos en un entorno pequeño y la diferencia entre el máximo y el mínimo sea poco significativa. En resumidas cuentas, que el número de condición de S sea $k \approx 1$. En dicho supuesto, todos los autovalores serán equiprecisos con la aproximación antes estimada.

Y podremos escribir, tanto más acertadamente cuanto mejor se cumpla lo anteriormente dicho

$$E\mu_i = d\mu_i = d\mu$$

En cuanto al error relativo de un autovalor será:

$$e\mu_i = \frac{d\mu_i}{\mu_i} = \frac{M' - Tr S}{n\mu_i} = \frac{M' \cdot M}{n\mu_i} = \frac{E\mu_i}{\mu_i}$$

de nuevo tanto más estable cuanto menor sea la diferencia entre los autovalores máximo y mínimo.

Y el error relativo de $k = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}}$ por Teoría de Errores sabemos que valdrá

$$e_k = e_{\mu_{máximo}} + e_{\mu_{mínimo}} = \frac{M' - Tr S}{n} \cdot \left(\frac{1}{\mu_{máximo}} + \frac{1}{\mu_{mínimo}} \right)$$

óptimo, caso hiperesfera para

$$e_k = \frac{2 \cdot (M' - Tr S)}{n\mu} = \frac{2 \cdot (M' - Tr S)}{M} = \frac{2 \cdot (M' \cdot M)}{M} = 2E_\mu \text{ c.d.s.}$$

con todos los autovalores iguales y $k = 1$.

Con lo que antecede podemos llevar a cabo aplicaciones numéricas realmente originales. Ahora se trata de ver contrastar los resultados con la dura realidad. Tal vez resulten satisfactorios y ratifiquen la teoría anterior.

Por cierto que, si las cosas van bien, habrá que recordar a Strang. Álgebra Lineal pg. 317 “Wilkinson probó que el número de condición k lleva consigo todas las equivocaciones por errores de redondeo.” Wilkinson necesitaba dos libros y cientos de páginas con prolijos cálculos para abordar el problema en toda su amplitud. Admirable. Pero a nosotros nos basta (y nos sobra) con resolver nuestro minúsculo caso particular y así y con la debida humildad, pero también con pragmatismo, hemos de considerarlo.

7.2. Error o perturbación db

Siguiendo la teoría expuesta en el epígrafe anterior, la expresión final de cómo

afecta el error relativo $\frac{\|db\|}{\|b\|}$ al error relativo del vector de correcciones $\frac{\|dx\|}{\|x\|}$ es:

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = k \cdot \frac{[Tr B]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot P \cdot diag(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot P \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|}$$

siendo:

$$S = A^T \cdot P \cdot A = \begin{bmatrix} 2,2454 & -0,2080 & 0,0796 \\ -0,2080 & 2,2713 & -0,0324 \\ 0,0796 & -0,0324 & 0,0172 \end{bmatrix}$$

$\mu_{máximo}$ =autovalor máximo de la matriz S

$\mu_{mínimo}$ =autovalor mínimo de la matriz S

$k = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} = 175,36$, número de condición que entraña los peores augurios.

$$b = \begin{bmatrix} 0,0011 \\ 0,0009 \\ 0,000004 \end{bmatrix}$$

$\|b\| = 0,0015$, norma de b

$$P = P_{O_{T_i}} = \begin{bmatrix} 2,29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,51 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,61 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,11 \end{bmatrix}$$

$diag \left(\frac{\sigma_i^2}{N_i} \right) = diag \left(\frac{\sigma_i^2}{m_i} \right) =$

$$= \begin{bmatrix} 2,37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10,61 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8,77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,89 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

Los valores de la diagonal de la matriz anterior: $diag \left(\frac{\sigma_i^2}{N_i} \right)$, provienen de los apartados 4.4.3 y 4.4.4. a los que nos referimos.

Siendo $N_i = m_i$ =número de observaciones con el que se ha calculado $d\alpha$ y dl .

Resultando que:

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 57,0994, \text{ valor absolutamente aberrante, como era de esperar.}$$

Los autovalores de la matriz S son:

autovalores de $S =$

2,050573

2,469244

0,014081

Los dos primeros autovalores son los que corresponden a d_x y d_y , y el tercero al $d\theta$, valor que no afecta a nuestros resultados bajo ningún punto de vista. Es precisamente ese valor el que provoca que el parámetro k (condicionamiento de la matriz S) alcance un valor muy superior al 1, que es el valor óptimo. Es precisamente el coeficiente k quien provoca que $\frac{\|dx\|}{\|x\|}$ tenga un valor tan alto.

En consecuencia y con el fin de mejorar el valor de k , damos un paso más.

Sea nuestro sistema de ecuaciones normales:

$$S \cdot x = A^T \cdot P \cdot A \cdot x = A^T \cdot P \cdot K = b$$

$$S \cdot x = b$$

Y eliminando por sustitución la ecuación del parámetro $d\theta$ se obtiene²:

$$S' \cdot x = A'^T \cdot P \cdot A' \cdot x = A'^T \cdot P \cdot K' = b'$$

²Según teoría sobre eliminación del descentrado en redes de triangulación, Cfr. M. Chueca et. alt. "Tratado de Topografía" Tomo II, pag. 424 y siguientes.

MATRIZ A'

$$A'(1, 1) = 0.4176$$

$$A'(1, 2) = -0.4851$$

$$A'(2, 1) = -0.1256$$

$$A'(2, 2) = -0.6409$$

$$A'(3, 1) = 0.7281$$

$$A'(3, 2) = 4.95E-002$$

$$A'(4, 1) = -0.2986$$

$$A'(4, 2) = -0.4214$$

$$A'(5, 1) = 0.2384$$

$$A'(5, 2) = 0.3365$$

$$A'(6, 1) = 0.5822$$

$$A'(6, 2) = 0.5012$$

$$A'(7, 1) = -4.64E-002$$

$$A'(7, 2) = 0.6820$$

$$A'(8, 1) = 0.7431$$

$$A'(8, 2) = -0.1456$$

VECTOR K' [m]

$$K'(1) = -4.21E-006$$

$$K'(2) = -4.42E-004$$

$$K'(3) = 2.25E-004$$

$$K'(4) = 1.62E-004$$

$$K'(5) = -1.29E-004$$

$$K'(6) = 7.68E-004$$

$$K'(7) = 2.05E-004$$

$$K'(8) = 6.05E-004$$

Y a partir de las matrices A' , K' y la matriz conocida de pesos P , obtenemos b' y S' :

$$b' = A'^T \cdot P \cdot K' = \begin{bmatrix} 0,0012 \\ 0,0010 \end{bmatrix}$$

$$S' = A'^T \cdot P \cdot A' = \begin{bmatrix} 1,8956 & -0,0049 \\ -0,0049 & 2,3119 \end{bmatrix}$$

y el número de condición de S :

$$k' = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = \frac{2,3120}{1,8955} = 1,2197$$

Obtenemos:

$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 0,385$, error relativo de un 38.5 % sobre las variables: $d_x = 0,615 \text{ mm}$ y $d_y = 0,426 \text{ mm}$.

Un porcentaje alto, a pesar de todas las precauciones adoptadas:

- a) Matriz A con todos los valores muy similares.
- b) Las formas lineales de ángulo no quedan multiplicados por 636.620 dmgr/radian, porque al multiplicar por el factor conversión de unidades desaparece.
- c) El requisito de que los pesos sean pequeños y parecidos se cumple.

7.3. Error o perturbación db con ponderación clásica

Simplemente a efectos de ratificar lo expuesto anteriormente sobre lo inadecuado del procedimiento supongamos que se adopta el método clásico de ponderación según la matriz de pesos a priori de observables:

$$P = \text{diag } \frac{1}{\sigma_i^2}$$

que implica un factor de varianza, o valor de la varianza del observable de peso unidad $\sigma_i^2 = s^2 = 1$.

Como vimos en el epígrafe 4.3 “Ponderación según las características técnicas de la instrumentación”, los pesos de todos los observables angulares serán:

$$P_{\text{ángulos}} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} = 0,027$$

y en cuanto a los observables distanciométricos el peso será:

$$P_{distancias} = \frac{1}{(1+0,1)^2} = \frac{1}{1,21} = 0,83$$

Con lo que la matriz de Pesos P :

$$P = P_{O_{Ti}} = \begin{bmatrix} 0,027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,027 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,027 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,83 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,83 \end{bmatrix}$$

De entrada, el valor:

$$\frac{P_{distancias}}{P_{ángulos}} = \frac{0,83}{0,027} = 30$$

no tiene sentido en un trabajo bien concebido y calculado. No obstante, sigamos.

