

Cálculo de los espectros de fotones de 6 y 15 MeV emitidos por un linac mediante la deconvolución de la matriz respuesta generada a partir de los gradientes de la dosis en profundidad calculadas mediante simulación MCNP.

^{1*}B. Juste, ¹R. Miró, ¹G. Verdú, ²S. Díez, ²J.M. Campayo

¹Instituto de Seguridad Industrial Radiofísica y Medioambiental (ISIRYM),
Universitat Politècnica de València, Camí de Vera s/n 46022 Valencia, España

²Hospital Clínic Universitari de València. Avda. Blasco Ibáñez, 17. 46010, València, Spain.

Resumen

El espectro de energía es la mejor forma para determinar la calidad de un haz de fotones particular emitido por un acelerador lineal médico (linac) ya que las características dosimétricas de un haz de radiación están directamente vinculadas a esta función.

Este trabajo se centra en el cálculo de los espectros de fotones de 6 y 15 MeV emitidos por un linac *Elekta Precise*.

El objetivo de reconstruir el espectro es incluirlo en los sistemas de planificación de tratamiento para mejorar las estimaciones de dosis a los pacientes de radioterapia. La metodología propuesta en este trabajo para determinar el espectro *Bremsstrahlung* emitido por el linac se centra en la reconstrucción a partir de los gradientes de las curvas de dosis en profundidad en una cuba de agua y su relación con el espectro incidente mediante la primera derivada espacial de la ecuación estándar de *Fredholm*.

Existe una estrecha relación entre la curva de dosis en profundidad en el eje central en una cuba de agua y el haz de fotones de alta energía emitido por un linac que la genera. Esta relación se basa en la teoría de que la curva de dosis en profundidad puede expresarse como la superposición lineal de las contribuciones de un continuo de haces de fotones monoenergéticos, cada uno ponderado por la fluencia de fotones en cada rango de energía. La regularización por TSVD es introducida para paliar los efectos del ruido asociados a la medición y el cálculo. El espectro obtenido, además se filtra mediante un Wavelet de *Haar* (nivel 4).

Este trabajo propone una técnica para mejorar significativamente la exactitud de los espectros *Bremsstrahlung* reconstruidos a partir de datos de dosis en profundidad utilizando métodos inversos. Mientras que los enfoques tradicionales utilizan directamente las curvas de dosis en profundidad, mostramos la ventaja de utilizar el gradiente de estos datos para la reconstrucción de espectros. Para validar los espectros reconstruidos hemos comparado su curva de dosis en profundidad correspondiente en una cuba de agua con curvas experimentales, siendo el porcentaje máximo de diferencia entre ambas curvas inferior al 3%.

PALABRAS CLAVE: Aplicaciones biomédicas de la radiación; método Monte Carlo; MCNP5; Unidad de radioterapia Elekta, reconstrucción de espectros.

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento del espectro de fluencia energética de los fotones producidos por un Acelerador lineal médico (Linac) es extremadamente útil para los cálculos de las dosis de manera precisa. El principal objetivo del cálculo exacto de la dosis es el de proporcionar la dosis prescrita a un volumen de destino, minimizando en la medida de lo posible el daño por radiación de los tejidos sanos circundantes [1].

El principal problema de la determinación directa de los espectros de fotones radica en que el flujo de fotones emitido en cada pulso es muy alto, resultando imposible el tradicional recuento de pulsos ya que se produce la saturación del detector. Por lo tanto, es necesario establecer una metodología que garantiza la obtención realista del espectro emitido por un linac. En este documento presentamos la solidez y utilidad práctica de utilizar medidas de dosis de profundidad en una cuba de agua para estimar el espectro emitido por un linac. La clave es utilizar un operador lineal para relacionar el espectro con las mediciones de dosis de profundidad a través de una ecuación integral *Fredholm*.

