Recurrencia en Dinámica Lineal

July 21, 2014

Resumen

Un operador lineal y acotado se dice *hipercíclico* si existe un vector cuya órbita es densa. El primer ejemplo de operador hipercíclico sobre un espacio de Banach fue dado por Rolewicz en 1969, quien prueba que λB es hipercíclico si y sólo si $|\lambda| > 1$, para B operador desplazamiento unilateral en l_2. Entre los primeros resultados vinculados a la hiperciclicidad podríamos mencionar el hecho que ningún espacio finito dimensional puede soportar un operador hipercíclico y que en el contexto de los espacios de Hilbert, todo operador hipercíclico tiene un conjunto G_δ-denso de vectores hipercíclicos.

La tesis está dividida en cuatro capítulos. En el primero, se dan algunos preliminares, repasando aquellas definiciones y resultados ya existentes en la literatura que nos serán necesarios más adelante.

En el capítulo dos, introducimos un refinamiento del concepto de hiperciclicidad, relativo al conjunto $N(U,V) = \{n \in \mathbb{N} : T^{-n}U \cap V \neq \emptyset\}$, cuando éste pertenece a una cierta colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$. En otras palabras, un operador lineal y continuo T se dice $\mathscr{F}$*-operador* si $N(U,V) \in \mathscr{F}$ para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U, V de X. En primer lugar, hacemos un análisis de la jerarquía establecida entre $\mathscr{F}$-operadores cuando $\mathscr{F}$ recorre aquellas familias más estudiadas en Teoría de Ramsey. En segundo lugar, analizamos qué tipo de propiedades de densidad pueden tener los conjuntos de la forma $N(x,U) = \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\}$ y $N(U,V)$ para un operador hipercíclico dado. De igual modo, clasificamos los operadores hipercíclicos de acuerdo a estas propiedades.

En el capítulo tres, se introduce la siguiente noción: un operador T en X satisface la propiedad $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}$ si para todo conjunto abierto no vacío U de X, existe $x \in X$ tal que $N(x, U) \in \mathscr{F}$. Sea $\overline{\mathcal{BD}}$ la familia de los conjuntos de $\mathbb{N}$ con densidad de Banach superior positiva. En primer lugar, generalizamos un resultado de Costakis y Parissis haciendo uso de una versión generalizada del Teorema de Szemerédi, debido a Bergelson y McCutcheon. Como consecuencia obtenemos una caracterización de aquellos operadores que satisfacen la propiedad $\mathcal{P}_{\overline{\mathcal{BD}}}$. Resulta que los operadores teniendo la propiedad $\mathcal{P}_{\overline{\mathcal{BD}}}$ satisfacen un tipo de recurrencia que puede ser descrito en términos de los idempotentes esenciales de $\beta\mathbb{N}$. Se discute también, el caso de los operadores desplazamiento ponderados que satisfacen la propiedad $\mathcal{P}_{\overline{\mathcal{BD}}}$. Por otra parte, se obtiene como consecuencia una caracterización de los operadores reiterativamente hipercíclicos, i.e. operadores para los cuales existe $x \in X$ tal que para todo conjunto abierto no vacío U de X, el conjunto $N(x, U) \in \overline{\mathcal{BD}}$.

En el cuarto capítulo nos enfocamos en el estudio de un refinamiento de la noción de hiperciclicidad disjunta. Por una parte, extendemos un resultado de Bes, Martin, Peris y Shkarin donde afirmamos lo siguiente: B_w es $\mathscr{F}$-operador si y sólo si $(B_w, \ldots, B_w^r)$ es d-$\mathscr{F}$, para todo $r > 0$, donde B_w denota un operador desplazamiento ponderado en c_0 o l_p, $(1 \leq p < \infty)$ y donde $\mathscr{F}$ es cualquiera de los filtros más usados en Teoría de Ramsey que contienen estrictamente la familia de los conjuntos cofinitos. Por otra parte, se destaca que este fenómeno no tiene lugar fuera del contexto de los operadores desplazamiento ponderados. Para ello se muestra un operador lineal mezclante T en un espacio de Hilbert tal que (T, T^2) no es d-sindético. También se indaga sobre la relación entre operadores reiterativamente hipercíclicos y d-$\mathscr{F}$ tuplas, para filtros $\mathscr{F}$ contenidos en la familia de los conjuntos sindéticos. Finalmente, examinamos qué condiciones son necesarias para que un operador desplazamiento ponderado sindético sea reiterativamente hipercíclico.