Y la matriz diagonal de las covarianzas inversas multiplicadas por N_i , número de observaciones de azimutes y distancias:

$$diag\left(\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot N_i}\right) = diag\left(\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot m_i}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(2,37 \cdot 12)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(2,56 \cdot 26)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(7,95 \cdot 11)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(10,61 \cdot 7)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(8,77 \cdot 14)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(4,85 \cdot 14)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(6,00 \cdot 23)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(4,89 \cdot 10)} \end{bmatrix} \cdot 1/10^{-8}$$

Siendo b' y S' :

$$b' = A'^T \cdot P \cdot K' = \begin{bmatrix} 0,7401 \\ 0,3674 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$S' = A'^T \cdot P \cdot A' = \begin{bmatrix} 0,7648 & 0,1294 \\ 0,1294 & 0,6375 \end{bmatrix}$$

El número de condición k :

$$k = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = \frac{2.3120}{1.8955} = 1,5177$$

la norma de b' :

$$\|b'\| = 8,2628 \cdot 10^4$$

Calculamos la raíz cuadrada de la Traza de $(A'^T \cdot \text{diag}(\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot N_i}) \cdot A')$:

$$\left[\text{Tr}(A'^T \cdot \text{diag}(\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot N_i}) \cdot A') \right]^{\frac{1}{2}} = 2,4323 \cdot 10^3$$

Y por último el error relativo $\frac{\|dx\|}{\|x\|}$ debido a b' :

$$\begin{aligned} \frac{\|dx\|}{\|x\|} &\leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = k \cdot \frac{[\text{Tr}B]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} \cdot \frac{\left[\text{Tr}(A'^T \cdot \text{diag}(\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot N_i}) \cdot A') \right]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \\ &= 1,5177 \cdot \frac{2,4323 \cdot 10^3}{8,2628 \cdot 10^4} = 4,47 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Absurdo que confirma la funesta previsión de la teoría expuesta. Y repetimos que el resultado del ajuste puede ser aceptable. Sólo resaltamos que su interpretación por el método propuesto es inviable, físicamente irreal y matemáticamente rechazable.

7.4. Error o perturbación dS

En la introducción de este capítulo decíamos que las fuentes del posible error en x son S y b . Hemos estudiado la influencia de b . En cuanto a la de S , si tenemos adecuada información de autovalores y autovectores, utilizando la forma factorial de S y S^{-1} .

Según se deduce del epígrafe 7.1, la expresión final de cómo afecta el error relativo $\frac{\|dS\|}{\|S\|}$ al error relativo del vector de correcciones $\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|}$ es:

$$\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} = \frac{\|dx\|}{\|x'\|} \leq k \cdot \frac{\|dS\|}{\|S\|} = k \cdot \frac{d\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}}$$

$$k = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = 175,36$$

$d\mu_{\text{máximo}} = 1,7763E - 015$, que representa la precisión con que sea capaz de determinar el autovalor μ . Se calcula fácilmente porque la suma de los valores de la diagonal de S debe ser igual a la suma de sus autovalores.

$$\mu_{\text{mínimo}} = 0,0141$$

$$\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} = \frac{\|dx\|}{\|x'\|} \leq k \cdot \frac{d\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = 2,2249E - 011$$

Si utilizamos la matriz S' :

$$S' = A'^T \cdot P \cdot A' = \begin{bmatrix} 1,8956 & -0,0049 \\ -0,0049 & 2,3119 \end{bmatrix}$$

los resultados serán ligeramente diferentes.

$$k' = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = \frac{2,3120}{1,8955} = 1,2197$$

$$d\mu_{\text{máximo}} = M' - \text{Traza}(S) = 0$$

$$\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} \leq k \cdot \frac{d\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}} = 1,2197 \cdot \frac{0,000}{2,0499} = 0$$

Es claro que, al no intervenir en S el vector de observables, la perturbación dS es mucho menos perjudicial para el resultado. En realidad despreciable. Y la consecuencia, la de siempre. Es preciso lograr un vector de observables optimizado, de componentes equiprecisos y con un alto nivel de aproximación a los valores exactos.

Capítulo 8

Conclusiones

Objetivo del presente trabajo es predecir y contrastar matemática y estadísticamente los datos de partida, los resultados parciales y los totales, con máximo nivel de fiabilidad de algoritmos.

No se imponen en principio exigencias específicas ni generales previas de precisión. Ni tolerancias. Ni hablamos de alta precisión. No se busca a ultranza la máxima precisión. Se pretende que sea cual fuere la alcanzada su veracidad quede fuera de duda.

Debe tenerse presente que para el proyectista y/o calculista el objeto del ajuste se dirige más a perfeccionar la interpretación con rigor y poder de afirmación de los resultados obtenidos antes que a mejorar los iniciales. En ningún caso se pretende mejorar en gabinete los resultados de campo, que es misión peligrosa por ilusoria.

8.1. Resultados finales

En primer lugar, hay que definir el resultado en las variables dx_{V_2} y dy_{V_2} .

El vértice V_2 se ha determinado con una fiabilidad del 99 % según un recinto de error en el que podaria y elipse directriz se confunden con un círculo de centro en V_{2C} (vértice compensado) y radio $\rho = 0,43 \text{ mm}$. Dentro de él debe ubicarse el punto exacto.

Existe el riesgo añadido de que cálculos y redondeos den lugar a un error relativo máximo adicional en coordenadas de un 38 %.

Nuestra mejor solución (con reservas de instrumentación, observación y replanteo formuladas al principio del trabajo) se formula según:

$$X_{V_{2C}} = X_{V_2} + dx_{V_2} = 163,0146 + 0,0006 = 163,0152 \simeq 163,015 \text{ m}$$

$$Y_{V_{2C}} = Y_{V_2} + dy_{V_2} = 154,2486 + 0,0005 = 154,2491 \simeq 154,249 \text{ m}$$

Con un recinto de error circular, que con 0,99 de fiabilidad, tendrá un radio:

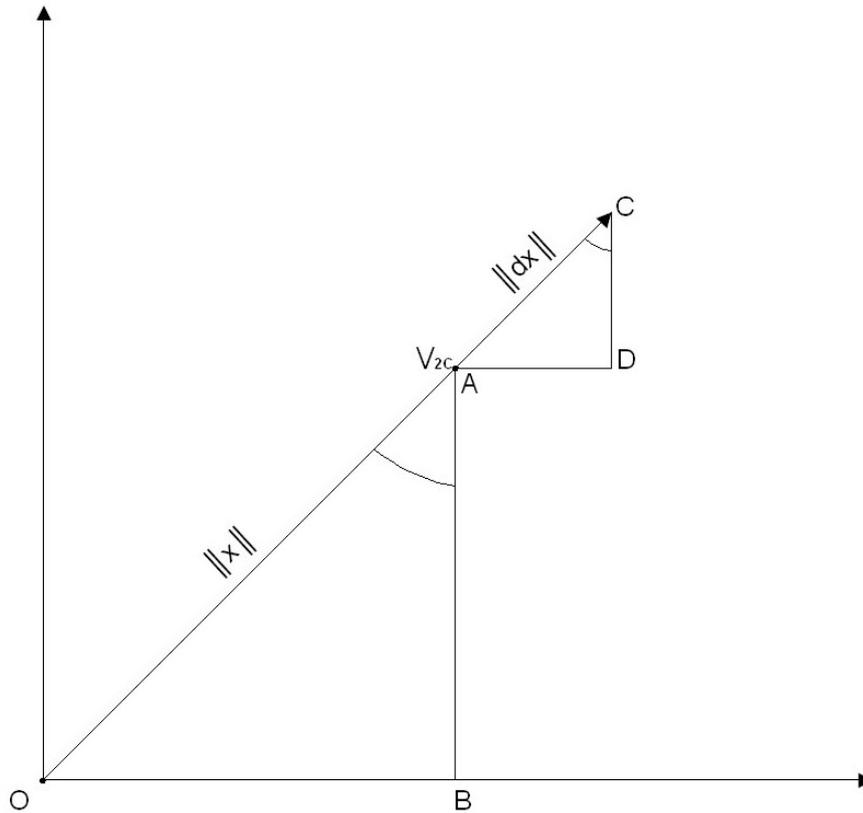


Figura 8.1: Siendo V_{2C} el vértice libre compensado, $\|x\|$ el módulo de las correcciones y $\|dx\|$ el módulo del error de las correcciones debido a db

$$\rho' = \text{radio círculo} \cdot (1 + 0,38) = 0,43 \cdot 1,38 \simeq 0,6 \text{ mm}$$