En este documento se ilustra el mal condicionamiento del problema matemático para la reconstrucción de espectros a partir de mediciones de dosis en profundidad. De acuerdo a esto, se presenta un enfoque novedoso de la metodología, minimizando la función mal condicionada. La contribución más importante de este trabajo propone una técnica para mejorar significativamente la precisión de los espectros de *Bremsstrahlung* reconstruidos a partir de los datos de gradiente de dosis en profundidad utilizando métodos inversos. Mientras que los enfoques típicos utilizan directamente las curvas de dosis de profundidad medidas, mostramos la ventaja de utilizar el gradiente de estos datos para la reconstrucción de espectros [2]. La regularización es introducida para paliar los efectos del ruido asociados a la medición y al cálculo. Una vez que se reconstruye el espectro, se utiliza un sofisticado modelo Monte Carlo de la cabeza de la unidad del Acelerador para simular las curvas de agua generadas mediante el espectro calculado teniendo en cuenta las interacciones con el blanco, colimador, mordazas, etc..

Los resultados se comparan con los resultados experimentales derivados de las mediciones en la cuba de agua. De acuerdo a esto, el presente trabajo se centra en explicar un método alternativo para calcular un espectro de haz de fotones de Acelerador lineal basado en medidas indirectas. En concreto, el estudio se ha centrado en la reconstrucción de un haz de fotones primario de 6 y 15 MeV emitido por el acelerador lineal médico *Elekta Precise* [3, 4], utilizado en el Hospital Clínic Universitari de Valencia, España.

Los ejemplos mostrados demuestran la ventaja del método de gradiente para resolver el problema inverso para obtener espectros *Bremsstrahlung*.

2. MATERIALES AND MÉTODOS

2.1. Teoría de la reconstrucción de espectros fotónicos

2.1.1. Problema Lineal

Los coeficientes de atenuación de los fotones dependen de su energía; por lo tanto, la transmisión a varias profundidades puede estar relacionada con el espectro mediante una ecuación integral de *Fredholm*, que teóricamente puede resolverse de manera exacta. Según esto, existe una estrecha relación entre la curva de dosis en profundidad en el eje central de una cuba de agua $d(x)$ y el haz de fotones de alta energía emitido por un linac, $\phi(E)$. Esta relación se basa en la teoría de que la curva de dosis de profundidad puede expresarse como la superposición lineal de las contribuciones de cada uno de los haces de fotones monoenergéticos consecutivos, cada uno ponderado por la fluencia de fotones de salida en cada energía E .

La curva de dosis de profundidad, $d(x)$, (donde x es la profundidad de la cuba de agua) puede ser expresada (Ec. 1) como una deconvolución del espectro de energía incidente $\phi(E)$ y una

matriz respuesta, A , que contiene información de las curvas de dosis en profundidad para haces monoenergéticos consecutivos:

$$(1)$$

En principio, esta ecuación lineal es invertible, por lo que debería ser posible obtener el espectro del linac que produce la curva dosis de profundidad. Sin embargo, el ruido asociado de las medidas de la curva de dosis experimental y la propia naturaleza del problema convierten este problema inverso en uno mal condicionado. Para resolver la ecuación, $d(x)$ puede ser discretizada en m intervalos, correspondientes a las diferentes posiciones de profundidad a analizar. La dosis a la posición de i se denota por d_i y puede expresarse como:

$$(2)$$

Del mismo modo, esto puede aplicarse al espectro, E , obteniendo la energía promedio para cada intervalo de energía del espectro:

$$(3)$$

donde E es el espectro de fotones con energía entre E_j y E_{j+1} .

Por otro lado, A se puede aproximar a una matriz $M \times N$, A , cuyos elementos son:

$$(4)$$

Se establece que d_i es la dosis de energía depositada en la posición i , para una energía del espectro j .

Esta ecuación se puede aproximar a:

$$(5)$$

donde $H = (H_1 \dots H_N)$ es el haz original desconocido y $D = (D_1 \dots D_M)^T$ es la curva de dosis en profundidad.

La matriz respuesta $A_{M \times N}$, puede obtenerse simulando las curvas de dosis en profundidad correspondientes para diferentes haces incidentes monoenergéticos con diferentes energías E_j para $j=1, \dots, N$ mediante el código Monte Carlo MCNP5 [5, 6].

Se calculó por simulación la matriz respuesta (dimensiones 350 x 375), con intervalo de energía entre 0-15 MeV (intervalos de energía de 40 keV) y la profundidad dividida en centímetros teniendo en cuenta la contribución de fotones y electrones. Esta matriz se presenta en la figura 1.

