DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

MATRICES COMBINADAS DE ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

MÁXIMO DE JESÚS SANTANA DE ASÍS

DIRECTORES:

DR. RAFAEL BRU GARCÍA
DRA. MARÍA TERESA GASSÓ MATOSES
DRA. ISABEL GIMÉNEZ MANGLANO

Valencia, marzo de 2015

Dedicatoria

A mis padres: Ana Altagracia y Maximino, que tanto me han dado en esta vida.

A mi esposa: Glenis Yocasta, que siempre me ha apoyado

A mis hijos: Francisco Javier, Patricia Penélope, Máximo Alberto y Perla Yocasta, mis tesoros.

Agradecimientos

Deseo manifestar mi más profundo agradecimiento a mi equipo de tutores, comandado por el Dr. Rafael Bru, formado además por las Doctoras María Teresa Gassó e Isabel Giménez. Sus valiosas orientaciones, su trabajo arduo y decidido, y sobre todo la gran paciencia que tuvieron conmigo, son acciones que valoraré toda la vida.

Quiero además dar gracias a todos mis docentes del Departamento de Matemática Aplicada y a la Oficina de Acción Internacional de la Universidad Politécnica de Valencia, por su valiosa colaboración.

Aprovecho para agradecer a mis padres, por la gran educación que me dieron y los grandes valores humanos que me inculcaron. En igual medida, agradezco a mi amada esposa y a mis adorables hijos por el gran apoyo que siempre me han dado.

Por último quiero dar las gracias a la Universidad Autónoma de Santo Domingo, especialmente a la Escuela de Matemática por el gran apoyo brindado.

Rafael Bru García, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, María T. Gassó Matoses, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, e Isabel Giménez Manglano, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia,

CERTIFICAN:

Que Don Máximo de Jesús Santana De Asís, Licenciado en Educación, ha realizado bajo nuestra dirección el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad Politécnica de Valencia.

Asimismo, autorizamos la presentación de este trabajo ante la Universidad Politécnica de Valencia para que cumpla los trámites correspondientes.

Y para que así conste a efectos legales presentan dicha memoria, firmando este certificado en Valencia, a 6 de enero 2015.

Rafael Bru García　　　　　María T. Gassó Matoses

Isabel Giménez Manglano

Resumen

El producto de Hadamard o producto elemento a elemento de dos matrices ha sido estudiado por diversos autores con diferentes objetivos. En particular, el producto de Hadamard de una matriz y la traspuesta de su inversa ha demostrado su utilidad en múltiples áreas como por ejemplo en el estudio de procesos químicos. Este producto se denomina matriz combinada y se denota por $C(A)$. La matriz combinada tiene además diversas aplicaciones en el ámbito del álgebra lineal. A partir de la matriz combinada se obtiene, por ejemplo, una interesante relación entre los valores propios y los elementos diagonales de una matriz diagonalizable. Además, dado que la suma de cada fila y de cada columna de una matriz combinada es exactamente igual a 1, en aquellos casos en que la matriz combinada sea no negativa, $C(A)$ será una matriz doblemente estocástica. El estudio de propiedades de $C(A)$ sigue siendo de actualidad y muchos resultados han sido publicados recientemente.

Al igual que el estudio de matrices no negativas ha demostrado su utilidad desde tiempo atrás, otras condiciones de positividad, englobando en este concepto todos los campos que hacen referencia al signo de elementos o menores de una matriz, se han venido introduciendo en la literatura y han venido demostrando su interés. Dentro de la positividad podemos incluir, además del signo de los elementos de la matriz (matrices no negativas y Z–matrices), el signo de las entradas de la matriz inversa (M–matrices), el patrón de ceros de la matriz (matrices triangulares y matrices diagonales) y el signo de los determinantes de submatrices (P–matrices, matrices totalmente positivas, matrices totalmente no negativas). Más recientemente se han definido también las matrices signo-regulares, es decir, aquellas matrices para las que todos los menores del mismo orden tienen un signo determinado. En diversos trabajos se ha analizado también qué tipo de propiedades de positividad puede heredar la matriz combinada. Por ejemplo, ya es conocido que la matriz combinada de una M–matriz es también una M–matriz.

En esta memoria se recogen y amplían los resultados referentes a la matriz combinada de algunas clases de matrices relacionadas con la positividad.

Para ello se ha consultado una larga relación de trabajos relacionados y se ha realizado un resumen de los resultados más relevantes antes de incluir los nuevos resultados. Se plantea también el interés de algunas cuestiones abiertas.

La memoria se estructura de la siguiente manera. En el primer capítulo se definen los conceptos y se enuncian y/o demuestran los resultados de ámbito general que van a ser utilizados en el resto de la memoria. En los tres restantes capítulos se plantea el tipo de problema a resolver, se enuncian y demuestran los resultados obtenidos y se resume su interés a modo de conclusiones.

En el Capítulo 2 se determina si la matriz combinada de clásicas clases de matrices puede ser o no doblemente estocástica. Se estudia la matriz combinada de estas clases y se concluye que se obtiene la no negatividad de la matriz combinada para algunas G–matrices, algunas H–matrices y algunas matrices 2×2; nunca se da para matrices totalmente positivas o totalmente negativas; y sólo se obtiene $C(A) \geq 0$ cuando $C(A) = I$ en el caso de que A sea totalmente no negativa o M–matriz. Por último, sólo las matrices anti-triangulares totalmente no positivas de tamaño 2×2 tienen matriz combinada no negativa.

En el Capítulo 3 se extiende el estudio anterior a matrices signo-regulares. Se analiza el signo de los elementos de la matriz combinada a partir de la signatura de la matriz y de la signatura de una matriz asociada a la traspuesta de su inversa y se obtiene una lista con todos los casos posibles. Esta lista muestra casos en los que $C(A)$ nunca es no negativa y otros en los que $C(A)$ es no negativa cuando es una matriz diagonal o anti-diagonal, esto es, sólo cuando $C(A)$ coincide con la matriz identidad I o con la anti-identidad J. Así mismo, se deduce que el signo de los elementos de $C(A)$ viene determinado únicamente por los dos primeros y los tres últimos elementos de la signatura de A.

En el Capítulo 4 se busca determinar relaciones entre los elementos diagonales de la matriz combinada de una matriz totalmente negativa y con ello caracterizar cuándo cierto vector puede coincidir con la diagonal de $C(A)$. Así, se obtienen relaciones entre los dos primeros y dos últimos elementos de la diagonal de $C(A)$. También se caracteriza la diagonal de la matriz combinada de una matriz totalmente negativa de dimensión 3×3, tanto para el caso simétrico como no simétrico.

Finalmente, se incluye un capítulo donde se resumen los logros alcanzados y un pequeño listado de las posibles líneas futuras de trabajo sobre aspectos que el autor de esta memoria querría continuar estudiando en vista a unos nuevos objetivos.

Resum

El producte de Hadamard o producte element a element de dues matrius ha sigut estudiat per diversos autors amb diferents objectius. En particular, el producte de Hadamard d'una matriu i la trasposta de la seua inversa ha demostrat la seua utilitat en múltiples àrees com per exemple en l'estudi de processos químics. Aquest producte es denomina matriu combinada i es denota per $C(A)$. La matriu combinada té a més diverses aplicacions en l'àmbit de l'Àlgebra lineal. A partir de la matriu combinada s'obté, per exemple, una interessant relació entre els valors propis i els elements diagonals d'una matriu diagonalizable. A més, atès que la suma de cada fila i de cada columna d'una matriu combinada és exactament igual a 1, en aquells casos en què la matriu combinada siga no negativa, $C(A)$ serà una matriu doblement estocàstica. L'estudi de propietats de $C(A)$ segueix sent d'actualitat i molts resultats han sigut publicats recentment.

Igual que l'estudi de matrius no negatives ha demostrat la seua utilitat des de temps arrere, altres condicions de positividad, englobant en aquest concepte tots els camps que fan referència al signe d'elements o menors d'una matriu, s'han vingut introduint en la literatura i han vingut demostrant el seu interès. Dins de la positividad podem incloure, a més del signe dels elements de la matriu (matrius no negatives i Z–matrius), el signe dels elements de la matriu inversa (M–matrius), el patró de zeros de la matriu (matrius triangulars i matrius diagonals) i el signe dels determinants de submatrices (P–matrius, matrius totalment positives, matrius totalment no negatives). Més recentment s'han definit també les matrius signe-regulars, és a dir, aquelles matrius per a les quals tots els menors del mateix ordre tenen un signe determinat. En diversos treballs s'ha analitzat també quin tipus de propietats de positividad pot heretar la matriu combinada. Per exemple, ja és conegut que la matriu combinada d'una M–matriu és també una M–matriu.

En aquesta memòria s'arrepleguen i amplien els resultats referents a la matriu combinada d'algunes classes de matrius relacionades amb la positividad. Per a açò s'ha consultat una llarga relació de treballs relacionats i s'ha realitzat un resum dels resultats més rellevants abans d'incloure els

nous resultats. Es planteja també l'interès d'algunes qüestions obertes.

La memòria s'estructura de la següent manera. En el primer capítol es defineixen els conceptes i s'enuncien i/o demostren els resultats d'àmbit general que van a ser utilitzats en la resta de la memòria. En els tres restants capítols es planteja el tipus de problema a resoldre, s'enuncien i demostren els resultats obtinguts i es resumeix el seu interès a manera de conclusions.

En el Capítol 2 es determina si la matriu combinada de clàssiques classes de matrius pot ser o no doblement estocàstica. S'estudia la matriu combinada d'aquestes classes i es conclou que s'obté la positividad de la matriu combinada per a algunes G–matrius, algunes H–matrius i algunes matrius 2×2; mai es dóna per a matrius totalment positives o totalment negatives; i només s'obté $C(A) \geq 0$ quan $C(A) = I$ en el cas que A siga totalment no negativa o M–matriu. Finalment, només les matrius anti-triangulars totalment no positives de grandària 2×2 tenen matriu combinada no negativa.

En el Capítol 3 s'estén l'estudi anterior a matrius signe-regulars. S'analitza el signe de les entrades de la matriu combinada a partir de la signatura de la matriu i de la signatura de la seua matriu inversa trasposta i s'obté una llista amb tots els casos possibles. Aquesta llista mostra casos en els quals $C(A)$ mai és no negativa i uns altres en els quals $C(A)$ és no negativa quan és una matriu diagonal o anti-diagonal, açò és, només quan $C(A)$ coincideix amb la matriu identitat I o amb la anti-identitat J. Així mateix, es dedueix que el signe dels elements de $C(A)$ ve determinat únicament pels dos primers i els tres últims elements de la signatura de A.

En el Capítol 4 se cerca determinar relacions entre els elements diagonals de la matriu combinada d'una matriu totalment negativa i amb açò caracteritzar quan cert vector pot coincidir amb la diagonal de $C(A)$. Així, s'obtenen relacions entre els dos primers i dos últims elements de la diagonal de $C(A)$, tant per al cas simètric com no simètric. També es caracteritza la diagonal de la matriu combinada d'una matriu totalment negativa de dimensió 3×3.

Finalment, s'inclou un capítol on es resumeix els assoliments aconseguits i un petit llistat de les possibles línies futures de treball sobre aspectes que l'autor d'aquesta memòria voldria continuar estudiant en vista a uns nous objectius.

Abstract

Several authors have studied the Hadamard product or entry wise product of two matrices with different objectives. In particular, the product of a Hadamard matrix and the transpose of its inverse has proved useful in many areas such as in the study of chemical processes. This product is called combined matrix and is denoted by $C(A)$. The combined matrix also has various applications in the field of linear algebra. For example, from the combined matrix an interesting relationship between the eigenvalues and the diagonal elements of a diagonalizable matrix is obtained. Furthermore, since the sum of each row and each column of a combined matrix is exactly equal to 1, in cases where the combined matrix is nonnegative, $C(A)$ will be a doubly stochastic matrix. The study of properties of $C(A)$ is still under research and many results have recently been published.

Like the study of non-negative matrices, which has been proven useful for some time, other conditions of positivity, encompassing this concept all fields that refer to the sign of elements or minors of a matrix, have been introduced in the literature and have been proven to be an interesting topic of study. Within the positivity we can include, besides the sign of the matrix elements (not negative and Z–matrices), the sign of the entries of the inverse matrix (M–matrices), the pattern of zeros of the matrix (triangular and diagonal matrices) and the sign of the determinants of submatrices (P–matrices, totally positive matrices, totally nonnegative matrices). More recently, sing-regular matrices have been studied, that is, matrices whose minors of the same order have a particular sign. Various studies have also analyzed what kind of positivity can inherit properties of the combined matrix. For example, it is known that a combined matrix of an M–matrix is also an M–matrix.

Herein are collected and extended results concerning the combined matrix of some classes of matrices related to positivity? For this, a long list of related works has been consulted and a summary of the most relevant results has been made before showing the new results. The interest of some open issues was also raised.

The memory is structured as follows. In the first chapter the concepts are defined and listed. General results are proven that will be used in the rest of the memory. In the three remaining chapters, we present the problems to solve, the results we have obtained and summarize their interest as conclusions.

In Chapter 2 it is determined whether the combined matrix of some classic classes of matrices may or may not be doubly stochastic. The combined matrix of these classes is studied and we concluded that the positivity of the combined matrix is obtained for some G–matrices, some H–matrices and some 2×2 matrices. It never occurs to completely positive or completely negative matrices; and only it is obtained that $C(A) \geq 0$ when $C(A) = I$ in the case where A is not completely negative or M–matrix. Finally, only totally non positive anti-triangular matrices of size 2×2 have its combined matrix nonnegative.

In Chapter 3 the previous study is extended to sign-regular matrices. The sign of the entries of the combined matrix from the signature of the matrix and of its inverse matrix transpose is analyzed and a list with all possible cases is obtained. This list shows cases where $C(A)$ is never negative and others where $C(A)$ is nonnegative when it is a diagonal or anti-diagonal matrix, that is, only when $C(A)$ coincides with the identity matrix I or the anti-identity J. Likewise, it follows that the sign of the elements in $C(A)$ is determined solely by the first two and the last three elements of the symbol of A.

In Chapter 4, we determine relations between the diagonal elements of the combined matrix of a totally negative matrix and thereby we characterize when a given vector can be the diagonal entries of $C(A)$. Thus, relations between the first two and last two diagonal elements of $C(A)$, both for symmetric and non-symmetric cases are obtained. The diagonal of a combined matrix of a totally negative matrix of dimension 3×3 is also characterized.

Finally, a chapter is written with all our achievements and a short list of possible future lines of work upon aspects that the author of this report would like to continue studying in order to reach new related goals.

Índice general

Capítulo 1

Introducción, notación, definiciones y resultados previos

1.1. Introducción

El tema de esta memoria está estrechamente relacionado con propiedades de las matrices que dependen de los signos de sus elementos o de los signos de sus menores. El tema cae dentro del área de la positividad de matrices. En la teoría de matrices, los aspectos relacionados con la positividad han sido ampliamente estudiados. Es un área de investigación de gran actualidad, que despierta gran interés y sus aplicaciones son muy variadas. Sus resultados han sido usados exitosamente en áreas tan diversas como análisis numérico, estadística, economía, investigación de operaciones e ingeniería de procesos. En años recientes se han publicado valiosos libros sobre este tema, como el de Fallat y Johnson "Totally Nonnegative Matrices" (2011) [21], el de Pinkus "Totally Positive Matrices" (2009) [51], el de Horn y Johnson "Topics in Matrix Analysis" (1991) [38], el de Berman y Plemons "Nonnegative Matrices in the Mathematical Science" (1994) [2] y el de Varga "Matrix Iterative Analysis" (2000) [53]. Además se ha publicado una enorme cantidad de artículos como el de Ando "Totally positive matrices" [1]. Comúnmente se entiende que el término positividad de matrices incluye también las investigaciones relativas a matrices con elementos o menores negativos, como por ejemplo [19] y [10].

De acuerdo a los signos de sus elementos y de sus menores, en el contexto de la positividad de matrices se pueden considerar, a groso modo, varias clases de matrices:

1. De acuerdo a los signos de sus elementos:
   a) Matrices positivas (no negativas)
   b) Matrices negativas (no positivas)
   c) Z–matrices (elementos no diagonales no positivos)
2. De acuerdo a los signos de sus menores:
   a) Matrices totalmente positivas (totalmente no negativas)
   b) Matrices totalmente negativas (totalmente no positivas)
   c) Matrices signo-regulares
   d) P–matrices

En esta memoria estudiamos la matriz combinada de unos tipos específicos de matrices invertibles, relacionados con la positividad. La matriz combinada se define a partir del producto de Hadamard (producto elemento por elemento) [41]. Aunque su estudio se inició hace poco más de cincuenta años, fueron nombradas de manera formal en el 2010 [26]. La característica más interesante de las matrices combinadas es que la suma de los elementos de cada fila y de cada columna es igual a la unidad. Esto significa que si la matriz combinada es no negativa, es doblemente estocástica. En ingeniería de procesos, donde se ha utilizado durante largo tiempo, se le llama Matriz de Ganancia Relativa [38]. Nuestro trabajo se enfoca en el estudio de las matrices combinadas de matrices invertibles, poniendo un mayor énfasis en la matrices combinadas no negativas, de matrices totalmente no negativas y de matrices signo-regulares. En esta memoria no se incluye el estudio de las matrices definidas positivas.

Nuestra tarea principal es estudiar algunos tipos de matrices para determinar si su matriz combinada es no negativa, es decir, doblemente estocástica. También estudiamos los elementos diagonales de la matriz combinada de algunos tipos de matrices totalmente negativas.

Sobre los resultados de esta memoria, podemos decir que son variados. Se han estudiado las matrices combinadas de varias clases de matrices, hemos identificado las que tienen matriz combinada no negativa y las condiciones bajo las cuales ocurre esto. También hemos estudiado las matrices combinadas de matrices signo-regulares. Se han determinado condiciones sobre estas matrices que determinan la no negatividad de su matriz combinada. Por último, se han determinado condiciones suficientes y necesarias para que los elementos de una secuencia determinada sean los elementos diagonales de la matriz combinada de algunos tipos de matrices totalmente negativas.

Algunas dificultades que se presentaron y fueron superadas en el desarrollo de esta memoria merecen atención, como por ejemplo, determinar que clases de matrices no tienen matrices combinadas no negativas, que otras clases las tienen y bajo que restricciones. Otra gran dificultad fue que, como la matriz inversa de una matriz signo-regular no es signo-regular, tuvimos que buscar la forma de expresar la matriz combinada de una matriz signo-regular como el producto de Hadamard de dos matrices signo-regulares. Finalmente, tuvimos que determinar las relaciones entre los distintos elementos diagonales de la matriz combinada de matrices totalmente negativas.

La memoria está organizada como sigue. En el Capítulo 1 establecemos la notación que será usada, repasamos algunas definiciones básicas y presentamos los resultados previos. En ocasiones, en capítulos específicos, se recuerdan algunas de las definiciones antes dadas y se agregan algunos resultados previos, que sólo se utilizan en dicho capítulo.

En el capítulo 2 estudiamos las matrices combinadas no negativas de algunos tipos de matrices. En este capítulo enfocamos nuestro trabajo en determinar que clases de matrices tienen matriz combinada no negativa. De esta forma, analizamos las condiciones que debe satisfacer una matriz para que su matriz combinada sea doblemente estocástica. Estudiamos las matrices combinadas de M–matrices, G–matrices y H–matrices, así como de matrices totalmente positivas, totalmente negativas y totalmente no positivas.

En el Capítulo 3 estudiamos las matrices combinadas de matrices signo-regulares. Una matriz cuadrada invertible es signo-regular cuando todos los determinantes de todas las submatrices cuadradas de un mismo orden tienen igual signo. Las matrices signo-regulares están caracterizadas por su vector signatura [49]. Los distintos casos estudiados se presentan en una tabla, donde se establece cuando la matriz combinada es no negativa y cuando no lo es. Se describen detalladamente la matrices combinadas, indicando en muchos casos, su estructura y sus elementos. En el proceso de obtención de resultados, se evidencia que en la ejecución de esta tarea, sólo se requieren unas pocas componentes de los vectores de signatura de las matrices.

En el Capítulo 4 dirigimos nuestra atención a las matrices totalmente negativas. Nos centramos en el estudio de las entradas diagonales de sus matrices combinadas. Por un largo tiempo, se ha sabido [38] que la multiplicación por ambos lados de una matriz A por una matriz diagonal no singular, no altera la matriz combinada. Las características de las entradas diagonales de la matriz combinada fueron completamente descritas en [30] para el caso de algunas matrices totalmente positivas y de algunas matrices oscilatorias. Estas características habían sido estudiadas en [24] para el caso de M–matrices y en [25] para el caso de matrices definidas positivas. Nuestra tarea ha sido hacerlo con algunas clases de matrices totalmente negativas.

1.2. Notación

A no ser que se indique lo contrario, en esta monografía todas las matrices son de tamaño $n \times n$, invertibles y reales.

1. Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, denotamos por N el conjunto de índices $\{1, ..., n\}$.

2. Para los subconjuntos $\alpha, \beta \subseteq N$, la submatriz con filas indexadas por el subconjunto α y columnas indexadas por el subconjunto β, se denota por $A[\alpha|\beta]$. Está claro que $A[i|j] = a_{ij}$.

3. La submatriz principal $A[\alpha|\alpha]$ se denota $A[\alpha]$ y su determinante, $\det A[\alpha]$, se denomina determinante principal.

4. La submatriz de A obtenida al eliminar las filas indexadas por α y las columnas indexadas por β se denota $A(\alpha|\beta)$ y $A(\alpha|\alpha)$ se denota $A(\alpha)$. Se observa que $A(i|j)$ denota la submatriz obtenida de A al eliminar la fila i y la columna j. Más aún, A_{ij} denota *el menor* que corresponde al elemento (i, j), i.e., $A_{ij} = \det A(i|j)$, además $A_{ji} = \det(A(i|j))^T$. Denotamos por C_{ij} el *cofactor* correspondiente al elemento (i, j), es decir $C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

5. El índice $k \in \mathbb{N}$ se usa para expresar que un número entero n es par o impar, escribiendo $n = 2k$ o $n = 2k - 1$, respectivamente.

6. El símbolo $\operatorname{sign}(d)$, $d \in \mathbb{R}$ denota el signo de la cantidad d, que puede ser $+1$, -1 ó 0.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de tamaño $n \times n$. Al igual que los elementos de la forma a_{ii}, $i \in N$, forman la diagonal principal, o simplemente la diagonal de A, los elementos de la forma $a_{i,n-i+1}$, $i \in N$, forman la anti-diagonal de A. La diagonal y la anti-diagonal son muy importantes en esta memoria, especialmente en el capítulo sobre matrices combinadas de matrices signo-regulares.