Con el fin de comprobar el valor de ρ' , radio del recinto de error circular del vértice V_{2C} , hacemos los siguientes cálculos:

Despejamos $\|dx\|$ de la ecuación del error relativo, conocido $\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 0,38$:

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = \frac{\|dx\|}{(x_{V_2}^2 + y_{V_2}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\|dx\|}{(0,6^2 + 0,5^2)^{\frac{1}{2}}} = 0,38 \text{ } \langle \rangle \text{ } 38\%$$

$$\|dx\| = 0,38 \cdot 0,61^{\frac{1}{2}} = 0,2967 \simeq 0,3 \text{ mm}$$

El error final en cada una de las variables debido al error de redondeo podrá llegar a ser:

$$\epsilon dx_{v_2} = 0,6 \cdot 0,38 = 0,228 \text{ mm}$$

$$\epsilon dy_{v_2} = 0,5 \cdot 0,38 = 0,190 \text{ mm}$$

siendo su composición cuadrática:

$$\|dx\| = (\epsilon d_{x_{V_2}}^2 + \epsilon d_{y_{V_2}}^2)^{\frac{1}{2}} = (0,228^2 + 0,190^2)^{\frac{1}{2}} = 0,2967 \text{ mm}$$

siendo el radio del círculo de centro en V_{2C} , $\rho = 0,43 \text{ mm}$:

$$\rho + \|dx\| = 0,43 + 0,2967 \simeq 0,43 + 0,3 = 0,7 \text{ mm}$$

$$\rho' \simeq \rho$$

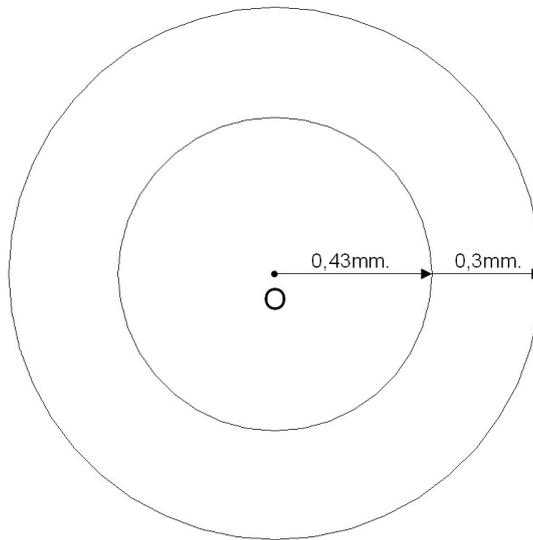


Figura 8.2: Superficie final de error entorno al vértice compensado V_{2C}

Podemos aceptar con suficiente poder de afirmación que incluso si se produjera este error de redondeo la precisión del vértice V_2 sería mejor que el milímetro. Tal es el resultado en síntesis del trabajo. Y de nuevo insistimos en que no se pretende más que ayudar al técnico que, al comparar el resultado con la tolerancia o prescripción requerida, debe adoptar una decisión de aceptación o rechazo rigurosa cifrada y defendible sólidamente ante cualquier eventualidad.

8.2. Protocolo de cálculo y de análisis del método de triangulación

Exponemos a continuación las conclusiones más destacables y la secuencia de trabajo de una red triangulada.

8.2.1. Los observables

La correcta aplicación del ajuste por mínimos cuadrados requiere como condición previa la distribución normal de cada uno de los observables, que implica así mismo la distribución normal de los residuos:

$$O = O_{m,1} \sim N (O_{T_{m,1}}, \sum_{o_{m,m}}) \equiv N (O_T, s^2Q) \quad (1)$$

$$E(R) = 0$$

$$R \sim N (0, \sum_{o_{m,m}}) \equiv N (0, s^2Q) \quad (2)$$

Es por tanto ineludible cerciorarse de que todos y cada uno de los observables que intervengan en los cálculos satisfagan (1) y (2), debiendo ser rechazados los que no lo hagan. A este efecto se ha contrastado cada uno de ellos a través del Test de Adherencia de Pearson. Con un nivel de significación alto, cercano a la certeza.

Hacemos notar que los observables distanciométricos ofrecen cierta resistencia a la normalidad, por lo que es importante comprobar que superan el mencionado Test de Pearson.

Tampoco es indiferente mezclar observables con número de reiteraciones muy distintos. No solo desequilibra como hemos visto la cuestión de los pesos (Cfr. epígrafe 5.5), sino que también influye en el estricto desarrollo teórico.

8.2.2. Las coordenadas aproximadas

Lograr que el vector de coordenadas aproximadas X_a sea de la mejor calidad posible es objetivo inescusable. Recordemos que en la búsqueda de la mejor solución de la red se escribía que¹

$$X = X_a + x$$

implicando

$$x^T x = \textit{mínimo}$$

es decir

$$| x | = \textit{mínimo}$$

¹Cfr. M.Chueca et alt. Microgeodesia y Redes locales, pg. 195 y sig., Complementos docentes pg. 38.

Se trata por tanto de optimizar el camino de cálculo a priori del vector X_a .

La aplicación al caso que nos ocupa de la Teoría de Consistencia de Figuras en triangulación resuelve el problema. El camino de mínimo valor obtenido del parámetro de consistencia será el óptimo si se proyecta una triangulación. El de máximo valor, si se trata de trilateración. Entre ambos, todos los casos intermedios de redes mixtas triangulateradas.

En consecuencia el mejor camino de consistencia angular será el peor de consistencia distanciométrica. Cuando los observables son angulares y distanciométricos, como sucede en la triangulación, las coordenadas aproximadas que se utilicen en el ajuste mínimo cuadrático serán la media ponderada entre:

- las coordenadas aproximadas por el camino de mejor consistencia angular y
- las coordenadas aproximadas por el camino de mejor consistencia distanciométrica

En nuestro caso un camino de consistencia u otro sólo cambian las coordenadas aproximadas del vértice V_1 :

Con el mejor camino de consistencia angular:

$$x_{1a} = 100,0000 \text{ m.}$$

$$y_{1a} = 166,5974 \text{ m.}$$

Con el mejor camino consistencia distanciométrica:

$$x_{1d} = 99,99940 \text{ m.}$$

$$y_{1d} = 166,59777 \text{ m.}$$

Las variaciones submilimétrica en las coordenadas aproximadas no afectan a las variables finales dx_{V2} y dy_{V2} . Y también hay que decir que aunque el resultado del ajuste, entendido como el valor de las correcciones a nuestras coordenadas aproximadas, sea el mismo, la interpretación estadística, los recintos de error y la fiabilidad asociada varía enormemente.

En nuestro caso aplicando unas u otras coordenadas aproximadas a la triangulación con ponderación "clásica" obtenemos los siguientes estimadores:

Si utilizamos x_{1a} , y_{1a} , los resultados son:

a priori:

Estimador varianza observable peso unidad = 1

Estimador desviación típica observable peso unidad = 1

a posteriori:

Estimador varianza observable peso unidad = $\sigma_0^2 = 1,79$

Estimador desviación típica observable peso unidad = 1,34

Si utilizamos x_{1d} , y_{1d} los resultados son:

a priori:

Estimador varianza observable peso unidad = 1

Estimador desviación típica observable peso unidad = 1

a posteriori:

Estimador varianza observable peso unidad = $\sigma_0^2 = 0,35$

Estimador desviación típica observable peso unidad = 0,59

Las diferencias son notables, y afectan directamente a la interpretación de los resultados. El estimador varianza observable peso unidad a posteriori, σ_0^2 , debe ser muy similar al propuesto a priori², asegurando así la bondad de nuestro ajuste. Y no debemos olvidar que σ_0^2 afecta directamente a las matrices de criterio: matriz cofactor de las variables o parámetros, matriz cofactor de los residuos, matriz cofactor de los observables corregidos, matriz varianza-covarianza de las variables o parámetros, matriz varianza-covarianza a posteriori de los residuos, y matriz varianza-covarianza a posteriori de los observables corregidos. El valor de σ_0^2 influirá en la fiabilidad interna y externa de la red, en los semiejes de la elipse standard, en las figuras de error, en el porcentaje de fiabilidad asociada y por último en el error de redondeo debido fundamentalmente a db .