Esta matriz podría utilizarse para cualquier reconstrucción de espectros menores a 15 MeV siempre y cuando se contara con la curva de dosis en profundidad experimental para esa energía. Para probar la fiabilidad de la reconstrucción del espectro a partir de esta matriz, se ha realizado un procedimiento de deconvolución utilizando las herramientas de regularización de *Hansen Matlab*® de la descomposición en valores singulares [7].

Como se ha mencionado, $D = (D_1 \dots D_M)^T$ es la curva de dosis en profundidad adquirida experimentalmente en una cuba de agua de 50 cm x 50 cm x 50 cm irradiada por una unidad de

radioterapia *Elekta Precise*, disponible en el Hospital Clínico Universitario de Valencia, España, con un haz de fotones de 6 y 15 MeV y un tamaño de campo 10 cm x 10 cm.

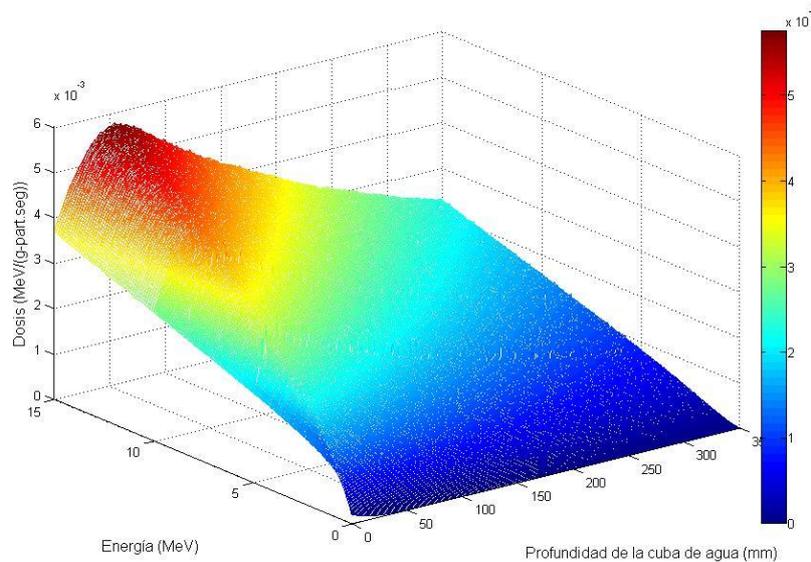


Figura 1: Matriz respuesta, $A \in \mathbb{R}_{M \times N}$

2.1.1. Discretización del problema

La discretización del problema ofrece un sistema matricial de ecuaciones lineales:

$$(6)$$

$$(7)$$

donde $A \in \mathbb{R}_{M \times N}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_N$ y $d \in \mathbb{R}_M$.

El espectro de fotones original ha sido definido aquí (Ec. 6) como el vector solución χ .

2.1.3. Metodología del gradiente

La particularidad de este trabajo es mejorar significativamente el proceso de reconstrucción de espectros Bremsstrahlung a partir de curvas de dosis en profundidad mediante la utilización de los gradientes de dosis y su relación con el espectro incidente a partir de una simple relación espacial derivada de la ecuación Fredholm estándar.

La derivada de la ecuación de Fredholm genera otra ecuación lineal para resolver un problema inverso y obtener el espectro χ .

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (8)$$

Así, como en el método anterior, se puede resolver el problema inverso basado en las curvas de gradiente de dosis en profundidad para estimar la distribución espectral. Para realizar la derivada de las curvas de dosis de profundidad, cada curva se ha ajustado a una función

polinómica de grado 10. Dado que el problema inverso de gradientes (Ec. 8) muestra ser notablemente mejor condicionado que el habitual problema inverso, la discretización se ha aplicado a las matrices de gradientes.

(9)

La matriz de gradientes se presenta en la Figura 2.