Definición 1.2.1. *La matriz $A = [a_{ij}]$ de tamaño $n \times n$ tal que $a_{ij} = 1$ si $j = n - i + 1$ y $a_{ij} = 0$ si $j \neq n - i + 1$, para toda $i, j \in N$, se llama* **anti-identidad** *de orden n. Denotamos por J la matriz anti-identidad.*

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de tamaño $n \times n$. Obsérvese que

$$JAJ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \end{bmatrix}$$

por tanto,

$$\operatorname{diag}(JAJ) = (a_{nn}, a_{n-1,n-1}, \ldots, a_{11}).$$

Otra matriz que se va a usar con frecuencia es la siguiente

$$S = \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (1.1)$$

Definición 1.2.2. *Sea I la matriz identidad de orden n. Se le llama* **matriz elemental** *de orden n a la matriz obtenida al aplicar una operación elemental a las filas o a las columnas de I.*

Se pueden considerar matrices elementales de filas y matrices elementales de columnas. Usaremos la siguiente notación para las matrices elementales de filas:

- E_{ij}: matriz identidad donde las filas i, j se han intercambiado.
- $E_i(\alpha)$: matriz identidad donde la fila i se ha multiplicado por el número α.
- $E_{ij}(\alpha)$: matriz identidad donde a la fila i se le ha sumado la fila j multiplicada por α.

En forma similar, se pueden considerar matrices elementales de columnas, que son las traspuestas de las anteriores.

Teorema 1.2.1. *Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y E es una matriz elemental de filas del mismo orden, entonces el producto EA equivale a realizar sobre las filas de A la operación elemental que corresponde a E.*

Teorema 1.2.2. *Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y V es una matriz elemental de columnas del mismo orden, entonces el producto AV equivale a realizar sobre las columnas de A la operación elemental que corresponde a V.*

1.3. Clases de matrices

1.3.1. Submatrices y menores de una matriz

Los menores de una matriz son los determinantes de las submatrices cuadradas de la matriz. Por lo pronto es importante distinguir entre menores principales y menores principales líderes. Más adelante veremos otros tipos de menores.

Definición 1.3.1. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. El determinante de cualquier submatriz cuadrada de A se denomina* **menor** *de A. Si el menor tiene la forma* $\det A[\alpha]$*, $\alpha \subset N$ es un* **menor principal** *de A y si $\alpha = \{1, 2, \ldots, k\}$, $k \leq n$, $A[\alpha]$ es un* **menor principal líder** *de A.*

Una matriz de dimensión $n \times n$ tiene exactamente n menores principales líderes. El número de menores principales de orden k, $k \leq n$ es C_n^k. El número total de menores principales de todos los órdenes, desde 1 hasta n, es $2^n - 1$. La cantidad total de menores de orden k es $C_n^k C_n^k$. Este número aumenta rápidamente a medida que k crece. Afortunadamente, podemos determinar si una matriz es totalmente positiva o totalmente negativa, utilizando el criterio de los menores, sin necesidad de calcular todos sus menores. El subconjunto de menores que nos permite determinar esto, está constituido por los determinantes de las submatrices relevantes.

Definición 1.3.2. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Si $r, s \in N$, denotamos por $A_{(rs)}$ la submatriz*

1.
$$A_{(rs)} = A[r-s+1, r-s+2, \ldots, r|1, 2, \ldots, s], \quad si \quad r \geq s$$

2.
$$A_{(rs)} = A[1, 2, \ldots, r|s-r+1, s-r+2, \ldots, s], \quad si \quad r \leq s$$

llamada **submatriz relevante**.

Observe que las dos partes de la definición coinciden si $r = s$. La definición indica que una matriz es relevante si tiene k filas consecutivas y las primeras k columnas, o bien, tiene k columnas consecutivas y las primeras k filas.

Veamos algunos ejemplos de submatrices relevantes.

Ejemplo 1.3.1. *Sea A la matriz de tamaño $n \times n$. La submatriz relevante $A_{(34)}$ corresponde al caso $A_{(rs)}$ con $r \leq s$, por tanto*

$$A_{(34)} = [1, 2, 3|2, 3, 4].$$

La submatriz aparece destacada en A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{14}} & a_{15} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \mathbf{a_{34}} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

La submatriz relevante $A_{(43)}$ corresponde al caso $A_{(rs)}$ con $r \geq s$, por tanto

$$A_{(43)} = [2, 3, 4|1, 2, 3].$$

La submatriz aparece destacada en A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & a_{24} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ \mathbf{a_{41}} & \mathbf{a_{42}} & \mathbf{a_{43}} & a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

1.3.2. Matrices con patrón de signos "checkerboard"

En la mayoría de las matrices se presenta una distribución aleatoria de entradas positivas, negativas y nulas, que no sigue ningún orden específico. Por otro lado, algunas matrices presentan un patrón alternante de elementos positivos y negativos en cada una de sus líneas.

Definición 1.3.3. *Una matriz real $A = [a_{ij}]$ de dimensión $n \times n$ se dice que tiene un* **patron de signos "checkerboard"** *si para todo $a_{ij} \neq 0$ se tiene $sign(a_{ij}) = (-1)^{i+j}$. Cuando ningún elemento de A es nulo diremos que tiene patrón de signos estrictamente "checkerboard".*

En una matriz con patrón de signos "checkerboard", los signos de sus elementos se distribuyen en la siguiente la forma

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots & + & - \\ - & + & - & \cdots & - & + \\ + & - & + & \cdots & + & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ + & - & + & \cdots & + & - \\ - & + & - & \cdots & - & + \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.3.2. *Sean las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que las matrices A y B tienen patrón de signos "checkerboard".

Este concepto se usa ampliamente en el desarrollo de esta monografía. En ocasiones será muy importante notar que la matriz $-A$ tiene patrón de signos "checkerboard".

Ejemplo 1.3.3. *Sea la matriz A*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz opuesta de A, $-A$, tiene patrón de signos "checkerboard".

1.3.3. Matrices equivalentes: semejantes y congruentes

Definición 1.3.4. *Sean A y B dos matrices del mismo tamaño $m \times n$. Se dice que A y B son* **matrices equivalentes** *si existen dos matrices cuadradas no singulares P y Q de tamaño $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente tales que*

$$B = PAQ.$$

Dadas dos matrices equivalentes A y B, si la matriz A se considera la matriz de una aplicación lineal, como las matrices invertibles son matrices de cambio de base, la matriz B corresponde a la misma aplicación lineal, respecto a una base distinta.

Definición 1.3.5. *Sean A y B dos matrices cuadradas de tamaño $n \times n$. Se dice que A y B son* **matrices semejantes***, si existe una matriz no singular P de igual tamaño tal que*

$$B = P^{-1}AP.$$

El caso de semejanza más conocido es cuando la matriz es semejante a una matriz diagonal. El proceso de hallar una matriz diagonal semejante a la matriz A se conoce como *diagonalización*.

Definición 1.3.6. *Una matriz A de tamaño $n \times n$ es* **diagonalizable** *si existen una matriz diagonal D, y una matriz invertible P tal que*

$$A = PDP^{-1}.$$

Definición 1.3.7. *Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times n$. Se dice que A y B son* **matrices congruentes** *si existe una matriz invertible P de igual tamaño tal que*

$$B = P^T AP.$$

La relaciones de semejanza y congruencia de matrices son relaciones de equivalencia. En ambas definiciones la matriz no singular P se llama matriz de paso.

Sea $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Escribimos $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ para representar la matriz diagonal de tamaño $n \times n$, cuyos elementos diagonales son $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Cuando $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ y $d_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, la matriz D se llama *diagonal positiva*. Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y D es una matriz diagonal positiva, entonces entre las matrices A y DAD existe una relación de *congruencia diagonal positiva*. En ocasiones se dice que DAD es una congruencia diagonal positiva de A (ver [40]).

Cuando dos matrices A y B de tamaño $n \times n$ son congruentes se puede transformar una en la otra, realizando una secuencia finita de operaciones elementales fila seguidas por las mismas operaciones columna en el mismo orden.

La diagonalización de matrices se puede hacer por semejanza o por congruencia. Una matriz A es diagonalizable por semejanza, si es semejante a una matriz diagonal. Si en la definición de semejanza se puede elegir la matriz P de forma que sea una matriz de permutación, entonces las matrices son semejantes por permutación. Una matriz A es diagonalizable por congruencia si existe una matriz ortogonal C tal que $A = CDC^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y D es una matriz diagonal positiva entonces decimos que DAD se obtiene a partir de A mediante congruencia diagonal positiva (ver [40]).

Teorema 1.3.1. *La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A sea diagonalizable por congruencia es que sea simétrica.*

1.3.4. Matrices positivas y negativas

Las matrices no negativas (positivas), y las no positivas (negativas) se definen tomando en cuenta únicamente los signos de sus elementos.

Definición 1.3.8. *Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$. A es una* matriz no negativa (positiva*) si sus elementos son no negativos (positivos), es decir, $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$) para todo $i, j \in N$, y la denotaremos por $A \geq 0$ ($A > 0$). En forma similar, A es una* matriz no positiva (negativa) *si sus elementos son no positivos (negativos), es decir, $a_{ij} \leq 0$ ($a_{ij} < 0$) para todo $i, j \in N$, y la denotaremos por $A \leq 0$ ($A < 0$).*

1.3.5. Matrices totalmente positivas y totalmente negativas

A diferencia de las matrices no negativas (positivas), y las no positivas (negativas), las matrices totalmente no negativas (positivas) y las totalmente no positivas (negativas), no se definen atendiendo a los signos de sus elementos, sino a los signos de sus menores.

Definición 1.3.9. *Se dice que una matriz A es* **totalmente no negativa (totalmente positiva)** *si todos sus menores de cualquier orden son no negativos (positivos). Esto significa que para cada par de índices $\alpha, \beta \subseteq N$,* $\det(A[\alpha|\beta]) \geq 0$ *(*$\det(A[\alpha|\beta]) > 0$*).*

Definición 1.3.10. *Se dice que una matriz A es* **totalmente no positiva (totalmente negativa)** *si todos sus menores de cualquier orden son no positivos (negativos). Esto significa que para cada par de índices $\alpha, \beta \subseteq N$,* $\det(A[\alpha|\beta]) \leq 0$ *(*$\det(A[\alpha|\beta]) < 0$*).*

Las matrices totalmente no negativas y totalmente positivas también se conocen como totalmente positivas y estrictamente totalmente positivas. En los últimos años ha habido una gran cantidad de publicaciones sobre esta clase de matrices, tanto libros como artículos, como puede verse en [1],[2],[21],[51]. Algo similar ocurre con la forma de designar las matrices totalmente no positivas y totalmente negativas, que también se conocen como totalmente negativas y estrictamente totalmente negativas (ver [12] página 7).

Las submatrices relevantes son de gran utilidad para determinar si una matriz es totalmente positiva o totalmente negativa, como establecen los siguientes resultados.

Teorema 1.3.2. *(Teorema 5.1 de [9]) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. A es totalmente negativa si, y sólo si todos los determinantes de sus submatrices relevantes son negativos.*

Teorema 1.3.3. *([1]) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. A es totalmente positiva si y sólo si todos los determinantes de sus submatrices relevantes son positivos.*

1.3.6. Matrices signo-regulares

Las matrices totalmente no negativas (positivas) y totalmente no positivas (negativas) están incluidas en una clase más amplia. Ambas son casos particulares de matrices signo-regulares. En las matrices signo-regulares los menores de cada orden tienen el mismo signo, pero este puede cambiar con el orden. A estas matrices se les puede asignar un vector de signatura como indica la siguiente definición.

Definición 1.3.11. *Un* **vector de signatura** *es una sucesión $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ con $|\varepsilon_i| = 1$.*

Definición 1.3.12. *(Ver [49]) Una matriz A de tamaño $n \times n$ se llama* **signo-regular** *de orden k, $k \leq n$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$ si para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, el signo de todos sus menores no nulos de orden j coincide con ϵ_j. Cuando $k = n$, una matriz signo-regular de orden k es llamada simplemente matriz signo-regular.*

Una matriz signo-regular A tiene asociado un vector de signatura $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$, donde $\epsilon_j = 1$ si todos sus menores de orden j son positivos o cero y $\epsilon_j = -1$ si todos son negativos o cero. Si A es además invertible, no se puede dar el caso de que todos los menores de algún orden j, $j \in N$, sean cero, luego $\epsilon_j = \pm 1$ para todo $j \in N$.

El siguiente resultado aporta una reducción en el número de menores que se deben calcular para determinar si una matriz es signo-regular o no lo es.

Teorema 1.3.4. *(Ver [1]) Sea A una matriz invertible de tamaño $n \times n$. Si para todo k, $1 \leq k \leq n$, todos sus menores de orden k con filas consecutivas y columnas cualesquiera, tienen el mismo signo no estricto, entonces A es una matriz signo-regular.*

Obsérvese que las matrices invertibles totalmente positivas, totalmente no negativas, totalmente negativas y totalmente no positivas son casos particulares de matrices signo-regulares cuyo vector de signatura es $(1, 1, \ldots, 1)$

para las dos primeras y $(-1,-1,\ldots,-1)$ para las dos segundas. También es de observar que aunque A sea signo-regular, tanto $-A$ como A^{-1} no son en general matrices signo-regulares.

Unos resultados interesantes que usaremos posteriormente porque nos proporcionan la signatura de una matriz relacionada con A^{-1} son los siguientes.

Teorema 1.3.5. *(Ver [19]) Si A es una matriz totalmente negativa, entonces $SA^{-1}S$ es una matriz signo-regular con vector de signatura $\epsilon = (1,1\ldots,1,-1)$.*

Proposición 1.3.1 (Ver [1], Teorema 3.3)**.** *Si A es una matriz invertible totalmente no negativa, entonces $SA^{-1}S$ es también una matriz invertible totalmente no negativa, donde $S = diag(1,-1,1\ldots,(-1)^{n-1})$.*

Teorema 1.3.6. *(Ver [19]) Si A es una matriz invertible totalmente no positiva de tamaño $n \times n$, entonces $SA^{-1}S$ es signo-regular con vector de signatura $\varepsilon = (1,1,\ldots,1,-1)$.*

1.3.7. Otros tipos de matrices

Definición 1.3.13. *Se dice que una matriz real A, de dimensión $n \times n$, es una* **P–matriz** *si para cada subconjunto $\alpha \subseteq N$, $\det(A[\alpha]) > 0$.*

Desde luego, las matrices totalmente positivas son P–matrices.

Definición 1.3.14. *Una matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensión $n \times n$ es una* **Z–matriz** *si $a_{ij} \leq 0$ for $i \neq j$, es decir, todas sus entradas no diagonales son no positivas.*

Las Z–matrices incluyen como una subclase, a las M–matrices, las cuales a su vez permiten definir las H–matrices. Una matriz A no singular es una M–matriz si A es una Z–matriz y $A^{-1} \geq 0$. No obstante, para dar una correcta definición de H–matriz, que incluya todas las H–matrices invertibles, debemos dar una definición de M–matriz que incluya el caso singular. Es bueno recalcar que las M–matrices no singulares tienen muchas definiciones equivalentes, ver [2].

Definición 1.3.15. *Una Z–matriz real A, de tamaño $n \times n$, es una* **M–matriz** *si A puede escribirse como $A = sI - B$, con $B \geq 0$ y $s \geq \rho(B)$, donde $\rho(B)$ denota el radio espectral de la matriz B, es decir, el mayor valor propio de B en valor absoluto.*

Si en la definición anterior se tiene $s > \rho(B)$ la M–matriz es invertible; en cambio, si $s = \rho(B)$, la M–matriz es singular.

Para una matriz A, su matriz comparación se denota $\mathcal{M}(A)$, es decir,

$$\mathcal{M}(A) = [m_{ij}], \quad \text{donde} \quad m_{ij} = \begin{cases} m_{ij} = -|a_{ij}|, & i \neq j \\ m_{ii} = |a_{ii}|. \end{cases}$$

Definición 1.3.16. *Se dice que una matriz compleja A de dimensión $n \times n$ es una* **H–matriz** *si su matriz comparación $\mathcal{M}(A)$ es una M–matriz.*

Observe que las H–matrices, invertibles o no, que tienen matriz de comparación singular están incluidas en esta definición. En [4] se determinan tres clases de H–matrices. En la clase singular todas las H–matrices son singulares (estas matrices tienen algún elemento diagonal nulo). En la clase invertible todas las H–matrices son invertibles (su matriz de comparación es invertible). Existe una tercera clase, la clase mixta, conteniendo H–matrices singulares e invertibles (su matriz comparación es singular, pero con elementos diagonales no nulos).

Definición 1.3.17. *Una matriz A de tamaño $n \times n$ es* **ortogonal** *si $A^T A = I$, donde I es la matriz identidad de orden n, es decir, si $A^{-1} = A^T$.*

Definición 1.3.18. *Una matriz A de tamaño $n \times n$ es una* **matriz permutación** *si puede ser construida reorganizando las filas o columnas de la matriz identidad de orden n.*

Las matrices permutación están contenidas en una clase más amplia, llamada matrices monomiales o matrices permutación generalizadas.

Definición 1.3.19. *Una matriz A se llama* **monomial** *si en cada fila y en cada columna hay exactamente un elemento distinto de cero.*

Como puede apreciarse, una matriz monomial es cuadrada y siempre es equivalente, mediante permutaciones, a una matriz diagonal.

1.4. Matrices combinadas

El producto de Hadamard de dos matrices, también llamado producto de Schur, es el producto entrada por entrada, que se realiza en forma similar a la suma convencional de matrices. La matriz combinada de una matriz no singular A, denotada $C(A)$, es el producto de Hadamard de la matriz A y la traspuesta de su inversa, $C(A) = A \circ (A^{-1})^T$. A pesar de que ha sido conocida y estudiada por muchos años, su designación con el nombre de matriz combinada es sumamente reciente.

Podemos esbozar una breve cronología sobre los orígenes de esta matriz. Los resultados más recientes sobre la matriz combinada de una matriz invertible fueron obtenidos por Fiedler y Markham en el 2011 en [30]. En este artículo se describe completamente la estructura de las entradas diagonales de la matriz combinada de algunos tipos de matrices invertibles, como matrices totalmente positivas y matrices oscilatorias. Esto mismo había sido estudiado para el caso de matrices definidas positivas en el 1964 en [25]. Ya se había estudiado la matriz combinada de M–matrices en el 1962 en [24]. El nombre "matriz combinada" para designar la matriz $A \circ (A^{-1})^T$, fue establecido formalmente por Fiedler en el año 2010 en [26] . Adicionalmente, la matriz combinada de una matriz A ha sido estudiada por Johnson y Shapiro en [41], donde mostraron que las iteraciones $(A \circ A^{-T})^k$, $k \in \mathbb{N}$, convergen a la matriz identidad cuando A es una matriz definida positiva o una H–matriz, además, presentaron soluciones parciales a varios problemas aún no resueltos completamente sobre la matriz combinada.

En la literatura matemática consultada para la elaboración de esta memoria, tanto artículos como libros, se establece que la matriz combinada surge en dos situaciones. La primera es en la teoría matemática del control, en problemas de diseño, en ingeniería química, ver [3]. La segunda es, en un problema teórico de matrices que envuelve la relación entre los elementos diagonales y los valores propios de una matriz digonalizable.

En el área de la ingeniería de procesos, la matriz $A \circ (A^{-1})^T$ fue propuesta por E. Bristol (de Foxboro Company) en 1966 [3], como un sólido criterio para seleccionar los pares "entrada-salida" óptimos de las múltiples variables que intervienen en un proceso. Es conveniente aclarar que Bristol incluye a Fiedler en la bibliografía de su famosa publicación. La matriz $A \circ (A^{-1})^T$ se conoce en esta área, al igual que en el área de química [44], como "Matriz de Ganancia Relativa", RGA, por sus siglas en inglés. A partir de la publicación del famoso artículo de Bristol, la matriz combinada, que aún no tenía este nombre, ha sido usada durante mucho tiempo como una útil herramienta en el diseño de sistemas de control descentralizados [52].

Es particularmente útil en química. En uno de los enfoques para el diseño de plantas de ingeniería química esta matriz ha estado muy presente. En este enfoque la "matriz de ganancia" A modela la relación entre entradas y salidas de un proceso químico. La "matriz de ganancia relativa" $A \circ (A^{-1})^T$ permite seleccionar los mejores pares "entrada-salida" para un proceso óptimo. Esto contribuye significativamente a la realización del diseño del proceso [38]. Otras aplicaciones pueden hallarse en [41].

La matriz combinada nos permite establecer una interesante relación entre los elementos diagonales y los valores propios de una matriz diagonalizable(ver [38]). Supongamos que $B = [b_{ij}]$ es una matriz diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Existe una matriz no singular A tal que

$$B = A[diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)]A^{-1}$$

La realización de algunos cálculos sencillos nos conducen a la siguiente conclusión (ver [38])

$$C(A) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix}$$

Se concluye que la matriz combinada transforma el vector de los valores propios de B en el vector de sus elementos diagonales.

Damos a continuación un resumen de las propiedades básicas de la matriz combinada que necesitaremos en capítulos posteriores.

El producto de Hadamard de dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ de tamaño $n \times n$ se representa por $A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]$.

Definición 1.4.1. *La* **matriz combinada** *de una matriz invertible $A = [a_{ij}]$ se define como $C(A) = A \circ (A^{-1})^T$. Recordando que*

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}A_{ji}\right]$$

se tiene

$$C(A) = \left[\frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}\right].$$

Los elementos de $C(A)$ se denotan c_{ij}.

La definición de matriz combinada tiene una extraordinaria importancia en el desarrollo de esta memoria. Aún a riesgo de parecer repetitivo, esta definición aparece en varios capítulos. La razón de esta repetición, es que en cada caso, se hace alusión a diferentes aspectos que son consecuencia de su estructura.

Ahora mostramos algunas propiedades de la matriz combinada [38]. Si $C(A) = [c_{ij}]$ es la matriz combinada de la matriz A, entonces

1. $\sum_j c_{ij} = 1$ y $\sum_i c_{ij} = 1$ para todo $i, j \in N$.
2. $C(A^{-1}) = C(A^T) = (C(A))^T$.
3. $C(DA) = C(AD) = C(A)$ para cualquier matriz diagonal invertible D.
4. $C(PAQ) = PC(A)Q$ donde P y Q son matrices permutación.
5. $C(P) = P$ para cualquier matriz permutación P.

En la matriz combinada $C(A)$ de una matriz A la suma de los elementos de cada fila y la suma de los elementos de cada columna es igual a la unidad, esto significa que si la matriz combinada es no negativa, entonces es una matriz doblemente estocástica. La importancia de las matrices doblemente estocásticas es bien conocida por sus múltiples aplicaciones [8].

A continuación presentamos algunos lemas que establecen características de las matrices combinadas.

Lema 1.4.1. *[24] Si A es una M–matriz no singular, entonces $C(A)$ es una M–matriz no singular .*

Lema 1.4.2. *[38] Si $A \geq 0$ y $B \geq 0$, entonces $\rho(A \circ B) \leq \rho(A)\rho(B)$, donde $\rho(A)$ denota el radio espectral de A .*

Obsérvese que $C(A)$ es una matriz diagonal si, y sólo si $C(A) = I$.

Capítulo 2

Matrices combinadas no negativas

2.1. Introducción

Como ya hemos dicho, el producto de Hadamard (o producto entrada por entrada) de dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ de dimensión $n \times n$ es la matriz $A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]$. Este producto se utiliza para definir las matrices combinadas. Recordamos aquí que la *matriz combinada* de una matriz invertible $A = [a_{ij}]$ se define como

$$C(A) = A \circ (A^{-1})^T = \left[\frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}\right] = [c_{ij}].$$

Si la matriz combinada $C(A)$ de una matriz A es no negativa, entonces es una matriz doblemente estocástica.

