



**CARACTERIZACIÓN MODAL DE GUÍAS
ARBITRARIAS Y APLICACIÓN A
DISPOSITIVOS DE MICROONDAS**

Santiago Cogollos Borrás

Director: Dr. Vicente E. Boria Esbert

**Tesis Doctoral presentada en la Universidad Politécnica
de Valencia para la obtención del título de Doctor Inge-
niero de Telecomunicación**

Valencia, Mayo 2002

—Escribes todo lo que ocurre —dijo ella.

—Todo lo que escribo ocurre —fue la respuesta.

(...)

—Pero, ¿no puedes hojear tu libro y ver que sucederá?

—¡Páginas en blanco! —fue la respuesta—. Sólo puedo mirar atrás y ver lo que ha ocurrido. Podía leerlo mientras lo escribía. Y lo sé porque lo leí. Y lo escribí porque sucedió. De esta forma, por mi mano, la Historia Interminable se escribe a sí misma.

MICHAEL ENDE. *La historia interminable*.

Agradecimientos

La historia del trabajo escrito en estas páginas empezó el día que entré en el despacho de Vicente Boria buscando a alguien que pudiera dirigirme en mis estudios de doctorado y que pudiera proporcionarme un buen tema de trabajo. Ese día supuso un punto de inflexión en mi vida. Encontré lo que buscaba, sin saber donde me metía. Como estudiante que acababa de obtener su título de ingeniero, yo sopesaba todo lo que había aprendido en mis años de carrera y creía que, después de todo lo aprendido, no quedaba mucho más por hacer (sobretudo en un campo tan trillado como el electromagnetismo). No volveré a cometer el error de volver a opinar de la misma manera. Agradezco a mi director que haya sido para mi un gran maestro y un gran amigo. Agradezco que haya dedicado tanto tiempo a mejorar y aumentar todos mis conocimientos de ingeniería, con las apasionantes discusiones habidas sobre los temas más diversos y que haya abierto mis ojos a un campo inmenso. Le agradezco también que gracias a su orientación y ejemplo, también yo hoy me dedico al gratificante trabajo de enseñar. No creo que esa dedicación me la hubiera podido proporcionar nadie más en tan gran medida. Mi gran pena es que jamás podré saldar la deuda.

Agradecer a Ana Vidal sus consejos en diferentes aspectos de esta tesis, tanto estéticos como técnicos. También vaya con ella mi más sincera gratitud por su inestimable y desinteresada ayuda.

Quiero aquí mencionar también a Héctor Esteban y a Carmen Bachiller, compañeros durante toda la carrera, y de los pocos amigos que he conseguido hacer en esta universidad. Su integridad y amistad incondicional me han sido siempre de gran apoyo. Siempre han estado ahí cuando los he necesitado. Decir que los consejos de Héctor sobre \LaTeX han hecho posible la maquetación de esta tesis con una calidad que me parece impensable de alcanzar de no haber sido por su ayuda (de los errores sólo yo soy responsable, por supuesto). Su paciencia conmigo ha sido ilimitada, y será otro de los favores por los que le quedaré siempre en deuda.

Mi gratitud a Pablo Soto, un compañero y amigo cuya visión sobre filtros y electromagnetismo en general siempre he considerado excepcional. Mis discusiones con él sobre estos temas me han proporcionado una inestimable ayuda y apoyo, tanto en esta tesis como en mi trabajo como profesor.

A Benito Gimeno no puedo olvidarlo por su ayuda tanto en temas de investigación, como científicos en general, donde su consejo ha sido siempre apreciado en gran medida. También le agradezco que se preocupe por mi en el plano personal. Siento no poder dedicar tanto

tiempo a seguir sus consejos (ni los de Ana Vidal) como él quisiera.

A mis amigos del pueblo, estén donde estén, que han sabido apartarme de un trabajo absorbente cuando era necesario y hacerme reír cuando mi estado de ánimo me hacía poco soportable. Gracias por estar siempre ahí.

Nunca olvidaré el apoyo e interés de mi familia que han confiado en mí siempre. Me han comprendido y han sabido en cada momento hacerme sentir confiado en mis posibilidades. Su confianza en mí ha sido en todo momento mayor que la mía propia. Espero que la vida me de muchos más años para compartir con ellos.

El trabajo desarrollado aquí ha sido enriquecedor y ha supuesto bastantes noches en vela. Ha habido, como no, buenos momentos. Y los malos momentos no han escaseado. Sólo espero que los que confiaron en mí no hayan sido defraudados. Por mi parte, con lo aprendido me considero sobradamente compensado por los malos momentos, y en deuda por lo mucho conseguido.

Mirando ahora atrás, me pregunto qué hubiera sucedido si cierto día hubiera pasado de largo delante de cierto despacho...

Valencia
17 de julio de 2003

Santiago Cogollos Borrás

Índice

Agradecimientos	v
1. Introducción	1
1.1. Resumen	1
1.2. Resum	3
1.3. Abstract	5
2. Caracterización modal de guías arbitrarias	9
2.1. Introducción	9
2.2. El método BI-RME	10
2.2.1. Ecuaciones fundamentales	11
2.2.2. Modos TM	15
2.2.3. Modos TE	16
2.2.4. Elementos singulares	17
2.2.5. Integrales con singularidades logarítmicas	23
2.2.6. Ejemplo: Guía con reentrante	28
2.3. Elementos curvos	31
2.3.1. Integrales con singularidades logarítmicas	31
2.3.2. Ejemplos: Guías con elementos curvos	39
3. Análisis de uniones mediante ecuación integral	49
3.1. Introducción	49
3.2. Descomposición del campo electromagnético transversal	50
3.3. Análisis de una unión planar entre dos guías de ondas.	52
3.4. Extracción de la dependencia con la frecuencia	59
3.5. Resolución con el método de los momentos	64
4. Teoría de cavidades	73
4.1. Introducción	73
4.2. La unión cúbica	75
4.3. Conexión de matrices de impedancia y admitancia generalizada	80
4.4. Ejemplos de aplicación de la unión cúbica	86

4.4.1.	La T-mágica	86
4.4.2.	La unión de 6 puertos	87
4.4.3.	La unión T con esquinas redondeadas	88
4.5.	La unión cúbica con accesos arbitrarios	89
4.5.1.	La unión cúbica general	91
4.6.	Ejemplos de aplicación de la unión cúbica arbitraria	101
4.6.1.	La unión T con esquinas redondeadas	101
4.6.2.	La T-mágica con esquinas redondeadas	106
4.7.	Conclusiones	109
4.8.	Anexo: Series para el cálculo de los elementos de la GAM	110
5.	Análisis y diseño de filtros con esquinas redondeadas	117
5.1.	Introducción	117
5.2.	Principales métodos de fabricación	118
5.2.1.	Corte en plano H	119
5.2.2.	Corte en plano E	120
5.2.3.	Nueva técnica de fabricación	121
5.3.	Técnica de análisis	124
5.3.1.	Análisis de guías con esquinas redondeadas	124
5.3.2.	Análisis de transiciones entre guías redondeadas	124
5.3.3.	Análisis de un filtro inductivo con esquinas redondeadas	129
5.4.	Procedimiento de diseño	130
5.5.	Validación experimental	134
5.6.	Conclusiones	140
6.	Análisis eficiente de diplexores	143
6.1.	Introducción	143
6.2.	Geometrías	146
6.3.	Reducción del tiempo de computación	147
6.3.1.	Reducción de matrices de admitancias e impedancias	150
6.3.2.	Reducción e inversión de matrices	154
6.4.	Análisis del diplexor	156
6.5.	Conclusiones	164
A.	Aceleración de la convergencia de series	169
A.1.	Aceleración de la función de Green	169
A.2.	Aceleración del gradiente de la función de Green	173
A.3.	Aceleración de la diádica $\nabla\nabla'g$	178
A.3.1.	Componente $\hat{x}\hat{x}$	179
A.3.2.	Componente $\hat{x}\hat{y}$	180
A.3.3.	Cálculo del resto de componentes de la diádica	181

A.4. Cálculo de transformadas de Fourier	182
B. Condiciones de contorno para estructuras simétricas	187
B.1. Introducción	187
B.2. Planteamiento del problema	187
B.2.1. Ortogonalidad de las soluciones	189
B.2.2. Corolarios útiles	190
B.3. Condiciones de contorno	191
B.3.1. Modos TM^z	191
B.3.2. Modos TE^z	192
B.4. Simetrías en dispositivos en guía rectangular	193
B.4.1. Caso inductivo	193
B.4.2. Caso capacitivo	194
B.5. Conclusiones	195
C. Teoremas sobre problemas de autovalores	199
C.1. Introducción	199
C.2. Planteamiento del problema	200
C.3. Principios fundamentales	201
C.4. Continuidad de los autovalores	203
C.5. Distribución asintótica de autovalores	204
C.5.1. La ecuación $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ para una guía rectangular	205
C.5.2. Distribución asintótica para dominio arbitrario	207
C.6. Nodos de autofunciones	209
D. Publicaciones	213
D.1. El método BI-RME	213
D.2. Teoría de cavidades	214
D.3. Análisis y diseño de filtros con esquinas redondeadas	215
D.4. Análisis eficiente de diplexores	215
D.5. Análisis de uniones planares mediante ecuación integral	215

Capítulo 1

Introducción

1.1. Resumen

La complejidad de las modernas técnicas de análisis y diseño de dispositivos de microondas ha venido incrementándose en los últimos tiempos. El objetivo de estas técnicas es mejorar la precisión en el análisis del comportamiento de dispositivos de microondas y, además, poder realizar un mejor diseño con herramientas CAD (en inglés *Computer Aided Design*) de diseño asistido por ordenador. Esta necesidad de mejora de herramientas de análisis y diseño ha venido impulsada por la tendencia actual a incrementar los servicios de telecomunicación en la banda de microondas y ondas milimétricas.

Los nuevos servicios requieren una mejor tecnología debido a la saturación del espectro radioeléctrico. Esta ocupación del espectro ha impulsado la apertura de nuevos servicios en bandas de frecuencias cada vez más elevadas. En general, este incremento de la frecuencia de trabajo supone una disminución del tamaño físico y peso de los dispositivos y, con ello, una necesidad de mayor precisión en los procesos de fabricación.

Esta saturación del espectro ha sido más acusada en el sector espacial, donde incrementar las frecuencias de operación de los dispositivos a bordo de satélites supone la ventaja de un menor tamaño de dispositivos. En contrapartida a esta disminución de tamaño, tenemos varios inconvenientes graves:

- Precisión limitada de los procesos de fabricación de estos dispositivos.
- Mayores restricciones en el diseño de cualquier dispositivo que debe soportar las condiciones adversas del entorno espacial.
- Elevada sensibilidad del diseño final, que conlleva un gran desvío de la respuesta del dispositivo si se altera mínimamente cualquier parámetro del diseño ideal.
- Elevado costo de los procesos de fabricación si se requiere una alta precisión en la fabricación del producto final.

Todos estos inconvenientes han generado un gran interés entre la comunidad científica actual. Cualquier avance en el sentido de eliminar los inconvenientes anteriores redonda en una mejora de la tecnología, y el consiguiente incremento de la calidad de los servicios ofrecidos.

Ejemplos de las limitaciones de los procesos de fabricación son la imposibilidad de construir guías de onda de esquinas con ángulos de 90° exactos y la dificultad de mecanizar esquinas rectas en el interior de cavidades. La introducción de radios de curvatura finitos en guías de onda rectangulares supone que los dispositivos fabricados con ellas (filtros, multiplexores, ortomodos, acopladores, divisores de potencia y un largo etcétera) van a tener una alteración en su comportamiento radioeléctrico respecto al que debiera tener el diseño ideal del dispositivo.

En esta tesis se desarrollan una serie de técnicas de análisis y diseño de dispositivos que harán hincapié en la necesidad de precisión en los mencionados procesos de análisis y diseño de dispositivos de microondas. A su vez, se desarrollan técnicas de aceleración de algoritmos de análisis que reducen en gran medida el tiempo de caracterización de estructuras que componen los dispositivos. Debido a la complejidad de los dispositivos actuales, un incremento en la velocidad de análisis mejora a su vez los tiempos requeridos para el diseño y desarrollo de estos complejos dispositivos. Esto es debido a que las técnicas CAD requieren algoritmos de optimización que invocan a los módulos de análisis repetidas veces.

Este objetivo de aumento de velocidad y precisión en el análisis y diseño ha requerido una cuidadosa elección de técnicas así como una profunda mejora de las mismas.

En el capítulo 2 se presentará un método muy preciso de análisis de guías de onda cuya sección transversal puede tener una forma completamente arbitraria. Una vez enunciada y comprobada la teoría, se pasa a la mejora de la técnica para el caso de perturbaciones de la sección transversal que aparecen en el mecanizado de dispositivos en guía. En los ejemplos expuestos en dicho capítulo se demuestra una mejora de precisión muy importante respecto a la teoría original.

Para el análisis de dispositivos se requiere poder estudiar la unión de diferentes guías. En el capítulo 3 se desarrolla detalladamente la teoría de un método basado en una ecuación integral que se ha revelado como uno de los más rápidos, eficientes y precisos para el estudio de uniones planares entre guías de diferentes secciones transversales.

El siguiente elemento fundamental a estudiar son las cavidades formadas por las uniones de varias guías que confluyen en una misma zona. En el capítulo 4 se presentan un par de métodos novedosos que caracterizan la unión de guías arbitrarias. La elevada eficiencia y precisión de estos métodos ha sido demostrada a través de los dispositivos simulados empleando, además, las técnicas enunciadas en los primeros capítulos combinadas adecuadamente. Los resultados de las simulaciones han sido comparados con medidas obtenidas de prototipos construidos para validar la teoría expuesta, con excelentes resultados.

Para la validación de todas las técnicas expuestas, y así demostrar su versatilidad y eficiencia en cuanto al análisis y diseño de dispositivos complejos, se presenta en el capítulo 5 el procedimiento a seguir para diseñar, de manera completamente automatizada, un filtro

formato por guías de secciones transversales redondeadas. De esta manera se consiguen incluir los efectos de mecanizado de las piezas en el diseño de este tipo de filtros. También en este capítulo se ha propuesto una técnica de fabricación de filtros novedosa que evita los elevados costes en el mecanizado de filtros. Tras la fase de diseño del filtro, se ha procedido a su construcción y posterior medición del mismo para comprobar la validez del diseño. Los resultados que se podrán observar son francamente excelentes.

Finalmente, con el objetivo de comprobar la validez conjunta de todas las técnicas expuestas, se ha estudiado en el capítulo 6 el efecto de la precisión finita en la mecanización de un diplexor real embarcado en un satélite. Los tiempos requeridos para la simulación de este dispositivo revelan la elevada potencia de las técnicas de análisis desarrolladas en esta tesis.

En el apéndice A se muestra una potente técnica de aceleración de series lentamente convergentes que ha sido la piedra angular del potente método de análisis mostrado en el capítulo 2.

En el apéndice B se explica con detalle la forma de eliminar de los cálculos modos electromagnéticos no acoplados en estructuras simétricas. Éste ha sido un punto clave para poder analizar de manera eficiente y precisa estructuras complejas como el filtro con esquinas redondeadas del capítulo 5 y el diplexor mostrado en el capítulo 6.

En el apéndice C se recogen algunos teoremas útiles para la mejor comprensión y justificación de algunos efectos observados sobretodo en el capítulo 2.

Finalmente, en el apéndice D, se recogen todas las publicaciones que esta tesis ha generado. Se referencian revistas y actas de congresos tanto nacionales como internacionales.

1.2. Resum

La complexitat de les modernes tècniques d'anàlisi i disseny de dispositius de microones ha vingut incrementant-se en els últims temps. L'objectiu d'estes tècniques és millorar la precisió en l'anàlisi del comportament de dispositius de microones i, a més, poder realitzar un millor disseny amb ferramentes CAD (en anglés *Computer Aided Design*) de disseny assistit per ordinador. Esta necessitat de millora de ferramentes d'anàlisi i disseny ha vingut impulsada per la tendència actual a incrementar els servicis de telecomunicació en la banda de microones i ones mil·limètriques.

Els nous servicis requerixen una millor tecnologia a causa de la saturació de l'espectre radioelèctric. Esta ocupació de l'espectre ha impulsat l'obertura de nous servicis en bandes de freqüències cada vegada més elevades. En general, este increment de la freqüència de treball suposa una disminució del tamany físic dels dispositius i, amb això, una necessitat de major precisió en els processos de fabricació.

Esta saturació de l'espectre ha sigut més acusada en el sector espacial, on incrementar les freqüències d'operació dels dispositius a bord de satèl·lits suposa l'avantatge d'un menor tamany de dispositius. En contrapartida a esta disminució de tamany i pes, tenim diversos inconvenients greus:

- Precisió limitada dels processos de fabricació d'estos dispositius.
- Majors restriccions en el disseny de qualsevol dispositiu que ha de suportar les condicions adverses de l'entorn espacial.
- Elevada sensibilitat del disseny final, que comporta una gran desviació de la resposta del dispositiu si s'altera mínimament qualsevol paràmetre del disseny ideal.
- Elevat cost dels processos de fabricació si es requereix una alta precisió en la fabricació del producte final.

Tots estos inconvenients han generat un gran interés entre la comunitat científica actual. Qualsevol avanç en el sentit d'eliminar els inconvenients anteriors redunda en una millora de la tecnologia, i el consegüent increment de la qualitat dels servicis oferits.

Exemples de les limitacions dels processos de fabricació són la impossibilitat de construir guies d'ona de cantons amb angles de 90° exactes i la dificultat de mecanitzar cantons rectes en l'interior de cavitats. La introducció de radis de curvatura finits en guies d'ona rectangulars suposa que els dispositius fabricats amb elles (filtres, multiplexors, ortomodes, acobladors, divisors de potència i un llarg etcètera) van a tindre una alteració en el seu comportament radioelèctric respecte al que haguera de tindre el disseny ideal del dispositiu.

En esta tesi es desenvolupen una sèrie de tècniques d'anàlisi i disseny de dispositius que insistiran en la necessitat de precisió en els esmentats processos d'anàlisi i disseny de dispositius de microones. Alhora, es desenvolupen tècniques d'acceleració d'algoritmes d'anàlisi que reduïxen en gran manera el temps de caracterització d'estructures que componen els dispositius. A causa de la complexitat dels dispositius actuals, un increment en la velocitat d'anàlisi millora a la seua vegada els temps requerits per al disseny i desenvolupament d'estos complexos dispositius. Açò és degut al fet que les tècniques CAD requereixen algoritmes d'optimització que invoquen als mòduls d'anàlisi repetides vegades.

Este objectiu d'augment de velocitat i precisió en l'anàlisi i disseny ha requerit una acurada elecció de tècniques així com una profunda millora de les mateixes.

En el capítol 2 es presentarà un mètode molt precís d'anàlisi de guies d'ona la secció transversal de les quals pot tindre una forma completament arbitrària. Una vegada enunciada i comprovada la teoria, es passa a la millora de la tècnica per al cas de pertorbacions de la secció transversal que apareixen en el mecanitzat de dispositius en guia. En els exemples exposats en el capítol esmentat, es demostra una millora de precisió molt important respecte a la teoria original.

Per a l'anàlisi de dispositius es requereix poder estudiar la unió de diferents guies. En el capítol 3 se desenvolupa detalladament la teoria d'un mètode basat en una ecuació integral que s'ha revelat com un dels més ràpids, eficients i precisos per a l'estudi d'unions planars entre guies de diferents seccions transversals.

El següent element fonamental a estudiar són les cavitats formades per les unions de diverses guies que conflüixen en una mateixa zona. En el capítol 4 es presenten un parell

de mètodes nous que caracteritzen la unió de guies arbitràries. L'elevada eficiència i precisió d'estos mètodes ha sigut demostrada a través dels dispositius simulats emprant, a més, les tècniques enunciades en els primers capítols combinades adequadament. Els resultats de les simulacions han sigut comparats, amb excel·lents resultats, amb mesures obtingudes de prototips construïts per a validar la teoria exposada.

Per a la validació de totes les tècniques exposades, i així demostrar la seua versatilitat i eficiència pel que fa a l'anàlisi i disseny de dispositius complexos, es presenta en el capítol 5 el procediment a seguir per a dissenyar, de manera completament automatitzada, un filtre format per guies de seccions transversals arrodonides. D'esta manera s'aconsegueixen incloure els efectes de mecanitzat de les peces en el disseny de este tipus de filtres. També en este capítol s'ha proposat una nova tècnica de fabricació de filtres que evita els elevats costos en el mecanitzat de filtres. Després de la fase de disseny del filtre, s'ha procedit a la seua construcció i posterior mesurament del mateix per a comprovar la validesa del disseny. Els resultats que es podran observar són francament excel·lents.

Finalment, amb l'objectiu de comprovar la validesa conjunta de totes les tècniques exposades, s'ha estudiat en el capítol 6 l'efecte de la precisió finita en la mecanització d'un diplexor real embarcat en un satèl·lit. Els temps requerits per a la simulació d'este dispositiu revelen l'elevada potència de les tècniques d'anàlisi desenvolupades en esta tesi.

En l'apèndix A es mostra una potent tècnica de acceleració de sèries lentament convergents que ha sigut la pedra cantonera del potent mètode d'anàlisi mostrada en el capítol 2.

En l'apèndix B s'explica amb detall la forma d'eliminar dels càlculs modes electromagnètics no acoblats en estructures simètriques. Este ha sigut un punt clau per a poder analitzar de manera eficient i precisa estructures complexes com el filtre amb cantons arrodonits del capítol 5 i el diplexor mostrat en el capítol 6.

En l'apèndix C s'arrepleguen alguns teoremes útils per a la millor comprensió i justificació d'alguns efectes observats sobretot en el capítol 2.

Finalment, en l'apèndix D, s'arrepleguen totes les publicacions que esta tesi ha generat. Es referencien revistes i actes de congressos tant nacionals com internacionals.

1.3. Abstract

Nowadays, the complexity of modern analysis and design techniques for microwave devices has been increasing. The aim of this techniques is to improve the accuracy in the analysis of microwave devices behavior as well as to perform a better design with CAD (Computer Aided Design) tools. This necessity for improvement of the analysis and design tools has been boosted by the current tendency to increase telecommunication services in the microwave and millimeter-wave bands.

A better technology is required by new services due to the spectrum saturation. This spectrum occupation has boosted the opening-up of new services in increasingly higher frequency bands. In general, this increase of the operating frequency involves the reduction of

the physical size of devices and, consequently, the requirement of higher accuracy in the manufacturing processes.

This situation has been more pronounced in the space sector, where the increase in operating frequency of devices in satellites involves the advantage of smaller size and weight of such devices. In contrast to this reduction of size, we have some serious drawbacks:

- Limited accuracy in manufacturing processes of such devices.
- More design constraints in any device that will have to withstand adverse conditions in the space environment.
- High sensibility of the final design. This fact involves a high deviation of the device response if any ideal design parameter is slightly altered.
- High cost of the manufacturing processes, if high accuracy in the manufacture of the final product is required.

All these drawbacks have generated a great interest among the present scientific community. Any advance towards the elimination of the aforementioned disadvantages will benefit the manufacturing technology, and consequently, the quality of the offered services will be increased.

Examples of limitations in the manufacturing processes are the impossibility of manufacturing waveguides with corners of 90° and the difficulty mechanizing right angle corners within cavities. The introduction of finite curvature radii in rectangular waveguides involves an alteration in the electromagnetic behavior of devices (filters, multiplexers, couplers, orthomodes, power dividers, etc.) with respect to the expected response of the ideal design.

In this thesis, a series of analysis and design techniques for microwave devices are developed. These techniques will put special emphasis on the accuracy requirements in the aforementioned analysis and design processes. Acceleration techniques of analysis algorithms are developed, thus reducing to a great extent the characterization time of structures which constitute these devices. Due to the complexity of modern devices, an increase in the analysis speed improves, for its part, the required time for the design and development of these complex devices. This is because optimization algorithms, which call to analysis modules repeatedly, are required by CAD techniques.

This aim of increasing speed and accuracy in analysis and design has required a careful choice and a deep improvement of some techniques.

A very accurate analysis method for waveguides with arbitrary cross sections is presented in chapter 2. Once the theory is stated and checked, the method is improved to take into account perturbations in the cross section caused by the mechanization processes. A significant accuracy improvement is shown in the presented examples with respect to the original theory.

In order to analyze microwave devices, the study of transitions between different waveguides is required. Chapter 3 shows in detail the theory of an integral equation method to

achieve this objective. This method proved itself to be as one among the fastest, more efficient and accurate for the study of planar junctions between waveguides with different cross sections.

The following key-building blocks to study are cavities made up by a cubic junction of arbitrary shaped access ports. Chapter 4 presents two novel methods to characterize the cubic junction of arbitrary waveguides. The high efficiency and accuracy of these methods has been proven with simulated devices using, furthermore, the techniques stated in the first chapters suitably combined. The simulation results have been compared with measurements obtained from prototypes manufactured to validate the theory exposed. The results are in very good agreement, thus fully validating the theory presented in this chapter.

Chapter 5 presents the procedure to follow in order to design a filter composed by waveguides with rounded corners in a fully automatized way. The objective of this chapter is to show the validity and versatility, in terms of efficiency and accuracy, of the exposed techniques in previous chapters. These features are applied to complex devices like the filter presented in this chapter. Mechanization effects in the manufacturing processes are included in the design process. Moreover, a novel low-cost manufacturing technique is proposed here. After the filter design stage, manufacturing and subsequent measurement of one prototype has been carried out. The results that can be observed are in very good agreement with the predicted response.

Finally, for validation purposes of the whole set of techniques presented in this thesis, a more complex device has been simulated in chapter 6. The simulation of a real satellite diplexer has been carried out. Furthermore, mechanization effects in the common port have been simulated. Computation times in this complex example reveal the power of the analysis techniques developed in this thesis.

Appendix A shows a powerful acceleration technique of slowly convergent series. This technique has been the key point of the analysis method shown in chapter 2.

Appendix B explains in detail the way to remove from calculations the non-coupled electromagnetic modes in symmetrical structures. This has been the key point to analyze complex structures such as the filter with rounded corners in chapter 5 and the diplexer shown in chapter 6.

Appendix C collects some useful theorems for the better understanding and justification of some effects observed in chapter 2.

Finally, appendix D, collects the whole publications generated by this thesis. National and international journals and congress proceedings are referenced.

Capítulo 2

Caracterización modal de guías arbitrarias

2.1. Introducción

La caracterización modal completa de guías de sección uniforme ha sido un tema de enorme interés en las últimas décadas. Prueba de este interés es la gran cantidad de referencias que pueden encontrarse al respecto. Así, por ejemplo, en [1] se puede encontrar una recopilación de métodos desarrollados con anterioridad a 1974. Métodos desarrollados con posterioridad pueden encontrarse en [2]–[6]. La mayoría de estas técnicas pueden agruparse en dos clases:

1. Técnicas de discretización, como las basadas en elementos finitos o en el método TLM (en inglés *transmission line modeling*), que producen problemas de autovalores grandes o que requieren numerosas iteraciones para alcanzar una precisión razonable.
2. Técnicas basadas en la solución de ecuaciones integrales por diversos algoritmos; como por ejemplo el método de los momentos, el método del campo nulo, o el método de la fuente auxiliar. Estos algoritmos producen un problema de autovalores no lineal de pequeño tamaño que hay que resolver.

Las técnicas pertenecientes a la primera clase requieren una elección adecuada de la forma, densidad y posición del mallado en la sección transversal de la guía (especialmente cuando el contorno de la guía es bastante irregular). Además, su implementación práctica requiere programas informáticos que consumen muchos recursos del sistema (tiempo de CPU y memoria). Las necesidades de almacenamiento se reducen con los algoritmos pertenecientes a la segunda clase, pero el tiempo de computación se incrementa (especialmente cuando se pretende obtener muchos modos) debido a que se calculan las frecuencias de corte como ceros o mínimos del determinante de una matriz cuyos elementos son funciones transcendentales de la frecuencia.

Un nuevo método que ha surgido recientemente [7]-[11] para el análisis de guías con sección arbitraria, es el denominado BI-RME (*Boundary Integral - Resonant Mode Expansion*). Un compendio de las técnicas derivadas de éste método se recoge en [12]. El método BI-RME está basado en la resolución de una ecuación integral que produce un problema de autovalores lineal y de pequeño tamaño. La principal ventaja de este método es el uso del núcleo exacto definido mediante funciones de Green diádicas expresadas en forma de series rápidamente convergentes [13]. Los términos de estas series son funciones racionales de la frecuencia, y las series pueden truncarse a un número muy bajo de términos sin pérdida significativa de precisión en los resultados finales. Estos hechos provocan que el sistema matricial de autovalores producido sea lineal.

Este nuevo método se ha revelado como uno de los más adecuados, por su tremenda eficiencia computacional, para caracterizar modalmente las guías con sección transversal arbitraria. Esta eficiencia reside en que el mallado es unidimensional¹, aplicándose sólo a la perturbación de la guía arbitraria respecto de un contorno básico (rectangular o circular). Una de las limitaciones del método BI-RME es la utilización de una segmentación a tramos rectos de cualquier perturbación del contorno básico. Este hecho puede introducir efectos indeseados, sobretodo a bajas frecuencias² en guías con perturbaciones curvas; lo cual sería conveniente poder predecir, constituyendo por tanto una de las cuestiones novedosas que se abordan en este capítulo.

Finalmente, añadir sobre este método el reciente trabajo realizado para adaptarlo a 3 dimensiones. Al principio, la eficiencia asociada al cálculo de la función de Green para cavidades era baja debido a la elección de dicha función [14], pero en [15] se consiguió mejorar la citada eficiencia reescribiendo la función de Green de forma más adecuada. En concreto, esta mejora en términos de eficiencia computacional se consiguió separando la función de Green para un resonador paralelepípedo³ en 2 series exponencialmente convergentes⁴.

2.2. El método BI-RME

Consideremos guías de sección transversal que pueden obtenerse perturbando una guía rectangular o circular de sección Ω con una o varias hojas conductoras invariantes en la dirección de propagación de la guía, cuya intersección con Ω es una línea o conjunto de líneas σ como se muestra en la figura 2.1. El conjunto de líneas se define por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(l) \quad (2.1)$$

¹El mallado es unidimensional si el problema es 2-D. Si se está mallando una perturbación en una cavidad 3-D el mallado es 2-D.

²Véase apéndice C.

³La convergencia de la serie que representa la función de Green en este tipo de resonador es extremadamente lenta.

⁴Una de estas series está expresada en el dominio espacial y la otra en el dominio espectral.

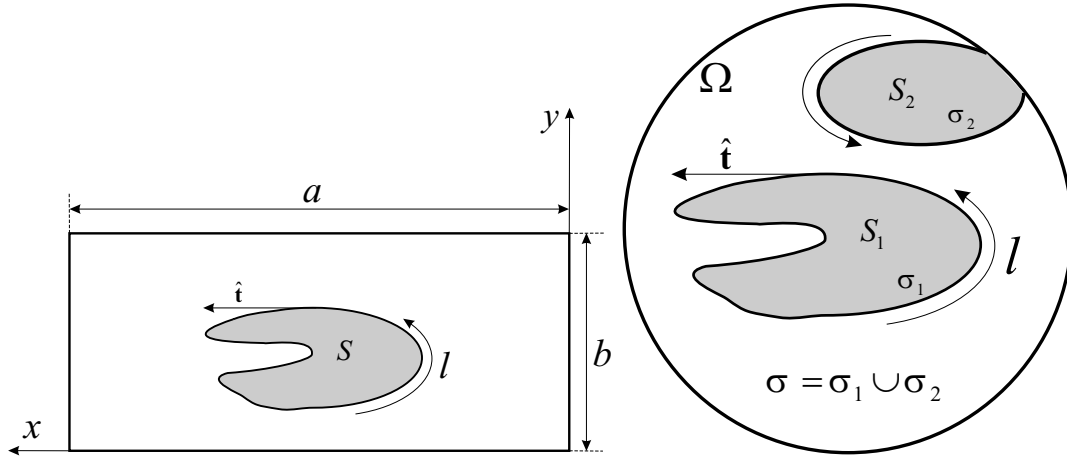


Figura 2.1. Algunos contornos básicos con perturbaciones arbitrarias.

donde s denota un punto de σ y l es un parámetro adecuado tomado sobre σ . Como se observa en la figura 2.1, σ puede constar de porciones separadas abiertas o cerradas.

El campo eléctrico en un punto de observación genérico \mathbf{r} dentro de Ω puede obtenerse mediante la expresión

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\eta k \int_{\sigma} \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) \cdot \mathbf{J}_{\sigma}(l') dl' \quad (2.2)$$

donde \mathbf{s}' indica el punto de fuente en σ , $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, $\bar{\mathbf{G}}_e$ es la función diádica de Green bidimensional de tipo eléctrico para un resonador bidimensional de sección Ω , y \mathbf{J}_{σ} es la densidad de corriente sobre la hoja. Para más detalles sobre (2.2) puede consultarse [16] y [17]⁵.

2.2.1. Ecuaciones fundamentales

La expresión general de $\bar{\mathbf{G}}_e$ dada en [13] para las secciones rectangulares y circulares es

$$\bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) = \bar{\mathbf{G}}_{et}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}\mathbf{G}_{ezz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) \quad (2.3)$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ es el vector unitario en la dirección del eje de la guía, $\bar{\mathbf{G}}_{et}$ es una diádica transversal a $\hat{\mathbf{z}}$ dada por

$$\bar{\mathbf{G}}_{et}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) = -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_m \frac{k^2}{k_m^2 (k_m^2 - k^2)} \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}') \quad (2.4)$$

⁵En [7] aparece la fórmula (2.2) con una integral f denotando el valor principal de la integral. Esto no es apropiado en este contexto, aunque en [16] se explica con detalle cómo proceder en las proximidades de los puntos de fuente. La integral de (2.2) puede representar el campo en σ sólo en el límite cuando el punto de observación se aproxima a σ .

y G_{ezz} se expresa como

$$G_{ezz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_m \frac{k^2}{k_m'^2(k_m'^2 - k^2)} \psi_m(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}') \quad (2.5)$$

donde

\mathbf{r} y \mathbf{r}' son puntos genéricos de campo y de fuente, respectivamente, dentro de Ω ;

g es la función de Green escalar bidimensional para la ecuación de Poisson bidimensional sujeta a la condición de contorno de Dirichlet homogénea⁶;

k_m son los números de onda de corte para los modos TE de la guía rectangular o circular que forma el contorno básico;

k_m' son los números de onda de corte para los modos TM de la guía rectangular o circular que forma el contorno básico;

\mathbf{e}_m es el campo eléctrico del m -ésimo modo TE normalizado en el área transversal básica como $\int_{\Omega} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m ds = 1$;

ψ_m es el campo eléctrico axial del m -ésimo modo TM normalizado en el área transversal básica como $\int_{\Omega} \psi_m^2 ds = 1$;

$\bar{\mathbf{G}}_{st}$ es la diádica solenoidal, normal al contorno, que satisface la ecuación

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\mathbf{I}}_t \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \nabla \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.6)$$

donde $\bar{\mathbf{I}}_t$ es la diádica unitaria transversal y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la función delta de Dirac bidimensional.

La separación de (2.4) y de (2.5) en sus diferentes componentes no es la más simple pero sí la más efectiva, ya que, por ejemplo, para (2.5) se sabe por [18] que:

$$G_{ezz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) = \sum_m \frac{\psi_m(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}')}{k_m'^2 - k^2} \quad (2.7)$$

pero esta serie converge de forma muy lenta (como $k_m'^2$), y por tanto se separa G_{ezz} como:

$$G_{ezz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) = \sum_m \frac{\psi_m(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}')}{k_m'^2} + \sum_m \frac{k^2}{k_m'^2(k_m'^2 - k^2)} \psi_m(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}') \quad (2.8)$$

donde la primera serie es la función de Green escalar g , que es independiente de la frecuencia y de la que se conoce una versión equivalente que converge exponencialmente. El segundo

⁶Es decir, $\nabla^2 g(x, x', y, y') = -\delta(x - x')\delta(y - y')$, $g = 0$ en el contorno de Ω .

término depende de la frecuencia, pero ahora converge como $k_m'^4$. Por tanto, con esta separación se consigue un gran incremento en la convergencia del algoritmo. Un razonamiento análogo puede aplicarse a (2.4) para aumentar la velocidad de convergencia del método. En realidad, la mejora recogida en (2.4) servirá para aumentar la eficiencia asociada al cálculo de los modos TE, y la mejora en (2.5) se utilizará en el cálculo de los modos TM, tal y como se verá en el desarrollo posterior.

Las expresiones de g y $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ para la guía rectangular y circular pueden encontrarse por ejemplo en [7]. Ambas expresiones poseen una singularidad logarítmica conforme se aproximan los puntos de fuente y de campo. La forma rápidamente convergente de estas expresiones se encuentra disponible en varias formas equivalentes. Un método general y bastante potente de aceleración de este tipo de series de lenta convergencia se encuentra descrito con detalle en el apéndice A.

La densidad de corriente podemos descomponerla en su componente transversal y longitudinal de la siguiente forma

$$\mathbf{J}_\sigma(l') = J_t(l')\hat{\mathbf{t}}(l') + J_z(l')\hat{\mathbf{z}} \quad (2.9)$$

donde $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector unitario tangente a la curva σ y las corrientes J_t y J_z son funciones a determinar.

Sustituyendo (2.3)-(2.5) en (2.2) podemos hallar las siguientes expresiones para las componentes del campo eléctrico

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) &= j\frac{\eta}{k} \int_\sigma \nabla \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial l'} J_t(l') dl' - j\eta k \int_\sigma \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \\ &\quad - j\eta k^3 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{k_m^2(k_m^2 - k^2)} \int_\sigma \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E_z(\mathbf{r}) &= -j\eta k \int_\sigma g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') J_z(l') dl' \\ &\quad - j\eta k^3 \sum_m \frac{\psi_m(\mathbf{r})}{k_m^2(k_m^2 - k^2)} \int_\sigma \psi_m(\mathbf{s}') J_z(l') dl' \end{aligned} \quad (2.11)$$

El símbolo del valor principal ha sido colocado en (2.10) para mantener coherencia con [7], aunque en la nota referente a la ecuación (2.2) ya se explica que no es estrictamente necesario incluirlo. El problema radica en que el integrando es una función que contiene una singularidad no integrable en el sentido clásico de Riemann. El tratamiento de este tipo de integrales hipersingulares consiste en calcular de alguna manera alternativa un valor que se

añada a la integral como valor límite. En general:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu \int_V \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \\
&= -j\omega\mu \int_{V-V_\varepsilon} \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' - j\omega\mu \int_{V_\varepsilon} \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \\
&= -j\omega\mu \int_V \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' - \frac{\bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})}{j\omega\varepsilon}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donde el valor principal de la ecuación integral ha consistido en eliminar un volumen V_ε de la integral total⁷. Si llamamos S_ε a la superficie que encierra a V_ε , entonces la diádica $\bar{\mathbf{L}}$ puede escribirse⁸ (ver [16] y [17])

$$\bar{\mathbf{L}} = \int_{S_\varepsilon} \frac{\hat{\mathbf{n}}' \hat{\mathbf{R}}'}{4\pi R'^2} ds' \tag{2.13}$$

Diversas técnicas para problemas numéricos (método de los momentos), donde se muestra cómo manejar integrales de este tipo, pueden consultarse en [17] y el trasfondo matemático sobre este tipo de integrales singulares puede consultarse en la obra general [19], así como el clásico dentro del campo del electromagnetismo [20].

En el caso en que nos ocupa, podemos transformar la integral singular que aparece en (2.10) integrando por partes, y tras aplicar condiciones de contorno se obtiene que

$$\int_\sigma \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial l'} J_t(l') dl' = - \int_\sigma g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial J_t(l')}{\partial l'} dl' \tag{2.14}$$

lo cual resulta más eficiente computacionalmente, ya que se ha eliminado la singularidad no integrable (por métodos convencionales) pasando una derivada sobre la corriente. Esto obliga a que las funciones que postulemos como solución de la densidad de corriente deben ser continuas y derivables a trozos, lo cual no supone ningún problema.

Imponiendo ahora las condiciones de contorno sobre σ de los modos TM y TE se obtiene fácilmente

Modos TM

$$\int_\sigma g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') J_z(l') dl' + \sum_m \frac{\psi(\mathbf{s})}{k_m'^2} a'_m = 0 \tag{2.15a}$$

$$a'_m = \frac{k^2}{k_m'^2 - k^2} \int_\sigma \psi_m(\mathbf{s}') J_z(l') dl' \tag{2.15b}$$

⁷El volumen V_ε no tiene por qué ser infinitesimal.

⁸Esta diádica simbolizada como $\bar{\mathbf{L}}$ sólo depende del “volumen principal” escogido para la integración, y por tanto la única dependencia es con la geometría del problema.

Modos TE

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \frac{\partial J_t(l')}{\partial l'} dl' + \int_{\sigma} \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \\ + \sum_m \frac{\hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{s})}{k_m^2} a_m = 0 \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$a_m = \frac{k^2}{k_m^2 - k^2} \int_{\sigma} \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \quad (2.16b)$$

Aunque los modos TEM se pueden calcular de una forma similar (las ecuaciones resultantes son mucho más simples que las anteriores), en este capítulo no se recoge el cálculo de dichos modos al no aparecer en las guías consideradas. No obstante, el lector interesado puede consultar dicho procedimiento de cálculo en [7].

2.2.2. Modos TM

Para el cálculo de los modos TM se descompone la corriente en N funciones parabólicas a trozos con área unidad⁹. Así pues, la expresión de la corriente será

$$J_z(l') = \sum_{n=1}^N b'_n u_n(l') \quad (2.17)$$

Aplicando el método de Galerkin en la ecuación integral definida mediante las ecuaciones (2.15), y después de algunas simples manipulaciones algebraicas, se obtiene el siguiente problema matricial de autovalores

$$\left(\mathbf{D}' - \mathbf{R}'^T \mathbf{L}'^{-1} \mathbf{R}' \right) \mathbf{a}' = \frac{1}{k^2} \mathbf{a}' \quad (2.18)$$

calculándose los coeficientes de las corrientes como

$$\mathbf{b}' = -\mathbf{L}'^{-1} \mathbf{R}' \mathbf{a}' \quad (2.19)$$

⁹Se ha observado experimentalmente que en lugar de normalizar las funciones base a un valor máximo, el algoritmo es más estable si se normalizan las funciones en área.

donde

$$\mathbf{a}' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_M) \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{b}' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_N) \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{D}' = \text{diag} \left(\frac{1}{k_1'^2}, \frac{1}{k_2'^2}, \dots, \frac{1}{k_M'^2} \right) \quad (2.20c)$$

$$L'_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') u_j(l') dl dl' \quad (2.20d)$$

$$R'_{im} = \frac{1}{k_m'^2} \int_{\sigma} u_i(l) \psi_m(\mathbf{s}) dl \quad (2.20e)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.20f)$$

como ya se ha mencionado, N es el número de elementos en los que se ha discretizado σ y M es el número de modos que se ha fijado en el contorno básico para desarrollar los modos de la guía perturbada. Finalmente, la componente axial del campo eléctrico dentro de la guía arbitraria se calcula en este caso mediante la siguiente expresión

$$E_z(\mathbf{r}) = -j\eta k \left[\sum_{n=1}^N b'_n \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^M a'_m \frac{\psi_m(\mathbf{r})}{k_m'^2} \right] \quad (2.21)$$

2.2.3. Modos TE

Para los modos TE se sigue el mismo procedimiento; es decir, se descompone la corriente en N funciones parabólicas a trozos, y se aplica el procedimiento de Galerkin (método de los momentos) a la ecuación integral definida por (2.15). Tras simples manipulaciones matemáticas, se obtiene el siguiente problema real de autovalores

$$\left\{ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{U} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right] - k^2 \left[\begin{array}{cc} \mathbf{D} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{L} \end{array} \right] \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)$, \mathbf{U} es la matriz unidad de orden M , $\mathbf{0}$ es una matriz nula de $N \times M$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_M)$

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(\frac{1}{k_1^2}, \frac{1}{k_2^2}, \dots, \frac{1}{k_M^2} \right) \quad (2.23a)$$

$$C_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} \frac{\partial u_i(l)}{\partial l} g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \frac{\partial u_j(l')}{\partial l'} dl dl' \quad (2.23b)$$

$$L_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') u_j(l') dl dl' \quad (2.23c)$$

$$R_{im} = \frac{1}{k_m^2} \int_{\sigma} u_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{s}) dl \quad (2.23d)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.23e)$$

El campo eléctrico transversal en el interior de la guía se calcula como

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = -j\eta \left\{ \sum_{n=1}^N b_n \left[\frac{1}{k} \nabla \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial u_n(l')}{\partial l'} dl' \right. \right. \\ \left. \left. + k \int_{\sigma} \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') u_n(l') dl' \right] + k \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{k_m^2} \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \right\} \quad (2.24)$$

La división de σ en varias partes separadas, o si σ es abierta o cerrada, no entraña dificultades adicionales. Para más detalles al respecto puede consultarse [7] y [12], donde también se dan reglas empíricas para elegir los números N (número de elementos en los que se discretiza σ) y M (número de modos a escoger en el contorno básico) para plantear el problema.

En lo sucesivo se va a considerar este método con un contorno básico rectangular. El contorno circular entraña menos dificultades debido a que tanto g como $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ no son series más o menos rápidamente convergentes sino términos fácilmente calculables.

2.2.4. Elementos singulares

Debido a la singularidad inherente a la función de Green bidimensional de la ecuación de Poisson g y la singularidad existente en la diádica $\bar{\mathbf{G}}_{st}$, el cálculo de algunos elementos de las matrices \mathbf{C} , \mathbf{L} y \mathbf{L}' puede resultar problemático. Este posible problema se resuelve observando que el tipo de singularidad que aparece en estas funciones es de tipo logarítmico y por tanto perfectamente integrable. Fijémonos por ejemplo en la función g , que en un contorno rectangular de dimensiones a (anchura) y b (altura) tiene la expresión siguiente en serie de autofunciones:

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^{TM}(\mathbf{r}) \psi_i^{TM}(\mathbf{r}')}{k_i'^2} \quad (2.25)$$

donde k_i' es el número de onda de corte del i -ésimo modo TM de la guía rectangular, esto es:

$$k_{i \Rightarrow m,n}' = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad m > 0, n > 0 \quad (2.26)$$

y ψ_i^{TM} es el campo eléctrico axial del i -ésimo modo TM normalizado en la sección transversal de la guía [21] como se ha indicado anteriormente, y que para la guía rectangular tiene la siguiente expresión

$$\psi_{i \Rightarrow m,n}^{TM} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (2.27)$$

donde i es el índice del modo, que en la guía rectangular genera un doble juego de índices (m y n). De forma práctica, los modos se ordenan con un solo índice (i), estableciéndose dicha ordenación según el valor de la frecuencia de corte de cada modo.

La convergencia de (2.25) es particularmente lenta, pudiéndose utilizar la suma de Poisson para acelerar dicha convergencia. Los cálculos necesarios se recogen en el apéndice A, obteniéndose finalmente la siguiente expresión

$$g = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{00} T_m^{11}} \quad (2.28)$$

donde

$$T_m^{pq} = 1 - 2e^{-|x-(-1)^p x'+2am|\frac{\pi}{b}} \cos \frac{\pi}{b} (y - (-1)^q y') + e^{-2|x-(-1)^p x'+2am|\frac{\pi}{b}} \quad (2.29)$$

Dicha función se puede descomponer en dos partes

$$g = g_0 - \frac{1}{4\pi} \ln T_0^{00} \quad (2.30)$$

donde

$$g_0 = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m \neq 0)}}^{\infty} \ln \frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{00} T_m^{11}} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{10} T_0^{01}}{T_0^{11}} \quad (2.31)$$

Se observa que cuando el punto de fuente y de campo se aproximan, el término T_0^{00} es el único que tiende a cero

$$T_0^{00} = 1 - 2e^{-|x-x'|\frac{\pi}{b}} \cos \frac{\pi}{b} (y - y') + e^{-2|x-x'|\frac{\pi}{b}} \quad (2.32)$$

Si se realiza un desarrollo en serie de Taylor de dos variables para dicho término es fácil comprobar que

$$T_0^{00} = 1 - 2e^{-|x-x'|\frac{\pi}{b}} \cos \frac{\pi}{b} (y - y') + e^{-2|x-x'|\frac{\pi}{b}} \underset{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}}{\approx} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] \quad (2.33)$$

y por tanto se tiene que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \frac{T_0^{00}}{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \quad (2.34)$$

En función de este último resultado, conviene descomponer el término singular en g del siguiente modo

$$-\frac{1}{4\pi} \ln T_0^{00} = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{R^2} - \frac{1}{2\pi} \ln R \quad (2.35)$$

donde obviamente $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$. Finalmente se pueden agrupar todas las partes regulares de la función de Green en una sola función (g_1) y aislar la parte singular logarítmica como sigue

$$g = g_1 - \frac{1}{2\pi} \ln R \quad (2.36)$$

donde

$$g_1 = g_0 - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{R^2} \quad (2.37)$$

habiéndose demostrado que g_1 es completamente regular.

La diádica $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ tiene un aspecto análogo al de la función g . Es estática (no depende de la frecuencia) y se puede expresar en serie de autofunciones del siguiente modo

$$\bar{\mathbf{G}}_{st} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_i^{TE}(\mathbf{r})\mathbf{e}_i^{TE}(\mathbf{r}')}{k_i^2} \quad (2.38)$$

donde k_i es el número de onda de corte del i -ésimo modo TE de la guía rectangular, es decir

$$k_{i \Rightarrow m,n} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad m \geq 0, n \geq 0 \quad (2.39)$$

donde m y n no pueden ser cero simultáneamente y $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$ es el vector de campo eléctrico del i -ésimo modo TE normalizado en la sección transversal de la guía. Para obtener dicho vector se parte de la función potencial para los modos TE [22]:

$$\psi_{i \Rightarrow m,n}^{TE} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (2.40)$$

y se aplica la siguiente relación

$$\mathbf{e}_i^{TE} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \psi_i^{TE} \quad (2.41)$$

en la que tras realizar las convenientes manipulaciones matemáticas se obtiene finalmente que

$$\mathbf{e}_{i \Rightarrow m,n}^{TE} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}}}{k_i} \left[\hat{\mathbf{x}} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) - \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right] \quad (2.42)$$

donde ε_r es el factor de Neumann, que se define como sigue

$$\varepsilon_r = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0. \\ 2 & \text{si } r \neq 0; \end{cases} \quad (2.43)$$

La serie (2.38) también converge muy lentamente, y la versión acelerada tiene el siguiente

aspecto

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{G}}_{st} = & \\
& \frac{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{T_m - D}{T_m - B} + \frac{IMX_m S_m}{(T_m - B)(T_m - D)} \\
& - \frac{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{GY_m (V_m F - H)}{(V_m - A)(V_m - C)} \\
& - \frac{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{MX_m (T_m L - N)}{(T_m - B)(T_m - D)} \\
& + \frac{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{V_m - C}{V_m - A} + \frac{EGY_m U_m}{(V_m - A)(V_m - C)} \tag{2.44}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \cos \left[\frac{\pi}{a}(x - x') \right] & B &= \cos \left[\frac{\pi}{b}(y - y') \right] \\
C &= \cos \left[\frac{\pi}{a}(x + x') \right] & D &= \cos \left[\frac{\pi}{b}(y + y') \right] \\
E &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{a}x \right) & F &= \cos \left(\frac{\pi}{a}x \right) \\
G &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{a}x' \right) & H &= \cos \left(\frac{\pi}{a}x' \right) \\
I &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{b}y \right) & L &= \cos \left(\frac{\pi}{b}y \right) \\
M &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{b}y' \right) & N &= \cos \left(\frac{\pi}{b}y' \right) \\
x_m &= \left(m + \frac{1}{2} \right) a + (-1)^m \left(x' - \frac{a}{2} \right) & y_m &= \left(m + \frac{1}{2} \right) b + (-1)^m \left(y' - \frac{b}{2} \right) \\
X_m &= \frac{\pi}{b}(x - x_m) & Y_m &= \frac{\pi}{a}(y - y_m) \\
S_m &= \operatorname{senh}(X_m) & T_m &= \operatorname{cosh}(X_m) \\
U_m &= \operatorname{senh}(Y_m) & V_m &= \operatorname{cosh}(Y_m) \tag{2.45}
\end{aligned}$$

La singularidad aparece en el término $m = 0$ cuando un punto de fuente y uno de campo coinciden. El término $m = 0$ de la serie correspondiente a la componente $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$ de la diádica¹⁰

¹⁰La componente $\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}$ se comporta igual que la $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$ porque tienen la misma expresión intercambiando x, x' y a por y, y' y b , respectivamente. Respecto a las componentes cruzadas $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}$ sucede exactamente lo mismo.

tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi} \ln \frac{\cosh \left[\frac{\pi}{b}(x-x') \right] - \cos \left[\frac{\pi}{b}(y+y') \right]}{\cosh \left[\frac{\pi}{b}(x-x') \right] - \cos \left[\frac{\pi}{b}(y-y') \right]} \\ & + \frac{1}{8\pi} \frac{\frac{\pi}{b}(x-x') \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{b}y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{b}y' \right) \operatorname{senh} \left[\frac{\pi}{b}(x-x') \right]}{\left\{ \cosh \left[\frac{\pi}{b}(x-x') \right] - \cos \left[\frac{\pi}{b}(y-y') \right] \right\} \left\{ \cosh \left[\frac{\pi}{b}(x-x') \right] - \cos \left[\frac{\pi}{b}(y+y') \right] \right\}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Desarrollamos en serie de Taylor el denominador del argumento del logaritmo para ver el tipo de singularidad (el numerador es regular), y posteriormente haremos lo mismo para el segundo término de la expresión anterior. El desarrollo se realiza alrededor del punto de fuente considerando como variables los puntos de campo. Así pues, se obtiene

$$\cosh \frac{\pi}{b}(x-x') - \cos \frac{\pi}{b}(y-y') \approx \frac{\pi^2}{2b^2} [(x-x')^2 + (y-y')^2] = \frac{\pi^2}{2b^2} R^2 \quad (2.47)$$

y por tanto podemos escribir:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x',y')} -\frac{1}{2} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{b}(x-x') - \cos \frac{\pi}{b}(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} = -\frac{1}{2} \ln \frac{\pi^2}{2b^2} \quad (2.48)$$

es decir, una singularidad que ya sabemos tratar. Ahora hay que desarrollar (de igual modo que la singularidad presente en la función de Green g) el término no logarítmico de (2.46)

$$\Upsilon = \frac{\frac{\pi}{b}(x-x') \operatorname{sen} \frac{\pi}{b}y \operatorname{sen} \frac{\pi}{b}y' \operatorname{senh} \frac{\pi}{b}(x-x')}{\left[\cosh \frac{\pi}{b}(x-x') - \cos \frac{\pi}{b}(y-y') \right] \left[\cosh \frac{\pi}{b}(x-x') - \cos \frac{\pi}{b}(y+y') \right]} \quad (2.49)$$

en serie de Taylor de dos variables. El procedimiento es el mismo. Se observa que el segundo corchete del denominador no tiende a cero cuando el punto de campo se acerca al de fuente, y por ello no hace falta desarrollarlo en serie. El otro corchete ya se ha desarrollado para la componente $\hat{x}\hat{x}$. Finalmente se obtiene:

$$\Upsilon \approx \frac{(x-x')^2}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (2.50)$$

Este tipo de singularidad es nuevo. Podríamos sospechar que no hay tal singularidad (y por tanto tendríamos una discontinuidad evitable) porque tanto numerador como denominador tienden a cero cuando los puntos de fuente y de campo se aproximan, y ello podría tener límite finito. Esto no es así, ya que si nos acercamos por una recta de dirección arbitraria (α, β) al punto singular, el cual puede suponerse sin pérdida de generalidad en $(x' = 0, y' = 0)$, obtenemos con la parametrización $x = \alpha t$ y $y = \beta t$ que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 t^2}{\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (2.51)$$

es decir, el valor límite depende de la dirección de aproximación. La función de dos variables anterior no es por tanto continua. La única solución viable para resolver esto es esperar que la integral que involucre tal término sea resoluble. En la sección 2.2.5 veremos que sí lo es.

Nos queda comprobar el tipo de singularidad de la diádica cruzada $\hat{x}\hat{y}$. La singularidad de la serie correspondiente a esta componente también corresponde al término $m = 0$, que en este caso tiene la siguiente expresión:

$$\Psi = \frac{\frac{\pi}{a}(y - y') \operatorname{sen} \frac{\pi}{a}x' [\cosh \frac{\pi}{a}(y - y') \cos \frac{\pi}{a}x - \cos \frac{\pi}{a}x']}{[\cosh \frac{\pi}{a}(y - y') - \cos \frac{\pi}{a}(x - x')] [\cosh \frac{\pi}{a}(y - y') - \cos \frac{\pi}{a}(x + x')]} \quad (2.52)$$

y como siempre se desarrolla en serie de Taylor de dos variables y se obtiene

$$\Psi = \frac{(x - x')(y - y')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (2.53)$$

una singularidad integrable pero con la misma patología que la anterior: la función no es continua cuando el punto de fuente y de campo coinciden.

Una vez se ha obtenido el orden de la singularidad de los términos de la diádica, el proceso es el mismo que se ha seguido con la función de Green: separar la parte singular de la parte regular para un tratamiento separado.