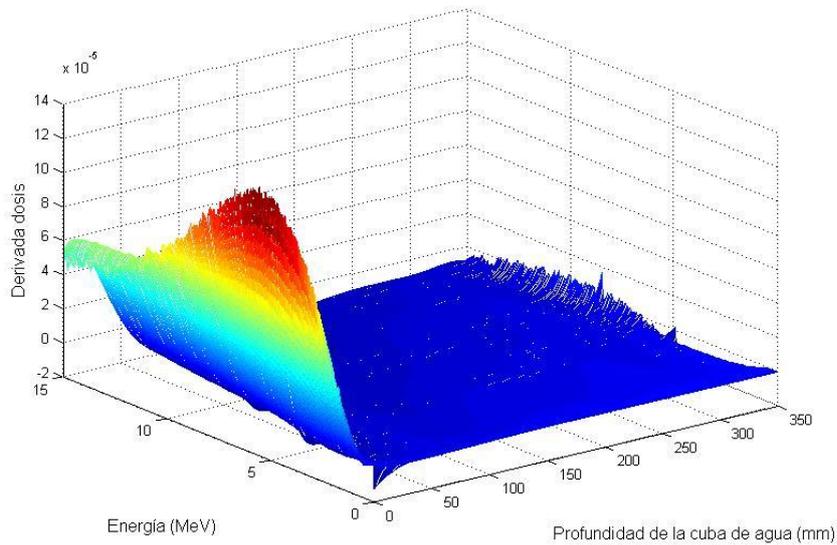


Figura 2: Matriz respuesta de gradientes, $A \in \mathbb{R}_{M \times N}$

La condición de Picard discreta de la matriz de gradientes se presenta en la figura siguiente (Figura 3). Puede observarse que los coeficientes de Fourier decaen a un determinado índice i , desde el cual los coeficientes se vuelven más estables. Por lo tanto, el intervalo donde se cumple la condición de Picard es limitado. Esta condición discreta de Picard permite concluir que, aunque la matriz está mal condicionada, el problema si tiene una solución numérica. También permite determinar que hay 10 valores singulares que tienen información útil, en comparación con el resto que sólo añaden ruido.

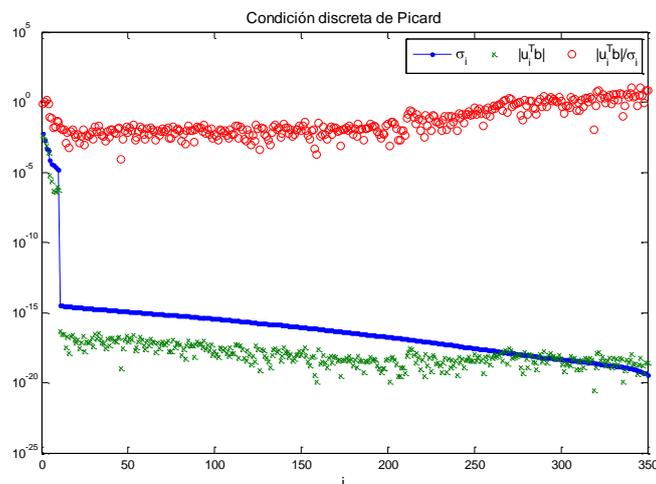


Figura 3: Condición discreta de Picard para la matriz respuesta de gradientes.

2.1.4. Descomposición en Valores Singulares

El sistema de ecuaciones resultante está mal condicionado, por lo tanto, es necesario aplicar técnicas numéricas sofisticadas para resolver esta dificultad; Concretamente hemos utilizado la metodología de Descomposición en Valores Singular (SVD de sus siglas en inglés *Singular Value Decomposition*):

SVD resuelve la ecuación (Ec. 6) como:

$$(10)$$

Donde u_i son los vectores singulares ortonormales y σ_i los valores singulares.

$$(11)$$

donde U es una matriz $M \times N$ cuyas columnas, $u_j, j = 1, \dots, N$, son denominadas vectores singulares de izquierda y son vectores ortonormales. Σ es una matriz diagonal $N \times N$ cuyos elementos, σ_i , son los valores singulares A' y V es una matriz ortogonal $N \times N$ cuyas columnas, $v_i, i = 1, \dots, N$, son los vectores singulares de derecha.

El algoritmo SVD funciona muy bien para datos sin ruido. Para los datos afectados por ruido, la reconstrucción via SVD directa es extremadamente inexacta (en muchos órdenes de magnitud), pero hay varios regímenes de regularización que mejoran su rendimiento. Hemos analizado la fiabilidad de la descomposición Truncada de Valores Singulares (TSVD). Con este algoritmo numérico, puede obtenerse una solución óptima, χ , generando una nueva matriz de respuesta, eliminando las partes de la solución correspondiente a los valores singulares más pequeños. Este método implica la selección del valor límite y el ajuste a cero de los elementos de la diagonal de la matriz que sean más pequeños que este límite.