2.2. Matrices triangulares de tamaño $n \times n$ y matrices 2×2

La matriz combinada de una matriz triangular superior o de una triangular inferior existe cuando sus elementos diagonales son no nulos, porque si esto ocurre, la matriz es invertible. Además la matriz inversa de una matriz triangular superior o triangular inferior es otra matriz triangular del mismo tipo. Por tanto, a partir de la definición de matriz combinada, se obtiene que la matriz combinada de una matriz triangular es diagonal y, por tanto, coincide con la identidad. Más aún, por el Lema 5.4.2(c) (pag. 322 de [38]) se puede establecer el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Para $n = 2$ y $n = 3$, $C(A) = I$ si, y sólo si la matriz A es semejante a una matriz triangular mediante una matriz permutación.*

Analizando este resultado surge la pregunta natural ¿es esto una equivalencia general? como se sugiere en [38] (Problema 2, pag. 302). La respuesta es negativa, la equivalencia no es verdadera para algunas matrices con $n \geq 4$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. *Considere la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & a \\ b & c & 0 & b \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & d & e & f \end{bmatrix} \qquad a, b, c, d, e, f \neq 0.$$

Es fácil calcular $C(A)$ y ver que $C(A) = I$. No obstante, A no es semejante por permutación a una matriz triangular porque A es irreducible.

Proposición 2.2.2. *Sea A una matriz no singular. Si la matriz combinada $C(A)$ es no negativa y triangular, entonces $C(A) = I$.*

Demostración. Supóngase que $C(A)$ es no negativa y triangular superior. $C(A)$ es doblemente estocástica. En este caso $c_{11} = 1$ es el único elemento positivo de la primera columna y la primera fila. Ahora $c_{22} = 1$ es el único elemento positivo de la segunda columna y la segunda fila. Razonando de esta forma con las demás columnas de A concluimos que $C(A) = I$. En el caso de que A sea triangular inferior se procede en forma similar. □

Además de todas las semejantes a matrices triangulares, se obtiene siempre $C(A)$ no negativa cuando A es anti-triangular o cualquier permutación de una matriz triangular.

Un caso simple para determinar matrices con su matriz combinada $C(A) \geq 0$ viene dado para matrices 2×2 en el siguiente resultado.

Proposición 2.2.3. *Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz no singular de tamaño 2×2. Entonces,*

$$C(A) \geq 0 \quad \textit{si, y sólo si} \quad a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} \leq 0.$$

En particular,

1. *si* $a_{11}a_{22} = 0$, *entonces* $C(A) = J$
2. *si* $a_{12}a_{21} = 0$, *entonces* $C(A) = I$
3. *si* $a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} < 0$, *entonces* $C(A) > 0$.

Demostración. Dado que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } (A^{-1})^T = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix},$$

tenemos

$$C(A) = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{11}a_{22} & -a_{21}a_{12} \\ -a_{21}a_{12} & a_{11}a_{22} \end{bmatrix}.$$

($\Rightarrow$) Supóngase que $C(A) \geq 0$. Entonces se tiene

$$\frac{a_{11}a_{22}}{\det A} \geq 0 \quad \text{y} \quad -\frac{a_{21}a_{12}}{\det A} \geq 0.$$

Luego $a_{11}a_{22}$ tiene el mismo signo que $\det A$ o es cero y $a_{21}a_{12}$ tiene signo contrario a $\det A$ o es cero. Por tanto,

$$(a_{11}a_{22})(a_{12}a_{21}) \leq 0.$$

($\Leftarrow$) Supóngase que $a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} \leq 0$. En consecuencia los productos $a_{11}a_{22}$ y $a_{12}a_{21}$ tienen signos contrarios. Como A es invertible, $\det A \neq 0$. El signo de $\det A$ sólo puede ser positivo o negativo.

Si $\det A > 0$, se tiene

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \quad \text{y} \quad (a_{11}a_{22})(a_{12}a_{21}) \leq 0,$$

esto implica

$$a_{11}a_{22} > 0 \quad \text{y} \quad -a_{12}a_{21} \geq 0$$

lo que a su vez implica

$$\frac{a_{11}a_{22}}{\det A} \geq 0 \quad \text{y} \quad -\frac{a_{12}a_{21}}{\det A} \geq 0.$$

Por tanto

$$C(A) \geq 0.$$

Si $\det A < 0$, se tiene

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0 \quad \text{y} \quad (a_{11}a_{22})(a_{12}a_{21}) \leq 0,$$

esto implica

$$a_{11}a_{22} < 0 \quad \text{y} \quad -a_{12}a_{21} \leq 0,$$

lo que a su vez implica

$$\frac{a_{11}a_{22}}{\det A} \geq 0 \quad \text{y} \quad -\frac{a_{12}a_{21}}{\det A} \geq 0.$$

Por tanto

$$C(A) \geq 0.$$

Los dos primeros casos particulares ocurren por el hecho de que $C(A)$ es doblemente estocástica y el último caso porque todas las entradas son distintas de cero. $\square$

Ejemplo 2.2.2.

$$\textit{Si} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \textit{entonces} \quad C(A) = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

2.3. G–matrices, M–matrices y H–matrices

Ahora probamos un resultado relacionado con el anterior, acerca de un tipo de matrices ortogonales recientemente introducidas en [28].

Definición 2.3.1. *Una matriz no singular A es llamada una G–matriz si existen dos matrices diagonales no singulares D_1 y D_2 tales que $(A^{-1})^T = D_1AD_2$.*

Teorema 2.3.1. *Si A es una G–matriz no singular tal que $D_1 \geq 0$ y $D_2 \geq 0$, entonces la matriz combinada de A es no negativa.*

Demostración. En este caso tenemos

$$C(A) = A \circ \left(A^{-1}\right)^T = A \circ (D_1AD_2) = D_1(A \circ A)D_2,$$

que es no negativa. $\square$

Ejemplo 2.3.1. *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es una G–matrix, porque

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

es el resultado de DAD, donde $D = diag(1/\sqrt{6}, \sqrt{2/3})$. Se observa que la matriz combinada es

$$C(A) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Ejemplo 2.3.2. *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es G–matriz porque es ortogonal. Su matriz combinada es no negativa:

$$C(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es bien conocido que la matriz combinada de una M–matriz es una M–matriz (see [38]). El siguiente resultado da las condiciones equivalentes para tener una matriz combinada no negativa de una M–matriz.

Teorema 2.3.2. *Sea A una M–matriz. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) $C(A) \geq 0$

ii) $C(A)$ *es diagonal*

iii) $C(A) = I$

iv) $a_{ii}A_{ii} = 1$ *para todo* $i \in N$.

Demostración. Supóngase que $C(A) > 0$. Puesto que A es una M–matriz, A^{-1} es no negativa y por tanto los elementos diagonales de $C(A)$ son positivos y los elementos no diagonales son no positivos. Por tanto $C(A) \geq 0$ si y sólo si $C(A)$ es diagonal. Las otras dos equivalencias son ciertas porque $C(A)$ es doblemente estocástica. □

A pesar de que la no negatividad de la matriz combinada de una M–matriz se reduce a la identidad, es fácil encontrar H–matrices para las cuales su matriz combinada es no negativa y distinta de la unidad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.3. *Las siguientes matrices no singulares:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

son H–matrices y cada una tiene matriz combinada positiva y no igual a la identidad:

$$C(A_1) = \frac{1}{189}\begin{bmatrix} 164 & 1 & 24 \\ 11 & 160 & 18 \\ 14 & 28 & 147 \end{bmatrix}, \qquad C(A_2) = \frac{1}{193}\begin{bmatrix} 164 & 13 & 16 \\ 3 & 160 & 30 \\ 26 & 20 & 147 \end{bmatrix},$$

$$C(A_3) = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} 102 & 22 & 36 \\ 3 & 124 & 33 \\ 55 & 14 & 91 \end{bmatrix}.$$

Se debe notar que A_3 es no singular, aunque $\mathcal{M}(A_3)$ sea una M–matriz singular.

$$\mathcal{M}(A_3) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ -5 & -2 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\det(\mathcal{M}(A_3)) = 0 \quad y \quad \det(A_3) = 160.$$

2.4. Matrices totalmente positivas y totalmente negativas

Ahora estudiamos la no negatividad de la matriz combinada de matrices totalmente positivas y totalmente negativas.

Teorema 2.4.1. *Si A es una matriz totalmente positiva, entonces $C(A)$ tiene patrón de signos estrictamente "checkerboard". Además, si A es una matriz totalmente negativa, entonces $-C(A)$ tiene patrón de signos estrictamente "checkerboard".*

Demostración. La prueba es directa, observamos que de acuerdo a su definición, $C(A)$ o $-C(A)$ tiene patrón de signos "checkerboard". □

Corolario 2.4.1. *Si A es una matriz totalmente positiva o totalmente negativa, entonces $C(A)$ nunca es no negativa.*

Aunque no se puede obtener una matriz combinada no negativa, los siguientes resultados están claramente relacionados.

Teorema 2.4.2. *(Ver [1]) Sea S la matriz diagonal de tamaño $n \times n$ dada por $S = diag(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1})$. Si A es una matriz totalmente positiva, entonces $SA^{-1}S$ también es una matriz totalmente positiva.*

Teorema 2.4.3. *Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ totalmente positiva (totalmente negativa), entonces $SC(A)S > 0$ ($-SC(A)S > 0$), donde $S = diag(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1})$ (ver 1.1).*

Para poder estudiar la matriz combinada de una matriz totalmente no negativa necesitamos algunos resultados auxiliares.

Teorema 2.4.4. *(Ver Teorema 2.1 de [49]) Sea $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$, una matriz signo-regular invertible de tamaño 3×3 con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.*

1. *Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ y $\varepsilon_2 = -1$, entonces $a_{ij} \neq 0$ siempre que $(i, j) \notin \{(1, 1), (n, n)\}$ y los elementos restantes pueden ser cero.*
2. *Si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_3$ y $\varepsilon_2 = 1$, entonces $a_{ij} \neq 0$ siempre que $(i, j) \notin \{(1, n), (n, 1)\}$ y los elementos restantes pueden ser cero.*
3. *Si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_3$ y $\varepsilon_2 = -1$, entonces $a_{i,n-i+1} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y los elementos restantes pueden ser cero. Además, si $a_{ij} = 0$, entonces $a_{kl} = 0$ para todo $k \leq i$, $l \leq j$, si $j < n - i + 1$ y $a_{kl} = 0$ para todo $k \geq i$, $l \geq j$, si $j > n - i + 1$.*
4. *Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ y $\varepsilon_2 = 1$, entonces $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y los elementos restantes pueden ser cero. Además, si $a_{ij} = 0$, entonces $a_{kl} = 0$ para todo $k \leq i$, $l \leq j$, si $i > j$ y $a_{kl} = 0$ para todo $k \geq i$, $l \leq j$, si $i > j$ y $a_{kl} = 0$ para todo $k \leq i$, $l \geq j$ si $i < j$.*

Proposición 2.4.1 (ver [1], Corolario 3.8)**.** *Si A es una matriz invertible totalmente no negativa, entonces A es una P–matriz.*

Proposición 2.4.2. *Si A es una matriz invertible totalmente no negativa y $a_{ij} \neq 0$ para algún $j > i$, entonces $a_{i,j-1} \neq 0$.*

Demostración. Si $j = i + 1$, entonces $a_{i,j-1} = a_{ii}$, que es positiva porque A es una P–matriz por la Proposición 2.4.1. Para $j \geq i + 2$, considérese la submatriz dada por

$$\begin{bmatrix} a_{i,j-1} & a_{ij} \\ a_{j-1,j-1} & a_{j-1,j} \end{bmatrix},$$

vamos a construir una prueba por contradicción. Supongamos entonces que $a_{i,j-1} = 0$. Puesto que A es una matriz invertible totalmente no negativa, entonces $a_{j-1,j-1} > 0$ y como $a_{ij} > 0$, se cumple que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ a_{j-1,j-1} & a_{j-1,j} \end{bmatrix} < 0,$$

que es una contradicción. $\square$

Proposición 2.4.3. *Si A es una matriz invertible totalmente no negativa, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $C(A) \geq 0$

(ii) $a_{ij}A_{ij} = 0$ *cuando* $i + j = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Puesto que A es una matriz totalmente no negativa, $a_{ij} \geq 0$, $A_{ij} \geq 0$ y $\det A > 0$ para todo i, j. Se cumple

$$c_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij} \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad i + j = 2k \\ \leq 0 & \text{si} \quad i + j = 2k + 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Por tanto, $C(A)$ es no negativa si, y sólo si $a_{ij}A_{ij} = 0$, cuando $i + j = 2k + 1$. □

Ahora estamos en condiciones de establecer los siguientes resultados.

Teorema 2.4.5. *Sea A una matriz invertible totalmente no negativa. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $C(A)$ *es no negativa*

(ii) $C(A) = I$.

Demostración. (ii) implica (i). Si $C(A) = I$ es obvio que $C(A)$ es no negativa.
(i) implica (ii). Supongamos que $C(A)$ es no negativa. Sabemos que $a_{ij}A_{ij} = 0$ siempre que $i + j = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$, por la Proposición 2.4.3. Falta probar que $a_{ij}A_{ij} = 0$, siempre que $i + j = 2k$ con $i \neq j$. Trabajamos por contradicción. Para ello suponemos que existe $a_{ij}A_{ij} \neq 0$ con $i + j = 2k$ y $i < j$. Por la Proposición 1.3.1 $S\left(A^{-1}\right)^T S$ es una matriz invertible totalmente no negativa. Aplicando la Proposición 2.4.2 a ambos, A y $S\left(A^{-1}\right)^T S$, tenemos que $a_{i,j-1} \neq 0$ y $A_{i,j-1} \neq 0$. Luego, $a_{i,j-1}A_{i,j-1} \neq 0$, con $i + (j-1) = 2k - 1$, y esto contradice el resultado de la Proposición 2.4.3. por tanto, cuando $i < j$, tenemos que $a_{ij}A_{ij} = 0$. Por tanto, $C(A)$ es una matriz triangular inferior y no negativa. Finalmente, $C(A) = I$ por la Proposición 2.2.2. □

Ahora vamos a determinar la positividad de la matriz combinada de una matriz totalmente no positiva. Dado que todos los menores de las matrices totalmente no positivas son no positivos, es claro que la matriz combinada de una matriz invertible totalmente no positiva no es, en general, no negativa. En realidad tenemos a continuación este simple resultado.

Teorema 2.4.6. *Sea A una matriz invertible totalmente no positiva. Se cumple que $C(A)$ es no negativa si, y sólo si $a_{ij}A_{ij} = 0$, siempre que $i + j = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.*

No obstante, existen matrices totalmente no positivas con matrices combinadas no negativas, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.1. *Considérese la matriz totalmente no positiva*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz combinada es

$$C(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que es no negativa.

La cuestión ahora es saber si hay o no más matrices totalmente no positivas con matriz combinada no negativa. Como puede verse más abajo, solamente matrices totalmente no positivas de tamaño 2×2 pueden tener esta propiedad. Para probar esto necesitamos algunos resultados auxiliares, relativos a las matrices totalmente no positivas.

Proposición 2.4.4. *Sea A una matriz invertible totalmente no positiva de tamaño $n \times n$ con $n \geq 3$. Si existe un índice $j \geq 2$ tal que $A_{1j} \neq 0$, entonces $A_{1,j-1} \neq 0$.*

Demostración. Para construir una prueba por contradicción, supongamos que existe un menor $A_{1j} \neq 0$ y $A_{1,j-1} = 0$ para algún $j \geq 2$. Dado que A^{-1} es no singular, existe un índice $t > 1$ tal que $A_{t,j-1} \neq 0$, pero entonces

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,j-1} & A_{1j} \\ A_{t,j-1} & A_{tj} \end{bmatrix} < 0.$$

Esto contradice el vector de signatura $(1, 1, \ldots, 1, -1)$ de la matriz $SA^{-1}S$ (ver Teorema 1.3.6). $\square$

Corolario 2.4.2. *Sea A una matriz invertible totalmente no positiva de tamaño $n \times n$ con $n \geq 3$. Se cumplen las siguientes condiciones.*

(i) Si $A_{1j} \neq 0$ para algún $j \geq 2$, entonces $A_{1t} \neq 0$ para todo $t \leq j$.

(ii) Si $c_{1j} \neq 0$ para algún $j \geq 2$, entonces $c_{1t} \neq 0$ cuando $2 \leq t \leq j$.

Demostración. Supongamos que $A_{1j} \neq 0$ para un $j \geq 2$. Supongamos por contradicción que $A_{1t} = 0$ para algún $t \geq j$. Como A es totalmente no positiva, la matriz $SA^{-1}S$ es una matriz signo-regular con vector de signatura $\varepsilon = (1, 1, \ldots, -1)$. Como $A_{1t} = 0$, existe un $k > 1$ tal que $A_{kt} \neq 0$. Pero entonces el siguiente determinante

$$\det \begin{bmatrix} A_{1t} & A_{1j} \\ A_{kt} & A_{kj} \end{bmatrix} = -A_{kt}A_{ij} < 0$$

correspondiente a una submatriz de $SA^{-1}S$, donde $t < j$ y $1 < k \leq n$, contradice el vector de signatura de $SA^{-1}S$, porque el único menor negativo es el último y $n > 2$.

(ii) Dado que A es una matriz totalmente no positiva, $a_{1t} \neq 0$ para todo $t \geq 2$ (ver parte 1 del Teorema 2.4.4). Luego, usando la parte (i) de este corolario, concluimos que $c_{1t} = a_{1t}A_{1t} \neq 0$ siempre que $2 \leq t \leq j$. □

En el siguiente teorema mostramos como son la primera fila y la segunda columna de la matriz combinada no negativa de una matriz totalmente no positiva.

Teorema 2.4.7. *Sea A una matriz invertible totalmente no positiva de tamaño $n \times n$ con $n \geq 3$. Si $C(A)$ es no negativa, entonces la primera fila de $C(A)$ es $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ y la segunda columna es $(1, 0, \ldots, 0)^T$.*

Demostración. Nuevamente, dado que A es una matriz totalmente no positiva, $a_{1t} \neq 0$ para todo $t \geq 2$. Más aún, $A_{13} = A_{15} = \cdots = A_{1,2k+1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \frac{n-1}{2}$ por el Teorema 2.4.6 y $A_{1j} = 0$ para $j = 3, 4, \ldots, n$ por la Proposición 2.4.4. Luego, el teorema es cierto porque $C(A)$ es doblemente estocástica y $c_{11} = 0$. □

Ahora podemos presentar el teorema principal sobre matrices combinadas de matrices totalmente no positivas. Vamos a probar que no existe ninguna matriz invertible totalmente no positiva de tamaño $n \times n$ con $n \geq 3$, tal que su matriz combinada sea no negativa.

Teorema 2.4.8. *Sea A una matriz invertible totalmente no positiva de tamaño $n \times n$ con $n \geq 3$. Se cumple que $C(A)$ no es no negativa.*

Demostración. Trabajemos por contradicción y supongamos que existe una matriz invertible totalmente no positiva A de tamaño $k \times k$, con $k \geq 3$ y tal que $C(A) \geq 0$. Por el Teorema 2.4.7 sabemos la estructura de la primera fila y la segunda columna de $C(A)$. Observemos que en la primera columna el primer elemento es $c_{11} = 0$. Dado que $C(A)$ es no negativa y por tanto doblemente estocástica, debe existir un índice $t > 1$ tal que $c_{t1} \neq 0$, y por tanto $A_{t1} \neq 0$. Por el Teorema 2.4.7 y por la parte 1 del Teorema 2.4.4 se cumple que $A_{t2} = 0$, además $A_{12} \neq 0$ por el Teorema 2.4.7. Luego

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{t1} & A_{t2} \end{bmatrix} < 0.$$

Esto contradice el vector signatura de $SA^{-1}S$ (ver Teorema 1.3.6). □

Finalmente, determinamos que clase de matrices totalmente no positivas de tamaño 2×2 tienen su matriz combinada no negativa.

Teorema 2.4.9. *Considere la matriz totalmente no positiva de tamaño* 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

donde a, b, c, d *son números no negativos. Se cumple que* $C(A) \geq 0$ *si y sólo si por lo menos uno de los elementos* a *o* d *es cero. En este caso,* $C(A) = J$.

Demostración. El cálculo de la matriz combinada produce

$$C(A) = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} ad & -cb \\ -cb & ad \end{bmatrix}.$$

Dado que $\det A < 0$ y que $ad \geq 0$, se tiene que $C(A) \geq 0$ si y sólo si $ad = 0$. En este caso, $\det A = -bc$ y $C(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. □

Corolario 2.4.3. *Si* A *es una matriz* $n \times n$ *totalmente no positiva e invertible,* $C(A)$ *es no negativa si, y sólo si* $n = 2$ *y* $a_{11}a_{22} = 0$.

En resumen, entre todas las matrices totalmente no positivas, sólamente las anti-triangulares de tamaño 2×2 tienen su matriz combinada no negativa.

2.5. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la no negatividad de la matriz combinada de algunas clases de matrices. Presentamos a continuación los principales resultados del capítulo.

Hemos obtenido varios resultados interesantes. La matriz combinada de una matriz invertible de tamaño 2×2 es no negativa cuando el producto de todos sus elementos es menor o igual a cero (Proposición 2.2.3). La matriz combinada de matrices triangulares es siempre no negativa pues coincide con la matriz identidad (Proposición 2.2.2). También se obtiene una matriz combinada no negativa con matrices semejantes por permutación a matrices triangulares (Proposición 2.2.1) como, por ejemplo, para matrices anti-triangulares, para las que se obtiene la matriz anti-diagonal J. Mostramos además un ejemplo (Ejempo 2.2.1) de matrices no triangulares, de hecho son matrices irreducibles, tales que su matriz combinada es también la matriz identidad.

Hemos obtenido que, en algunos casos, la única matriz combinada no negativa que se puede obtener es la matriz identidad. Esto ocurre, por ejemplo, con matrices combinadas de M–matrices (Teorema 2.3.2). Por el contrario, se ha obtenido que la matriz combinada de una G–matriz es no negativa cuando lo son las dos matrices diagonales que la definen (Teorema 2.3.1) dando lugar a matrices combinadas no negativas interesantes (Ejemplo 2.3.1). De igual forma hemos obtenido ejemplos de H–matrices con matriz combinada no negativa distinta de la matriz identidad (Ejemplo 2.3.3).

Sobre matrices totalmente positivas (totalmente no negativas) y matrices totalmente negativas (totalmente no positivas) se obtiene una matriz combinada no negativa en muy pocos casos. La matriz combinada de una matriz totalmente positiva o totalmente negativa nunca es no negativa (Teorema 2.4.1). La matriz combinada de una matriz totalmente no negativa es no negativa solamente cuando es igual a la matriz identidad, (Teorema 2.4.5). Finalmente, la matriz combinada de una matriz totalmente no positiva de orden mayor o igual a 3 tampoco es no negativa (Teorema 2.4.8) y sólo las matrices anti-triangulares de tamaño 2×2 tienen matriz combinada no negativa (Teorema 2.4.9).

Capítulo 3

Matrices combinadas de matrices signo-regulares

3.1. Introducción

Cuando una matriz invertible A de tamaño $n \times n$ es signo-regular, todos sus menores de orden k, $k \leq n$, tienen el mismo signo, signo que puede variar cuando varía k [12]. Las matrices signo-regulares tienen diferentes aplicaciones, algunas de ellas pueden verse en [1, 39, 49]. El interés de las matrices invertibles signo-regulares proviene de su caracterización como aplicaciones lineales que disminuyen la variación de signo en las componentes consecutivas del vector [12].