Supongamos que queremos calcular el elemento L'_{ij} de la matriz L' . Sea Δ_i el dominio de la función de forma u_i , que será la función base del elemento i con $\Delta_i \in \sigma$. Sea Δ_j el dominio de la función de forma u_j , que será la función base del elemento j con $\Delta_j \in \sigma$. Si los dominios Δ_i y Δ_j coinciden en alguna porción, conviene escribir el elemento L'_{ij} como sigue:

$$L'_{ij} = \int_{\Delta_i} u_i(l)X_j(l)dl + \int_{\Delta_i} u_i(l)Y_j(l)dl \quad (2.54)$$

donde

$$X_j(l) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_j} u_j(l') \ln R dl' \quad (2.55a)$$

$$Y_j(l) = \int_{\Delta_j} u_j(l') g_1(\mathbf{s}, \mathbf{s}') dl' \quad (2.55b)$$

Se demostrará en la sección 2.2.5 que (2.55a) se puede calcular analíticamente por tener una singularidad integrable. La integral (2.55b) se puede realizar sin ningún problema de forma numérica, ya que el integrando es regular¹¹. En cuanto al cálculo de las dos integrales presentes en (2.54), se realizará también de forma numérica.

El cálculo de elementos de las matrices C y L se realiza siguiendo el mismo procedimiento, ya que las singularidades que aparecen son del mismo tipo.

¹¹Se ha comprobado que en la mayoría de los casos las integrales numéricas se pueden calcular de manera bastante precisa empleando la cuadratura de Gauss de orden 3. A veces sucede que si las integrales no se realizan de manera suficientemente precisa el sistema de autovalores no es definido positivo, y se incurre en errores numéricos que pueden hacer que la solución sea inservible. Es conveniente entonces aumentar el orden de integración.

2.2.5. Integrales con singularidades logarítmicas

El objetivo concreto de esta sección es calcular las integrales singulares que aparecen por ejemplo en los elementos¹² L'_{ij} de la matriz \mathbf{L}' . Estos elementos son de la forma

$$L'_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) u_j(l') g(s, s') dl dl' \quad (2.56)$$

donde $\sigma = s(l)$ es una parametrización adecuada de la curva de modo que se recorra en sentido positivo (antihorario). En la sección 2.2.4 se ha obtenido el orden de la singularidad de la función de Green $g(s, s')$ cuando los puntos de fuente y de campo se aproximan. Para el cálculo de los elementos L'_{ij} se ha deducido anteriormente, tras realizar algunas manipulaciones matemáticas, que es necesario resolver las siguientes expresiones

$$X_j(l) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta'_j} u_j(l') \ln R dl' \quad (2.57a)$$

$$Y_j(l) = \int_{\Delta'_j} u_j(l') g_1(s, s') dl' \quad (2.57b)$$

donde ahora el dominio de integración (Δ'_j) es un tramo o porción del dominio Δ_j presente en las expresiones (2.55), pues las funciones de forma se suelen expresar como funciones parabólicas definidas a tramos [7]. Obviamente la expresión conflictiva es la que corresponde a X_j , y es la que se va a intentar transformar para poder adecuarla a su implementación en un ordenador. Supongamos que el dominio Δ'_j de un tramo parabólico es un segmento rectilíneo arbitrario como el segmento P de la figura 2.2, mientras que el segmento Q de dicha figura corresponde al dominio Δ'_i . Se conocen los extremos del segmento P , por lo tanto es fácil calcular el ángulo que forma este segmento con la horizontal. Se pretende utilizar un sistema de referencia local para que las expresiones sean más fáciles de integrar. Para ello se giran los dos segmentos de manera que el segmento P quede horizontal. La transformación “rotación” conserva la longitud y la posición relativa de los segmentos y, por lo tanto, el resultado de la integral será el mismo porque el integrando sólo depende de la distancia¹³ entre puntos de integración. La rotación la realizaremos en el sentido de las agujas del reloj respecto al punto medio del segmento P :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_m \\ y - y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

donde

$$\theta = \arctan \left(\frac{y'_1 - y'_0}{x'_1 - x'_0} \right) \quad \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'_0 + x'_1}{2} \\ \frac{y'_0 + y'_1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

¹²Recuérdese que en realidad las matrices \mathbf{L}' , \mathbf{L} y \mathbf{C} tienen el mismo tipo de singularidad.

¹³La matriz de giro es ortogonal, por tanto conserva productos escalares $(\mathbf{Ax} \cdot \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ y distancias $d(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, y además su inversa es su traspuesta, es decir, $\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{AA}^t = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{-1}$. Véase [23].

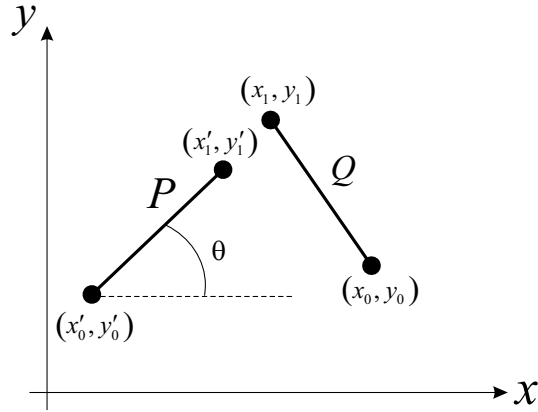


Figura 2.2. Segmentos con orientación arbitraria que forman parte de σ .

La transformación inversa se puede obtener invirtiendo la matriz “rotación” o, equivalentemente, girando el mismo ángulo pero en sentido contrario.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_m \\ y - y_m \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Con esta transformación el segmento P ha quedado horizontal y centrado respecto al nuevo sistema de referencia (u, v) . Usando (2.58) podemos decir respecto al segmento P que

$$\begin{aligned} v' &= 0 \quad \forall v' \in P \\ u'_0 &= (x'_0 - x_m) \cos \theta + (y'_0 - y_m) \text{sen } \theta \\ u'_1 &= (x'_1 - x_m) \cos \theta + (y'_1 - y_m) \text{sen } \theta \\ l_p &= \sqrt{(x'_0 - x'_1)^2 + (y'_0 - y'_1)^2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde l_p es la longitud del segmento P . De las expresiones anteriores se deducen fácilmente las siguientes relaciones

$$u'_0 = -u'_1 \quad (2.62a)$$

$$l_p = u'_1 - u'_0 = 2u'_1 \quad (2.62b)$$

Ahora se normalizan las coordenadas para que la integración sobre el segmento P se realice en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Con ello, el sistema de coordenadas (u, v) queda transformado en el (ξ, η) .

$$(\xi, \eta) = \frac{1}{l_p} (u, v) \quad (2.63)$$

La misma transformación se aplicará a las coordenadas no primadas. Recordando que $v' = 0 \Rightarrow \eta' = 0 \quad \forall \eta' \in P$, se tendrá en el nuevo sistema de coordenadas que

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = l_p^2 [(\xi - \xi')^2 + \eta^2] \quad (2.64)$$

Por fin se puede reescribir la integral (2.57a) como sigue

$$X_j(l) = \frac{-l_p}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (a'\xi'^2 + b'\xi' + c') \ln \left\{ l_p^2 \left[(\xi - \xi')^2 + \eta^2 \right] \right\} d\xi' \quad (2.65)$$

donde a' , b' , c' son los coeficientes de la parábola asociada a la función base u_j en el tramo Δ'_j .

La solución analítica de la integral (2.65) es

$$\begin{aligned} X_j(\xi, \eta) = & \\ & -\frac{l_p}{4\pi} \left\{ 2\eta \left[a' \left(\xi^2 - \frac{\eta^2}{3} \right) + b'\xi + c' \right] \arctan \left(\frac{12\eta}{B^+} \right) \right. \\ & + \frac{1}{24} \left[(a'A^+ + b'B^- + c'C^+) \ln(\Lambda^+) - (a'A^- + b'B^- + c'C^-) \ln(\Lambda^-) \right] \\ & \left. + \left(\frac{a'}{6} + 2c' \right) \ln \left(\frac{l_p}{2} \right) - \frac{a'}{18} (12\xi^2 - 12\eta^2 + 1) - b'\xi - 2c' \right\} \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde se han empleado las siguientes variables auxiliares:

$$\Lambda^\pm = 4\xi^2 \pm 4\xi + 4\eta^2 + 1 \quad (2.67a)$$

$$A^\pm = 8\xi^3 - 24\xi\eta^2 \pm 1 \quad (2.67b)$$

$$B^\pm = 3(4\xi^2 \pm 4\eta^2 - 1) \quad (2.67c)$$

$$C^\pm = 12(2\xi \pm 1) \quad (2.67d)$$

Para evaluar la componente del elemento L'_{ij} asociada a $X_j(l)$, se debe observar que ahora $X_j(l) = X_j(\xi, \eta)$ ya que $l = l(\xi, \eta)$, donde la variable ξ no varía en el mismo rango que su correspondiente coordenada primada, y además η ahora no es constante porque vamos a integrar sobre el segmento Q . Esto nos va a obligar a buscar una parametrización adecuada del segmento Q para que la variación sólo dependa de un parámetro, y así poder realizar la segunda integral necesaria para evaluar (2.56) según la coordenada no primada. El primer paso es averiguar, después de todas las transformaciones realizadas, en qué intervalo se mueven ahora las variables ξ y η

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (x_0, y_0) &\rightarrow (u_0, v_0) \rightarrow (\xi_0, \eta_0) \\ (x_1, y_1) &\rightarrow (u_1, v_1) \rightarrow (\xi_1, \eta_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in [\xi_0, \xi_1] \\ \eta \in [\eta_0, \eta_1] \end{cases} \\ \xi_0 = \frac{1}{l_p} [(x_0 - x_m) \cos \theta + (y_0 - y_m) \sin \theta] \\ \eta_0 = \frac{1}{l_p} [-(x_0 - x_m) \sin \theta + (y_0 - y_m) \cos \theta] \\ \xi_1 = \frac{1}{l_p} [(x_1 - x_m) \cos \theta + (y_1 - y_m) \sin \theta] \\ \eta_1 = \frac{1}{l_p} [-(x_1 - x_m) \sin \theta + (y_1 - y_m) \cos \theta] \end{aligned} \quad (2.68)$$

Una vez hallados los límites de integración en función de los datos, el siguiente paso consiste en hallar una parametrización adecuada del nuevo segmento Q para poder realizar la integración. La parametrización la volveremos a diseñar de manera que la integración se realice en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Recordemos además, que al diferencial de la segunda integral le ha afectado el anterior cambio de variable, ya que hemos transformado los dos conjuntos de coordenadas: las de fuente y las de campo. Por ello aparece un l_p que multiplica a esta integral, que se simplificará con el nuevo diferencial de arco. Esta segunda integral es una integral de arco del siguiente tipo

$$\int_c \varphi ds = \int_a^b \varphi [\alpha(t)] s'(t) dt \quad (2.69)$$

que se resuelve fácilmente [24] con la parametrización del segmento dada por:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left[(\xi_1 - \xi_0) t + \frac{\xi_1 + \xi_0}{2} \right] \hat{\xi} + \left[(\eta_1 - \eta_0) t + \frac{\eta_1 + \eta_0}{2} \right] \hat{\eta} \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \\ s'(t) &= \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2} = \frac{l_q}{l_p} \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde $\alpha(t)$ define el camino a seguir en el sentido correcto variando el parámetro t , y el arco recorrido durante esa camino viene dado por la función escalar $s(t)$. Aplicando todas estas relaciones al problema que nos ocupa, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_i} u_i(l) X_j(l) dl &= \int_{\Delta_i} u_i(l) X_j(\xi, \eta) dl = \\ &= l_q \int_{-1/2}^{1/2} (at^2 + bt + c) X_j \left((\xi_1 - \xi_0) t + \frac{\xi_1 + \xi_0}{2}, (\eta_1 - \eta_0) t + \frac{\eta_1 + \eta_0}{2} \right) dt \end{aligned} \quad (2.71)$$

siendo esta expresión directamente implementable en un ordenador.

Singularidad de la diádica de Green

Para completar esta disgresión sobre la forma de obtener los elementos singulares de las matrices involucradas en el método BI-RME, sólo resta enunciar de manera escueta cómo quedarán las integrales singulares que aparecen cuando se integra la diádica $\tilde{\mathbf{G}}_{st}$. Las componentes $\hat{x}\hat{x}$ e $\hat{y}\hat{y}$, tras los cambios de variable ya comentados previamente, generarán los

siguientes términos:

$$\begin{aligned} \frac{l_p}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (a'\xi'^2 + b'\xi' + c') \left\{ \frac{(\xi - \xi')^2}{(\xi - \xi')^2 + \eta^2} - \frac{1}{2} \ln \{l^2 [(\xi - \xi')^2 + \eta^2]\} \right\} d\xi' = \\ \frac{l_p}{4\pi} \left\{ -2\eta \left[a' \left(\xi^2 - \frac{2}{3}\eta^2 \right) + b'\xi + c' \right] \arctan \left(\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{4}} \right) \right. \\ \left. - (a'A^+ + b'B^- + c'C^+) \ln(\Lambda^+) (a'A^- + b'B^- + c'C^-) \ln(\Lambda^-) \right. \\ \left. + \frac{a'}{9}(3\xi^2 - 12\eta^2 + 1) + \frac{b'}{2}\xi + 2c' - \left(\frac{a'}{12} + c' \right) \ln \left(\frac{l_p}{2} \right) \right\} \quad (2.72) \end{aligned}$$

donde l_p es la longitud del segmento sobre el que corren las coordenadas primadas. Se han empleado en la fórmula anterior las siguientes variables auxiliares:

$$\Lambda^\pm = 4\xi^2 \pm 4\xi + 4\eta^2 + 1 \quad (2.73a)$$

$$A^\pm = \frac{1}{48} (8\xi^3 - 72\xi\eta^2 \pm 1) \quad (2.73b)$$

$$B^\pm = \frac{1}{16} (4\xi^2 \pm 12\eta^2 - 1) \quad (2.73c)$$

$$C^\pm = \frac{1}{4} (2\xi \pm 1) \quad (2.73d)$$

Cabe destacar que la fórmula (2.72) se ha obtenido gracias a haber podido integrar el término singular

$$\frac{(\xi - \xi')^2}{(\xi - \xi')^2 + \eta^2} \quad (2.74)$$

el cual, como se dedujo en la sección anterior, no es continuo, pero afortunadamente sí que es integrable.

Las componentes cruzadas ($\hat{x}\hat{y}$ e $\hat{y}\hat{x}$) de la diádica $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ generan términos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{l_p}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (a'\xi'^2 + b'\xi' + c') \frac{\eta(\xi - \xi')}{(\xi - \xi')^2 + \eta^2} d\xi' = \\ \frac{l_p\eta}{4\pi} \left\{ \eta(2a'\xi + b') \arctan \left(\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{4}} \right) - (a'\xi + b') \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [a'(\xi^2 - \eta^2) + b'\xi + c'] \ln \frac{(\xi - \frac{1}{2})^2 + \eta^2}{(\xi + \frac{1}{2})^2 + \eta^2} \right\} \quad (2.75) \end{aligned}$$

Finalmente, en el cálculo de los elementos de la matriz \mathbf{C} aparecen integrales singulares del tipo logarítmico pero afectadas por la derivada de las funciones base. Por tanto, los

términos que aparecen son:

$$\begin{aligned}
\frac{l_p}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (2a'\xi' + b') \ln \{ l_p^2 [(\xi - \xi')^2 + \eta^2] \} d\xi' = \\
\frac{l_p}{4\pi} \left\{ 2\eta(2a'\xi + b') \arctan \left(\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{4}} \right) \right. \\
+ \left[\frac{a'}{4}(4\xi^2 - 4\eta^2 - 1) + \frac{b'}{2}(2\xi + 1) \right] \ln(4\xi^2 + 4\eta^2 + 4\eta + 1) \\
- \left[\frac{a'}{4}(4\xi^2 - 4\eta^2 - 1) + \frac{b'}{2}(2\xi - 1) \right] \ln(4\xi^2 + 4\eta^2 - 4\eta + 1) \\
\left. - 2(a'\xi + b') + 2b' \ln \left(\frac{l_p}{2} \right) \right\} \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Para resolver las integrales anteriores ha sido necesario transformarlas en otras de tipo normalizado (polinomio multiplicado por logaritmo), cuya resolución puede encontrarse por ejemplo en [25].

2.2.6. Ejemplo: Guía con reentrante

Para la verificación del programa informático desarrollado que implementa el método BI-RME se ha escogido una guía con reentrante (en inglés *ridge*). Se han calculado las frecuencias de corte de los primeros modos, y se ha dibujado el campo empleando las fórmulas (2.21) y (2.24). Es de esperar que el campo dentro de la zona del reentrante sea nulo o cercano a cero si el error numérico es pequeño. Los resultados que se muestran en las gráficas se han obtenido con un mallado unidimensional de la perturbación de tan sólo 14 segmentos. La visualización del campo axial de los dos primeros modos TM en la figura 2.3 permite destacar que el modo está confinado completamente en el interior de la guía, y que en el reentrante el campo tiene un valor prácticamente nulo, tal y como se ha comentado previamente. Como se observa, el valor del campo del modo TM se acerca paulatinamente a cero conforme nos acercamos a las paredes de la guía, cumpliéndose pues las condiciones de contorno.

También se ha comprobado que disminuyendo la penetración del reentrante la frecuencia de corte de los modos tienden, como era de esperar, a las frecuencias de corte de la guía rectangular sobradamente conocidas. Aumentando la profundidad de penetración hasta dividir la guía en dos, supone generar nuevamente las frecuencias de corte de los modos de las guías rectangulares del mismo tamaño.

Las frecuencias de corte también han sido comparadas con éxito con los resultados proporcionados por otros métodos (ver tabla 2.1) como el TLM (*transmission line modeling*) [26], elementos finitos (FEM) [27] y con el obtenido por el programa ANAPLAN-W que utiliza también el método BI-RME. Aparte de la precisión del resultado¹⁴ conviene subrayar

¹⁴En realidad no podemos asegurar cual es la precisión absoluta del método con este ejemplo porque no hay

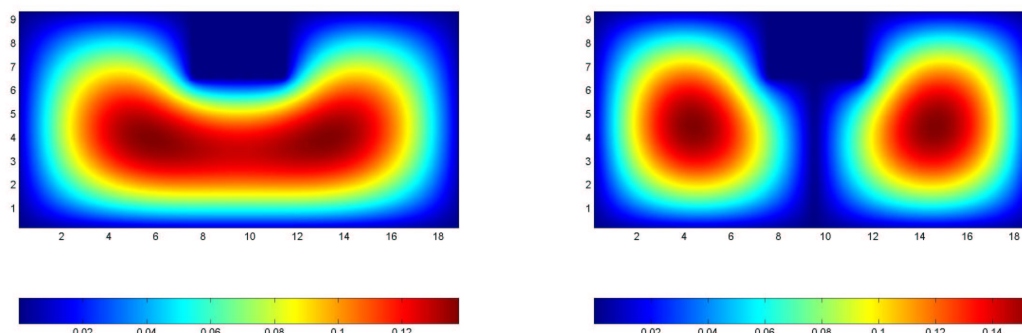


Figura 2.3. Representación del campo eléctrico axial de los dos primeros modos TM en una guía WR-75 con un reentrante centrado de 4 mm de anchura y una penetración de 2,976 mm. La frecuencia de corte del primer modo TM es de 21,45278 GHz y la del segundo es de 23,38680 GHz.

la gran velocidad con la que se ha resuelto el problema considerado. Así pues, con un PC de capacidad reducida, este método proporciona cientos de frecuencias de corte en cuestión de segundos.

En un modo TM sabemos si se cumplen las condiciones de contorno observando la tendencia del campo a anularse en dicho contorno. En los modos TE lo que se fuerza como condición de contorno es la anulación de la derivada del campo eléctrico y no el propio campo. Ésta es la razón de que la distribución de campo tangencial no es tan fácilmente verificable por observación directa. Además, el campo tiende a ser elevado en las esquinas con respecto al resto de la guía, produciéndose problemas de visualización debido a la rápida variación del campo eléctrico tangencial en un pequeño entorno alrededor de las esquinas. En la figura 2.4, donde aparece la distribución del campo eléctrico tangencial en la guía *ridge* de los dos primeros modos, se observa este efecto perfectamente.

Como curiosidad podemos observar el aspecto de los campos asociados a los modos superiores para cercionarnos si las condiciones de contorno se siguen cumpliendo sobre las paredes de la guía. En la figura 2.5 se observa que el campo sigue estando confinado en el interior de la guía, y que el error numérico sigue siendo despreciable en el exterior de la guía.

expresiones analíticas que proporcionen las frecuencias de corte de la guía con reentrante. Aunque veremos cuál es la precisión del método en la siguiente sección con otros ejemplos de los cuales se conoce solución analítica.

Modo (orden)	Tipo (TE/TM)	BI-RME f_c (GHz)	FEM f_c (GHz)	TLM f_c (GHz)	ANAPLAN-W f_c (GHz)
1	TE	6.71685	6.640	6.715	6.7205
2	TE	15.13308	14.956	15.083	15.142
3	TE	16.85652	16.788	16.839	16.867
4	TE	17.17278	17.159	17.201	17.183
5	TM	21.45278	22.135	21.333	21.469
6	TE	22.30810	22.173	22.314	22.320

Cuadro 2.1. Las primeras 6 frecuencias de corte en una guía *ridge* (guía WR-75 con una penetración centrada de 4 mm de anchura y una profundidad de 2,976 mm) calculadas con el programa informático que implementa el método BI-RME tal como ha sido descrito. Se han comparado estas frecuencias de corte con en método de elementos finitos (FEM), el método TLM (*transmission line modeling*) y el programa ANAPLAN-W basado asimismo en el método BI-RME.

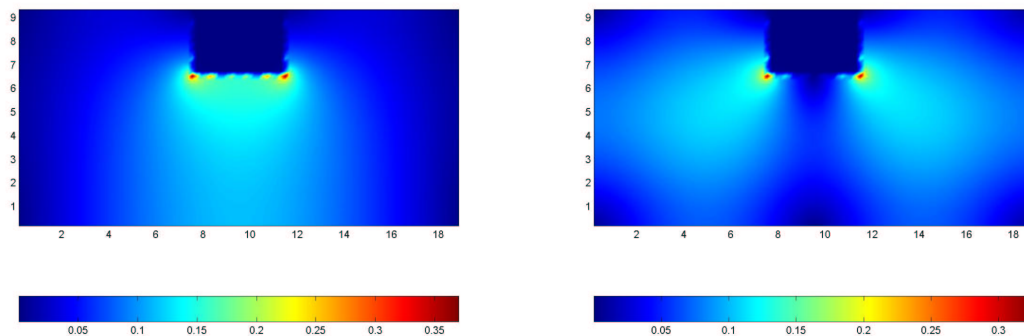


Figura 2.4. Representación del módulo del campo eléctrico tangencial de los dos primeros modos TE en una guía WR-75 con un reentrante centrado de 4 mm de anchura y una penetración de 2,976 mm. La frecuencia de corte del primer modo TE es de 6,71685 GHz y la del segundo es de 15,13308 GHz.

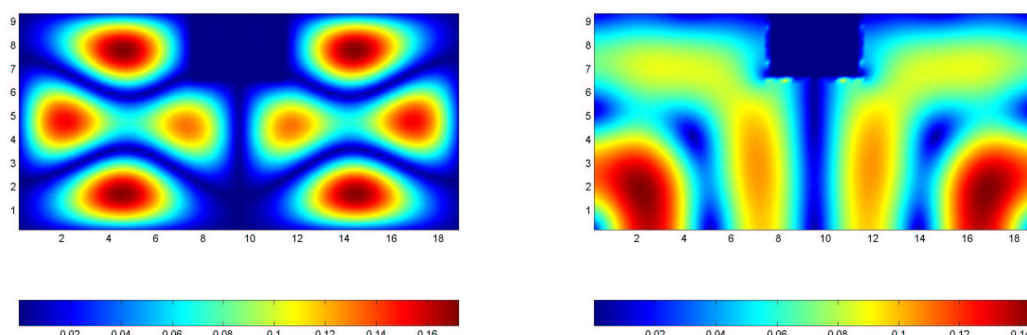


Figura 2.5. *Izquierda:* Representación del módulo del campo eléctrico axial para el décimo modo TM en una guía WR-75 con un reentrante centrado de 4 mm de anchura y una penetración de 2,976 mm. La frecuencia de corte del modo TM es de 50,2820356 GHz. *Derecha:* Módulo del campo eléctrico tangencial producido por el décimo modo TE en la misma guía. La frecuencia de corte de este modo es de 32,57068 GHz.

2.3. Elementos curvos

En esta sección se va a emplear el método BI-RME para modelizar el efecto de mecanización de un radio de curvatura finito en una guía rectangular. Esto será útil para poder simular el comportamiento de dispositivos tales como filtros o diplexores cuya fabricación a bajo coste introduce esquinas redondeadas (de radio de curvatura finito) en lugar de esquinas rectas (de 90° exactos). Una justificación más exhaustiva puede encontrarse en el capítulo 5, donde se aplicará el método BI-RME en el modelado de un filtro con esquinas redondeadas. Finalmente, en el capítulo 6 veremos el efecto de un radio de curvatura finito sobre un puerto de un diplexor, así como la variación de su respuesta eléctrica con la frecuencia y el valor del radio de curvatura.

2.3.1. Integrales con singularidades logarítmicas

Las ecuaciones que surgen para resolver problemas de esquinas redondeadas son las mismas deducidas en la sección anterior, ya que en ningún momento se ha especificado el sistema de coordenadas elegido para resolver las integrales. En este caso se utilizará un sistema de coordenadas híbrido.

Transformando coordenadas rectangulares a polares se conseguirá resolver las integrales singulares que aparecen (en las matrices L' , C y L) cuando los puntos de fuente y de campo se aproximan. Los elementos regulares se calcularán como es usual (usando coordenadas rectangulares) ya que la integración numérica no generará problemas de precisión si los elementos no son singulares.

Utilizar este tipo de coordenadas supondrá trabajar con elementos curvos, y no con segmentos rectos como se ha hecho hasta ahora. Esto supone una novedad importante ya que hasta ahora las diversas implementaciones prácticas de este método (por ejemplo el código ANAPLAN-W) han utilizado segmentos rectos. En estas implementaciones, la forma de tratar perturbaciones cuya sección transversal consta de arcos consiste en sustituir esos arcos por segmentos rectos que reconstruyen la perturbación. Conviene reseñar que la perturbación no se sustituye por una poligonal¹⁵, ya que eso supone alterar el área de la sección transversal que define la perturbación. Lo que se hace es generar una serie de segmentos rectos cuya área encerrada sea la misma que la del problema original, esperando que la solución aproximada no se desvie demasiado de la original (tal como se sugiere en [17]). Puede pensarse que esto generará desviaciones de los autovalores a frecuencias altas, debido a la tendencia natural a pensar que los resultados en electromagnetismo empeoran al incrementar la frecuencia. En realidad sucede todo lo contrario, tal y como se explica razonadamente en el apéndice C. Los autovalores de la solución aproximada (las frecuencias de corte) tienden a independizarse de la forma de la sección transversal conforme la magnitud del autovalor se incrementa¹⁶.

Por tanto, los mayores errores en las frecuencias de corte cometidos por la aproximación de segmentación de área constante se dan para frecuencias de corte de modos bajos (cercaos al fundamental). Es por ello que hay que tener extremado cuidado con la modelización de este tipo de estructuras, pues los modos de baja frecuencia de corte (que son los que más fuertemente contribuyen a la potencia transportada por la guía) son los que contribuyen en mayor medida al error en la caracterización de dispositivos de microondas que incluyen estas guías.

Modos TM

En la matriz L' de los modos TM se generan elementos singulares cuando se trata de calcular los elementos de la diagonal de dicha matriz. La función escalar de Green que generaba una singularidad logarítmica aparecerá otra vez, pero ahora el cambio de coordenadas que se va a imponer cambiará la forma de la integral interior, que es la que debe resolverse de forma analítica.

Se verá a continuación el aspecto de la singularidad de la función de Green en coordenadas polares.

¹⁵Se define aquí poligonal de una curva $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como una función f_p que coincide en N puntos de la curva ($f(x_i) = f_p(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$) y cualquier otro valor $f_p(x_j)$ con x_j comprendido dentro de un intervalo entre dos puntos consecutivos (supongamos que $x_j \in [x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, 2, \dots, N$) se obtiene por interpolación lineal entre $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$. Esto da a la curva el aspecto de un polígono de N lados (si la curva es cerrada y $n = 1$) y la poligonal tendrá $N - 1$ lados si la curva es abierta y $n = 1$.

¹⁶Como se demuestra en el apéndice C, si ordenamos los autovalores en orden creciente, para autovalores de gran magnitud cada vez importa menos la forma de la sección transversal. El autovalor tenderá a depender solamente del valor del área de la sección transversal.

Partimos de la ecuación (2.36) de la que se analizará la parte singular

$$-\frac{1}{4\pi} \ln \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] \quad (2.77)$$

A continuación se introducen las coordenadas polares con la siguiente notación

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho \cos \varphi & y &= y_0 + \rho \operatorname{sen} \varphi \\ x' &= x_0 + \rho \cos \varphi' & y' &= y_0 + \rho \operatorname{sen} \varphi' \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde ρ es el radio de curvatura del segmento, (x_0, y_0) representan las coordenadas del centro de la circunferencia del segmento curvo, y φ y φ' representan las coordenadas angulares que definen los puntos (x, y) y (x', y') , respectivamente.

Utilizando la transformación (2.78) se tiene que

$$\begin{aligned} (x - x')^2 &= \rho^2 (\cos \varphi - \cos \varphi')^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \cos \varphi' + \cos^2 \varphi') \\ (y - y')^2 &= \rho^2 (\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi')^2 = \rho^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi - 2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen}^2 \varphi') \end{aligned} \quad (2.79)$$

y operando se obtiene

$$\begin{aligned} (x - x')^2 + (y - y')^2 &= \rho^2 [2 - 2 (\cos \varphi \cos \varphi' + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi')] = \\ &= 2\rho^2 [1 - \cos (\varphi - \varphi')] = 4\rho^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Haciendo uso de esta última relación se puede escribir (2.77) como

$$-\frac{1}{4\pi} \ln \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[4\rho^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) \right] \quad (2.81)$$

Para seguir simplificando la parte singular, se puede dividir y multiplicar el argumento del logaritmo neperiano en la ecuación anterior por $(\varphi - \varphi')^2$, con lo que se deduce

$$-\frac{1}{4\pi} \ln \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[4\rho^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)}{(\varphi - \varphi')^2} \right] - \frac{1}{4\pi} \ln (\varphi - \varphi')^2 \quad (2.82)$$

donde el primer sumando vuelve a ser regular, ya que tiende a una constante finita cuando φ tiende a φ'

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi'} -\frac{1}{4\pi} \ln \left[4\rho^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)}{(\varphi - \varphi')^2} \right] = -\frac{1}{2\pi} \ln \rho \quad (2.83)$$

Por tanto, este último término debe agruparse con la parte regular de la función de Green definida en (2.37), obteniéndose finalmente que la función de Green presenta la siguiente expresión

$$g = g' - \frac{1}{4\pi} \ln (\varphi - \varphi')^2 \quad (2.84)$$

donde la parte regular g' presenta en este caso el siguiente aspecto

$$g' = g_0 - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{R^2} - \frac{1}{4\pi} \ln 4\rho^2 \frac{\text{sen}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)}{(\varphi - \varphi')^2} \quad (2.85)$$

y la función g_0 se define según (2.31).

Si ahora se siguen los mismos pasos¹⁷ que nos llevaron en su momento a la integral singular (2.65), siguiendo cambios de variable análogos para normalizar el intervalo de integración, se obtiene en este caso una integral del tipo

$$-\frac{l}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (a't'^2 + b't' + c') \ln (\varphi - \varphi')^2 dt' \quad (2.86)$$

donde l es la longitud del segmento circular. Para poder realizar la integral anterior es necesario poder expresar φ en función de la variable normalizada t y φ' en función de t' . Es fácil comprobar que dicha relación para tramos circulares recorridos en los sentidos positivo (antihorario) y negativo (horario) son respectivamente:

$$\varphi - \varphi' = \Delta\varphi (t - t') \quad (2.87a)$$

$$\varphi - \varphi' = -\Delta\varphi (t - t') \quad (2.87b)$$

donde $\Delta\varphi = l/\rho$ es el ángulo total que ocupa el segmento. Por lo tanto, para ambos casos (horario y antihorario) se verifica que:

$$(\varphi - \varphi')^2 = \Delta\varphi^2 (t - t')^2 \quad (2.88)$$

Finalmente, se obtiene que la integral buscada es de la forma

$$\begin{aligned} & \int_{-1/2}^{1/2} (a'\xi'^2 + b'\xi' + c') \ln [\varphi^2 (\xi - \xi')^2] d\xi' = \\ & \left\{ \frac{1}{12} [8a'\xi^3 + 12b'\xi^2 + 24c'\xi + a' - 3(b' - 4c')] \ln |2\xi + 1| \right. \\ & - \frac{1}{12} [8a'\xi^3 + 12b'\xi^2 + 24c'\xi - a' - 3(b' + 4c')] \ln |2\xi - 1| \\ & \left. + \left(\frac{a'}{6} + 2c' \right) \ln \left| \frac{\varphi}{2} \right| - \frac{1}{18} (12a'\xi^2 + 18b'\xi + a' + 36c') \right\} \quad (2.89) \end{aligned}$$

siendo φ constante y representando ahora el ángulo total del segmento considerado.

¹⁷La idea es la misma que se ha seguido cuando aparecían singularidades en tramos rectos: la integral doble (2.56) se resuelve realizando analíticamente la integral interior (cambiando la variable de forma adecuada) y numéricamente la integral exterior.

Modos TE

Para la matriz **C** tenemos una situación similar: la función de Green aparece multiplicada por la derivada de las funciones base (parabólicas en nuestro caso), y la integral singular que debe resolverse analíticamente es de la forma

$$\int_{-1/2}^{1/2} (2a'\xi' + b') \ln [\varphi^2(\xi - \xi')^2] d\xi' =$$

$$2b' \ln \left| \frac{\varphi}{2} \right| - 2(a'\xi + b') + \left(2a'\xi^2 + 2b'\xi - \frac{a'}{2} + b' \right) \ln |2\xi + 1|$$

$$- \left(2a'\xi^2 + 2b'\xi - \frac{a'}{2} - b' \right) \ln |2\xi - 1| \quad (2.90)$$

siendo φ constante.

Para la matriz **L**, la situación es más compleja debido a las 4 componentes que la forman. Recordemos de la sección anterior que la diádica $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ tenía singularidades no logarítmicas discontinuas e integrables. Las componente $\hat{x}\hat{x}$ tenía una singularidad del tipo

$$\frac{(x - x')^2}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (2.91)$$

Realizando en dicha expresión el mismo cambio de coordenadas descrito en (2.78), se observa que la expresión de la singularidad anterior queda

$$\frac{(x - x')^2}{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \text{sen}^2 \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) \quad (2.92)$$

y vemos que la singularidad ha desaparecido porque la aproximación al origen ha sido con un arco, y justamente esa trayectoria produce un límite finito cuando el punto de fuente y de campo se aproximan. Para la componente $\hat{y}\hat{y}$ la singularidad no logarítmica es dual, y presenta pues el siguiente aspecto

$$\frac{(y - y')^2}{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \text{cos}^2 \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) \quad (2.93)$$

y obviamente el problema ha desaparecido de igual manera que para su componente homóloga.

En el caso de las componentes cruzadas de la diádica (componentes $\hat{x}\hat{y}$ e $\hat{y}\hat{x}$), las singularidades que aparecen son del mismo tipo, es decir, no logarítmicas, discontinuas e integrables

$$\frac{(x - x')(y - y')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (2.94)$$

y efectuando el cambio de coordenadas tenemos:

$$\frac{(x - x')(y - y')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} = -\frac{1}{2} \text{sen}(\varphi + \varphi') \quad (2.95)$$

y la singularidad (única en las componentes cruzadas) ha sido eliminada. Por tanto, después del cambio de variable, las singularidades no logarítmicas que aparecían en $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ no requieren ningún tratamiento especial, ya que se pueden integrar numéricamente sin problemas al haberse comprobado que desaparecen.

Por último, queda por tratar la singularidad logarítmica de la diádica en la componente $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$ (que será de la misma forma que la de la componente $\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}$). Recordemos que los elementos de la matriz \mathbf{L} se calculan como:

$$L_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(s, s') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') u_j(l') dl dl' \quad (2.96)$$

Al realizar el cambio de coordenadas cartesianas (x, y, z) a cilíndricas (ρ, ϕ, z) , se observa que para un arco el vector tangente a la curva $\hat{\mathbf{t}}$ es precisamente el vector unitario $\hat{\phi}$. Este cambio de variable es bastante clásico [21], pudiéndose escribir

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\rho} = \rho \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \rho \sin \phi \hat{\mathbf{y}} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}} \quad (2.97)$$

y el vector tangente es:

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\phi} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} \quad (2.98)$$

Finalmente, se puede expresar el producto de los vectores tangentes por la diádica (utilizando notación matricial) como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st} \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') &= \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_{st}^{xx} & G_{st}^{xy} \\ G_{st}^{yx} & G_{st}^{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi' \\ \cos \phi' \end{pmatrix} = \\ &= G_{st}^{xx} \sin \phi \sin \phi' - G_{st}^{yx} \cos \phi \sin \phi' + G_{st}^{yy} \cos \phi \cos \phi' - G_{st}^{xy} \sin \phi \cos \phi' \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde $G_{st}^{\gamma\delta}$ con $\gamma, \delta = x, y$ son las 4 componentes de la diádica $\bar{\mathbf{G}}_{st}$. Como se observa de esta última ecuación, van a aparecer senos y cosenos acompañando a la singularidad logarítmica de la diádica de Green. Recuérdese que sólo las componentes G_{st}^{xx} y G_{st}^{yy} tienen singularidades logarítmicas asociadas, y que las demás componentes ni siquiera son singulares y no ofrecerán ninguna resistencia a la integración numérica.

Después de los pertinentes cambios de variable para normalizar el intervalo de integración, las integrales interiores que deben resolverse analíticamente son de la forma

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} (a\xi'^2 + b\xi' + c) \sin(\varphi\xi' + \varphi_0) \ln \left[\varphi^2 (\xi - \xi')^2 \right] d\xi' = \\ (aI_2^s + bI_1^s + cI_0^s) \cos(\varphi_0) + (aI_2^c + bI_1^c + cI_0^c) \sin(\varphi_0) \end{aligned} \quad (2.100a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} (a\xi'^2 + b\xi' + c) \cos(\varphi\xi' + \varphi_0) \ln \left[\varphi^2 (\xi - \xi')^2 \right] d\xi' = \\ (aI_2^c + bI_1^c + cI_0^c) \cos(\varphi_0) - (aI_2^s + bI_1^s + cI_0^s) \sin(\varphi_0) \end{aligned} \quad (2.100b)$$

donde las integrales I_0^s , I_1^s , I_2^s , I_0^c , I_1^c e I_2^c se definen como sigue

$$I_0^s = \frac{1}{\varphi} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \operatorname{sen}(x) \ln(k-x)^2 dx = \frac{2}{\varphi} \left\{ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \ln \left| \frac{\varphi/2+k}{\varphi/2-k} \right| + \cos k \left[\operatorname{Ci}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \operatorname{sen} k \left[\operatorname{Si}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \quad (2.101a)$$

$$I_1^s = \frac{1}{\varphi^2} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} x \operatorname{sen}(x) \ln(k-x)^2 dx = \frac{2}{\varphi^2} \left\{ \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \ln \left| \left(\frac{\varphi}{2}-k\right) \left(\frac{\varphi}{2}+k\right) \right| + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + (k \cos k - \operatorname{sen} k) \left[\operatorname{Ci}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] + (k \operatorname{sen} k + \cos k) \left[\operatorname{Si}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \quad (2.101b)$$

$$I_2^s = \frac{1}{\varphi^3} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} x^2 \operatorname{sen}(x) \ln(k-x)^2 dx = \frac{2}{\varphi^3} \left\{ \left[\varphi \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \left(\frac{\varphi^2}{4} - 2\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \ln \left| \frac{\varphi/2-k}{\varphi/2+k} \right| + 2k \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + [(k^2-2) \cos k - 2k \operatorname{sen} k] \left[\operatorname{Ci}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] + [(k^2-2) \operatorname{sen} k + 2k \cos k] \left[\operatorname{Si}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \quad (2.101c)$$

$$I_0^c = \frac{1}{\varphi} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \cos(x) \ln(k-x)^2 dx = \frac{2}{\varphi} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \ln \left| \left(\frac{\varphi}{2}+k\right) \left(\frac{\varphi}{2}-k\right) \right| - \operatorname{sen} k \left[\operatorname{Ci}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \cos k \left[\operatorname{Si}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \quad (2.101d)$$

$$\begin{aligned}
I_1^c &= \frac{1}{\varphi^2} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} x \cos(x) \ln(k-x)^2 dx = \\
&\quad \frac{2}{\varphi^2} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \ln \left| \frac{\varphi/2 - k}{\varphi/2 + k} \right| \right. \\
&\quad \left. - (k \operatorname{sen} k + \cos k) \left[\operatorname{Ci}\left(k - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (k \cos k - \operatorname{sen} k) \left[\operatorname{Si}\left(k - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \quad (2.101e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2^c &= \frac{1}{\varphi^3} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} x^2 \cos(x) \ln(k-x)^2 dx = \\
&\quad \frac{2}{\varphi^3} \left\{ \left[\varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\frac{\varphi^2}{4} - 2\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \ln \left| \left(\frac{\varphi}{2} - k\right) \left(\frac{\varphi}{2} + k\right) \right| \right. \\
&\quad \left. + \varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - [(k^2 - 2) \operatorname{sen} k + 2k \cos k] \left[\operatorname{Ci}\left(k - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + [(k^2 - 2) \cos k - 2k \operatorname{sen} k] \left[\operatorname{Si}\left(k - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \quad (2.101f)
\end{aligned}$$

En las expresiones anteriores, se ha definido k como una constante¹⁸ de valor $k = \varphi\xi$. Recuérdese además las expresiones de las integrales seno y coseno [28]:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \\
&= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots \quad (2.102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ci}(x) &= \int_{\infty}^x \frac{\cos(\tau)}{\tau} d\tau = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)(2n)!} \\
&= \gamma + \ln(x) - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots \quad (2.103)
\end{aligned}$$

donde γ es la constante de Euler

$$\gamma = 0,5772\ 15664\ 90153\ 28606\ 06512 \dots \quad (2.104)$$

Las propiedades de simetría utilizadas para la resolución analítica de las integrales (2.101) han sido [29]:

$$\operatorname{Si}(-x) = -\operatorname{Si}(x) \quad (2.105a)$$

$$\operatorname{Ci}(-x) = \operatorname{Ci}(x) - j\pi \quad (2.105b)$$

¹⁸ k es una constante para las integrales interiores pero no lo es para las exteriores, cuya integración dependerá de las variables no primadas.

Como ejemplo para mostrar la forma de resolver estas integrales se escoge una de ellas, por ejemplo la I_0^s cuya expresión es

$$I_0^s = \frac{1}{\varphi} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \operatorname{sen} x \ln(k-x)^2 dx \quad (2.106)$$

Si se aplica integración por partes para el cálculo de primitivas

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2.107)$$

y tomando

$$u = \ln(k-x)^2 \quad (2.108a)$$

$$dv = \operatorname{sen} x dx \quad (2.108b)$$

se obtiene de forma directa que:

$$\int \operatorname{sen} x \ln(k-x)^2 dx = -2 \cos x \ln|x-k| + 2 \int \frac{\cos x}{x-k} dx \quad (2.109)$$

Sólo queda saber calcular integrales del tipo

$$\begin{aligned} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \frac{\cos x}{x-k} dx &= \cos k \left[\operatorname{Ci} \left(k - \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{Ci} \left(k + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ &+ \operatorname{sen} k \left[\operatorname{Si} \left(k - \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{Si} \left(k + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.110a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x-k} dx &= \operatorname{sen} k \left[\operatorname{Ci} \left(k - \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{Ci} \left(k + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ &+ \cos k \left[\operatorname{Si} \left(k - \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{Si} \left(k + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.110b)$$

las cuales se resuelven con un sencillo cambio de variable para escribirlas en función de Si y de Ci utilizando las propiedades recogidas en (2.105).

2.3.2. Ejemplos: Guías con elementos curvos

En esta sección se va a mostrar la precisión dada por la teoría desarrollada en la sección anterior. Se mostrará una forma absoluta de determinar esta precisión con un ejemplo analítico donde se va a comparar la versión del método BI-RME que discretiza elementos curvos con tramos rectos, con la versión del método que implementa la teoría del apartado anterior. Al saber de antemano la solución analítica del problema, se podrá determinar de manera precisa el error cometido por ambos métodos.

Finalmente, se mostrará un caso práctico de una guía rectangular que ha sido redondeada en sus esquinas simulando efectos reales de mecanizado. Para visualizar todos estos ejemplos se mostrarán representaciones del campo eléctrico tanto axial como tangencial en el interior de las guías.

Modo (TM)	Error ANAPLAN-W (%) (tramos rectos)	Error BI-RME (%) (tramos curvos)
TM ₀₁	0,160 %	0,002 %
TM ₁₁	0,206 %	0,009 %
TM ₁₂	0,207 %	0,004 %
TM ₀₂	0,320 %	0,011 %
TM ₃₁	0,439 %	0,013 %
TM ₁₂	0,585 %	0,015 %
TM ₄₁	0,284 %	0,021 %
TM ₂₂	0,526 %	0,012 %

Cuadro 2.2. Errores relativos (en %) de ANAPLAN-W y del método BI-RME implementado con segmentos curvos. El ejemplo de prueba ha consistido en una guía circular de diámetro 9,525 mm dentro de un guía cuadrada del mismo lado.

Un ejemplo analítico: la guía circular

Una vez terminada la formulación necesaria para resolver con el método BI-RME perturbaciones con arcos en una guía rectangular, el siguiente paso consiste en mostrar la precisión de este método abordando un problema analítico: la guía circular definida en el interior de una guía cuadrada mediante 4 arcos circulares de 90°. Escogemos una guía cuadrada de lado 9,525 mm como contorno básico, y se perturba para definir en su interior una guía circular de radio 4,7625 mm. La primera frecuencia de corte TE genera un error¹⁹ menor del 0.005 % y la primera frecuencia de corte TM genera un error menor del 0.002 %.

Como referencia para la mejora obtenida podemos consultar [7], donde se genera el mismo ejemplo con el programa ANAPLAN-W²⁰, y en el que se produce un error del 0.16 % para la primera frecuencia de corte TM, es decir para esa frecuencia de corte se ha mejorado más de 14 veces la precisión del resultado.

En la figura 2.6 se muestra el campo eléctrico (axial y tangencial) de diversos modos (TM, TE) de la guía circular considerada. En dicha figura se observa la elevada precisión obtenida, pues el campo residual en el exterior de la guía debido a errores numéricos es prácticamente cero.

En la tabla 2.2 se muestra el error relativo del método BI-RME implementado con segmentos curvos comparado con el error relativo cometido por ANAPLAN-W, el cual utiliza segmentos rectos con ley de conservación de áreas. Los resultados de ANAPLAN-W han sido obtenidos de [7].

¹⁹Se define aquí error relativo como $\frac{|f_r - f_c|}{f_c} 100$ donde f_r es la frecuencia de corte obtenida mediante el método BI-RME y f_c es la frecuencia de corte de la guía circular obtenida mediante métodos analíticos (problema canónico conocido).

²⁰ANAPLAN-W utiliza segmentos rectos para la discretización, pero conservando el área de la sección transversal de la guía circular.

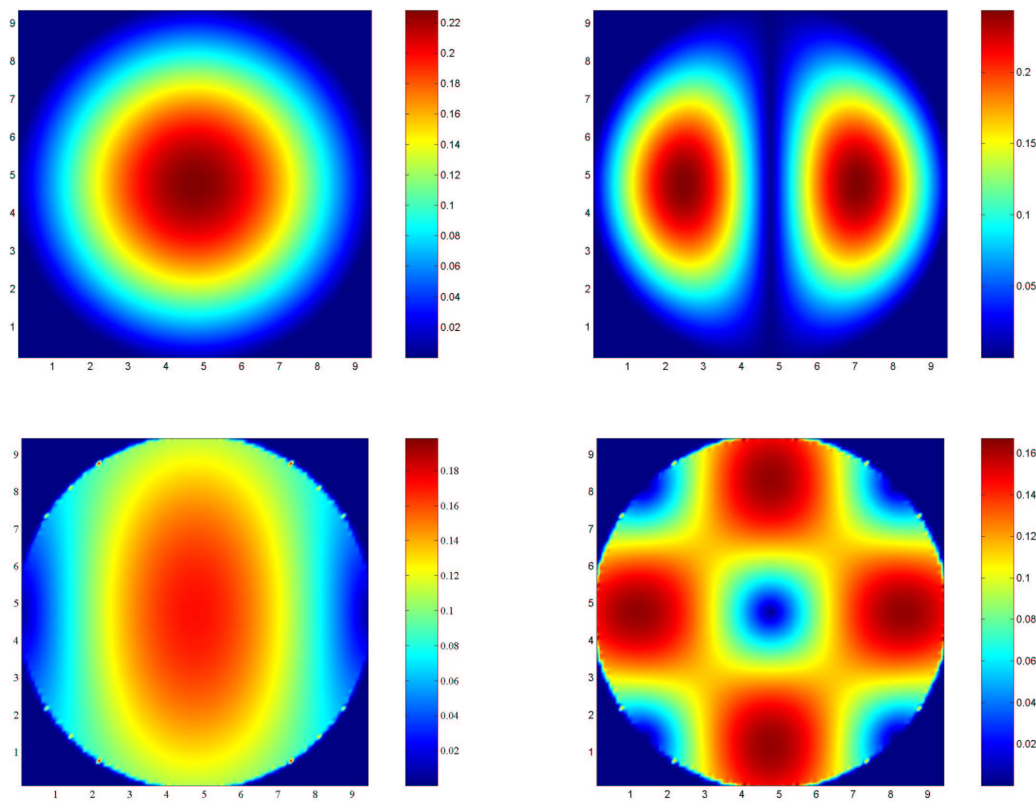


Figura 2.6. Representación del campo eléctrico axial (TM) y tangencial (TE) de algunos modos en una guía rectangular modificada para generar una circular con esquinas redondeadas de 4 mm de radio de curvatura. *Arriba a la izquierda:* Primer modo TM $f_c = 24,11258$ GHz. *Arriba a la derecha:* Segundo modo TM $f_c = 38,42235$ GHz. *Abajo a la izquierda:* Primer modo TE $f_c = 18,45996$ GHz. *Abajo a la derecha:* Segundo modo TE $f_c = 30,61663$ GHz.

Como se observa en la tabla 2.2, la precisión conseguida con la teoría desarrollada para ajustar el método a tramos curvos, ha sido excelente. Según la teoría expuesta en el apéndice C los errores tenderán a ser similares conforme aumente la frecuencia debido al comportamiento asintótico de los autovalores. El problema es que cuando esto suceda, puede ser que los errores acumulados, debido a la ingente cantidad de modos que han tenido que calcularse, hagan el resultado inservible. Otra posibilidad a tener en cuenta es que, simplemente, el computador no pueda resolver el sistema de autovalores debido al tamaño de éste.

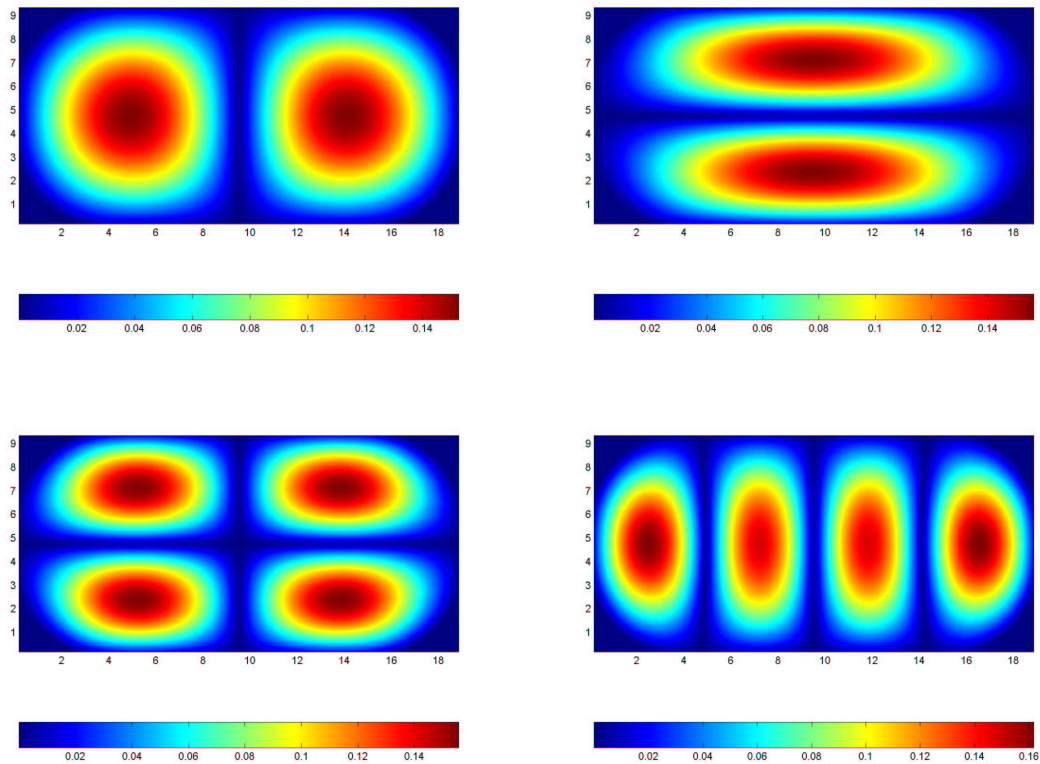


Figura 2.7. Representación del campo eléctrico axial de algunos modos TM en una guía WR-75 con esquinas redondeadas de 4 mm de radio de curvatura. *Arriba a la izquierda:* Segundo modo TM $f_c = 22,72$ GHz. *Arriba a la derecha:* Cuarto modo TM $f_c = 32,66$ GHz. *Abajo a la izquierda:* Quinto modo TM $f_c = 35,97$ GHz. *Abajo a la derecha:* Sexto modo TM $f_c = 36,07$ GHz.

Guía rectangular con esquinas redondeadas

Una vez terminada la formulación necesaria para resolver con el método BI-RME perturbaciones con arcos en una guía rectangular, y comprobada la precisión del método con el ejemplo anterior, el siguiente paso consiste en probar el algoritmo con unos ejemplos de guías con esquinas redondeadas, que suelen aparecer en casos prácticos cuando se utilizan métodos de fabricación de bajo coste y no se consiguen ángulos rectos en la guía rectangular.

En las diversas representaciones de la figura 2.7 se puede comprobar que el campo axial se ha deformado respecto al de una guía rectangular para conseguir cumplir las condiciones de contorno. Las esquinas redondeadas se observan perfectamente en cada uno de los dibujos. La frecuencia de corte del primer modo TM en una guía rectangular WR-75 es de 17,59 GHz,

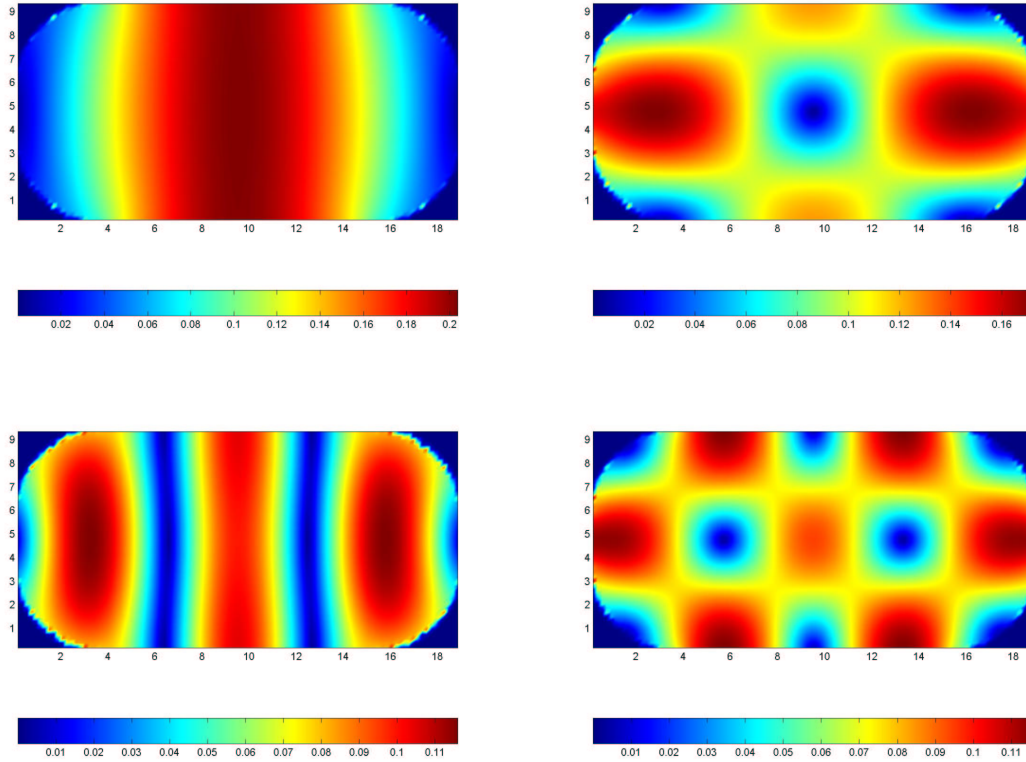


Figura 2.8. Representación del campo eléctrico tangencial de algunos modos TE en una guía WR-75 con esquinas redondeadas de 4 mm de radio de curvatura. *Arriba a la izquierda:* Segundo modo TE $f_c = 16,47$ GHz. *Arriba a la derecha:* Cuarto modo TE $f_c = 19,58$ GHz. *Abajo a la izquierda:* Quinto modo TE $f_c = 24,45$ GHz. *Abajo a la derecha:* Sexto modo TE $f_c = 25,11$ GHz.

mientras que en la guía modificada ya es de 17,75 GHz. Es decir, la esquina redondeada de 4 mm ha introducido una diferencia relativa²¹ de prácticamente el 1%. Al aumentar en frecuencia la diferencia relativa empeora ya que el sexto modo produce un error de 2,46%. Para los modos TE, el campo eléctrico tangencial aparece representado en la figura 2.8. El cálculo del campo eléctrico tangencial debido a los modos TE se calcula mediante la expresión (2.24), y resulta computacionalmente más costoso debido a la evaluación de las 4 componentes de la diádica \vec{G}_{st} . En cuanto al gradiente que aparece en la ecuación (2.24), se calcula fácilmente introduciendo el operador nabla en el interior de la integral. En el apéndice A se recoge la versión acelerada de este gradiente de la función de Green, que

²¹Se define aquí diferencia relativa como $\frac{|f_r - f_c|}{f_r} 100$ donde f_r es la frecuencia de corte del modo en la guía WR-75 redondeada y f_c la frecuencia de corte del modo de la guía rectangular ideal WR-75.

es la que se ha implementado en un ordenador para realizar el cálculo del campo eléctrico tangencial.