Una forma para determinar el parámetro de truncamiento óptimo, k , es trazar la curva de L, que consta de un segmento relativamente vertical y una línea relativamente horizontal en un escenario ideal [8]. Para esta curva, se traza la norma 2 del vector solución, $\|\chi\|$, frente a la norma 2 del vector residual, $\|Ax - b\|_2$, para diferentes valores de k . Se recomienda buscar el truncamiento parámetro k , como el valor más cercano al punto de máxima curvatura de la curva, es decir, seleccionando el valor correspondiente a la esquina de la forma L.

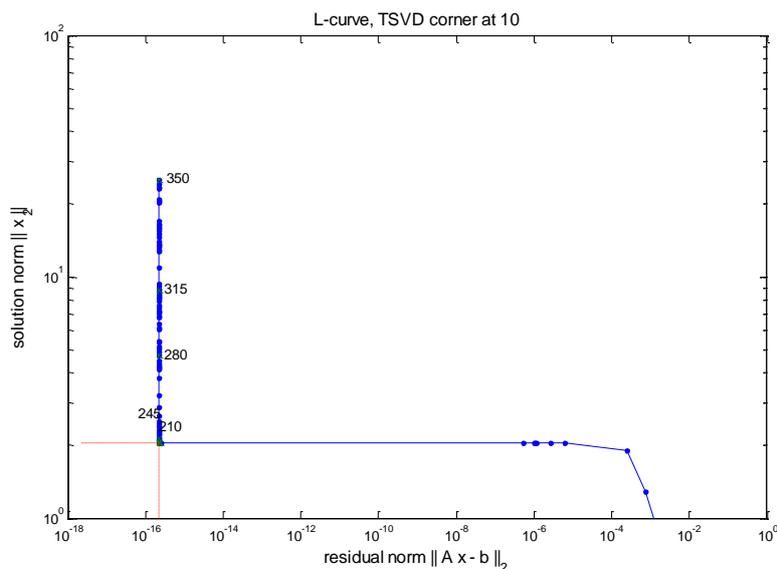


Figura 4: Curva L de la matriz respuesta de gradientes.

La figura 4 muestra la curva L correspondiente obtenida al aplicar el método TSVD para diferentes valores de k para las matrices estudiadas. Puede observarse que la esquina corresponde a un valor de $k = 10$. Para valores bajos de k , se produciría una pérdida importante de la resolución, mientras que para los altos valores de k , aumentaría el ruido del espectro deconvolucionado.

2.2. Curvas de dosis en profundidad por simulación Monte Carlo.

Para los haces energéticos de 6 y 15 MeV que estamos considerando, las curvas de dosis en profundidad de haces mono-energéticos se calcularon utilizando el código Monte Carlo MCNP5. La distancia fuente superficie (SSD) desde el punto de origen hasta la superficie del agua en el eje central de una cuba de agua ha sido 100 cm. El tamaño del campo utilizado ha sido de $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Cada simulación de Monte Carlo fue ejecutada hasta que la incertidumbre en todos los puntos evaluados de las curvas de dosis en profundidad calculada fue inferior al 0,3%. Para registrar la contribución de fotones y electrones, se ha utilizado el registro (tally) FMESH con sus respectivos factores de conversión de flujo a dosis, aplicados mediante las tarjetas DE/DF en MCNP.

En cuanto al transporte de la radiación, se ha considerado un tratamiento detallado de la física para una simulación acoplada de fotones y electrones teniendo en cuenta los siguientes procesos físicos: efecto fotoeléctrico con producción de fluorescencia, dispersión Compton y Thomson y producción de pares en el rango de energía entre 0.001 y 16 MeV. La contribución fotonuclear aún no se ha incluido en este estudio y será el objetivo de posteriores investigaciones.

3. RESULTADOS

Las Figuras 5 y 6 muestran los espectros de fotones reconstruidos obtenidos mediante la técnica de gradiente de dosis y el método TSVD para los haces de fotones de 6 y 15 MeV.