Si utilizamos la media del vértice V_1 entre los dos caminos de consistencia y la ponderación propia del método de la triangulación, los resultados cambian positivamente.

Siendo las coordenadas del vértice V_1 :

$$x_{1m} = (x_{1a} + x_{1d})/2 = 99,9997 \text{ m.}$$

²Es en definitiva la aplicación del F-Test de Snedecor imponiendo un intervalo de aceptación muy riguroso. En la práctica, en el entorno tan pequeño como sea posible de la hipótesis nula $H_0 = \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$, apriori y posteriori respectivamente.

$$y_{1m} = (y_{1a} + y_{1d})/2 = 166,59758 \text{ m.}$$

Obtenemos:

a priori:

$$\text{Estimador varianza observable peso unidad} = 5,29 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$\text{Estimador desviación típica observable peso unidad} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

a posteriori:

$$\text{Estimador varianza observable peso unidad} = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$\text{Estimador desviación típica observable peso unidad} = 2,59 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

La desviación típica a posteriori del observable de peso unidad es la esperable, considerando que la desviación típica a priori del observable de peso unidad es $2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ (recordemos que es el valor de la mediana de los valores obtenidos a partir de las estadísticas de la libreta de campo, siendo una novedad importante y subrayable de la ponderación del método de la triangulación). La diferencia entre la desviación típica a priori y a posteriori es de tres centésimas de milímetro, confirmando la bondad del método de cálculo y del trabajo.

Por último añadir que σ_0^2 es una medida de la precisión de nuestras observaciones. Nos dice si hemos medido cuidadosamente y si hemos aprovechado las prestaciones de nuestro equipo.

8.2.3. La solución pseudoinversa

Su origen básico, no se olvide, es la desconfianza en o probada carencia de puntos de apoyo de precisión contrastada suficiente, en el trabajo en presencia, que transmitirían amplificados sus posible e inaceptables errores, a la red ligada, verdadera solución del problema. Si existen en número y calidad suficiente, utilizar el algoritmo y método de las redes libres encierra una contradicción en sí mismo.

Creemos que la solución pseudoinversa es una excelente herramienta cuando se persigue exclusivamente conocer con la mayor precisión posible la métrica del espacio que cubre, o cuando no existe a priori ningún vértice privilegiado. Es frecuente que así suceda o que se pueda establecer dicho supuesto.

Así pues, con el objetivo de ofrecer siempre la solución final en forma de red ligada, resolvemos previamente la red libre generada por los datos disponibles. **Se trata de clasificar con ella los vértices de la red en orden de obtener una primera información de la precisión esperable en ellos, en conjunto e individualizadamente.**

Analizando la matriz varianza covarianza de las variables corregidas de los cuatro puntos de nuestra red podemos decir que:

Las desviaciones típicas apenas alcanzan la décima de milímetro. Despreciables en cualquier caso.

Los vértices están determinados de forma equiprecisa y, en principio, con excelentes cifras.

Cualquiera de ellos en conjunto con otro u otros o separadamente, puede adoptarse como fijo.

Visto lo expuesto, basta con un somero análisis de los resultados parciales del cálculo para cerciorarse de que no hay nada que destaque desfavorablemente hasta aconsejar su rechazo o repetición con otros datos de partida. Es evidente que el estudio de los resultados parciales que a continuación hacemos se debe hacer también a la red ligada, siendo igualmente eficaz.

Tal vez el término independiente de la forma lineal correspondiente al observable uno $V_2-V_1-V_3$ destaque negativamente respecto a las otras por su mayor valor (es importante comprobar que el vector K tiene todos sus valores de similar magnitud, en caso contrario debemos sospechar del observable que destaque). O la desviación típica del observable de peso unidad a posteriori, $\sigma_0 = 0,88201$, con una hipótesis nula $H_0 = 1$, hubiera completado un excelente trabajo resultando más cercano a la unidad. Algo podría aducirse respecto a las unidades de longitud adoptadas y los coeficientes de la matriz de diseño A . Incluso sobre los pesos.

Pero con un vector de residuos muy pequeño, indicando la excelente calidad de los observables, y sobre todo con el vector de correcciones a las coordenadas que se adjunta, tomado del listado, se aleja cualquier duda razonable en contra del trabajo realizado. Correcciones del orden de las centésimas de mm., absolutamente inapreciables, nos sitúan, en principio aparentemente, en el caso óptimo antes citado, adoptándose en consecuencia $X = X_a$.

Queda abierto y justificado el camino para definir el vértice V_2 lo mejor posible manteniendo los otros tres fijos y a través de una red ligada.

8.2.4. El método de ponderación de la triangulación

Como introducción, decir, que la ponderación con pesos absolutamente diferentes en valor entre ángulos y distancias:

1. No responde a la realidad del instrumento. Como sucede en nuestro ejemplo, que el peso “clásico” de las observaciones distanciométricas sea casi 30 veces superior al de las angulares, tiene poco sentido para un mismo instrumento bien proyectado y construido. Si no se tiene cuidado con las unidades adoptadas en los pesos puede incrementarse la diferencia de valor entre los pesos de ambos tipos de observables, lo que empeoraría aún más los resultados y su interpretación.
2. Cuando los pesos de las distancias son muy superiores a los angulares, situación bastante común, desplazamos hacia el resultado de la trilateración aislada el ajuste de una red con observables conjuntos angulares y distanciométricos.

3. Aniquila la estabilidad del sistema matemático. Hay que evitar a toda costa números grandes y pequeños en las matrices que configuran el sistema, porque incrementa el condicionamiento de la matriz b , y con ello los errores de redondeo.

En cuanto a la ponderación que hemos llamado “clásica” nos parece:

1. Que el estimador varianza observable peso unidad a priori sea 1, no tiene sentido y no se ajusta a la precisión de nuestros observables. Pero lógicamente hay que establecer un valor de la varianza, común, para ángulos y distancias y no es posible que se aproxime al valor real de la varianza de ambos, porque son muy diferentes habitualmente.

2. La matriz de pesos a priori está dividida en dos grupos sin relación entre sí, o a lo menos de muy confusa interpretación.

3. El estimador de la varianza a posteriori del observable de peso unidad deja de tener sentido geométrico y físico, porque carece de unidades y de valor real. Un único estimador no debería aunar variables diferentes.

4. El estimador de la varianza a posteriori del observable de peso unidad σ_0^2 , se aleja del valor 1, disminuyendo su porcentaje de fiabilidad y con ello la bondad del ajuste.

5. No podemos evaluar el error cometido por redondeo, ni su influencia en los resultados finales. Y no queremos decir con ello que el resultado del ajuste sea rechazable. Solamente apuntamos que la ponderación clásica de formas lineales dificulta la determinación de los porcentajes de error estudiados hasta hacerla inviable.

6. El error (desviación típica) que los fabricantes de los equipos topográficos ofrecen como precisión tiene dos inconvenientes:

- Es un error que procede de una serie de mediciones en unas condiciones determinadas por una norma ISO (por la que hay que pagar un coste). La realidad nos ha enseñado que en general y salvo excepciones se desconocen las condiciones descritas en la norma, lo que imposibilita que se conozca su verdadero significado matemático.

- Los certificados de los servicios técnicos nos garantizan repetibilidad en las mediciones exclusivamente, porque, en general, no ejecutan el procedimiento descrito en la norma ISO.

Todas estas debilidades de la ponderación con pesos poco homogéneos y de la ponderación “clásica”, se superan con la ponderación según el método de la triangulación.

8.2.4.1. Varianza del observable de peso unidad de los observables de la red topográfica

Proponemos la ponderación que se basa enteramente en los observables de la red topográfica que se pretende calcular. Los datos serán más reales que los que ofrece el catálogo y, en general, diferentes para cada observable, ajustándose así a lo que ha sido la observación de campo de la red, con sus características propias (entre las que se encuentran la ecuación del observador, el estacionamiento, las lecturas de

campo con sus punterías, las condiciones atmosféricas, etc). Consideramos que el valor de la varianza del observable de peso unidad σ_0^2 que más se ajusta a su valor real es el de la mediana de los valores de $\hat{\sigma}_{\sigma_{T_i}}$, obtenidos a partir de los datos de campo. Y así lo hemos hecho en nuestros cálculos, mejorando notablemente tanto el resultado como su interpretación.