Bibliografía

- [1] F. Ng, “Tabulation of methods for the numerical solution of the hollow waveguide problem,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 22, pp. 322–329, March 1974.
- [2] P. Laura, L. Díez, C. Giannetti, L. E. Luisoni, and R. Grossi, “Calculation of the fundamental cutoff frequencies in a case of waveguide of doubly-connected cross section,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, pp. 1392–1395, September 1977.
- [3] D. Dasgupta and B. K. Saha, “Eigenvalue spectrum of rectangular waveguide with two symmetrically placed double ridges,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 29, pp. 47–51, January 1981.
- [4] M. Ikeuchi, K. Inoue, H. Sawami, and H. Niki, “Arbitrarily shaped hollow waveguide analysis by the α -interpolation method,” *SIAM, J. Appl. Math.*, vol. 40, pp. 90–98, February 1981.
- [5] P. Saguet and E. Pic, “Le maillage rectangulaire et le changement de maille dans la methode tlm en deux dimensions,” *Electron. Lett.*, vol. 17, pp. 277–279, April 1981.
- [6] N. P. Malakshinov and A. S. Smagin, “Investigation of arbitrarily shaped regular waveguides by the method of auxiliary sources,” *Radio Eng. Elec. Phys.*, vol. 27, pp. 56–60, June 1982.
- [7] G. Conciauro, M. Bressan, and C. Zuffada, “Waveguide modes via an integral equation leading to a linear matrix eigenvalue problem,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, pp. 1495–1504, November 1984.
- [8] G. Conciauro, P. Arcioni, M. Bressan, and L. Perregrini, “Wideband modeling of arbitrarily shaped H-plane waveguide components by the BI-RME method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, pp. 1057–1066, July 1996.
- [9] G. Conciauro, P. Arcioni, M. Bressan, and L. Perregrini, “Wideband modeling of arbitrarily shaped E-plane waveguide components by the BI-RME method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, pp. 2083–2092, November 1996.

- [10] P. Arcioni, M. Bressan, and G. Conciauro, "Generalized admittance matrix of arbitrary E-plane waveguide junctions by the BI-RME method," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest*, vol. 4, pp. 1699–1702, June 1999.
- [11] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, and L. Perregrini, "Generalized admittance matrix of arbitrary H-plane waveguide junctions by the BI-RME method," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest*, vol. 1, pp. 211–214, June 1997.
- [12] G. Conciauro, M. Guglielmi, and M. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis - CAD Techniques for Waveguide Components and Filters*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [13] M. Bressan and G. Conciauro, "Rapidly converging expressions for dyadic green's functions in two-dimensional resonators of circular and rectangular cross section," *Alta Frequenza (special issue on Applied Electromagnetics)*, vol. 52, no. 3, pp. 188–190, 1983.
- [14] M. Bozzi, M. Bressan, and L. Perregrini, "Generalized Y-matrix of arbitrary 3D waveguide junctions by the BI-RME method," *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, vol. 3, pp. 1269–1272, June 1999.
- [15] M. Bressan, L. Perregrini, and E. Regini, "BI-RME modelling of 3D waveguide components enhanced by the Ewald technique," *IEEE MTT International Symposium Digest*, vol. 2, pp. 1097–1100, 2000.
- [16] A. D. Yaghjian, "Electric dyadic green's functions in the source region," *Proceedings of the IEEE*, vol. 68, pp. 248–263, February 1980.
- [17] J. J. H. Wang, *Generalized Moment Methods in Electromagnetics: Formulation and Computer Solution of Integral Equations*. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [18] C.-T. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*. Series on Electromagnetic Waves, New York: IEEE Press, second ed., 1994.
- [19] I. K. Lifanov, *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*. Utrecht: VSP, 1996.
- [20] J. V. Bladel, *Singular Electromagnetic Fields and Sources*. IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE : Oxford University Press, 1995.
- [21] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, Ltd., 1989.
- [22] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE Press, second ed., 1991.
- [23] J. R. Torregrosa and C. Jordán, *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*. Schaum, Madrid: McGraw-Hill, segunda ed., 1989.

-
- [24] T. M. Apostol, *Calculus*, vol. 2. Barcelona: Reverté, S.A., segunda ed., 1989.
- [25] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. San Diego: Academic Press, 6 ed., 2000.
- [26] C. Christopoulos, *The Transmission-Line Modeling Method, TLM*. IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE : Oxford University Press, 1995.
- [27] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [28] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, second ed., 1992.
- [29] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.

Capítulo 3

Análisis de uniones planares entre guías mediante el método de la ecuación integral

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es analizar uniones planares entre guías de onda mediante una formulación basada en ecuación integral. Las uniones planares en general, y las inductivas y capacitivas en particular, son muy utilizadas en dispositivos en guíaonda, pudiéndose encontrar numerosa literatura respecto a su descripción rigurosa. Las primeras y valiosas aportaciones pueden consultarse en [1], donde se puede encontrar una colección de representaciones en términos de redes circuitales equivalentes, las cuales siempre han sido consideradas útiles tanto por su eficiencia como por la interpretación física que proporcionan. Actualmente uno de los métodos más flexibles y utilizados es el de adaptación modal (en inglés *Mode-Matching*) [2], si bien su eficiencia y estabilidad numérica (problema de la convergencia relativa) han sido ampliamente discutidos [3]–[5].

La técnica que se propone en este capítulo para caracterizar uniones planares resulta sumamente eficiente y precisa, a la vez que evita el problema de la convergencia relativa. En el capítulo se muestra una formulación completamente general, cuya finalidad será encontrar una matriz de impedancias generalizada (en inglés *Generalized Impedance Matrix*, GIM) que resulta más eficiente que la obtención de su matriz equivalente de admitancias [6].

Son aconsejables particularizaciones de esta formulación general [7] cuando se estudian uniones inductivas [8] o capacitivas [9], para poder conseguir reducir al mínimo los cálculos (sobre todo aquellos dependientes de la frecuencia). De esta manera se podrán conseguir códigos muy eficientes para el análisis de estos tipos de uniones particulares.

Para empezar, vamos a concretar la geometría objeto de consideración. Las guías de onda que constituyen la unión planar deben ser uniformes, y los modos de dichas guías deben tener definida una impedancia (o admitancia) característica. Se resolverá el problema para modos

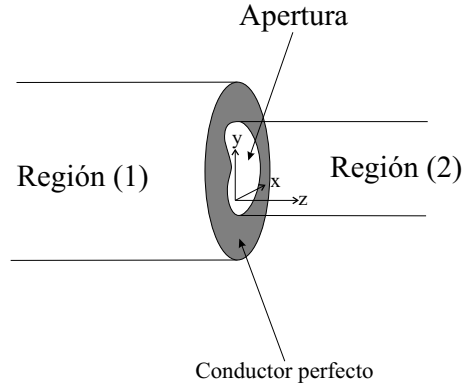


Figura 3.1. Unión planar entre guías y sistema de referencia asociado.

accesibles (usados para conectar transiciones), y modos localizados (usados para describir el campo electromagnético de la unión [10]). El número de modos localizados será sustancialmente mayor que el número de modos accesibles. Utilizaremos la nomenclatura y el sistema de referencia asociado a la estructura que aparece en la figura 3.1.

El origen del sistema de referencia está situado en el centro de la unión entre las guías. La región (1) está definida en $z < 0$ y la región (2) en $z > 0$; las guías de las regiones (1) y (2) se consideran semi-infinitas.

3.2. Descomposición del campo electromagnético transversal

En esta sección se desarrollará la forma en que vamos a describir el campo electromagnético transversal en cada una de las regiones. De ahora en adelante usaremos (δ) para designar cada región¹; en este caso $(\delta) = (1), (2)$. Suprimiremos el factor $e^{j\omega t}$, pues siempre asumiremos excitación armónica de frecuencia angular ω .

El campo electromagnético transversal en una guía puede pues escribirse siguiendo la nomenclatura de [1]:

$$\mathbf{E}_t = \sum_m V_m(z) \mathbf{e}_m \quad \mathbf{H}_t = \sum_m I_m(z) \mathbf{h}_m \quad (3.1)$$

donde la suma se realiza para todos los modos de la guía (propagativos y evanescentes). Las funciones vectoriales modales \mathbf{e}_m y \mathbf{h}_m satisfacen las siguientes relaciones de normalización [11]:

$$\iint_{cs} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n) \cdot \mathbf{u}_z ds = \delta_{m,n} \quad (3.2)$$

¹Sin embargo, en esta sección no utilizaremos (δ) porque nos referiremos indistintamente a los modos de cualquier región.

donde el dominio de integración (cs) está restringido a la sección transversal de la guía en cuestión, y $\delta_{m,n}$ representa la delta de Kronecker:

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n; \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Si no existen pérdidas:

$$\iint_{cs} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n^*) \cdot \mathbf{u}_z ds = \delta_{m,n} \quad (3.4)$$

donde el asterisco (*) indica conjugación compleja. Esta expresión indica que, en el caso de que no hayan pérdidas, los modos no están acoplados.

Respecto a la parte dependiente de la componente axial, se tiene:

$$\begin{aligned} V_m(z) &= V_m^+ e^{-j\beta_m z} + V_m^- e^{+j\beta_m z} \\ I_m(z) &= I_m^+ e^{-j\beta_m z} - I_m^- e^{+j\beta_m z} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Las amplitudes V_m^+ , V_m^- , I_m^+ y I_m^- satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{V_m^+}{I_m^+} = \frac{V_m^-}{I_m^-} = Z_m = \frac{1}{Y_m} \quad (3.6)$$

donde Z_m (Y_m) es la impedancia (admitancia) característica del modo m -ésimo. Para el caso de los modos TM^z y TE^z , tendremos:

$$Z_m^{TM^z} = \frac{1}{Y_m^{TM^z}} = \frac{\beta_m}{\omega \varepsilon} \quad Z_m^{TE^z} = \frac{1}{Y_m^{TE^z}} = \frac{\omega \mu}{\beta_m} \quad (3.7)$$

Observemos que, en general, se cumplirá:

$$Z_m(z) = \frac{V_m(z)}{I_m(z)} = Z_m \frac{V_m^+ e^{-j\beta_m z} + V_m^- e^{+j\beta_m z}}{V_m^+ e^{-j\beta_m z} - V_m^- e^{+j\beta_m z}} \neq Z_m \quad (3.8)$$

Conviene también recordar la siguiente propiedad entre las funciones vectoriales modales, en el caso de que los modos sean TM^z y TE^z :

$$\mathbf{h}_m = \mathbf{u}_z \times \mathbf{e}_m \quad \mathbf{e}_m = \mathbf{h}_m \times \mathbf{u}_z \quad (3.9)$$

donde se observa que estas expresiones no incluyen la impedancia característica modal Z_m , ya que \mathbf{h}_m y \mathbf{e}_m están normalizados de la forma indicada previamente en (3.4). El valor de Z_m se incluye en la representación general del campo electromagnético transversal (coeficientes V_m e I_m).

Así pues, para modos TM^z y TE^z , la relación de ortogonalidad recogida previamente en (3.4) se puede expresar como sigue:

$$\iint_{cs} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n^* ds = \delta_{m,n} \quad \iint_{cs} \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_n^* ds = \delta_{m,n} \quad (3.10)$$

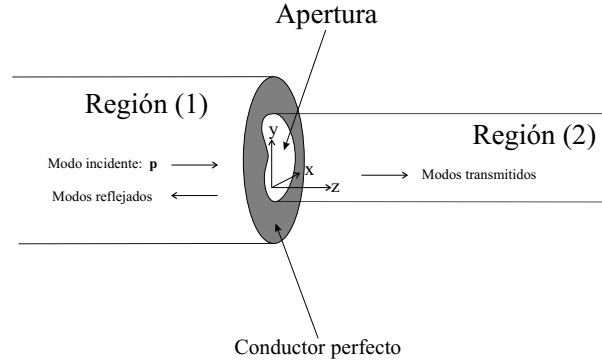


Figura 3.2. Unión plana entre guías y comportamiento ante un modo incidente.

También es conveniente recordar que:

$$V_q = \iint_{cs} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_q^* ds \quad I_q = \iint_{cs} \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{h}_q^* ds \quad (3.11)$$

pues el campo transversal se puede descomponer en serie de funciones vectoriales tal y como se recoge en (3.1):

$$\begin{aligned} \iint_{cs} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_q^* ds &= \\ &= \iint_{cs} \sum_m V_m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_q^* ds = \sum_m V_m \iint_{cs} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_q^* ds = \sum_m V_m \delta_{m,q} = V_q \\ \iint_{cs} \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{h}_q^* ds &= \\ &= \iint_{cs} \sum_m I_m \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_q^* ds = \sum_m I_m \iint_{cs} \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_q^* ds = \sum_m I_m \delta_{m,q} = I_q \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.3. Análisis de una unión planar entre dos guías de ondas.

Volvemos a considerar el problema inicial de la unión planar entre dos guías de ondas²: Supondremos que el modo p -ésimo de la región (1) con amplitud de la corriente modal $I_p^{(1)}$, incide en la unión planar; en la cual se excitarán modos reflejados (en la región (1)), y modos transmitidos (en la región (2)). En algunos casos particulares puede que alguna familia de modos no se excite por razones de simetría (ver apéndice B).

²En esta sección se va a desarrollar toda la formulación para deducir la matriz de impedancia generalizada. Por esta razón, a este método lo denominaremos ecuación integral para impedancias.

En la zona de la unión entre las dos guías, se deberá satisfacer pues la condición de continuidad del campo magnético transversal:

$$\mathbf{H}_t^{(1)} = \mathbf{H}_t^{(2)} \Rightarrow \underbrace{I_p^{+(1)} \mathbf{h}_p^{(1)} e^{-j\beta_p^{(1)} z}}_{\text{modo incidente}} - \underbrace{\sum_m I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} e^{+j\beta_m^{(1)} z}}_{\text{modos reflejados}} = \underbrace{\sum_m I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} e^{-j\beta_m^{(2)} z}}_{\text{modos transmitidos}} \quad (3.13)$$

Teniendo en cuenta que la discontinuidad está ubicada en el plano $z = 0$:

$$I_p^{+(1)} \mathbf{h}_p^{(1)} - \sum_m I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} = \sum_m I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \quad (3.14)$$

Ahora separamos los modos accesibles de los modos localizados:

$$I_p^{+(1)} \mathbf{h}_p^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(1)}} I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} = \sum_{m=1}^{N^{(2)}} I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \quad (3.15)$$

donde $N^{(1)}$ y $N^{(2)}$ son el número de modos accesibles en las regiones (1) y (2), respectivamente. El modo p -ésimo incidente queda dentro de los modos accesibles considerados en la región (1).

Si recordamos ahora que:

$$I_m^{-(1)} = Y_m^{(1)} V_m^{-(1)} \quad I_m^{+(2)} = Y_m^{(2)} V_m^{+(2)} \quad (3.16)$$

se puede escribir por tanto:

$$\begin{aligned} I_p^{+(1)} \mathbf{h}_p^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(1)}} I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} V_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} = \\ \sum_{m=1}^{N^{(2)}} I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} V_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

si ahora expresamos las corrientes y tensiones en el plano $z = 0$ teniendo en cuenta que el único modo incidente es el p -ésimo, tendremos

$$\begin{aligned} I_p^{(1)}(0) &\equiv I_p^{(1)} \equiv I_p^{+(1)} - I_p^{-(1)} \\ I_m^{(1)}(0) &\equiv I_m^{(1)} = -I_m^{-(1)}, \forall m \neq p \\ I_m^{(2)}(0) &\equiv I_m^{(2)} = I_m^{+(2)}, \forall m \\ V_p^{(1)}(0) &\equiv V_p^{(1)} = V_p^{+(1)} + V_p^{-(1)} \\ V_m^{(1)}(0) &\equiv V_m^{(1)} = V_m^{-(1)}, \forall m \neq p \\ V_m^{(2)}(0) &\equiv V_m^{(2)} = V_m^{+(2)}, \forall m \end{aligned} \quad (3.18)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación (3.17) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N^{(1)}} I_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} = \\ \sum_{m=1}^{N^{(2)}} I_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seguidamente sumamos a ambos lados de (3.19) el término:

$$\sum_{m=1}^{N^{(1)}} V_m^{(1)} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(2)}} V_m^{(2)} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \quad (3.20)$$

El siguiente paso consiste en definir las admitancias características asintóticas $\hat{Y}_m^{(\delta)}$:

$$\hat{Y}_m^{(\delta)} \equiv \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} Y_m^{(\delta)} = \begin{cases} \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \frac{\omega \varepsilon}{\beta_m^{(\delta)}} = \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \frac{\omega \varepsilon}{\sqrt{k^2 - k_{c,m}^{(\delta)2}}} = j \frac{\omega \varepsilon}{k_{c,m}^{(\delta)}} & \text{(TM)} \\ \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \frac{\beta_m^{(\delta)}}{\omega \mu} = \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k^2 - k_{c,m}^{(\delta)2}}}{\omega \mu} = -j \frac{k_{c,m}^{(\delta)}}{\omega \mu} & \text{(TE)} \end{cases} \quad (3.21)$$

donde $k_{c,m}^{(\delta)}$ es el número de onda de corte para el modo m -ésimo en el puerto (δ) , habiéndose tenido en cuenta que:

$$\beta_m^{(\delta)} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_{c,m}^{(\delta)2}} \Rightarrow \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \beta_m^{(\delta)} = \sqrt{-k_{c,m}^{(\delta)2}} = -j k_{c,m}^{(\delta)} \quad (3.22)$$

donde se ha escogido el signo negativo de la raíz para que la onda positiva se atenúe en la dirección $z > 0$. Las admitancias $\hat{Y}_m^{(\delta)}$ representan las admitancias de los modos de orden elevado, es decir, de la “mayoría” de los modos localizados, si bien también puede interpretarse como el comportamiento asintótico de los modos a bajas frecuencias.

Podemos pues escribir la ecuación (3.19) como:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N^{(1)}} I_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} + \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} = \\ = \sum_{m=1}^{N^{(2)}} I_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

El siguiente paso consiste en definir unas nuevas corrientes ($\bar{I}_m^{(1)}$ e $\bar{I}_m^{(2)}$) como se indica seguidamente:

$$\begin{aligned}\bar{I}_m^{(1)} &\triangleq I_m^{(1)} + \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{(1)} \\ \bar{I}_m^{(2)} &\triangleq I_m^{(2)} - \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{(2)}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Recordando las relaciones (3.18), estas nuevas corrientes recién definidas pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{I}_p^{(1)} &= (I_p^{+(1)} - I_p^{-(1)}) + \hat{Y}_p^{(1)}(V_p^{+(1)} + V_p^{-(1)}) = (I_p^{+(1)} - I_p^{-(1)}) + \frac{\hat{Y}_p^{(1)}}{Y_p^{(1)}}(I_p^{+(1)} + I_p^{-(1)}) \\ \bar{I}_m^{(1)} &= -I_m^{-(1)} + \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{-(1)} = -I_m^{-(1)} + \frac{\hat{Y}_m^{(1)}}{Y_m^{(1)}} I_m^{-(1)}, \quad \forall m \neq p \\ \bar{I}_m^{(2)} &= I_m^{+(2)} - \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{+(2)} = I_m^{+(2)} - \frac{\hat{Y}_m^{(2)}}{Y_m^{(2)}} I_m^{+(2)}, \quad \forall m\end{aligned}\quad (3.25)$$

Así pues, si $m \neq p$ y además m es elevado:

$$Y_m^{(\delta)} \approx \hat{Y}_m^{(\delta)} \Rightarrow \frac{\hat{Y}_m^{(\delta)}}{Y_m^{(\delta)}} \stackrel{m \gg 1}{\approx} 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_m^{(1)} = \left(-1 + \frac{\hat{Y}_m^{(1)}}{Y_m^{(1)}}\right) I_m^{-(1)} \stackrel{m \gg 1}{\approx} 0 & m \neq p \\ \bar{I}_m^{(2)} = \left(1 - \frac{\hat{Y}_m^{(2)}}{Y_m^{(2)}}\right) I_m^{+(2)} \stackrel{m \gg 1}{\approx} 0 & \forall m \end{cases}\quad (3.26)$$

Con estas nuevas corrientes, definidas según (3.24), podemos expresar (3.23) como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} &= \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} + \\ &+ \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} + \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}\end{aligned}\quad (3.27)$$

El campo eléctrico transversal en la unión de las dos guías, que designaremos por \mathbf{E}_t , es una función desconocida, que en la zona conductora de la guía más grande debe ser igual a cero, pues suponemos que el conductor es perfecto. Aquí reside el punto clave por el que se prefiere utilizar la formulación de impedancias en lugar de la formulación de admitancias. La condición de campo magnético nulo en la zona conductora de la unión no puede lógicamente imponerse, y por ello la formulación de admitancias requiere que las integrales que se consideran a continuación no se puedan reducir a la sección de la guía menor³. Siguiendo

³Esto conlleva que la formulación de admitancias precise de más funciones base para reconstruir el campo, y converja por tanto más lentamente que la formulación de impedancias [6].

pues con la formulación de impedancias, el campo eléctrico transversal incógnita (\mathbf{E}_t) puede expresarse como:

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^{(1)} \mathbf{e}_m^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^{(2)} \mathbf{e}_m^{(2)} \quad (3.28)$$

Obviamente, esta función incógnita debe valer cero fuera de la unión planar entre las dos guías. A partir de este momento vamos a suponer que la guía (1) tiene una sección transversal mayor que la (2), y que en la unión la sección de la guía (2) está contenida completamente en la sección de la guía (1). Esto nos permitirá reducir todas las integrales de superficie al área de la sección transversal de la guía pequeña (2).

Los coeficientes $V_m^{(\delta)}$ pueden calcularse pues del siguiente modo:

$$\begin{aligned} V_m^{(1)} &= \iint_{cs(1)} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_m^{(1)*} ds' = \iint_{cs(2)} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_m^{(1)*} ds' \\ V_m^{(2)} &= \iint_{cs(2)} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_m^{(2)*} ds' \end{aligned} \quad (3.29)$$

Así pues, recordando (3.9), se puede escribir:

$$\begin{aligned} V_m^{(\delta)} &= \iint_{cs(2)} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_m^{(\delta)*} ds' = \iint_{cs(2)} \mathbf{E}_t \cdot (\mathbf{h}_m^{(\delta)} \times \mathbf{u}_z)^* ds' = \\ &= \iint_{cs(2)} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde la integral se ha definido en la sección transversal de la guía pequeña, y se ha denotado a las variables de integración con primas (puntos de fuente) para poder distinguir las de las variables sin primar (puntos de campo) que aparecen en la ecuación original (3.27).

El siguiente paso es expandir $\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t$ en la apertura como combinación lineal de modos accesibles, tal y como se muestra a continuación:

$$\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t \approx \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{M}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \quad (3.31)$$

donde $\mathbf{M}_n^{(1)}$ y $\mathbf{M}_n^{(2)}$ son dos funciones vectoriales desconocidas que varían con las coordenadas transversales $s' = (x', y')$. Introduciendo esta expansión del término $\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t$ en la definición anterior de $V_m^{(\delta)}$ se obtiene que:

$$V_m^{(\delta)} = \iint_{cs(2)} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' = \iint_{cs(2)} \left(\sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{M}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \right) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' \quad (3.32)$$

Ahora, sustituyendo la expresión (3.32) recién deducida en la ecuación (3.27), y colocando más externamente los sumatorios de menor número de términos para poder identificar fácilmente términos, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{h}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{h}_n^{(2)} = \\
& \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \left(\sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' \right) \\
& - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \left(\sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' \right) \\
& + \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \left(\sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' \right) \\
& - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \left(\sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' \right) \\
& + \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \left(\sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' \right) \\
& - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \left(\sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' \right) \\
& + \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \left(\sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' \right) \\
& - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \left(\sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' \right) \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Identificando términos en la ecuación anterior, se puede escribir la expresión del campo

magnético para cada acceso como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n^{(\delta)} = & \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' + \\
& \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' + \\
& \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' + \\
& \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds'; \quad (\delta) = (1), (2) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Recordemos que en la ecuación (3.34) las funciones dentro de las integrales dependen de las coordenadas transversales primadas ($\mathbf{M}_n^{(\delta)}(s')$, $\mathbf{h}_m^{(1)*}(s')$, $\mathbf{h}_m^{(2)*}(s')$), mientras que las funciones exteriores a las integrales dependen de las coordenadas no primadas.

Con el objeto de escribir (3.34) en la forma convencional de una ecuación integral, se debe intercambiar seguidamente el orden de las series y las integrales presentes en dicha expresión. Para ello admitimos como hipótesis la convergencia uniforme de todas las series de funciones presentes en (3.34), y para mayor claridad se especificará la dependencia explícita de todas las funciones presentes en dicha expresión con las coordenadas primadas (s') o sin primar (s):

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n^{(\delta)}(s) = & \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)}(s') \left[\sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \right. \\
& \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') + \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \\
& \left. \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') \right] ds' \quad (\delta) = (1), (2) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Esta expresión representa una ecuación integral de Fredholm de primera especie de dos variables [12]; y en nuestro caso, donde los modos son vectores reales, de núcleo simétrico ($K(s, s') = K(s', s)$):

$$g(s) = \iint K(s, s') f(s') ds' \quad (3.36)$$

donde $g(s)$ es conocida, $K(s, s')$ es el núcleo de la ecuación integral (también conocido) y $f(s')$ es la función incógnita que debemos encontrar.

Finalmente, tras resolver las ecuaciones integrales definidas en (3.35), se puede escribir:

$$\begin{aligned}
V_m^{(\delta)} &= \iint_{cs(2)} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' = \\
&= \iint_{cs(2)} \left(\sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{M}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \right) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' = \\
&= \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)}(s') \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s') ds' \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)}(s') \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s') ds' \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Si definimos los elementos de la matriz de impedancias como se indica a continuación:

$$Z_{m,n}^{(\delta,\gamma)} \triangleq \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\gamma)}(s') \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s') ds' \quad (\delta), (\gamma) = (1), (2) \tag{3.38}$$

podremos escribir finalmente que:

$$\begin{aligned}
V_m^{(\delta)} &= \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} Z_{m,n}^{(\delta,1)} + \sum_{n=1}^{N^{(2)}} (-\bar{I}_n^{(2)}) Z_{m,n}^{(\delta,2)} \\
m &= 1, 2, \dots, N^{(\delta)} \quad (\delta) = (1), (2) \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Esta ecuación completa la formulación del problema en términos de una matriz de impedancias generalizada de tamaño finito (ya que dicha matriz se define para los modos accesibles). Dicha ecuación se puede representar como se muestra en la figura 3.3. En términos matriciales, la ecuación (3.39) puede escribirse como sigue:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}^{(1)} \\ \mathbf{V}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{(1,1)} & \mathbf{Z}^{(1,2)} \\ \mathbf{Z}^{(2,1)} & \mathbf{Z}^{(2,2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{I}}^{(1)} \\ -\bar{\mathbf{I}}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

donde $\mathbf{V}^{(\delta)}$ e $\bar{\mathbf{I}}^{(\delta)}$ son vectores de $N^{(\delta)}$ componentes ($\delta = 1, 2$), y $\mathbf{Z}^{(\delta,\gamma)}$ son matrices de tamaño $N^{(\delta)} \times N^{(\gamma)}$ ($\delta, \gamma = 1, 2$).

3.4. Extracción de la dependencia con la frecuencia

Se ha deducido en la sección anterior que la ecuación integral que tenemos que resolver presenta el siguiente aspecto:

$$\mathbf{h}_n^{(\delta)}(s) = \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)}(s') \cdot K(s, s') ds' \quad (\delta) = (1), (2) \tag{3.41}$$

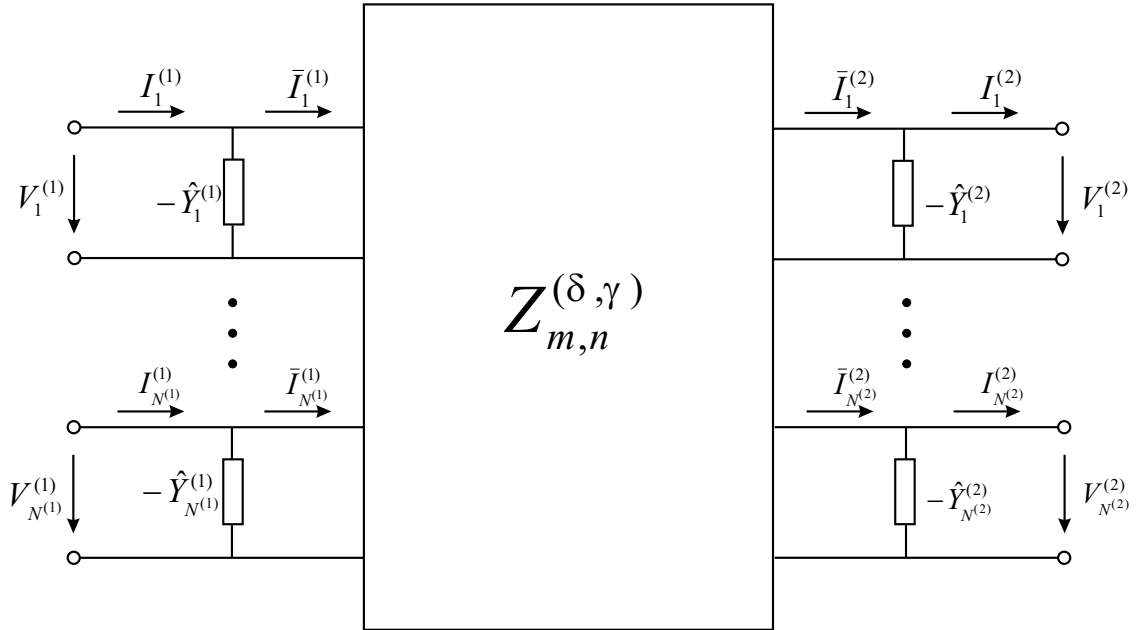


Figura 3.3. Red equivalente multimodal que se obtiene por el método de la ecuación integral formulado para impedancias.

donde el núcleo de dicha ecuación se puede reordenar como sigue:

$$\begin{aligned}
 K(s, s') \equiv & \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \sum_{m=N^{(1)+1}}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') \\
 & + \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') + \sum_{m=N^{(2)+1}}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Hay que remarcar que el núcleo de la ecuación integral es el mismo para los dos puertos (es independiente del valor que tome δ). Además, el núcleo presenta las siguientes propiedades sumamente interesantes:

1. Se puede reducir a una expresión independiente de la frecuencia si solamente se excitan modos TM^z o modos TE^z . Esto se consigue aproximando $Y_m^{(\delta)} \approx \hat{Y}_m^{(\delta)}$. Para ello, basta con sustituir en (3.42) las admitancias modales $Y_m^{(\delta)}$ por sus respectivas expresiones asintóticas $\hat{Y}_m^{(\delta)}$ (al pertenecer los modos a una sola familia se atenúan más rápidamente), obteniéndose para el núcleo de la ecuación integral la misma expresión propuesta en [8].
2. Al núcleo de dicha ecuación se le puede extraer la dependencia con la frecuencia de tal forma que las sumas del núcleo de la ecuación integral se calculan fuera del bucle

en frecuencia, si bien la ecuación integral se debe resolver finalmente para todas las frecuencias.

En el caso más general, se excitan las dos familias de modos TM^z y TE^z , por lo que la propiedad 1 no puede utilizarse. A partir de este punto vamos a tratar el caso general y por ello tendremos que hacer uso de la propiedad 2.

Para empezar, completamos las series finitas de la ecuación (3.42) hasta infinito, sustrayendo para ello los correspondientes términos:

$$\begin{aligned}
K(s, s') \equiv & \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') - \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} \left(1 - \frac{Y_m^{(1)}}{\hat{Y}_m^{(1)}} \right) \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') - \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(2)} \left(1 - \frac{Y_m^{(2)}}{\hat{Y}_m^{(2)}} \right) \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \mathbf{h}_m^{(2)*}(s')
\end{aligned} \tag{3.43}$$

El primer y tercer término en (3.43) no dependen de la frecuencia⁴ (por lo que se denominan estáticos). Respecto al segundo y al cuarto término se debe recordar que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{Y_m^{(\delta)}}{\hat{Y}_m^{(\delta)}} \right) = 0 \tag{3.44}$$

lo que permite pensar en una rápida convergencia de las series que incluyen estos términos. Intentamos pues la siguiente aproximación (desarrollo en serie de Taylor) del término entre paréntesis presente en la segunda y cuarta serie de (3.43):

$$\left(1 - \frac{Y_m^{(\delta)}}{\hat{Y}_m^{(\delta)}} \right) \approx \sum_{r=1}^{R^{(\delta)}} B_{r,m}^{(\delta)} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}} \right)^{2r} \tag{3.45}$$

donde $k_{c,m}^{(\delta)}$ es el número de onda de corte del modo m -ésimo en la guía correspondiente al acceso (δ) , y $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$. Los coeficientes $B_{r,m}^{(\delta)}$ para los modos TE^z se obtendrán desarrollando la anterior expresión⁵ y teniendo en cuenta que estamos considerando modos localizados

⁴En realidad sí que dependen de la frecuencia, pero se pueden separar los modos TM de los TE y la dependencia con la frecuencia es lineal para cada uno de estos términos (la frecuencia multiplica o divide a cada uno de dichos términos).

⁵El exponente $2r$ del desarrollo en serie de Taylor es par para este caso particular como se verá a continuación.

(los cuales están todos al corte):

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{Y_m^{(\delta)}}{\hat{Y}_m^{(\delta)}}\right) &= 1 - \frac{\frac{\beta_m^{(\delta)}}{\omega\mu}}{-j\frac{k_{c,m}^{(\delta)}}{\omega\mu}} = 1 - \frac{\sqrt{k^2 - k_{c,m}^{(\delta)2}}}{-jk_{c,m}^{(\delta)}} = \\ &= 1 - \frac{-j\sqrt{k_{c,m}^{(\delta)2} - k^2}}{-jk_{c,m}^{(\delta)}} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right)^2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ahora utilizando el binomio de Newton para exponentes no enteros⁶:

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^n (2i - 3)}{n!2^n} x^{2n} \quad (3.47)$$

podemos identificar fácilmente los coeficientes buscados:

$$B_{r,m}^{(\delta)} = -\frac{1}{r!2^r} \prod_{i=1}^r (2i - 3) \quad (3.48)$$

En consideraciones prácticas, el número $R^{(\delta)}$ de coeficientes del desarrollo en serie, que en principio depende del acceso considerado, se tomará fijo independientemente del acceso. La serie se suele truncar con 4 términos, tanto para los modos TE^z como para los modos TM^z , por lo que sólo necesitaremos los cuatro primeros coeficientes (los cuales variarán según sea el modo considerado TM^z o TE^z). Por tanto, la serie para los modos TE^z quedará finalmente expresada como:

$$1 - \frac{Y_m^{(\delta)}}{\hat{Y}_m^{(\delta)}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right)^6 + \frac{5}{128} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right)^8 \quad (3.49)$$

Para deducir los coeficientes $B_{r,m}^{(\delta)}$ correspondientes a la expansión de un modo TM^z , se debe seguir un razonamiento análogo:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{Y_m^{(\delta)}}{\hat{Y}_m^{(\delta)}}\right) &= 1 - \frac{\frac{\omega\epsilon}{\beta_m^{(\delta)}}}{j\frac{\omega\epsilon}{k_{c,m}^{(\delta)}}} = 1 - \frac{-jk_{c,m}^{(\delta)}}{\sqrt{k^2 - k_{c,m}^{(\delta)2}}} = \\ &= 1 - \frac{-jk_{c,m}^{(\delta)}}{-j\sqrt{k_{c,m}^{(\delta)2} - k^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right)^2}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

⁶El binomio de Newton para exponentes no enteros se expresa en forma de serie como $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n}x^n$ si $|x| < 1, \forall m$.

volviendo a utilizar el binomio de Newton para desarrollar el inverso de la raíz presente en (3.50), se tiene:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^n (2i - 1)}{n! 2^n} x^{2n} \quad (3.51)$$

pudiendo identificar fácilmente los coeficientes buscados:

$$B_{r,m}^{(\delta)} = -\frac{1}{r! 2^r} \prod_{i=1}^r (2i - 1) \quad (3.52)$$

y expresando finalmente la serie para los modos TM^z de la siguiente manera:

$$1 - \frac{Y_m^{(\delta)}}{\hat{Y}_m^{(\delta)}} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}} \right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}} \right)^4 - \frac{5}{16} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}} \right)^6 - \frac{35}{128} \left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}} \right)^8 \quad (3.53)$$

Obviamente la aproximación es tanto mejor cuando el modo localizado m -ésimo está más al corte⁷.

Con el objeto de expresar de forma más compacta el núcleo de la ecuación integral, se define:

$$\begin{aligned} \hat{K}(s, s') &\triangleq \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') \\ \hat{\hat{K}}(s, s') &\triangleq \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} B_{r,m}^{(1)} \left(\frac{1}{k_{c,m}^{(1)}} \right)^{2r} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \\ &\quad \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(2)} B_{r,m}^{(2)} \left(\frac{1}{k_{c,m}^{(2)}} \right)^{2r} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') \end{aligned} \quad (3.54)$$

Tomando $R^{(1)} = R^{(2)} = R$, podemos reescribir (3.43) de la siguiente forma compacta:

$$K(s, s') = \hat{K}(s, s') - \sum_{r=1}^R k^{2r} \hat{\hat{K}}(s, s') \quad (3.55)$$

Se puede afirmar que \hat{K} y $\hat{\hat{K}}$ no dependen de la frecuencia, y por ello dichas sumas sólo se calculan una vez fuera del bucle de frecuencia⁸. Como posteriormente veremos, el cálculo del núcleo se implementará fácilmente dentro del bucle en frecuencia a partir de unos términos calculados previamente de manera estática (y almacenados de manera adecuada), asegurando una gran rapidez del algoritmo.

⁷Si la aproximación (3.49) o la (3.53) no fueran lo suficientemente buenas para cierto modo m -ésimo la solución no consistiría en aumentar el número de términos de la aproximación, sino en considerar dicho modo como accesible.

⁸En realidad, dependiendo de si los modos a sumar son TM^z o TE^z , la frecuencia debe multiplicar o dividir a cada término de \hat{K} y $\hat{\hat{K}}$.

3.5. Resolución con el método de los momentos

La ecuación integral de Fredholm de primera especie que debemos resolver presenta el siguiente aspecto:

$$\mathbf{h}_n^{(\delta)} = \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)}(s') K(s, s') ds' \quad (\delta) = (1), (2) \quad (3.56)$$

Esta ecuación integral se puede interpretar como la siguiente ecuación de operadores:

$$\mathcal{L} f = g \quad (3.57)$$

donde \mathcal{L} es un operador integral lineal, f es una función desconocida y g es una función conocida (la excitación). \mathcal{L} define una aplicación lineal (homomorfismo) entre dos conjuntos:

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{L}) \quad (3.58)$$

denominados *dominio* ($\mathcal{D}(\mathcal{L})$) y *recorrido* ($\mathcal{R}(\mathcal{L})$) del operador. Así pues, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ y $g \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$

En este ámbito, aplicaremos el Método de los Momentos [13] para resolver este problema. Comenzaremos por definir un producto *escalar* o *interno* en $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ y en $\mathcal{R}(\mathcal{L})$:

$$\begin{aligned} \langle u|v \rangle &= \langle v|u \rangle^* \\ \langle \alpha u + \beta v|f \rangle &= \alpha \langle u|f \rangle + \beta \langle v|f \rangle \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ \langle f|f \rangle &\geq 0 \\ \langle f|f \rangle &= 0 \iff f = 0 \\ \forall u, v, f &\in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \text{ ó } \mathcal{R}(\mathcal{L}), \text{ indistintamente} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Un espacio para el cual se ha definido un producto escalar es un espacio *métrico* o *normado*. Un espacio que es lineal y métrico se llama espacio de *Hilbert*⁹. Un espacio de Hilbert cuyo producto interno es real se le llama espacio *Euclideo*; en caso contrario es un espacio *unitario*. La *norma* o *longitud* de un vector se define como:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (3.60)$$

El producto interior que se va a definir en nuestro caso y para funciones vectoriales en general es:

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{v} \rangle \equiv \iint_{cs(2)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* ds \quad (3.61)$$

⁹En realidad, un espacio \mathcal{H} es de Hilbert si es además completo, es decir que toda secuencia de Cauchy en \mathcal{H} converge a un vector en \mathcal{H} . Una secuencia $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge en el sentido de Cauchy si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|x_m - x_n\| < \epsilon$ con $N < \min(m, n)$.

El siguiente paso consiste en expandir la función incógnita f como una serie de funciones base

$$f \approx f_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \quad (3.62)$$

donde α_k son los coeficientes de la expansión y $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ forman un conjunto linealmente independiente de funciones base llamadas también funciones de expansión. La razón de haber conseguido trabajar con una estructura de espacio de Hilbert se debe a que ahora es posible generalizar el concepto de aproximación de vectores y funciones. Si la función f a desarrollar pertenece a un espacio de Hilbert entonces puede ser descompuesta según (3.62). A partir de esa descomposición y del teorema de proyección [14] se puede concluir que:

- La aproximación a f dada por (3.62) pertenece a un subespacio \mathcal{M} de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$, es decir, $f_n \in \mathcal{M} \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$.
- El error cometido e_m es ortogonal a la aproximación de f , es decir, $e_m \in \mathcal{M}^\perp$.

Sustituyendo en la ecuación de operadores (3.57):

$$g = \mathcal{L} f \approx \mathcal{L} \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathcal{L} f_k \quad (3.63)$$

Ahora, siguiendo el método de Galerkin, ponderamos la ecuación anterior con las funciones base:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \langle \mathcal{L} f_k | f_m \rangle = \langle g | f_m \rangle \quad m, n = 1, 2, \dots, M \quad (3.64)$$

que es una ecuación lineal que puede resolverse fácilmente, encontrando los coeficientes α_n . Aplicando el método de Galerkin a nuestro problema, el operador \mathcal{L} se define como:

$$\mathcal{L} \triangleq \iint_{cs(2)} K(s, s') (\cdot) ds' \quad (3.65)$$

y por tanto tenemos que¹⁰:

$$\mathcal{L} \mathbf{M}_n^{(\delta)} = \iint_{cs(2)} K(s, s') \mathbf{M}_n^{(\delta)}(s') ds' \quad (3.66)$$

y nuestra ecuación integral queda expresada por tanto del siguiente modo:

$$\mathcal{L} \mathbf{M}_n^{(\delta)} = \mathbf{h}_n^{(\delta)} \quad (3.67)$$

¹⁰La interpretación de la ecuación (3.65) es simple: aplicar el operador \mathcal{L} sobre una función $f(s')$ equivale a multiplicar esa función por el núcleo $K(s, s')$ e integrar en la sección transversal de la guía pequeña respecto a las variables primadas.

Ahora tomamos como funciones de expansión una combinación lineal de modos magnéticos de la guía (2), es decir, de la guía pequeña:

$$\mathbf{M}_n^{(\delta)}(s') \approx \sum_{q=1}^{M^{(\delta)}} \alpha_q^{(n,\delta)} \mathbf{h}_q^{(2)}(s') \quad (3.68)$$

donde $M^{(\delta)}$ es el número de funciones base consideradas en el puerto (δ). Recordemos que $\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t \approx \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{M}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{M}_n^{(2)}$, por lo que $\mathbf{M}_n^{(1)}$ y $\mathbf{M}_n^{(2)}$ deben ser cero fuera de la unión entre las dos guías. Además, como $\mathbf{u}_z \times \mathbf{e}_n = \mathbf{h}_n$, las funciones $\mathbf{M}_n^{(\delta)}$ se expanden mediante funciones base de campo magnético. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \mathbf{M}_n^{(\delta)} &= \mathbf{h}_n^{(\delta)} \\ \mathfrak{L} \sum_{q=1}^{M^{(\delta)}} \alpha_q^{(n,\delta)} \mathbf{h}_q^{(2)} &\approx \mathbf{h}_n^{(\delta)} \\ \sum_{q=1}^{M^{(\delta)}} \alpha_q^{(n,\delta)} \mathfrak{L} \mathbf{h}_q^{(2)} &\approx \mathbf{h}_n^{(\delta)} \\ \left\langle \sum_{q=1}^{M^{(\delta)}} \alpha_q^{(n,\delta)} \mathfrak{L} \mathbf{h}_q^{(2)} \middle| \mathbf{h}_p^{(2)} \right\rangle &\approx \langle \mathbf{h}_n^{(\delta)} | \mathbf{h}_p^{(2)} \rangle \\ \sum_{q=1}^{M^{(\delta)}} \alpha_q^{(n,\delta)} \langle \mathfrak{L} \mathbf{h}_q^{(2)} | \mathbf{h}_p^{(2)} \rangle &\approx \langle \mathbf{h}_n^{(\delta)} | \mathbf{h}_p^{(2)} \rangle \end{aligned} \quad (3.69)$$

con $p = 1, 2, \dots, M^{(\delta)}$. De la ecuación anterior observamos que el segundo término se resuelve fácilmente como sigue:

$$\langle \mathbf{h}_n^{(\delta)} | \mathbf{h}_p^{(2)} \rangle = \iint_{cs(2)} \mathbf{h}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_p^{(2)*} ds = \begin{cases} \iint_{cs(2)} \mathbf{h}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_p^{(2)*} ds & (\delta) = (1) \\ \delta_{n,p} & (\delta) = (2) \end{cases} \quad (3.70)$$

Buscamos ahora simplificar la expresión $\mathcal{L} \mathbf{h}_q^{(2)}$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \mathbf{h}_q^{(2)} &= \iint_{cs(2)} K(s, s') \mathbf{h}_q^{(2)}(s') ds' \\
&= \iint_{cs(2)} \left(\hat{K}(s, s') - \sum_{r=1}^R k^{2r} \hat{K}_r(s, s') \right) \mathbf{h}_q^{(2)}(s') ds' = \\
&= \iint_{cs(2)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') \right) \mathbf{h}_q^{(2)}(s') ds' \\
&\quad - \sum_{r=1}^R k^{2r} \iint_{cs(2)} \left[\sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} B_{r,m}^{(1)} \left(\frac{1}{k_{c,m}^{(1)}} \right)^{2r} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(2)} B_{r,m}^{(2)} \left(\frac{1}{k_{c,m}^{(2)}} \right)^{2r} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') \right] \mathbf{h}_q^{(2)}(s') ds' \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Si en la expresión anterior introducimos $\mathbf{h}_q^{(2)}(s')$ en los sumatorios, representamos las integrales de acoplo entre modos de diferentes guías como:

$$A_{m,q} \equiv \iint_{cs(2)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s') \cdot \mathbf{h}_q^{(2)*}(s') ds' \quad (3.72)$$

y si se tiene en cuenta la observación (3.70), se puede escribir finalmente que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \mathbf{h}_q^{(2)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} A_{m,q}^* \mathbf{h}_m^{(1)}(s) + \hat{Y}_q^{(2)} \mathbf{h}_q^{(2)}(s) \\
&\quad - \sum_{r=1}^R k^{2r} \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} B_{r,m}^{(1)} \left(\frac{1}{k_{c,m}^{(1)}} \right)^{2r} A_{m,q}^* \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \\
&\quad - \sum_{r=1}^R k^{2r} \hat{Y}_q^{(2)} B_{r,q}^{(2)} \left(\frac{1}{k_{c,q}^{(2)}} \right)^{2r} \mathbf{h}_q^{(2)}(s) F_q \quad (3.73)
\end{aligned}$$

donde:

$$F_q \triangleq \begin{cases} 0 & q < N^{(2)} + 1 \\ 1 & q \geq N^{(2)} + 1 \end{cases} \quad (3.74)$$

y por tanto, el producto interior buscado se expresa del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{L} \mathbf{h}_q^{(2)} | \mathbf{h}_p^{(2)} \rangle &= \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} A_{m,q}^* A_{m,p} + \hat{Y}_q^{(2)} \delta_{p,q} \\
&\quad - \sum_{r=1}^R k^{2r} \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} B_{r,m}^{(1)} \left(\frac{1}{k_{c,m}^{(1)}} \right)^{2r} A_{m,q}^* A_{m,p} \\
&\quad - \sum_{r=1}^R k^{2r} \hat{Y}_q^{(2)} B_{r,q}^{(2)} \left(\frac{1}{k_{c,q}^{(2)}} \right)^{2r} F_q \delta_{p,q}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Para convertir (3.69) en un problema matricial, se define en primer lugar una matriz $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{M^{(\delta)} \times M^{(\delta)}}(\mathbb{C})$ cuyos elementos tienen el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned}
B_{p,q} &= \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} A_{m,q}^* A_{m,p} + \hat{Y}_q^{(2)} \delta_{p,q} \\
&\quad - \sum_{r=1}^R k^{2r} \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)} B_{r,m}^{(1)} \left(\frac{1}{k_{c,m}^{(1)}} \right)^{2r} A_{m,q}^* A_{m,p} \\
&\quad - \sum_{r=1}^R k^{2r} \hat{Y}_q^{(2)} B_{r,q}^{(2)} \left(\frac{1}{k_{c,q}^{(2)}} \right)^{2r} F_q \delta_{p,q}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

así como un vector columna $\mathbf{C}^{(n,\delta)} \in \mathbb{R}^n$ que será el término independiente del sistema, cuyos elementos se obtienen como:

$$C_p^{(n,\delta)} = \langle \mathbf{h}_n^{(\delta)} | \mathbf{h}_p^{(2)} \rangle = \begin{cases} A_{n,p} & (\delta) = (1) \\ \delta_{n,p} & (\delta) = (2) \end{cases} \tag{3.77}$$

y las incógnitas se incluyen dentro de un vector columna $\mathbf{D}^{(n,\delta)} \in \mathbb{C}^n$, cuyos elementos son

$$D_q^{(n,\delta)} = \alpha_q^{(n,\delta)} \tag{3.78}$$

Así pues, se tiene finalmente el siguiente problema matricial

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,M^{(\delta)}} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,M^{(\delta)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{M^{(\delta)},1} & B_{M^{(\delta)},2} & \dots & B_{M^{(\delta)},M^{(\delta)}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n,\delta)} \\ \alpha_2^{(n,\delta)} \\ \dots \\ \alpha_{M^{(\delta)}}^{(n,\delta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{(n,\delta)} \\ C_2^{(n,\delta)} \\ \dots \\ C_{M^{(\delta)}}^{(n,\delta)} \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

es decir,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}^{(n,\delta)} = \mathbf{C}^{(n,\delta)} \tag{3.80}$$

Se puede observar que \mathbf{B} no depende del modo n -ésimo para el que se resuelve la ecuación integral, ni del puerto (δ), por lo que se debe de calcular una sola vez por cada frecuencia. Finalmente, los elementos de la matriz de impedancias $\mathbf{Z}^{(\delta,\gamma)} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ se obtienen del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
Z_{m,n}^{(\delta,\gamma)} &\triangleq \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\gamma)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s) ds \\
&\approx \iint_{cs(2)} \sum_{q=1}^{M(\gamma)} \alpha_q^{(n,\gamma)} \mathbf{h}_q^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s) ds \\
&= \sum_{q=1}^{M(\gamma)} \alpha_q^{(n,\gamma)} \iint_{cs(2)} \mathbf{h}_q^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds \\
&= \begin{cases} \sum_{q=1}^{M(\gamma)} \alpha_q^{(n,\gamma)} A_{m,q}^* & (\delta) = (1) \\ \alpha_m^{(n,\gamma)} & (\delta) = (2) \end{cases} \quad (3.81)
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*. London, UK: Peter Peregrinus Ltd., IEE Electromagnetic Waves Series 21, 1986.
- [2] T. Itoh, *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures*. New York: Wiley, 1989.
- [3] A. Wexler, "Solution of waveguide discontinuities by modal analysis," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 15, pp. 508–517, September 1967.
- [4] M. Leroy, "On the convergence of numerical results in modal analysis," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, pp. 655–659, July 1983.
- [5] R. Sorrentino, M. Mongiardo, F. Alessandri, and G. Schiavon, "An investigation of the numerical properties of the mode-matching technique," *International Journal of Numerical Modelling*, vol. 4, pp. 19–43, April 1991.
- [6] G. Gerini, M. Guglielmi, and G. Lastoria, "Efficient integral formulations for admittance or impedance representation of planar waveguide junctions," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp.*, vol. 3, pp. 1747–1750, June 1998.
- [7] G. Conciauro, M. Guglielmi, and M. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis - CAD Techniques for Waveguide Components and Filters*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [8] M. Guglielmi, G. Gheri, M. Calamia, and G. Pelosi, "Rigorous multimode network numerical representation of inductive step," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, pp. 317–325, February 1994.
- [9] M. Guglielmi and G. Gheri, "Rigorous multimode network representation of capacitive steps," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, pp. 622–628, April 1994.
- [10] T. E. Rozzi and W. F. G. Mealenbrauker, "Wide-band network modelling of interacting inductive irises and steps," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 23, pp. 235–245, February 1975.

- [11] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE Press, second ed., 1991.
- [12] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. International series in pure and applied physics, New York: McGraw-Hill, 1953.
- [13] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. IEEE/OUP Press Series on Electromagnetic Waves, New York: IEEE Press: Oxford University Press, 1993.
- [14] D. G. Dudley, *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory*. IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE Press : Oxford University Press, 1994.

Capítulo 4

Teoría de cavidades

4.1. Introducción

El equipamiento moderno en las bandas de microondas y ondas milimétricas presente en los sistemas de telecomunicación (por ejemplo satélites de comunicaciones, sistemas de comunicaciones móviles y radioenlaces), está formado normalmente por dispositivos tales como por ejemplo filtros, ortomodos, diplexores, multiplexores, acopladores, desfasadores, redes conformadoras de haz, divisores de potencia, etc.[1]–[3].

Estos dispositivos pasivos de microondas se descomponen usualmente en bloques elementales como codos en ángulo recto, uniones T en plano E y en plano H, uniones T-mágicas, uniones de 6 puertos, los cuales se pueden englobar como casos particulares de la unión cúbica general de seis puertos [4]–[9]. Por otra parte, también existen muchas estructuras de microondas de interés práctico que están compuestas de uniones cúbicas con accesos de forma arbitraria, tales como la unión “torniquete” (en inglés *turnstile junction*) [10], o acopladores direccionales con ranuras de geometrías arbitrarias [11]. Esta unión general multiacceso también puede usarse para considerar el efecto de mecanización de “esquinas redondeadas” presente en la implementación real de muchos dispositivos de microondas [5].

El desarrollo de algoritmos rápidos y precisos para el análisis de estas uniones de 3, 4 y 6 accesos ha recibido por lo tanto una enorme atención en la literatura técnica. Un estudio preciso de uniones T usando la formulación de matriz de admitancias obtenida por teoría de líneas de transmisión se publicó inicialmente en [12]. Una extensión de este trabajo se puede encontrar en [13], donde se aplica una generalización del método descrito en [12] a la caracterización de onda completa (en inglés *full-wave*) de uniones T en plano E y en plano H, uniones de 3 puertos en plano E y en plano H y T-mágicas.

Para mejorar la eficiencia de cálculo de la representación en términos de la matriz de admitancia generalizada (en inglés *Generalised Admittance Matrix*, GAM) de uniones y cruces, en [8] y [9] se presenta un método basado en funciones de Green y teoría de cavidades, donde se aplica sólo a simples uniones T en plano E y en plano H. En [14] se produce un nuevo avance en este campo de investigación, pues se resuelve una unión de seis accesos (cúbica)

en guía rectangular con formulación GAM empleando la expresión de Kurokawa para cavidades [15]. La teoría propuesta en este artículo se verifica con una T-mágica. No obstante, la técnica de segmentación empleada en [14] para resolver la citada unión de 4 accesos no resulta muy eficiente desde el punto de vista computacional.

En [16], [17] y [18] se describe un método alternativo que también puede usarse para estudiar uniones de 3, 4 y 6 accesos respectivamente. Este método está basado en soluciones de adaptación modal (*mode-matching*) deducidas de secciones superpuestas de resonadores. Siguiendo esta técnica, la solución del campo dentro de la cavidad se deduce de la superposición de ondas estacionarias, lo que puede suponer un esfuerzo adicional de cómputo.