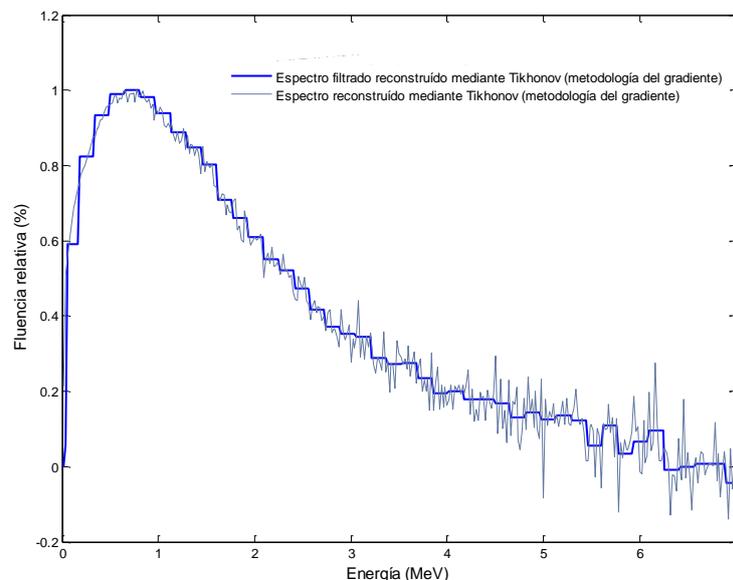


Figura 5: Espectro de 6 MeV reconstruido mediante el uso de la técnica de gradientes de dosis en profundidad.

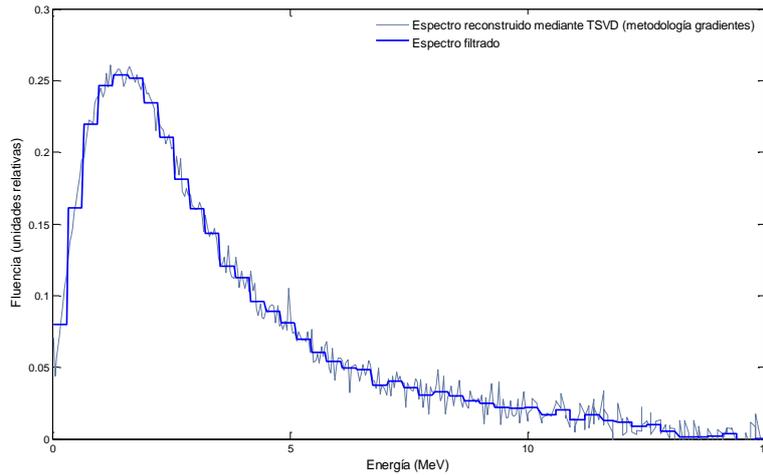


Figura 6: Espectro de 15 MeV reconstruido mediante el uso de la técnica de gradientes de dosis en profundidad.

Ambas figuras presentan el espectro reconstruido junto con un filtro de *Haar* (3er nivel). Para validar los espectros reconstruidos hemos utilizado una simulación de Monte Carlo completa para generar la curva dosis de profundidad utilizando los espectros reconstruido 6 y 15 MeV respectivamente como fuente de entrada. Las curvas de dosis en generadas profundidad han sido comparadas con los datos reales experimentales medidos en el hospital, (figura 9 y 10), mostrando una diferencia media cuadrática de 1% y 3% correspondientemente. Como puede verse, la técnica de gradientes da una buena representación de las curvas de dosis en profundidad y representa con precisión el build up y la dosis a profundidades mayores, demostrando la solidez de esta metodología de reconstrucción.