A partir de las ecuaciones:

$$\hat{\sigma}_{\sigma_i}^2 = \frac{\sum(O_{T_i} - O_i)^2}{m_i - 1}$$

$$\sigma_{\sigma_{T_i}} = \frac{\sigma_{\sigma_i}}{\sqrt{m_i}}$$

calculamos $\sigma_{\sigma_{T_i}}^2$ para cada observable de nuestra red.

De entre los valores $\sigma_{\sigma_{T_i}}^2$ seleccionamos la mediana, y desde ese momento la mediana se convierte en la varianza del observable de peso unidad σ_0^2 .

Una vez conocidos σ_0^2 y $\sigma_{\sigma_{T_i}}^2$ obtenemos el peso de cada uno de los observables según la ecuación:

$$P_{O_{T_i}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\sigma_{T_i}}^2}$$

Así, en el caso de red triangulada o trilaterada, esta ponderación es rigurosa, y se adapta a cada levantamiento en particular, como demuestran los resultados obtenidos en diferentes redes, en los que el estimador de la varianza a posteriori coincidía con el valor propuesto para ese parámetro a priori alcanzando en algunos casos el 99 % y el 100 % de similitud.

Sin embargo, si la red contiene simultáneamente observaciones azimutales y distanciométricas es preciso arbitrar un nuevo método. Proponemos una homogeneización de unidades en el siguiente epígrafe.

8.2.4.2. Los errores angulares y lineales proyectados en el cuadrilátero de ponderación

Podemos unificar la ponderación angular y distanciométrica proyectando sus errores respectivos en un cuadrilátero, que tendrá origen en el vértice M a levantar a partir de un azimut y una distancia desde un vértice conocido O .

Exponemos brevemente el desarrollo teórico y su aplicación.

Sea a partir de datos de catálogo o, lo que entendemos más acertado, utilizando medias, varianzas y desviaciones típicas de observables reiterados con resultados positivos en aplicación del Test de Pearson, se conocerán estimadores suficientemente aproximados de los errores o correcciones de observación se representan por $d\alpha$ y $d\rho$.

$\rho_{OM} = l_{OM}$ es la distancia reducida entre el vértice origen O y el visado M .

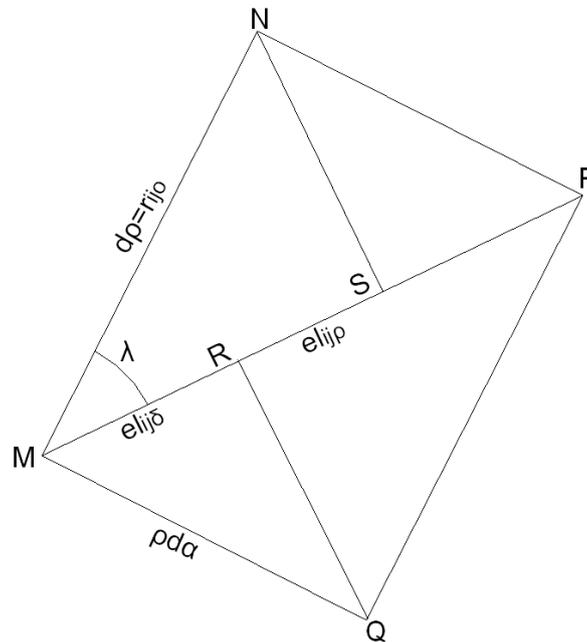


Figura 8.3: Cuadrilátero de ponderación

La corrección en el vértice M se explica geoméricamente (Cfr. Fig. 8.3) por la composición de dos errores lineales MR y MS ,

$$MR + MS = SP + MS = MP = \text{módulo del vector } MP, \text{ corrección total}$$

Siendo:

$$\lambda = \text{arctg} \frac{\rho \cdot d\alpha}{d\rho}$$

$MR = SP = \rho \cdot d\alpha \cdot \text{sen} \lambda = el_{ij\delta} =$ estimador específico de la componente escalar de corrección azimutal en el módulo MP

$MS = RP = d\rho \cdot \text{cos} \lambda = el_{ij\rho} =$ estimador específico de la componente escalar de corrección distanciométrica en el módulo MP

Con lo que se consigue valores lineales de los errores azimutales y distanciométricos asociados a un lado genérico de la red.

Podemos conocer en unidades lineales los errores de nuestras lecturas angulares, antes de hacer el ajuste de la red, lo que puede llegar a ser muy útil para el proyectista.

Por último y como casos particulares del más general desarrollado, simplificamos el cuadrilátero de ponderación en uno de sus lados, dependiendo del error de que se trate:

caso a - la triangulación deviene en trilateración pura para

$$\lambda_i = \lambda = 0$$

en dicho supuesto $\text{sen}\lambda = 0$

Se conoce la forma lineal de distancia que afecta al vértice a levantar M , pero no la forma azimutal.

caso b - la triangulación deviene en triangulación pura para

$$\lambda_i = \lambda = \frac{1}{2}\pi$$

en dicho supuesto $\text{cos}\lambda = 0$

Se conoce la forma lineal de azimut que afecta al vértice a levantar M , pero no la forma lineal de distancia .

8.2.4.3. Factor de conversión y peso de las formas lineales de ángulo

Con el fin de homogeneizar unidades angulares y distanciométricas multiplicamos a cada una de las formas lineales azimutales por el factor adecuado. Cada forma lineal azimutal o distanciométrica quedará multiplicada por un factor y tendrá un peso.

El factor que multiplica a la forma lineal azimutal ij es:

$$Factor_{ij} = \frac{l_{ij} \cdot \text{sen}\lambda_{ij}}{\mu}$$

siendo $l_{ij} = \rho_{ij}$: la distancia reducida entre los vértices ij

$$\mu = 636620$$

λ : ángulo interior del cuadrilátero de error del azimut ij ,

Con el fin de ponderar calcularemos un valor proporcional al peso, que como sabemos multiplicará a la forma lineal azimutal ij , y responde a la ecuación:

$$p_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{l_{ij} \cdot d\alpha_{ij} \cdot \text{sen}\lambda}{\mu} \right)^2$$

siendo $d\alpha$: el error angular azimutal entre los vértices ij , obtenido a partir de la desviación típica de las lecturas angulares de la libreta de campo.

Como casos particulares del más general desarrollado:

- la triangulación deviene en trilateración pura para

$$\lambda_i = \lambda = 0$$

en dicho supuesto $\text{sen}\lambda = 0$

- la triangulación deviene en triangulación pura para

$$\lambda_i = \lambda = \frac{1}{2}\pi$$

en dicho supuesto $\text{cos}\lambda = 0$

8.2.4.4. Factor de conversión y peso de las formas lineales de distancia

Al igual que con las formas lineales de azimut, multiplicamos a cada una de las formas lineales de distancia por el factor adecuado.

El factor que multiplica a la forma lineal distanciométrica ij es:

$$Factor_{ij} = \text{cos}\lambda_{ij},$$

siendo λ : ángulo interior del cuadrilátero de error de la distancia ij ,

Con el fin de ponderar calcularemos un valor proporcional al peso, que como sabemos multiplicará a la forma lineal azimutal ij , y responde a la ecuación:

$$p_{l_{ij}} = dl_{ij}^2 \cdot \cos^2 \lambda_{ij}$$

siendo dl_{ij} : el error distanciométrico entre los vértices ij obtenido a partir de la desviación típica de las lecturas distanciométricas de la libreta de campo.

8.2.4.5. Pesos homogeneizados

Una vez conocido el valor proporcional al peso de cada una de las formas lineales de azimut y distancia, que hemos llamado en los epígrafes anteriores $p_{\alpha_{ij}}$ y $p_{l_{ij}}$, seleccionamos de entre todos ellos el valor de la mediana, que desde ese momento se convierte en el estimador de la varianza a priori del observable de peso unidad σ_0^2 .

Y finalmente calcularemos el peso de cada observable con la expresión:

$$P_{O_{Ti}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{O_{Ti}}^2} = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

y conoceremos la matriz de los pesos P .