Recientemente, el análisis de uniones con cavidades de muchos accesos se ha convertido en un tema de gran interés (ver por ejemplo [19]). En este artículo, se investiga una técnica basada en adaptación modal y en la función de Green para el estudio eficiente y preciso de una unión de múltiples accesos, que se caracteriza finalmente en términos de una matriz de admitancias generalizada (GAM). La teoría general propuesta en ese trabajo se verifica con una unión “torniquete”, que consiste simplemente en un dispositivo cuyos 5 accesos tienen formas canónicas (4 de ellos son guías rectangulares estándar y el otro acceso es perfectamente circular).

Una estructura más general, es decir una estructura 3D arbitraria con cualquier número de accesos con secciones transversales de forma arbitraria, se ha estudiado recientemente mediante el método BI-RME extendido [20], caracterizándose dicha estructura por una matriz Y generalizada. La técnica de análisis propuesta en la citada referencia es muy flexible (permite el estudio de uniones de muchos tipos), especialmente cuando se utiliza para analizar dispositivos con la parte central formada por una unión cúbica estándar. En [21] se ha propuesto un método alternativo, basado en la resolución de una ecuación integral mediante el método de los momentos, para analizar el mismo tipo de estructuras arbitrarias. La principal ventaja de ambos métodos es su gran flexibilidad, ya que pueden resolver un amplio rango de uniones multiacceso 3-D en guías arbitrarias. Sin embargo, estos métodos no son todavía suficientemente competitivos, en términos de eficiencia numérica, para resolver uniones cúbicas con accesos de forma arbitraria.

El principal objetivo de este capítulo es ofrecer una descripción explícita de una representación modal GAM muy precisa para una unión de 6 accesos, llamada unión cúbica, la cual esencialmente consiste en la intersección ortogonal de 3 guías rectangulares estándar. El análisis de este dispositivo se basa en la teoría de cavidades [15], obteniéndose expresiones analíticas cerradas para todos los elementos de la matriz de admitancias que son prácticamente independientes de la frecuencia. Esto permite reducir sustancialmente el tiempo de CPU requerido para caracterizar tal dispositivo básico. El siguiente paso consistirá en proponer una técnica de segmentación, que combina las expresiones de la unión cúbica con la técnica de la ecuación integral desarrollada en el capítulo 3, para analizar de forma rigurosa y eficiente uniones cúbicas cuyos accesos son guías de sección arbitraria. Finalmente, se presenta una nueva técnica que permite analizar directamente la unión cubica con accesos de sección transversal arbitraria sin necesidad de segmentar dicha estructura. De esta forma

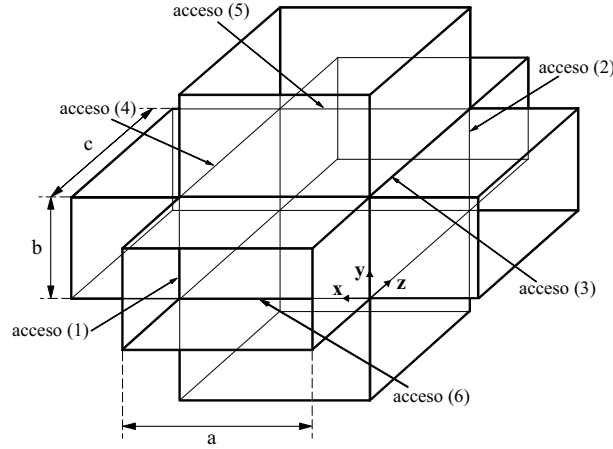


Figura 4.1. La unión cúbica.

se mejorará tanto la estabilidad numérica de la técnica como su eficiencia y precisión, al evitar la división del dispositivo “unión cúbica con accesos arbitrarios” en varios problemas más simples (unión cúbica con accesos rectangulares y transición de accesos rectangulares a accesos arbitrarios).

Finalmente, se validará la teoría expuesta con la medición de los parámetros de dispersión de diferentes uniones cúbicas, algunas de ellas con todos los accesos formados por guías estándar y otras en las que algunos de los accesos tienen sección transversal arbitraria.

4.2. La unión cúbica

Consideremos la unión cúbica formada por guías rectangulares mostrada en la figura 4.1. De acuerdo con [14], es posible representar tal estructura a través de una matriz de admitancias generalizada con los accesos situados en las caras de la región cúbica interna. Utilizando la conocida fórmula de Kurokawa para cavidades electromagnéticas [15], los elementos de la matriz de admitancias pueden deducirse de la siguiente expresión genérica

$$\begin{aligned}
 Y_{m,n}^{(\delta,\gamma)} = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_i^2} \int_{CS(\gamma)} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_n^{(\gamma)}) \cdot \mathbf{h}_i ds \int_{CS(\delta)} \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)} ds + \\
 & + \frac{j}{\omega\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{CS(\gamma)} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_n^{(\gamma)}) \cdot \mathbf{g}_i ds \int_{CS(\delta)} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)} ds \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

donde ω es la pulsación del campo que excita la estructura, $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario perpendicular a la abertura en dirección saliente de la cavidad, y las integrales representan los niveles de acoplo entre los modos solenoidales (\mathbf{h}_i) e irrotacionales (\mathbf{g}_i) de la cavidad central cúbica y los modos ($\mathbf{h}_m^{(\delta)}$ y $\mathbf{e}_n^{(\gamma)}$) de los accesos (δ y γ) relativos a cada elemento de la GAM. Como

se indica en la ecuación (4.1) mediante $CS(\delta)$ y $CS(\gamma)$, las integrales de acoplo previas deben evaluarse en la sección transversal de cada guía de acceso a la cavidad. Finalmente, el factor k_i es el número de onda del i -ésimo modo de la cavidad (véase, por ejemplo, [22]).

Para obtener las expresiones analíticas de los elementos de la GAM de la unión cúbica, deben resolverse las integrales indicadas. Para ello, es necesario obtener las expresiones de los vectores modales \mathbf{h}_i y \mathbf{g}_i , los cuales representan las componentes del campo magnético de los modos solenoidales e irrotacionales de una cavidad estándar (ver figura 4.1) normalizados al volumen de la cavidad. De acuerdo con [22], se puede escribir directamente

$$\mathbf{h}_i^{TMz} = N_x^{h_i^{TMz}} A_{x_i} \hat{\mathbf{x}} + N_y^{h_i^{TMz}} A_{y_i} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{h}_i^{TEz} = N_x^{h_i^{TEz}} A_{x_i} \hat{\mathbf{x}} + N_y^{h_i^{TEz}} A_{y_i} \hat{\mathbf{y}} + N_z^{h_i^{TEz}} A_{z_i} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{g}_i = N_x^{g_i} A_{x_i} \hat{\mathbf{x}} + N_y^{g_i} A_{y_i} \hat{\mathbf{y}} + N_z^{g_i} A_{z_i} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.2c)$$

donde el subíndice i se refiere en realidad al conjunto de 3 subíndices modales (r , s y t relativos a las coordenadas x , y y z , respectivamente). Consecuentemente, las dos series de (4.1) son en realidad series triples.

En las expresiones (4.2), N_x , N_y y N_z son los factores de normalización de los vectores modales solenoidales e irrotacionales, y A_x , A_y y A_z hacen referencia a las correspondientes variaciones funcionales¹, cuyas expresiones explícitas pueden encontrarse en [22].

Hay que remarcar que el sistema de referencia coordenado (\mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z}) mostrado en la figura 4.1 es el adecuado para obtener expresiones simples para los elementos $Y_{m,n}^{(\delta,1)}$ ($\delta = 1, \dots, 6$) e $Y_{m,n}^{(\delta,2)}$ ($\delta = 2, \dots, 6$). Con el objetivo de obtener expresiones compactas similares para los elementos $Y_{m,n}^{(\delta,3)}$ ($\delta = 3, \dots, 6$) e $Y_{m,n}^{(\delta,4)}$ ($\delta = 4, \dots, 6$), así como para los elementos $Y_{m,n}^{(\delta,5)}$ ($\delta = 5, 6$) e $Y_{m,n}^{(\delta,6)}$, el sistema coordenado debe ser convenientemente situado y orientado en los accesos 3 y 5 respectivamente.

Las expresiones explícitas de los modos que excitan el correspondiente acceso ($\mathbf{e}_n^{(\gamma)}$ y $\mathbf{h}_m^{(\delta)}$), presentes en las integrales de acoplo requeridas, deben definirse adecuadamente en cada acceso de la unión cúbica. Además, para evaluar dos de las integrales presentes en la ecuación (4.1), se requiere calcular el término $(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_n^{(\gamma)})$. Sin embargo, este término está directamente relacionado con la función vectorial $\mathbf{h}_n^{(\gamma)}$, por lo tanto sólo es necesario encontrar las expresiones para el campo magnético normalizado de todas las guías de acceso. Estas expresiones se encuentran detalladas en [11]. Considerando cualquier acceso (δ), el vector transversal $\mathbf{h}_m^{(\delta)}$ se define como

$$\mathbf{h}_m^{(\delta)TMz} = N_{x_m}^{(\delta)TMz} B_{x_m}^{(\delta)}(x, y) \hat{\mathbf{x}} + N_{y_m}^{(\delta)TMz} B_{y_m}^{(\delta)}(x, y) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{h}_m^{(\delta)TEz} = N_{x_m}^{(\delta)TEz} B_{x_m}^{(\delta)}(x, y) \hat{\mathbf{x}} + N_{y_m}^{(\delta)TEz} B_{y_m}^{(\delta)}(x, y) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.3b)$$

donde el índice m indica ahora los dos subíndices modales p_1 y q_1 , los cuales están relacionados con las coordenadas x e y del puerto (δ). Por otra parte, el índice n del vector modal

¹Obviamente estas expresiones dependen de las variables x , y y z .

presente en el término $(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_n^{(\gamma)})$ se refiere a los índices modales p_2 y q_2 , los cuales están relacionados con las respectivas coordenadas x e y del puerto (γ) .

En las expresiones previas, $N_x^{(\delta)}$ y $N_y^{(\delta)}$ se determinan para normalizar los vectores modales del puerto (δ) respecto a su sección transversal $CS(\delta)$, mientras que $B_x^{(\delta)}$ y $B_y^{(\delta)}$ son las variaciones funcionales de cada modo². Para una guía rectangular estándar, los valores específicos de $N_x^{(\delta)}$, $N_y^{(\delta)}$, $B_x^{(\delta)}$ y $B_y^{(\delta)}$ pueden deducirse fácilmente de [11].

El sistema de coordenadas local de todos los accesos (definidos por los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$) debe elegirse en cada acceso de forma consistente con las siguientes dimensiones transversales:

$$l_x^{(1)} = l_x^{(2)} = a \qquad l_y^{(1)} = l_y^{(2)} = b \qquad (4.4a)$$

$$l_x^{(3)} = l_x^{(4)} = c \qquad l_y^{(3)} = l_y^{(4)} = b \qquad (4.4b)$$

$$l_x^{(5)} = l_x^{(6)} = c \qquad l_y^{(5)} = l_y^{(6)} = a \qquad (4.4c)$$

Una vez determinadas las expresiones de los modos de la cavidad y de los modos de las guías de acceso, se pueden calcular fácilmente las integrales de acoplo presentes en la ecuación (4.1), y por tanto obtener finalmente las expresiones analíticas para los elementos de la GAM de la unión cúbica.

Ya que la estructura bajo análisis es recíproca, sólo se necesitan las expresiones para los elementos $Y_{m,n}^{(\delta,\gamma)}$ con $\delta \geq \gamma$. Para el resto de elementos de la GAM se empleará la siguiente relación:

$$Y_{m,n}^{(\delta,\gamma)} = Y_{n,m}^{(\gamma,\delta)} \qquad (4.5)$$

Considerando los elementos $Y_{m,n}^{(\delta,\gamma)}$ con $\delta \geq \gamma$, las expresiones finales de dichos elementos pueden dividirse en dos grupos principales:

1. El grupo que contiene aquellas expresiones de la GAM que relacionan accesos paralelos.
2. El grupo que contiene aquellas expresiones de la GAM que relacionan accesos ortogonales.

Accesos paralelos

En este grupo de expresiones se incluyen las correspondientes a los bloques de la GAM que relacionan puertos paralelos, esto es, los elementos $Y_{m,n}^{(\delta,\delta)}$ con $\delta = 1, 2, \dots, 6$ y los elementos $Y_{m,n}^{(\delta+1,\delta)}$ con $\delta = 1, 3$ y 5 . En estos casos, después de insertar las integrales de acoplo requeridas en (4.1), es posible sumar la serie triple respecto a un índice usando fórmulas conocidas de expansiones de Fourier [23]. En particular, la serie se puede sumar con relación

²Hay que tener siempre en cuenta que este sistema de coordenadas es local a la guía, y por ello las variaciones funcionales B_x y B_y dependen de las coordenadas transversales locales (en este caso x e y) a la dirección de propagación (en este caso z).

al tercer índice modal t de los modos de la cavidad. Entonces, aprovechando la ortogonalidad modal, se pueden obtener fácilmente expresiones compactas para los elementos bajo consideración de la GAM

$$Y_{m,n}^{(\delta,\delta)} = (-j) Y_{0n}^{(\delta)} \cot(\beta_n^{(\delta)} l_z^{(\delta)}) \delta_{m,n} \quad (4.6)$$

$$Y_{m,n}^{(\delta+1,\delta)} = j Y_{0n}^{(\delta)} \csc(\beta_n^{(\delta)} l_z^{(\delta)}) \delta_{m,n} \quad (4.7)$$

donde $\beta_n^{(\delta)}$ e $Y_{0n}^{(\delta)}$ son los conocidos coeficiente de propagación y la admitancia característica del n -ésimo modo definido en el puerto (δ) (véanse las expresiones en [11]), $\delta_{m,n}$ es la delta de Kronecker ($\delta_{m,n} = 1$ si $m = n$ y $\delta_{m,n} = 0$ si $m \neq n$), y la dimensión longitudinal $l_z^{(\delta)}$ tiene los siguientes valores en función del acceso involucrado

$$l_z^{(1)} = l_z^{(2)} = c \quad l_z^{(3)} = l_z^{(4)} = a \quad l_z^{(5)} = l_z^{(6)} = b \quad (4.8)$$

Accesos ortogonales

Ahora es necesario considerar los elementos $Y_{m,n}^{(\delta,\gamma)}$ con $\delta > \gamma$, que relacionan accesos ortogonales (esto es, $\delta = 3, 4, 5, 6$ con $\gamma = 1, 2$ y $\delta = 5, 6$ con $\gamma = 3, 4$). A causa de las propiedades de simetría de la unión cúbica, solamente es necesario deducir expresiones explícitas para los elementos $Y_{m,n}^{(3,1)}$, $Y_{m,n}^{(5,1)}$ e $Y_{m,n}^{(5,3)}$ ya que los elementos restantes pueden relacionarse directamente con tales bloques de la GAM.

Para deducir las expresiones de estos tres elementos, deben insertarse los correspondientes modos de la cavidad y de los accesos en la ecuación (4.1) para calcular las integrales de acoplo requeridas. Entonces, aplicando ortogonalidad modal, se obtienen las siguientes expresiones compactas

$$\begin{aligned} Y_{m,n}^{(3,1)} = & \frac{j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_{p_2,q_2,p_1}^2} \left(N_x^{h_i} N_{x_n}^{(1)} I_{S_{x(p_2)}}^{(1)} I_{C_{y(q_2)}}^{(1)} + N_y^{h_i} N_{y_n}^{(1)} I_{C_{x(p_2)}}^{(1)} I_{S_{y(q_2)}}^{(1)} \right) \\ & \left(N_z^{h_i} N_{x_m}^{(3)} I_{S_{x(p_1)}}^{(3)} I_{C_{y(q_1)}}^{(3)} + N_y^{h_i} N_{y_m}^{(3)} I_{C_{x(p_1)}}^{(3)} I_{S_{y(q_1)}}^{(3)} \right) \delta_{q_1,q_2} + \\ & + \frac{j}{\omega\mu} \left(N_x^{g_i} N_{x_n}^{(1)} I_{S_{x(p_2)}}^{(1)} I_{C_{y(q_2)}}^{(1)} + N_y^{g_i} N_{y_n}^{(1)} I_{C_{x(p_2)}}^{(1)} I_{S_{y(q_2)}}^{(1)} \right) \\ & \left(N_z^{g_i} N_{x_m}^{(3)} I_{S_{x(p_1)}}^{(3)} I_{C_{y(q_1)}}^{(3)} + N_y^{g_i} N_{y_m}^{(3)} I_{C_{x(p_1)}}^{(3)} I_{S_{y(q_1)}}^{(3)} \right) \delta_{q_1,q_2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} Y_{m,n}^{(5,1)} = & \frac{j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_{p_2,q_2,p_1}^2} \left(N_x^{h_i} N_{x_n}^{(1)} I_{S_{x(p_2)}}^{(1)} I_{C_{y(q_2)}}^{(1)} + N_y^{h_i} N_{y_n}^{(1)} I_{C_{x(p_2)}}^{(1)} I_{S_{y(q_2)}}^{(1)} \right) \\ & (-1)^{q_2} \left(N_z^{h_i} N_{x_m}^{(5)} I_{S_{x(p_1)}}^{(5)} I_{C_{y(q_1)}}^{(5)} + N_x^{h_i} N_{y_m}^{(5)} I_{C_{x(p_1)}}^{(5)} I_{S_{y(q_1)}}^{(5)} \right) \delta_{p_2,q_1} + \\ & + \frac{j}{\omega\mu} \left(N_x^{g_i} N_{x_n}^{(1)} I_{S_{x(p_2)}}^{(1)} I_{C_{y(q_2)}}^{(1)} + N_y^{g_i} N_{y_n}^{(1)} I_{C_{x(p_2)}}^{(1)} I_{S_{y(q_2)}}^{(1)} \right) \\ & (-1)^{q_2} \left(N_z^{g_i} N_{x_m}^{(5)} I_{S_{x(p_1)}}^{(5)} I_{C_{y(q_1)}}^{(5)} + N_x^{g_i} N_{y_m}^{(5)} I_{C_{x(p_1)}}^{(5)} I_{S_{y(q_1)}}^{(5)} \right) \delta_{p_2,q_1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
Y_{m,n}^{(5,3)} = & \frac{j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_{p_2,q_2,q_1}^2} \left(N_x^{h_i} N_{x_n}^{(3)} I_{S_{x(p_2)}}^{(3)} I_{C_{y(q_2)}}^{(3)} + N_y^{h_i} N_{y_n}^{(3)} I_{C_{x(p_2)}}^{(3)} I_{S_{y(q_2)}}^{(3)} \right) \\
& (-1)^{q_2} \left(-N_x^{h_i} N_{x_m}^{(5)} I_{S_{x(p_1)}}^{(5)} I_{C_{y(q_1)}}^{(5)} - N_z^{h_i} N_{y_m}^{(5)} I_{C_{x(p_1)}}^{(5)} I_{S_{y(q_1)}}^{(5)} \right) \delta_{p_1,p_2} + \\
& + \frac{j}{\omega\mu} \left(N_x^{g_i} N_{x_n}^{(3)} I_{S_{x(p_2)}}^{(3)} I_{C_{y(q_2)}}^{(3)} + N_y^{g_i} N_{y_n}^{(3)} I_{C_{x(p_2)}}^{(3)} I_{S_{y(q_2)}}^{(3)} \right) \\
& (-1)^{q_2} \left(-N_x^{g_i} N_{x_m}^{(5)} I_{S_{x(p_1)}}^{(5)} I_{C_{y(q_1)}}^{(5)} - N_z^{g_i} N_{y_m}^{(5)} I_{C_{x(p_1)}}^{(5)} I_{S_{y(q_1)}}^{(5)} \right) \delta_{p_1,p_2} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

donde los términos $I_{S_{x(p)}}^{(\delta)}$, $I_{C_{x(p)}}^{(\delta)}$, $I_{S_{y(p)}}^{(\delta)}$ y $I_{C_{y(p)}}^{(\delta)}$ (con $\delta = 1, 3$ o 5 y $p = p_1, q_1, p_2$ o q_2) son simples integrales seno y coseno con los siguientes valores

$$I_{S_{x(p)}}^{(\delta)} = \frac{l_x^{(\delta)}}{2} (1 - \delta_{p,0}) \quad (4.12a)$$

$$I_{C_{x(p)}}^{(\delta)} = \frac{l_x^{(\delta)}}{2} (1 + \delta_{p,0}) \quad (4.12b)$$

$$I_{S_{y(p)}}^{(\delta)} = \frac{l_y^{(\delta)}}{2} (1 - \delta_{p,0}) \quad (4.12c)$$

$$I_{C_{y(p)}}^{(\delta)} = \frac{l_y^{(\delta)}}{2} (1 + \delta_{p,0}) \quad (4.12d)$$

con $\delta_{p,0}$ representando de nuevo la delta de Kronecker ($\delta_{p,0} = 1$ si $p = 0$ y $\delta_{p,0} = 0$ si $p > 0$), y $l_x^{(\delta)}$ y $l_y^{(\delta)}$ las dimensiones transversales de cada acceso (δ) previamente definidas en las ecuaciones (4.4).

De las ecuaciones (4.9)–(4.11) se puede concluir que solamente es necesario calcular un término de las series en (4.1) para evaluar los elementos $Y_{m,n}^{(3,1)}$, $Y_{m,n}^{(5,1)}$ y $Y_{m,n}^{(5,3)}$. Además, es interesante remarcar que las integrales presentes en las ecuaciones (4.9)–(4.11), cuyos valores se definen en las ecuaciones (4.12), no necesitan ser recalculadas para cada frecuencia, ya que dependen únicamente de la geometría de la unión cúbica y no de la frecuencia. Por estas razones, el tiempo de cálculo requerido para evaluar los elementos $Y_{m,n}^{(3,1)}$, $Y_{m,n}^{(5,1)}$ y $Y_{m,n}^{(5,3)}$ se reduce drásticamente usando esta técnica.

Finalmente, ya que los accesos paralelos de la unión cúbica, es decir, accesos (1) y (2), (3) y (4) y (5) y (6), tienen respectivamente la misma sección transversal (ver figura 4.1), es posible calcular los restantes elementos de la GAM que relacionan los accesos ortogonales como sigue:

$$\begin{aligned}
Y_{m,n}^{(4,1)} = & -(-1)^{p_2} Y_{m,n}^{(3,1)} & Y_{m,n}^{(6,1)} = & -(-1)^{q_2} Y_{m,n}^{(5,1)} & Y_{m,n}^{(3,2)} = & -(-1)^{p_1} Y_{m,n}^{(3,1)} \\
Y_{m,n}^{(4,2)} = & -(-1)^{p_1} Y_{m,n}^{(4,1)} & Y_{m,n}^{(5,2)} = & -(-1)^{p_1} Y_{m,n}^{(5,1)} & Y_{m,n}^{(6,2)} = & -(-1)^{p_1} Y_{m,n}^{(6,1)} \\
Y_{m,n}^{(6,3)} = & -(-1)^{q_2} Y_{m,n}^{(5,3)} & Y_{m,n}^{(5,4)} = & -(-1)^{q_1} Y_{m,n}^{(5,3)} & Y_{m,n}^{(6,4)} = & -(-1)^{q_1} Y_{m,n}^{(6,3)} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Desde el punto de vista de la eficiencia computacional, estas relaciones disminuyen drásticamente el tiempo requerido para la caracterización electromagnética de la unión cúbica.

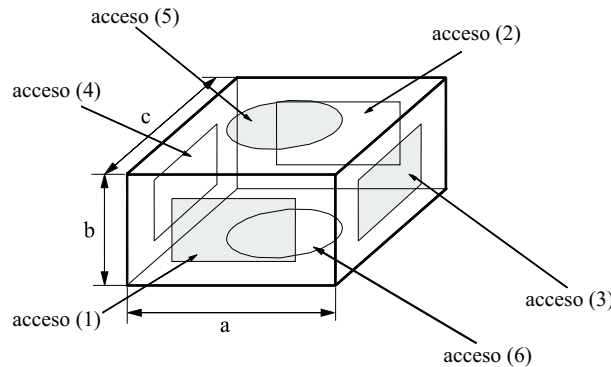


Figura 4.2. Unión cúbica con accesos arbitrarios.

4.3. Conexión de matrices de impedancia y admitancia generalizada

Una vez se ha resuelto completamente la unión cúbica, se va a considerar el análisis de una cavidad cúbica con accesos de sección transversal arbitraria (ver figura 4.2) mediante una técnica de segmentación. Siguiendo esta técnica, la unión de varios accesos arbitrarios puede descomponerse en una unión cúbica central y un cierto número de transiciones entre las caras rectangulares de la unión cúbica y los accesos formados por guías de sección transversal arbitraria.

La unión cúbica interna se caracteriza a través de su GAM como se ha indicado en la sección anterior. Por otra parte, las transiciones se resuelven usando la técnica basada en ecuación integral descrita en el capítulo 3. Este método genera una caracterización a través de una matriz de impedancias generalizada (en inglés *Generalised Impedance Matrix*, GIM) para cada transición. Obviamente, para construir la GIM correspondiente a una transición entre un acceso rectangular y un acceso arbitrario es necesario conocer los modos de la guía arbitraria y las integrales de acoplo entre los modos de la guía arbitraria y de la correspondiente cara rectangular de la unión cúbica. Estos datos se obtendrán gracias al método BI-RME expuesto con detalle en el capítulo 2.

Finalmente, conectando todas las matrices generalizadas se puede construir una red equivalente global de toda la estructura. La forma clásica de conectar diferentes tipos de matrices generalizadas (en este caso matrices \mathbf{Y} y matrices \mathbf{Z}) requiere una conversión previa de todas las matrices a un mismo tipo (esto es, matrices \mathbf{Y} , \mathbf{Z} o \mathbf{S}). Esta etapa de conversión se lleva a cabo usualmente a través de inversiones matriciales, las cuales no pueden implementarse siempre de la manera más eficiente y adecuada. Por ejemplo, cuando más complicado sea el dispositivo de microondas, mayor será el orden de las matrices requeridas para analizar el dispositivo. Esto implica directamente un mayor esfuerzo de CPU para invertir las mencionadas matrices. Otro problema de mayor envergadura aparece cuando las matrices a invertir

están mal condicionadas, lo cual supone generalmente la aparición de inestabilidades y por lo tanto una reducción en la precisión de la solución obtenida.

En esta sección se va a proponer un método nuevo y eficiente para resolver la conexión de matrices de impedancias y admitancias generalizadas sin realizar inversiones matriciales intermedias. Para evitar tales inversiones, se debe elegir un conjunto adecuado de incógnitas híbridas (tensiones y corrientes simultáneamente). Procediendo de esta forma, se obtiene finalmente un sistema de ecuaciones bien condicionado, el cual puede resolverse siempre por algoritmos estándar de una manera precisa y eficiente.

Por razones de simplicidad, se considerará una estructura de tres puertos con un solo acceso de sección transversal arbitraria para describir esta nueva técnica de conexión. El circuito multimodal equivalente de tal estructura puede verse en la figura 4.3, donde se observa que la unión central de tres accesos estándar está representada por una GAM, y la transición relacionada con el acceso arbitrario se ha caracterizado por una GIM. El objetivo final es el cálculo de los parámetros S de la estructura considerada.

Con respecto a la unión central de 3 accesos, es posible relacionar las tensiones y las corrientes de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} I_{3p}^{(1)} \\ I_{3p}^{(2)} \\ I_{3p}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{3p}^{(1,1)} & Y_{3p}^{(1,2)} & Y_{3p}^{(1,3)} \\ Y_{3p}^{(2,1)} & Y_{3p}^{(2,2)} & Y_{3p}^{(2,3)} \\ Y_{3p}^{(3,1)} & Y_{3p}^{(3,2)} & Y_{3p}^{(3,3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{3p}^{(1)} \\ V_{3p}^{(2)} \\ V_{3p}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

donde $I_{3p}^{(\delta)}$ y $V_{3p}^{(\delta)}$ son los vectores columna de dimensión igual al número de modos N_δ elegidos en el acceso correspondiente ($\delta = 1, 2, 3$) de la unión central de 3 puertos, y los elementos $Y_{3p}^{(\delta,\gamma)}$ son bloques de matrices que caracterizan el comportamiento electromagnético de tal unión central.

Para calcular los bloques $Y_{3p}^{(\delta,\gamma)}$, puede emplearse la técnica descrita en la sección anterior, ya que la unión central de 3 accesos bajo análisis es una unión cúbica general (6 accesos) con 3 de sus accesos adecuadamente cortocircuitados. Por lo tanto, tales bloques pueden obtenerse directamente eligiendo los apropiados de la matriz \mathbf{Y} original de la unión cúbica.

Para la transición planar conectada a uno de los lados de la unión central de 3 puertos, se ha seguido la misma notación del capítulo 3 para las tensiones y corrientes (ver figura 4.4). Por lo tanto, se mantendrán las ecuaciones obtenidas en el capítulo 3, que se reproducen aquí por claridad

$$\bar{I}_{st}^{(1)} = I_{st}^{(1)} + \hat{Y}_{st}^{(1)} \cdot V_{st}^{(1)} \quad (4.15a)$$

$$I_{st}^{(2)} = \bar{I}_{st}^{(2)} + \hat{Y}_{st}^{(2)} \cdot V_{st}^{(2)} \quad (4.15b)$$

donde $\hat{Y}_{st}^{(\delta)}$ ($\delta = 1, 2$) son matrices diagonales de orden N_δ . El m -ésimo elemento de tales matrices se define como el comportamiento asintótico de la admitancia modal característica

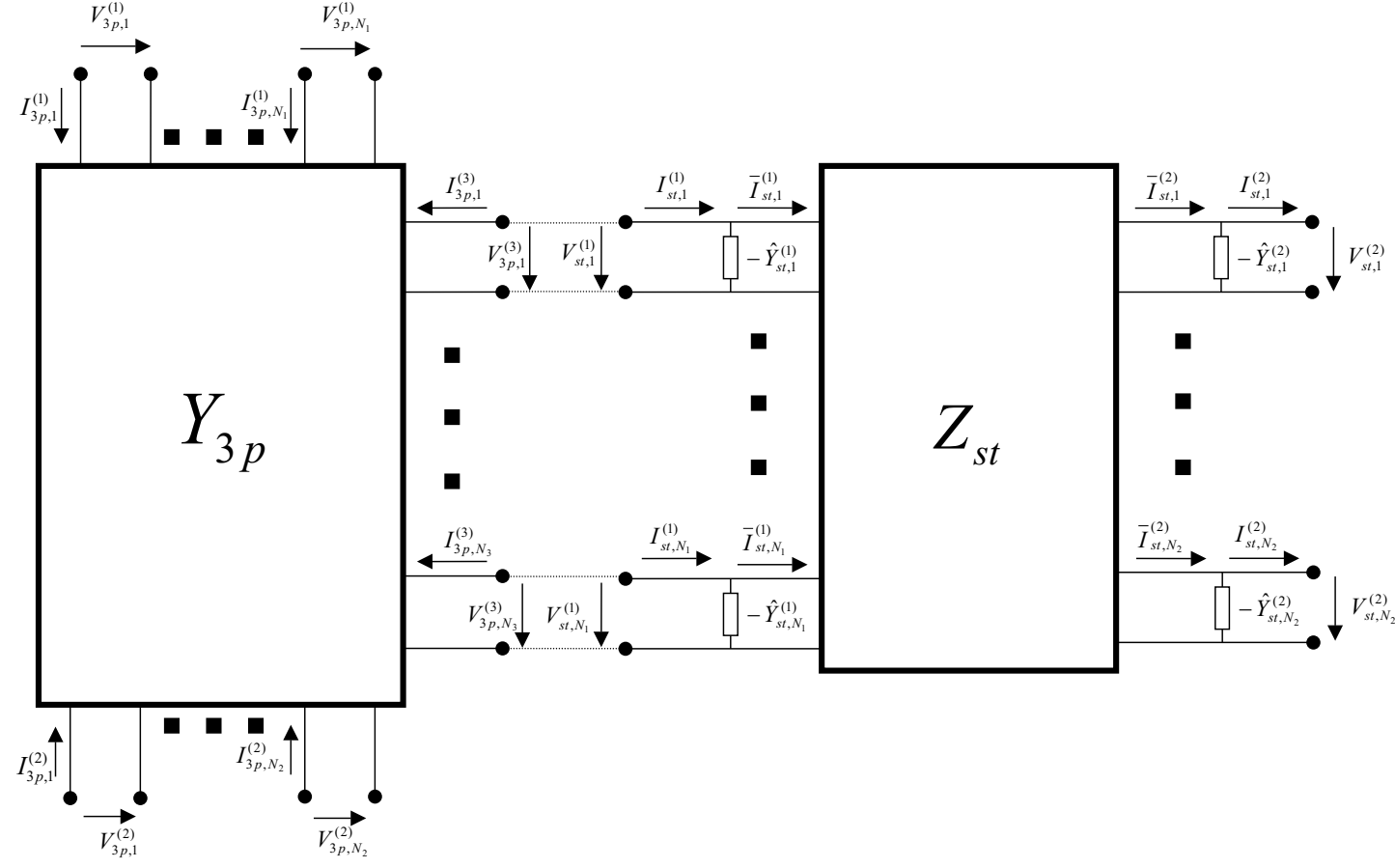


Figura 4.3. Circuito multimodal equivalente de una estructura de 3 accesos con un solo acceso de sección transversal arbitraria.

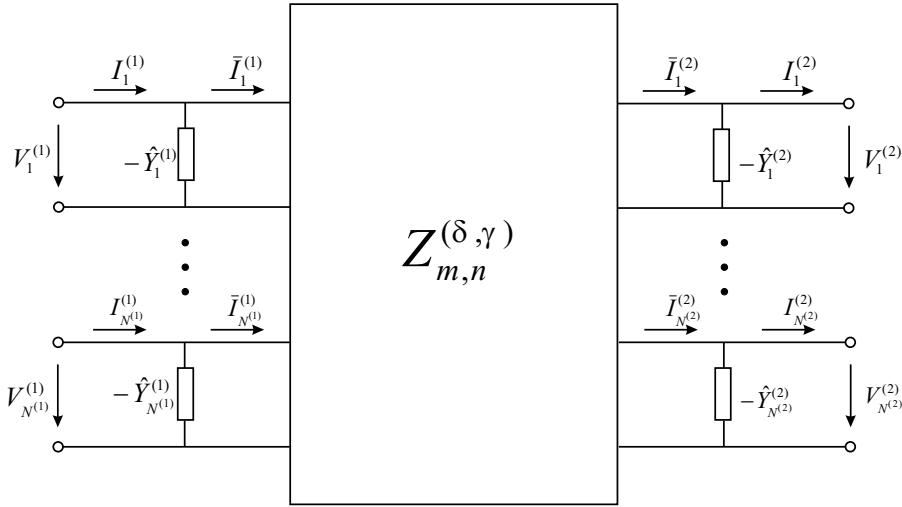


Figura 4.4. Matriz de impedancias generalizada de una transición planar generada por la técnica basada en ecuación integral.

$Y_{st,m}^{(\delta)}$, es decir

$$\hat{Y}_{st,m}^{(\delta)} = \begin{cases} j \frac{\omega \epsilon}{k_{c,m}^{(\delta)}} & (\text{modos TM}) \\ -j \frac{k_{c,m}^{(\delta)}}{\omega \mu} & (\text{modos TE}) \end{cases} \quad (4.16)$$

siendo $k_{c,m}^{(\delta)}$ la frecuencia de corte del m -ésimo modo definido en la región (δ) , cuya expresión puede encontrarse por ejemplo en [11].

Finalmente, si se sigue el proceso descrito en el capítulo 3, los vectores columna de tensión y corriente a ambos lados de la transición se relacionan mediante la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} V_{st}^{(1)} \\ V_{st}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{st}^{(1,1)} & Z_{st}^{(1,2)} \\ Z_{st}^{(2,1)} & Z_{st}^{(2,2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{I}_{st}^{(1)} \\ -\bar{I}_{st}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

donde $Z_{st}^{(\delta, \gamma)}$ representan bloques matriciales de dimensiones $N_\delta \times N_\gamma$.

Para resolver la conexión entre las matrices \mathbf{Y}_{3p} y \mathbf{Z}_{st} , es obvio de la figura 4.3 que deben forzarse las siguientes condiciones de contorno

$$V_{3p}^{(3)} = V_{st}^{(1)} \quad (4.18a)$$

$$I_{3p}^{(3)} = -I_{st}^{(1)} \quad (4.18b)$$

Seguidamente, se debe elegir cuidadosamente un conjunto de incógnitas. En este caso, los vectores de tensión $V_{3p}^{(1)}$ y $V_{3p}^{(2)}$ son la elección natural en los accesos (1) y (2) de la

unión de 3 accesos, mientras que los vectores de corriente $\bar{I}_{st}^{(1)}$ y $\bar{I}_{st}^{(2)}$ son las opciones más convenientes en los accesos (1) y (2) de la transición planar. Para encontrar las mencionadas incógnitas, se debe obtener un sistema de cuatro ecuaciones.

Las primeras 2 ecuaciones del sistema a resolver se deducen de las siguientes relaciones matriciales

$$I_{3p}^{(1)} = Y_{3p}^{(1,1)} \cdot V_{3p}^{(1)} + Y_{3p}^{(1,2)} \cdot V_{3p}^{(2)} + Y_{3p}^{(1,3)} \cdot V_{3p}^{(3)} \quad (4.19)$$

$$I_{3p}^{(2)} = Y_{3p}^{(2,1)} \cdot V_{3p}^{(1)} + Y_{3p}^{(2,2)} \cdot V_{3p}^{(2)} + Y_{3p}^{(2,3)} \cdot V_{3p}^{(3)} \quad (4.20)$$

que se han obtenido directamente de (4.14).

De la primera condición de contorno (4.18a), y haciendo uso de la primera relación matricial de (4.17), se puede expresar el vector columna $V_{3p}^{(3)}$ en términos de las incógnitas $\bar{I}_{st}^{(1)}$ y $\bar{I}_{st}^{(2)}$ como sigue:

$$V_{3p}^{(3)} = V_{st}^{(1)} = Z_{st}^{(1,1)} \cdot \bar{I}_{st}^{(1)} + Z_{st}^{(1,2)} \cdot \left(-\bar{I}_{st}^{(2)}\right) \quad (4.21)$$

Finalmente, si esta última relación se inserta en (4.19) y en (4.20), se obtienen las dos primeras ecuaciones del sistema final

$$\begin{aligned} I_{3p}^{(1)} &= Y_{3p}^{(1,1)} \cdot V_{3p}^{(1)} + Y_{3p}^{(1,2)} \cdot V_{3p}^{(2)} + Y_{3p}^{(1,3)} \cdot Z_{st}^{(1,1)} \cdot \bar{I}_{st}^{(1)} + \\ &\quad + Y_{3p}^{(1,3)} \cdot Z_{st}^{(1,2)} \cdot \left(-\bar{I}_{st}^{(2)}\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} I_{3p}^{(2)} &= Y_{3p}^{(2,1)} \cdot V_{3p}^{(1)} + Y_{3p}^{(2,2)} \cdot V_{3p}^{(2)} + Y_{3p}^{(2,3)} \cdot Z_{st}^{(1,1)} \cdot \bar{I}_{st}^{(1)} + \\ &\quad + Y_{3p}^{(2,3)} \cdot Z_{st}^{(1,2)} \cdot \left(-\bar{I}_{st}^{(2)}\right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

La tercera ecuación del sistema final se debe obtener de la condición de contorno (4.18b). De (4.14) y (4.21) se deduce el término de la izquierda de la citada condición de contorno

$$\begin{aligned} I_{3p}^{(3)} &= Y_{3p}^{(3,1)} \cdot V_{3p}^{(1)} + Y_{3p}^{(3,2)} \cdot V_{3p}^{(2)} + Y_{3p}^{(3,3)} \cdot Z_{st}^{(1,1)} \cdot \bar{I}_{st}^{(1)} + \\ &\quad + Y_{3p}^{(3,3)} \cdot Z_{st}^{(1,2)} \cdot \left(-\bar{I}_{st}^{(2)}\right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Con respecto al término de la derecha de la condición de contorno considerada, deben combinarse las relaciones matriciales (4.15a) y (4.21) para encontrar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{st}^{(1)} &= \bar{I}_{st}^{(1)} - \hat{Y}_{st}^{(1)} \cdot V_{st}^{(1)} = \\ &\quad \bar{I}_{st}^{(1)} - \hat{Y}_{st}^{(1)} \cdot Z_{st}^{(1,1)} \cdot \bar{I}_{st}^{(1)} - \hat{Y}_{st}^{(1)} \cdot Z_{st}^{(1,2)} \cdot \left(-\bar{I}_{st}^{(2)}\right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Entonces, después de algunas manipulaciones algebraicas, se deduce la expresión para la tercera ecuación del sistema final

$$\begin{aligned} Y_{3p}^{(3,1)} \cdot V_{3p}^{(1)} + Y_{3p}^{(3,2)} \cdot V_{3p}^{(2)} + \left[U + \left(Y_{3p}^{(3,3)} - \hat{Y}_{st}^{(1)} \right) \cdot Z_{st}^{(1,1)} \right] \cdot \bar{I}_{st}^{(1)} + \\ + \left(Y_{3p}^{(3,3)} - \hat{Y}_{st}^{(1)} \right) \cdot Z_{st}^{(1,2)} \cdot \left(-\bar{I}_{st}^{(2)}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde U es la matriz identidad de orden igual al número de modos elegidos en el acceso común de la unión central y de la transición.

La última ecuación del sistema se obtiene directamente de la segunda relación matricial de (4.17)

$$V_{st}^{(2)} = Z_{st}^{(2,1)} \cdot \bar{I}_{st}^{(1)} + Z_{st}^{(2,2)} \cdot \left(-\bar{I}_{st}^{(2)}\right) \quad (4.27)$$

Las cuatro ecuaciones obtenidas pueden expresarse en forma matricial, dando lugar al siguiente sistema final de ecuaciones a resolver

$$\begin{pmatrix} I_{3p}^{(1)} \\ I_{3p}^{(2)} \\ 0 \\ V_{st}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{pmatrix} V_{3p}^{(1)} \\ V_{3p}^{(2)} \\ \bar{I}_{st}^{(1)} \\ -\bar{I}_{st}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

donde H es una matriz definida como sigue:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} Y_{3p}^{(1,1)} & Y_{3p}^{(1,2)} & Y_{3p}^{(1,3)} \cdot Z_{st}^{(1,1)} & Y_{3p}^{(1,3)} \cdot Z_{st}^{(1,2)} \\ Y_{3p}^{(2,1)} & Y_{3p}^{(2,2)} & Y_{3p}^{(2,3)} \cdot Z_{st}^{(1,1)} & Y_{3p}^{(2,3)} \cdot Z_{st}^{(1,2)} \\ Y_{3p}^{(3,1)} & Y_{3p}^{(3,2)} & U + \left(Y_{3p}^{(3,3)} - \hat{Y}_{st}^{(1)}\right) \cdot Z_{st}^{(1,1)} & \left(Y_{3p}^{(3,3)} - \hat{Y}_{st}^{(1)}\right) \cdot Z_{st}^{(1,2)} \\ 0 & 0 & Z_{st}^{(2,1)} & Z_{st}^{(2,2)} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Como puede observarse en (4.29), sólo se requieren multiplicaciones matriciales para resolver la conexión de las dos matrices generalizadas que representan la estructura bajo estudio. Por lo tanto, siguiendo este nuevo procedimiento, se evitan completamente las inversiones matriciales.

Para calcular los parámetros S de la estructura considerada, sólo es necesario resolver el sistema definido por (4.28) y (4.29) tras incluir las correspondientes condiciones de carga en la matriz \mathbf{H} . La utilización de algoritmos estándar para invertir la matriz \mathbf{H} cargada (como por ejemplo la eliminación Gaussiana con retrosustitución) ha proporcionado resultados muy eficientes y precisos, tal y como se verá en la siguiente sección.

Finalmente, es interesante remarcar que la técnica recién presentada puede generalizarse a estructuras más complejas que incluyan más de un acceso de sección transversal arbitraria. En tales casos, la estructura debería descomponerse en la unión central con geometría estándar y el número de transiciones planares (relacionadas con los accesos de sección transversal arbitraria) requeridas. Entonces, la conexión entre cada uno de los accesos y la unión central se resuelve empleando las mismas expresiones recién reducidas.

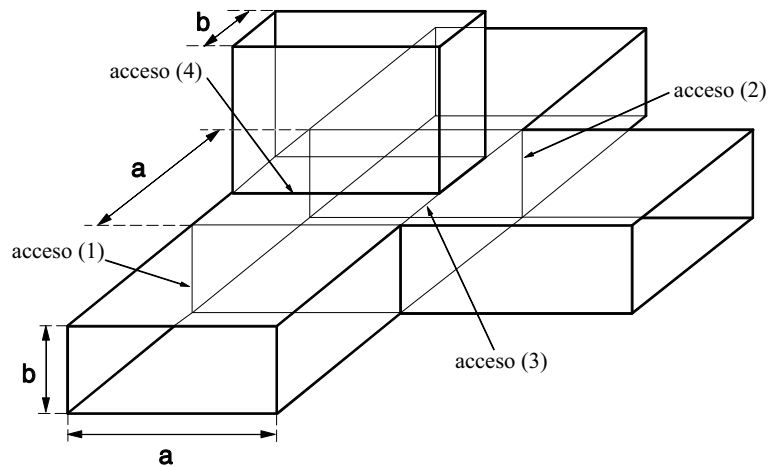


Figura 4.5. La T-mágica.

4.4. Ejemplos de aplicación de la unión cúbica

La teoría deducida en las dos secciones anteriores puede aplicarse fácilmente a numerosos ejemplos de especial interés, tales como por ejemplo la T-mágica, la unión de 6 puertos, uniones T en plano E y en plano H con esquinas redondeadas (de gran interés tecnológico), la doble T (una T en plano E y otra T en plano H unidas por el acceso lateral), diplexores (se verá en el capítulo 6), etc. A continuación, se presentan resultados para algunos de estos dispositivos.

4.4.1. La T-mágica

Como primer ejemplo de validación se ha escogido la T-mágica mostrada en la figura 4.5. Esta estructura se utiliza en numerosos dispositivos de microondas como por ejemplo multiplexores, acopladores, mezcladores y transductores ortomodales. Sin embargo, en la literatura técnica existen pocos análisis rigurosos (de onda completa) de esta unión. Así por ejemplo, pueden encontrarse soluciones rigurosas en [13] y [17], donde se emplean técnicas diferentes a la descrita previamente.

Este dispositivo se puede caracterizar usando la técnica de segmentación propuesta en este capítulo, ya que puede descomponerse idealmente en una unión central de 4 puertos, y en una simple transición entre una guía cuadrada y una guía rectangular (ver el acceso 4 en la figura 4.5). Para la unión central de 4 accesos, se puede utilizar la teoría propuesta en la sección 4.2 para una unión cúbica general, pero con los accesos (4) y (6) de dicha unión general terminados en cortocircuitos (ver figura 4.1). En cambio, la transición debe representarse según la formulación GIM presentada en el capítulo 3. En este caso, tal representación con matriz de impedancias generalizada puede obtenerse fácilmente, ya que la transición analizada está formada por guías con geometrías estándar (cuadradas o rectangulares). Una vez

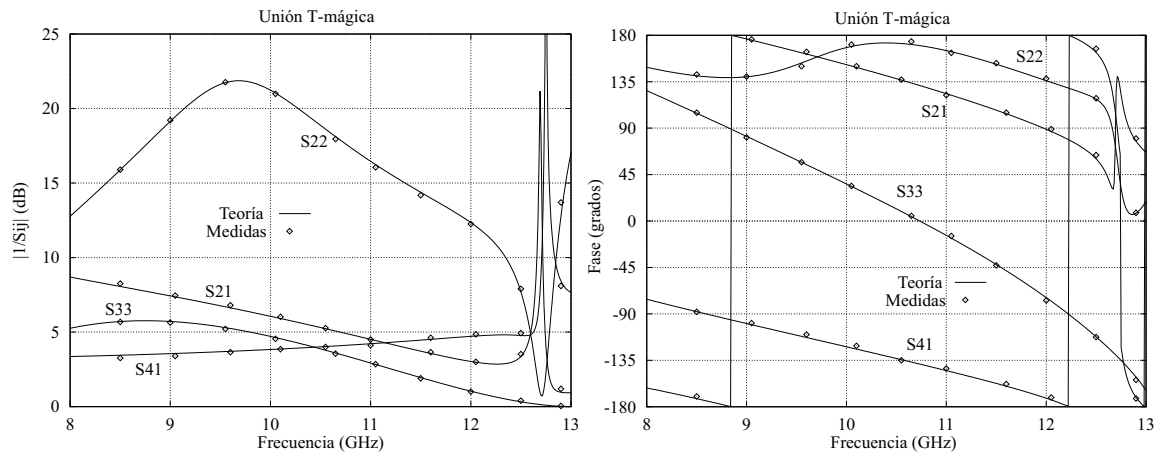


Figura 4.6. *Izquierda:* Módulo de los parámetros de dispersión de una T-mágica en guías WR-90. *Derecha:* Fase de los parámetros de dispersión de la T-mágica en guía WR-90. Las líneas de trazo continuo indican resultados de la simulación, y los puntos indican medidas obtenidas de [18].

caracterizada cada parte de la estructura bajo estudio, puede seguirse la técnica de conexión de matrices descrita en la sección 4.3.

Para validar la técnica de análisis descrita, se han calculado los parámetros de dispersión (o scattering) de una una unión T-mágica en guías WR-90 ($a = 22,86$ mm, $b = 10,16$ mm). En la figura 4.6 se ofrecen los resultados de magnitud y fase de los parámetros de dispersión, que concuerdan muy bien con las medidas obtenidas de [17]. Se ha de remarcar que la concordancia se observa también para los resultados de fase, los cuales suelen ser más críticos.

Para obtener la precisión de los resultados mostrados en la figura 4.6, tan sólo se ha requerido considerar 18 modos en cada sección de guía.

4.4.2. La unión de 6 puertos

Como segundo ejemplo de validación se ha escogido la unión de 6 puertos que tiene la forma mostrada en la figura 4.7. Este elemento está presente en muchas estructuras de microondas, como por ejemplo la unión “torniquete”, acopladores en T híbridos en plano E o en plano H, y uniones T en plano H o en plano E combinadas [18].

Para analizar este dispositivo con la técnica de segmentación, se ha descompuesto la estructura en una unión central cúbica de 6 accesos y dos transiciones iguales entre una guía cuadrada y una guía rectangular estándar (ver el quinto y el sexto acceso en la figura 4.7).

Para verificar el método de análisis propuesto, se han calculado los parámetros de dispersión de una unión de 6 puertos en guías WR-62 ($a = 15,799$ mm, $b = 7,899$ mm). Los resultados de la simulación pueden observarse en la figura 4.8 (coeficientes de reflexión y de

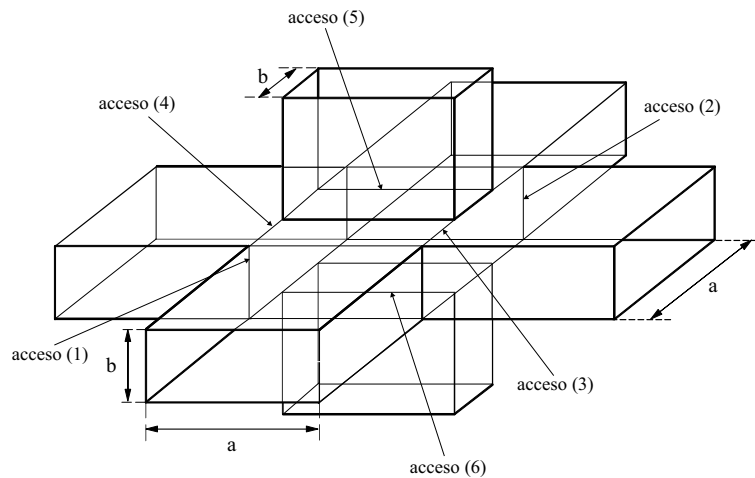


Figura 4.7. La unión de 6 puertos.

transmisión), donde se comparan satisfactoriamente con medidas obtenidas de [18].

Los resultados mostrados en la figura 4.8 se han deducido considerando tan sólo los primeros 30 modos en todos los accesos de la unión.

4.4.3. La unión T con esquinas redondeadas

Las siguientes aplicaciones que se van a considerar son las uniones T en plano E y en plano H con esquinas redondeadas en el acceso lateral (ver figura 4.9).

Las uniones T son elementos que se usan comúnmente en un amplio abanico de dispositivos de microondas, como por ejemplo diplexores y multiplexores, acopladores direccionales, desfasadores y redes conformadoras de haz. Además, los procedimientos de fabricación de dispositivos en guía más usuales introducen el efecto de “esquinas redondeadas”, tal y como se comenta con detalle en el capítulo 5. Por lo tanto, el análisis preciso de uniones T considerando tales efectos de mecanización tiene un gran interés tecnológico.

Para analizar estas piezas puede aplicarse la misma técnica de segmentación comentada previamente. Con respecto a la unión central, estará compuesta en cada caso (plano H y plano E) por 3 guías rectangulares estándar. Tales uniones centrales pueden obtenerse fácilmente de la unión cúbica general mostrada en la figura 4.1, después de situar cortocircuitos en los correspondientes accesos en cada caso. Seguidamente, se considera una transición entre una guía rectangular estándar y la misma guía con esquinas redondeadas en cada configuración (plano E y plano H). Para caracterizar estas transiciones con una GIM como se ha explicado en el capítulo 3 y en la sección 4.3, se requiere el conocimiento del espectro modal de la guía de esquinas redondeadas, así como las integrales de acoplo entre tales modos y los de la guía rectangular estándar. Para obtener estos modos se usa el método BI-RME modificado que se explicó en el capítulo 2, para de esta forma mejorar la precisión discretizando las esquinas

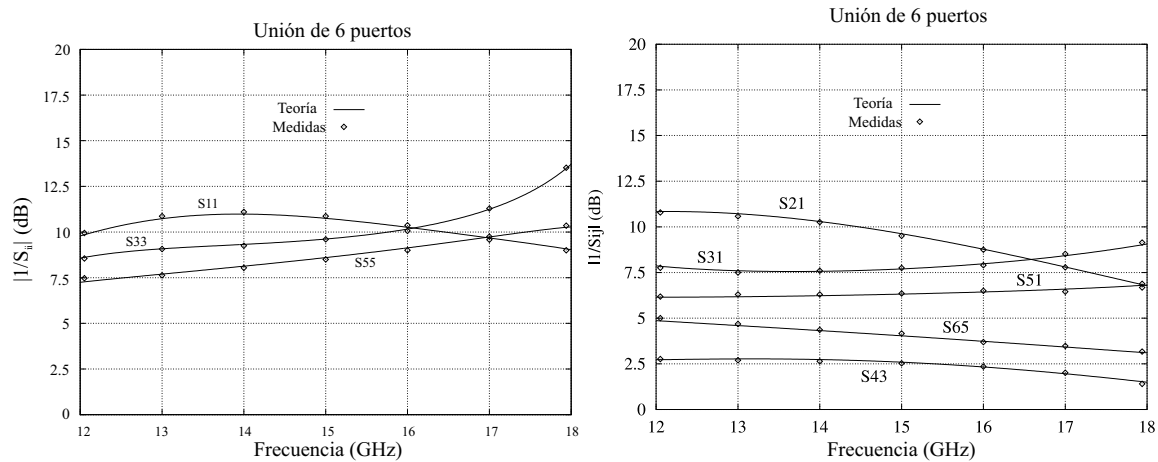


Figura 4.8. Módulo de los parámetros de dispersión de una unión de 6 puertos en guía rectangular estándar WR-62 ($a = 15,799$ mm, $b = 7,899$ mm) operando en la banda Ku. Las líneas en trazo continuo indican resultados de la simulación, y los puntos indican medidas obtenidas de [18]. *Izquierda:* Magnitud de los coeficientes de reflexión (S_{11} , S_{33} y S_{55}). *Derecha:* Magnitud de los coeficientes de transmisión (S_{21} , S_{31} , S_{51} , S_{43} y S_{65}).

redondeadas con arcos de circunferencia. La integrales de acoplo se obtienen con el método descrito en [24] a partir de los datos generados por el propio método BI-RME. Finalmente, después de haber caracterizado el comportamiento electromagnético de la unión central y de la transición por separado, se aplica la técnica eficiente de conexión explicada en la sección 4.3.

Como ejemplos de validación se han seleccionado uniones T en plano E y en plano H en guías WR-62 ($a = 15,799$ mm, $b = 7,899$ mm), cuyos accesos laterales son guías WR-62 con esquinas redondeadas de radio de curvatura igual a 1,5 mm y una longitud física de 7,05 mm. Los resultados de la simulación para el módulo de los parámetros de dispersión de tales estructuras se muestran en la figura 4.10 tanto para el plano H como para el plano E. En tales gráficas se han incluido medidas de prototipos fabricados para comparar los resultados. Se observa una gran semejanza entre los resultados de las simulaciones y las medidas, confirmando pues la gran precisión que proporciona la teoría presentada en este capítulo.

4.5. La unión cúbica con accesos arbitrarios

En esta sección se propone un nuevo método para obtener directamente la representación GAM de una unión cúbica con accesos de forma arbitraria. Los elementos de la GAM de esta unión se obtienen analíticamente usando la expresión genérica de teoría de cavidades [15].