En este capítulo determinamos cuales características de las matrices signo-regulares determinan que su matriz combinada sea no negativa. Obtuvimos como resultado, que ello está determinado por las coordenadas de su vector de signatura. La siguiente tarea fue determinar cómo deben ser las coordenadas de este vector, para que la matriz combinada sea no negativa.

El capítulo está organizado de la siguiente forma. En la segunda sección tenemos conceptos básicos y algunos resultados previos. Aquí se han enunciado algunos lemas y teoremas que nos ayudarán a escribir las pruebas de los resultados principales. En el caso de lemas y teoremas ya conocidos, sólo hemos escrito el enunciado con su referencia. En los casos de lemas nuevos, hemos presentado sus respectivas pruebas. En la tercera sección presentamos los resultados principales del capítulo y terminamos con la sección 4, donde aparecen nuestras conclusiones.

Se hace uso de algunos resultados previos fundamentales. Se usa ampliamente el teorema que permite obtener otra matriz signo-regular a partir de la inversa de una matriz signo-regular, Teorema 3.2.4 [1]. Otro resultado de gran uso es el lema que describe la estructura de una matriz signo-regular a partir de la segunda componente de su vector de signatura, Lema 3.2.3 [39].

Formulamos algunos lemas que son esenciales y se usan a lo largo de todo el capítulo, como el que relaciona las matrices combinadas de matrices signo-regulares con las matrices que tienen patrón de signos "checkerboard", Lema 3.2.1, el que describe el patrón de signos de la matriz combinada de una matriz signo-regular, Lema 3.2.2, los que permiten expresar la matriz combinada como producto de Hadamard de dos matrices signo-regulares Lema 3.2.5 y Lema 3.2.6. Se agregan otros lemas más, relacionados con patrones de ceros de la matriz combinada en situaciones específicas, Lema 3.3.1 y Lema 3.3.2.

3.2. Conceptos básicos y resultados previos

En esta sección vamos a enunciar algunos conceptos básicos y algunos lemas y teoremas que nos ayudarán a formular los resultados de este capítulo. Ahora analizamos algunos aspectos de la definición de la matriz combinada. De la definición de matriz combinada, $C(A) = c_{ij}$, de una matriz invertible A (ver Definición 1.4.1) se deduce que,

$$c_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}.$$

Como se puede observar, el signo de los elementos c_{ij} está determinado por $(-1)^{i+j}$ y por el producto $a_{ij}A_{ij}\frac{1}{\det(A)}$. Podemos considerar dos casos.

1. Cuando $a_{ij}A_{ij}\frac{1}{\det(A)} \geq 0$,

$$\begin{array}{lll} c_{ij} \geq 0 & \text{si, y sólo si} & i+j = 2k, k \in \mathbb{N} \\ c_{ij} \leq 0 & \text{si, y sólo si} & i+j = 2k+1, k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

2. Cuando $a_{ij}A_{ij}\frac{1}{\det(A)} \leq 0$,

$$\begin{array}{lll} c_{ij} \geq 0 & \text{si, y sólo si} & i+j = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ c_{ij} \leq 0 & \text{si, y sólo si} & i+j = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Si A es una matriz cualquiera, los signos de c_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ pueden variar sin seguir ningún patrón definido. En cambio, si A es una matriz signo-regular con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, los signos de $C(A)$ siguen un patrón determinado.

Como se verá a continuación, las componentes $\varepsilon_1, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ del vector signatura de A, desempeñan un importante papel en la determinación de las condiciones que debe satisfacer la matriz A, para que su matriz combinada $C(A)$ sea no negativa.

Lema 3.2.1. *Si A es una matriz no singular signo-regular de tamaño $n \times n$, $n \geq 3$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, entonces $C(A)$ o $-C(A)$ tiene un patrón signos "checkerboard".*

Demostración. La prueba es casi directa. Podemos dividir todas las matrices signo-regulares con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, $n \geq 3$, en dos clases, una primera clase donde $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 1$, y una segunda donde $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = -1$. Esto plantea la existencia de dos casos.

1. Si $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 1$, se tiene $c_{ij} \geq 0$ para todo $i + j = 2k$ y $c_{ij} \leq 0$ para todo $i + j = 2k + 1$, $i, j \in N$, por la definición de $C(A)$. En este caso, la matriz $C(A)$ tiene un patrón de signos "checkerboard".

2. Si $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = -1$, se tiene $c_{ij} \geq 0$ para todo $i + j = 2k + 1$ y $c_{ij} \leq 0$ para todo $i + j = 2k$, $i, j \in N$ por la definición de $C(A)$. En este otro caso, $-C(A)$ tiene un patrón de signos "checkerboard". □

Para el caso de una matriz signo-regular de tamaño 2×2 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1. *Sea A una matriz invertible signo-regular de tamaño 2×2. $\det A > 0$ implica que $C(A)$ tiene patrón de signos "checkerboard" y $\det A < 0$ implica que $-C(A)$ tiene signo "checkerboard".*

Obsérvese que este corolario es cierto porque $n = 2$ implica $\varepsilon_1 = \varepsilon_{n-1}$, luego $\varepsilon_n = 1$ implica $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 1$ y por tanto $C(A)$ tiene patrón de signos "checkerboard". Por otro lado, $\varepsilon_n = -1$ implica $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = -1$ y por tanto $-C(A)$ tiene patrón de signos "checkerboard".

En ambos casos, la matriz combinada, $C(A)$, de una matriz signo-regular A, será no negativa cuando en lugar de cada elemento del tipo $c_{ij} \leq 0$ haya un cero, como establece en forma precisa el siguiente lema.

Lema 3.2.2. *Sea A una matriz no singular signo-regular de tamaño $n \times n$ con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.*

1. *Si $C(A)$ es no negativa y $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 1$, entonces $C(A)$ tiene el siguiente patrón de ceros*

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ * & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} \quad o \quad \begin{bmatrix} * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & * & 0 & \cdots & * & 0 \\ * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & 0 & \cdots & * & 0 \\ * & 0 & * & \cdots & 0 & * \end{bmatrix},$$

para $n = 2k$ y para $n = 2k-1$, respectivamente.

2. *Si $C(A)$ es no negativa y $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = -1$, entonces $C(A)$ tiene el siguiente patrón de ceros*

$$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ * & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ * & 0 & * & \cdots & * & 0 \end{bmatrix} \quad o \quad \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & \cdots & * & 0 \\ * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & * & 0 & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & * & 0 & \cdots & * & 0 \end{bmatrix},$$

para $n = 2k$ y para $n = 2k-1$, respectivamente.

*Los elementos marcados con * son no negativos.*

Demostración. Como A es una matriz signo-regular, se puede aplicar el Lema 3.2.1. La definición de $C(A) = [c_{ij}]$ (1.4.1) determina que $\operatorname{sign}(c_{ij}) = (-1)^{i+j} \varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$. Los patrones de ceros de $C(A)$ y $-C(A)$ se generan porque $C(A) \geq 0$. $\square$

En el Lema 3.2.1 las matrices signo-regulares con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ se separan en dos clases, según el valor del producto de las componentes $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ del vector de signatura. El valor que tenga este producto (1 ó -1) determina dos patrones de signos distintos en la matriz combinada. El siguiente lema, separa nuevamente estas matrices en otras dos clases, según el valor de la segunda componente de sus vectores de signatura.

Lema 3.2.3. *(Lema 7 de [39]) Sea A una matriz no singular signo-regular de tamaño $n \times n$ con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.*

1. *Si* $\varepsilon_2 = 1$, *entonces*

   a) $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \ldots, a_{nn} \neq 0,$

   b) $a_{ij} = 0 \quad y \quad i > j \quad \Rightarrow a_{tl} = 0, \quad$ *para todo* $\quad t \geq i \quad y \quad l \leq j,$

   c) $a_{ij} = 0 \quad y \quad i < j \quad \Rightarrow a_{tl} = 0, \quad$ *para todo* $\quad t \leq i \quad y \quad l \geq j.$

2. *Si* $\varepsilon_2 = -1$, *entonces*

   a) $a_{1n} \neq 0, a_{2,n-1} \neq 0, \ldots, a_{n1} \neq 0,$

   b) $a_{ij} = 0 \quad y \quad j > n-i+1 \Rightarrow a_{tl} = 0, \quad$ *para todo* $\quad t \geq i \quad y \quad l \geq j,$

   c) $a_{ij} = 0 \quad y \quad j < n-i+1 \Rightarrow a_{tl} = 0, \quad$ *para todo* $\quad t \leq i \quad y \quad l \leq j.$

Si en el Lema 3.2.3 $\varepsilon_2 = 1$, tenemos una matriz escalera tipo I

$$C(A) = \begin{bmatrix} c_{11} & * & \vert & 0 & \cdots & 0 \\ * & c_{22} & \ddots & \rule{1.5em}{0.4pt} & \ddots & \vdots \\ \rule{1.5em}{0.4pt} & \ddots & c_{33} & \ddots & \vert & 0 \\ 0 & \vert & \ddots & c_{44} & \ddots & \rule{1.5em}{0.4pt} \\ \vdots & \ddots & \rule{1.5em}{0.4pt} & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \vert & * & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad c_{ii} \neq 0.$$

Si en cambio, en el Lema 3.2.3 $\varepsilon_2 = -1$, tenemos una matriz escalera tipo II

$$C(A) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \vert & * & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \rule{2.5em}{0.4pt} & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \vert & \cdots & c_{n-3,4} & \cdots & \rule{1.5em}{0.4pt} \\ \rule{1.5em}{0.4pt} & \cdots & c_{n-2,3} & \cdots & \vert & 0 \\ * & c_{n-1,2} & \cdots & \rule{2.5em}{0.4pt} & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & * & \vert & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad c_{i,n-i+1} \neq 0.$$

Hemos planteado nuestro problema, determinar bajo qué condiciones la matriz combinada de una matriz signo-regular es no negativa. Poder deducir la estructura de la matriz combinada de este tipo de matrices sería un paso de avance hacia la solución de este problema. En general, deducir la estructura de la matriz combinada de matrices de tamaño $n \times n$, no es tarea fácil. El Lema 3.2.3 hace un aporte a la solución de nuestro problema.

Permite hacer una clasificación de las matrices signo-regulares, según el valor de la segunda componente de su vector de signatura. Según este criterio, tenemos matrices escalera tipo I, cuando $\varepsilon_2 = 1$ y matrices escalera tipo II, cuando $\varepsilon_2 = -1$.

Estableciendo las restricciones adecuadas, como se verá más adelante, es posible deducir la estructura del producto de Hadamard de dos matrices escalera signo-regulares. Ahora surge una interesante pregunta, ¿podemos utilizar este hecho para resolver el problema planteado? Para mostrar que la respuesta a esta pregunta es afirmativa, primero hay que sortear algunas dificultades, establecer algunas restricciones y plantear algunas equivalencias.

Sea A una matriz signo-regular. Recordemos que la matriz combinada $C(A)$ es el producto de Hadamard

$$C(A) = [c_{ij}] = A \circ (A^{-1})^T = \left[\frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}\right].$$

La primera dificultad que se presenta, es que cuando A es una matriz signo-regular, la matriz $(A^{-1})^T$ no lo es. Un teorema tomado de [1] nos hace un aporte para comenzar a superar este inconveniente.

Teorema 3.2.4 (Teorema 3.3 de [1]). *Si A es una matriz no singular signo-regular con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, entonces la matriz $SA^{-1}S$ es también signo-regular y las componentes de su vector de signatura satisfacen*

$$\varepsilon_i(SA^{-1}S) = \varepsilon_n \varepsilon_{n-i}$$

con la convención de que $\varepsilon_j = 1$ cuando $j = 0$.

Este teorema nos dice que si A es una matriz signo-regular, entonces la matriz $SA^{-1}S$ también lo es. Además nos indica como construir su vector de signatura a partir del vector de signatura de A. Esto plantea otro interrogante, ¿cómo usar la matriz $SA^{-1}S$ para hallar la matriz combinada de A? Un asunto más a tomar en cuenta, es que la matriz combinada de A no es el producto Hadamard de la matriz A y su inversa, sino de la matriz A y la traspuesta de su inversa. El siguiente lema establece una relación entre $SA^{-1}S$ y $S(A^{-1})^TS$.

Lema 3.2.5. *Sea A una matriz no singular. Si la matriz $SA^{-1}S$ es signo-regular de tamaño $n \times n$, entonces $S(A^{-1})^TS$ es también signo-regular y tiene el mismo vector de signatura que $SA^{-1}S$.*

Demostración. Sea $SA^{-1}S$ una matriz signo-regular de tamaño $n \times n$. Por ser $S = \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, (-1)^{n-1})$, se tiene que $S = S^T$, luego $S(A^{-1})^TS =$

$S^T(A^{-1})^T S^T = (SA^{-1}S)^T$. Las submatrices de $S(A^{-1})^T S$ de tamaño $k \times k$, $k \leq n$ son las traspuestas de las de $SA^{-1}S$. En consecuencia, las matrices $S(A^{-1})^T S$ y $SA^{-1}S$ tienen el mismo vector signatura, porque $\det(B) = \det(B^T)$ para toda B no singular. $\square$

Hasta ahora tenemos que la matriz $S(A^{-1})^T S$ es signo-regular con el mismo vector de signatura que $SA^{-1}S$, que a su vez se construye a partir del vector de signatura de A. Aún nos queda una pregunta por contestar, ¿cómo podemos usar la matriz signo-regular $S(A^{-1})^T S$ para deducir la estructura de $C(A)$ cuando $C(A)$ es no negativa? El siguiente lema nos muestra que efectivamente, si $C(A)$ es no negativa, es posible deducir su estructura usando la matriz $S(A^{-1})^T S$.

Lema 3.2.6. *Sea A una matriz no singular signo-regular de tamaño $n \times n$ con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ y sea S la matriz (1.1) dada en la página 5.*

1. *Si $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 1$ y $C(A) \geq 0$, entonces $C(A) = A \circ (SA^{-T}S)$.*
2. *Si $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = -1$ y $C(A) \geq 0$, entonces $C(A) = -(A \circ (SA^{-T}S))$.*

Demostración. 1: Denotemos por c_{ij} las entradas de $C(A)$ y por m_{ij} las entradas de $A \circ (SA^{-T}S)$. Se cumple que

$$m_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{si} \quad i + j = 2k, \\ -c_{ij} & \text{si} \quad i + j = 2k - 1, \end{cases}$$

para algún $k \in \mathbb{N}$. Dado que $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 1$ y $C(A) \geq 0$, por el Lema 3.2.2, $c_{ij} = 0$ si $i + j = 2k - 1$, por tanto, $c_{ij} = m_{ij}$ para todo i, j.

2: Razonando en forma similar, $c_{ij} = 0$ si $i+j = 2k$, por tanto, $-c_{ij} = m_{ij}$ para todo i, j. $\square$

3.3. No negatividad de matrices combinadas

En esta sección se presentan los resultados principales de este capítulo. Aquí estudiamos bajo que condiciones la matriz combinada de una matriz signo-regular es no negativa. Primero presentamos algunos lemas que nos facilitarán la redacción de las pruebas. Luego se construye una tabla con todos los casos que se presentan y finalmente se elaboran pruebas detalladas de todos los teoremas con sus respectivos casos.

Si A es una matriz signo-regular con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, el valor del producto de las componentes $\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ determina un patrón específico de signos en su matriz combinada. Por otra parte, el valor de ε_2 en los vectores de signatura de las matrices A y $S(A^{-1})^T S$ nos permite deducir, en muchos casos, la estructura del producto $A \circ S(A^{-1})^T S$. A modo de ejemplo, el producto de dos matrices escalera del mismo tipo, es otra matriz escalera de igual tipo. En realidad, la no negatividad de la matriz combinada de una matriz signo-regular, depende de unas pocas componentes de su vector de signatura.

Los resultados de este capítulo pueden no ser aplicables cuando $n \leq 3$, debido a los valores de las coordenadas del vector de signatura.

Lema 3.3.1. *Sea A una matriz no singular signo-regular de tamaño $n \times n$ con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Sea la matriz combinada $C(A) \geq 0$. Si $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$, entonces $c_{ij} = 0$ para cada uno de los siguientes subconjuntos de índices i, j:*

1. $j > i$ *y* $j > n - i + 1$.
2. $j > i$ *y* $j < n - i + 1$.
3. $j < i$ *y* $j > n - i + 1$.
4. $j < i$ *y* $j < n - i + 1$.

Demostración. Este teorema consta de ocho partes, debemos probar que el lema se cumple para los cuatro subconjuntos de índices en el caso $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$ y que también se cumple para los mismos subconjuntos en el caso $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$.

Consideremos el caso $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$. Observe que $C(A) = A \circ S(A^{-1})^T S$, o bien, $C(A) = -(A \circ S(A^{-1})^T S)$ por el Lema 3.2.6 y que $\varepsilon_2(S(A^{-1})^T S) = -1$ por el teorema (3.2.4).

Parte 1.
En esta parte se va a probar que $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j > i$ y $j > n - i + 1$. Se han marcado estos elementos con $\bullet$ en la matriz combinada $C(A)$.

$$C(A) = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & \bullet \\ * & * & \ddots & * & \vdots & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \bullet & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & \ddots & \bullet & \bullet \\ * & * & \cdots & * & * & * & \bullet \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Ahora para obtener una contradicción supongamos que existe algún elemento $c_{ij} \neq 0$ con $j > i$ y $j > n-i+1$. Como $c_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij} \neq 0$ y $A_{ij} \neq 0$ por la definición de $C(A)$. Dado que $C(A) \geq 0$, se tiene que $c_{i,j-1} = 0$ por el Lema 3.2.2, lo que a su vez implica que $a_{i,j-1} = 0$ o $A_{i,j-1} = 0$. Sin embargo $a_{i,j-1}$ no puede ser cero, porque A es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = 1$. Si $a_{i,j-1}$ fuera cero implicaría que $a_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 1.c, lo que contradice $a_{ij} \neq 0$.

Continuando con esta misma parte, tenemos que $A_{i,j-1}$ no puede ser cero porque $S(A^{-1})^T S$ es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = -1$. Si $A_{i,j-1}$ fuera cero implicaría que $A_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 2.b, lo que contradice $A_{ij} \neq 0$. Por tanto, $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j > i$ y $j > n-i+1$.

Parte 2.
En esta parte se va a probar que $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j > i$ y $j < n-i+1$. Se han marcado estos elementos con $\bullet$ en la matriz combinada $C(A)$.

$$C(A) = \begin{bmatrix} * & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & * \\ * & * & \cdots & \bullet & \bullet & * & * \\ * & * & \ddots & \bullet & \vdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & * & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & \ddots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Ahora para obtener una contradicción supongamos que existe algún elemento $c_{ij} \neq 0$ con $j > i$ y $j > n-i+1$. Como $c_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij} \neq 0$ y $A_{ij} \neq 0$ por la definición de $C(A)$. Dado que $C(A) \geq 0$, se tiene que $c_{i+1,j} = 0$ por el Lema 3.2.2, lo que a su vez implica que $a_{i+1,j} = 0$ o $A_{i+1,j} = 0$. Sin embargo $a_{i+1,j}$ no puede ser cero, porque A es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = 1$. Si $a_{i+1,j}$ fuera cero implicaría que $a_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 1.c, lo que contradice $a_{ij} \neq 0$.

Continuando con esta misma parte, tenemos que $A_{i+1,j}$ no puede ser cero porque $S(A^{-1})^T S$ es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = -1$. Si $A_{i+1,j}$ fuera cero implicaría que $A_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 2.c, lo que contradice $A_{ij} \neq 0$. Por tanto, $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j > i$ y $j < n-i+1$.

Parte 3.
En esta parte se va a probar que $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j < i$ y $j > n-i+1$. Se han marcado estos elementos con $\bullet$ en la matriz combinada $C(A)$.

$$C(A) = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \ddots & * & \vdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & * & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \bullet & \ddots & * & * \\ * & * & \cdots & \bullet & \bullet & * & * \\ * & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & * \end{bmatrix}.$$

Ahora para obtener una contradicción supongamos que existe algún elemento $c_{ij} \neq 0$ con $j < i$ y $j > n - i + 1$, Como $c_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij} \neq 0$ y $A_{ij} \neq 0$ por la definición de $C(A)$. Dado que $C(A) \geq 0$, se tiene que $c_{i-1,j} = 0$ por el Lema 3.2.2, lo que a su vez implica que $a_{i-1,j} = 0$ o $A_{i-1,j} = 0$. Sin embargo $a_{i-1,j}$ no puede ser cero, porque A es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = 1$. Si $a_{i-1,j}$ fuera cero implicaría que $a_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 1.b, lo que contradice $a_{ij} \neq 0$.

Continuando con esta misma parte, tenemos que $A_{i-1,j}$ no puede ser cero porque $S(A^{-1})^T S$ es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = -1$. Si $A_{i-1,j}$ fuera cero implicaría que $A_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 2.b, lo que contradice $A_{ij} \neq 0$. Por tanto, $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j < i$ y $j > n - i + 1$.

Parte 4.
En esta parte se va a probar que $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j < i$ y $j < n - i + 1$. Se han marcado estos elementos con $\bullet$ en la matriz combinada $C(A)$.

$$C(A) = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & * \\ \bullet & * & \cdots & * & * & * & * \\ \bullet & \bullet & \ddots & * & \vdots & * & * \\ \bullet & \bullet & \cdots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & * & * & * \\ \bullet & \bullet & \cdots & * & \ddots & * & * \\ \bullet & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Ahora para obtener una contradicción supongamos que existe algún elemento $c_{ij} \neq 0$ con $j < i$ y $j < n - i + 1$. Como $c_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij} \neq 0$ y $A_{ij} \neq 0$ por la definición de $C(A)$. Dado que $C(A) \geq 0$, se tiene que $c_{i,j+1} = 0$ por el Lema 3.2.2, lo que a su vez implica que $a_{i,j+1} = 0$ o $A_{i,j+1} = 0$. Sin embargo $a_{i,j+1}$ no puede ser cero, porque A es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = 1$. Si $a_{i,j+1}$ fuera cero implicaría que $a_{ij} = 0$ por el

Lema 3.2.3 parte 1.b, lo que contradice $a_{ij} \neq 0$.

Continuando con esta misma parte, tenemos que $A_{i,j+1}$ no puede ser cero porque $S(A^{-1})^T S$ es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = -1$. Si $A_{i,j+1}$ fuera cero implicaría que $A_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 2.c, lo que contradice $A_{ij} \neq 0$. Por tanto, $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j < i$ y $j < n - i + 1$.

Ahora veamos el segundo caso, que tiene también 4 partes al igual que el anterior. Consideremos el caso $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$. Observe que $C(A) = A \circ (S(A^{-1})^T)S$ o $C(A) = -(A \circ (S(A^{-1})^T)S)$ por el Lema 3.2.6 y que $\varepsilon_2(S(A^{-1})^T)S) = 1$ por el Teorema (3.2.4).