8.2.5. Análisis de los resultados parciales

8.2.5.1. La matriz A , la matriz de pesos P , el vector de términos independientes K

Debemos extremar las precauciones con el diseño de la matriz A , porque diferencias notables entre sus elementos producen grandes inestabilidades en el sistema de ecuaciones y sus resultados pueden ser irreales. Ello es tanto más cierto cuando el resultado esperable es muy pequeño, como sucede con las redes de alta precisión. Buscaremos una matriz de diseño A “estética” y matemáticamente estable, con elementos muy similares. La nueva factorización y ponderación propuesta en la triangulación cumple indudablemente este requisito, como se desprende de su misma expresión consignada.

En cuanto a la matriz de los pesos, siguiendo con la idea anterior, si tiene valores muy diferentes entre sí, adulterará la matriz A y empeorará su condicionamiento y el resultado. Este nuevo problema no nos afecta porque todos nuestros pesos son de valores próximos a la unidad, fruto también de la metodología empleada.

El vector K también tiene su significado: así, valores similares en sus elementos nos garantizan observaciones con errores asociados parecidos. Si uno de ellos destacara excesivamente del resto sería conveniente prescindir de él, por no ser un buen observable. La similitud de valores de los elementos del vector K , también es un garante más de la estabilidad del sistema de ecuaciones normales. La homogeneización de unidades nos permite en una red triangulada conocer en valor

y unidades cada uno de los elementos del vector K , y comparar formas lineales de azimut con las de distancias, situación imposible si no seguimos el protocolo establecido en la nueva metodología y aplicamos la que podemos llamar clásica.

8.2.5.2. El vector de variables, el vector de residuos y la varianza a posteriori del observable de peso unidad

Los residuos son muy similares y podemos comprobar que tanto las observaciones distanciométricas como las azimutales son de análoga precisión ($6,37 \cdot 10^{-4} m$ y $4,72 \cdot 10^{-4} m$). Como dicta el sentido común, porque ambas mediciones proceden de un instrumento similar.

La desviación típica a posteriori del observable de peso unidad es la esperable, considerando que la desviación típica a priori del observable de peso unidad es $2,3 \cdot 10^{-4} m$ (recordemos que es el valor de la mediana de los valores obtenidos a partir de las estadísticas de la libreta de campo). La diferencia entre la desviación típica a priori y a posteriori es de tres centésimas de milímetro, confirmando la bondad del cálculo y trabajo.

Por último añadir que la desviación típica σ_0 es una medida de la precisión de nuestras observaciones. Nos dice si hemos medido cuidadosamente y si hemos aprovechado las prestaciones de nuestro equipo.

No se olvide que la varianza a posteriori del observable de la medida de peso unidad, σ_0^2 es un parámetro fundamental además porque multiplica a las matrices de criterio.

8.2.5.3. Matrices de criterio

En una primera interpretación, todas tienen sus términos aceptablemente pequeños. No obstante, la información que ofrecen es claramente insuficiente a efectos de interpretar resultados con el poder de afirmación que entendemos adecuado. Para ello y en primer lugar, acudiremos a la definición de la llamada fiabilidad, interna y externa, de la red y sus recintos de error.

8.2.5.4. La fiabilidad interna y externa

El análisis de la fiabilidad interna de la red dice que el error máximo que puede deslizarse en uno de nuestros observables y no ser detectado es de 0.00187 metros (observable n^o 4).

Del análisis de la fiabilidad externa de la red podemos decir que la composición cuadrática de los errores transmitidos por los observables, supuesto el caso más desfavorable, resulta ser:

Observable	$\sqrt{\text{error } dx^2 + \text{error } dy^2}$
1	0,45 mm
2	0,31 mm
3	0,17 mm
4	0,15 mm
5	0,12 mm
6	0,29 mm
7	0,15 mm
8	0,30 mm

El peor de los casos sería el que hiciera simultáneos todos los errores de la tabla anterior, y en ese caso, la composición cuadrática de todos ellos alcanzaría el valor de 0,74 mm. Parece que la precisión en la determinación del vértice V_2 es claramente submilimétrica.

8.2.5.5. Semiejes de la elipse standard

Conocida la desviación típica del observable de peso unidad $\sigma_0 = 2,59 \cdot 10^{-4}$ y los autovalores de la matriz S:

autovalores de S

$$\mu_1 = 2.4069$$

$$\mu_2 = 2.0471$$

$$\mu_3 = 0.0135$$

los semiejes genéricos de la elipse standard ES , según la ecuación $\Phi_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$, serán los que siguen:

$$\Phi_1 = 1,67 \cdot 10^{-4}m$$

$$\Phi_2 = 1,81 \cdot 10^{-4}m$$

8.2.6. Figuras de error y fiabilidad

La figura de error asociada a un vértice obtenido a partir de observaciones angulares o distanciométricas es la podaria o curva pedal.

La ecuación en cartesianas de la podaria será de la forma:

$$PS \equiv \sigma_x^2 \cdot x^2 + \sigma_y^2 \cdot y^2 + 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y = (x^2 + y^2)^2$$

La superficie encerrada por la curva PS se acepta como recinto de error con fiabilidad 0,6826 donde se encuentra el vértice exacto desconocido.

Se demuestra que la elipse asociada a la podaria será de la forma:

$$ES \equiv \sigma_x^2 \cdot y^2 - 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y + \sigma_y^2 \cdot x^2 = (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy})$$

Ecuación de la elipse tradicionalmente denominada standard de incertidumbre a posteriori en coordenadas cartesianas para un punto compensado cualquiera de la red³.

Podemos conocer ES a partir de la Matriz varianza-cov de las variables o PARÁMETROS = σ_{xx} .

Los semiejes de la elipse (errores máximo y mínimo) en dirección y módulo se calculan con la expresión siguiente:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}] = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 0,00000003) = 0,00000003 \text{ m}^2$$

con el signo + se obtiene el semieje mayor:

$$\sigma_{r1} = +a_L = +0,1732 \text{ mm} = a$$

con el signo - se obtiene el semieje menor:

$$\sigma_{r2} = -a_L = -0,1732 \text{ mm} = b$$

(Nota: Los semiejes de la elipse asociada a la podaria que, es también ES , tiene unos ejes a y b muy similares a la de la elipse standard: $\Phi_1 = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\Phi_2 = 1,81 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. La diferencia entre ambos valores sólo puede achacarse a errores de redondeo y cálculo, ya que proceden de algoritmos diferentes).

Una vez conocida la elipse standard ES , se puede estimar la probabilidad asociada a esa figura, bastará con calcular la relación existente entre las áreas delimitadas por las dos superficies de error (podaria y elipse), en su caso más general.

Siendo la probabilidad de la podaria $1\sigma^2$ (una varianza) $\langle \rangle \pm 1\sigma$ (una desviación típica), $\langle 0,68 \rangle$, y la probabilidad de la elipse asociada a $K^2\sigma^2$ (varianzas) $\langle \rangle \pm K\sigma$ (desviaciones típicas) con:

$$\text{Área Podaria} = A_P = \pi \cdot \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\text{Área Elipse} = A_E = \pi \cdot ab$$

³Que se obtiene a través de un algoritmo completamente distinto del presente. Cfr. M. Chueca et. alt. "Tratado de Topografía" Tomo III, pag. 285, expresión (834).

$$K^2 = \frac{A_E}{A_P} = \pm \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\text{Prob ES } \langle \rangle \pm \sqrt{\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\sigma} = \pm K\sigma \text{ desviaciones típicas}$$

donde $k \leq 1$, pues lo que sí suponemos:

$$\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$$

se sigue

$$a^2 + b^2 \geq 2ab;$$

$$(a + b)^2 \geq 0$$

$a \geq b$ cierto por hipótesis. (a , b semiejes mayor y menor de la elipse)

y por definición de ambas curvas de nuevo encontraremos el óptimo en nuestro proyecto cuando $a = b = R$. La elipse y su podaria standard óptimas que denominamos ESO y PSO se confunden en la circunferencia CS standard, y se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad CS} &= \text{Probabilidad ESO} = \\ &= \text{Probabilidad PSO} \langle \rangle \sqrt{\frac{2R^2}{R^2+R^2}\sigma^2} = \pm 1\sigma \langle \rangle 0,68 \end{aligned}$$

probabilidad standard. Una homotecia de razón adecuada según rutina de la distribución normal practicada a las figuras descritas genera el recinto de incertidumbre con la probabilidad que se precise. (P.ej. son muy usadas la razón 2 y 2,5 que corresponden a fiabilidad 0,95 y 0,99).