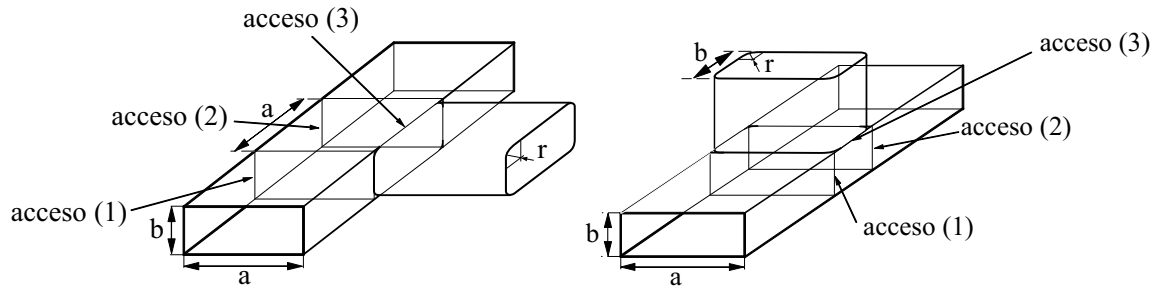


Figura 4.9. *Izquierda:* Unión T en plano H con el acceso lateral redondeado. *Derecha:* Unión T en plano E con el acceso superior redondeado.

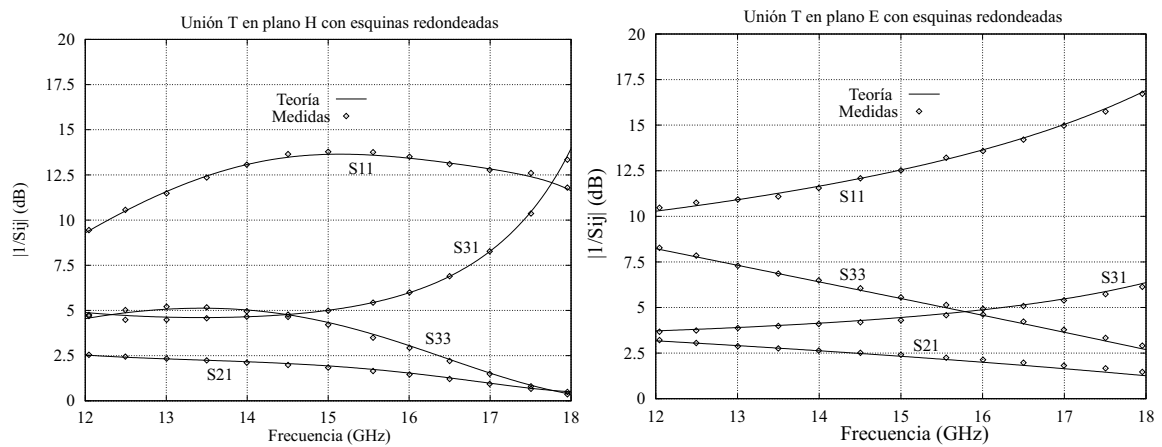


Figura 4.10. *Izquierda:* Módulo de los parámetros de dispersión de una unión T en plano H en guías WR-62 con el acceso lateral redondeado. *Derecha:* Módulo de los parámetros de dispersión de una unión T en plano E en guías WR-62 con el acceso superior redondeado.

Para calcular tales elementos de la GAM, se requiere conocer el conjunto de modos de las guías arbitrarias que forman los accesos, así como las integrales de acoplo entre esos modos y los modos de la cavidad central. Se propone una nueva técnica basada en el método BI-RME descrito en el capítulo 2 para obtener expresiones compactas de las integrales de acoplo requeridas. Además, se han realizado esfuerzos para mejorar la eficiencia numérica de este nuevo método, por ejemplo las series triples presentes en las expresiones de los elementos de la GAM que relacionan puertos paralelos se han reducido a rápidas series dobles.

Para validar la teoría propuesta en esta sección, se ha considerado en primer lugar el efecto de “esquinas redondeadas” presente en los procesos de fabricación de dispositivos en guía rectangular más comunes. Por ejemplo, se han analizado uniones T en plano E y en plano H con esquinas redondeadas en sus respectivos accesos laterales, así como la conexión de estas 2 uniones a través de sus accesos laterales. Después, se ha estudiado un dispositivo

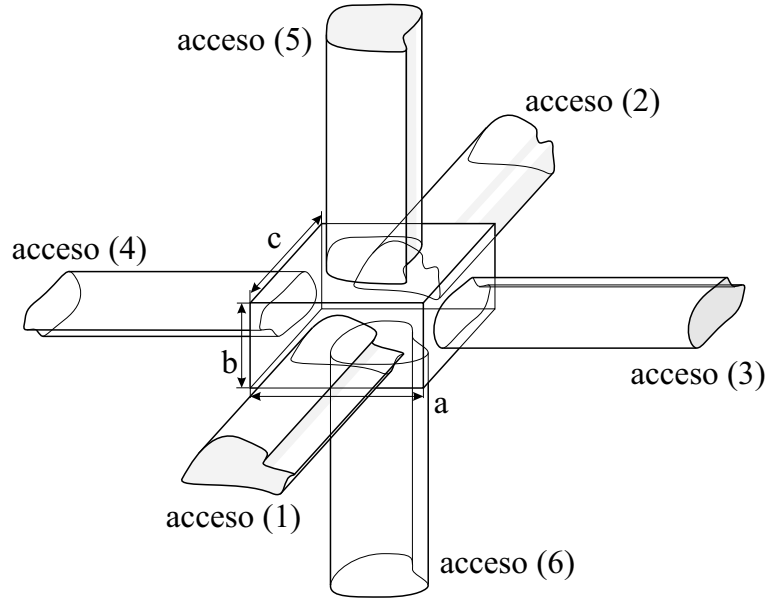


Figura 4.11. Unión cúbica con 6 accesos arbitrarios.

más complejo que incluye 2 accesos con geometría arbitraria, en concreto una T-mágica con esquinas redondeadas en sus dos accesos laterales. Los resultados de la simulación se han comparado exitosamente con medidas de diversos prototipos fabricados.

4.5.1. La unión cúbica general

La estructura bajo estudio es la unión cúbica con 6 accesos arbitrarios mostrada en la figura 4.11. El objetivo final de esta sección es derivar una representación matricial de admitancias generalizada de la unión cúbica general, con los planos de referencia situados en los accesos de sección transversal arbitraria de la estructura. Por lo tanto, la GAM obtenida tendrá una estructura matricial constituida por 6×6 bloques.

De acuerdo con la teoría electromagnética de cavidades [15], [22], los elementos de la representación GAM buscada pueden deducirse a partir de la misma expresión genérica utilizada para la unión cúbica de accesos rectangulares, es decir

$$\begin{aligned}
 Y_{p,q}^{(\delta,\gamma)} = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_i^2} \int_{CS(\gamma)} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_q^{(\gamma)}) \cdot \mathbf{h}_i dS \int_{CS(\delta)} \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_p^{(\delta)} dS + \\
 & + \frac{j}{\omega\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{CS(\gamma)} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_q^{(\gamma)}) \cdot \mathbf{g}_i dS \int_{CS(\delta)} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{h}_p^{(\delta)} dS \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{h}_i y \mathbf{g}_i representan los modos solenoidales e irrotacionales de la cavidad central cúbica, respectivamente, ω es la frecuencia angular del campo que genera la excitación, k_i el

número de onda del i -ésimo modo de la cavidad, $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario perpendicular a la apertura y saliente de la cavidad, y donde $\mathbf{h}_p^{(\delta)}$ y $\mathbf{e}_p^{(\delta)}$ representan en este caso las p -ésimas funciones vectoriales del acceso de sección transversal arbitraria (δ) (los dominios de integración $CS(\delta)$ y $CS(\gamma)$ indican los accesos donde debe evaluarse cada integral).

Para implementar la expresión genérica de los elementos de la GAM mostrada en (4.30), se deben calcular las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_{CS(\gamma)} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_q^{(\gamma)}) \cdot \mathbf{h}_i dS \quad (4.31a)$$

$$I_2 = \int_{CS(\delta)} \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_p^{(\delta)} dS \quad (4.31b)$$

$$I_3 = \int_{CS(\gamma)} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_q^{(\gamma)}) \cdot \mathbf{g}_i dS \quad (4.31c)$$

$$I_4 = \int_{CS(\delta)} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{h}_p^{(\delta)} dS \quad (4.31d)$$

Tras resolver todas estas integrales de acoplo e insertar sus valores en (4.30), se pueden obtener expresiones completamente analíticas para los elementos de la GAM de la estructura bajo estudio. En los siguientes apartados se describe con detalle la teoría empleada para deducir tanto las expresiones compactas para las citadas integrales de acoplo, como las expresiones finales de los elementos de la GAM.

Las integrales de acoplo

Para resolver las integrales de acoplo definidas en (4.31), deben obtenerse primero las expresiones para las funciones vectoriales modales de excitación ($\mathbf{e}_q^{(\gamma)}$ y $\mathbf{h}_p^{(\delta)}$) para cada acceso de sección transversal arbitraria. Además, para evaluar (4.31a) y (4.31c), debe calcularse también el término $(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_q^{(\gamma)})$. Sin embargo, este término está directamente relacionado con la función vectorial modal $\mathbf{h}_q^{(\gamma)}$, por lo que sólo es necesario obtener el campo magnético normalizado en todos los accesos de la estructura.

Consideremos el puerto genérico (δ), cuya sección transversal S_δ delimitada por el contorno σ_δ se muestra en la figura 4.12. Para calcular las expresiones modales requeridas de los puertos de sección arbitraria, se define una guía rectangular estándar de dimensiones $l_{x\delta}$ y $l_{y\delta}$ que encierra al acceso. En el caso que nos ocupa (ver figura 4.11), los valores de tales dimensiones para cada acceso son

$$l_{x_1} = l_{x_2} = a \quad l_{x_3} = l_{x_4} = c \quad l_{x_5} = l_{x_6} = c \quad (4.32a)$$

$$l_{y_1} = l_{y_2} = b \quad l_{y_3} = l_{y_4} = b \quad l_{y_5} = l_{y_6} = a \quad (4.32b)$$

Siguiendo el método BI-RME propuesto en el capítulo 2, la expresión para el campo

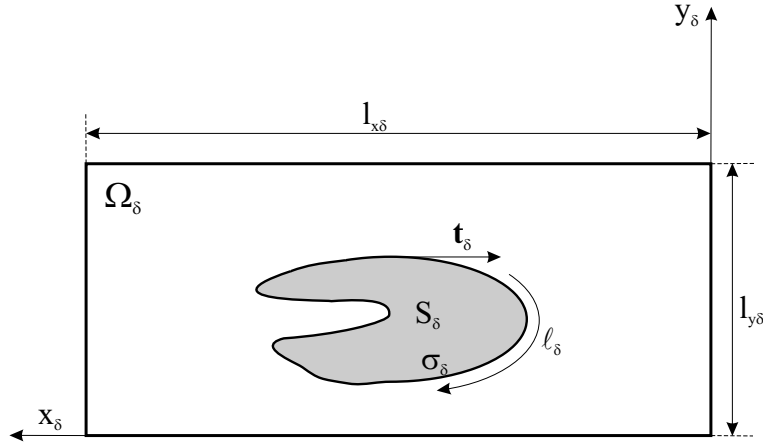


Figura 4.12. Acceso de sección transversal arbitraria.

magnético normalizado del p -ésimo modo TE(H) del acceso (δ) puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_p^{(\delta)H} = & \kappa_p^{(\delta)} \sum_{n=1}^N b_{np}^{(\delta)} \sum_{i=1}^{\infty} R_{ni}^{(\delta)} \mathbf{h}_i^{(\Omega_\delta)H} + \kappa_p^{(\delta)} \sum_{m=1}^M \frac{a_{mp}^{(\delta)}}{[k_m^{(\Omega_\delta)}]^2} \mathbf{h}_m^{(\Omega_\delta)H} - \\ & - \frac{1}{\kappa_p^{(\delta)}} \sum_{n=1}^N b_{np}^{(\delta)} \sum_{i=1}^{\infty} R_{ni}^{\prime\prime(\delta)} \mathbf{h}_i^{(\Omega_\delta)E} \end{aligned} \quad (4.33)$$

y la expresión para el campo magnético normalizado del p -ésimo modo TM(E) del acceso (δ) presenta el siguiente aspecto

$$\mathbf{h}_p^{(\delta)E} = \sum_{n=1}^{N'} b_{np}^{\prime(\delta)} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^{\prime(\Omega_\delta)} R_{ni}^{\prime(\delta)} \mathbf{h}_i^{(\Omega_\delta)E} + \sum_{m=1}^{M'} \frac{a_{mp}^{\prime(\delta)}}{k_m^{\prime(\Omega_\delta)}} \mathbf{h}_m^{(\Omega_\delta)E} \quad (4.34)$$

En las expresiones anteriores, $\kappa_p^{(\delta)}$ es el número de onda de corte del p -ésimo modo TE del acceso (δ), mientras $b_{np}^{(\delta)}$ y $a_{mp}^{(\delta)}$ son respectivamente los coeficientes de la corriente desconocida y los coeficientes de la expansión modal relacionados con el problema TE. Los coeficientes $b_{np}^{\prime(\delta)}$ y $a_{mp}^{\prime(\delta)}$ tienen un significado equivalente a los previos para el caso TE, pero ahora relacionados con el problema TM (ver capítulo 2).

Los escalares $k_m^{(\Omega_\delta)}$ y $k_m^{\prime(\Omega_\delta)}$ presentes en (4.33) y (4.34) son, respectivamente, los números de onda de corte de los modos TE y TM de la guía rectangular estándar con sección transversal Ω_δ (ver figura 4.12). Sus expresiones, así como las de los campos magnéticos normalizados ($\mathbf{h}_i^{(\Omega_\delta)H}$ para los modos TE y $\mathbf{h}_i^{(\Omega_\delta)E}$ para los modos TM) de una guía rectangular, pueden encontrarse en [11].

Los límites superiores N y N' de las sumas en (4.33) y (4.34) son el número de funciones base elegidas para expandir la corriente inducida (incógnita del problema) para el

caso TE y TM, respectivamente, mientras los enteros M y M' son el número de modos TE y TM de la guía rectangular estándar con sección transversal Ω_δ utilizados para expandir, respectivamente, cada modo TE y TM del puerto de acceso de sección arbitraria (δ).

Con respecto a los coeficientes $R_{ni}^{(\delta)}$, $R'_{ni}^{(\delta)}$ y $R''_{ni}^{(\delta)}$, que también aparecen en (4.33) y (4.34), se definen según [24] como sigue

$$R_{ni}^{(\delta)} = \frac{1}{[k_i^{(\Omega_\delta)}]^2} \int_{\sigma_\delta} \mathbf{e}_i^{(\Omega_\delta)H} \cdot \hat{\mathbf{t}}_\delta w_n dl_\delta \quad (4.35)$$

$$R'_{ni}^{(\delta)} = \frac{1}{[k_i^{(\Omega_\delta)}]^2} \int_{\sigma_\delta} \varphi_i^{(\Omega_\delta)E} w_n dl_\delta \quad (4.36)$$

$$R''_{ni}^{(\delta)} = \frac{1}{k_i^{(\Omega_\delta)}} \int_{\sigma_\delta} \varphi_i^{(\Omega_\delta)E} \frac{\partial w_n}{\partial l_\delta} dl_\delta \quad (4.37)$$

donde $\mathbf{e}_i^{(\Omega_\delta)H}$ y $\varphi_i^{(\Omega_\delta)E}$ son las funciones modales normalizadas del i -ésimo modo TE y TM de la guía rectangular estándar con sección transversal Ω_δ , w_n es un conjunto de funciones normalizadas de dominio restringido que reconstruyen la corriente desconocida en cada elemento de la línea σ_δ , $\hat{\mathbf{t}}_\delta$ es el vector unitario tangente a la línea σ_δ , y l_δ es un parámetro que recorre tal línea (ver figura 4.12).

Para proceder con el cálculo de las integrales de acoplo definidas en (4.31), también es necesario deducir las expresiones para las funciones vectoriales modales \mathbf{h}_i y \mathbf{g}_i . Estos vectores representan, respectivamente, las componentes del campo magnético de los modos solenoidales e irrotacionales de una cavidad cúbica estándar (ver figura 4.1) normalizadas respecto a su volumen. Según [22], estas componentes vectoriales se expresan como

$$\mathbf{h}_i^{TMz} = N_x^{h_i^{TMz}} A_{x,i} \hat{\mathbf{x}} + N_y^{h_i^{TMz}} A_{y,i} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.38a)$$

$$\mathbf{h}_i^{TEz} = N_x^{h_i^{TEz}} A_{x,i} \hat{\mathbf{x}} + N_y^{h_i^{TEz}} A_{y,i} \hat{\mathbf{y}} + N_z^{h_i^{TEz}} A_{z,i} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.38b)$$

$$\mathbf{g}_i = N_x^{g_i} A_{x,i} \hat{\mathbf{x}} + N_y^{g_i} A_{y,i} \hat{\mathbf{y}} + N_z^{g_i} A_{z,i} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.38c)$$

donde el subíndice i hace referencia a un conjunto de 3 subíndices modales r , s y t , los cuales están relacionados con las coordenadas x , y y z , respectivamente. N_x , N_y y N_z son los factores de normalización de las funciones vectoriales modales solenoidales e irrotacionales, y A_x , A_y y A_z se refieren a las correspondientes variaciones funcionales (que obviamente dependen de x , y y z). Las expresiones explícitas de estos términos pueden encontrarse en [22].

Como se remarcó también en la sección 4.2, para deducir expresiones simples para los elementos $Y_{p,q}^{(\delta,1)}$ ($\delta = 1, \dots, 6$) e $Y_{p,q}^{(\delta,2)}$ ($\delta = 2, \dots, 6$), el sistema de coordenadas debe elegirse como se muestra en la figura 4.1. Con el objetivo de deducir expresiones compactas muy similares para los elementos $Y_{p,q}^{(\delta,3)}$ ($\delta = 3, \dots, 6$) e $Y_{p,q}^{(\delta,4)}$ ($\delta = 4, 5, 6$), así como para los elementos $Y_{p,q}^{(\delta,5)}$ ($\delta = 5, 6$) e $Y_{p,q}^{(\delta,6)}$, el sistema de coordenadas debe situarse adecuadamente en los accesos (3) y (5), respectivamente, de la cavidad cúbica estándar.

Para obtener los productos escalares requeridos en (4.31), es necesario expresar los vectores modales \mathbf{h}_i y \mathbf{g}_i con respecto al sistema de coordenadas local del acceso relacionado por cada integral (acceso (δ) o (γ) correspondiente al bloque de la GAM considerado). Por ejemplo, eligiendo otra vez el acceso (δ) , podemos expresar las funciones vectoriales modales \mathbf{h}_i y \mathbf{g}_i de la siguiente manera:

$$\mathbf{h}_i = N_{x_\delta}^{h_i} A_{x_\delta,i}(x_\delta, y_\delta) \hat{\mathbf{x}}_\delta + N_{y_\delta}^{h_i} A_{y_\delta,i}(x_\delta, y_\delta) \hat{\mathbf{y}}_\delta \quad (4.39a)$$

$$\mathbf{g}_i = N_{x_\delta}^{g_i} A_{x_\delta,i}(x_\delta, y_\delta) \hat{\mathbf{x}}_\delta + N_{y_\delta}^{g_i} A_{y_\delta,i}(x_\delta, y_\delta) \hat{\mathbf{y}}_\delta \quad (4.39b)$$

donde las constantes de normalización ($N_{x_\delta}^{h_i}$, $N_{y_\delta}^{h_i}$, $N_{x_\delta}^{g_i}$ y $N_{y_\delta}^{g_i}$) y las variaciones funcionales ($A_{x_\delta,i}$ y $A_{y_\delta,i}$) pueden determinarse para cada acceso a partir de las correspondientes expresiones genéricas previamente incluidas en (4.38).

Usando las expresiones propuestas en (4.39a) y (4.39b) para \mathbf{h}_i and \mathbf{g}_i , y aquellas incluidas en (4.33) y (4.34) para los campos magnéticos modales de los accesos de sección transversal arbitraria, es posible encontrar expresiones analíticas para las integrales requeridas I_1 , I_2 , I_3 y I_4 . Por simplicidad, sólo se presentarán expresiones explícitas para la integral I_2 , ya que las restantes integrales (I_1 , I_3 y I_4) pueden escribirse fácilmente en términos de la solución obtenida para el caso I_2 .

Entonces, si el p -ésimo modo del puerto (δ) es un modo TE(H), I_2 puede obtenerse como sigue

$$I_2^H = N_{x_\delta}^{h_i} I_{2,x_\delta}^H(p, r_\delta, s_\delta) + N_{y_\delta}^{h_i} I_{2,y_\delta}^H(p, r_\delta, s_\delta) \quad (4.40)$$

donde r_δ y s_δ son los índices del i -ésimo modo solenoidal de la cavidad estándar correspondiente a las coordenadas x_δ e y_δ , respectivamente. Los términos I_{2,x_δ}^H e I_{2,y_δ}^H tienen el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} I_{2,x_\delta}^H(p, r_\delta, s_\delta) &= \kappa_p^{(\delta)} N_{x_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)H}} I_{s_{x_\delta}}(r_\delta) I_{c_{y_\delta}}(s_\delta) \sum_{n=1}^N b_{np}^{(\delta)} R_{ni}^{(\delta)} \Big|_{i=r_\delta, s_\delta} \\ &+ \kappa_p^{(\delta)} N_{x_\delta}^{h_m^{(\Omega_\delta)H}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1} I_{s_{x_\delta}}(r_\delta) I_{c_{y_\delta}}(s_\delta) F(M, r_\delta, s_\delta) a_{mp}^{(\delta)} \Big|_{m=r_\delta, s_\delta} \\ &- \frac{1}{\kappa_p^{(\delta)}} N_{x_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)E}} I_{s_{x_\delta}}(r_\delta) I_{c_{y_\delta}}(s_\delta) \sum_{n=1}^N b_{np}^{(\delta)} R_{ni}^{\prime\prime(\delta)} \Big|_{i=r_\delta, s_\delta} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} I_{2,y_\delta}^H(p, r_\delta, s_\delta) &= \kappa_p^{(\delta)} N_{y_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)H}} I_{c_{x_\delta}}(r_\delta) I_{s_{y_\delta}}(s_\delta) \sum_{n=1}^N b_{np}^{(\delta)} R_{ni}^{(\delta)} \Big|_{i=r_\delta, s_\delta} \\ &+ \kappa_p^{(\delta)} N_{y_\delta}^{h_m^{(\Omega_\delta)H}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1} I_{c_{x_\delta}}(r_\delta) I_{s_{y_\delta}}(s_\delta) F(M, r_\delta, s_\delta) a_{mp}^{(\delta)} \Big|_{m=r_\delta, s_\delta} \\ &- \frac{1}{\kappa_p^{(\delta)}} N_{y_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)E}} I_{c_{x_\delta}}(r_\delta) I_{s_{y_\delta}}(s_\delta) \sum_{n=1}^N b_{np}^{(\delta)} R_{ni}^{\prime\prime(\delta)} \Big|_{i=r_\delta, s_\delta} \end{aligned} \quad (4.42)$$

En (4.41) y (4.42), $N_{x_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)H}}$, $N_{y_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)H}}$, $N_{x_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)E}}$ y $N_{y_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)E}}$ son los factores de normalización de las funciones vectoriales modales de la guía rectangular estándar con sección transversal Ω_δ (ver figura 4.12), cuyos valores pueden deducirse fácilmente de [11]

$$N_{x_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)H}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r_\delta} \epsilon_{s_\delta}}{l_{x_\delta} l_{y_\delta}}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right) \quad (4.43a)$$

$$N_{y_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)H}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r_\delta} \epsilon_{s_\delta}}{l_{x_\delta} l_{y_\delta}}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right) \quad (4.43b)$$

$$N_{x_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)E}} = \frac{2}{\sqrt{l_{x_\delta} l_{y_\delta}}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right) \quad (4.43c)$$

$$N_{y_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)E}} = -\frac{2}{\sqrt{l_{x_\delta} l_{y_\delta}}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right) \quad (4.43d)$$

donde ϵ_{r_δ} y ϵ_{s_δ} son los conocidos factores de Neumann

$$\epsilon_u = \begin{cases} 1 & \text{si } u = 0 \\ 2 & \text{si } u \neq 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Los términos $I_{s_{x_\delta}}$, $I_{c_{x_\delta}}$, $I_{s_{y_\delta}}$ e $I_{c_{y_\delta}}$, presentes también en (4.41) y (4.42), son simples integrales seno y coseno con los siguientes valores

$$I_{s_{x_\delta}}(r_\delta) = \frac{l_{x_\delta}}{2} (1 - \delta_{r_\delta,0}) \quad (4.45a)$$

$$I_{c_{x_\delta}}(r_\delta) = \frac{l_{x_\delta}}{2} (1 + \delta_{r_\delta,0}) \quad (4.45b)$$

$$I_{s_{y_\delta}}(s_\delta) = \frac{l_{y_\delta}}{2} (1 - \delta_{s_\delta,0}) \quad (4.45c)$$

$$I_{c_{y_\delta}}(s_\delta) = \frac{l_{y_\delta}}{2} (1 + \delta_{s_\delta,0}) \quad (4.45d)$$

donde $\delta_{m,n}$ es la conocida delta de Kronecker ($\delta_{m,n} = 1$ si $m = n$, $\delta_{m,n} = 0$ si $m \neq n$). Finalmente, el factor $F(M, r_\delta, s_\delta)$ que también aparece en (4.41) y (4.42) se define de la siguiente manera

$$F(M, r_\delta, s_\delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \leq k_M^{(\Omega_\delta)} \\ 0 & \text{si } \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} > k_M^{(\Omega_\delta)} \end{cases} \quad (4.46)$$

Por otra parte, si el p -ésimo modo del puerto (δ) es un modo TM(E), la integral I_2 puede expresarse de la siguiente forma

$$I_2^E = N_{x_\delta}^{h_i} I_{2,x_\delta}^E(p, r_\delta, s_\delta) + N_{y_\delta}^{h_i} I_{2,y_\delta}^E(p, r_\delta, s_\delta) \quad (4.47)$$

donde en este caso los términos I_{2,x_δ}^E e I_{2,y_δ}^E tienen las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} I_{2,x_\delta}^E(p, r_\delta, s_\delta) &= N_{x_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)E}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} I_{s_{x_\delta}}(r_\delta) I_{c_{y_\delta}}(s_\delta) \sum_{n=1}^{N'} b_{np}'^{(\delta)} R_{ni}'^{(\delta)} \Big|_{i=r_\delta, s_\delta} \\ &+ N_{x_\delta}^{h_m^{(\Omega_\delta)E}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} I_{s_{x_\delta}}(r_\delta) I_{c_{y_\delta}}(s_\delta) F'(M', r_\delta, s_\delta) a_{mp}'^{(\delta)} \Big|_{m=r_\delta, s_\delta} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} I_{2,y_\delta}^E(p, r_\delta, s_\delta) &= N_{y_\delta}^{h_i^{(\Omega_\delta)E}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} I_{c_{x_\delta}}(r_\delta) I_{s_{y_\delta}}(s_\delta) \sum_{n=1}^{N'} b_{np}'^{(\delta)} R_{ni}'^{(\delta)} \Big|_{i=r_\delta, s_\delta} \\ &+ N_{y_\delta}^{h_m^{(\Omega_\delta)E}} \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} I_{c_{x_\delta}}(r_\delta) I_{s_{y_\delta}}(s_\delta) F'(M', r_\delta, s_\delta) a_{mp}'^{(\delta)} \Big|_{m=r_\delta, s_\delta} \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde $F'(M', r_\delta, s_\delta)$ se define en este caso como

$$F'(M', r_\delta, s_\delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \leq k_{M'}^{(\Omega_\delta)} \\ 0 & \text{si } \left[\left(\frac{r_\delta \pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s_\delta \pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} > k_{M'}^{(\Omega_\delta)} \end{cases} \quad (4.50)$$

El resto de integrales (I_1 , I_3 y I_4) pueden escribirse en términos de I_{2,x_δ}^H , I_{2,y_δ}^H , I_{2,x_δ}^E y I_{2,y_δ}^E como se indicó en (4.40) y (4.47), pero considerando en tales expresiones las correspondientes constantes de normalización de los modos de la cavidad estándar y la dirección apropiada del vector unitario \hat{n} .

Una vez se han resuelto completamente las integrales I_1 , I_2 , I_3 y I_4 , las expresiones para los elementos de la GAM pueden obtenerse fácilmente. A continuación, se deducirán las expresiones explícitas para todos los elementos de la GAM de la unión cúbica general. Como ya se hizo en la sección 4.2, los elementos de la GAM se dividirán en dos grandes grupos: los elementos que relacionan accesos paralelos y los que relacionan accesos ortogonales.

Los elementos de la GAM para accesos paralelos

Se obtendrán en primer lugar los bloques de la GAM correspondientes a la diagonal principal, es decir, $Y_{p,q}^{(\delta,\delta)}$ con $\delta = 1, 2, \dots, 6$. En principio, se deben insertar en (4.30) las

correspondientes expresiones para las integrales I_1 , I_2 , I_3 y I_4 . Después, deben sumarse todas las series que aparecen en dicha ecuación referidas al índice t tal y como se indica en la sección 4.8, dando lugar a la siguiente serie doble

$$\begin{aligned}
Y_{p,q}^{(\delta,\delta)} &= \frac{j}{\omega \mu l_{x_\delta} l_{y_\delta}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon_r \epsilon_s T_{11}^{(\delta)}(q, r, s) T_{11}^{(\delta)}(p, r, s) \cdot \\
&\cdot \left\{ \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1} S_1^{(\delta)}(r, s) - S_3^{(\delta)}(r, s) \right\} \\
&+ \frac{j 4 \omega \varepsilon}{l_{x_\delta} l_{y_\delta}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} T_{21}^{(\delta)}(q, r, s) T_{21}^{(\delta)}(p, r, s) \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1} S_2^{(\delta)}(r, s)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

En esta última expresión, es importante resaltar que la primera serie doble no puede empezar con los dos índices (r y s) siendo 0 simultáneamente. Los términos $T_{11}^{(\delta)}(q, r, s)$ y $T_{21}^{(\delta)}(q, r, s)$ se definen como sigue para el q -ésimo modo H(E):

$$T_{11}^{(\delta)}(q, r, s) = \left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right) I_{2,x_\delta}^{H(E)}(q, r, s) + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(q, r, s) \tag{4.52a}$$

$$T_{21}^{(\delta)}(q, r, s) = \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right) I_{2,x_\delta}^{H(E)}(q, r, s) - \left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(q, r, s) \tag{4.52b}$$

y $S_1^{(\delta)}(r, s)$, $S_2^{(\delta)}(r, s)$ y $S_3^{(\delta)}(r, s)$ se refieren a las series mencionadas anteriormente, cuya definición y expresión de la suma se recoge en la sección 4.8.

El siguiente paso es calcular los bloques adyacentes a la diagonal principal de la GAM que también relacionan accesos paralelos, es decir, $Y_{p,q}^{(\delta+1,\delta)}$ con $\delta = 1, 3, 5$. Siguiendo el mismo procedimiento utilizado anteriormente con los elementos $Y_{p,q}^{(\delta,\delta)}$, se obtiene la siguiente serie doble

$$\begin{aligned}
Y_{p,q}^{(\delta+1,\delta)} &= -\frac{j}{\omega \mu l_{x_\delta} l_{y_\delta}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon_r \epsilon_s T_{11}^{(\delta)}(q, r, s) T_{11}^{(\delta+1)}(p, r, s) \cdot \\
&\cdot \left\{ \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1} S_4^{(\delta)}(r, s) - S_6^{(\delta)}(r, s) \right\} \\
&- \frac{j 4 \omega \varepsilon}{l_{x_\delta} l_{y_\delta}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} T_{21}^{(\delta)}(q, r, s) T_{21}^{(\delta+1)}(p, r, s) \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1} S_5^{(\delta)}(r, s)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

En (4.53), la primera serie doble no puede empezar con los dos índices (r y s) igual a 0 al mismo tiempo, y los términos $S_4^{(\delta)}(r, s)$, $S_5^{(\delta)}(r, s)$ y $S_6^{(\delta)}(r, s)$ se refieren ahora a las series

que pueden sumarse analíticamente en este caso. Las definiciones y valores de estas series pueden consultarse también en la sección 4.8.

Los bloques $Y_{p,q}^{(\delta,\delta+1)}$ ($\delta = 1, 3, 5$), también adyacentes a la diagonal principal de la GAM, pueden obtenerse fácilmente haciendo uso de la propiedad de reciprocidad de la estructura bajo estudio

$$Y_{p,q}^{(\delta,\delta+1)} = Y_{q,p}^{(\delta+1,\delta)} \quad (4.54)$$

donde los elementos $Y_{q,p}^{(\delta+1,\delta)}$ se calculan de acuerdo con (4.53).

Los elementos de la GAM para accesos ortogonales

La expresión general para los bloques $Y_{p,q}^{(\delta,\gamma)}$ que relacionan puertos ortogonales con $\delta > \gamma$ (por ejemplo $\delta = 3, 4, 5, 6$ y $\gamma = 1, 2$ o $\delta = 5, 6$ y $\gamma = 3, 4$) presenta el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} Y_{p,q}^{(\delta,\gamma)} = & j \omega \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} C^{(\delta,\gamma)}(r, s, t) \frac{\left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_s \varepsilon_t}{abc}\right) \left(\frac{t\pi}{lz_\gamma}\right) T_{11}^{(\gamma)}(q, r, s) T_{12}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t)}{\left(k_{r,s,t}^{(\gamma)}\right)^2 \left[\left(k_{r,s,t}^{(\gamma)}\right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon\right] \left[\left(\frac{r\pi}{lx_\gamma}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{ly_\gamma}\right)^2\right]} \\ & + j \omega \varepsilon \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C^{(\delta,\gamma)}(r, s, t) \frac{\left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_s \varepsilon_t}{abc}\right) T_{21}^{(\gamma)}(q, r, s) T_{22}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t)}{\left[\left(k_{r,s,t}^{(\gamma)}\right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon\right] \left[\left(\frac{r\pi}{lx_\gamma}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{ly_\gamma}\right)^2\right]} \\ & - \frac{j}{\omega \mu} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C^{(\delta,\gamma)}(r, s, t) \frac{\left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_s \varepsilon_t}{abc}\right) T_{11}^{(\gamma)}(q, r, s) T_{32}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t)}{\left(k_{r,s,t}^{(\gamma)}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.55)$$

En esta expresión, la primera serie triple no puede empezar con el valor 0 para los dos índices r y s simultáneamente, y los 3 índices (r , s y t) de la tercera serie triple no pueden ser igual a cero al mismo tiempo.

Con respecto a los coeficientes $C^{(\delta,\gamma)}(r, s, t)$ presentes en (4.55), tienen los siguientes valores en función de los puertos de excitación (δ) y (γ) relacionados con cada elemento de la GAM

$$\begin{aligned} C^{(3,1)}(r, s, t) &= 1 & C^{(3,2)}(r, s, t) &= (-1)^{t+1} & C^{(5,3)}(r, s, t) &= (-1)^s \\ C^{(4,1)}(r, s, t) &= (-1)^{r+1} & C^{(4,2)}(r, s, t) &= (-1)^{r+t} & C^{(6,3)}(r, s, t) &= -1 \\ C^{(5,1)}(r, s, t) &= (-1)^s & C^{(5,2)}(r, s, t) &= (-1)^{s+t+1} & C^{(5,4)}(r, s, t) &= (-1)^{s+t+1} \\ C^{(6,1)}(r, s, t) &= -1 & C^{(6,2)}(r, s, t) &= (-1)^t & C^{(6,4)}(r, s, t) &= (-1)^t \end{aligned} \quad (4.56)$$

y $k_{r,s,t}^{(\gamma)}$ representa el número de onda de corte del i -ésimo modo de la cavidad, cuyo valor se puede deducir de [22] para cada puerto de excitación (γ).

En (4.55), $T_{11}^{(\gamma)}(q, r, s)$ y $T_{21}^{(\gamma)}(q, r, s)$ se refieren a los mismos términos previamente definidos en (4.52a) y (4.52b), mientras $T_{12}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t)$, $T_{22}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t)$ y $T_{32}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t)$ hacen referencia a los nuevos términos que dependen de los dos accesos (δ) y (γ) involucrados en

el cálculo del correspondiente bloque. Así, por ejemplo, para los bloques $Y_{p,q}^{(\delta,\gamma)}$ con $\delta = 3, 4$ y $\gamma = 1, 2$ los nuevos términos se definen como sigue para un modo H(E) p -ésimo

$$T_{12}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\gamma}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\gamma}} \right)^2 \right] I_{2,x_\delta}^{H(E)}(p, t, s) - \left(\frac{s\pi}{l_{y_\gamma}} \right) \left(\frac{t\pi}{l_{z_\gamma}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(p, t, s) \quad (4.57)$$

$$T_{22}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = \left(\frac{r\pi}{l_{x_\gamma}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(p, t, s) \quad (4.58)$$

$$T_{32}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = - \left(\frac{t\pi}{l_{z_\gamma}} \right) I_{2,x_\delta}^{H(E)}(p, t, s) - \left(\frac{s\pi}{l_{y_\gamma}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(p, t, s) \quad (4.59)$$

Si $\delta = 5, 6$ y $\gamma = 1, 2$ las expresiones para los términos mencionados T_{12} , T_{22} y T_{32} son los siguientes para el p -ésimo modo H(E)

$$T_{12}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\gamma}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\gamma}} \right)^2 \right] I_{2,x_\delta}^{H(E)}(p, t, r) - \left(\frac{r\pi}{l_{x_\gamma}} \right) \left(\frac{t\pi}{l_{z_\gamma}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(p, t, r) \quad (4.60)$$

$$T_{22}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = - \left(\frac{s\pi}{l_{y_\gamma}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(p, t, r) \quad (4.61)$$

$$T_{32}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = - \left(\frac{t\pi}{l_{z_\gamma}} \right) I_{2,x_\delta}^{H(E)}(p, t, r) - \left(\frac{r\pi}{l_{x_\gamma}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(p, t, r) \quad (4.62)$$

Finalmente, si $\delta = 5, 6$ y $\gamma = 3, 4$ los términos necesarios T_{12} , T_{22} y T_{32} se obtienen de la siguiente forma para el p -ésimo modo H(E)

$$T_{12}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = \left(\frac{r\pi}{l_{x_\gamma}} \right) \left(\frac{t\pi}{l_{z_\gamma}} \right) I_{2,x_\delta}^{H(E)}(p, r, t) - \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\gamma}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\gamma}} \right)^2 \right] I_{2,y_\delta}^{H(E)}(p, r, t) \quad (4.63)$$

$$T_{22}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = \left(\frac{s\pi}{l_{y_\gamma}} \right) I_{2,x_\delta}^{H(E)}(p, r, t) \quad (4.64)$$

$$T_{32}^{(\delta,\gamma)}(p, r, s, t) = \left(\frac{r\pi}{l_{x_\gamma}} \right) I_{2,x_\delta}^{H(E)}(p, r, t) + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\gamma}} \right) I_{2,y_\delta}^{H(E)}(p, r, t) \quad (4.65)$$

El resto de los bloques de la GAM que relacionan puertos ortogonales, esto es, $Y_{p,q}^{(\gamma,\delta)}$ con $\delta > \gamma$, pueden deducirse fácilmente usando la conocida relación de reciprocidad de la estructura bajo estudio y la expresión propuesta en (4.55) para los elementos $Y_{p,q}^{(\delta,\gamma)}$

$$Y_{p,q}^{(\gamma,\delta)} = Y_{q,p}^{(\delta,\gamma)} \quad (4.66)$$

4.6. Ejemplos de aplicación de la unión cúbica con accesos arbitrarios

En esta sección, la nueva formulación propuesta se valida con algunos ejemplos prácticos de gran interés tecnológico. Los primeros ejemplos considerados son uniones T en plano E y en plano H cuyos accesos laterales son guías con esquinas redondeadas de gran radio de curvatura. Después, estas uniones se han conectado adecuadamente a través de su acceso redondeado para construir una nueva estructura de 4 accesos, que puede analizarse fácilmente después de resolver la conexión de las representaciones GAM de cada unión. Los ejemplos previos involucran estructuras que tienen un solo acceso de geometría arbitraria (esto es, guía rectangular con esquinas redondeadas). Para validar completamente la teoría expuesta en la sección anterior, se considerará un último ejemplo: una T-mágica cuyos dos accesos laterales son otra vez guías rectangulares fuertemente perturbadas por esquinas redondeadas. Todos los resultados que se incluyen en esta sección se han comparado satisfactoriamente con medidas de prototipos fabricados.

4.6.1. La unión T con esquinas redondeadas

Los primeros dispositivos considerados en esta sección son uniones T plano E y plano H cuyos accesos laterales son guías rectangulares con esquinas redondeadas, como puede verse en la figura 4.9.

Cuando se analizaron estas estructuras mediante la técnica de segmentación se habló de la utilidad de las mismas como partes fundamentales de diplexores, multiplexores, acopladores direccionales en guía, desfasadores y redes conformadoras de haz. La consideración del efecto “esquinas redondeadas” es de gran interés práctico, ya que aparece en los procesos de fabricación más comunes de los dispositivos mencionados. Si estos efectos de mecanización se tuvieran en cuenta durante la etapa de análisis de las herramientas CAD, se mejoraría enormemente el proceso de diseño en gran número de dispositivos de microondas, tanto en términos de coste como de precisión.

Para calcular los elementos de la GAM de estos dispositivos, pueden emplearse las expresiones obtenidas en la sección previa. Sin embargo, en estos casos (uniones T en plano H y E) se obtendrá una matriz GAM compuesta de 3×3 bloques. Por ejemplo, el caso de la T en plano H puede considerarse como una unión cúbica (ver figura 4.1) con los puertos (4), (5) y (6) terminados en cortocircuito, y con guías rectangulares estándar en los puertos (1) y (2). Por otra parte, el caso de la unión T en plano E puede verse como una estructura muy similar a la anterior, pero ahora los cortocircuitos deberían emplazarse en los puertos (3), (4) y (6) de la unión cúbica general mostrada en la figura 4.1. Estas consideraciones implican una reducción de la representación GAM de 6×6 bloques de la unión general a sendas representaciones GAM de 3×3 bloques. Además, ya que los accesos (1) y (2) en las dos uniones son guías rectangulares que coinciden con las caras de la cavidad, todas las integrales de acoplo relacionadas con tales accesos se reducen a simples integrales de funciones



Figura 4.13. Unión T en plano H en guía WR-90 con acceso lateral redondeado con un radio de curvatura de 4,5 mm.

seno y coseno.

Como ejemplos prácticos de validación se han elegido uniones T en plano E y en plano H en guías WR-90 ($a = 22,86$ mm, $b = 10,16$ mm), cuyos accesos laterales son guías WR-90 con esquinas redondeadas de radio 4,5 mm y una longitud física de 6,25 mm. Una fotografía de la unión T en plano H fabricada puede verse en la figura 4.13.

Con objeto de medir los parámetros de dispersión de las uniones, los brazos redondeados se han terminado con guías estándar WR-90. Los resultados para la simulación del módulo de los parámetros de dispersión de tales estructuras se muestran en la figura 4.14, donde se incluyen las medidas de los dispositivos fabricados. Se puede observar una excelente concordancia entre los resultados de la simulación y las medidas, confirmando la precisión de la teoría descrita en la sección anterior.

Para obtener los resultados de la figura 4.14 han sido necesarios 7 modos en cada acceso, tanto para los accesos rectangulares como para los redondeados. Hay que señalar que la mayor parte del tiempo requerido por la herramienta de análisis para obtener los parámetros de dispersión ha sido invertido en la parte estática del algoritmo, que es la que se ocupa de obtener el espectro modal de las guías arbitrarias. El bucle en frecuencia de dicha herramienta requiere un esfuerzo computacional muy bajo.

A continuación se ha considerado la estructura de 4 puertos obtenida mediante la cone-

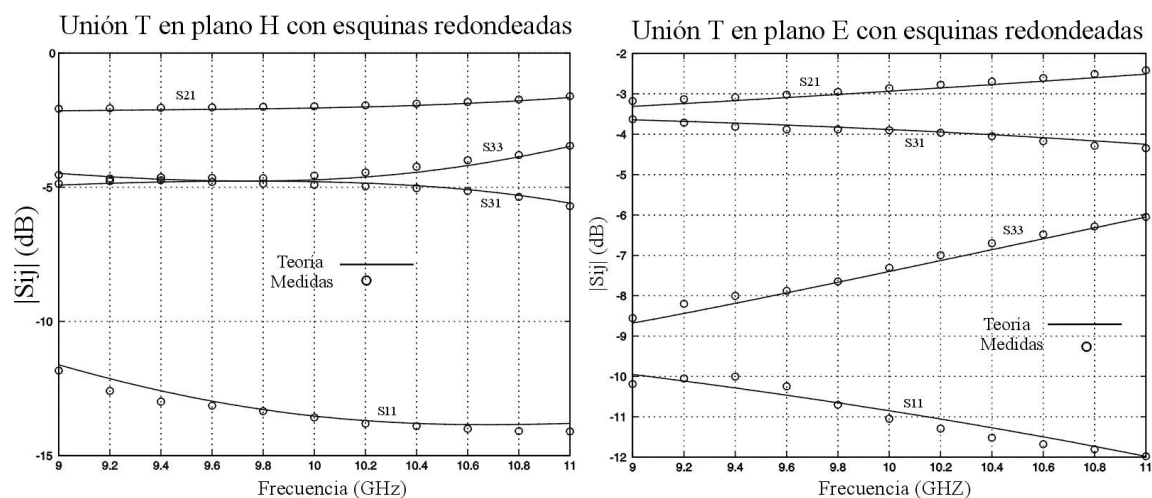


Figura 4.14. Arriba: Módulo de los parámetros de dispersión de una unión T en plano H en guías WR-90 con el acceso lateral redondeado ($R = 4,5$ mm). Abajo: Módulo de los parámetros de dispersión de una unión T en plano E en guías WR-90 con el acceso superior redondeado ($R = 4,5$ mm).

xión de las uniones T en plano E y en plano H anteriores a través de sus respectivos accesos redondeados (en la figura 4.15 se muestran los detalles de la geometría de esta estructura).

Para analizar dicha estructura se ha obtenido la representación GAM de cada unión T por separado, y después se han conectado adecuadamente estas matrices para obtener los parámetros S de la estructura completa. Con el objeto de comprobar la validez de la teoría se han comparado los coeficientes de reflexión y los de transmisión obtenidos tras simular y medir la respuesta de la estructura. Los resultados pueden verse en la figura 4.16, de cuyas gráficas se puede concluir que la caracterización eléctrica de este dispositivo se ha obtenido de forma muy precisa.

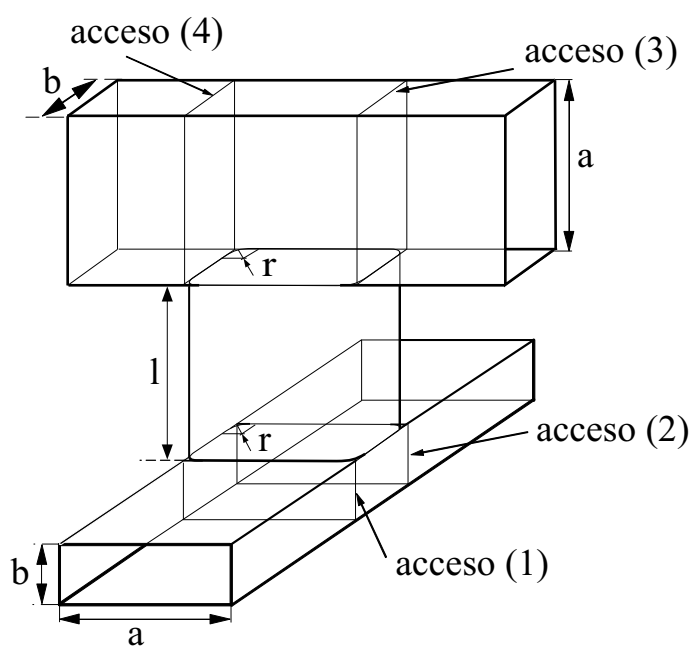


Figura 4.15. Estructura formada por la conexión de una T en plano H y una T en plano E por medio de sus accesos redondeados.

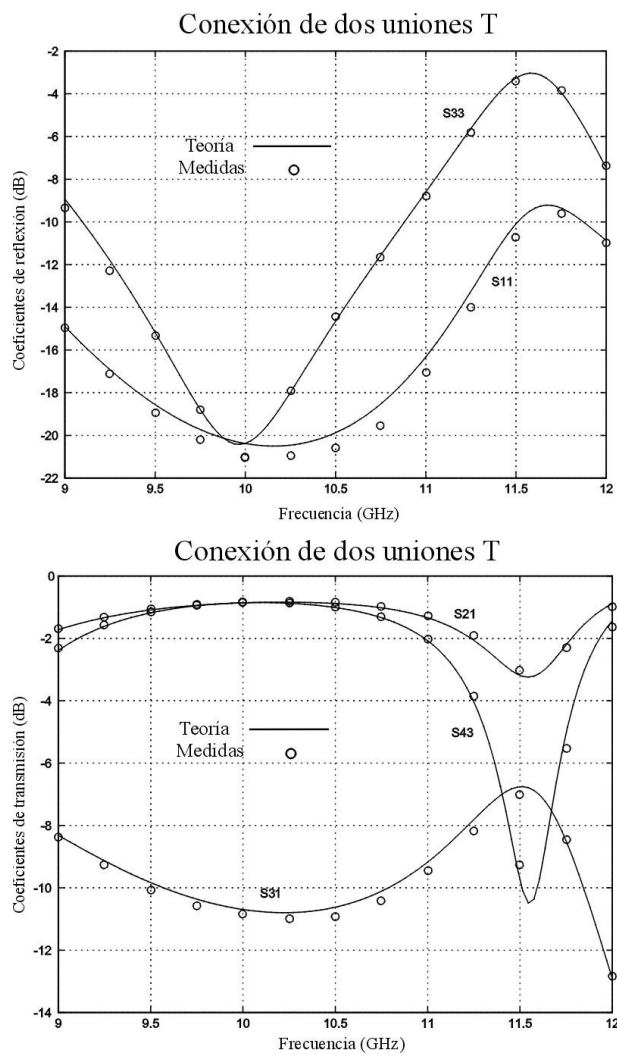


Figura 4.16. Arriba: Módulo de los coeficientes de reflexión de la estructura mostrada en la figura 4.15. Abajo: Módulo de los coeficientes de transmisión de la citada estructura. El radio de curvatura de las dos uniones es de $R = 4,5$ mm.

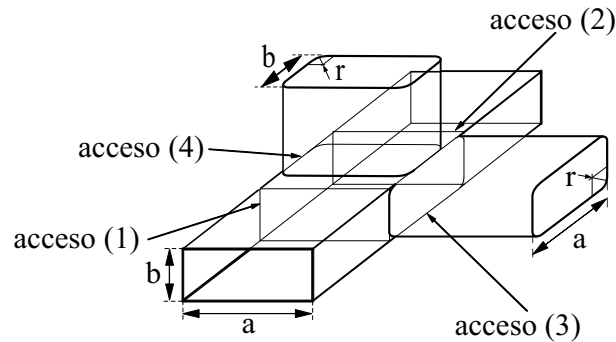


Figura 4.17. Unión T-mágica con dos accesos laterales redondeados.

4.6.2. La T-mágica con esquinas redondeadas

Un avance importante en cuanto a la validación de la teoría expuesta en la sección 4.5 es el análisis de un dispositivo con más de un acceso arbitrario, esto es, la unión T-mágica mostrada en la figura 4.17 cuyos accesos (3) y (4) son guías rectangulares con esquinas redondeadas. Las uniones T-mágica son elementos clave presentes en muchos dispositivos de microondas como, por ejemplo, multiplexores, acopladores, mezcladores y transductores ortomodo. El estudio riguroso de esta unión ha sido objeto de muchos trabajos recientes, como por ejemplo [13], [14], [17] y [20], donde se han propuesto diferentes técnicas para resolver el caso estándar (cuando todos los accesos son guías rectangulares). Sin embargo, el análisis con precisión de uniones T-mágica con esquinas redondeadas en los accesos laterales no se ha presentado aún en ningún trabajo previo.

El análisis de una T-mágica cuyos accesos laterales tienen esquinas redondeadas puede llevarse a cabo siguiendo la teoría explicada en la sección previa. En este caso, la estructura bajo estudio debe considerarse como una unión cúbica general (ver figura 4.1) con los accesos (4) y (6) terminados en cortocircuito, lo que conduce a una representación GAM estructurada en 4×4 bloques. El cálculo de esta matriz requiere el uso de todas las fórmulas incluidas en la sección anterior (para accesos paralelos y ortogonales), ya que la unión T-mágica involucra ambas clases de accesos, (ver figura 4.17).

Con objeto de validar la teoría se ha fabricado una unión T-mágica implementada en guías WR-90 ($a = 22,86$ mm, $b = 10,16$ mm), cuyos accesos laterales son guías rectangulares WR-90 con esquinas redondeadas de radio 4,5 mm y longitud física de 19,57 mm (brazo plano H) y 25,91 mm (brazo plano E). En la figura 4.18 puede verse una fotografía del dispositivo fabricado.

Para medir este dispositivo, los dos accesos perturbados se han terminado en guías WR-90 estándar. Los resultados de la simulación y las medidas para los coeficientes de reflexión y transmisión se muestran en la figura 4.19, donde se observa una excelente concordancia entre los resultados experimentales y teóricos. Aunque no se incluyen resultados para el parámetro S_{43} , debe hacerse notar que se ha observado un nivel de desacoplo teórico de aproximada-

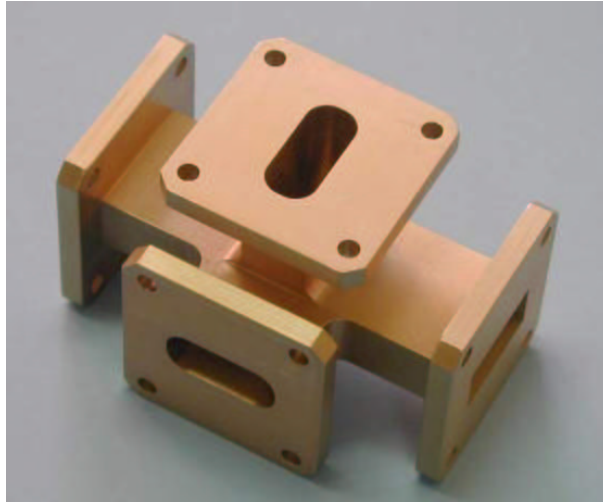


Figura 4.18. Prototipo fabricado de una unión T-mágica con dos accesos laterales redondeados.

mente 200 dB entre tales accesos ortogonales, tal y como cabría esperar en cualquier unión T-mágica.

Los resultados de la simulación que aparecen en la figura 4.19 se han obtenido usando 40 modos en cada acceso. En este caso, debido al mayor número de modos que se requieren en comparación con los ejemplos anteriores, el tiempo de computación asociado a la parte dinámica del programa de análisis ha sido superior que el los ejemplos mostrados con anterioridad. Este número de modos mayor ha sido necesario para poder obtener resultados convergentes.

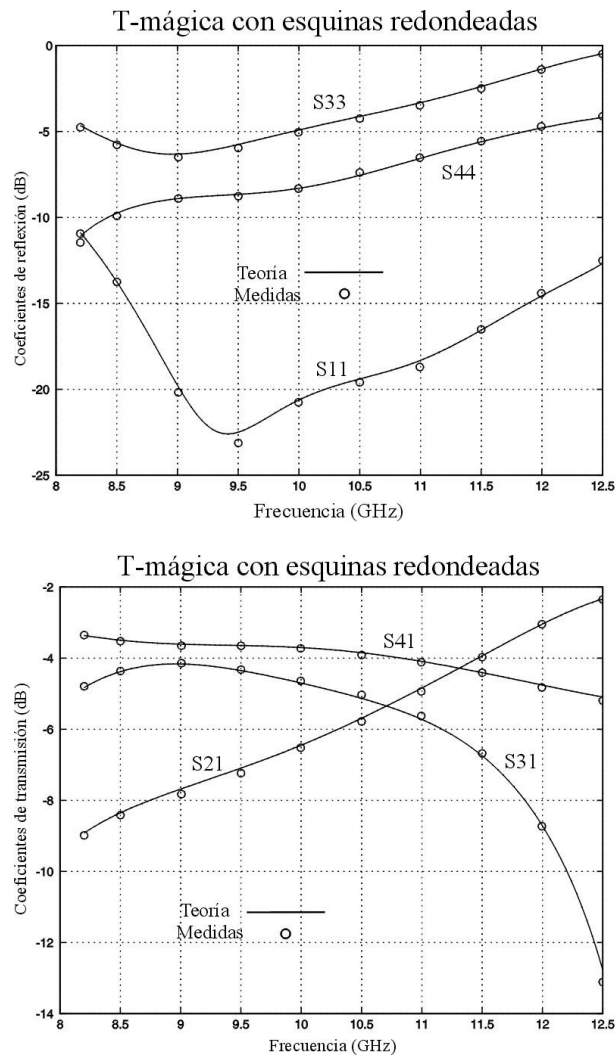


Figura 4.19. Arriba: Módulo de los coeficientes de reflexión de la T-mágica mostrada en la figura 4.18. Abajo: Módulo de los coeficientes de transmisión de la citada estructura. El radio de curvatura de los dos accesos es de $R = 4,5$ mm.

4.7. Conclusiones

En este capítulo se han propuesto dos técnicas para obtener una caracterización de una unión cúbica general con accesos de sección transversal arbitraria.