Parte 1.
En esta parte se va a probar que $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j > i$ y $j > n - i + 1$. Se han marcado estos elementos con $\bullet$ en la matriz combinada $C(A)$.

$$C(A) = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & \bullet \\ * & * & \ddots & * & \vdots & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \bullet & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & \ddots & \bullet & \bullet \\ * & * & \cdots & * & * & * & \bullet \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Ahora para obtener una contradicción supongamos que existe algún elemento $c_{ij} \neq 0$ con $j > i$ y $j > n - i + 1$. Como $c_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij} \neq 0$ y $A_{ij} \neq 0$ por la definición de $C(A)$. Dado que $C(A) \geq 0$, se tiene que $c_{i,j-1} = 0$ por el Lema 3.2.2, lo que a su vez implica que $a_{i,j-1} = 0$ o $A_{i,j-1} = 0$. Sin embargo $A_{i,j-1}$ no puede ser cero, porque $SA^{-T}S$ es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = 1$. Si $A_{i,j-1}$ fuera cero implicaría que $A_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 1.c, lo que contradice $A_{ij} \neq 0$.

Además, tenemos que $a_{i,j-1}$ no puede ser cero porque A es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = -1$. Si $a_{i,j-1}$ fuera cero implicaría que $a_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 2.b, lo que contradice $a_{ij} \neq 0$. Por tanto, $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j > i$ y $j > n - i + 1$.

Parte 2.
En esta parte se va a probar que $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j > i$ y $j < n - i + 1$. Se han marcado estos elementos con $\bullet$ en la matriz combinada $C(A)$.

$$C(A) = \begin{bmatrix} * & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & * \\ * & * & \cdots & \bullet & \bullet & * & * \\ * & * & \ddots & \bullet & \vdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & * & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & \ddots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Ahora para obtener una contradicción supongamos que existe algún elemento $c_{ij} \neq 0$ con $j > i$ y $j > n - i + 1$. Como $c_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij} \neq 0$ y $A_{ij} \neq 0$ por la definición de $C(A)$. Dado que $C(A) \geq 0$, se tiene que $c_{i+1,j} = 0$ por el Lema 3.2.2, lo que a su vez implica que $a_{i+1,j} = 0$ o $A_{i+1,j} = 0$. Sin embargo $A_{i+1,j}$ no puede ser cero, porque $SA^{-T}S$ es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = 1$. Si $A_{i+1,j}$ fuera cero implicaría que $A_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 1.c, lo que contradice $A_{ij} \neq 0$.

Adicionalmente, tenemos que $a_{i+1,j}$ no puede ser cero porque A es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = -1$. Si $a_{i+1,j}$ fuera cero implicaría que $a_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 2.c, lo que contradice $a_{ij} \neq 0$. Por tanto, $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j > i$ y $j < n - i + 1$.

Parte 3.
En esta parte se va a probar que $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j < i$ y $j > n - i + 1$. Se han marcado estos elementos con $\bullet$ en la matriz combinada $C(A)$.

$$C(A) = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \ddots & * & \vdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & * & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \bullet & \ddots & * & * \\ * & * & \cdots & \bullet & \bullet & * & * \\ * & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & * \end{bmatrix}.$$

Ahora para obtener una contradicción supongamos que existe algún elemento $c_{ij} \neq 0$ con $j < i$ y $j > n - i + 1$, Como $c_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij} \neq 0$ y $A_{ij} \neq 0$ por la definición de $C(A)$. Dado que $C(A) \geq 0$, se tiene que $c_{i-1,j} = 0$ por el Lema 3.2.2, lo que a su vez implica que $a_{i-1,j} = 0$ o $A_{i-1,j} = 0$. Sin embargo $A_{i-1,j}$ no puede ser cero, porque $SA^{-T}S$ es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = 1$. Si $A_{i-1,j}$ fuera cero implicaría que $A_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 1.b, lo que contradice $A_{ij} \neq 0$.

Por otro lado, tenemos que $a_{i-1,j}$ no puede ser cero porque A es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = -1$. Si $a_{i-1,j}$ fuera cero implicaría que $a_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 2.b, lo que contradice $a_{ij} \neq 0$. Por tanto, $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j < i$ y $j > n - i + 1$.

Parte 4.
En esta parte se va a probar que $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j < i$ y $j < n-i+1$. Se han marcado estos elementos con $\bullet$ en la matriz combinada $C(A)$.

$$C(A) = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & * \\ \bullet & * & \cdots & * & * & * & * \\ \bullet & \bullet & \ddots & * & \vdots & * & * \\ \bullet & \bullet & \cdots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & * & * & * \\ \bullet & \bullet & \cdots & * & \ddots & * & * \\ \bullet & * & \cdots & * & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Ahora para obtener una contradicción supongamos que existe algún elemento $c_{ij} \neq 0$ con $j < i$ y $j < n - i + 1$. Como $c_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij} \neq 0$ y $A_{ij} \neq 0$ por la definición de $C(A)$. Dado que $C(A) \geq 0$, se tiene que $c_{i,j+1} = 0$ por el Lema 3.2.2, lo que a su vez implica que $a_{i,j+1} = 0$ o $A_{i,j+1} = 0$. Sin embargo $A_{i,j+1}$ no puede ser cero, porque $SA^{-T}S$ es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = 1$. Si $A_{i,j+1}$ fuera cero implicaría que $A_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 1.b, lo que contradice $A_{ij} \neq 0$.

Más aún, tenemos que $a_{i,j+1}$ no puede ser cero porque A es una matriz signo-regular con $\varepsilon_2 = -1$. Si $a_{i,j+1}$ fuera cero implicaría que $a_{ij} = 0$ por el Lema 3.2.3 parte 2.c, lo que contradice $a_{ij} \neq 0$. Por tanto, $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j < i$ y $j < n - i + 1$. □

Lema 3.3.2. *Sea A una matriz invertible signo-regular de tamaño $n \times n$ con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ y sea $C(A) \geq 0$. Si $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$, $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$ y $n = 2k - 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $C(A)$ es diagonal o anti-diagonal.*

Demostración. Nótese que por lo menos un elemento de cada fila de $C(A)$ es positivo, porque $C(A)$ es doblemente estocástica. Primer caso. Considérese el caso $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$. Nótese que $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$ por el Teorema 3.2.4, y $C(A) = A \circ (SA^{-T}S)$ por el Lema 3.2.6. Además, los únicos elemento distinto de cero en la primera fila de $C(A)$ pueden ser $c_{11} \neq 0$ o $c_{1n} \neq 0$ por el Lema 3.3.1.

Primero, considérese $c_{1n} \neq 0$. Vamos a probar que $C(A) = J$. En este caso $c_{1n} \neq 0$ implica $a_{1n} \neq 0$. Dado que $\varepsilon_2 = 1$ y $a_{1n} \neq 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A, ocurre que $a_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq j$.

Por otro lado, por el Lema 3.2.2, tenemos $c_{i,n-i} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$. En consecuencia ocurre que $A_{i,n-i} = 0$, para todo $i < \frac{n+1}{2}$, porque $a_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq j$.

Aún más, como $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$ y $A_{i,n-i} = 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz $SA^{-T}S$, ocurre que, $A_{ii} = 0$ y por tanto $c_{ii} = 0$ para todo i tal que $1 \leq i < \frac{n+1}{2}$. Además, considerando que $c_{1n} \neq 0$, por el Lema 3.2.2, $c_{i,n-i+2} = 0$ para todo $i > 1$. Por tanto, $A_{i,n-i+2} = 0$ para todo i tal que $1 < i \leq \frac{n+1}{2}$, porque $a_{ij} \neq 0$ para todo $i < j$.

Considerando que $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$ y $A_{i,n-i+2} = 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz $SA^{-T}S$, ocurre que $A_{ii} = 0$ y en consecuencia $c_{ii} = 0$ para todo i tal que $\frac{n+1}{2} < i \leq n$.

En conclusión, $c_{ii} = 0$ para todo $i \neq \frac{n+1}{2}$ y por tanto, por el Lema 3.3.1, $C(A) = J$.

Segundo, considérese ahora $c_{11} \neq 0$. Vamos a probar que $C(A) = I$. En este caso $c_{11} \neq 0$ implica $A_{11} \neq 0$. Dado que $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$ y $A_{11} \neq 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz $SA^{-T}S$, ocurre que $A_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq n - j + 1$.

Por el Lema 3.2.2, $c_{i,i+1} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, en consecuencia $a_{i,i+1} = 0$ para todo $i < \frac{n+1}{2}$, porque $A_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq n - j + 1$.

Aún más, como $\varepsilon_2 = 1$ y $a_{i,i+1} = 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A, ocurre que $a_{i,n-i+1} = 0$, y por tanto, $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo i tal que $1 \leq i < \frac{n+1}{2}$.

Además, considerando que $c_{11} \neq 0$, tenemos $c_{i,i-1} = 0$ para todo $i > 1$, por el Lema 3.2.2. Por tanto, $a_{i,i-1} = 0$ para todo i tal que $1 < i < n-j+1$, porque $A_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq n - j + 1$.

Considerando que $\varepsilon_2 = 1$ y $a_{i,i-1} = 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A, ocurre que $a_{i,n-i+1} = 0$ y en consecuencia, $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo i tal que $\frac{n+1}{2} < i \leq n$.

En conclusión, $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo $i \neq \frac{n+1}{2}$, y por tanto, $C(A) = I$ por el Lema 3.3.1.

Segundo caso. Considérese el caso $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$. Nótese que $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = 1$ por el Teorema 3.2.4, y $C(A) = A \circ (SA^{-T}S)$ por el Lema 3.2.6. Además, el único elemento distinto de cero en la primera fila de $C(A)$

debe ser $c_{11} \neq 0$ o $c_{1n} \neq 0$ por el Lema 3.3.1.

Primero, considérese $c_{1n} \neq 0$. Vamos a probar que $C(A) = J$. En este caso $c_{1n} \neq 0$ implica $A_{1n} \neq 0$. Dado que $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = 1$ y $A_{1n} \neq 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz $SA^{-T}S$, ocurre que $A_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq j$.

Por otro lado, por el Lema 3.2.2, tenemos $c_{i,n-i} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$. En consecuencia ocurre que $a_{i,n-i} = 0$, para todo $i < \frac{n+1}{2}$, porque $A_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq j$.

Aún más, como $\varepsilon_2 = -1$ y $a_{i,n-i} = 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A, ocurre que, $a_{ii} = 0$ y por tanto $c_{ii} = 0$ para todo i tal que $1 \leq i < \frac{n+1}{2}$. Además, considerando que $c_{1n} \neq 0$, por el Lema 3.2.2, $c_{i,n-i+2} = 0$ para todo $i > 1$. Por tanto, $a_{i,n-i+2} = 0$ para todo i tal que $1 < i \leq \frac{n+1}{2}$, porque $A_{ij} \neq 0$ para todo $i < j$.

Considerando que $\varepsilon_2 = -1$ y $a_{i,n-i+2} = 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A, ocurre que $a_{ii} = 0$ y en consecuencia $c_{ii} = 0$ para todo i tal que $\frac{n+1}{2} < i \leq n$.

En conclusión, $c_{ii} = 0$ para todo $i \neq \frac{n+1}{2}$ y por tanto, por el Lema 3.3.1, $C(A) = J$.

Segundo, considérese ahora $c_{11} \neq 0$. Vamos a probar que $C(A) = I$. En este caso $c_{11} \neq 0$ implica $a_{11} \neq 0$. Dado que $\varepsilon_2 = -1$ y $a_{11} \neq 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A, ocurre que $a_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq n - j + 1$.

Por el Lema 3.2.2, $c_{i,i+1} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, en consecuencia $A_{i,i+1} = 0$ para todo $i < \frac{n+1}{2}$, porque $a_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq n - j + 1$.

Aún más, como $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = 1$ y $a_{i,i+1} = 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz $SA^{-T}S$, ocurre que $A_{i,n-i+1} = 0$, y por tanto, $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo i tal que $1 \leq i < \frac{n+1}{2}$. Además, considerando que $c_{11} \neq 0$, tenemos $c_{i,i-1} = 0$ para todo $i > 1$, por el Lema 3.2.2. Por tanto, $A_{i,i-1} = 0$ para todo i tal que $1 < i < n - j + 1$, porque $a_{ij} \neq 0$ para todo $i \leq n - j + 1$.

Considerando que $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = 1$ y $A_{i,i-1} = 0$, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz $SA^{-T}S$, ocurre que $A_{i,n-i+1} = 0$ y en consecuencia, $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo i tal que $\frac{n+1}{2} < i \leq n$.

En conclusión, $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo $i \neq \frac{n+1}{2}$, y por tanto, $C(A) = I$ por el Lema 3.3.1. $\square$

Para analizar la no negatividad de la matriz combinada de una matriz no singular signo-regular A de tamaño $n \times n$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, vamos a considerar los casos de la Tabla 3.3. Aquí se resumen los principales resultados de este capítulo. En la tabla las matrices signo-regulares se dividen en clases, de acuerdo a cuatro criterios enlazados.

En el Lema 3.2.1 el producto de las componentes $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ del vector de signatura de A, determina si $C(A)$ tiene patrón de signos "checkerboard" o si es $-C(A)$ la que tiene patrón de signos checkerboard, según el valor del producto sea 1 ó -1. Por otro lado, el Lema 3.2.2, con la restricción $C(A) \geq 0$, nos permitió escribir la matriz combinada, $C(A)$, como el producto de dos matrices signo-regulares. Este lema establece que $C(A) = A \circ (S(A^{-1})^T S)$ si $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$ o $C(A) = -(A \circ (S(A^{-1})^T S))$ si $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$. Por estas razones, el primer nivel de clasificación de la tabla se basa en el valor de $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ y determina dos clases.

El Lema 3.2.3 divide las matrices signo-regulares en dos clases, según el valor de la segunda componente de su vector de signatura ε_2. Según este criterio las matrices combinadas de matrices signo-regulares se dividen en clases que dependen de los siguientes valores de ε_2 de las matrices A y $S(A^{-1})^T S$

- $\varepsilon_2(A) = 1 \quad \text{y} \quad \varepsilon_2(S(A^{-1})^T S) = 1$
- $\varepsilon_2(A) = -1 \quad \text{y} \quad \varepsilon_2(S(A^{-1})^T S) = -1$
- $\varepsilon_2(A) = 1 \quad \text{y} \quad \varepsilon_2(S(A^{-1})^T S) = -1$
- $\varepsilon_2(A) = -1 \quad \text{y} \quad \varepsilon_2(S(A^{-1})^T S) = 1$

Este es el segundo nivel de clasificación de la tabla, que como puede verse determina cuatro clases.

El tercer nivel de clasificación depende de si $n = 2k$, o $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Hay un cuarto nivel, que sólo aplica en algunos casos y depende de si los elementos a_{11} y a_{1n} tienen valor cero o distinto de cero.

A continuación presentamos los resultados principales. Enunciamos y demostramos un teorema para cada una de las 7 situaciones que se describen en la columna 2 de la Tabla 3.3. En cada teorema consideramos todos los casos que se presentan en la columna 3.

Teorema 3.3.3. ***(Caso A.1)*** *Sea A una matriz invertible signo-regular de tamaño $n \times n$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, tal que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$. Si $\varepsilon_2 = 1$ y $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$, entonces $C(A) \geq 0$ si y sólo si $C(A) = I$.*

A: $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$	A.1: $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$	$C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = I$
	A.2: $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$	$n = 2k$: $C(A)$ no es no negativa $n = 2k-1$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$
	A.3: $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$	$n = 2k$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = I$ $n = 2k-1$, $a_{1n} \neq 0$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$ $a_{1n} = 0$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = I$
	A.4: $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$	$n = 2k$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = I$ $n = 2k-1$, $a_{11} \neq 0$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = I$ $a_{11} = 0$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$
B: $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$	B.1: $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$	$C(A)$ no es no negativa
	B.2: $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$	$n = 2k$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$ $n = 2k-1$: $C(A)$ no es no negativa
	B.3: $\varepsilon_2\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$	$n = 2k$: $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$ $n = 2k-1$: $C(A)$ no es no negativa

Tabla 3.1: Matrices combinadas no negativas de matrices signo-regulares para $n \geq 4$. Si $n = 3$, sólo son posibles los casos $A.1$, $A.2$ y $B.3$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Está claro que si $C(A) = I$, entonces $C(A) \geq 0$.

($\Rightarrow$) Nótese que, por el Teorema 3.2.4, $SA^{-T}S$ es signo-regular, con $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = 1$, y $C(A) = A \circ (SA^{-T}S)$ por el Lema 3.2.6. Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$, por el Lema 3.2.2, $c_{i,i+1} = 0$, por tanto, $a_{i,i+1} = 0$ o $A_{i,i+1} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$. También, dado que $c_{j+1,j} = 0$, se tiene $a_{j+1,j} = 0$ o $A_{j+1,j} = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, n$. Aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A y a la matriz $SA^{-T}S$ ocurre que los únicos elementos distintos de cero de $C(A)$ están en la diagonal. Por otro lado, dado que $C(A)$ es no negativa, es doblemente estocástica, por tanto $C(A) = I$. $\square$

Nótese que, el caso A.1 contiene todas las matrices totalmente no negativas. En el capítulo 2 de esta memoria probamos que la única matriz combinada no negativa de una matriz totalmente no negativa es la matriz identidad (Teorema 2.4.1), que se corresponde con este resultado más general.

Teorema 3.3.4. ***(Caso A.2)*** *Sea A una matriz invertible signo-regular de tamaño $n \times n$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, tal que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ y $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$.*

1. *Si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $C(A)$ no es no negativa.*

2. *Si* $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$.

Demostración. 1. Para obtener una contradicción, asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$ y $n = 2k$, por el Lema 3.2.2 tenemos $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo $i \in N$.

Por otro lado, dado que A es signo-regular, con vector de signatura $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$, Por el Teorema 3.2.4 tenemos $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$. Por el Lema 3.2.6, $C(A) = A \circ (SA^{-T}S)$. Por tanto, aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A y a la matriz $SA^{-T}S$, ocurre que $a_{i,n-i+1} \neq 0$ y $A_{i,n-i+1} \neq 0$ y por tanto, $c_{i,n-i+1} \neq 0$ para todo $i \in N$. Esto contradice $c_{i,n-i+1} = 0$. Por tanto, $C(A)$ no es no negativa.

2. ($\Leftarrow$) Está claro que si $C(A) = J$, entonces $C(A) \geq 0$.

($\Rightarrow$) Asumamos que $C(A) \geq 0$. Nótese que $C(A) = A \circ (SA^{-T}S)$, por el Lema 3.2.6. Dado que A es signo-regular con $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$, entonces $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$ por el Teorema 3.2.4. Aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A y a la matriz $SA^{-T}S$, se tiene que $a_{i,n-i+1} \neq 0$ y $A_{i,n-i+1} \neq 0$, entonces $c_{i,n-i+1} \neq 0$ para todo $i \in N$.

Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$ y $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, por el Lema 3.2.2, $c_{i,n-i} = 0$, por tanto, $a_{i,n-i} = 0$ o $A_{i,n-i} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$. En forma similar $c_{i,n-i+2} = 0$, por tanto, $a_{i,n-i+2} = 0$ o $A_{i,n-i+2} = 0$ para todo $i = 2, 3, \ldots, n$. Aplicando nuevamente el Lema 3.2.3, se tiene $c_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $j \neq n - i + 1$.

Dado que $C(A) \geq 0$ es doblemente estocástica, se tiene, $C(A) = J$. $\square$

Teorema 3.3.5. ***(Caso A.3)*** *Sea* A *una matriz invertible signo-regular de tamaño* $n \times n$, *con vector de signatura* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, *tal que* $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$, $\varepsilon_2 = 1$ *y* $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$.

1. *Si* $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = I$.
2. *Si* $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ *y* $a_{1n} \neq 0$, *entonces* $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$.
3. *Si* $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ *y* $a_{1n} = 0$, *entonces* $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = I$.

Demostración. 1. ($\Leftarrow$) Está claro que $C(A) \geq 0$, porque es la matriz identidad.

($\Rightarrow$) Asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$, los elementos distintos de cero de $C(A)$ pueden estar solamente en la diagonal o en la antidiagonal por el Lema 3.3.1. Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$ y $n = 2k$, por el Lema 3.2.2, $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo $i \in N$. Por tanto, $C(A) = I$ porque $C(A) \geq 0$ es doblemente estocástica.

2. ($\Leftarrow$) Está claro que $C(A) \geq 0$, porque es la matriz J.

($\Rightarrow$) Asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$ y $n = 2k-1$, se deduce que $C(A)$ es una matriz diagonal o anti-diagonal por el Lema 3.3.2. Se tiene $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$ por el Teorema 3.2.4. Además, $A_{1n} \neq 0$ por el Lema 3.2.3 aplicado a la matriz $SA^{-T}S$. En vista de que $a_{1n} \neq 0$, se tiene, $c_{1n} \neq 0$. Se concluye que $C(A)$ es anti-diagonal. Dado que $C(A) \geq 0$ es doblemente estocástica, se tiene $C(A) = J$.

3. ($\Leftarrow$) La implicación es cierta porque $C(A) = I$.

($\Rightarrow$) Asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$ y $n = 2k-1$, se deduce que $C(A)$ es diagonal o anti-diagonal por el Lema 3.3.2. Dado que $a_{1n} = 0$ implica $c_{1n} = 0$, se tiene que $C(A)$ es diagonal. La condición de que $C(A) \geq 0$ es doblemente estocástica implica $C(A) = I$. □

Teorema 3.3.6. ***(Caso A.4)*** *Sea A una matriz invertible signo-regular de tamaño $n \times n$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, tal que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ y $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$.*

1. *Si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A)=I$.*

2. *Si $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ y $a_{11} \neq 0$, entonces $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = I$.*

3. *Si $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ y $a_{11} = 0$, entonces $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$.*

Demostración. 1. Similar a la demostración del caso 1 del Teorema 3.3.5.

2. ($\Leftarrow$) La implicación es cierta porque $C(A) = I$.

($\Rightarrow$) Asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$ y $n = 2k-1$, se deduce que $C(A)$ es diagonal o anti-diagonal por el Lema 3.3.2. Se tiene $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = 1$ por el Teorema 3.2.4. Esto implica $A_{11} \neq 0$ por el Lema 3.2.3. Dado que $a_{11} \neq 0$, se tiene $c_{11} \neq 0$. Se concluye que $C(A)$ es diagonal. Dado que $C(A) \geq 0$ es doblemente estocástica, se tiene $C(A) = I$.

3. ($\Leftarrow$) La implicación es cierta porque $C(A) = J$.

($\Rightarrow$) Asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$ y $n = 2k-1$, se deduce que $C(A)$ es diagonal o anti-diagonal por el Lema 3.3.2. Se tiene $a_{11} = 0$ y esto implica $c_{11} = 0$. Por tanto $C(A)$ es anti-diagonal. Dado que $C(A) \geq 0$ es doblemente estocástica, se concluye que $C(A) = J$. □

Teorema 3.3.7. ***(Caso B.1)***. *Sea A una matriz invertible signo-regular de tamaño $n \times n$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, tal que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$. Si $\varepsilon_2 = 1$ y $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$, entonces $C(A)$ no es no negativa.*

Demostración. Prueba por contradicción. Asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$, se tiene $c_{ii} = 0$ para todo $i \in N$ por el Lema 3.2.2. Dado que A es signo-regular con $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = 1$, se tiene $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = 1$ por el Teorema 3.2.4.