Así en nuestra red:

A la circunferencia standard de radio $0,1732 \text{ mm}$ se asocia una fiabilidad del 68 %.

A la circunferencia de radio $(2 \cdot 0,1732 \text{ mm}) = 0,3464 \text{ mm}$ se asocia una fiabilidad del 95 %.

A la circunferencia de radio $(2,5 \cdot 0,1732 \text{ mm}) = 0,4330 \text{ mm}$ se asocia una fiabilidad del 99 %.

8.2.7. Cálculo del porcentaje de error

Podemos evaluar el error relativo transmitido al vector de correcciones x por:

- el error existente en el vector b y
- el correspondiente error de la matriz S .

La fuente del posible error en las variables del sistema matricial es fundamentalmente el vector b . Se hace imprescindible calcular la perturbación db .

En el epígrafe 8.1 “Resultados finales”, de este mismo capítulo de conclusiones, mencionábamos el porcentaje de error debido al cálculo numérico del sistema matricial de ecuaciones normales: $x = S^{-1} \cdot b$, y su influencia en el resultado del ajuste determinista. Ahora procedemos a exponer brevemente su cálculo.

8.2.7.1. Error o perturbación db

La expresión final de cómo afecta el error relativo $\frac{\|db\|}{\|b\|}$ al error relativo del vector de correcciones $\frac{\|dx\|}{\|x\|}$ es:

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|db\|}{\|b\|} = k \cdot \frac{[TrB]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|} = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}} \cdot \frac{[Tr(A^T \cdot P \cdot diag(\frac{\sigma_i^2}{N_i}) \cdot P \cdot A)]^{\frac{1}{2}}}{\|b\|}$$

siendo:

$$S = A^T \cdot P \cdot A$$

$\mu_{máximo}$ = autovalor máximo de la matriz S

$\mu_{mínimo}$ = autovalor mínimo de la matriz S

$$k = \frac{\mu_{máximo}}{\mu_{mínimo}}$$

Teniendo la precaución de eliminar por sustitución el parámetro $d\theta$ de las ecuaciones de azimut, modificando así la matriz de diseño $A_{m,n}$.

Obtenemos:

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} = 0,385, \text{ error relativo de un } 38.5\% \text{ sobre las variables: } d_x = 0,615 \text{ mm y } d_y = 0,426 \text{ mm.}$$

Un porcentaje alto, a pesar de todas las precauciones adoptadas:

- a) Matriz A con todos los valores muy similares.

- b) Las formas lineales de ángulo no quedan multiplicados por 636.620 dmgr/radian, porque al multiplicar por el factor conversión de unidades desaparece.
- c) El requisito de que los pesos sean pequeños y parecidos se cumple.

8.2.7.2. Error o perturbación dS

La expresión final de cómo afecta el error relativo $\frac{\|dS\|}{\|S\|}$ al error relativo del vector de correcciones $\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|}$ es:

$$\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} = \frac{\|dx\|}{\|x'\|} \leq k \cdot \frac{\|dS\|}{\|S\|} = k \cdot \frac{d\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}}$$

siendo:

$$k = \frac{\mu_{\text{máximo}}}{\mu_{\text{mínimo}}}$$

$d\mu_{\text{máximo}} = 1,7763E - 015$, representa la precisión con que sea capaz de determinar el autovalor μ . Se calcula fácilmente porque la suma de los valores de la diagonal de S debe ser igual a la suma de sus autovalores. Cumpliendo la ecuación:

$$d\mu_{\text{máximo}} = M' - \text{Traza}(S)$$

donde:

$$M' = \text{suma de los autovalores de } S$$

$$\mu_{\text{mínimo}} = 0,0141$$

$$\frac{\|dx\|}{\|x+dx\|} = \frac{\|dx\|}{\|x'\|} = 2,2249E - 011$$

Es claro que, al no intervenir en S el vector de observables, la perturbación dS es mucho menos perjudicial para el resultado. En realidad despreciable. Y la consecuencia, la de siempre. Es preciso lograr un vector de observables optimizado, de componentes equiprecisos y con un alto nivel de aproximación a los valores exactos.

(Nota: No es imprescindible eliminar el parámetro $d\theta$ de las ecuaciones de azimut, modificando así la matriz de diseño $A_{m,n}$ para calcular el error debido a dS).

Y en resumen, los resultados y su solidez interpretativa son las consignadas. En nuestra opinión, suficiente para adoptar decisiones lógicas. Es a fin de cuentas la labor del ingeniero.

En sucesivos artículos ampliaremos la teoría y praxis presente con otras cuestiones relevantes, como por ejemplo la utilización de observables GPS en ajustes gaussianos, el estudio riguroso de recintos de error, la extensión a todos los puntos de una red, la extensión a los puntos que componen el modelo de un terreno y a la variación en el tiempo de redes y modelos, o sea, el cálculo de deformaciones.

Capítulo 9

Bibliografía

Bibliografía

- [1] Anquela, A.B.; Chueca, M.; Berné, J.L. (2001). Aportación al problema general de redes locales de alta precisión: condicionantes específicos de fijación de criterios teóricos y prácticos, de calificación de parámetros intermedios y resultados finales. Tesis Doctoral. E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica. Valencia.
- [2] Ashkenazi, V. (1981): Models for control in National and continental Network. Bulletin Geodesique. Vol 55.
- [3] Ashkenazi, V.: Criterion for optimisation Boletino di Geodesia e Scienze Affine.
- [4] Ashkenazi, V. (1981): Models for control in National and Continental Network. Bulletin Geodesique. Vol. 55.
- [5] Baarda, W. (1977): Measures for the accuracy of geodetic networks. Sopron. Hungría.
- [6] Baarda, W. (1973): S-transformations and Criterion Matrices. Netherlands Geodetic Commission, Vol. 5 núm. 1.
- [7] Baarda, W.: Statistical concepts in Geodesia. Rijkscommissie voor geodesie. Delft (Holanda).
- [8] Baarda, W.: Statistical Transformations and Criterion Matrices. Rijkscommissie voor geodesie. Delft (Holanda).
- [9] Baarda, W.: Measures for the accuracy of geodetic networks, Sopron. Hungría.
- [10] Bannister, A.; y Raymond, S. (1984): Técnicas modernas en topografía. R. S. México.
- [11] Baselga, S. (2000): Aplicación informática para el diseño y compensación de redes locales. Proyecto Fin de Carrera de Ingeniería en Geodesia y Cartografía. E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica. Valencia.
- [12] Baselga, S., Chueca, M. y Berné, J.L. (2003). Cálculo, compensación e interpretación de resultados en redes locales de alta precisión observadas por GPS y Topografía Clásica con aplicación de análisis estadístico multivariante y técnicas de estimación robusta. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.

- [13] Belayev, V. (1996): Optimal weighting in linear function estimation. Journal of Geodesy.
- [14] Berné Valero, J. L., y Herráez Boquera, J. (1993): Instrumentos modernos en topografía. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia.
- [15] Berné, J. L.; Baselga, S.; Anquela, A. B. (2000): RedTop. Aplicación Informática para el Diseño, Análisis y Compensación de Redes Topográficas. Editorial de la Universidad Politécnica. Valencia.
- [16] Bjerhammar, A. (1973): Theory of errors and generalized matrix inverses. Elsevier.
- [17] Bezoari, G.; Martí, C, y Selvini, A. (1994): Topografía. Cartografía. Hoepli Milán.
- [18] Blachut, T. J. A., Chrzanowski, Saastamoinen (1980): Cartografía y levantamientos urbanos. Librería del Congreso. México.
- [19] Blackie and Son Ltd. Lauf. G. B.: The method of least Squares
- [20] Bomford, G. (1971): Geodesy. Oxford University Press. Londres.
- [21] Burnside, C. D. (1971): Electromagnetic Distance measurements. Crosby Lockwood.
- [22] Camacho, A. y Martín, M. (1986): Constreñimientos internos en la compensación de estaciones. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- [23] Caspary, W. F. (1987): Concepts of network and deformation analysis. Monograph 11. School of Surveying. The University of New South Wales, Australia.
- [24] Chen, Y. Q.: Analysis of deformations. Surveys A. generalized Method. Dep. Sur. Eng. Fredericton. Canada.
- [25] Chueca, M. (1982): Topografía. Dossat. S.A. Madrid.
- [26] Chueca, M.; Herráez, J.; Berné, J. L. (1993): Topografía. Análisis de errores. Tomo I. UPV.
- [27] Chueca, M.; Herráez, J.; Berné, J. L. (1993): Topografía. Nivelación. Tomo II. UPV.
- [28] Chueca, M.; Herráez, J.; Berné, J. L. (1993): Topografía. Poligonación. Tomo III. UPV.
- [29] Chueca, M.; Herráez, J.; Berné, J. L. (1993): Topografía.. Triangulación. Tomo IV. UPV. 1993.
- [30] Chueca, M.; Herraez, J.; Berné, J. L. (1994): Redes topográficas y locales. UPV.
- [31] Chueca, M.; Herráez, J.; Berné, J. L. (1995): Ampliaciones de redes topográficas y locales. UPV.