La primera de ellas se basa en la estrategia clásica de segmentación de la estructura original en módulos más simples. En el marco de esta primera técnica se ha desarrollado un nuevo método para la conexión de las diversas matrices involucradas, con el cual no es necesario realizar inversiones intermedias de dichas matrices para caracterizar el dispositivo bajo análisis. Este nuevo método se basa en una elección adecuada de las incógnitas del problema que conduce a un sistema de ecuaciones estable.

La última técnica propuesta es un método directo que requiere una formulación ligeramente más compleja, pero que genera directamente una matriz GAM (sin ningún tipo de inversiones) de la estructura total. Esta técnica, basada en el método BI-RME, permite obtener expresiones completamente analíticas para los elementos de la GAM, que son esencialmente independientes de la frecuencia. Además, se han dedicado importantes esfuerzos a mejorar la eficiencia numérica relacionada con el cálculo de tales elementos de la GAM. Siguiendo esta última técnica se obtiene directamente la representación GAM de la unión cúbica general, lo que incrementa la estabilidad y la precisión de los resultados finalmente obtenidos.

Para validar completamente estas 2 técnicas de análisis se han mostrado diversos ejemplos que confirman la validez de ambas técnicas. Estos ejemplos se han revelado de gran interés tecnológico, debido a que los procesos de fabricación de dispositivos en guía suelen introducir esquinas redondeadas en las estructuras que contienen ángulos rectos. Finalmente, se han fabricado prototipos de estas estructuras para comparar los parámetros reales con los que proporciona la teoría desarrollada. El resultado ha sido excelente en cuanto a precisión, estabilidad numérica y velocidad computacional.

4.8. Series relacionadas con el cálculo de los elementos de la GAM para puertos paralelos

Para calcular los bloques $Y_{p,q}^{(\delta,\delta)}$, con $\delta = 1, 2, \dots, 6$, se deben sumar las siguientes series analíticamente

$$S_1^{(\delta)}(r, s) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu \varepsilon \left(\frac{\epsilon_t}{l_{z_\delta}}\right) \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}}\right)^2}{\left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}}\right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon\right] \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}}\right)^2\right]}$$

$$S_2^{(\delta)}(r, s) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\epsilon_t}{l_{z_\delta}}\right)}{\left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}}\right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon\right]}$$

$$S_3^{(\delta)}(r, s) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\epsilon_t}{l_{z_\delta}}\right)}{\left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}}\right)^2\right]}$$

donde la longitud l_{z_δ} tiene los siguientes valores para los diferentes accesos (δ) de la estructura bajo consideración

$$l_{z_1} = l_{z_2} = c \qquad l_{z_3} = l_{z_4} = a \qquad l_{z_5} = l_{z_6} = b$$

Usando las fórmulas recogidas en [23], pueden deducirse las siguientes expresiones analíticas para las series anteriores

$$S_1^{(\delta)}(r, s) = \begin{cases} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 \right]^{1/2} \coth \left(l_{z_\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\ - \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right]^{1/2} \coth \left(l_{z_\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right]^{1/2} \right) \\ \text{si } \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 \right] > \omega^2 \mu \varepsilon \\ \\ \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 \right]^{1/2} \coth \left(l_{z_\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\ - \left[\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 - \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 \right]^{1/2} \cot \left(l_{z_\delta} \left[\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 - \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 \right]^{1/2} \right) \\ \text{si } \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}}\right)^2 \right] < \omega^2 \mu \varepsilon \end{cases}$$

$$S_2^{(\delta)}(r, s) = \begin{cases} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right]^{-1/2} \coth \left(l_{z_\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right]^{1/2} \right) \\ \quad \text{si } \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right] > \omega^2 \mu \varepsilon \\ - \left[\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 - \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} \cot \left(l_{z_\delta} \left[\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 - \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \\ \quad \text{si } \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right] < \omega^2 \mu \varepsilon \end{cases}$$

$$S_3^{(\delta)}(r, s) = \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} \coth \left(l_{z_\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \right)$$

Con respecto al cálculo de los bloques $Y_{p,q}^{(\delta+1,\delta)}$ e $Y_{p,q}^{(\delta,\delta+1)}$, con $\delta = 1, 3$ y 5 , se deben sumar las siguientes series

$$S_4^{(\delta)}(r, s) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t \omega^2 \mu \varepsilon \left(\frac{\varepsilon t}{l_{z_\delta}} \right) \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}} \right)^2}{\left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right] \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}} \right)^2 \right]}$$

$$S_5^{(\delta)}(r, s) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \left(\frac{\varepsilon t}{l_{z_\delta}} \right)}{\left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}} \right)^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \right]}$$

$$S_6^{(\delta)}(r, s) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \left(\frac{\varepsilon t}{l_{z_\delta}} \right)}{\left[\left(\frac{r\pi}{l_{x_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y_\delta}} \right)^2 + \left(\frac{t\pi}{l_{z_\delta}} \right)^2 \right]}$$

Después de usar las correspondientes fórmulas de [23], las series mencionadas pueden

sumarse analíticamente y expresarse de forma compacta como sigue

$$S_4^{(\delta)}(r, s) = \begin{cases} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \operatorname{cosech} \left(l_{z\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\ - \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right]^{1/2} \operatorname{cosech} \left(l_{z\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right]^{1/2} \right) \\ \text{si } \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right] > \omega^2 \mu \varepsilon \\ \\ \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \operatorname{cosech} \left(l_{z\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\ - \left[\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 - \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \operatorname{cosec} \left(l_{z\delta} \left[\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 - \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \\ \text{si } \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right] < \omega^2 \mu \varepsilon \end{cases}$$

$$S_5^{(\delta)}(r, s) = \begin{cases} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right]^{-1/2} \operatorname{cosech} \left(l_{z\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right]^{1/2} \right) \\ \text{si } \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right] > \omega^2 \mu \varepsilon \\ \\ - \left[\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 - \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} \operatorname{cosec} \left(l_{z\delta} \left[\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 - \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \\ \text{si } \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right] < \omega^2 \mu \varepsilon \end{cases}$$

$$S_6^{(\delta)}(r, s) = \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{-1/2} \operatorname{cosech} \left(l_{z\delta} \left[\left(\frac{r\pi}{l_{x\delta}} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l_{y\delta}} \right)^2 \right]^{1/2} \right)$$

Bibliografía

- [1] C. Kudsia, R. Cameron, and W.-C. Tang, “Innovations in microwave filters and multiplexing networks for communications satellite systems,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, pp. 1133–1194, June 1992.
- [2] G. Conciauro, M. Guglielmi, and M. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis - CAD Techniques for Waveguide Components and Filters*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [3] V. E. Boria, M. Guglielmi, and P. Arcioni, “Accurate CAD of dual mode filters in circular waveguide including tuning elements,” *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp.*, pp. 1575–1578, June 1997.
- [4] F. Arndt, R. Beyer, J. Reiter, T. Sieverding, and T. Wolf, “Automated design of waveguide components using hybrid mode-matching/numerical EM building-blocks in optimization-oriented cad frameworks—state-of-the-art and recent advances,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, pp. 747–760, May 1997.
- [5] G. Matthaei, L. Young, and E. M. T. Jones, *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures*. McGraw-Hill, 1964.
- [6] T. Sieverding, U. Papziner, and F. Arndt, “Mode-matching CAD of rectangular or circular multiaperture narrow-wall couplers,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, pp. 1034–1040, July 1997.
- [7] F. Alessandri, G. Bartolucci, and R. Sorrentino, “Admittance matrix formulation of waveguide discontinuity problems: Computer-aided design of branch guide directional couplers,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 36, pp. 394–403, February 1988.
- [8] F. Alessandri, M. Mongiardo, and R. Sorrentino, “Computer-Aided Design of beam forming networks for modern satellite antennas,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, pp. 1117–1127, June 1992.

- [9] F. Alessandri, M. Mongiardo, and R. Sorrentino, "A technique for the fullwave automatic synthesis of waveguide components: application to fixed phase shifters," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, pp. 1484–1495, July 1992.
- [10] C. G. Montgomery, R. H. Dicke, and E. M. Purcell, *Principles of Microwave Circuits*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- [11] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*. London, UK: Peter Peregrinus Ltd., IEE Electromagnetic Waves Series 21, 1986.
- [12] E. D. Sharp, "An exact calculation for a T-junction of rectangular waveguides having arbitrary cross sections," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 15, pp. 109–116, February 1967.
- [13] J. M. Rebolgar, J. Esteban, and J. E. Page, "Fullwave analysis of three and four-port rectangular waveguide junctions," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, pp. 256–263, February 1994.
- [14] V. E. Boria and M. Guglielmi, "Efficient admittance matrix representation of a cubic junction of rectangular waveguides," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp.*, vol. 3, pp. 1751–1754, June 1998.
- [15] K. Kurokawa, *An introduction to the theory of microwave circuits*. New York and London: Academic Press, 1969.
- [16] T. Sieverding and F. Arndt, "Field theoretic CAD of open or aperture matched t-junction coupled rectangular waveguide structures," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, pp. 353–362, February 1992.
- [17] T. Sieverding and F. Arndt, "Modal analysis of the magic tee," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 3, pp. 150–152, May 1993.
- [18] T. Sieverding and F. Arndt, "Rigorous analysis of the rectangular waveguide six-port cross junction," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 3, pp. 224–226, July 1993.
- [19] W. Wessel, T. Sieverding, and F. Arndt, "Mode-matching analysis of general waveguide multiport junctions," *MTT-S International Microwave Symposium Digest*, vol. 3, pp. 1273–1276, June 1999.
- [20] M. Bozzi, M. Bressan, and L. Perregrini, "Generalized Y-matrix of arbitrary 3D waveguide junctions by the BI-RME method," *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, vol. 3, pp. 1269–1272, June 1999.

-
- [21] R. Bungler and F. Arndt, "Moment-method analysis of arbitrary 3-D metallic N-Port waveguide structures," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, pp. 531–537, April 2000.
- [22] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE Press, second ed., 1991.
- [23] F. Oberhettinger, *Fourier Expansions - A Collection of Formulas*. New York and London: Academic Press, 1973.
- [24] P. Arcioni, "Fast evaluation of modal coupling coefficients of waveguide step discontinuities," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 6, pp. 232–234, June 1996.

Capítulo 5

Análisis y diseño de filtros inductivos en guía rectangular con esquinas redondeadas

5.1. Introducción

Las actuales técnicas de fabricación de dispositivos en guía rectangular¹ introducen internamente esquinas redondeadas cuando estos procesos son de bajo coste, debido a que en la práctica resulta complicado, y por tanto costoso económicamente, realizar ángulos rectos [1]. Si este efecto de mecanizado pudiera considerarse de forma rigurosa en los programas de análisis de las herramientas de diseño asistido por ordenador (en inglés *Computer Aided Design*, CAD), la fabricación de tales dispositivos podría mejorarse enormemente en términos de precisión, costes y tiempos de desarrollo. La presencia de esquinas redondeadas en filtros de guías rectangulares ha sido un tema ampliamente estudiado en la literatura siguiendo diferentes técnicas de análisis. Así pues, en [2] se propone una primera aproximación con adaptación modal (en inglés *mode-matching*) que emplea un modelo escalonado para simular el efecto de la curvatura. Para mejorar la precisión de tal aproximación se pueden emplear métodos híbridos que combinan de forma adecuada técnicas numéricas (discretización espacial) y técnicas modales. Por ejemplo, son métodos híbridos el método riguroso que combina adaptación modal y elementos de contorno (en inglés *Boundary Contour Mode-Matching*, BCMM) descrito en [3] o el método de integral de contorno y expansión modal resonante (en inglés *Boundary Integral-Resonant Mode Expansion*, BI-RME) formulado inicialmente en [4] para cavidades arbitrarias 3D y, tras algunas mejoras, particularizado en [5] al caso de filtros con redondeces en el plano E.

En este capítulo se estudiarán filtros inductivos en guía rectangular con esquinas redon-

¹Fresado controlado por ordenador (=computer controlled milling), electroerosión de bajo coste (=spark-eroding), electroformado(=electro-forming) o troquelado(=die casting).

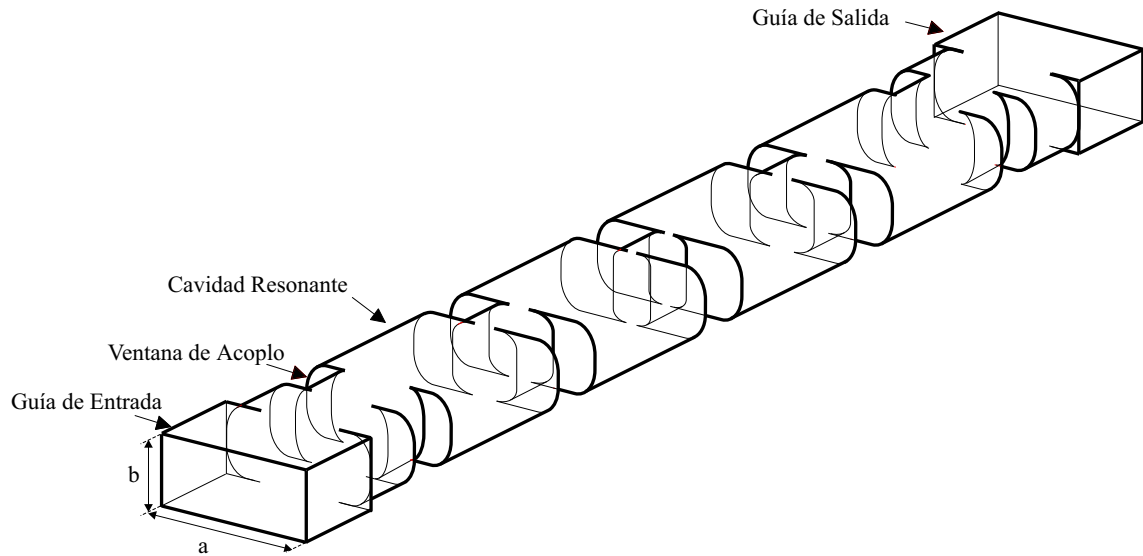


Figura 5.1. Filtro inductivo en guía rectangular con esquinas redondeadas en la sección transversal de las guías.

deadas en la sección transversal de las guías (ver figura 5.1), que constituye un caso práctico de efectos de mecanización que todavía no ha sido considerado por la comunidad científica. Para el análisis de este tipo de dispositivos se ha implementado una técnica híbrida basada en la técnica de la ecuación integral descrita en el capítulo 3 y el método BI-RME propuesto en [6] y [7] para contornos arbitrarios 2D. No obstante, se ha mejorado dicha versión original del método BI-RME como se explica en el capítulo 2 para así obtener la carta modal de las guías redondeadas de manera muy precisa y, por tanto, poder analizar de forma más rigurosa este tipo de estructuras. La nueva técnica de análisis se ha verificado inicialmente con el estudio de diferentes tipos de transiciones planares e iris que involucran esquinas redondeadas. La siguiente etapa ha sido el estudio del efecto que supone variar el radio de las esquinas redondeadas en la respuesta paso banda de un filtro inductivo. Finalmente, el método de análisis propuesto ha sido integrado en una herramienta CAD, y se ha diseñado de forma automatizada un filtro inductivo con esquinas redondeadas empleando la técnica del mapeado espacial agresivo (en inglés *Aggressive Space Mapping*, ASM) propuesta en [8].

5.2. Principales métodos de fabricación

De los métodos de bajo coste que se emplean actualmente para la fabricación de filtros inductivos en guía rectangular destacan principalmente dos de ellos, que denominaremos “corte en plano H” y “corte en plano E”. La filosofía es en ambas técnicas la misma: dividir la pieza en dos partes y así poder erosionar y dar forma al interior del filtro con la mayor comodidad posible. Si la producción es de bajo coste, la forma interior del filtro se suele

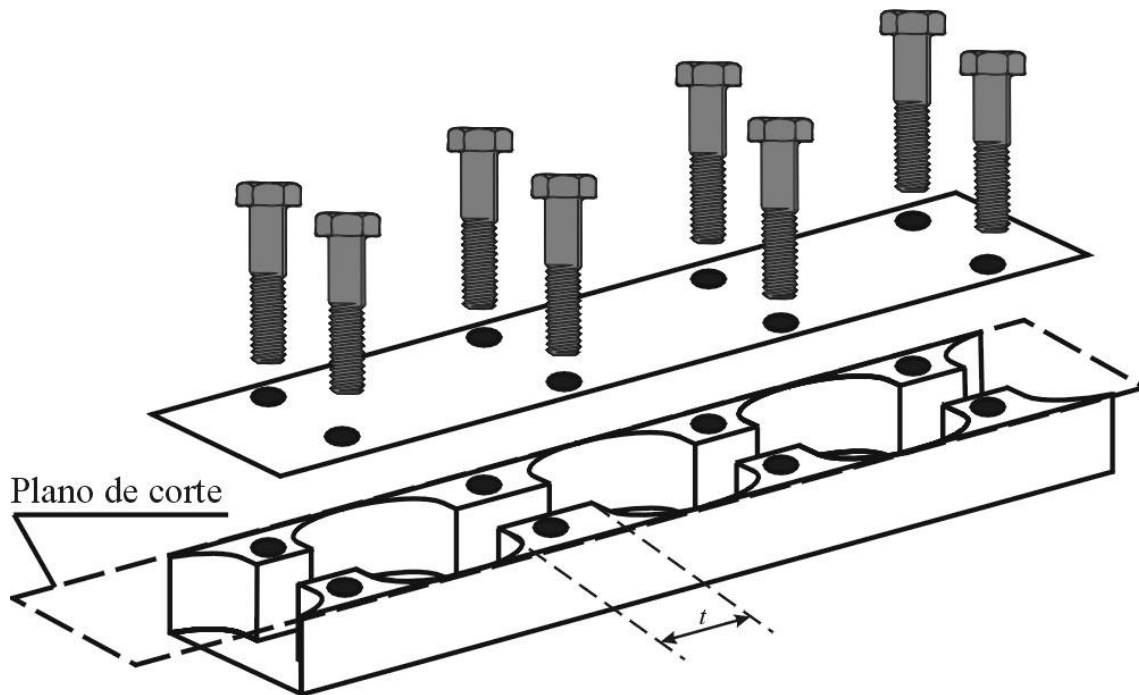


Figura 5.2. Filtro inductivo en guía rectangular fabricado con la técnica de corte en plano H.

obtener empleando una fresa, lo que supone la aparición de esquinas redondeadas cuyo tamaño depende del diámetro de la fresa [2]. Veremos a continuación las principales ventajas e inconvenientes de cada uno de estos métodos de fabricación, y finalmente se propondrá una nueva técnica que supere las desventajas asociadas a los métodos actuales.

5.2.1. Corte en plano H

Este tipo de proceso de fabricación consiste en cortar la pieza en una lámina superior que después se atornillará a la otra pieza donde se habrá modelado el interior del filtro con las dimensiones propuestas. En la figura 5.2 puede verse la estructura en dos piezas y cómo se unen finalmente para dar forma al filtro. La principal ventaja de este proceso de fabricación es la facilidad del modelado del interior del filtro, así como la posterior unión de las dos piezas resultantes.

Como puede observarse en la figura 5.2, esta técnica de fabricación introduce esquinas redondeadas en el plano H del filtro. Se ha comprobado que en este caso el radio de curvatura (R) de las esquinas redondeadas tienen una fuerte influencia en la respuesta del dispositivo.

Otro problema de este método de fabricación está asociado a las altas pérdidas que normalmente presenta la estructura las cuales son debidas a que el plano de corte interrumpe completamente la continuidad de la corriente eléctrica presente en la pared superior del fil-

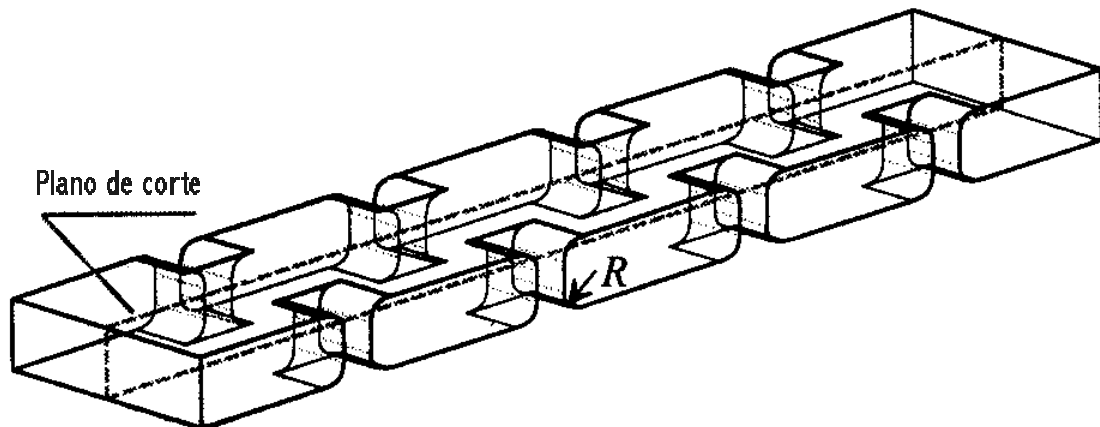


Figura 5.3. Técnica de corte en plano E.

tro. Para minimizar este efecto la tapa superior debe atornillarse lo mejor posible al cuerpo del filtro.

Finalmente, la longitud de las ventanas de acoplo t señaladas en la figura 5.2 se aprovechan para colocar los tornillos que se encargan de sujetar la tapa al resto del filtro. Para que dicha sujeción sea lo suficientemente efectiva (ver párrafo anterior), los tornillos de ajuste deben tener un diámetro igual o superior a 3 mm. El problema radica en que a altas frecuencias (por ejemplo en banda X: 8 – 12 GHz), las ventanas de acoplo obtenidas en el proceso de diseño son de longitud menor (típicamente 2 mm) y ello impide colocar con facilidad los tornillos aprovechando ese espacio. Este problema se acrecienta a medida que se trabaja a frecuencias más elevadas, tendencia presente en la mayoría de aplicaciones prácticas (por ejemplo el sector espacial) donde se emplea esta tecnología.

5.2.2. Corte en plano E

En la figura 5.3 se muestra este segundo método de fabricación. Las principales ventajas sobre el método anterior resultan obvias: las dos piezas son simétricas y el plano de corte no produce efectos tan perniciosos en cuanto a pérdidas y respuesta en frecuencia del filtro.

Hasta hoy en día este tipo de filtros es analizado en [5] usando el método BI-RME mejorado para cavidades. Este método de análisis resulta complejo y, dependiendo de la estructura, puede requerir un tiempo de computación bastante elevado. En [9] se analiza esta estructura con elementos finitos en 2D, pero hay que suponer una aproximación escalonada de la curvatura de los filtros y aplicar los métodos adecuados (autovalores de matrices tridiagonales y descomposiciones de Cholesky utilizando el algoritmo de mínimo grado) revisados en [1]. Por tanto, la precisión de los resultados de esta técnica vendrá determinada por el número de discretizaciones que se realicen en la parte curva del filtro. En definitiva, el análisis de esta estructura requiere de métodos complejos y no excesivamente veloces, por

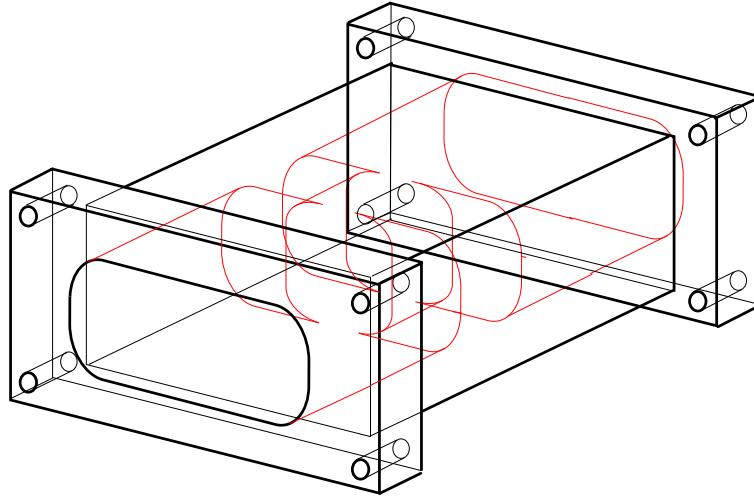


Figura 5.4. Piezas individuales de un filtro inductivo.

lo que su diseño mediante herramientas CAD no parece muy factible en la actualidad.

5.2.3. Nueva técnica de fabricación

Para superar los inconvenientes de las técnicas anteriores se propone una nueva técnica de fabricación modular. El filtro se construye a base de piezas individuales como las mostradas en la figura 5.4.

El límite de las piezas se define justo el centro de cada cavidad del filtro, y por tanto cada pieza consta de dos medias cavidades y una ventana de acoplo. La razón de cortar las piezas en el centro de cada cavidad es la de minimizar posibles discontinuidades en las corrientes superficiales de la estructura. Si cada cavidad del filtro se considera como una línea de transmisión uniforme y las ventanas de acoplo como cortocircuitos virtuales², tenemos una línea de transmisión terminada en paredes eléctricas. Suponemos pues una línea cuya sección transversal está contenida en el plano XY y la dirección de propagación es según el eje z . La tensión en la línea de transmisión viene dada por:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \quad (5.1)$$

Si tenemos un cortocircuito en $z = 0$ obtenemos:

$$V(z = 0) = 0 = V^+ + V^- \Rightarrow V^- = -V^+ \quad (5.2)$$

Si además consideramos la presencia del cortocircuito en $z = L$ (L longitud de la cavidad), así como que el modo fundamental se propaga por el interior de la cavidad ($\gamma = j\beta$),

²En un filtro las ventanas de acoplo son lo suficientemente estrechas para no dejar propagarse ningún modo, y por tanto todos los modos incluido el fundamental están al corte.

se tiene finalmente

$$\begin{aligned} V(z = L) &= V^+ e^{-j\beta L} - V^+ e^{j\beta L} = -j2V^+ \operatorname{sen}(\beta L) = 0 \\ \Rightarrow L &= n \frac{\lambda_g}{2} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (5.3)$$

En nuestro caso, para el modo fundamental, la longitud L de la cavidad debe ser igual a $\lambda_g/2$ ($n = 1$). Esto significa que el campo eléctrico transversal \mathbf{E}_t es nulo en $z = 0$ y en $z = L$ ($L = \lambda_g/2$). Siguiendo el razonamiento de teoría de líneas de transmisión, se concluye que en la mitad de la cavidad ($\lambda_g/4$) se puede asumir una pared magnética (circuito abierto) sin que se alteren las condiciones de contorno para los campos, pues en el interior de la cavidad se tiene una onda estacionaria. En una pared magnética los campos magnéticos son normales a ella, y por tanto:

$$\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{H} = 0 \quad (5.4)$$

donde $\hat{\mathbf{m}}$ es el vector normal a la pared magnética (en nuestro caso $\hat{\mathbf{m}}$ tiene la dirección de $\hat{\mathbf{z}}$). Así pues, en los planos de corte que son definidos por cada pieza individual ($z = \lambda_g/4$), el campo magnético tendrá siempre dirección normal a la pared magnética citada, y será del tipo $\mathbf{H} = H_z \hat{\mathbf{z}}$.

Seguidamente, se determinará el aspecto de las corrientes inducidas sobre el plano de corte. Para ello se debe evaluar $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$ donde $\hat{\mathbf{n}}$ representa la normal a las paredes de la guía, que en todo momento será perpendicular a la dirección de propagación (ver figura 5.5). Por ello, $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$ nunca tendrá componente en $\hat{\mathbf{z}}$, y por tanto la corriente rodeará a la guía (será paralela al plano de corte pero nunca lo cruzará). Así pues, el plano de corte no provoca interrupción alguna sobre las líneas de corriente, y por tanto las pérdidas debidas a este hecho pueden considerarse despreciables³.

En la figura 5.6 se muestra un filtro inductivo de 4 cavidades con la ubicación de sus respectivos planos de corte. Como se puede observar en la figura 5.6, y debido al proceso de fabricación de las piezas mostradas en la figura 5.4, las esquinas redondeadas se producen en este caso en la sección transversal de las guías, es decir, ni en el plano E ni en el plano H como en las anteriores técnicas de fabricación.

Con esta técnica se producen pues esquinas redondeadas tanto en las cavidades como en las ventanas de acoplo, pero se verá en los próximos apartados esto no supondrá un gran problema durante el proceso de diseño de la estructura. Esto se debe a que durante dicho proceso se mantendrá siempre constante el radio de curvatura de las ventanas y cavidades (determinado por las tolerancias del proceso de mecanizado), y solamente se optimizarán las longitudes de las cavidades y de las ventanas de acoplo inductivo.

³En la práctica, las ventanas de acoplo no son iguales a ambos lados de la cavidad, y además la longitud de la cavidad no es exactamente $\lambda_g/2$ (suele ser algo inferior debido al modelo de red ideal constituido por inversores y resonadores). Por ello, en la realidad la pared magnética no está ubicada físicamente en el centro de la cavidad, y al cortar en dichos planos no se está haciendo donde se debiera (lo que supondrá en la realidad la aparición de pérdidas).

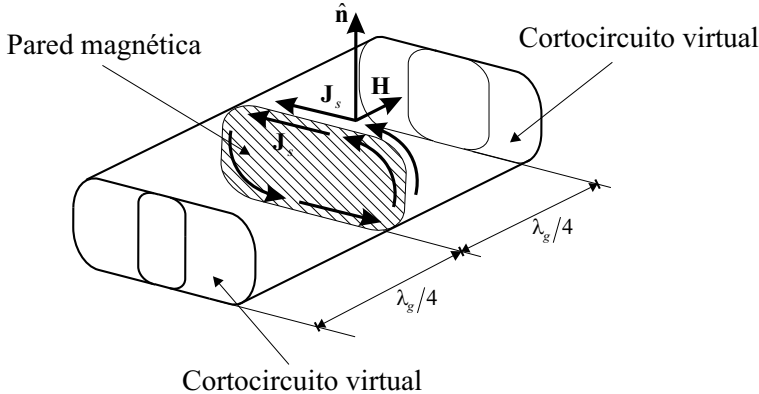


Figura 5.5. Plano de corte de una cavidad del filtro y distribución de la corriente superficial en dicho plano.

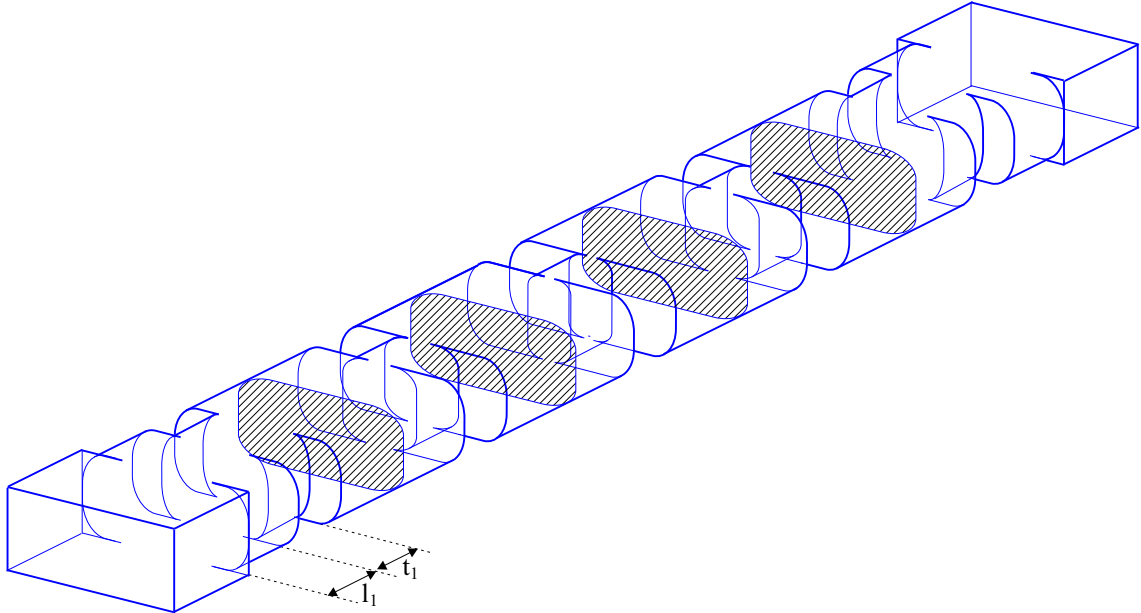


Figura 5.6. Planos de corte del filtro inductivo.

Tal como se explicará posteriormente, el punto clave que permite la utilidad práctica de esta técnica consiste en realizar un diseño previo en el que se tiene en cuenta una primera aproximación del filtro considerando un radio de curvatura finito. Estos resultados preliminares se utilizan seguidamente en un proceso de optimización que mantiene fijos los parámetros⁴ que provocarían una simulaciones costosas si fueran alterados. De esta forma, el procedimiento de diseño de estas estructuras puede implementarse eficientemente mediante herramientas CAD.

5.3. Técnica de análisis

En esta sección se va a tratar en tres apartados el proceso de análisis de un filtro con las características mencionadas anteriormente. Para ello se tratará en primera instancia del análisis de guías con esquinas redondeadas, primer paso necesario para, seguidamente, analizar transiciones planares de diferentes guías con sección transversal redondeada. El paso final será analizar el filtro completo formado por tramos de guías con esquinas redondeadas unidas mediante las mencionadas transiciones planares.

5.3.1. Análisis de guías con esquinas redondeadas

Para el análisis modal completo de las guías rectangulares con esquinas redondeadas, presentes en el tipo de filtro bajo análisis, se ha implementado una versión mejorada del método BI-RME propuesto en [6] para caracterizar guías con esquinas redondeadas. La novedad de esta nueva versión del método BI-RME, consiste en la adaptación del método original adaptado a geometrías híbridas definidas por tramos rectos y curvos (porciones de circunferencias). Tal y como se describe con detalle en el capítulo 2, esta nueva técnica permite utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas para definir perturbaciones constituidas por arcos de circunferencias. En la versión original del método BI-RME, dichas perturbaciones se aproximaban mediante la conexión de sucesivos tramos rectos. Así pues, en el caso concreto que nos ocupa, las esquinas redondeadas de las guías rectangulares se modelan mediante arcos de circunferencias de amplitud angular igual a 90° .

La precisión y eficiencia de esta nueva técnica se puso de manifiesto en [10], donde también se mostró una técnica eficiente para dibujar campos electromagnéticos en el interior de guías de sección transversal arbitraria.

5.3.2. Análisis de transiciones entre guías con esquinas redondeadas

Para el análisis de un filtro del tipo que nos ocupa necesitamos, aparte de las frecuencias de corte de los modos de las guías que lo integran, las integrales de acople entre secciones

⁴Estos parámetros son aquellos que involucran a las dimensiones de las secciones transversales de los tramos de guía que componen el filtro.

de guías adyacentes.

En [7] se muestra una técnica muy rápida para resolver eficientemente estas integrales de acoplo utilizando datos previos necesarios en el proceso de obtención de las frecuencias de corte de las guías con esquinas redondeadas. La salvedad es que dicho método sólo muestra cómo calcular las integrales de acoplo entre los modos de una guía con sección transversal arbitraria y los modos de la guía rectangular estándar que la rodea.

Seguidamente, se mostrará cómo utilizar los resultados de [7] para obtener las integrales de acoplo entre modos de 2 guías con secciones transversales arbitrarias.

Sea $\mathbf{e}_m^{(A)}$ el modo m -ésimo correspondiente a la guía con sección transversal arbitraria A (guía grande), que está normalizado respecto a su sección transversal y es además ortogonal al resto de modos de la misma guía:

$$\iint_A \mathbf{e}_m^{(A)} \cdot \mathbf{e}_r^{(A)} ds = \delta_{m,r} \quad (5.5)$$

Este modo puede descomponerse como una serie de modos de la guía rectangular estándar R que rodea a la guía arbitraria:

$$\mathbf{e}_m^{(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{mi} \mathbf{e}_i^{(R)} \quad (5.6)$$

donde

$$\alpha_{mi} = \iint_A \mathbf{e}_m^{(A)} \cdot \mathbf{e}_i^{(R)*} ds = \iint_A \mathbf{e}_i^{(R)} \cdot \mathbf{e}_m^{(A)} ds \quad (5.7)$$

son las integrales de acoplo entre la guía arbitraria grande y la guía rectangular que la rodea. Se ha tenido en cuenta la definición extendida de las integrales de acoplo para el caso complejo general dada en el capítulo 3. Dado que los modos involucrados en la integral anterior son reales debido al desarrollo dado por el método BI-RME, se puede eliminar la conjugación compleja sin ninguna consecuencia. Obsérvese que la integral se define en el área de la guía arbitraria, pues fuera de la misma el vector $\mathbf{e}_m^{(A)}$ presenta un valor nulo.

Para la guía de sección arbitraria menor tenemos unas expresiones análogas. Sea $\mathbf{e}_n^{(a)}$ el modo n -ésimo correspondiente a la guía con sección arbitraria a (guía pequeña), también normalizado respecto a su sección transversal y siendo ortogonal a los restantes modos de la misma guía:

$$\iint_a \mathbf{e}_n^{(a)} \cdot \mathbf{e}_s^{(a)} ds = \delta_{n,s} \quad (5.8)$$

Este modo puede descomponerse en este caso como una serie de modos de la guía rectangular estándar r que rodea a la guía arbitraria pequeña:

$$\mathbf{e}_n^{(a)} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nj} \mathbf{e}_j^{(r)} \quad (5.9)$$

donde

$$\beta_{nj} = \iint_a \mathbf{e}_n^{(a)} \cdot \mathbf{e}_j^{(r)*} ds = \iint_a \mathbf{e}_j^{(r)} \cdot \mathbf{e}_n^{(a)} ds \quad (5.10)$$

son las integrales de acoplo entre la guía arbitraria pequeña y la guía rectangular que la rodea.

Por tanto la expresión para la integral de acoplo entre el modo m -ésimo de la guía de mayor sección transversal arbitraria (A) y el modo n -ésimo de la guía de menor sección transversal arbitraria (a) será:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \iint_a \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{mi} \mathbf{e}_i^{(R)} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nj} \mathbf{e}_j^{(r)} \right) ds \\ &= \iint_r \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{mi} \mathbf{e}_i^{(R)} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nj} \mathbf{e}_j^{(r)} \right) ds \\ &= \iint_r \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{mi} \beta_{nj} \mathbf{e}_i^{(R)} \cdot \mathbf{e}_j^{(r)} ds \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{mi} \beta_{nj} \iint_r \mathbf{e}_i^{(R)} \cdot \mathbf{e}_j^{(r)} ds \end{aligned} \quad (5.11)$$

Así pues, para calcular la integral de acoplo $I_{m,n}$ entre el modo m -ésimo de la guía arbitraria de mayor sección transversal y el modo n -ésimo de la guía arbitraria de menor sección transversal se puede proceder como sigue:

- Calcular las integrales de acoplo (5.7) entre los modos de la guía de mayor sección transversal y la guía rectangular estándar que la rodea por el método descrito en [7].
- Proceder del mismo modo para calcular las integrales de acoplo recogidas en (5.10).
- Calcular las integrales de acoplo entre las dos guías rectangulares, definidas como:

$$\gamma_{ij} = \iint_r \mathbf{e}_i^{(R)} \cdot \mathbf{e}_j^{(r)} \quad \forall i, j \quad (5.12)$$

y cuyas expresiones analíticas se pueden calcular fácilmente⁵.

- Calcular la integral de acoplo correspondiente a los modos deseados utilizando la expresión (5.11):

$$I_{m,n} = \iint_a \mathbf{e}_m^{(A)} \cdot \mathbf{e}_n^{(a)} ds = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{mi} \gamma_{ij} \beta_{nj} \quad (5.13)$$

⁵Recientemente se han publicado en [11].

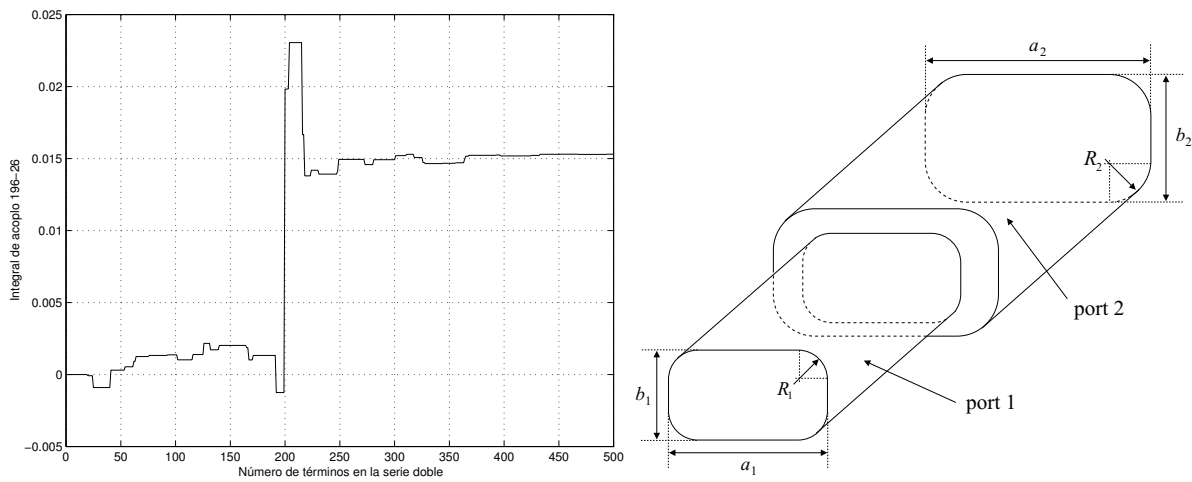


Figura 5.7. Convergencia de la integral de acoplo $I_{196,26}$ (modo 196 de la guía grande y modo 26 de la guía pequeña) para la transición entre 2 guías de esquinas redondeadas.

Obviamente, para calcular las series que aparecen en las ecuaciones anteriores será necesario truncar las sumas en un valor tal que garantice resultados convergentes. En la figura 5.7 se muestra el comportamiento típico de este tipo de series para evaluar una integral de acoplo entre modos pertenecientes a las siguientes 2 guías con esquinas redondeadas:

Guía 1: $a_1 = 14,000 \text{ mm}$, $b_1 = 6,000 \text{ mm}$ y $R_1 = 2,7 \text{ mm}$

Guía 2: $a_2 = 15,799 \text{ mm}$, $b_2 = 7,899 \text{ mm}$ y $R_2 = 2,0 \text{ mm}$

Como puede observarse en la figura 5.7, la convergencia se alcanza tras haber sumado cierta cantidad de términos que dependen del orden de los modos involucrados en las guías arbitrarias. Cuanto más elevado sea el orden de los modos considerados en las guías arbitrarias, mayor será el número de términos necesarios para alcanzar la convergencia.

La comprobación de la convergencia de las integrales de acoplo es necesaria para garantizar la precisión en la caracterización numérica de las transiciones. Una vez se obtiene todo el conjunto de integrales de acoplo necesario para caracterizar la transición planar, se genera la matriz de impedancias generalizada (con las correspondientes admitancias asintóticas en paralelo) siguiendo el método de la ecuación integral descrito en el capítulo 3.

Conseguida la matriz de impedancias de la transición, se pueden obtener fácilmente los parámetros S de la estructura. En la figura 5.8 se puede observar la variación de los parámetros S de una transición entre dos guías rectangulares con esquinas redondeadas en función del valor del radio de curvatura. Las dimensiones de las guías consideradas son:

Guía 1: $a_1 = 10,52 \text{ mm}$ y $b_1 = 9,525 \text{ mm}$.

Guía 2: $a_2 = 19,05 \text{ mm}$ y $b_2 = 9,525 \text{ mm}$.

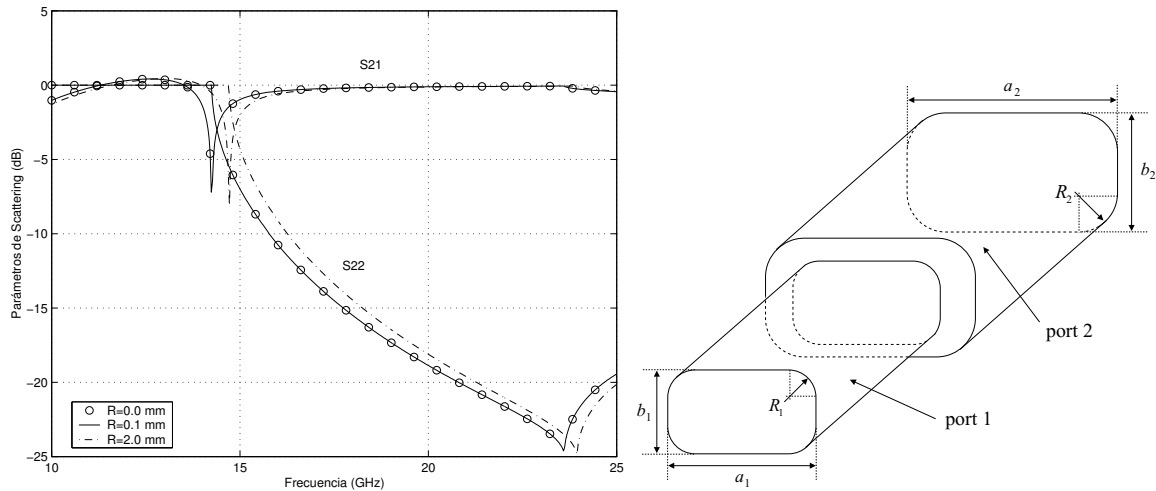


Figura 5.8. Parámetros de scattering de una transición entre dos guías rectangulares con esquinas redondeadas.

Los datos para $R = 0$ mm coinciden con los recogidos en la literatura (ver [12]) para este caso⁶. Como se puede observar, si el radio de curvatura es pequeño ($R = 0,1$ mm) el efecto es despreciable. Para una sola transición esta afirmación es cierta, pero puede dejar de serlo cuando aumenta el número de transiciones de una estructura. En dicho caso, los efectos individuales asociados a cada transición pueden acumularse y degradar de forma importante la respuesta de la estructura global. Para radios de curvatura moderados ($R = 2$ mm), tal y como puede observarse en la figura 5.8, el efecto ya empieza a ser apreciable en una sola transición.

Para finalizar la validación de este método de cálculo de integrales de acoplo, se ha abordado un caso límite: obtener los parámetros de scattering de un iris en guía circular. Debido a que una guía circular se puede considerar como una guía cuadrada de esquinas redondeadas con radio de curvatura igual al de la guía circular, podemos utilizar la herramienta de análisis desarrollada para resolver este caso particular⁷. Las características del iris son:

Guías grandes: $R_1 = 12,74445$ mm.

Iris: $R_2 = 9,525$ mm.

⁶En la figura 5.8 se observa que una curva (parámetro S_{21}) está en un margen de frecuencias por encima de 0 dB. Esto se debe a que en dicho margen de frecuencias la guía menor está al corte y por tanto dicho parámetro de scattering no tiene sentido físico. No obstante, se ha preferido dejar la gráfica entera para que se pueda comparar con las gráficas similares que aparecen en [12], donde también se muestran parámetros de scattering mayores que la unidad.

⁷Remarcar aquí el hecho de que la guía circular produce el máximo error para guías de esquinas redondeadas, porque se utiliza una guía rectangular como guía estándar que rodea a la guía circular, y en este caso no hay ninguna parte común entre los contornos de ambas guías (véase [6]).

Frecuencia de operación: 9 GHz.

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.9, donde se comparan con la técnica de la Conservación de la Potencia Compleja (en inglés *Conservation of Complex Power Technique*, CCPT) desarrollada en [13]. Puede observarse la gran similitud entre los resultados proporcionados por ambos métodos, a pesar de ser tan diferentes conceptualmente. Esta última comparación valida finalmente la técnica propuesta para obtener las integrales de acoplamiento entre guías de sección transversal arbitraria.

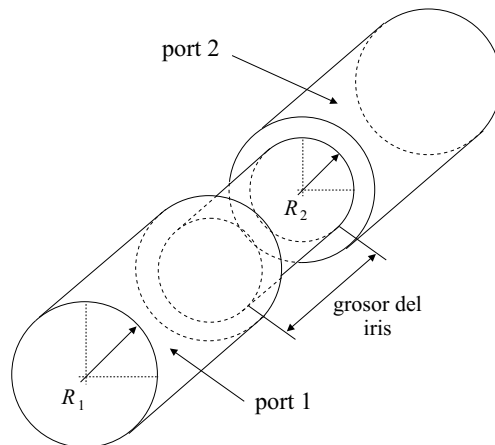
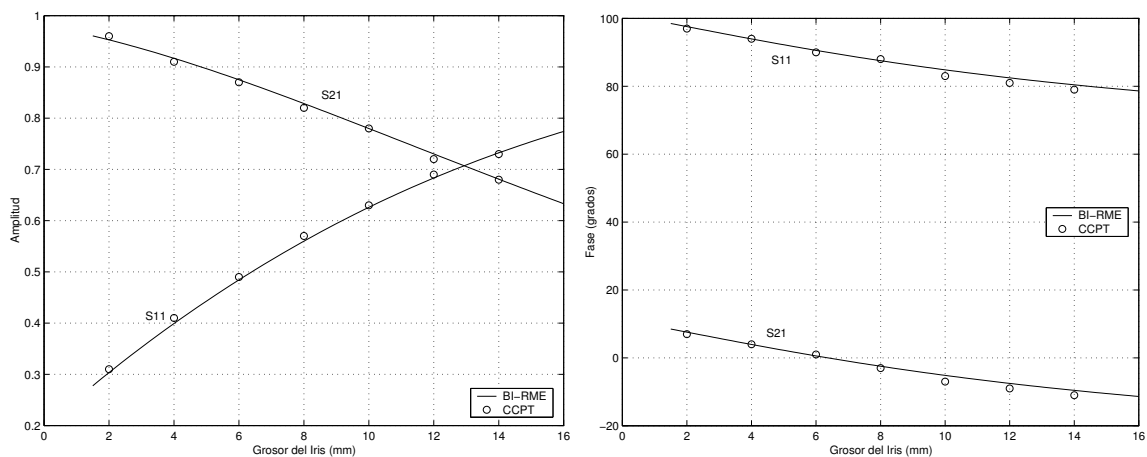


Figura 5.9. Módulo y fase de los parámetros de scattering de un iris circular en función de su grosor.

5.3.3. Análisis de un filtro inductivo con esquinas redondeadas

Una vez comprobada la validez del método de análisis propuesto, tanto con transiciones como con iris, se está en disposición de analizar con la misma técnica un filtro inductivo

constituido por la conexión en cascada de guías con esquinas redondeadas.

En la figura 5.10 se muestra la variación de la respuesta en frecuencia de un filtro inductivo cuando se varía el radio de curvatura de sus esquinas redondeadas. El filtro se diseñó inicialmente para guías rectangulares estándar, y tiene las siguientes características:

Tipo de respuesta: Paso banda tipo Chebyshev con 4 cavidades (4 polos).

Frecuencia central: $f_0 = 11$ GHz.

Ancho de banda: $BW = 300$ MHz.

Guías: WR - 75 $\Rightarrow a = 19,05$ mm $b = 9,525$ mm.

Manteniendo las dimensiones iniciales del filtro, se ha ido variando el radio de curvatura de las esquinas. El resultado se puede observar en la figura 5.10. Al aumentar el radio a 2 mm la respuesta del filtro se ha degradado lo suficiente como para hacerlo inservible. Los parámetros para realizar todas las simulaciones han sido los siguientes:

- Número de modos accesibles: 15.
- Número de modos localizados: 250.
- Número de funciones base: 50.

Debido al hecho de que para analizar rigurosamente este dispositivo se necesita considerar un número muy elevado de modos por cada transición, se han eliminado los modos innecesarios que no se acoplan en la estructura debido a la simetría que presenta. Como la estructura está centrada con respecto al eje de propagación, sólo es necesario considerar las familias de modos $TE_{2m+1, 2n}$ y $TM_{2m+1, 2n}$. La justificación de dicha elección puede encontrarse en el apéndice B. Esto hecho reduce en un factor 4 el número de modos a considerar, lo que reduce considerablemente el tiempo requerido para la simulación precisa de las estructuras que nos ocupan.

5.4. Procedimiento de diseño

Como se puede comprobar en la sección anterior, si se quiere diseñar un filtro inductivo con esquinas redondeadas, habrá que tener en cuenta el radio de curvatura en la etapa de diseño si no se desea obtener una respuesta tan degradada como la que aparece en la figura 5.10.

La primera fase de todo procedimiento de diseño consiste en escoger una estrategia adecuada a la que poder aplicar algoritmos de optimización para alcanzar finalmente el mejor diseño posible. Como estrategia de diseño se propone utilizar el método de segmentación mostrado en [14]. Dicho método consiste en diseñar el filtro cavidad por cavidad. Para ello,

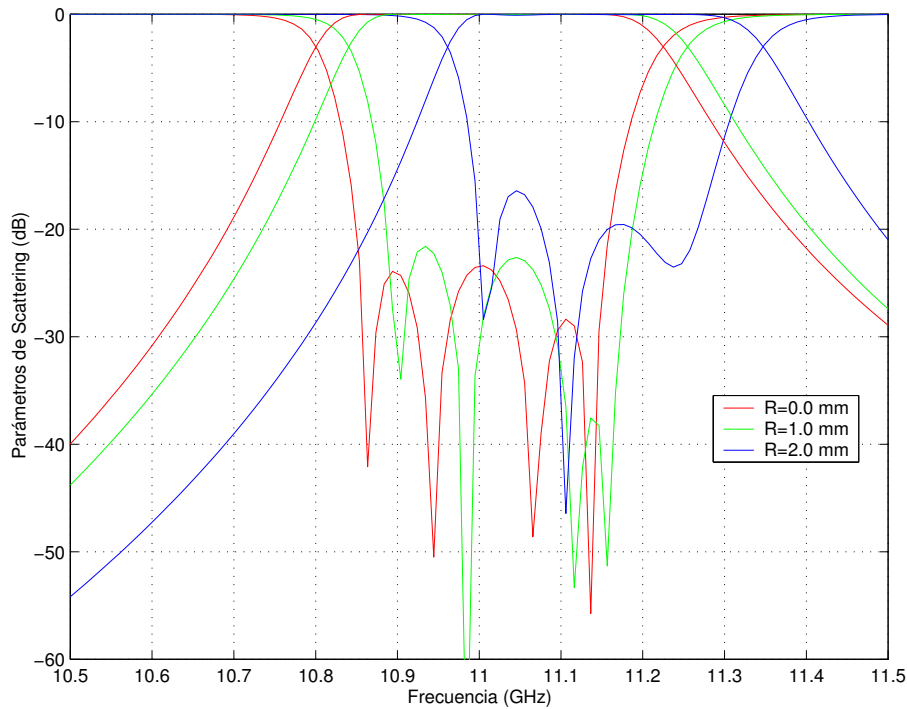


Figura 5.10. Efecto del radio de curvatura de las esquinas redondeadas en la respuesta paso banda de un filtro inductivo realizado en guía WR-75.

se escoge primero una sola cavidad, se ajustan los parámetros correspondientes (longitud de la cavidad y de las ventanas de acoplo de entrada y salida⁸) luego se añade la siguiente cavidad y se optimizan sus parámetros correspondientes, y así se progresa sucesivamente hasta terminar con el filtro completo.

El procedimiento que se ha escogido para optimizar los parámetros de diseño del filtro con esquinas redondeadas ha sido el ASM (en inglés *Aggressive Space Mapping*). El método se describe con detalle en [8], pero básicamente consiste en un proceso de optimización automatizado que requiere dos modelos de análisis, un modelo rápido que tiene el inconveniente de ser poco preciso, y otro muy preciso pero con el inconveniente de ser más lento.

Cada modelo de análisis genera su propio espacio: El modelo rápido genera el espacio llamado de optimización (OS) y el modelo preciso genera el espacio llamado de validación (VS).

Sea $\mathbf{x}_{os} \in \mathbb{C}^m$ un vector complejo en general del espacio de optimización. Sea $\mathbf{x}_{em} \in \mathbb{C}^n$ un vector en el espacio de validación⁹. Se define una función $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ llamada

⁸Para modificar el acoplo introducido por las ventanas de acoplo se puede variar la anchura de las ventanas y/o su longitud. En este caso, se ha decidido modificar sólo la longitud de las ventanas para mantener constante en el proceso de optimización la sección transversal de cada guía.

⁹En las referencias este espacio suele estar generado por un simulador electromagnético que requiere mucho

comúnmente *mapeado*, que es desconocida y que consigue transformar vectores del espacio de validación en vectores del espacio de optimización:

$$\mathbf{x}_{os} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_{em}) \quad (5.14)$$

La idea del mapeado espacial radica en conseguir que la respuesta del simulador rápido a un vector de parámetros sea igual a la respuesta del simulador preciso a cierto vector de parámetros (no tienen por qué ser los mismos parámetros en los dos espacios, si bien en nuestro caso sí lo serán). Es decir:

$$\mathbf{R}_{os}(\mathbf{x}_{os}) \approx \mathbf{R}_{em}(\mathbf{x}_{em}) \quad (5.15)$$

donde las funciones \mathbf{R}_{os} y \mathbf{R}_{em} generan la respuesta del modelo de análisis rápido y preciso, respectivamente, a partir de los correspondientes vectores. En el mapeado agresivo se marca un objetivo ligeramente distinto. Para ello se define una función \mathbf{f} como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{em}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_{em}) - \mathbf{x}_{os}^* \quad (5.16)$$

y el objetivo será conseguir que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{em}) = 0$, para lo cual se debe resolver la ecuación no lineal anterior por un método iterativo quasi-Newton.

