

Resumen de la tesis doctoral: Atomic decompositions and frames in Fréchet spaces and their duals

J.M. Ribera

La presente memoria “Descomposiciones atómicas y frames en espacios de Fréchet y sus duales” trata diferentes áreas del análisis funcional con aplicaciones.

Los frames de Schauder se utilizan para representar un elemento arbitrario x de un espacio de funciones E mediante una serie a partir de un conjunto numerable fijado $\{x_j\}_j$ de elementos de este espacio de manera que los coeficientes de la reconstrucción de x dependen de forma lineal y continua de x . A diferencia de las bases de Schauder, la expresión de un elemento x en términos de la sucesión $\{x_j\}_j$, i.e. la fórmula de reconstrucción para x , no es necesariamente única. Las descomposiciones atómicas o los frames de Schauder son una estructura menos restrictiva que las bases, porque un subespacio complementado de un espacio de Banach con base tiene siempre un frame de Schauder natural, que se obtiene a partir de una base del superespacio. Incluso cuando el subespacio complementado tiene una base, no hay una forma sistemática de encontrarla. Las descomposiciones atómicas aparecen en aplicaciones al procesamiento de señales y la teoría de muestreo, entre otras áreas. Feichtinger caracterizó las descomposiciones atómicas de Gabor para espacios de modulación [3] que más tarde desarrolló en la teoría general presentada en el trabajo conjunto con Gröchenig [4] y [5]. Recientemente, Pilipovic y Stoeva [7] (véase también [8]) han estudiado el desarrollo en serie en límites inductivos y proyectivos (numerables) de espacios de Banach. En esta tesis empezamos un estudio sistemático de los frames de Schauder en espacios localmente convexos aunque nuestro interés principal son los espacios de Fréchet y sus duales. La diferencia principal respecto del concepto considerado en [7] es que nuestra aproximación no depende de una representación fijada del espacio de Fréchet como límite proyectivo de espacios de Banach.

El texto queda dividido en dos partes y un apéndice que incluye la notación, las definiciones y los resultados básicos que usaremos a lo largo de la tesis. La primera parte se centra en la relación entre las propiedades de un frame de Schauder en un espacio de Fréchet E y la estructura del espacio. En el segundo capítulo se definen y estudian los frames y las sucesiones de Bessel en espacios de Fréchet y sus duales. A continuación, presentamos una breve descripción de los capítulos:

En el Capítulo 1, estudiamos los frames de Schauder en los espacios de Fréchet y sus duales así como los resultados de perturbación. Definimos los frames de Schauder contractivos y acotadamente completos en espacios localmente convexos, estudiamos la dualidad de estos dos conceptos y su relación con la reflexividad del espacio. Caracterizamos cuándo un frame de Schauder incondicional es contractivo o acotadamente completo en términos de las propiedades del espacio. También se presentan varios ejemplos de frames de Schauder en espacios de funciones concretos. Nuestro interés principal en este capítulo es investigar la relación entre las propiedades de un frame de Schauder en un espacio de Fréchet E y la estructura del espacio, por ejemplo, si E es reflexivo o si contiene copias de c_0 o ℓ_1 . La mayoría

de los resultados incluidos en este capítulo están publicados por Bonet, Fernández, Galbis y Ribera en [1].

El segundo capítulo de la tesis está centrado en el estudio de las sucesiones de Λ -Bessel ($\{g_i\}_i \subset E'$), Λ -frames y frames respecto de Λ en el dual de un espacio localmente convexo de Hausdorff E , en particular, para espacios de Fréchet y espacios (LB) completos E , con Λ un espacio de sucesiones. Investigamos la relación de estos dos conceptos con los sistemas representantes en el sentido de Kadets y Korobeinik [6] y con los frames de Schauder, considerados en el Capítulo 1. Los resultados abstractos presentados aquí, cuando los aplicamos a espacios de funciones analíticas concretos, nos dan muchos ejemplos y consecuencias sobre los conjuntos de muestreo y los desarrollos en serie de Dirichlet. Presentamos varios resultados abstractos sobre Λ -frames en espacios (LB) completos. Finalmente, recogemos muchas aplicaciones, resultados y ejemplos alrededor de los conjuntos suficientes para espacios de Fréchet de funciones holomorfas y conjuntos débilmente suficientes para espacios pesados (LB) de funciones holomorfas. La mayoría de los resultados incluidos en este capítulo están enviados para publicar en un trabajo de Bonet, Fernández, Galbis y Ribera en [2].

En el apéndice introducimos algunos conceptos sobre espacios localmente convexos y sus duales con especial atención a los límites inductivos. Además, también introducimos algunos resultados relacionados con las bases topológicas. Establecemos las definiciones y las propiedades fundamentales que se pueden necesitar a lo largo de la tesis.

References

- [1] Bonet, J. and Fernández, C. and Galbis, A. and Ribera, J. M.; *Shrinking and boundedly complete Schauder frames in Fréchet spaces* J. Math. Anal. Appl. **410** (2014), no. 2, 953-966.
- [2] Bonet, J. and Fernández, C. and Galbis, A. and Ribera, J. M.; *Frames and representing systems in Fréchet spaces and their duals* Preprint (2014), available at <http://arxiv.org/abs/1411.3500>.
- [3] Feichtinger, H. G.; *Atomic characterizations of modulation spaces through Gabor-type representations* Rocky Mountain J. Math. **19** (1989), no. 1, 113-125.
- [4] Feichtinger, H. G. and Gröchenig, K. H.; *Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions I* J. Funct. Anal. **86** (1989), no. 2, 307-340.
- [5] Feichtinger, H. G. and Gröchenig, K. H.; *Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions II* Monatsh. Math. **108** (1989), no. 2-3, 129-148.
- [6] Kadets, V. M. and Korobeinik, Y. F.; *Representing and absolutely representing systems* Studia Math. **102** (1992), no. 3, 217-223.
- [7] Pilipović, S. and Stoeva, D. T.; *Series expansions in Fréchet spaces and their duals, construction of Fréchet frames* J. Approx. Theory **163** (2011), no. 11, 1729-1747.
- [8] Pilipović, S. and Stoeva, D. and Teofanov, N.; *Frames for Fréchet spaces* Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. **32** (2007), 69-84.