- [32] Chueca, M.; Berné, J. L.; Herráez, J. (1996): Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Ed. Paraninfo. Madrid.
- [33] Chueca, M.; Berné, J. L.; Herráez, J. (1996): Métodos Topográficos. Ed. Paraninfo. Madrid.
- [34] Chueca, M.; Berné, J. L. (2000): Ampliación de Redes Topográficas y locales. Cuestiones de Diseño. Universidad Politécnica. Valencia.
- [35] Chueca, M.; Berné, J. L.; Anquela, A. B.; Baselga, S. (2001): Avances en la interpretación de resultados en Redes Locales. Recintos de Error. Ed. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia.
- [36] Chueca, M.; Berné, J. L.; Anquela, A. B.; Baselga, S. (2003): Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes. Ed. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia.
- [37] Chueca, M.; Anquela, A. B.; Baselga, S. (2007): Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los Problemas del Datum y Principal de Diseño. Ed. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia.
- [38] Domínguez García-Tejero, F. (1978): Topografía general y aplicada. Dossat. Madrid
- [39] Espiga Gómez Lobo: El tratamiento matricial de método de los mínimos cuadrados. Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.
- [40] Ferrer Torio, B.; Pina, B. (1991): Métodos topográficos. UPV.
- [41] Ferrer Torio, R.; Pina, B. (1991): Introducción a la topografía. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Santander.
- [42] Ferrer Torio, A., y otros (1992): Topografía aplicada a la Ingeniería Civil. Universidad de Cantabria.
- [43] Grafarend, E. W.: Optimisation of Geodetic Networks. Bollettino di Geodesia e Science Affini.
- [44] Groten. E.; Strau, B. (1988): GPS - Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Springer Nerlag. Berlín.
- [45] Heiskanen y Moritz: Geodesia Física. IGN. Madrid
- [46] Hirvonen, R. A. (1971): Adjustment by least squares in Geodesy and Photogrammetry. Ungar Pub.
- [47] Hofman-Wellwn Hof. (1994): GPS. Theory and Practice. Lichtenegger and Collins. Springer-Verlay. New York.
- [48] Hotine, M. (1969): Mathematical Geodesy. U. S. Department of Commerce. Washington D.C.
- [49] Isahi Precision co.ltc (1988): Principios de la medición electrónica. Revista Topográfica y Carto-gráfica, núms. 28 y 29.

- [50] Jordan, W. (1974): Tratado general de topografía. Gustavo Gilí. Barcelona.
- [51] Kennie and G. Petrie: Engineering Surveying Technology
- [52] Kincaid, D.; Cheney, W. (1994): Análisis Numérico: las Matemáticas del Cálculo Científico. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [53] Leick, A. (1990): GPS. Satellite Surveying. John Wiley and Sons. New York.
- [54] Levallois (1970): Geodesie Générale. Eyrolles. París.
- [55] López Cuervo (1994): Topografía. Mundi Prensa. Madrid.
- [56] Maestro, I., Baselga, S., Chueca, M. (2005). Cano, Contribución al estudio microgeodésico de deformaciones: diseño de redes mediante el cálculo y modelización de la incertidumbre. Tesis Doctoral. E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica. Valencia.
- [57] Martín Asín, F. (1989): Geodesia y Cartografía matemática. Paraninfo. Madrid.
- [58] Marussi, A. (1985): Intrinsic Geodesy. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.
- [59] Mikhail, E. M.; Ackerman, F. (1976): Observations and least squares. IAP. Dun-Donneley Pub. New York.
- [60] Mikhail and Ackermann: Analysis and Adjustements of Survey Measurements. Van Nostrand. New York.
- [61] Montes de Oca, M. (1985): Topografía. R. S. México.
- [62] Núñez-García del Pozo, A. (1992): Ajuste de redes geodésicas en un arco tridimensional. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Santander.
- [63] Núñez-García del Pozo. A. (1987): Análisis de redes libres. Asamblea nacional de Geodesia y Geofísica. Madrid.
- [64] Núñez-García del Pozo. A.: Concepto de precisión y fiabilidad en redes geodésicas. Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.
- [65] Núñez-García del Pozo. A., y Valbuena Duran, J. L. (1992): Determinación de movimientos pequeños por procedimientos de trilateración. Aplicación a la auscultación de presas. Particularización a la presa del Atazar. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Santander.
- [66] Núñez-García del Pozo. A., y Valbuena Duran, J. L. (1992): Distanciometría electrónica de precisión. Distanciómetros submilimétricos. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Santander.
- [67] Núñez-García del Pozo. A., y Valbuena Duran, J. L. (1992): Medida electrónica de los parámetros topográficos. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Santander.

- [68] Núñez-García del Pozo, A., y Valbuena Duran, J. L. (1991): VII Curso de Geodesia Superior. Instrumentos, teoría y funcionamiento. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- [69] Ojeda Ruiz, J. L. (1984): Métodos topográficos y oficina técnica. Madrid. El autor.
- [70] Ollivier, F. (1995): Instruments Topographiques. Eyrolles. París.
- [71] Pope, A. J. (1975): The statistics of the residuals and the detection of outtiers IUGG XVIII. General Assembly. Grenoble.
- [72] Richardus, P.; Aliman, J. (1966): Project Surveying. North-Holland Publising Co. Amsterdam.
- [73] Richardus. P. (1977): Project. Surveying. A. Balkema. Netherlands.
- [74] Rüeger, J.M. (1996): Electronic Distance Measurement, Edit. Springer-Verlag Berlin Heiderberg, Alemania.
- [75] Ruiz Morales. M. (1991): Manual "de Geodesia y Topografía. Proyecto Sur. Granada.
- [76] Russell, C; Wolf, P. R. (1984): Elementary Surveying. Harper and Row Publishers, Inc.
- [77] Sevilla, M. J.; Núñez, A. (1980): Ajuste y análisis estadístico de ondulaciones del geoide. Física de la Tierra. U. Complutense Madrid.
- [78] Sevilla, M. J. (1987): Colocación mínimos cuadrados. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- [79] Sevilla, M. J. (1987): Curso de Geodesia Superior. U.C. Madrid.
- [80] Sevilla, M. J.; Muñoz, P. (1987): Velasco, J.; Romero, P.: Calibración de un distanciómetro de infrarrojos en una base interferométrica. Topografía y Cartografía. Vol. III.
- [81] Sevilla, M. J. (1989): Compensación de redes de nivelación trigonométrica. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- [82] Sevilla, M. J. (1989): Soluciones progresivas en el método mínimos cuadrados. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- [83] Sevilla, M. J. (1990): Física de la Tierra 2. Universidad Complutense. Madrid.
- [84] Sevilla, M. J. (1991): VII Curso de Geodesia Superior. Refracción atmosférica y su influencia en la medida electromagnética de distancias. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- [85] Strang, G. (1990): Álgebra lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley. Madrid.
- [86] Torge Wolfgang (1983): Geodesia física. Diana. Madrid.

- [87] Valbuena Duran. J. L. (1989): Distanciometría electrónica, calibración y puesta a punto. Topografía y Cartografía. Vol. IV.
- [88] Vanicek, P., y Krakwsky, E. (1986): Geodesy. North Holland. Amsterdam.
- [89] Wellach, W. (1979): A review of the adjustment of the free network. Survey Review, XXV, 194.
- [90] Zakatov: Curso de Geodesia Superior. Mir. Moscú.
- [91] Zund, Joseph: Foundations.