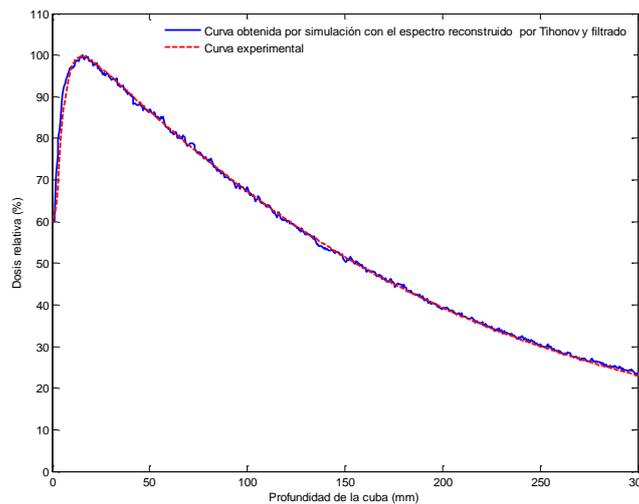


Figura 7: Curva de dosis en profundidad obtenida con el espectro reconstruido de 6 MeV.

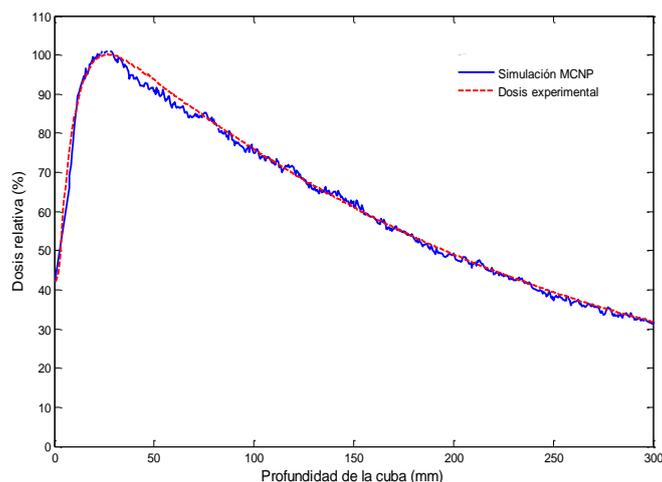


Figura 8: Curva de dosis en profundidad obtenida con el espectro reconstruido de 15 MeV.

4. CONCLUSIONES

Para caracterizar el espectro de fotones primario emitido por un linac, se obtuvo la función respuesta del proceso. Esta función se aproxima a una matriz respuesta que contiene toda la información necesaria para deconvolucionar el gradiente de la curva de dosis en profundidad medida experimentalmente en una cuba de agua y simulada mediante Monte Carlo.

Un problema importante en el proceso de deconvolución es obtener la inversa de la matriz respuesta. Una matriz pseudo-inversa basada en el método TSVD se utiliza para obtener una buena aproximación de la matriz inversa. Esta matriz puede obtenerse fácilmente y permite una reconstrucción rápida y precisa del espectro principal.

REFERENCIAS

- [1] ICRU Report 24 - "Determination of absorbed dose in a patient irradiated by beams of X or gamma rays in radiotherapy", International Commission on Radiation Units and Measurements, 1976
- [2] P. M. Charland, L. D. Paniak, "Enhanced bremsstrahlung spectrum reconstruction from depth-dose gradients". *Physics in Medicine & Biology*, 14, pp. 3245-3262, (2005).
- [3] C. Bramoullé, F. Husson, J.P. Manens, "Monte Carlo (PENELOPE code) study of the x-ray beams from SL linacs (Elekta)," *Physica Medica*, Vol. XVI, n.3 (2000).
- [4] Juste B., Mota M.E., Miró R., Gallardo S., Verdú G. "Monte Carlo modeling of the Elekta precise linear accelerator: validation of dose distribution in a heterogeneous water phantom". Joint international topical meeting on mathematics & computation and supercomputing in nuclear applications (M&C + SNA 2007). Monterey, California, April 15-19, 2007, on CD-ROM, American Nuclear Society, LaGrange Park, IL (2007)
- [5] X-5 Monte Carlo team, "MCNP – A General Monte Carlo NParticle Transport Code, Version 5", LA-UR-03-1987, Los Alamos National Laboratory, (2003).
- [6] J. Cheatham and F Brown, "Increasing mcnp5 calculation speed by compiler optimization", LA-UR-05-5950, Los Alamos Nacional Laboratory, August 2005.
- [7] P.C. Hansen, "Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems", *Numerical Algorithms*, Vol. 6, pp. 1-35, (1994).
- [8] P.C. Hansen and D.P. O'Leary, "The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems", *Siam J. Sci. Comput.*, Vol. 14, No. 6, pp. 487–1503, (1993).