Además, $C(A) = -A \circ (SA^{-T}S))$ por el Lema 3.2.6. Aplicando el Lema 3.2.3 a la matriz A y a la matriz $SA^{-T}S$, se obtiene $c_{ii} \neq 0$ para todo $i \in N$. Esto contradice $c_{ii} = 0$. Por tanto $C(A)$ no es no negativa. □

Teorema 3.3.8. ***(Caso B.2)****. Sea A una matriz invertible signo-regular de tamaño $n \times n$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, tal que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$, $\varepsilon_2 = -1$ y $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$.*

1. *Si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$.*
2. *Si $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $C(A)$ no es no negativa.*

Demostración. 1. ($\Leftarrow$) La demostración es directa porque $C(A) = J$.

($\Rightarrow$) Asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que A es signo-regular con $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$, entonces $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$ por el teorema 3.2.4. Se tiene $C(A) = -A \circ (SA^{-T}S)$ por el Lema 3.2.6.

Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$ y $n = 2k$, se tiene $c_{i,n-i} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $c_{i,n-i+2} = 0$ para $i = 2, 3, \ldots, n$ por el Lema 3.2.2. Aplicando convenientemente el Lema 3.2.3 a la matriz A y a la matriz $SA^{-T}S$ se tiene $a_{ij} = 0$ o $A_{ij} = 0$, en consecuencia $c_{ij} = 0$ para todo $i, j \in N$ tal que $j \neq n - i + 1$. Dado que $C(A) \geq 0$ es doblemente estocástica, se tiene $C(A) = J$.

2. Para obtener una contradicción, asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$ y $n = 2k-1$, se tiene $c_{ii} = c_{i,n-i+1} = 0$ para todo $i \in N$ por el Lema 3.2.2. Además, dado que A es signo-regular con $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n = -1$, se tiene $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$ por el Teorema 3.2.4. Además $C(A) = -A \circ (SA^{-T}S)$ por el Lema 3.2.6.

Dado que $\varepsilon_2 = -1$ y $\varepsilon_2(SA^{-T}S) = -1$, se tiene $a_{i,n-i+1} \neq 0$ y $A_{i,n-i+1} \neq 0$ para todo $i \in N$ por el Lema 3.2.3. Por tanto, $c_{i,n-i+1} \neq 0$ para todo $i \in N$. Esto es una contradicción. Por tanto $C(A)$ no es no negativa. □

Teorema 3.3.9. ***(Caso B.3)****. Sea A una matriz invertible signo-regular de tamaño $n \times n$, con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, tal que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$, y $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$.*

1. *Si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $C(A) \geq 0 \Leftrightarrow C(A) = J$*
2. *Si $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $C(A)$ no es no negativa.*

Demostración. 1. ($\Leftarrow$) La implicación es cierta porque $C(A) = J$.

($\Rightarrow$) Asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$, se tiene $c_{ij} = 0$ para todo $i, j \in N$ siempre que $j \neq i$ y $j \neq n - i + 1$ por el Lema 3.3.1.

Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$ y $n = 2k$, se tiene $c_{ii} = 0$ para todo $i \in N$ por el Lema 3.2.2. En consecuencia $c_{ij} = 0$ para todo $i, j \in N$ con $j \neq n-i+1$. Dado que $C(A) \geq 0$ es doblemente estocástica, $C(A) = J$.

2. Para obtener una contradicción, asumamos que $C(A) \geq 0$. Dado que $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$ y $n = 2k - 1$, se tiene $c_{ii} = 0$ y $c_{i,n-i+1} = 0$ para todo $i \in N$ por el Lema 3.2.2. Sin embargo, dado que $\varepsilon_2(\varepsilon_{n-2}\varepsilon_n) = -1$, se concluye que $C(A) = 0$ por el Lema 3.3.1. Esto es una contradicción. Por tanto, $C(A)$ no es no negativa. $\square$

Nótese que el caso B.3 contiene a las matrices totalmente no positivas. En el Teorema 2.4.9 del Capítulo 2, hemos probado para matrices totalmente no positivas de tamaño 2×2 que $C(A) \geq 0$ es equivalente a $C(A) = J$. Adicionalmente el Teorema 2.4.8 del mismo capítulo establece que $C(A)$ no es no negativa para ninguna matriz totalmente no positiva de orden mayor que 2.

3.4. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la no negatividad de la matriz combinada de matrices signo-regulares. Presentamos a continuación nuestras principales conclusiones.

Como ya sabemos, en la matriz combinada $C(A) = A \circ (A^{-1})^T$ de una matriz signo-regular A, la matriz $(A^{-1})^T$ no tiene por qué ser signo-regular. No obstante, a partir de la signatura de A hemos obtenido la signatura de la matriz $SA^{-T}S$. Esta matriz nos ha permitido expresar la matriz $C(A)$, o la matriz $-C(A)$, como el producto de Hadamard de dos matrices signo-regulares (Lema 3.2.6).

Entre las coordenadas del vector de signatura de la matriz A, las dos primeras junto con las dos últimas desempeñan un papel de primer orden para establecer cuando $C(A)$ es no negativa, porque determinan el patrón de ceros de $C(A)$ (Lemas 3.2.2, 3.3.1 y 3.3.2).

Hemos construido una tabla que describe las características de positividad de $C(A)$ para toda matriz signo-regular A (Tabla 3.3). En esta tabla el valor de las coordenadas antes mencionadas del vector de signatura de A, se utiliza para distinguir unos casos de otros. Además, las matrices signo-regulares del Capítulo 2, esto es, las matrices totalmente positivas, totalmente no negativas, totalmente negativas y totalmente no positivas, han sido ubicadas en su correspondiente caso general: caso A.1 para las dos primeras y caso B.3 para las dos segundas. Lo obtenido aquí para este tipo de matrices se corresponde con lo obtenido en el Capítulo 2, siendo allí unos resultados más concretos.

La conclusión más general es que, cuando la matriz combinada de una matriz signo-regular es no negativa, entonces esta matriz combinada es la identidad, I, o es la anti-identidad, J. Quedando, por tanto, el resto de casos de matrices signo-regulares para los que la matriz combinada no cumple la propiedad de ser no negativa.

Capítulo 4

Elementos diagonales de matrices combinadas

4.1. Introducción

Durante mucho tiempo se han tratado de determinar las características de los elementos diagonales de $C(A)$ si A es una matriz no singular. Esto fue completamente realizado por Fiedler para el caso de M–matrices, en [24]. En esta publicación se estableció que la matriz combinada de una M–matriz es también una M–matriz. Si además la M–matriz es irreducible, su matriz combinada también lo es. Un estudio similar para el caso de matrices definidas positivas ha sido realizado por el mismo autor en [25]. Para el caso de matrices totalmente positivas, Fiedler y Markham dan una respuesta parcial en [30], donde estudian las relaciones entre algunos elementos diagonales de $C(A)$, cuando A es de tamaño $n \times n$ y determinan la secuencia completa de los elementos diagonales de $C(A)$, cuando A es de tamaño 3×3. En este capítulo extendemos estos resultados al caso de matrices totalmente negativas.

En la Sección 4.2 presentamos algunas propiedades de las matrices totalmente negativas y algunos lemas y teoremas que nos ayudarán a construir las pruebas de los resultados principales, que se presentan en la siguiente sección. En la Sección 4.3 encontramos condiciones suficientes y necesarias para que una determinada secuencia de números sea la secuencia de elementos diagonales de $C(A)$, cuando A es totalmente negativa de tamaño 3×3. Hacemos este estudio para el caso en que la matriz A es simétrica y para el caso en que es no simétrica. Para finalizar, en la Sección 4.4 presentamos las conclusiones del capítulo.

4.2. Propiedades de matrices totalmente negativas

En esta sección presentamos algunos lemas y teoremas que nos ayudarán a probar los resultados principales de este capítulo.

Teorema 4.2.1. *Si A es una matriz cuadrada totalmente negativa (respectivamente, totalmente no positiva) y J es la matriz anti-identidad (ver página 4), entonces la matriz JAJ es también totalmente negativa (respectivamente, totalmente no positiva).*

Demostración. Cada submatriz cuadrada de JAJ es una submatriz de A que presenta inversiones en sus filas y sus columnas. Los cambios de signo provocados en su determinante por las inversiones de filas son anulados por las inversiones de sus columnas. □

Lema 4.2.2. *Sean A y T matrices de tamaño $n \times n$ tales que $T = D_1 A D_2$, siendo $D_1 = \mathrm{diag}(d^1_{\alpha_i})$ y $D_2 = \mathrm{diag}(d^2_{\beta_j})$ matrices diagonales positivas. A es totalmente negativa si, y sólo si T es totalmente negativa.*

Demostración. Sea A una matriz totalmente negativa y sea $T = D_1 A D_2$, siendo D_1 y D_2 matrices diagonales positivas. Sea $T[\alpha|\beta]$, $\alpha, \beta \subseteq N$ una submatriz cualquiera de T de tamaño $k \times k$, $k \leq n$.

El elemento (α_i, β_j) de T es $t_{\alpha_i,\beta_j} = d^1_{\alpha_i} a_{\alpha_i,\beta_j} d^2_{\beta_j}$.

Por tanto la submatriz

$$T[\alpha|\beta] = \begin{bmatrix} t_{\alpha_1,\beta_1} & t_{\alpha_1,\beta_2} & \cdots & t_{\alpha_1,\beta_k} \\ t_{\alpha_2,\beta_1} & t_{\alpha_2,\beta_2} & \cdots & t_{\alpha_2,\beta_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{\alpha_k,\beta_1} & t_{\alpha_k,\beta_2} & \cdots & t_{\alpha_k,\beta_k} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d^1_{\alpha_1}(a_{\alpha_1,\beta_1})d^2_{\beta_1} & d^1_{\alpha_1}(a_{\alpha_1,\beta_2})d^2_{\beta_2} & \cdots & d^1_{\alpha_1}(a_{\alpha_1,\beta_k})d^2_{\beta_k} \\ d^1_{\alpha_2}(a_{\alpha_2,\beta_1})d^2_{\beta_1} & d^1_{\alpha_2}(a_{\alpha_2,\beta_2})d^2_{\beta_2} & \cdots & d^1_{\alpha_2}(a_{\alpha_2,\beta_k})d^2_{\beta_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d^1_{\alpha_k}(a_{\alpha_k,\beta_1})d^2_{\beta_1} & d^1_{\alpha_k}(a_{\alpha_k,\beta_2})d^2_{\beta_2} & \cdots & d^1_{\alpha_k}(a_{\alpha_k,\beta_k})d^2_{\beta_k} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d^1_{\alpha_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d^1_{\alpha_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\alpha_1,\beta_1} & & \cdots & a_{\alpha_1,\beta_k} \\ a_{\alpha_2,\beta_1} & & \cdots & a_{\alpha_2,\beta_k} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{\alpha_k,\beta_1} & & \cdots & a_{\alpha_k,\beta_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^2_{\beta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d^2_{\beta_k} \end{bmatrix}$$

$$= D_1[\alpha|\beta]A[\alpha|\beta]D_2[\alpha|\beta].$$

Tomando determinantes se tiene

$$\det T[\alpha|\beta] = \det D_1[\alpha|\beta] \det A[\alpha|\beta] \det D_2[\alpha|\beta].$$

Recordando que D_1 y D_2 son matrices diagonales con todos sus elementos positivos, se observa que

$$\det T[\alpha|\beta] < 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad \det A[\alpha|\beta] < 0.$$

Como esta equivalencia es válida para todos los subconjuntos $\alpha, \beta \subseteq N$, se tiene que T es totalmente negativa si, y sólo si A es totalmente negativa. □

Lema 4.2.3. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ totalmente negativa. Si B es una submatriz de A de tamaño $k \times k$, $k \leq n$, entonces existe una matriz Q de tamaño $k \times k$ que coincide con B en todos sus elementos, excepto en a_{kk} que se puede cambiar por un cierto elemento $\hat{a}_{kk}$ de forma tal que* $\det Q = 0$ *y además $a_{kk} - \hat{a}_{kk} > 0$.*

Demostración. Sea

$$B = A[1, 2, \ldots, k|1, 2, \ldots, k] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Desde luego, esta matriz es totalmente negativa. Denotamos por C_{ij} el cofactor del elemento (i, j) de la matriz B, es decir, $C_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$, donde A_{ij} es el menor correspondiente al elemento (i, j). Desarrollando el determinante de B por la columna k, tenemos

$$\det B = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{kk}C_{kk},$$

luego,

$$a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{kk}C_{kk} - \det B = 0.$$

Como $C_{kk} < 0$, por ser B totalmente negativa, la expresión anterior se puede escribir en la forma

$$a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + (a_{kk} - \frac{\det B}{C_{kk}})C_{kk} = 0. \tag{4.1}$$

Tomando

$$\hat{a}_{kk} = a_{kk} - \frac{\det B}{C_{kk}}$$

construimos la matriz

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \hat{a}_{kk} \end{bmatrix}.$$

Nótese que la parte izquierda de (4.1) es el determinante de Q, por tanto,

$$\det Q = 0$$

Finalmente, dado que B es totalmente negativa,

$$\det B < 0 \quad \text{y} \quad C_{kk} < 0.$$

Por tanto

$$a_{kk} - \hat{a}_{kk} = \frac{\det B}{C_{kk}} > 0,$$

lo que asegura el resto del lema. □

Lema 4.2.4. *Sea $A = [-a_{ik}]$ con $a_{ik} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, una matriz totalmente negativa. Si $n \geq 3$ y $a_{11} = a_{12}$, entonces*

$$\det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,3} & \cdots & -a_{n-1,n} \end{bmatrix} < \det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & \cdots & -a_{n-1,n} \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Demostración. Usamos inducción sobre n. Si $n = 3$, la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}$$

con $a_{11} = a_{12}$. Puesto que A es totalmente negativa,

$$\det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} < 0$$

En consecuencia

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$$

y como $a_{11} = a_{12}$, entonces
$$a_{22} < a_{21}.$$
Como $a_{13} > 0$, se tiene
$$a_{13}a_{22} < a_{13}a_{21}.$$
En vista de que $a_{11} = a_{12}$, reorganizando y sumando $a_{11}a_{23}$ en ambos miembros, nos queda
$$a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} < a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}.$$
Finalmente tenemos
$$det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{23} \end{bmatrix} < det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}.$$
Por tanto para $n = 3$, el lema es verdadero.

Supongamos ahora que es verdadero para $n-1$, es decir, si
$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n-1} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-2,1} & -a_{n-2,2} & \cdots & -a_{n-2,n-1} \end{bmatrix}$$
es una matriz totalmente negativa con $a_{11} = a_{12}$, entonces
$$\det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n-1} \\ -a_{21} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-2,1} & -a_{n-2,3} & \cdots & -a_{n-2,n-1} \end{bmatrix}$$
$$< \det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n-1} \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-2,2} & -a_{n-2,3} & \cdots & -a_{n-2,n-1} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$
y comprobemos que es cierto para n. Para probar esto, considérese la matriz B, que coincide con la matriz A, en todos sus elementos, excepto para el elemento $-a_{n-1,n}$, que será cambiado por un cierto elemento $-\hat{a}_{n-1,n}$, como se presenta a continuación:
$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & -a_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & -\hat{a}_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

de forma que el elemento $-\hat{a}_{n-1,n}$ satisface la condición

$$\det B = \det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & \cdots & -\hat{a}_{n-1,n} \end{bmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

(ver Lema 4.2.3).

Para toda $\epsilon > 0$, la matriz $\hat{B}$ con un cierto elemento $-\hat{a}_{n-1,n} + \epsilon$ en lugar de $-\hat{a}_{n-1,n}$, tiene el mismo sistema de submatrices relevantes (ver Definición 1.3.2, página 6) que A, con la única excepción de la submatriz relevante

$$\begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & \cdots & -\hat{a}_{n-1,n} + \epsilon \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que

$$\det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} + 0 \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} + 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & \cdots & -\hat{a}_{n-1,n} + \epsilon \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & \cdots & -\hat{a}_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

$$+ \quad \epsilon \det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1,n-1} \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & \cdots & -\hat{a}_{n-2,n-1} \end{bmatrix} < 0$$

por la ecuación (4.4) y por ser la última matriz una submatriz de A, que es totalmente negativa. Por tanto, los determinantes de todas las submatrices relevantes de $\hat{B}$ son negativas. En consecuencia, por el Teorema 1.3.2, $\hat{B}$ es totalmente negativa. En vista de lo anterior, se tiene que

$$\det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,3} & \cdots & -\hat{a}_{n-1,n} + \epsilon \end{bmatrix} < 0$$

y por la continuidad de la función determinante, tenemos

$$\det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,3} & \cdots & -\hat{a}_{n-1,n} \end{bmatrix} \leq 0. \tag{4.5}$$

Por otra parte, por hipótesis de inducción, la desigualdad (4.2) es cierta para $n-1$, luego

$$\det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{13} & \cdots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & -a_{23} & \cdots & -a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-2,1} & -a_{n-2,3} & \cdots & -a_{n-2,n-1} \end{bmatrix}$$

$$< \quad \det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1,n-1} \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-2,2} & -a_{n-2,3} & \cdots & -a_{n-2,n-1} \end{bmatrix},$$

es decir, $C_1 > C_2$, donde C_1 es el cofactor correspondiente al elemento $a_{n-1,n}$ de la parte izquierda de la ecuación (4.2) y C_2 es el cofactor correspondiente al elemento $a_{n-1,n}$ de la parte derecha de la ecuación (4.2).

Nótese finalmente que la parte izquierda de la ecuación (4.2) se puede escribir como

$$\det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{13} & -a_{1n} + 0 \\ -a_{21} & -a_{23} & -a_{2n} + 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,3} & (-a_{n-1,n} + \hat{a}_{n-1,n}) - \hat{a}_{n-1,n} \end{bmatrix} =$$

$$(-a_{n-1,n} + \hat{a}_{n-1,n})C_1 + \det \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{13} & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{23} & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,3} & -\hat{a}_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

En forma similar, la parte derecha de (4.2) se puede escribir como

$$\det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & -a_{1n} + 0 \\ -a_{22} & -a_{23} & -a_{2n} + 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & (-a_{n-1,n} + \hat{a}_{n-1,n}) - \hat{a}_{n-1,n} \end{bmatrix} =$$

$$(-a_{n-1,n} + \hat{a}_{n-1,n})C_2 + \det \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{13} & -a_{1n} \\ -a_{22} & -a_{23} & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & -\hat{a}_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

Por el Lema 4.2.3 tenemos $a_{n-1,n} > \hat{a}_{n-1,n}$, dado que $C_1 > C_2$, y que por la ecuación (4.4) el último determinante es cero, podemos concluir que la desigualdad (4.2) es verdadera. □

Teorema 4.2.5. *Sea $A = [-a_{ij}]$ donde $a_{ij} > 0$, una matriz totalmente negativa de tamaño $n \times n$ y sea $A^{-1} = [\alpha_{ij}]$ su matriz inversa. Si $n \geq 3$, entonces*

$$-a_{11}\alpha_{11} > -a_{22}\alpha_{22}, \tag{4.6}$$

$$-a_{n-1,n-1}\alpha_{n-1,n-1} < -a_{nn}\alpha_{nn}, \tag{4.7}$$

$$-a_{ii}\alpha_{ii} < 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.8}$$

En particular, si $n = 2$, entonces $-a_{11}\alpha_{11} = -a_{22}\alpha_{22}$.

Demostración. Nótese que los elementos de la parte izquierda de las desigualdades (4.6), (4.7) y (4.8) son elementos diagonales de la matriz combinada de A. La matriz combinada $C(A)$ no cambia si multiplicamos por un número positivo una fila o una columna de la matriz A.

Primero veremos que podemos considerar que la matriz A tiene elementos $a_{11} = a_{22} = a_{12} = -1$, puesto que C(A) no cambia si multiplicamos por un numero positivo una fila o una columna. Para ello, considérese la matriz B de tamaño $n \times n$

$$B = \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \cdots & -b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ahora vamos a utilizar las matrices elementales dadas en la Definición 1.2.2. Multiplicando por la izquierda por la matriz elemental $E_1(\frac{1}{b_{11}})$

$$E_1(\frac{1}{b_{11}})B = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \cdots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \cdots & -b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Multiplicamos por la derecha por la matriz de permutación $E_2(\frac{b_{11}}{b_{12}})$

$$E_1(\frac{1}{b_{11}})BE_2(\frac{b_{11}}{b_{12}}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ -b_{21} & -\frac{b_{22}b_{11}}{b_{12}} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{n1} & -\frac{b_{n2}b_{11}}{b_{12}} & \cdots & -b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando por la izquierda por la matriz de permutación $E_2(\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}})$

$$E_2(\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}})E_1(\frac{1}{b_{11}})BE_2(\frac{b_{11}}{b_{12}}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ -\frac{b_{21}b_{12}}{b_{11}b_{22}} & -1 & \cdots & -\frac{b_{2n}b_{12}}{b_{11}b_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{n1} & -\frac{b_{n2}b_{11}b_{12}}{b_{12}b_{11}b_{22}} & \cdots & -b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, en vez de la matriz B, podemos trabajar con una matriz A, en la que se puede asumir que $a_{11} = -1$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = -1$. Ahora nuestro problema es mostrar que las desigualdades (4.6), (4.7) y (4.8) se cumplen para una matriz de la forma.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -A_{13} \\ -a_{21} & -1 & -A_{23} \\ -A_{31} & -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix}$$

donde los bloques $-A_{13}$ y $-A_{23}$ son de tamaño $1 \times n-2$, los bloques $-A_{31}$ y $-A_{32}$ son de tamaño $n-2 \times 1$ y el bloque $-A_{33}$ es de tamaño $n-2 \times n-2$.

Probaremos ahora que se cumple la desigualdad (4.6). Dado que A es una matriz totalmente negativa y que

$$-a_{11}\alpha_{11} = (-1)\det \begin{bmatrix} -1 & -A_{23} \\ -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A)}$$

y

$$-a_{22}\alpha_{22} = (-1)\det \begin{bmatrix} -1 & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{33} \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A)}$$

la prueba se reduce a mostrar que

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{33} \end{bmatrix} < \det \begin{bmatrix} -1 & -A_{23} \\ -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix}.$$

Considérese la siguiente matriz totalmente negativa, obtenida al eliminar la segunda fila de A

$$A[1,3|1,2,3] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix}.$$

Aplicando el Lema 4.2.4 a la matriz $A[1,3|1,2,3]$, obtenemos

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{33} \end{bmatrix} < \det \begin{bmatrix} -1 & -A_{13} \\ -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

De manera similar, eliminando la primera columna de la matriz A, obtenemos

$$A[1,2,3|2,3] = \begin{bmatrix} -1 & -A_{13} \\ -1 & -A_{23} \\ -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix}.$$

Aplicando el Lema (4.2.4) a la matriz $A[1,2,3|2,3]$, obtenemos

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -A_{13} \\ -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix} < \det \begin{bmatrix} -1 & -A_{23} \\ -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Finalmente por las desigualdades (4.9) y (4.10) se tiene

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{33} \end{bmatrix} < \det \begin{bmatrix} -1 & -A_{23} \\ -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix}.$$

A continuación probamos la desigualdad (4.7). Dado que $A = [-a_{ij}]$ es una matriz totalmente negativa de tamaño $n \times n$, la matriz JAJ es también totalmente negativa por el Teorema 4.2.1, donde J es la matriz anti-identidad de tamaño $n \times n$ (Definición 1.2.1).