El algoritmo para encontrar nuestra solución óptima por el método agresivo ASM, cuyo esquema se recoge de forma gráfica en la figura 5.11, es el siguiente:

1. Conseguir una solución óptima \mathbf{x}_{os}^* con el simulador rápido a partir de una estimación o punto inicial \mathbf{x}_{in} que puede obtenerse mediante un modelo circuital.
2. Con la solución anterior generamos una respuesta $\mathbf{x}_{em}^{(1)}$ en el espacio de validación (normalmente se toma $\mathbf{x}_{em}^1 = \mathbf{x}_{os}^*$).
3. Obtenemos $\mathbf{x}_{os}^{(1)}$ haciendo una extracción de parámetros¹⁰ $\mathbf{x}_{os}^{(1)} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_{em}^{(1)})$.
4. Se calcula en el espacio de optimización la distancia al óptimo comprobando si hemos alcanzado la condición de terminación del algoritmo:

$$\|\mathbf{x}_{os}^{(m)} - \mathbf{x}_{os}^*\| \leq \eta \quad (5.17)$$

es decir, si para cierto $\mathbf{x}_{os}^{(m)}$ la distancia al óptimo no supera un cierto valor umbral η .

tiempo de cálculo para analizar una estructura. De ahí las siglas EM para los subíndices. En nuestro caso, se utilizará la misma herramienta de análisis modal para ambos espacios, si bien en el espacio OS se rebajarán enormemente los requerimientos de precisión (menor número de modos).

¹⁰Esto requiere otros algoritmos de optimización preparados *ex profeso* para este paso. A partir de los parámetros del simulador preciso se debe obtener qué parámetros del simulador rápido nos proporcionarían la misma respuesta que el simulador preciso. Esto se hace ajustando por etapas, como se describe en [14], las longitudes de las cavidades y de las ventanas de acoplo. Los algoritmos de optimización empleados para estos ajustes son una combinación de búsqueda directa y método de gradiente, tal como se indica en [15].

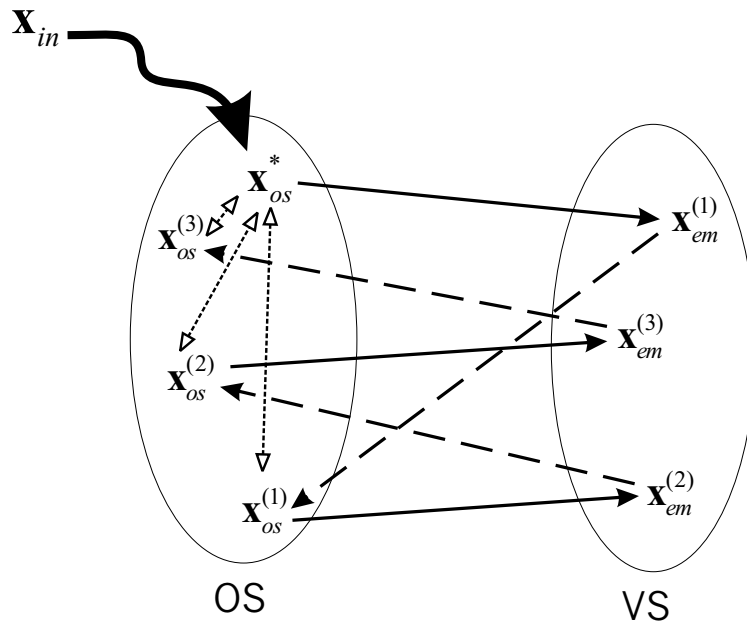


Figura 5.11. Optimización con la técnica ASM. Las flechas continuas indican que a partir de un cierto \mathbf{x}_{os}^i se obtiene, mediante un método de iteración quasi-Newton, un cierto $\mathbf{x}_{em}^{(i+1)}$. Las flechas en trazo discontinuo indican que a partir de un cierto $\mathbf{x}_{em}^{(i)}$ se genera por extracción de parámetros el correspondiente $\mathbf{x}_{os}^{(i)}$. En líneas de puntos se indica la distancia de cada $\mathbf{x}_{os}^{(i)}$ al óptimo $\mathbf{x}_{os}^{(*)}$ en el espacio de optimización, que se utiliza para deducir $\mathbf{x}_{em}^{(i+1)}$.

5. Con un método quasi-Newton generamos, a partir del dato de la distancia al óptimo recién definida, el nuevo punto $\mathbf{x}_{em}^{(2)}$ (e.g. siguiendo el método de Broyden).
6. Volver al punto 3 calculando en este caso $\mathbf{x}_{os}^{(2)}$ a partir de $\mathbf{x}_{em}^{(2)}$.

Este proceso (puntos 3 al 6) continuará hasta que se cumpla la condición (5.17), y la respuesta obtenida tras el proceso de optimización será finalmente $\bar{\mathbf{x}}_{em} = \mathbf{x}_{em}^{(m)}$.

Queda finalmente por resolver la obtención del punto inicial. Es bien sabido que la convergencia de un algoritmo de optimización depende de una buena elección del punto inicial, así como de la velocidad de convergencia del propio algoritmo. Si se elige un punto de partida \mathbf{x}_{in} para el algoritmo que proporcione un valor de $\mathbf{x}_{em}^{(1)}$ (recordemos que $\mathbf{x}_{em}^{(1)} = \mathbf{x}_{os}^{(*)}$) próximo al óptimo en el espacio de validación $\bar{\mathbf{x}}_{em}$, conseguiremos alcanzar este punto final con un número menor de iteraciones. Por ello, es importante encontrar un buen punto de partida \mathbf{x}_{in} para todo el proceso. De todo ello es responsable el modelo circuital que se utilice para representar el filtro cuya respuesta se pretende sintetizar.

Para ello se escoge como circuito ideal que proporciona respuestas paso banda, una red

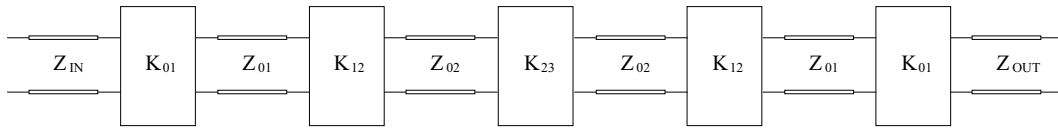


Figura 5.12. Red ideal para un filtro constituida por inversores de impedancia y tramos de líneas de transmisión.

basada en resonadores e inversores de impedancia tal y como se muestra en la figura 5.12. La implementación física de esta red ideal se realizará del siguiente modo:

- Ventanas de acoplo inductivo terminadas en guía para implementar los inversores de impedancia. El objetivo de diseño de estas ventanas consiste en recuperar las constantes de inversión K_{ij} de la red ideal.
- Guías rectangulares con esquinas redondeadas para implementar los tramos de línea de longitud próxima $\lambda_g/2$ presentes en la red ideal. En este caso se utiliza como λ_g el valor correspondiente a una guía con esquinas redondeadas, que se determina utilizando el citado método BI-RME.

5.5. Validación experimental

Como validación experimental de la teoría expuesta en las secciones anteriores, se plantea el diseño de un filtro inductivo cuya respuesta en frecuencia tenga las siguientes características:

Tipo de respuesta: Paso banda tipo Chebyshev con 4 cavidades (4 polos).

Frecuencia central: $f_0 = 11$ GHz.

Ancho de banda: $BW = 300$ MHz.

Guías: WR – 90 $\Rightarrow a = 22,86$ mm $b = 10,16$ mm.

Como modelos de análisis se utilizará la misma herramienta de simulación electromagnética descrita en la sección 5.3, si bien en cada modelo se empleará un número de modos diferente. Así por ejemplo, para el simulador rápido se escogerán 5 modos accesibles y 60 localizados, mientras que para el simulador preciso se utilizarán 15 modos accesibles y 250 localizados. De esta forma se garantiza un buen compromiso entre eficiencia computacional y precisión numérica

Los parámetros de diseño que se han escogido, tal y como se ha comentado previamente, son las longitudes de las cavidades y de las ventanas de acoplo. El radio de curvatura de las esquinas redondeadas de todas las guías se ha fijado igual a 2 mm. Durante todo el proceso

Guía	Anchura	Altura	Curvatura	Longitud
1 ^a (Entrada)	22.86	10.16	0.0	10.000
2 ^a (Redondeada)	22.86	10.16	2.0	4.000
3 ^a (1 ^a Ventana)	10.50	10.16	2.0	1.700
4 ^a (1 ^a Cavidad)	22.86	10.16	2.0	14.290
5 ^a (2 ^a Ventana)	6.70	10.16	2.0	1.770
6 ^a (2 ^a Cavidad)	22.86	10.16	2.0	15.844
7 ^a (3 ^a Ventana)	6.15	10.16	2.0	1.782

Cuadro 5.1. Dimensiones de las guías empleadas en el filtro. El filtro es simétrico y por tanto no se dan los valores a partir de la mitad del filtro. Todas las dimensiones están expresadas en milímetros.

de optimización, se han mantenido constantes las secciones transversales de todas las guías involucradas para de este modo tener tan sólo que invocar el método BI-RME una sola vez (por cada guía diferente que forma la estructura) al inicio del proceso de diseño. Así pues, para ambos simuladores (el rápido y el preciso) la parte estática del algoritmo (que es la más costosa en recursos computacionales) se realiza una sola vez durante todo el proceso de optimización. Por esta razón no se ha escogido como parámetros de optimización las anchuras de las ventanas de acoplo en lugar de las longitudes, ya que cambiar las anchuras hubiera significado cambiar las secciones transversales de las guías y por tanto se hubiera tenido que invocar al método BI-RME varias veces por cada iteración¹¹ del procedimiento ASM.

Aplicando pues el procedimiento de diseño ASM descrito en la sección anterior, se ha diseñado el filtro propuesto en un total de 4 iteraciones. La respuesta electromagnética (parámetros de scattering) del filtro diseñado se recoge en la figura 5.13. En dicha figura se compara la respuesta que se ha obtenido del modelo ideal para el filtro de Chebyshev (cuyas especificaciones se han indicado al principio de esta sección) con la respuesta tras el proceso de optimización dada por el simulador preciso. Como se puede observar, el proceso de optimización ha conseguido una gran similitud entre las curvas dentro de la banda de paso del filtro.

En la tabla 5.1 se recogen todas las dimensiones geométricas del filtro diseñado. Los valores recogidos para las longitudes de las cavidades y ventanas de acoplo son los proporcionados por el algoritmo ASM descrito con anterioridad. En la figura 5.14 aparecen señalados los principales parámetros de la geometría del filtro.

¹¹El simulador preciso hubiera llamado al método BI-RME una vez por cada guía diferente que forme la estructura y el simulador rápido hubiera llamado al método BI-RME n veces por cada guía diferente que forme la estructura ya que para la extracción de parámetros se utiliza n veces el simulador rápido por cada iteración, siendo n el número de veces necesarias que se llamará al simulador rápido para realizar correctamente la extracción de parámetros.

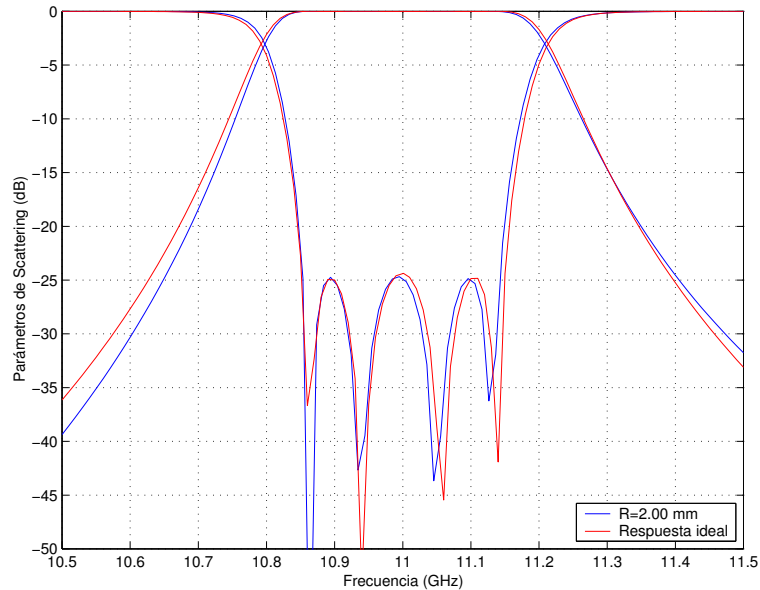


Figura 5.13. Comparación de los parámetros de scattering correspondientes a la solución óptima (x_{os}^*) (color rojo) y a la respuesta del simulador preciso tras el proceso de optimización (color azul).

Con objeto de validar experimentalmente el procedimiento de diseño seguido, así como la nueva técnica de fabricación propuesta, se construyó un prototipo con las dimensiones recogidas en la tabla 5.1. El proceso de fabricación seguido se basó en la técnica descrita en el apartado 5.2.3. En la figura 5.15 se puede observar el aspecto de las piezas individuales que componen el filtro, así como su proceso de ensamblaje para dar lugar finalmente al filtro diseñado.

En la figura 5.16 se recogen los parámetros de scattering del filtro diseñado obtenidos con la herramienta de simulación descrita en la sección 5.3, junto con medidas experimentales del prototipo fabricado. Dichas medidas se han realizado con un analizador de redes de la serie HP8510C que dispone el Grupo de Aplicaciones de Microondas (GAM) del Departamento de Comunicaciones, con capacidad de medida en tecnología guiada hasta 20 GHz. Para realizar dichas medidas se empleó una calibración TRL estándar en guía WR-90.

En la figura 5.17 se muestra una ampliación de las pérdidas de inserción en la banda de paso. Observando las medidas, se concluye que las pérdidas de inserción del dispositivo fabricado son de aproximadamente 0,2 dB, valor relativamente bajo que convierte a la nueva técnica de fabricación propuesta en este capítulo en una directa competidora de las otras técnicas que se utilizan comercialmente en la actualidad (técnicas de corte en plano H y plano E).

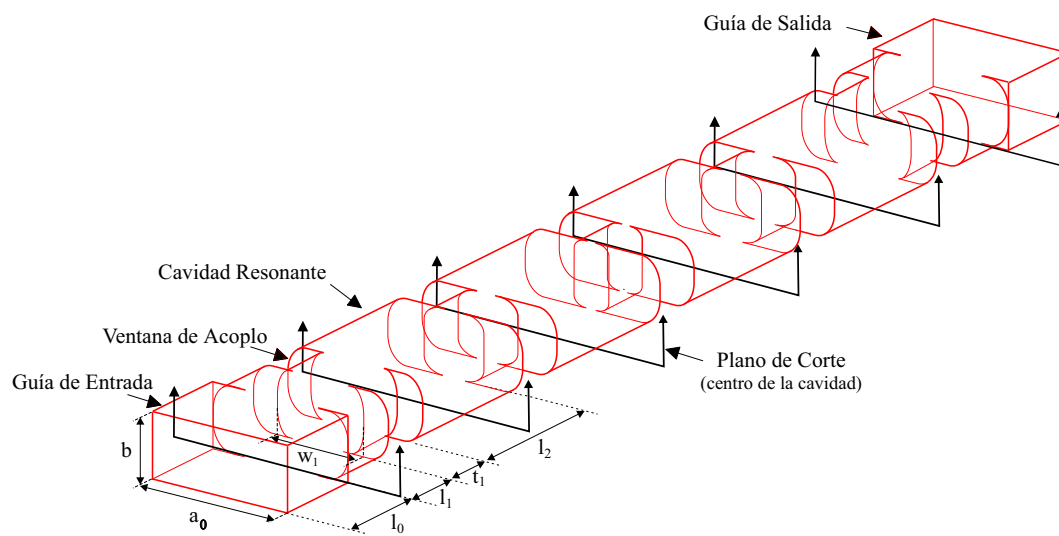


Figura 5.14. Esquema del filtro con esquinas redondeadas donde aparecen señalados algunos parámetros principales de su geometría (las longitudes de las cavidades l_i , la longitud de las ventanas de acoplamiento t_i y las anchuras de las ventanas de acoplamiento w_i) así como los planos de corte. La altura de las guías es constante igual a b .

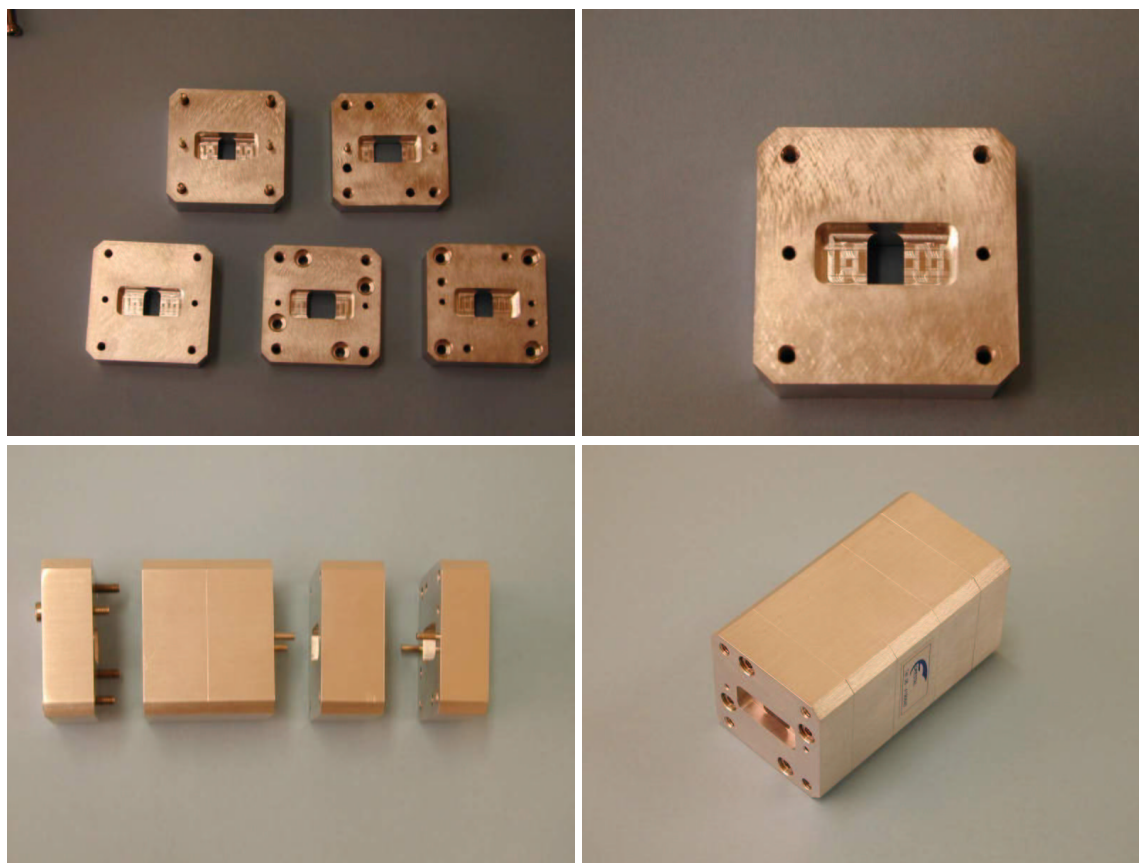


Figura 5.15. Filtro inductivo con esquinas redondeadas. *Parte superior:* aspecto de las piezas individuales. *Abajo a la izquierda:* proceso de ensamblaje. *Abajo a la derecha:* aspecto final del filtro.

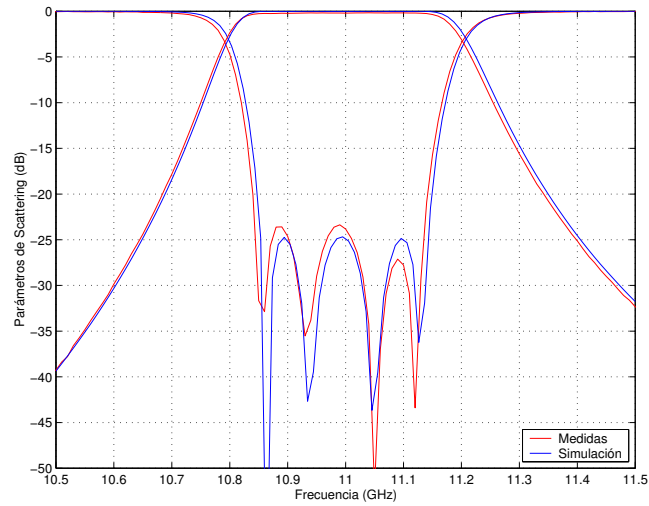


Figura 5.16. Comparación entre los parámetros de scattering del filtro diseñado obtenidos mediante simulación (azul) y mediciones experimentales (rojo).

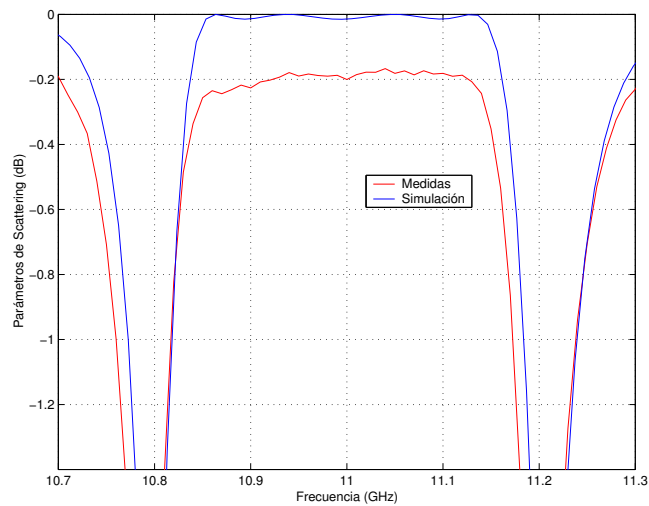


Figura 5.17. Detalle de la respuesta electromagnética del filtro diseñado en la banda de paso. En azul se representa la respuesta simulada y en rojo las mediciones experimentales.

5.6. Conclusiones

En este capítulo se ha propuesto una técnica novedosa para la fabricación a bajo coste de filtros inductivos, en la que se tiene en cuenta uno de los efectos típicos del mecanizado de estos dispositivos (presencia de esquinas redondeadas en las guías).

Se ha desarrollado por completo una herramienta CAD que permite diseñar filtros inductivos en guía rectangular considerando esquinas redondeadas en dichas guías. El procedimiento de diseño propuesto se ha automatizado por completo, y se ha aplicado con éxito al diseño preciso y eficiente de un filtro inductivo de 4 polos con esquinas redondeadas en cavidades y ventanas de acoplo.

Tanto la teoría descrita en el capítulo, como la herramienta CAD desarrollada y la nueva técnica de fabricación propuesta, se han validado con éxito mediante el diseño, fabricación y posterior medición experimental de un prototipo real.

Bibliografía

- [1] F. Arndt, R. Beyer, J. Reiter, T. Sieverding, and T. Wolf, “Automated design of waveguide components using hybrid mode-matching/numerical EM building-blocks in optimization-oriented cad frameworks—state-of-the-art and recent advances,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, pp. 747–760, May 1997.
- [2] J. E. Page, “The effect of the machining method on the performances of rectangular waveguide devices,” *Proceedings of ESA workshop on advanced CAD for microwave filters and passive devices*, pp. 329–336, 1995.
- [3] J. M. Reiter and F. Arndt, “Rigorous analysis of arbitrarily shaped H- and E-plane discontinuities in rectangular waveguides by a full-wave boundary contour mode-matching method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, pp. 796–801, April 1995.
- [4] M. Bozzi, M. Bressan, and L. Perregrini, “Generalized Y-matrix of arbitrary 3D waveguide junctions by the BI-RME method,” *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, vol. 3, pp. 1269–1272, June 1999.
- [5] M. Bressan, L. Perregrini, and E. Regini, “BI-RME modelling of 3D waveguide components enhanced by the Ewald technique,” *IEEE MTT International Symposium Digest*, vol. 2, pp. 1097–1100, 2000.
- [6] G. Conciauro, M. Bressan, and C. Zuffada, “Waveguide modes via an integral equation leading to a linear matrix eigenvalue problem,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, pp. 1495–1504, November 1984.
- [7] P. Arcioni, “Fast evaluation of modal coupling coefficients of waveguide step discontinuities,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 6, pp. 232–234, June 1996.
- [8] J. Bandler, R. Biernacki, S. Chen, R. Hemmers, and K. Madsen, “Electromagnetic optimization exploiting aggressive space mapping,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, pp. 2874–2881, December 1995.

-
- [9] F. Arndt, J. Brandt, and J. Ritter, "MM/FE/FD CAD method for the optimization of waveguide filters including structures of arbitrary shape and coax feeds," *Proceedings of the 31st European Microwave Conference*, vol. 1, pp. 319–322, September 2001.
- [10] S. Cogollos, H. Esteban, and V. E. Boria, "Efficient computation of field patterns in arbitrary cross section waveguides," *IEEE AP-S International Symposium Digest*, vol. 1, p. 6, July 1999.
- [11] G. Conciauro, M. Guglielmi, and M. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis - CAD Techniques for Waveguide Components and Filters*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [12] R. Safavi-Naini and R. H. Macphie, "Scattering at rectangular-to-rectangular waveguide junctions," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 30, pp. 2060–2063, November 1982.
- [13] Z. Shen and R. H. Macphie, "Scattering by a thick off-centered circular iris in circular waveguide," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, pp. 2639–2642, November 1995.
- [14] M. Guglielmi, "Simple CAD procedure for microwave filters and multiplexers," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, pp. 1347–1352, July 1994.
- [15] J. T. Alos and M. Guglielmi, "Simple and effective EM-based optimization procedure for microwave filters," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, pp. 856–858, June 1997.

Capítulo 6

Análisis eficiente de diplexores

6.1. Introducción

En los últimos tiempos los multiplexores han recibido considerable atención por parte de la comunidad científica, ya sea en tecnología microelectrónica para diplexores en banda K [1], como en tecnología guiada donde aparecen un gran número de referencias al respecto (por ejemplo [2]–[11]). En las citadas referencias se enfatiza tanto la geometría de los dispositivos (con sus pros y sus contras) como el proceso de diseño optimizado. Las razones de este interés son bastante obvias:

- Proliferación de estos dispositivos en sistemas de telecomunicación tales como satélites y estaciones terrenas en el sector espacio, así como estaciones base de comunicaciones móviles. Estos sistemas requieren frecuentemente utilizar diversas bandas de frecuencia simultáneamente y los multiplexores brindan dicha posibilidad.
- Permiten duplexar la señal y utilizar la misma antena en transmisión y en recepción ahorrando espacio en el diseño (útil sobretodo en satélites donde el espacio reservado a la carga útil es un bien escaso).
- Dificultad de diseño empleando dispositivos pasivos recíprocos. Los diplexores y multiplexores usan como divisores de potencia las uniones T [12] ó Y [11] (que se diseñan para repartir la potencia por cada brazo del diplexor donde están situados los filtros de alta selectividad). Estos multiplexores/diplexores requieren un gran esfuerzo de diseño, ya que al montar los filtros al divisor de potencia el acoplo entre las diferentes partes de la estructura altera la respuesta total del dispositivo, y se requiere en general un alto nivel de precisión para obtener los parámetros de scattering deseados. Este diseño se simplifica si se utilizan circuladores¹ con filtros muy selectivos. Este tipo de

¹Un circulator es una red de tres accesos *no* recíproca (también existen de cuatro pero su uso es menos frecuente). Su matriz de parámetros S es no simétrica y unitaria. Se fabrica con ferritas (materiales cerámicos no conductores pero con propiedades magnéticas muy intensas) sometidas a la acción de un campo magnético

multiplexores se utilizan como multiplexores de entrada en satélites (ver figura 6.1) donde las pérdidas no son un parámetro de diseño crítico. Los inconvenientes de esta técnica de fabricación de multiplexores son varios [13]:

1. Pérdidas en los circuladores.
 2. Aislamiento no perfecto entre los accesos.
 3. Los circuladores son voluminosos y de masa relativamente grande.
 4. Posibilidad de manejo de poca potencia.
 5. Problemas en el diseño de los filtros selectivos.
- Pueden emplearse para aplicaciones espaciales (sobre todo en estaciones terrenas) multiplexores en etapas como los anteriormente expuestos formados por circuladores y filtros, pero construidos con dispositivos recíprocos. Utilizando filtros y acopladores direccionales se consigue un comportamiento de la estructura muy parecido [14]. Las ventajas en cuanto al diseño son las mismas que con circuladores: fácil realización modular y fácil extensión adicional para nuevos servicios. Las mejoras también son importantes: menores pérdidas de inserción y capacidad de manejo de mayor potencia. Los inconvenientes a remarcar se derivan del esfuerzo de fabricación de los módulos. Cada módulo requiere dos acopladores direccionales y dos filtros. Esto conlleva una dificultad nada despreciable de sintonización del módulo así como una gran masa y tamaño, que hacen impracticable estos diseños para aplicaciones espaciales embarcadas en satélites².
 - Los multiplexores formados por estructuras en guía se utilizan como multiplexores de señal de salida en satélites [15], debido a que las pérdidas en esta etapa son críticas, pues suponen una reducción en el nivel de potencia de la señal radiada. Se utilizan filtros montados en una guía común o colector (en inglés *manifold*) cuyo extremo está cortocircuitado (ver figura 6.2). Se realiza una división entre canales pares e impares dejando una banda de guarda entre cada canal de cada grupo igual a un canal de ancho de banda. Esto involucra restricciones menos severas en las especificaciones de los multiplexores. El diseño y optimización de este tipo de multiplexores es particularmente complicado, especialmente si se requiere una banda de guarda estrecha entre cada canal, lo cual es característico en este tipo de aplicaciones. Además, se requiere siempre insertar elementos de sintonía en el diseño para poder regular la respuesta final, ya que sin dichos elementos no suele conseguirse la respuesta deseada tras todo el proceso de diseño y fabricación del dispositivo. Incluso se ha estudiado la posibilidad de montar en satélites este tipo de dispositivos con motores accionados por telecomando para alterar la frecuencia de cada canal del multiplexor [16].

estático.

²Esta es la razón de que se utilice este tipo de multiplexores en equipamiento de alta potencia en estaciones terrenas donde el tamaño y la masa no son parámetros críticos.

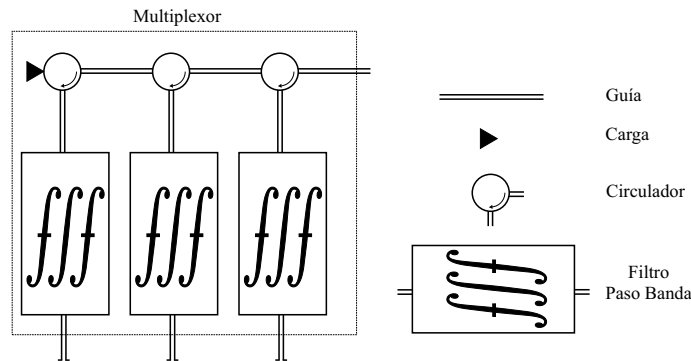


Figura 6.1. Multiplexor no recíproco utilizado como multiplexor de entrada en satélites. Este multiplexor tiene una entrada y tres canales de salida.

Por todas estas razones recién expuestas, el estudio de multiplexores en guía es, hoy en día, un tema de enorme interés que está generando mucha literatura al respecto. Parte de esta literatura está referida a las estrategias de diseño de estos dispositivos, que suelen requerir de programas de optimización para resolver un problema de esta envergadura.

El proceso de diseño de un multiplexor/diplexor suele ser bastante automatizado. Se parte de las especificaciones eléctricas y se diseñan los filtros (diseño de banda estrecha); seguidamente se hace una aproximación de la parte del diseño referida a la banda ancha (diseño del colector). Finalmente se analiza el multiplexor completo y se comprueba si éste cumple con las especificaciones. Si no es así, se inicia un algoritmo de optimización que a cada paso analiza el multiplexor completo y comprueba el cumplimiento de las especificaciones. El proceso de optimización continúa hasta que se cumplen las citadas especificaciones.

En este capítulo se va a tratar análisis eficiente de estos dispositivos, pues su diseño mediante cualquier método de optimización³ requiere de muchas simulaciones. Estas simulaciones de estructuras tan complejas consumen un tiempo enorme de computación. Es por ello que disminuir drásticamente este tiempo aumentará enormemente la velocidad de diseño, sea cual sea la estrategia que se siga durante el proceso de optimización.

En este capítulo se van a utilizar todas las técnicas de análisis desarrolladas en esta tesis para simular de manera rápida y precisa dispositivos de este tipo. Como ejemplo de aplicación se estudiará un caso particular de multiplexor: un diplexor real utilizado a bordo de un satélite (el Hispasat 1-C). Se estudiará su respuesta en frecuencia, así como el efecto que supone la aparición de “esquinas redondeadas” en ciertas partes del dispositivo debido a las técnicas de fabricación.

³Como por ejemplo el método de optimización utilizado para diseñar el filtro del capítulo 5, que puede consultarse por ejemplo en [17].

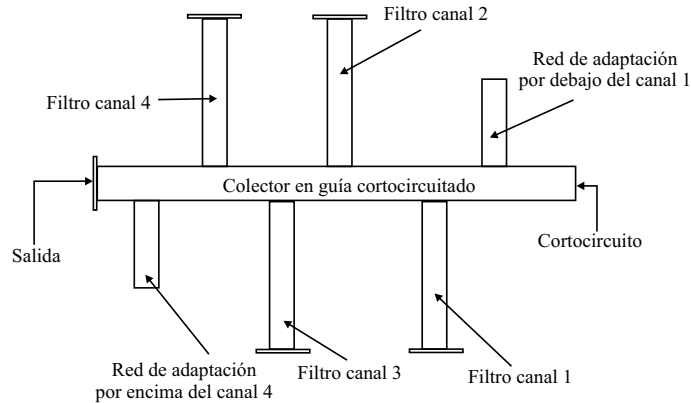


Figura 6.2. Multiplexor en guía con colector común utilizado como multiplexor de salida en satélites. La salida del multiplexor se conecta a la antena. Este multiplexor tiene 4 canales de entrada y una salida (aunque es recíproco). Tiene dos redes de adaptación para eliminar las frecuencias por debajo del canal inferior (canal 1) y por encima del canal superior (canal 4).

6.2. Geometrías

El diplexor concreto que se va a analizar es un diplexor en tecnología guiada. Las diferentes geometrías existentes en la actualidad vienen dadas por las necesidades de espacio del sistema en el que se integran estos diplexores. Existen, por ejemplo, diplexores cuyo divisor de potencia es una bifurcación en plano E [11] a la que se añaden los filtros paso alto y paso bajo. La forma de la bifurcación es la que suele forzar gran parte del diseño de estos dispositivos. La forma de bifurcación más extendida es la que se utiliza en los diplexores en colector común, donde el colector puede simularse como un conjunto de uniones T en plano H conectadas en cascada. En los accesos laterales del colector se emplazan los diferentes filtros.

La geometría escogida para realizar el análisis que se muestra en este capítulo es una estructura en plano H con uniones T en ese mismo plano. Pueden verse diferentes configuraciones en la figura 6.3.

En concreto se va a utilizar la configuración (a) de la figura 6.3, aunque según [18] la unión T estándar tiene unas pobres características en cuanto a división de potencia que hace que el diseño de tales diplexores presente problemas. En la citada referencia se propone una unión T con un reentrante lateral en la cavidad de la unión para conseguir un mayor ancho de banda en las respuestas de los filtros del diplexor, y relajando a su vez las tolerancias de fabricación. Esto también se puede conseguir con transiciones entre la unión T y los filtros.

En el caso de la geometría elegida en este capítulo se utilizará una unión T asimétrica, que se conectará a los filtros a través de unas transiciones para adaptar las impedancias de dichos filtros y de la unión T. La geometría de la unión T asimétrica puede verse en la figura

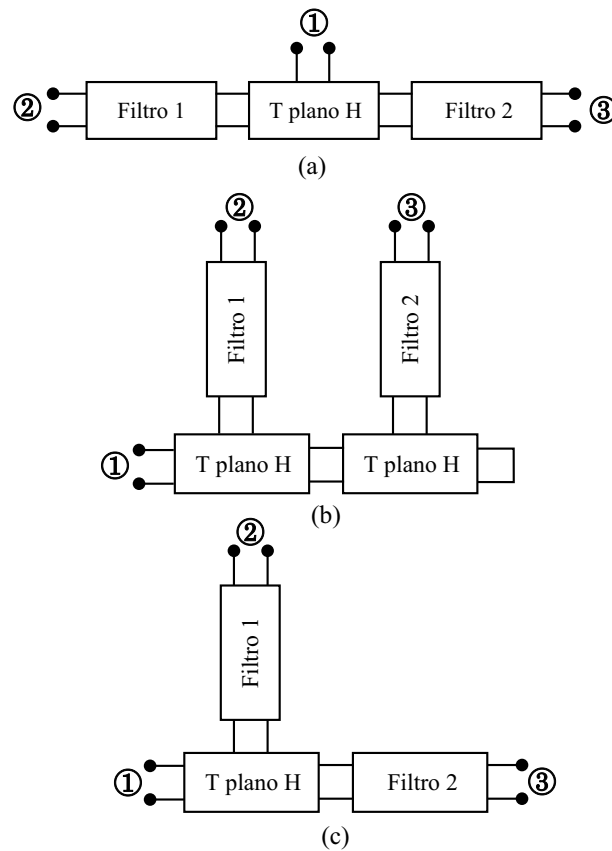


Figura 6.3. Diferentes configuraciones para diplexores con la geometría en plano H.

6.4.

Los filtros que se conectan a ambos lados de la unión T son filtros inductivos de 6 cavidades, cuya geometría se recoge en la figura 6.5.

El diplexor en su totalidad se ha construido en guía rectangular estándar WR-75 ($a = 19,05 \text{ mm}$, $b = 9,525 \text{ mm}$). Al ser totalmente inductivo, la dimensión b se mantiene constante en todo el dispositivo.

Este dispositivo se analizará en primer lugar como se ha descrito, considerando que todos los tramos de línea que lo componen son guías rectangulares estándar. Posteriormente, se analizará el mismo dispositivo teniendo en cuenta un efecto de mecanización de esquinas redondeadas en el acceso común del diplexor.

6.3. Reducción del tiempo de computación

Unas consideraciones a tener en cuenta antes de analizar el diplexor son aquéllas que pueden ahorrar tiempo de computación. Al ser la estructura totalmente inductiva, se puede

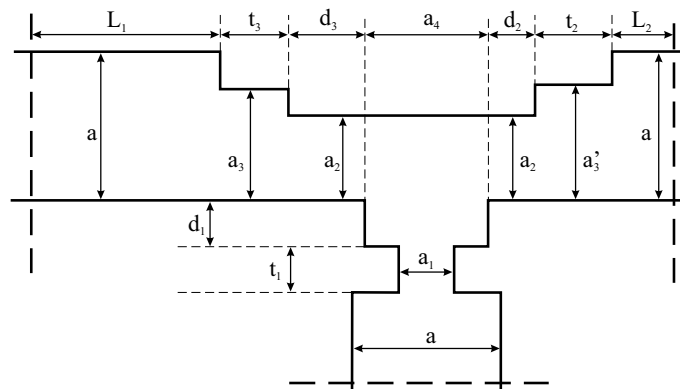


Figura 6.4. Geometría de la unión T asimétrica en plano H con adaptadores de impedancia en los accesos laterales. Los filtros se conectan a los adaptadores de los lados de la unión T. Las entradas/salidas son guías estándar WR-75 ($a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm). La dimensión b es constante en todo el diplexor.

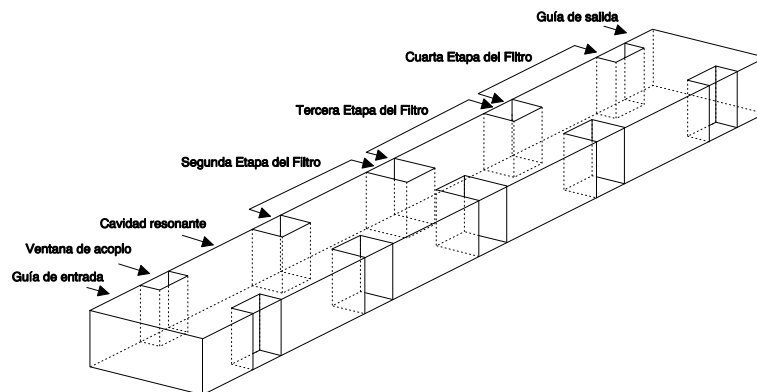


Figura 6.5. Geometría de los filtros inductivos que se conectarán a la unión T asimétrica. Aquí se ha representado un filtro de 4 cavidades que producirá una respuesta con 4 polos. En realidad, los filtros utilizados en el diplexor son de 6 cavidades.

puede hacer uso de las recomendaciones recogidas en el apéndice B. El dispositivo es inductivo no centrado, por lo tanto si se excita con el modo fundamental (TE_{10}^z), sólo se excitarán modos TE_{m0}^z en toda la estructura. La elección de estos modos reduce en mucho el número de modos a utilizar cuando se aplique la técnica de la ecuación integral descrita en el capítulo 3 para caracterizar las transiciones del diplexor.

Para evitar inversiones innecesarias se ha segmentado el diplexor, y se ha representado cada transición por su matriz de impedancias generalizada (GIM) obtenida según la técnica descrita en el capítulo 3. La unión en T que hay dentro de la T asimétrica se ha caracterizado a través de su matriz de admitancias generalizada (GAM) según se explicó en el capítulo 4. Finalmente, se han unido todas las matrices con incógnitas híbridas siguiendo la técnica de segmentación explicada también en el capítulo 4.

Otra característica que depende de la geometría del problema es la estructura del sistema final a resolver para obtener los parámetros de scattering. Si la estructura fuese un filtro en línea, el sistema a resolver sería tridiagonal a bloques. En un diplexor esto ya no es así. La matriz de la T asimétrica que aparece en la figura 6.4 tiene un sistema de ecuaciones asociado que, aunque sigue cierto patrón, provoca que el uso de una librería estándar para resolución de sistemas tridiagonales no sea factible. Hay que implementar, por lo tanto, una librería de subrutinas que resuelva el sistema eficientemente, ya que la mayor parte de la matriz asociada al sistema de ecuaciones está formada por elementos (bloques) nulos.

Se ha implementado una librería que utiliza la técnica descrita en [19], adecuadamente modificada para manejar la estructura del sistema global a resolver. La matriz asociada al sistema de ecuaciones que genera la T asimétrica tiene el aspecto mostrado en la figura 6.6. Se ha representado en negro los bloques no nulos del sistema y en blanco los bloques nulos del mismo. Para simplificar el sistema⁴ se ha tomado el mismo número de modos accesibles en todas las transiciones y en todos los accesos de la T.

De este modo, si se utiliza la mencionada librería de subrutinas que aprovechan la distribución de valores en la matriz asociada al sistema, la velocidad de todo el simulador se incrementará en gran medida⁵.

Otra consideración ya mencionada, que debe tenerse en cuenta es que se puede reducir el número de modos a considerar en el análisis si se hace uso de la simetría del sistema (en este caso el diplexor es totalmente inductivo). Pero si se redondea el acceso común de la T asimétrica para simular este efecto de fabricación, surge el problema de que ya no se puede descartar ningún modo. Ahora bien, en la unión T se excitarán todos los modos, pero si los filtros siguen siendo estrictamente inductivos, los modos que no sean TE_{m0}^z se atenuarán rápidamente dentro de la estructura de cada filtro. Es por ello que, tras realizar un estudio preliminar, se puede identificar un punto en la geometría del diplexor a partir del cual se pueden descartar modos que no sean de la forma TE_{m0}^z . Se observó que la atenuación

⁴El sistema global de este diplexor consiste en una matriz de 74×74 bloques. Cada bloque es una matriz cuadrada de $N \times N$ elementos, siendo N el número de modos accesibles tomados en la estructura.

⁵Recuérdese que habrá que resolver un sistema por cada punto en frecuencia en el que se quiera simular el dispositivo.

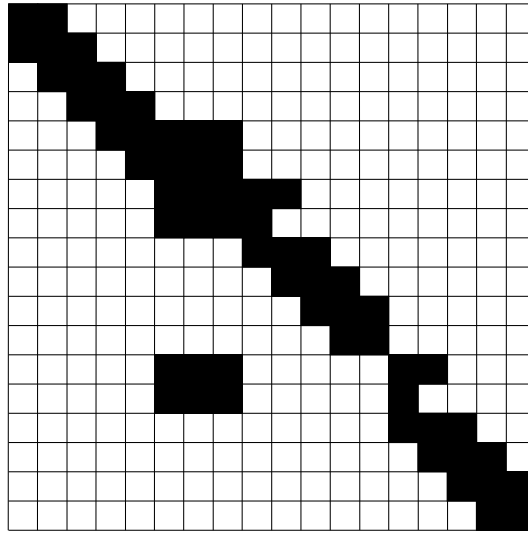


Figura 6.6. Aspecto de la matriz asociada al sistema de ecuaciones generado por la T asimétrica. El sistema ha sido reordenado para preservar la mayor simetría posible. En negro se representan los bloques no nulos del sistema, y en blanco los bloques nulos del mismo.

empezaba a ser muy importante a partir de la segunda cavidad de cada filtro. Por ello, a partir de dicho punto los modos que no sean TE_{m0}^z son localizados, y de esta forma se reduce la matriz a conectar.

Seguidamente, se va a estudiar como reducir los modos a conectar (que son los que producen que el sistema sea de gran tamaño), teniendo en cuenta que todos los modos considerados deben formar parte de la caracterización global de cada transición y de cada unión. Como se han utilizado ambos tipos de matrices (GIM y GAM), se verá cómo reducir ambas obteniéndose fórmulas de conversión para un tipo de matriz y su matriz dual.

6.3.1. Reducción de matrices de admitancias e impedancias

Supongamos que se desea obtener una matriz de admitancias generalizada para conectarla a otra matriz que puede ser, en general, de admitancias o impedancias generalizada. Supongamos que partimos de una matriz de admitancias generalizada que relaciona corrientes y tensiones en los accesos de cierta estructura, pero cuyo tamaño es excesivo para ser conectada al resto de la red circuital que simula un dispositivo o conjunto de dispositivos.

El objetivo será obtener otra matriz de admitancias de tamaño reducido que tenga un comportamiento similar respecto a los modos que se pretenden conectar.

Sea Y la matriz GAM de tamaño $(N1 + N2) \times (N1 + N2)$, donde $N1$ y $N2$ son el número total de modos en los accesos (1) y (2), respectivamente. Se pretende reducir dicha matriz a otra de tamaño $(M1 + M2) \times (M1 + M2)$ que se comporte de forma parecida

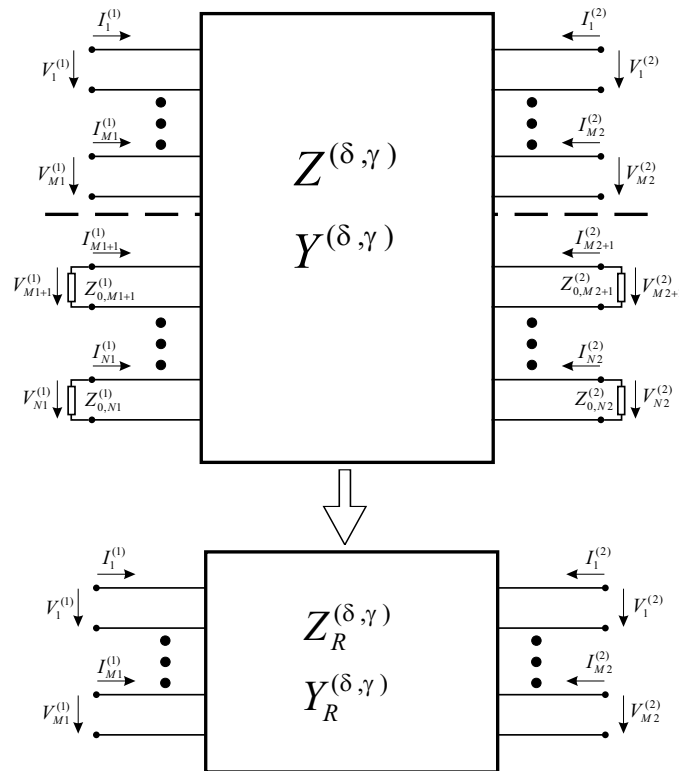


Figura 6.7. Reducción efectiva del tamaño de una matriz de admitancias o impedancias cargando los modos localizados con la impedancia característica de dichos modos.

respecto a los modos conectados. Siguiendo la nomenclatura del capítulo 3, llamaremos a M_1 y M_2 el número de modos accesibles en el puerto 1 y en el puerto 2 respectivamente⁶, y llamaremos L_1 y L_2 al resto de modos en cada acceso, que serán el número de modos localizados en el puerto 1 y puerto 2 respectivamente.

La idea principal es cargar los L_1 modos localizados en el puerto 1 (desde el $M_1 + 1$ al N_1) y cargar los L_2 modos localizados en el puerto 2 (desde el $M_2 + 1$ al N_2) con la impedancia característica de cada modo⁷. Es decir, el modo i -ésimo perteneciente al grupo de los modos localizados del puerto (δ) se cargará con la impedancia modal característica simbolizada por $Z_{0,i}^{(\delta)}$ (ver figura 6.7).

Esta condición de carga se puede expresar como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{I} \quad (6.1)$$

⁶Hay que resaltar que el número de puertos de la estructura representada por la matriz es irrelevante ya que más accesos sólo implica más bloques en el interior de la matriz general. Aquí se han escogido 2 puertos por simplicidad en la exposición.

⁷No es necesario que estos modos estén ordenados según su frecuencia de corte. Un posible criterio a seguir es situar los modos que se supone que van a acoplarse menos al final del acceso.

donde \mathbf{I} es el vector de corrientes, que se puede descomponer en bloques para diferentes accesos:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(1)} \\ \mathbf{I}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Lo mismo se puede decir del vector de tensiones modales:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{(1)} \\ \mathbf{V}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

La matriz \mathbf{Z}_0 es una matriz diagonal. Los elementos de la diagonal serán 0 excepto en la posición de los modos que deben cargarse. Es decir:

$$\mathbf{Z}_0 = \text{diag} \left(\mathbf{0}_{M1}, \mathbf{Z}_0^{(1)}, \mathbf{0}_{M2}, \mathbf{Z}_0^{(2)} \right) \quad (6.4)$$

donde $\mathbf{0}_{M1}$ es un vector de $M1$ ceros, $\mathbf{0}_{M2}$ es un vector de $M2$ ceros, y $\mathbf{Z}_0^{(\delta)}$ es un vector de longitud $L\delta$ que contiene las impedancias características con las que cargamos los modos localizados del acceso (δ).

Finalmente, se define \mathbf{A} en la ecuación (6.1) como una matriz diagonal construida de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \text{diag} \left(\mathbf{0}_{M1}, \mathbf{1}^{(1)}, \mathbf{0}_{M2}, \mathbf{1}^{(2)} \right) \quad (6.5)$$

donde $\mathbf{1}^{(\delta)}$ es un vector de longitud $L\delta$ con todos sus elementos iguales a 1.

Se define ahora una matriz que sea complementaria de la matriz \mathbf{A} , es decir:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{U} \quad (6.6)$$

donde \mathbf{U} es la matriz identidad de tamaño $(N1 + N2) \times (N1 + N2)$.

Se partirá de la siguiente relación conocida:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \quad (6.7)$$

donde \mathbf{Y} es la matriz de admitancias generalizada que se desea reducir.

Teniendo en cuenta (6.6) se puede escribir:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \quad (6.8)$$

Si ahora se inserta la relación (6.1) en (6.8) se obtiene

$$\mathbf{I} = -\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{I} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \quad (6.9)$$

y si se agrupan términos se llega a:

$$[\mathbf{U} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0] \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \quad (6.10)$$

y despejando:

$$\mathbf{I} = [\mathbf{U} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \quad (6.11)$$

Multiplicando por \mathbf{B} en ambos lados de la igualdad:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{U} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \quad (6.12)$$

Conviene observar que multiplicar un vector (ya sea \mathbf{V} o \mathbf{I}) por la matriz \mathbf{B} equivale a poner a cero las tensiones o las corrientes modales pertenecientes al conjunto de modos localizados. Es decir:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1^{(1)} \\ \vdots \\ V_{M1}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_1^{(2)} \\ \vdots \\ V_{M2}^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1^{(1)} \\ \vdots \\ I_{M1}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_1^{(2)} \\ \vdots \\ I_{M2}^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Finalmente, la matriz $\mathbf{B} \cdot [\mathbf{U} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Y}$ es una matriz tal que los intervalos de filas $[M1 + 1, \dots, N1]$ y $[N1 + M2 + 1, \dots, N1 + N2]$ son filas de ceros. Por lo tanto, se puede afirmar que la matriz $\mathbf{B} \cdot [\mathbf{U} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Y}$ está estructurada de la siguiente manera:

$$\mathbf{B} \cdot [\mathbf{U} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_R^{(1,1)} & \mathbf{L}_R^{(1,1)} & \mathbf{Y}_R^{(1,2)} & \mathbf{L}_R^{(1,2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_R^{(2,1)} & \mathbf{L}_R^{(2,1)} & \mathbf{Y}_R^{(2,2)} & \mathbf{L}_R^{(2,2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Al multiplicar una matriz como ésta por un vector como el $\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}$ no importarán ciertos bloques de columnas de la matriz, concretamente aquellos que se multiplicarán por los ceros del vector $\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}$.

Así pues, los términos que nos interesan de la matriz mostrada en (6.14) son los bloques $\mathbf{Y}_R^{(\delta,\gamma)} \in \mathcal{M}_{M\delta \times M\gamma}(\mathbb{C})$ ($\delta, \gamma = 1, 2$). Los bloques $\mathbf{L}_R^{(\delta,\gamma)} \in \mathcal{M}_{L\delta \times L\gamma}(\mathbb{C})$ ($\delta, \gamma = 1, 2$) de dicha matriz son los bloques que serán ignorados debido a la mencionada multiplicación por el vector $\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}$.

Los términos que nos interesan los podemos agrupar en una matriz que será la matriz reducida que se pretende obtener:

$$\mathbf{Y}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_R^{(1,1)} & \mathbf{Y}_R^{(1,2)} \\ \mathbf{Y}_R^{(2,1)} & \mathbf{Y}_R^{(2,2)} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Se podría pensar que al ignorar los bloques $\mathbf{L}_R^{(\delta,\gamma)}$ se está eliminando la información referente a la relación entre los modos accesibles del puerto (δ) con los modos localizados del puerto (γ), y que la información referente a la relación entre los modos localizados del puerto (δ) con todos los demás se ha eliminado anteriormente por los bloques nulos que aparecen en (6.14). Esto no es así, pues dicha información ha quedado contenida en el término $[\mathbf{U} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Y}$, donde están involucrados todos los modos.

La reducción de matrices de impedancia se consigue siguiendo el mismo razonamiento, pero ahora cambiando las matrices de admitancia por las de impedancia y viceversa. Es decir:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{U} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} \quad (6.16)$$

En resumen, para reducir el tamaño de una matriz de admitancias generalizada \mathbf{Y} , se debe recortar la matriz:

$$\mathbf{Y}'_R = [\mathbf{U} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Y} \quad (6.17)$$

y si se quiere reducir el tamaño de una matriz de impedancias generalizada \mathbf{Z} , se debe recortar la matriz

$$\mathbf{Z}'_R = [\mathbf{U} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}_0]^{-1} \cdot \mathbf{Z} \quad (6.18)$$

Existe una pequeña variación en las fórmulas anteriores si se utiliza exactamente la nomenclatura del capítulo 3, ya que en ese caso aparecen admitancias asintóticas en paralelo para cada modo de la matriz de impedancias. Esto no implica mayor dificultad, ya que podemos agrupar la admitancia asintótica en paralelo con la admitancia característica del modo correspondiente. Es decir, se definirá la matriz \mathbf{Y}_0 de la ecuación anterior como:

$$\mathbf{Y}_0 = \text{diag} \left(\mathbf{0}_{M1}, \mathbf{Y}_0^{(1)} - \hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \mathbf{0}_{M2}, \mathbf{Y}_0^{(2)} - \hat{\mathbf{Y}}^{(2)} \right) \quad (6.19)$$

donde $\mathbf{0}_{M1}$ es un vector de $M1$ ceros, $\mathbf{0}_{M2}$ es un vector de $M2$ ceros, $\mathbf{Y}_0^{(\delta)}$ es un vector de longitud $L\delta$ que contiene las admitancias características con las que cargamos los modos localizados del acceso (δ) ($Y_{0,M\delta+1}^{(\delta)}, \dots, Y_{0,N\delta}^{(\delta)}$) e $\hat{\mathbf{Y}}^{(\delta)}$ es un vector de longitud $L\delta$ que contiene las admitancias asintóticas de los modos del acceso (δ) ($\hat{Y}_{M\delta+1}^{(\delta)}, \dots, \hat{Y}_{N\delta}^{(\delta)}$).

6.3.2. Reducción e inversión de matrices de admitancias e impedancias

Supóngase que se da el caso de que se dispone de una matriz de admitancias generalizada y se desea, por cualquier motivo, reducir el tamaño de la matriz y además trabajar con

la matriz reducida de impedancias⁸. Ambos objetivos pueden conseguirse simultáneamente siguiendo una técnica similar a la descrita en el apartado anterior.

