Recurrence in Linear dynamics

November 11, 2014

Resumen en valenciano

Un operador lineal i tancat es diu hipercíclic si hi ha un vector l'òrbita del qual és densa. El primer exemple d'operador hipercíclic sobre un espai de Banach va ser donat per Rolewicz en 1969, qui prova que B és hipercíclic si i només si $|\lambda| > 1$, per a B operador desplaament unilateral en l_2. Entre els primers resultats vinculats a l'hiperciclicidad podríem mencionar el fet que cap espai finit dimensional no pot suportar un operador hipercíclic i que en el context dels espais de Hilbert, tot operador hipercíclic té un conjunt G_δ-denso de vectors hipercíclics.

La tesi està dividida en quatre capítols. En el primer, es donen alguns preliminars, repassant aquelles definicions i resultats ja existents en la literatura que ens seran necessaris més avant.

En el capítol dos, introduim un refinament del concepte de hiperciclicidad, relatiu al conjunt $N(U,V) = \{n \in \mathbb{N} : T^{-n}U \cap V \neq \emptyset\}$, quan este pertany a una certa colcció $\mathscr{F}$ de subconjunts de N. En altres paraules, un operador lineal i continu T es diu *$\mathscr{F}$-operador* si $N(U,V) \in \mathscr{F}$, per a cada parell de conjunts oberts no buits U, V de X. En primer lloc, fem una anàlisi de la jerarquia establida entre $\mathscr{F}$-operadores quan $\mathscr{F}$ recorre aquelles famílies més estudiades en Teoria de Ramsey. En segon lloc, analitzem quin tipus de propietats de densitat poden tindre els conjunts de la forma $N(x,U) = \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\}$ i $N(U,V)$ per a un operador hipercíclic dau. De la mateixa manera, classifiquem els operadors hipercíclics d'acord amb estes propietats.

En el capítol tres, s'introduix la noció seguent: un operador T en X satisfà la propietat $\mathcal{P}_{\mathscr{F}}$ si per a tot conjunt obert no buit U de X, hi ha $x \in X$ tal que $N(x,U) \in \mathscr{F}$. Siga $\overline{\mathcal{BD}}$ la família dels conjunts de $\mathbb{N}$ amb densitat de Banach superior positiva. En primer lloc, generalitzem un resultat de Costakis i

Parissis fent ús d'una versió generalitzada del Teorema de Szemerédi, a causa de Bergelson i McCutcheon. Com a consequència obtenim una caracterització d'aquells operadors que satisfan la propietat $\mathcal{P}_{\overline{\mathcal{BD}}}$. Resulta que els operadors tenint la propietat $\mathcal{P}_{\overline{\mathcal{BD}}}$ satisfan un tipus de recurrència que pot ser descrit en termes dels idempotentes essencials de $\beta\mathbb{N}$ (the Stone-Čech compactification of $\mathbb{N}$). Es discutix també, el cas dels operadors desplaament ponderats que satisfan la propietat $\mathcal{P}_{\overline{\mathcal{BD}}}$. D'altra banda, s'obté com a consequència una caracterització dels operadors reiterativament hipercíclics, i.e. operadors per als quals hi ha $x \in X$ tal que per a tot conjunt obert no buit U de X, el conjunt $N(x, U) \in \overline{\mathcal{BD}}$.

En el quart capítol ens enfoquem en l'estudi d'un refinament de la noció de hiperciclicidad disjunta. D'una banda, estenem un resultat de Bes, Martin, Peris i Shkarin on afirmem el seguent: B_w és $\mathscr{F}$-operador si i només si $(B_w, \ldots, B_w^r)$ és d-F, per a tot $r \in \mathbb{N}$, on B_w denota un operador desplaament ponderat en c_0 o $l_p, (1 \le p < \infty)$ i on $\mathscr{F}$ és qualsevol dels filtres més usats en Teoria de Ramsey que contenen estrictament la famlia dels conjunts cofinitos. D'altra banda, es destaca que este fenomen no té lloc fora del context dels operadors desplaament ponderats. Per a això es mostra un operador lineal mesclen-te T en un espai de Hilbert tal que (T, T^2) no és d-sindético. També s'indaga sobre la relació entre operadors reiterativament hipercíclics i d-F tuplas, per a filtres $\mathscr{F}$ continguts en la família dels conjunts sindéticos. Finalment, examinem quines condicions són necessàries perquè un operador desplaament ponderat sindético siga reiterativament hipercíclic.