Observando los elementos diagonales de esta matriz

$$\operatorname{diag}(JAJ) = (-a_{nn}, -a_{n-1,n-1}, \ldots, -a_{11})$$

y aplicando la condición (4.6) a la matriz JAJ se tiene que

$$-a_{n-1,n-1}\alpha_{n-1,n-1} < -a_{nn}\alpha_{nn}.$$

Obsérvese que el elemento diagonal de la inversa traspuesta de JAJ es el mismo que el de la inversa traspuesta de A. Finalmente, la veracidad de la condición (4.8) se hace evidente porque A es totalmente negativa y

$$-a_{ii}\alpha_{ii} = -a_{ii}(\frac{1}{\det A})A_{ii} < 0.$$

Por útimo si $n = 2$,

$$A = [-a_{ij}] = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} > 0, \quad \det A < 0.$$

Calculando la matriz inversa de A, tenemos

$$A^{-1} = [\alpha_{ij}] = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} -a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix}.$$

Se puede apreciar claramente que

$$-a_{11}\alpha_{11} = -a_{22}\alpha_{22}.$$

$\square$

Existe un resultado similar para el caso en que la matriz A es totalmente no positiva.

Corolario 4.2.1. *Sea $A = [-a_{ij}]$ una matriz totalmente no positiva de tamaño $n \times n$ y sea $A^{-1} = [\alpha_{ij}]$. Si $n \geq 3$, entonces*

$$\begin{aligned} -a_{11}\alpha_{11} &\geq -a_{22}\alpha_{22}, \\ -a_{n-1,n-1}\alpha_{n-1,n-1} &\leq -a_{nn}\alpha_{nn}. \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos que ilustran los resultados anteriores.

Ejemplo 4.2.1. *Sea A una matriz simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3*

$$A = \begin{bmatrix} -20 & -16 & -4 \\ -16 & -12.2 & -2.8 \\ -4 & -2.8 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

Hallando A^{-1} y $C(A) = A \circ A^{-T}$, tenemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.35 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C(A) = A \circ A^{-T} = A \circ A^{-1} = \begin{bmatrix} -27 & 32 & -4 \\ 32 & -36.6 & 5.6 \\ -4 & 5.6 & -0.6 \end{bmatrix}$$

y observando los elementos diagonales de $C(A)$, se tiene

$$-a_{11}\alpha_{11} = -27, \quad -a_{22}\alpha_{22} = -36.6, \quad -a_{33}\alpha_{33} = -0.6.$$

Es fácil comprobar que satiface las condiciones (4.6), (4.7) y (4.8).

Veamos otro ejemplo, ahora con una matriz no simétrica.

Ejemplo 4.2.2. *Sea B la matriz de tamaño 4×4 no simétrica totalmente no positiva*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -15 & -15 & -15 & -15 \\ -15 & -14 & -12 & -8 \\ -30 & -27 & -20 & -3 \end{bmatrix}.$$

Hallando B^{-1}, $B \circ B^{-1}$ y $B \circ B^{-T}$, tenemos

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3.07 & 5 & -1 \\ -5.5 & 7 & -12 & 2.5 \\ 3 & -5 & 9 & -2 \\ -0.5 & 1 & -2 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B \circ B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3.07 & -10 & 3 \\ 82.5 & -105 & 180 & -37.5 \\ -45 & 70 & -108 & 16 \\ 15 & -27 & 40 & -1.5 \end{bmatrix},$$

$$C(B) = B \circ B^{-T} = \begin{bmatrix} 0 & 5.5 & -6 & 1.5 \\ 46 & -105. & 75. & -15 \\ -75 & 168 & -108 & 16 \\ 30 & -67.5 & 40 & -1.5 \end{bmatrix}$$

y observando los elementos diagonales de $C(B)$, se tiene

$$-b_{11}\alpha_{11} = 0, \quad -b_{22}\alpha_{22} = -105, \quad -b_{33}\alpha_{33} = -108, \quad -b_{44}\alpha_{44} = -1.5.$$

Es fácil verificar que satiface las condiciones (4.6), (4.7) y (4.8).

4.3. Secuencia de elementos diagonales de $C(A)$

Ahora estamos en condiciones de iniciar la solución de nuestro problema, que formulado en forma más precisa, consiste en hallar condiciones suficientes y necesarias para que una n-tupla ordenada de números reales sean los elementos diagonales de $C(A)$ cuando A es una matriz totalmente negativa. Procediendo en forma similar a como lo hace Fiedler en [30]. Obtenemos resultados en los casos de matrices simétricas y de matrices no simétricas de tamaño 3×3.

Recordemos que si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y D es una matriz diagonal positiva entonces decimos que DAD se obtiene a partir de A, mediante congruencia positiva. Entre las matrices A y DAD existe una relación de congruencia diagonal positiva (ver Definición 1.3.7 en la página 9), que como sabemos, es una relación de equivalencia.

4.3.1. Caso simétrico

A continuación presentamos un lema que nos ayudará a construir la prueba de un resultado correspondiente a matrices totalmente negativas simétricas.

Lema 4.3.1. *Una matriz simétrica A de tamaño 3×3 es totalmente negativa si, y sólo si es diagonalmente congruente mediante una matriz diagonal positiva con la matriz*

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -x_3 & -x_2 \\ -x_3 & -1 & -x_1 \\ -x_2 & -x_1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

donde x_1, x_2, x_3 satisfacen

$$x_i > 1, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.12}$$

$$x_2 > x_1 x_3, \tag{4.13}$$

$$\det T = -1 - 2x_1x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0. \tag{4.14}$$

Demostración. Sea $A = [-a_{ij}]$ una matriz simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3. Nótese que existe una matriz diagonal positiva D tal que

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{bmatrix} = DTD$$

siendo D la matriz

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{33}} \end{bmatrix}$$

y siendo $T = [-t_{ij}]$ la matriz

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} & -\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \\ -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} & -1 & -\frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}a_{33}}} \\ -\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} & -\frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}a_{33}}} & -1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la matriz A es diagonalmente congruente con la matriz T que tiene la forma (4.11) donde

$$x_1 = \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}a_{33}}}, \qquad x_2 = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}a_{33}}}, \qquad x_3 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}.$$

($\Rightarrow$) Probaremos que si $A = [-a_{ij}]$ es una matriz simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3, existe una matriz de la forma dada en (4.11) diagonalmente congruente con A mediante una matriz diagonal positiva, que satisface (4.12), (4.13) y (4.14). La congruencia está probada arriba, veamos que se cumplen las desigualdades (4.12) - (4.14).

Como A es totalmente negativa, tenemos

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - (a_{23})^2 < 0,$$

luego

$$a_{23} > \sqrt{a_{22}a_{33}} \quad \text{y por tanto,} \quad x_1 > 1.$$

Además

$$A_{22} = a_{11}a_{33} - (a_{13})^2 < 0,$$

luego

$$a_{13} > \sqrt{a_{11}a_{33}} \quad \text{y por tanto,} \quad x_2 > 1.$$

Finalmente

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 < 0,$$

luego

$$a_{12} > \sqrt{a_{11}a_{22}}.$$

Por tanto

$$x_3 > 1.$$

Esto indica que la condición (4.12) se cumple.

Por otro lado,

$$A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} < 0$$

por ser A totalmente negativa. Esto implica

$$a_{13} > \frac{a_{12}a_{23}}{a_{22}},$$

pero como

$$\sqrt{a_{11}a_{33}} > 0,$$

tenemos

$$\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} > \frac{a_{12}a_{23}}{a_{22}\sqrt{a_{11}a_{33}}}.$$

De aquí se deduce

$$\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} > \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}a_{33}}} \cdot \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}.$$

Por tanto

$$x_2 > x_1x_3.$$

Esto indica que la condición (4.13) se cumple. La condición (4.14) se deduce del Lema 4.2.2, ya que A es totalmente negativa.

($\Leftarrow$) Tenemos que demostrar que si una matriz A simétrica de tamaño 3×3 es diagonalmente congruente con la matriz (4.11), cumpliendo las condiciones (4.12) - (4.14) mediante una matriz diagonal positiva, entonces A es totalmente negativa.

Para demostrar que la matriz A es totalmente negativa basta demostrar que la matriz T lo es por el Lema 4.2.2.

Por las desigualdades (4.12) - (4.14) tenemos que los elementos de T satisfacen $-t_{ij} < 0$, $i, j = 1, 2, 3$, los menores de tamaño 2×2 correspondientes a los elementos diagonales satisfacen $t_{ii} = 1 - {x_i}^2 < 0$ y además su determinante satisface $\det T < 0$ por la condición (4.14).

Para terminar de mostrar que T es totalmente negativa, sólo falta probar que los menores de tamaño 2×2 satisfacen $T_{ij} < 0$ para todo $i \neq j$. Dado que T es simétrica, $T_{13} = T_{31} = x_1x_3 - x_2 < 0$ por la condición (4.13). Para mostrar que $T_{12} = T_{21} < 0$ hacemos una prueba por contradicción. Si suponemos que $T_{12} = x_3 - x_1x_2 \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} x_3 - x_1x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq x_1x_2. \end{aligned}$$

Por la condición (4.13) tenemos

$$x_3 \geq x_1x_2 \geq {x_1}^2x_3$$

y esto contradice la desigualdad (4.12).

Usando el mismo razonamiento se muestra que $T_{23} = T_{32} < 0$. Supongamos ahora que $T_{23} = x_1 - x_2x_3 \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} x_1 - x_2x_3 &\geq 0 \\ x_1 &\geq x_2x_3. \end{aligned}$$

Por la condición (4.13) tenemos

$$x_1 \geq x_2x_3 \geq x_1{x_3}^2$$

y esto contradice la desigualdad (4.12). En consecuencia T es totalmente negativa y por tanto por el Lema 4.2.2 A es totalmente negativa. $\square$

A continuación presentamos el resultado que hemos obtenido sobre la relación entre los elementos diagonales de la matriz combinada de una matriz simétrica totalmente negativa.

Teorema 4.3.2. *La condición suficiente y necesaria para que tres números negativos u_1, u_2, u_3 sean los elementos diagonales de la matriz combinada de una matriz A simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3, es que se cumpla la condición*

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0. \tag{4.15}$$

Demostración. Sea A una matriz simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3. Por el Lema 4.3.1, A es diagonalmente congruente, mediante una matriz diagonal positiva con la matriz (4.11), cumpliendo las condiciones (4.12) - (4.14). Si consideramos la propiedad, $C(DA) = C(AD) = C(A)$ para toda matriz diagonal invertible D, (ver página 15), se concluye que $C(A)$ es igual a la matriz combinada de la matriz (4.11). En consecuencia, podemos reformular nuestro teorema en términos de la matriz T definida por (4.11), de la siguiente forma:

$$\operatorname{diag}(C(T)) = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{si, y sólo si}$$

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0.$$

Esto significa que la matriz (4.11) satisface las condiciones (4.12), (4.13) y (4.14) si y sólo si se cumple la condición (4.15).

Como los elementos diagonales de T^{-1} son

$$\operatorname{diag}(T^{-1}) = \left(\frac{1 - {x_1}^2}{\det T}, \frac{1 - {x_2}^2}{\det T}, \frac{1 - {x_3}^2}{\det T} \right).$$

Se tiene que los elementos diagonales de $C(T)$ son

$$u_1 = \frac{-(1 - {x_1}^2)}{\det T}, \quad u_2 = \frac{-(1 - {x_2}^2)}{\det T}, \quad u_3 = \frac{-(1 - {x_3}^2)}{\det T}. \tag{4.16}$$

($\Rightarrow$) Tenemos que probar que

$$\operatorname{diag}(C(T)) = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{implica} \quad u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0,$$

donde T es la matriz dada en (4.11) y satisface las condiciones (4.12), (4.13) y (4.14).

Por las ecuaciones (4.16), se tiene

$$u_i = \frac{{x_i}^2 - 1}{\det T}.$$

Sustituyendo u_i en (4.15) tenemos,

$$u_1 + u_3 - 1 - u_2 = \frac{1}{\det T}({x_1}^2 - 1) + \frac{1}{\det T}({x_3}^2 - 1) - \frac{\det T}{\det T} - \frac{1}{\det T}({x_2}^2 - 1).$$

Sacando factor común a $\dfrac{1}{\det T}$, y tomando en cuenta que $\det T$ viene dado por la ecuación (4.14), obtenemos

$$u_1+u_3-1-u_2 = \frac{1}{\det T}({x_1}^2-1+{x_3}^2-1+1+2x_1x_2x_3-{x_1}^2-{x_2}^2-{x_3}^2-{x_2}^2+1).$$

Simplificando

$$u_1+u_3-1-u_2 = \frac{1}{\det T}(2x_1x_2x_3-2{x_2}^2).$$

Factorizando nuevamente

$$u_1+u_3-1-u_2 = \frac{1}{\det T}(2x_2)(x_1x_3-x_2) > 0.$$

Por tanto

$$u_1+u_3-1-u_2 > 0,$$

puesto que $\det T < 0$ y $x_1x_3 < x_2$. Esta es la desigualdad que queríamos probar.

($\Leftarrow$) Debemos probar que dados tres números negativos u_1, u_2, u_3 tales que

$$u_1+u_3-u_2-1 > 0$$

existe una matriz simétrica de la forma (4.11) satisfaciendo las condiciones (4.12), (4.13) y (4.14), es decir, las condiciones del Lema 4.3.1, tal que los elementos de la diagonal de $C(T)$ son u_1, u_2, u_3.

Para que u_1, u_2, u_3 sean los elementos diagonales de $C(T)$, siendo T como en (4.11), debe ocurrir que

$$u_i \det T = {x_i}^2 - 1, \quad i = 1,2,3$$

o, equivalentemente,

$${x_i}^2 = 1 + u_i \det T, \quad i = 1,2,3.$$

Por tanto, tomaremos

$$x_i = \sqrt{1+u_i \det T}, \quad i = 1,2,3. \tag{4.17}$$

No obstante, esta construcción involucra la cantidad $\det T$ que deberá ser negativa, condición (4.14) y deberemos probar que la matriz T así construida cumple también las condiciones (4.12) y (4.13).

Procedamos a determinar $\det T$.

$$\begin{aligned}\det T = &-1-2\sqrt{(1+u_1\det T)(1+u_2\det T)(1+u_3\det T)}\\ &+(1+u_1\det T)+(1+u_2\det T)+(1+u_3\det T).\end{aligned}$$

Agrupando términos, tenemos

$$\begin{gathered}\det T - (u_1 + u_2 + u_3)\det T - 2 \\ = -2\sqrt{(1 + u_1 \det T)(1 + u_2 \det T)(1 + u_3 \det T)},\end{gathered}$$

es decir,

$$([1 - (u_1 + u_2 + u_3)]\det T - 2)^2 = 4(1 + u_1 \det T)(1 + u_2 \det T)(1 + u_3 \det T).$$

Simplificando y reorganizando se llega a

$$\begin{aligned}4(\det T)^2 u_1 u_2 u_3 + \det T[4(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) \\ -(u_1 + u_2 + u_3 - 1)^2] + 4 = 0.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Esta ecuación de segundo grado tiene el discriminante $b^2 - 4ac > b^2$, ya que $-4ac = -64u_1u_2u_3 > 0$. Por tanto, siempre ocurre $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$. De aquí se tiene

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0$$

puesto que $a = 4u_1u_2u_3 < 0$. Así queda determinado el valor exacto de $\det T$, y como $\det T < 0$, los coeficientes x_i vienen determinados por (4.17) y la matriz T cumple (4.14).

Como $\det T < 0$ y $u_i < 0$ es fácil ver que a partir de la ecuación (4.17) se tiene $x_i > 1$ y por tanto se cumple (4.12).

Veamos por último que se cumple la condición (4.13). Recordando la condición (4.16), se tiene que

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0 \quad \text{implica} \quad \frac{({x_1}^2 - 1) + ({x_3}^2 - 1) - ({x_2}^2 - 1)}{\det T} - 1 > 0,$$

lo que a su vez implica

$$\frac{{x_1}^2 + {x_3}^2 - {x_2}^2 - 1 - (-1 - 2x_1x_2x_3 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)}{\det T} > 0,$$

y por tanto

$$\frac{-2{x_2}^2 + 2x_1x_2x_3}{\det T} > 0,$$

luego

$$2x_2(x_1x_3 - x_2) < 0, \quad (\text{porque} \quad \det T < 0).$$

Finalmente,

$$x_1x_3 - x_2 < 0, \quad (\text{porque} \quad x_2 > 0).$$

Por tanto, se satisface (4.13). □

El siguiente ejemplo ilustra este resultado.

Ejemplo 4.3.1. *Sea la matriz A, totalmente negativa, que tiene la estructura de la matriz 4.11 y cumple las condiciones (4.12), (4.13) y (4.14)*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -8 \\ -3 & -1 & -2 \\ -8 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Su matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.15 & -0.65 & 0.1 \\ -0.65 & 3.15 & -1.1 \\ 0.1 & -1.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

y su matriz combinada es

$$C(A) = \begin{bmatrix} -0.15 & 1.95 & -0.8 \\ 1.95 & -3.15 & 2.2 \\ -0.8 & 2.2 & -0.4 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que

$$u_1 = -0.15, \quad u_2 = -3.15, \quad u_3 = -0.4$$

que satisface las condiciones del Teorema 4.3.2

$$(u_1 + u_3 - 1) = -1.55 > -3.15 = u_2.$$

Veamos ahora un ejemplo recíproco. Dados tres números negativos u_i, $i = 1, 2, 3$, que satisfacen la condición (4.15), construiremos una matriz simétrica totalmente negativa T, tal que $\operatorname{diag}(C(T)) = (u_1, u_2, u_3)$ y que satisface las condiciones (4.12), (4.13), (4.14).

Ejemplo 4.3.2. *Dados los números negativos*

$$u_1 = -2, \quad u_2 = -8, \quad u_3 = -4$$

que satisfacen la condición exigida por el Teorema 4.3.2,

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0,$$

vamos a encontrar una matriz T de forma que $\operatorname{diag}(C(T)) = (u_1, u_2, u_3)$.

Sustituyendo los valores en la ecuación (4.18) se obtiene

$$-256(\det T)^2 - \det T + 4 = 0.$$

Esta ecuación tiene una solución, $\det T < 0$, *requerida por el teorema, cuyo valor es*

$$\det T = -0.1269684.$$

Usando las ecuaciones

$$x_i = \sqrt{1 + u_i \det T}, \quad i = 1, 2, 3$$

se obtiene

$$x_1 = 1.1197932, \quad x_2 = 1.4197701, \quad x_3 = 1.227955,$$

donde se cumple

$$x_1 x_3 - x_2 < 0.$$

Finalmente, substituyendo los valores en la matriz de (4.11) *(que ha de salir (4.11)), se obtiene la matriz simétrica totalmente negativa*

$$T = \begin{bmatrix} -1. & -1.227955 & -1.419770 \\ -1.227955 & -1. & -1.119793 \\ -1.419770 & -1.119793 & -1. \end{bmatrix}.$$

La matriz combinada de la matriz T es

$$C(T) = \begin{bmatrix} -2 & 3.5 & -0.5 \\ 3.5 & -8 & 5.5 \\ -0.5 & 5.5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Donde se puede apreciar que

$$\operatorname{diag}(C(T)) = (-2, -8, -4).$$

4.3.2. Caso no simétrico

Al igual que en la prueba del Teorema 4.3.2, donde se ha usado la congruencia del Lema 4.3.1, para obtener el resultado correspondiente a matrices no simétricas, necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.3.3. *Una matriz A de tamaño 3×3 es totalmente negativa si, y sólo si es equivalente, mediante matrices diagonales positivas, a la matriz*

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{v_1}{v_1+1} & -1 & -p \\ -1 & -1 & -1 \\ -q & -1 & -\frac{v_3}{v_3+1} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

donde

$$v_i > 0, \quad i = 1, 3, \tag{4.20}$$

$$p, q > 1, \tag{4.21}$$

$$\det T = \frac{(p-1)(q-1)(v_1+1)(v_3+1) - 1}{(v_1+1)(v_3+1)} < 0. \tag{4.22}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Necesitamos probar que cualquier matriz totalmente negativa de tamaño 3×3 es equivalente, mediante matrices diagonales positivas, a la matriz (4.19), cuyos elementos satisfacen las condiciones (4.20), (4.21) y (4.22).

Sea A una matriz totalmente negativa de tamaño 3×3, donde $a_{ij} > 0$ para todo $i, j \in N$. Podemos observar que existen matrices diagonales positivas D_1 y D_2 tales que

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix} = D_1 T D_2$$

donde hemos llamado T a la matriz

$$T = \begin{bmatrix} \frac{-a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}} & -1 & \frac{-a_{13}a_{22}}{a_{12}a_{23}} \\ -1 & -1 & -1 \\ \frac{-a_{31}a_{22}}{a_{32}a_{21}} & -1 & \frac{-a_{33}a_{22}}{a_{32}a_{23}} \end{bmatrix}$$

y las matrices D_1 y D_2 son

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la matriz A es diagonalmente equivalente a la matriz T.

Definiendo

1. $v_1 = \dfrac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}$
2. $v_3 = \dfrac{a_{33}a_{22}}{a_{32}a_{23} - a_{33}a_{22}}$
3. $p = \dfrac{a_{13}a_{22}}{a_{12}a_{23}}$
4. $q = \dfrac{a_{31}a_{22}}{a_{21}a_{23}}$

se obtiene que la matriz T es de la forma (4.19). Veamos que se cumplen las condiciones (4.20) - (4.22). Como

$$v_1 = \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}$$

se tiene

$$\frac{-a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}} = \frac{\dfrac{-a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}}{\dfrac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}+1} = \frac{-v_1}{v_1+1}$$

Además, por ser A una matriz totalmente negativa,

$$A_{33} < 0 \quad \text{implica} \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} < 0$$

lo que a su vez implica

$$a_{21}a_{12} > a_{11}a_{22}$$

por tanto, $v_1 > 0$, ya que $a_{11}a_{22} > 0$.

En forma similar, como v_3

$$v_3 = \frac{a_{33}a_{22}}{a_{32}a_{23} - a_{33}a_{22}}$$

se tiene

$$\frac{-a_{33}a_{22}}{a_{32}a_{23}} = \frac{-v_3}{v_3+1}.$$

En este caso se tiene $v_3 > 0$, por ser $A_{11} < 0$. Como v_1 y v_3 son positivos, se cumple la condición (4.20).

Veamos la condición (4.21). Dado que

$$p = \frac{a_{13}a_{22}}{a_{12}a_{23}} \quad \text{y} \quad q = \frac{a_{31}a_{22}}{a_{21}a_{23}},$$

siendo A totalmente negativa, para el menor A_{31} tenemos

$$A_{31} < 0 \quad \text{implica} \quad a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} < 0,$$

lo que a su vez implica

$$a_{13}a_{22} > a_{12}a_{23},$$

luego

$$\frac{a_{13}a_{22}}{a_{12}a_{23}} > 1.$$

Finalmente

$$p > 1.$$

En forma similar, para el menor A_{13} tenemos

$$A_{13} < 0 \quad \text{implica} \quad a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} < 0,$$

lo que a su vez implica

$$a_{31}a_{22} > a_{21}a_{32},$$

luego

$$\frac{a_{31}a_{22}}{a_{21}a_{32}} > 1.$$

Finalmente

$$q > 1.$$

Es decir, se cumple la condición (4.21). Por consiguiente, A tiene la forma requerida y satisface (4.20) y (4.21).

Por último veamos que $\det T$ corresponde a la expresión de la condición (4.22). El determinante de T es

$$\det T = -\frac{v_1v_3}{(v_1+1)(v_3+1)} - p - q + pq + \frac{v_1}{v_1+1} + \frac{v_3}{v_3+1}$$

$$= \frac{-v_1v_3 + (v_1+1)(v_3+1)[(p-1)(q-1)-1] + v_1(v_3+1) + v_3(v_1+1)}{(v_1+1)(v_3+1)}$$

$$= \frac{-v_1v_3 + (v_1+1)(v_3+1)[(p-1)(q-1)-1] + v_1v_3 + v_1 + v_1v_3 + v_3}{(v_1+1)(v_3+1)}$$

$$= \frac{(v_1+1)(v_3+1)[(p-1)(q-1)-1] + (v_1+1)(v_3+1) - 1}{(v_1+1)(v_3+1)}$$

$$= \frac{(v_1+1)(v_3+1)[(p-1)(q-1)-1+1] - 1}{(v_1+1)(v_3+1)}.$$

Es decir, $\det T$ tiene la expresión

$$\det T = \frac{(v_1+1)(v_3+1)(p-1)(q-1)-1}{(v_1+1)(v_3+1)}.$$

($\Leftarrow$) En esta parte debemos probar que si A es equivalente a la matriz T de (4.19) mediante matrices diagonales positivas, entonces A es totalmente negativa. Por la equivalencia entre A y T, usando el Lema 4.2.2, basta probar que T, que verifica las condiciones (4.20) - (4.22), es totalmente negativa.

Falta ver que T es totalmente negativa usando las condiciones (4.20) - (4.22). Usando el Lema 4.2.2, A será totalmente negativa cuando la matriz T dada por (4.19) lo sea, Por tanto, nuestra prueba se reduce a mostrar que T es totalmente negativa.

Por las condiciones (4.20) - (4.22), tenemos que los elementos t_{ij} y $\det T$ son negativos. Solo nos falta mostrar que todos los menores de orden 2, son negativos. Para eso hacemos

$$\frac{v_1}{v_1+1} = r \quad \text{y} \quad \frac{v_3}{v_3+1} = s,$$

con lo cual, la matriz T toma la forma

$$T = \begin{bmatrix} -r & -1 & -p \\ -1 & -1 & -1 \\ -q & -1 & -s \end{bmatrix},$$

donde $0 < r, s < 1$. A partir de aquí se hace evidente que todos los menores de T de orden 2 son negativos.

□

Teorema 4.3.4. *La condición suficiente y necesaria, para que tres números negativos u_1, u_2, u_3 sean los elementos diagonales de la matriz combinada de una matriz A totalmente negativa de tamaño 3×3,es que se cumpla la condición*

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0. \tag{4.23}$$

Demostración. Si consideramos la propiedad, $C(DA) = C(AD) = C(A)$ para toda matriz diagonal invertible D, (ver página 15), se concluye que $C(A)$ es igual a la matriz combinada de la matriz (4.19). Recuérdese que por el Lema 4.3.3 una matriz A totalmente negativa de tamaño 3×3 es diagonalmente equivalente, mediante matrices diagonales positivas, con la matriz T dada por (4.19), cuyos elementos satisfacen las condiciones (4.20), (4.21) y (4.22).

($\Rightarrow$) Tenemos que probar que dada T definida en (4.19) cumpliendo las condiciones (4.20), (4.21) y (4.22) y con u_1, u_2, u_3 tales que $\operatorname{diag}(C(T)) = (u_1, u_2, u_3)$, entonces $u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0$.

Podemos hallar los elementos diagonales de T^{-1}

$$\operatorname{diag}(T^{-1}) = (\hat{a}_{11}, \hat{a}_{22}, \hat{a}_{33}).$$

Si denotamos por d el numerador de la fracción en la condición (4.22),

$$\hat{a}_{11} = \frac{1}{\det T}\left(\frac{v_3}{v_3+1} - 1\right) = \frac{1}{\det T}\left(\frac{-1}{v_3+1}\right) = \frac{-(v_1+1)}{d}.$$

$$\hat{a}_{22} = \frac{1}{\det T}\left(\frac{v_1 v_3}{(v_1+1)(v_3+1)} - pq\right) = \frac{v_1 v_3 - pq(v_1+1)(v_3+1)}{d},$$

$$\hat{a}_{33} = \frac{1}{\det T}\left(\frac{v_1}{v_1+1} - 1\right) = \frac{-(v_3+1)}{d}.$$

los elementos diagonales de $C(A) = A \circ (A^{-T})$ son

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}\hat{a}_{11} = \frac{v_1}{d}, \\ u_2 &= a_{22}\hat{a}_{22} = -\frac{v_1 v_3 - pq(v_1+1)(v_3+1)}{d}, \\ u_3 &= a_{33}\hat{a}_{33} = \frac{v_3}{d}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Para finalizar nuestra prueba sustituimos las ecuaciones (4.24) en la parte izquierda de la condición (4.23), tenemos

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 = \frac{v_1}{d} + \frac{v_3}{d} + \frac{v_1 v_3 - pq(v_1+1)(v_3+1)}{d} - \frac{d}{d}.$$

Simplificando nos queda

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 = \frac{1}{d}(v_1 + v_3 + v_1 v_3 - pq(v_1+1)(v_3+1) - d).$$

Teniendo en cuenta que

$$v_1 + v_3 + v_1 v_3 = (v_1+1)(v_3+1) - 1,$$

tenemos

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 = \frac{1}{d}[(v_1+1)(v_3+1)(1 - pq - (p-1)(q-1))],$$

por tanto, es un número positivo, por las condiciones (4.20) - (4.22).

($\Leftarrow$) Ahora vamos a probar que si u_1, u_2, u_3 son números negativos tales que

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0,$$

entonces podemos definir una matriz T de la forma (4.19) que cumple las condiciones (4.20) - (4.22). Es decir, vamos a probar que el sistema de ecuaciones

$$u_1 = \frac{v_1}{d}, \quad u_2 = -\frac{v_1 v_3 - pq(v_1+1)(v_3+1)}{d}, \quad u_3 = \frac{v_3}{d} \tag{4.25}$$

donde d es el numerador del determinante de T de la expresión (4.22) tiene soluciones para v_1, v_3, p, q, y $\det T$ que satisfacen las condiciones (4.20) - (4.22), cuando $u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0$.

Para iniciar, observemos que

$$u_2 d = pq(v_1+1)(v_3+1) - v_1 v_3$$

implica

$$pq = \frac{u_2 d + u_1 u_3 d^2}{(u_1 d + 1)(u_3 d + 1)}$$

y esto a su vez implica

$$\frac{1}{p}\frac{1}{q} = \frac{(u_1 d + 1)(u_3 d + 1)}{u_2 d + u_1 u_3 d^2}. \tag{4.26}$$

De la definición de d, tenemos

$$d = (p-1)(q-1)(u_1 d + 1)(u_3 d + 1) - 1$$

de aquí se deduce

$$(p-1)(q-1) = \frac{(d+1)}{(u_1 d + 1)(u_3 d + 1)}. \tag{4.27}$$

De la ecuación (4.26) se deduce

$$(u_1 d + 1)(u_3 d + 1) = \frac{u_2 d + u_1 u_3 d^2}{pq}. \tag{4.28}$$

Sustituyendo (4.28) en (4.27), nos queda

$$(p-1)(q-1) = \frac{(d+1)pq}{u_2 d + u_1 u_3 d^2}.$$

De donde resulta

$$\frac{(p-1)(q-1)}{pq} = \frac{d+1}{u_2 d + u_1 u_3 d^2}.$$

Finalmente,

$$(1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{q}) = \frac{d+1}{u_2 d + u_1 u_3 d^2} \tag{4.29}$$

Nuestro sistema de ecuaciones se ha reducido a las ecuaciones (4.26) y (4.29).

La siguiente equivalencia es conocida [30]. Una condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones

$$xy = u, \quad (1-x)(1-y) = v$$

tenga soluciones de la forma

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

es que se cumpla

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq 1.$$

Usando esta equivalencia con $x = \frac{1}{p}$, $y = \frac{1}{q}$, el sistema formado por las ecuaciones (4.26) y (4.29), con las condiciones ya establecidas, tiene solución si, y sólo si

$$\sqrt{\frac{(u_1d+1)(u_3d+1)}{u_2d+u_1u_3d^2}} + \sqrt{\frac{d+1}{u_2d+u_1u_3d^2}} \leq 1 \tag{4.30}$$

Si sustituimos $d = -1$ en el lado izquierdo de la desigualdad (4.30) y usamos las ecuaciones (4.25) nos queda

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(-u_1+1)(-u_3+1)}{-u_2+u_1u_3}} &= \sqrt{\frac{(v_1+1)(v_3+1)}{pq(v_1+1)(v_3+1)-v_1v_3+v_1v_3}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{pq}} < 1.\end{aligned}$$

La desigualdad es estricta porque por hipótesis,

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0$$

y esto implica

$$1 - u_1 - u_3 < -u_2,$$

lo que a su vez implica

$$1 - u_1 - u_3 + u_1u_3 < -u_2 + u_1u_3.$$

Luego

$$(1-u_1)(1-u_3) < -u_2 + u_1u_3.$$

Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, tal que, para $d = -1 + \varepsilon$ se cumplen todas las condiciones: $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $-1 < d < 0$, así como la desigualdad (4.30), lo que garantiza la existencia de p y q. Por tanto $\det T$ está definido y es negativo. □

El siguiente ejemplo ilustra el teorema anterior.

Ejemplo 4.3.3. *Sea A la matriz totalmente negativa de tamaño 3×3, no simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -14 & -19 \\ -13 & -20 & -27 \\ -17 & -26 & -35 \end{bmatrix},$$

su matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 21.5 & -15.5 \\ 1 & -15 & 11 \end{bmatrix}$$

y su matriz combinada es

$$C(A) = \begin{bmatrix} -8 & 28 & -19 \\ 26 & -430 & 405 \\ -17 & 403 & -385 \end{bmatrix}.$$

Observamos que $u_1 = -8$, $u_2 = -430$, $u_3 = -385$, *que son números negativos y se satisface la condición requerida:*

$$u_i < 0 \quad y \quad u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0.$$

Veamos ahora un ejemplo del teorema recíproco para el caso no simétrico.

Ejemplo 4.3.4. *Dados los números negativos*

$$u_1 = -2, \quad u_2 = -8, \quad u_3 = -3$$

que satisfacen la condición exigida por el Teorema 4.23,

$$u_1 + u_3 - u_2 - 1 > 0,$$

vamos a encontrar una matriz T *de forma que* $\operatorname{diag}(C(T)) = (u_1, u_2, u_3)$.

Sustituyendo los valores en la ecuación (4.30) en forma de igualdad, se obtiene $d = -\frac{3-\sqrt{201}}{12} \approx -0.931454$. *Tomando entonces un valor menor y manteniendo la condición* $-1 < d$ *podemos tomar por ejemplo* $d = -0.94$.

Con este valor se obtienen v_1 *y* v_3. *Para obtener las cantidades* p *y* q *se trabaja con la condición* $p, q > 1$ *y se obtiene por ejemplo* $p \approx 1.00527$ *y* $q =\approx 1.1604$. *Con estos valores la matriz obtenida es*

$$T = \begin{bmatrix} -0.66443 & -1 & -1.00527 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1.1604 & -1 & -0.748111 \end{bmatrix}$$

cuya matriz combinada es

$$C(T) = \begin{bmatrix} -2 & 4.92693 & -1.92693 \\ 3.07307 & -8 & 5.92693 \\ -0.0730739 & 4.07307 & -3 \end{bmatrix}.$$

4.4. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado las características de los elementos diagonales de matrices totalmente negativas y totalmente no positivas. Se ha distinguido el caso simétrico del no simétrico. El estudio se ha hecho de forma paralela a como se hizo por los autores Fiedler y Markham en [30] para matrices totalmente positivas. A continuación presentamos los principales resultados del capítulo.

Se determina la relación entre el primer y el segundo elemento, así como entre el penúltimo y el último elemento de la diagonal de la matriz combinada de una matriz totalmente negativa de tamaño $n \times n$. Igualmente, se determina el signo de los elementos diagonales de la matriz combinada. Se extiende el resultado a matrices totalmente no positivas.

En el caso de matrices simétricas, el estudio de los elementos diagonales se hace a través de congruencia mediante matrices diagonales positivas. En el caso de matrices no simétricas, el estudio se hace a través de equivalencia mediante matrices diagonales positivas.

Se determinan condiciones necesarias y suficientes para que tres números dados sean los elementos diagonales de la matriz combinada de una matriz simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3.

Se determinan condiciones necesarias y suficientes para que tres números dados sean los elementos diagonales de la matriz combinada de una matriz no simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3.

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras

5.1. Conclusiones

Aunque ya hemos señalado las conclusiones de cada capítulo estudiado, queremos resaltar aquí las conclusiones más relevantes que se deducen de nuestro trabajo sobre matrices combinadas.

Hemos obtenido varios resultados interesantes. La matriz combinada de una matriz invertible de tamaño 2×2 es no negativa cuando el producto de todos sus elementos es menor o igual a cero (Proposición 2.2.3). En algunos casos, la matriz combinada no negativa de algunas matrices es la matriz identidad. Esto ocurre cuando la matriz combinada es triangular (Proposición 2.2.2) y cuando es la matriz combinada de una M–matriz (Teorema 2.3.2). Igualmente se ha obtenido que la matriz combinada de una G–matriz es no negativa, cuando lo son las dos matrices diagonales que la definen (Teorema 2.3.1)

Sobre matrices totalmente positivas (totalmente no negativas) y matrices totalmente negativas (totalmente no positivas) hemos obtenido algunos resultados. La matriz combinada de una matriz totalmente positiva o totalmente negativa no es no negativa (Teorema 2.4.1). La matriz combinada de una matriz totalmente no negativa, cuando la matriz combinada es no negativa, es igual a la matriz identidad, (Teorema 2.4.5). La matriz combinada de una matriz invertible totalmente no positiva de orden mayor o igual a 3 no es no negativa (Teorema 2.4.8). Solo las matrices anti-triangulares totalmente no positivas de tamaño 2×2 tienen matriz combinada no negativa (Teorema 2.4.9).

Hemos determinado la naturaleza de la matriz combinada de una matriz signo-regular A con vector de signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ utilizando las coordenadas de su vector de signatura: ε_1, ε_2, ε_{n-2}, ε_{n-1} y ε_n.

De nuestros resultados se deduce que cuando la matriz combinada de una matriz signo-regular es no negativa, entonces esta matriz combinada es la identidad, I o es la anti-identidad, J.

Se determina la relación entre el primer y el segundo elemento, así como entre el penúltimo y el último elemento de diagonal de la matriz combinada de un matriz totalmente negativa de tamaño $n \times n$. Igualmente, se determina el signo de los elementos diagonales de la matriz combinada.

Se determinan condiciones necesarias y suficientes para que tres números dados sean los elementos diagonales de la matriz combinada de una matriz simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3.

Se determinan condiciones necesarias y suficientes para que tres números dados sean los elementos diagonales de la matriz combinada de una matriz no simétrica totalmente negativa de tamaño 3×3.

5.2. Lineas futuras

Aunque se ha estudiado la positividad de la matriz combinada de muchas clases de matrices, siempre hay objetivos que no se han alcanzado plenamente o nuevos problemas que aparecen relacionados con los estudiados. A continuación comentamos algunos problemas abiertos que se pueden estudiar.

1.- En el Capítulo 2 se han mostrado H–matrices cuya matriz combinada es no negativa y distinta de la identidad (ver Ejemplo 2.3.3). Por tanto, un problema abierto es estudiar que tipo de H–matrices tiene la propiedad de que su matriz combinada es no negativa. En este sentido, cabe primero estudiar las H–matrices de la clase invertible, y luego tratar de extender estos resultados a las H–matrices invertibles de la clase mixta.

2.- Se ha visto en el Capítulo 3 que la positividad de la matriz combinada de matrices signo-regulares está determinado por determinados elementos de la signatura de la matriz correspondiente. Nos planteamos si los resultados obtenidos en este capítulo se pueden extender a matrices invertibles no necesariamente signo-regulares pero con la condición de que los menores de determinados órdenes tengan el mismo signo no estricto.

3.- Los resultados del Capítulo 4 admiten diversas extensiones. Por ejemplo, se han obtenido resultados para matrices totalmente no positivas que son paralelos a los conocidos para matrices totalmente no negativas [30] y ahora como línea futura se plantea el estudio de estos resultados para matrices signo-regulares. En otra dirección, se puede plantear el estudio de caracterizar los elementos diagonales de la matriz combinada para matrices de órdenes mayor que 3.

Bibliografía

[1] T. Ando. Totally positive matrices. *Linear Algebra and Appl.*, 90:165–219, 1987.

[2] A. Berman y R. Plemmons. *Nonnegative matrices in Mathematical Sciences.* SIAM, Philadelphia, 1994.

[3] E. Bristol. Interaction analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-11:133–134, 1966.

[4] R. Bru, C. Corral, I. Giménez y J. Mas. Clases of general H–matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 429:2358–2366, 2008.

[5] R. Bru, M. Gassó, I. Giménez y M. Santana. Nonnegative combined matrices. *Journal of Applied Mathematics*, 2014:5 pages, Article ID 182354, 2014.

[6] R. Bru, M. Gassó, I. Giménez y M. Santana. Combined matrices of sign regular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, DOI: 10.1016/j.laa.2014.12.010, 2015.

[7] R. Bru, I. Giménez y A. Hadjidimos. Is A in $C^{n\times n}$ a general H–matrix? *Linear Algebra and its Applications*, 436:364–380, 2012.

[8] R. Brualdi. Some applications of doubly stochastic matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 107:77–100, 1988.

[9] R. Cantó, B. Ricarte y A.M. Urbano. Factorización de matrices totalmente no positivas y totalmente negativas. *XI Congreso de Matemática Aplicada. Ciudad Real, sept 2009*, páginas 1–8, 2009.

[10] R. Cantó, B. Ricarte y A.M. Urbano. Some characterizations of totally nonpositive (totally negative) matrices. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 20:241–253, 2010.

[11] J.M. Carnicer, T.N.T. Goodman y J.M. Peña. Linear conditions for positive determinants. *Linear Algebra and its Applications*, 292:39–59, 1999.

[12] V. Cortés. *Matrices estructuradas, eliminación y estrategias de pivotaje.* Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España, 1959.

[13] V. Cortés y J.M. Peña. Sign regular matrices and Neville elimination. *Linear Algebra and its Applications*, 421:53–62, 2007.

[14] V. Cortés y J.M. Peña. Decompositions of strictly sign regular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 429:1071–1081, 2008.

[15] V. Cortés y J.M. Peña. A stable test for strict sign regularity. *Mathematics of Computation*, 77:2155–2117, 2008.

[16] V. Cortés y J.M. Peña. Required nonzero patterns for nonsingular sign regular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 432:1990–1994, 2010.

[17] C. Cryer. Some properties of totally positive matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 15:1–25, 1976.

[18] S. Fallat. A remark on oscillatory matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 393:139–147, 2004.

[19] S. Fallat y P. Driessche. On matrices with all minors negative. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 7:92–99, 2000.

[20] S. Fallat y C.R. Johnson. Hadamard powers and totally positive matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 423:420–427, 2007.

[21] S. Fallat y C.R. Johnson. *Totally Nonnegative Matrices.* Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2011.

[22] S. Fallat, C.R. Johnson y R. Smith. The general totally positive matrix complexion problem with few unspecified entries. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 7:1–20, 2000.

[23] K. Fan. Inequalities for M–matrices. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.*, A67:1–25, 1964.

[24] M. Fiedler. Relations between the diagonal entries of an M–matrix and of its inverse. *Math-fyz. Caposis*, 12:123–128, 1962.

[25] M. Fiedler. Relations between the diagonal entries of two mutually inverse positive definite matrices. *Czechosl. Math. J.*, 14 (89):39–51, 1964.

[26] M. Fiedler. Notes on Hilbert and Cauchy matrices. *Linear Algebra and Appl.*, 432:351–356, 2010.

[27] M. Fiedler y R. Grone. Characterizations of sign patterns of inverse-positive matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 40:237–245, 1981.

[28] M. Fiedler y F. Hall. G–matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 436:731–741, 2012.

[29] M. Fiedler y L. Markham. An inequality for the Hadamard product of an M–matrix and an inverse M–matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 198:1–8, 1988.

[30] M. Fiedler y T.L. Markham. Combined matrices in special classes of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 435:1945–1955, 2011.

[31] M. Fiedler y V. Ptak. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czechosl. Math. J.*, 12:382–400, 1962.

[32] F. Gantmacher. *Matrix Theory.* Chelsea, New York, 1959.

[33] M. Gasca y J.M. Peña. A test for strict sign–regularity. *Linear Algebra and its Applications*, 198:133–142, 1994.

[34] M. Gassó y J.R. Torregrosa. A PLU factorization of rectangular matrices by the Neville elimination. *Linear Algebra and its Applications*, 357:163–171, 2002.

[35] M. Gassó y J.R. Torregrosa. A total positive factorization of rectangular matrices by the Neville elimination. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 25:986–994, 2004.

[36] M. Gassó y J.R. Torregrosa. A class of totally positive P–matrices whose inverses are M–matrices. *Applied Mathematics Letters*, 20:23–27, 2007.

[37] R.A. Horn y C.R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[38] R.A. Horn y C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[39] R. Huang. Nonsingular almost strictly sign regular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 436:4179–4192, 2012.

[40] C.R. Johnson y R. Reams. Scaling of symmetric matrices by positive diagonal congruence. *Journal of Linear and Multilinear Algebra*, 57:123–140, 2009.

[41] C.R. Johnson y H. Shapiro. Mathematical aspects of the relative gain array. *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods*, 7:627–644, 1986.

[42] C.R. Johnson y R. Smith. Inverse M–matrices, II. *Linear Algebra and its Applications*, 435:953–983, 2011.

[43] C. Jordán y J.R. Torregrosa. The totally positive completion problem. *Linear algebra and its applications*, 393:259–274, 2004.

[44] T.J. McAvoy. Interaction analysis. *Instrument Society in America*, 1983.

[45] B. Mourad. Generalization of some results concerning eigenvalues of a certain class of matrices and some applications. *Journal of Linear and Multilinear Algebra*, DOI:10.1080/03081087.2012.746330:1–10, 2012.

[46] J.M. Peña. M–matrices whose inverses are totally positive. *Linear Algebra and its Applications*, 221:189–193, 1995.

[47] J.M. Peña. A class of P–matrices with applications to the localization of the eigenvalues of a real matrix. *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, 22:1–20, 2001.

[48] J.M. Peña. Determinantal criteria for total positivity. *Linear Algebra and its Applications*, 332–334:131–137, 2001.

[49] J.M. Peña. On nonsingular sign regular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 359:91–100, 2003.

[50] J.M. Peña. Characterizations of Jacobi sign regular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 436:381–388, 2012.

[51] A. Pinkus. *Totally Positive Matrices.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[52] S. Skogestad y M. Morari. Variable selection for decentralized control. *Modeling, Identification and Control*, 13:113–125, 1992.

[53] R. Varga. *Matrix Iterative Analysis.* Springer Heidelberg, London New York, 2000.