Sea la matriz de admitancias generalizada \mathbf{Y} que cumple

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \quad (6.20)$$

donde las definiciones de todas estas matrices son idénticas a las proporcionadas en el apartado anterior. Se definen ahora las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} del mismo modo a como se definieron en (6.5) y en (6.6), es decir de modo que cumplen:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \quad (6.21)$$

con la condición de carga conocida:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = -\mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{V} \quad (6.22)$$

donde \mathbf{Y}_0 se define nuevamente según (6.19). Combinando las dos ecuaciones anteriores tenemos:

$$-\mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \quad (6.23)$$

Agrupando términos en la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{I} = [\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_0] \cdot \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V} = [\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_0]^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} \quad (6.24)$$

Finalmente, siguiendo el mismo razonamiento que en el apartado anterior, y tras multiplicar por la matriz \mathbf{B} se obtiene

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_0]^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} \quad (6.25)$$

Finalmente, para completar la operación de reducción e inversión se debe recortar adecuadamente, tal y como se ha explicado en el apartado anterior, la matriz \mathbf{Z}'_R definida como sigue:

$$\mathbf{Z}'_R = [\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_0]^{-1} \quad (6.26)$$

En definitiva, se puede conseguir un reducción efectiva del tamaño del sistema de ecuaciones a resolver para obtener los parámetros de scattering si cargamos adecuadamente los modos que se supone van a acoplarse más débilmente en la estructura. Obviamente, la utilización de estas técnicas recién explicadas requiere inversiones matriciales. Por tanto, si es posible excluir desde el principio del análisis a estos modos que se van a acoplar más débilmente⁹, el algoritmo de resolución del problema será más estable, y si además se utiliza la técnica de conexión explicada en el capítulo 4 se evitará cualquier inversión intermedia.

⁸Un motivo puede ser, por ejemplo, trabajar solamente con un tipo de matrices.

⁹La exclusión de estos modos se puede intuir de la simetría de la estructura, tal y como se explica en el apéndice B. Métodos como BI-RME no proporcionan inicialmente una clasificación de los modos por su simetría tras obtener la carta modal, a menos que se represente a posteriori la distribución de campo eléctrico o magnético. Para excluir estos modos con el método BI-RME hay que modificar dicho método como se explica en [20] para poder considerar simetrías en guías de sección arbitraria.

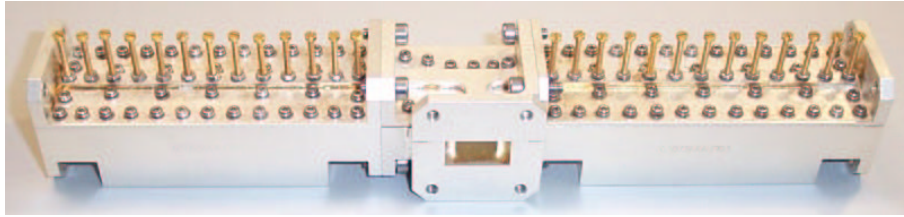


Figura 6.8. Foto del diplexor analizado. Se aprecian los dos filtros a ambos lados de la unión en T. En la parte superior de los filtros se aprecian tornillos que han sido colocados para sintonizar adecuadamente la respuesta del dispositivo.

Siguiendo los mismos pasos expuestos en este apartado para el caso dual (reducir e invertir una matriz de impedancias generalizada), se obtiene la siguiente expresión para la matriz de admitancias reducida

$$\mathbf{Y}'_R = [\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_0]^{-1} \quad (6.27)$$

La expresión anterior es la dual de la ecuación (6.26).

6.4. Análisis del diplexor

En esta sección se considerará un diplexor con la configuración (a) de la figura 6.3. Como se observa consta de dos filtros y una unión en T a la que se han añadido transiciones para una correcta adaptación de impedancias. La explicación de la geometría elegida así como de los filtros, se recoge con detalle en la sección 6.2. En la figura 6.4 de dicha sección se puede observar la geometría de la unión en T del diplexor con sus adaptadores de impedancia.

Se ha fabricado una maqueta de este diplexor, cuyo aspecto puede observarse en las figuras 6.8 a 6.10. Hay que decir que aunque el análisis y diseño del diplexor se ha realizado sin considerar elementos de sintonía, en la implementación práctica del diplexor ha sido necesario incluir unos tornillos en la parte superior de los filtros para sintonizar mejor la respuesta global del dispositivo. Los tornillos se han situado en la parte superior de los filtros, en concreto hay un tornillo en cada cavidad en cada ventana de acoplo de cada uno de los filtros.

Las características para el diseño del diplexor se resumen a continuación:

Banda de paso del Filtro 1 (F1): 13,00 – 13,25 GHz

Banda de paso del Filtro 2 (F2): 13,75 – 14,00 GHz

Pérdidas de retorno: > 23 dB en ambas bandas

Rechazo fuera de banda F1: > 45 dB $\forall f < 12,75$ GHz y $\forall f > 13,50$ GHz

Rechazo fuera de banda F2: > 45 dB $\forall f < 13,50$ GHz y $\forall f > 14,25$ GHz

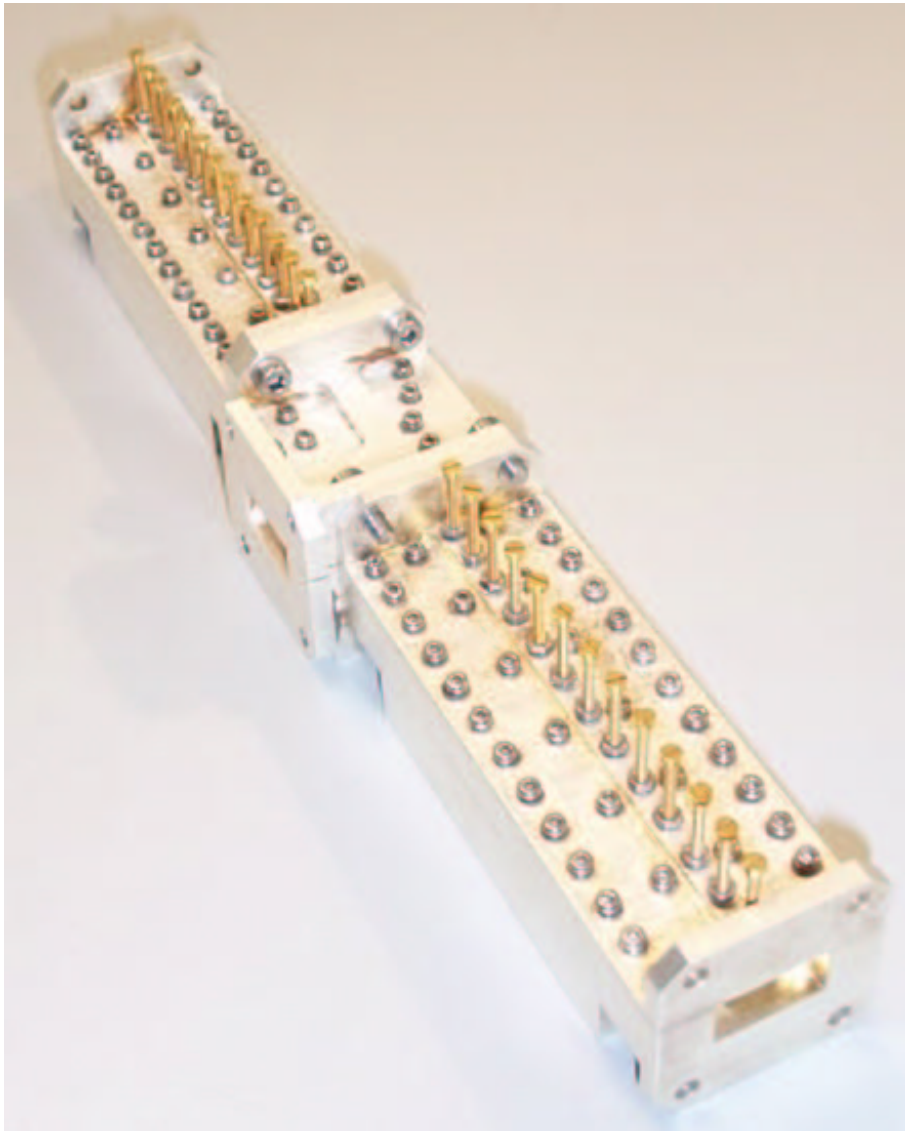


Figura 6.9. Foto del diplexor analizado. Se aprecian los accesos laterales así como los tornillos superiores para la sintonización del dispositivo.

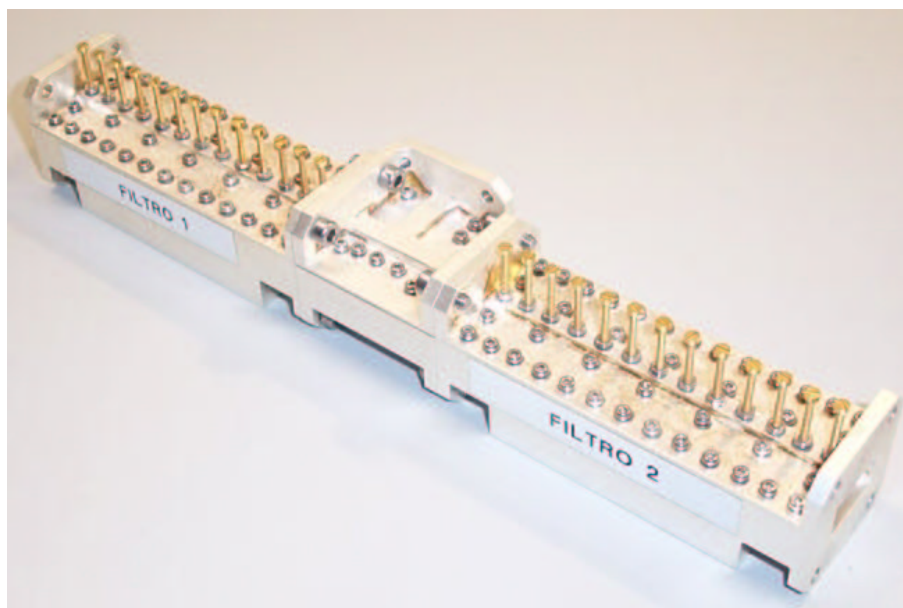


Figura 6.10. Foto del diplexor analizado. En la parte trasera del mismo se ha puesto una etiqueta de referencia para identificar los filtros.

Las especificaciones anteriores han supuesto tener que utilizar filtros paso banda de Chebyshev de 6 polos.

Los resultados de las simulaciones comparados con las medidas llevadas a cabo en el laboratorio pueden verse en las gráficas que se muestran en las figuras 6.12–6.14.

Análisis del filtro 1 y del acceso común

La medida de los parámetros de scattering se ha realizado por pasos, terminando puerto a puerto con una carga adaptada y midiendo los parámetros con el analizador entre los puertos no cargados. En primer lugar, cargando el filtro 2 se pueden medir los parámetros de scattering del filtro 1 (reflexión y transmisión hacia la puerta común), así como la reflexión de la puerta común. En la figura 6.12 se muestran estos resultados comparados con los que proporciona la herramienta de simulación desarrollada.

Se observa una buena concordancia entre los resultados experimentales y las simulaciones del dispositivo, si bien todos los resultados que se muestran no son exactamente idénticos (ver por ejemplo la reflexión en la puerta común). Esto se debe a las tolerancias de mecanizado que no se han tenido en cuenta en la simulación, así como los tornillos de sintonía cuya profundidad de penetración ha mejorado la respuesta del dispositivo real frente a la del dispositivo simulado.



Figura 6.11. Detalle de cada uno de los filtros separados del diplexor.

Análisis del filtro 2 y del acceso común

Procediendo de igual manera, pero cargando ahora el filtro 1, se pueden medir los parámetros relacionados con la puerta común y el filtro 2. Los resultados se muestran en la figura 6.13.

Los resultados en cuanto a reflexión del filtro en la banda de paso no son tan exactos como en el filtro 1 posiblemente debido a la mejora del comportamiento en frecuencia que ha supuesto la inclusión de tornillos en el filtro. En cuanto al coeficiente de transmisión, los resultados siguen mostrando una buena concordancia entre los resultados de la simulación y las medidas realizadas.

Análisis del aislamiento

Una característica importante de un diplexor es el factor de aislamiento, que indica cuánta potencia de una puerta no común se escapa a otro acceso no común. En este caso, se ha medido la transmisión de señal entre el acceso del filtro 1 y el del filtro 2, habiendo cargado la puerta común. Se ha medido también la reflexión hacia la puerta 1 y hacia la puerta 2. Todas estas medidas, junto con sus correspondientes simulaciones, se muestran en la figura 6.14.

Como puede observarse en la figura 6.14, el desacoplo entre puertas medido es menor que el valor simulado, debido a que dicho nivel (valor máximo en torno a 70-80 dB) se

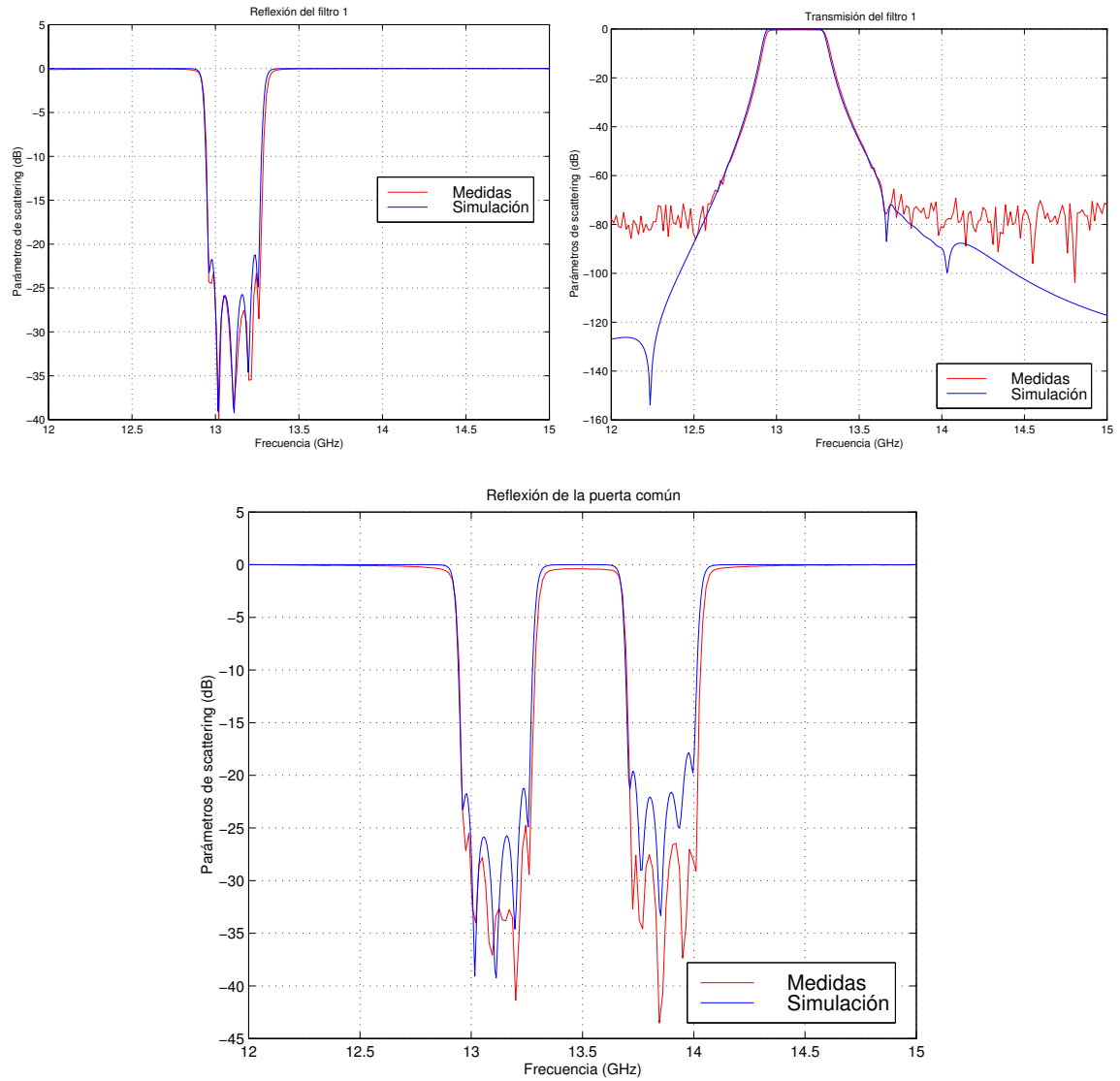


Figura 6.12. Parámetros de scattering relacionados con el filtro 1. *Arriba Izquierda:* Coeficiente de reflexión del filtro 1. *Arriba Derecha:* Coeficiente de transmisión del filtro 1. *Abajo:* Reflexión de la puerta común.

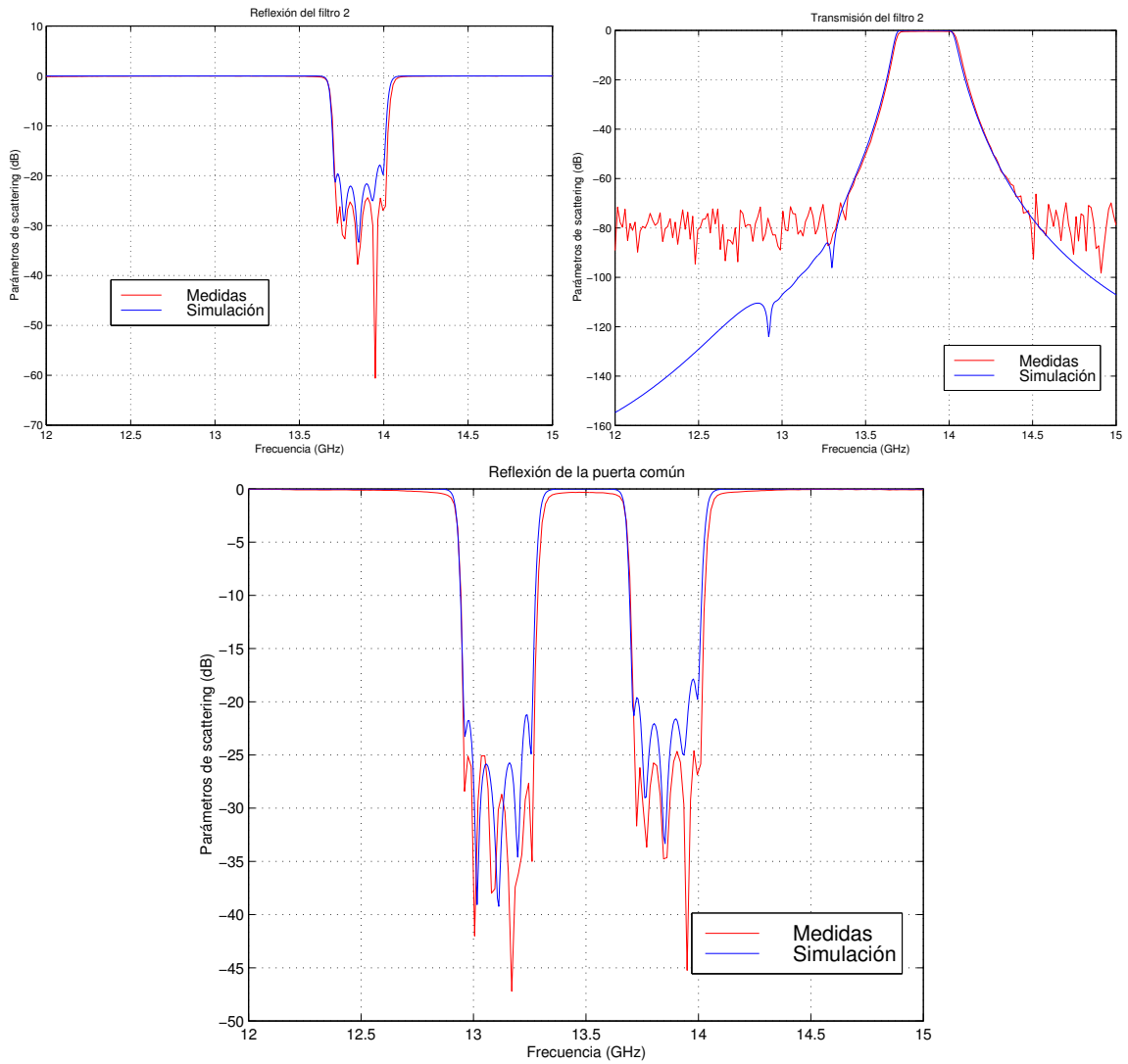


Figura 6.13. Parámetros de scattering relacionados con el filtro 2. *Arriba Izquierda:* Coeficiente de reflexión del filtro 2. *Arriba Derecha:* Coeficiente de transmisión del filtro 2. *Abajo:* Reflexión de la puerta común.

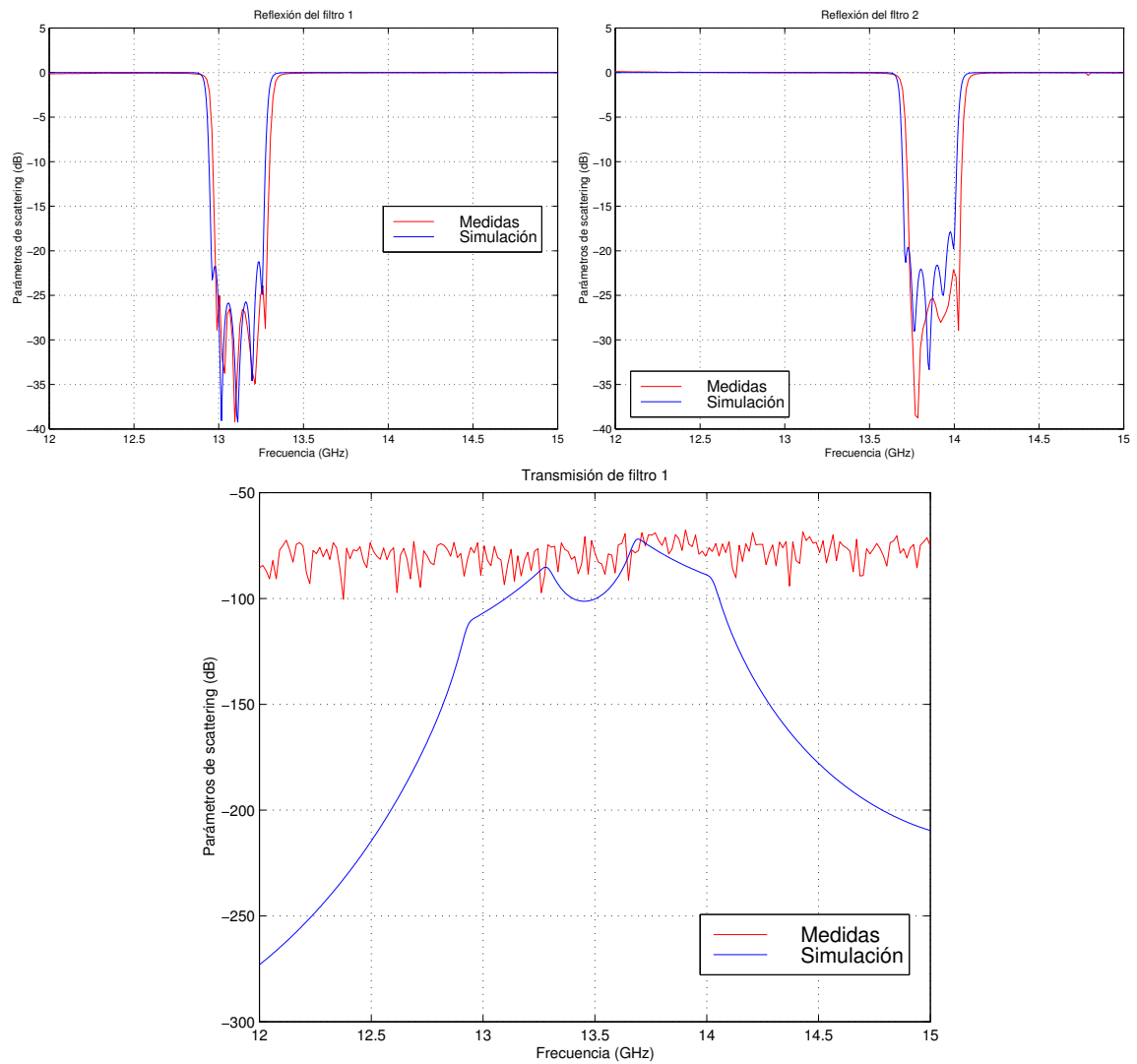


Figura 6.14. Parámetros de scattering relacionados con ambos filtros (se ha cargado el acceso común). *Arriba Izquierda:* Coeficiente de reflexión del filtro 1. *Arriba Derecha:* Coeficiente de reflexión del filtro 2. *Abajo:* Coeficiente de transmisión entre los puertos 1 y 2.

encuentra por debajo del fondo de ruido del analizador. De todas formas, este resultado sirve para poder predecir un máximo de transferencia de potencia entre los puertos desacoplados, y también para observar que este nivel está ya próximo a la sensibilidad máxima del analizador de redes.

Para obtener los resultados mostrados en las figuras anteriores, ha sido necesario emplear los siguientes valores en los parámetros del simulador:

Número de modos accesibles: 4

Número de funciones base: 25

Número de modos localizados: 50

los cuales han proporcionado resultados muy estables en tiempos de computación muy bajos (velocidad de convergencia elevada). Como se ve, el número de modos necesario para conectar las matrices ha sido muy bajo, así como el número de funciones base y el número de modos localizados. Prácticamente se habrían obtenidos los mismos resultados si se hubieran utilizado 250 modos localizados, 70 funciones base y 10 modos accesibles. Esto ha sido posible gracias a la reducción del número de modos considerados (eliminación de modos no acoplados) debido a la simetría de la estructura explicada en el apéndice B. La simulación ha requerido un tiempo menor de un minuto en toda la banda en un ordenador personal con procesador Pentium II a 400 MHz con 128 MB de RAM.

Análisis del efecto de curvatura en el acceso común

Para terminar, se ha realizado un análisis del efecto de la curvatura en el acceso común y en todo el iris que adapta la salida común de la unión en T a la guía estándar WR-75 de salida, el cual puede surgir asociado al proceso de mecanizado del dispositivo. Para estudiar este efecto se ha redondeado un acceso de la unión en T y un iris de diferente tamaño que conecta la unión a la guía estándar de salida. Esto significa redondear la sección transversal de las guías de longitud d_1 y t_1 mostradas en la figura 6.4, así como la sección transversal del puerto común de la unión T.

Los resultados del análisis del diplexor para diferentes radios de curvatura se muestran en la figura 6.15.

En la figura 6.15 se observa que el filtro es muy sensible a las tolerancias de fabricación en el radio de curvatura de la salida común. Es más, se observa una mejora en la respuesta del filtro 2 cuando aumenta el radio hasta 2,0 mm. Sin embargo, para un radio de 3,0 mm la respuesta de este filtro comienza a empeorar. Todo este buen comportamiento del filtro 2 ha sido, tal y como puede observarse en la figura 6.15, en detrimento de la respuesta en el filtro 1. Este efecto de redondeo considerado podría tenerse en cuenta a la hora de diseñar el diplexor, ya que una pequeña alteración respecto a los parámetros de diseño durante la fabricación puede producir un dispositivo final de comportamiento muy alejado de las especificaciones requeridas.

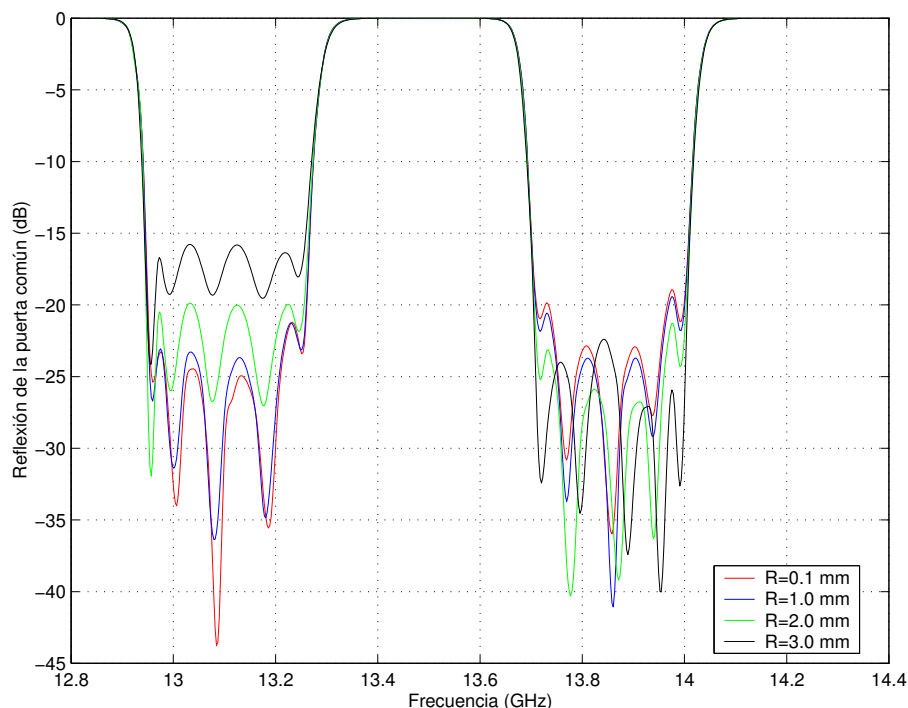


Figura 6.15. Reflexión de la puerta común considerando esquinas redondeadas a la salida de la T en el acceso común. En rojo se ha simulado un radio de curvatura nulo, en azul un radio de curvatura de 1,0 mm, en verde un radio de curvatura de 2,0 mm y en negro un radio de curvatura de 3,0 mm.

6.5. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una forma eficiente de simular un dispositivo complejo formado por elementos básicos estudiados en otros capítulos de la presente tesis. Se ha escogido la forma más eficiente de representación de cada uno de los bloques constitutivos del diplexor para conseguir un código muy eficiente que pueda simular su comportamiento de forma rigurosa.

Finalmente, utilizando la teoría desarrollada en este capítulo, se ha conseguido disminuir el número de modos a considerar en el análisis. Esto ha sido necesario porque aparecen un mayor número de modos acoplados si consideramos tolerancias de fabricación en la estructura. Si se desea mantener la eficiencia del simulador, se requiere una estrategia que disminuya el número de modos a conectar, y la técnica propuesta en este capítulo se ha revelado como excelente para este tipo de estructuras en las que hay modos que por simetría van a atenuarse rápidamente en su interior.

La comparación con las medidas del prototipo construido y embarcado en el satélite Hispasat 1-C han sido satisfactorias, teniendo en cuenta las diferencias que existen entre el

dispositivo mecanizado y el modelo simulado.

Bibliografía

- [1] A. R. Brown and G. M. Rebeiz, "A high-performance integrated K-Band diplexer," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, pp. 1477–1481, August 1999.
- [2] M. Guglielmi, "Simple CAD procedure for microwave filters and multiplexers," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, pp. 1347–1352, July 1994.
- [3] R. Levy, "Analytical design of contiguous multiplexers," *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, vol. 3, pp. 899–902, June 1999.
- [4] J. Bornemann, S. Amari, and R. Vahldieck, "A combined mode-matching and coupled-integral-equations technique for the design of narrow-band H-plane waveguide diplexers," *IEEE AP-S International Symposium Digest*, vol. 2, pp. 950–953, July 1999.
- [5] L. Accatino, "CAD of a Ku-band antenna diplexer," *Proceedings of the 23rd European Microwave Conference*, pp. 544–546, 1993.
- [6] F. Arndt, J. Dittloff, U. Papziner, D. Fasold, N. Nathrath, and H. Wolf, "Rigorous field theory design of compact and lightweight broadband diplexers for satellite systems," *Proceedings of the 19th European Microwave Conference*, pp. 1214–1219, 1989.
- [7] J. Dittloff and F. Arndt, "Computer aided design of slit-coupled H-plane T-junctions diplexers with E-plane metal-insert filters," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 36, pp. 1833–1839, December 1988.
- [8] A. Morini, T. Rozzi, and M. Mongiardo, "Efficient CAD of wideband contiguous channel multiplexers," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest*, pp. 1651–1654, 1996.
- [9] A. Morini and T. Rozzi, "Design of optimum three port symmetrical junctions for diplexer applications," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest*, pp. 739–742, 1994.
- [10] J. Esteban and J. M. Rebollar, "CAD for broadband antenna diplexer," *ESA Workshop on Advanced CAD for microwave Filters and Passive Devices*, pp. 139–149, November 1995.

-
- [11] J. R. Montejo-Garai and J. M. Rebollar, "CAD of a Ku band E-plane output diplexer for satellite applications," *7th International Symposium on Recent Advances in Microwave Technology Proceedings*, pp. 769–772, December 1999.
- [12] J. M. Rebollar and J. R. Montejo-Garai, "Diseño de diplexor con T-plano H asimétrica en banda Ku para aplicaciones espaciales," *Libro de Actas del XIV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional De Radio*, pp. 388–389, Septiembre 1999.
- [13] J. Bará, *Circuitos de Microondas con Líneas de Transmisión*. Barcelona: Edicions UPC, 1994.
- [14] J. Uher, J. Bornemann, and U. Rosenberg, *Waveguide Components for Antenna Feed Systems: Theory and CAD*. Boston: Artech House, 1993.
- [15] G. Maral and M. Bousquet, *Satellite Communications Systems*. Wiley Series in Communication and Distributed Systems, Chichester: John Wiley & Sons, third ed., 1998.
- [16] U. Rosenberg, P. Rosowsky, W. Rümmer, and D. Wolk, "Tunable manifold multiplexers: A new possibility for satellite redundancy philosophy," *18th European Microwave Conference*, pp. 870–875, September 1988.
- [17] J. Bandler, R. Biernacki, S. Chen, R. Hemmers, and K. Madsen, "Electromagnetic optimization exploiting aggressive space mapping," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, pp. 2874–2881, December 1995.
- [18] Y. Rong, H. Yao, K. A. Zaki, and T. Dolan, "Millimeter wave ka-band H-plane diplexers and multiplexers," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, pp. 2325–2330, December 1999.
- [19] V. E. Boria, G. Gerini, and M. Guglielmi, "An efficient inversion technique for banded linear systems," *IEEE MTT-S Symposium Digest*, vol. 3, pp. 1567–1570, 1997.
- [20] G. Conciauro, M. Guglielmi, and M. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis - CAD Techniques for Waveguide Components and Filters*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2000.

Apéndice A

Aceleración de la convergencia de series

A.1. Aceleración de la función de Green

En este apéndice se va a mostrar una técnica de aceleración de series lentamente convergentes. Se ha aplicado el método para acelerar series dobles de convergencia lenta muy empleadas en electromagnetismo. En particular se empezará por acelerar la función de Green de la ecuación de Poisson para una guía rectangular, es decir la función que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\delta(x - x')\delta(y - y') \quad (\text{A.1})$$

con las siguientes condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas en los extremos del intervalo de definición:

$$\begin{aligned} g(x = 0, 0 \leq y \leq b) &= g(x = a, 0 \leq y \leq b) = 0 \\ g(0 \leq x \leq a, y = 0) &= g(0 \leq x \leq a, y = b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

La expresión de la función de Green en serie de autofunciones de una guía rectangular que satisface (A.1) con las condiciones de contorno (A.2) es:

$$g(x, y; x', y') = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y'\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.3})$$

pudiéndose encontrar su deducción en [1]. El problema de la expresión (A.3) radica en su implementación computacional, debido a la lenta convergencia que presenta la serie doble. Para acelerar esta lenta convergencia puede utilizarse la suma de Poisson, que tal y como se recoge en [2] y [3] consiste en:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2m\pi}{\alpha}\right) \quad (\text{A.4})$$

donde la función F es la transformada de Fourier de f definida como sigue:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \quad (\text{A.5})$$

Para poder aplicar la relación anterior, la función f debe cumplir las siguientes condiciones:

- f tiene que ser no negativa.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ tiene que existir como integral de Riemann impropia.
- f crece en $]-\infty, 0]$ y decrece en $[0, +\infty[$.

Todas estas condiciones se recogen en [4] así como la demostración de la expresión de la suma de Poisson. En [2] y [3] aparece sin embargo otra versión de la demostración de la suma de Poisson con condiciones más relajadas para f . En la práctica se suele utilizar la condición asociada a esta segunda versión, que se expresa como:

$$f \in L^2 \text{ en }]-\infty, +\infty[\quad (\text{A.6})$$

y que significa que f es de clase de Lebesgue super-dos, o lo que es lo mismo, $|f(x)|^2$ es integrable Riemann en el intervalo en cuestión. Esta condición sí que la cumple la función que nos ocupa. La utilidad de la suma de Poisson se puede ver intuitivamente gracias a una propiedad de las transformadas de Fourier. Si $f(t)$ es una función localizada cerca de $t = 0$, entonces su $F(\omega)$ está “ensanchada”, es decir, tiene valores apreciables en un gran rango de ω . Por ejemplo, si $f(t) = \delta(t)$ entonces $F(\omega) = 1 \forall \omega$. Por el contrario, si $f(t)$ está “esparcida” a lo largo del eje t , entonces $F(\omega)$ está concentrada cerca de $\omega = 0$. Una serie lentamente convergente con un término general $f(\alpha n)$ es, por lo tanto, convertida en una serie rápidamente convergente con un término general $F(2n\pi/\alpha)$, ya que F será pequeña para grandes valores de n cuando, por otra parte, $f(\alpha n)$ decrezca lentamente con n creciente. Como se observa en (A.4), el índice de la serie a sumar tiene que extenderse a todo m entero y no sólo a sus valores positivos. Para evitar este problema vamos a extender la serie original (A.3) gracias a las propiedades de la función seno. Extenderemos el índice m solamente, con eso será suficiente para nuestros propósitos. De esta forma la serie original se expresará como:

$$g(x, y; x', y') = \frac{2}{ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y'\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.7})$$

Veamos seguidamente algunas maneras de descomponer los senos de los términos de la serie según m :

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) &= \\ -\frac{1}{4} \left[e^{j\frac{m\pi}{a}(x+x')} + e^{-j\frac{m\pi}{a}(x+x')} - e^{j\frac{m\pi}{a}(x-x')} - e^{-j\frac{m\pi}{a}(x-x')} \right] &= \\ -\frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x+x')\right] - \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x-x')\right] \right\} & \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Pensemos ahora en sumar una serie general que nos permita posteriormente sumar todos los términos que aparecerán en (A.7) cuando se haga uso de la ecuación anterior. Vamos pues a acelerar la siguiente serie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\beta n}}{n^2 + \gamma^2} \quad (\text{A.9})$$

Aplicamos (A.4) haciendo $\alpha = 1$ y definimos

$$f(n) = \frac{e^{j\beta n}}{n^2 + \gamma^2} \quad (\text{A.10})$$

La transformada de Fourier de la función anterior es

$$F(\omega) = \frac{\pi}{\gamma} e^{-\gamma|\beta+\omega|} \quad (\text{A.11})$$

cuyo cálculo detallado se recoge en el apartado A.4 de este apéndice.

Por lo tanto podemos escribir en virtud de (A.4):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\beta n}}{n^2 + \gamma^2} = \frac{\pi}{\gamma} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\beta+2\pi m|} = \frac{\pi \cosh \gamma (\pi - \beta)}{\gamma \sinh \gamma \pi} \quad (\text{A.12})$$

La serie del segundo miembro de (A.12) está formada por términos exponenciales que tienden a cero más rápidamente que los términos de la serie del primer miembro, y por tanto podemos asegurar que la velocidad de convergencia será más elevada¹. Vemos que el segundo miembro de (A.12) tiene todos sus términos reales, mientras que el primer miembro tiene términos complejos en general. Separando pues partes reales e imaginarias, e identificando términos obtenemos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\beta n)}{n^2 + \gamma^2} = \frac{\pi}{\gamma} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\beta+2\pi m|} \quad (\text{A.13a})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\beta n)}{n^2 + \gamma^2} = 0 \quad (\text{A.13b})$$

Gracias a (A.13a) ya podemos acelerar las series en que se descompone (A.7) como consecuencia de utilizar (A.8). Escogiendo una de estas series se obtiene que:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos \left[\frac{m\pi}{a} (x + x') \right]}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} = \frac{ab}{n\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-n \frac{\pi}{b} |x+x'+2am|} \quad (\text{A.14})$$

¹Aunque sabemos lo que vale la suma de (A.12), no nos conviene utilizar este valor sino una serie cuyo término general sea sencillo y rápidamente convergente, y así poder sumar respecto a otro índice. Lo que se consigue mediante la presente técnica es acelerar la serie respecto a un índice y sumar respecto al otro.

Por lo tanto, (A.7) queda como sigue:

$$\begin{aligned}
 g &= -\frac{1}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y' \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos \left[\frac{m\pi}{a} (x+x') \right] - \cos \left[\frac{m\pi}{a} (x-x') \right]}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y' \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-n|x+x'+2am|\frac{\pi}{b}} - e^{-n|x-x'+2am|\frac{\pi}{b}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos \left[\frac{n\pi}{b} (y+y') \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} (y-y') \right]}{n} \left(e^{-n|x+x'+2am|\frac{\pi}{b}} - e^{-n|x-x'+2am|\frac{\pi}{b}} \right)
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Para sumar sobre el índice n , no hace falta aplicar otra vez la suma de Poisson. Nos basta calcular la suma de la siguiente serie general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{j\alpha n} e^{-\beta n}}{n} \tag{A.16}$$

que puede obtenerse fácilmente con un simple truco aplicando la suma de una serie geométrica:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{j\alpha n - \beta n}}{n} &= j \int_{j\infty}^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} e^{j\alpha n - \beta n} d\alpha = j \int_{j\infty}^{\alpha} \frac{e^{j\alpha - \beta}}{1 - e^{j\alpha - \beta}} d\alpha \\
 &= -\ln(1 - e^{j\alpha - \beta})
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Con la expresión (A.17) ya podemos sumar los términos del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta n} \cos(\alpha n)}{n} = \Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{j\alpha n - \beta n}}{n} \right] = \Re [-\ln(1 - e^{j\alpha - \beta})] \tag{A.18}$$

De variable compleja sabemos que:

$$\ln(z) = \ln|z| + j \arg(z) \Rightarrow \Re[\ln(z)] = \ln|z| \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{A.19}$$

por lo tanto podemos escribir que los términos buscados tienen el siguiente valor:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta n} \cos(\alpha n)}{n} &= -\ln|1 - e^{j\alpha - \beta}| = -\frac{1}{2} \ln|1 - e^{j\alpha - \beta}|^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \ln[(1 - e^{j\alpha - \beta})(1 - e^{-j\alpha - \beta})] \\
 &= -\frac{1}{2} \ln(1 - 2e^{-\beta} \cos \alpha + e^{-2\beta}) \\
 &= -\frac{1}{2} \ln[2e^{-\beta} (\cosh \beta - \cos \alpha)]
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Particularizando para nuestra serie en concreto, aparecen en (A.15) cuatro términos de apariencia similar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x \pm x' + 2am| \frac{\pi}{b}} \cos \left[\frac{n\pi}{b} (y \pm y') \right]}{n} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - 2e^{-\frac{\pi}{b}|x \pm x' + 2am|} \cos \left[\frac{\pi}{b} (y \pm y') \right] + e^{-2\frac{\pi}{b}|x \pm x' + 2am|} \right) \quad (\text{A.21})$$

Finalmente la serie completa la podemos escribir de la siguiente manera:

$$g(x, y; x', y') = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln T_m^{10} - \ln T_m^{11} - \ln T_m^{00} + \ln T_m^{01} \quad (\text{A.22})$$

o de forma más compacta:

$$g(x, y; x', y') = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{11} T_m^{00}} \quad (\text{A.23})$$

donde los términos T_m^{pq} se definen como sigue:

$$T_m^{pq} = 1 - 2e^{-|x - (-1)^p x' + 2am| \pi / b} \cos \frac{\pi}{b} (y - (-1)^q y') + e^{-2|x - (-1)^p x' + 2am| \pi / b} \quad (\text{A.24})$$

A.2. Aceleración del gradiente de la función de Green

En algunas aplicaciones, como por ejemplo el cálculo del campo producido por los modos TE en una guía con sección arbitraria, es necesario calcular el gradiente de la función de Green si utilizamos el método BI-RME. La expresión de la función de Green de la cual vamos a calcular el gradiente es la recogida en (A.3). El objetivo es calcular el gradiente de la función de Green definida por la expresión anterior. Podríamos intentar calcular el gradiente a partir de la expresión de la función de Green con convergencia acelerada, pero dado que los términos son muy complejos vamos a intentar calcular el gradiente de la serie original y posteriormente acelerar la convergencia del gradiente. La expresión del gradiente se calcula del siguiente modo:

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial g}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.25})$$

Calculamos primero la parcial respecto de x :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{4\pi}{a^2 b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m \frac{\text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x' \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y' \right)}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \quad (\text{A.26})$$

Observando la expresión anterior nos damos cuenta de que cumple los requisitos necesarios para poder aplicar la suma de Poisson. Además fijándonos en que aparece el índice m

multiplicando a la expresión, podemos asegurar que la convergencia de esta serie será de un orden más lenta que la convergencia de la serie de partida cuya convergencia ya era, de por sí, bastante lenta. Veamos qué sucede al aplicar la suma de Poisson.

Primeramente se extiende el índice n a los enteros negativos y se agrupan los senos que contienen a n :

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y'\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{b}(y-y') - \cos\frac{n\pi}{b}(y+y')\right] \quad (\text{A.27})$$

con lo que obtenemos:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\pi}{a^2b} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \frac{mb^2}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{b}(y-y') - \cos\frac{n\pi}{b}(y+y')}{n^2 + \left(\frac{mb}{a}\right)^2} \quad (\text{A.28})$$

De (A.13a) sabemos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{b}(y \pm y')}{n^2 + \left(\frac{mb}{a}\right)^2} = \frac{a\pi}{mb} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-m\frac{b}{a}\left|\frac{\pi}{b}(y \pm y') + 2\pi n\right|} \quad (\text{A.29})$$

y sustituyendo (A.29) en la expresión (A.28) se deduce:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \left[e^{-\frac{m\pi}{a}|y-y'+2nb|} - e^{-\frac{m\pi}{a}|y+y'+2nb|} \right] \quad (\text{A.30})$$

que podemos escribir de manera más útil como:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\frac{m\pi}{a}(x+x') - \operatorname{sen}\frac{m\pi}{a}(x-x') \right] \left(e^{-m\frac{\pi}{a}|y-y'+2nb|} - e^{-m\frac{\pi}{a}|y+y'+2nb|} \right) \quad (\text{A.31})$$

El paso final consiste sumar la serie en m , y para ello necesitamos conocer lo que vale:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\beta} \operatorname{sen}(m\alpha) &= \Im \left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{jm\alpha - m\beta} \right] = \Im \left[\frac{e^{j\alpha - \beta}}{1 - e^{j\alpha - \beta}} \right] \\ &= \Im \left[\frac{e^{j\alpha - \beta} (1 - e^{-j\alpha - \beta})}{|1 - e^{j\alpha - \beta}|^2} \right] \\ &= \Im \left[\frac{e^{-\beta} \cos \alpha + je^{-\beta} \operatorname{sen} \alpha - e^{-2\beta}}{1 - 2e^{-\beta} \cos \alpha + e^{-2\beta}} \right] \\ &= \frac{e^{-\beta} \operatorname{sen} \alpha}{1 - 2e^{-\beta} \cos \alpha + e^{-2\beta}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cosh \beta - \cos \alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Por lo tanto:

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m \frac{\pi}{a} |y \pm y' + 2nb|} \operatorname{sen} \left[m \frac{\pi}{a} (x \pm x') \right] = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{a} (x \pm x')}{\cosh \frac{\pi}{a} (y \pm y' + 2nb) - \cos \frac{\pi}{a} (x \pm x')} \quad (\text{A.33})$$

Sustituyendo en (A.31) los cuatro términos de la forma (A.33) obtenemos:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{4a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{10} + C_n^{01} - C_n^{00} - C_n^{11} \quad (\text{A.34})$$

donde

$$C_n^{pq} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{a} (x - (-1)^p x')}{\cosh \frac{\pi}{a} (y - (-1)^q y' + 2nb) - \cos \frac{\pi}{a} (x - (-1)^p x')} \quad (\text{A.35})$$

Siguiendo los mismos pasos, la derivada parcial respecto de y de la función de Green original quedará como sigue:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{4b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_m^{10} + K_m^{01} - K_m^{00} - K_m^{11} \quad (\text{A.36})$$

donde

$$K_m^{pq} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{b} (y - (-1)^p y')}{\cosh \frac{\pi}{b} (x - (-1)^q x' + 2am) - \cos \frac{\pi}{b} (y - (-1)^p y')} \quad (\text{A.37})$$

La rapidez en la convergencia la marcan principalmente las exponenciales que aparecen en (A.35) y (A.37). Eso significa que cuanto mayor sea b/a en (A.34) o a/b en (A.36) menos términos se necesitarán.

Para ilustrar las ventajas que supone utilizar las series aceleradas recién propuestas, se va a considerar el siguiente ejemplo:

Sea una guía de dimensiones $a = b = 1$ para la cual se desea calcular la función de Green y su gradiente para el punto de campo $(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2})$ y para el punto de fuente $(x' = \frac{a}{3}, y' = \frac{b}{4})$.

Llamamos ahora

$$G^m = \frac{1}{4\pi} \sum_{r=-n}^n \ln \frac{T_r^{01} T_r^{10}}{T_r^{00} T_r^{11}} \quad (\text{A.38a})$$

$$S_x^n = \frac{1}{4a} \sum_{r=-n}^n C_r^{10} + C_r^{01} - C_r^{00} - C_r^{11} \quad (\text{A.38b})$$

$$S_y^m = \frac{1}{4b} \sum_{r=-m}^m K_r^{10} + K_r^{01} - K_r^{00} - K_r^{11} \quad (\text{A.38c})$$

con las T , las C y las K definidas según (A.24), (A.35) y (A.37), respectivamente. Simplemente se están definiendo la función de Green y las componentes de su gradiente como series truncadas. La función de Green la podemos aproximar truncando la serie original de autofunciones (por ejemplo hasta 200×200 términos):

$$\begin{aligned} g &\approx \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{200} \sum_{n=1}^{200} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y'\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= 9,419235650468520 \cdot 10^{-2} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Si el doble sumatorio anterior se extiende con m desde 1 a 300 y con n desde 1 hasta 300 obtenemos $g = 9,41923410923203 \cdot 10^{-2}$. Se observa que el resultado sigue siendo pobre, puesto que las cifras siguen variando bastante a partir del sexto decimal de la mantisa.

Calculando la función de Green truncando la serie acelerada obtenemos:

$$\begin{aligned} G^1 &= 9,420138523705600 \cdot 10^{-2} \\ G^2 &= 9,419235804289646 \cdot 10^{-2} \\ G^3 &= 9,419234118512832 \cdot 10^{-2} \\ G^4 &= 9,419234115364742 \cdot 10^{-2} \\ G^5 &= 9,419234115358862 \cdot 10^{-2} \\ G^6 &= 9,419234115358848 \cdot 10^{-2} \\ G^{m>6} &= G^6 \text{ (si trabajamos con reales de 8 bytes)} \end{aligned}$$

En conclusión, si el sumatorio va desde -6 hasta 6 alcanzamos la máxima precisión que es capaz de obtener un programa de cálculo o un compilador que trabaje con reales de 8 bytes (doble precisión). Cuanto mayor sea a/b , más rápido convergerá la serie (A.23), debido a las exponenciales presentes en (A.24) y por tanto necesitaremos menos términos para evaluar correctamente (A.23). Si nos encontramos con que la guía rectangular no es cuadrada, y además $b > a$ (no suele ser el caso) se puede aprovechar la simetría de la función de Green y obtener:

$$g(x, y; x', y'; a, b) = g(y, x; y', x'; b, a) \quad (\text{A.40})$$

El resultado será el mismo, pero la convergencia será más rápida (se necesitarán menos términos). Con el gradiente no podemos hacer lo mismo. El gradiente no tiene las propiedades de simetría de la función de Green, y si $a \neq b$ la convergencia será distinta para cada componente del gradiente:

$$\begin{cases} a > b \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} \text{ converge más rápido que } \frac{\partial g}{\partial x} \\ a < b \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} \text{ converge más rápido que } \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

En el caso que estamos tratando, la velocidad de convergencia es la misma para las dos parciales, y en este caso particular la velocidad de convergencia del gradiente es incluso

mayor que la de la función de Green:

$$\nabla g = S_x^n \hat{\mathbf{x}} + S_y^m \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.42})$$

Veamos la velocidad de convergencia del gradiente:

$$\begin{aligned} S_x^1 &= -2,073464549860328 \cdot 10^{-1} & S_y^1 &= -3,064783889429622 \cdot 10^{-1} \\ S_x^2 &= -2,073464538663695 \cdot 10^{-1} & S_y^2 &= -3,064783866964869 \cdot 10^{-1} \\ S_x^3 &= -2,073464538663656 \cdot 10^{-1} & S_y^3 &= -3,064783866964791 \cdot 10^{-1} \\ S_x^{n>3} &= S_x^3 & S_y^{m>3} &= S_y^3 \end{aligned}$$

Si utilizamos la ecuación (A.26) para calcular la parcial respecto de x , y su análoga para calcular la parcial respecto de y , obtendríamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &\approx \frac{4\pi}{a^2 b} \sum_{m=1}^{200} \sum_{n=1}^{200} mA_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = -2,073463563830570 \cdot 10^{-1} \\ \frac{\partial g}{\partial x} &\approx \frac{4\pi}{a^2 b} \sum_{m=1}^{300} \sum_{n=1}^{300} mA_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = -2,073421222176340 \cdot 10^{-1} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &\approx \frac{4\pi}{ab^2} \sum_{m=1}^{200} \sum_{n=1}^{200} nA_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = -3,078497655913245 \cdot 10^{-1} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &\approx \frac{4\pi}{ab^2} \sum_{m=1}^{300} \sum_{n=1}^{300} nA_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = -3,064722608200819 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

Como se puede observar, la convergencia es muy lenta. Fijados los puntos de fuente y de campo, el calcular un doble sumatorio de 1 a 300 para ambos índices supone sumar 90,000 términos para conseguir una precisión poco razonable, mientras que la serie acelerada solo requiere sumar 7 términos (desde -3 hasta 3).

Se puede mejorar la convergencia para la serie que converge más lentamente (normalmente $a > b$ y por tanto converge más lentamente la serie asociada a la parcial respecto de x) con solo acelerar la serie respecto al otro índice considerando el desarrollo teórico anterior (es decir m) y sumar con respecto al índice no acelerado (es decir n). Con ello tendríamos las siguientes expresiones para las parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{4b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m^{01} + T_m^{10} - T_m^{00} - T_m^{11} \quad (\text{A.43})$$

donde ahora

$$\begin{aligned} T_m^{pq} &= S_m^p \frac{\cos\left[\frac{\pi}{b}(y - (-1)^q y')\right] - e^{-\frac{\pi}{b}|x - (-1)^p x' + 2ma|}}{\cosh\left[\frac{\pi}{b}(x - (-1)^p x' + 2ma)\right] - \cos\left[\frac{\pi}{b}(y - (-1)^q y')\right]} \\ S_m^p &= \operatorname{sgn}\left[\frac{\pi}{a}(x - (-1)^p x') + 2m\pi\right] \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Si $x = x'$ podemos decir que T_m^{00} y T_m^{01} son cero para todos los m y no habría que calcularlos en ese caso². La expresión anterior converge más rápidamente si $a > b$. Si $b > a$ entonces utilizamos la expresión deducida anteriormente para la parcial con respecto a x . Esta nueva expresión recién propuesta para la parcial respecto de x es también válida para la parcial con respecto a y cambiando x por y , x' por y' y a por b .

Por último, conviene decir que para obtener (A.43) es necesario saber que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(\beta n)}{n^2 + \gamma^2} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\beta + 2n\pi) e^{-\gamma|\beta+2n\pi|} \quad (\text{A.45})$$

cuyo proceso de deducción se explicará en el apartado A.3.2.

A.3. Aceleración de la diádica $\nabla\nabla'g$

Para los modos TE en el método BI-RME necesitamos calcular $\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial g}{\partial l'} \right)$ donde g es la función de Green y l y l' son unas direcciones arbitrarias cuyos vectores unitarios se representarán por $\hat{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{t}}'$ respectivamente. El cálculo de $\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial g}{\partial l'} \right)$ se puede evitar si forzamos la derivabilidad a trozos de las funciones base para poder integrar por partes el término mencionado, y eliminar de esta forma la fuerte singularidad inherente en la primera de las integrales de la expresión (2.10) (véase el capítulo 2). Caso de no poder forzar la citada derivabilidad por utilizar funciones base con derivada discontinua (e.g. pulsos rectangulares) será útil disponer de un método de cálculo acelerado de la diádica $\nabla\nabla'g$ ya que las derivadas direccionales se calculan como

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \nabla g \cdot \hat{\mathbf{t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial l \partial l'} = \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \nabla' g \cdot \hat{\mathbf{t}}' \quad (\text{A.46})$$

donde

$$\nabla \nabla' g = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y'} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x'} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y'} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.47})$$

Cada una de las cuatro componentes de esta diádica³ tiene una velocidad de convergencia menor que la propia función de Green dada por (A.3). De hecho, como hay dos derivaciones sobre la función de Green (cuyo desarrollo involucra una serie doble) significa que aparecerán dos índices (mn , nm , m^2 ó n^2 según la componente) multiplicando al término general. La convergencia de la diádica será más o menos dos órdenes de magnitud más lenta que la de la citada función de Green.

El objetivo ahora consiste en acelerar cada una de las series que representan las componentes de la diádica.

²Esto es debido a que serán cero los términos equivalentes con $\operatorname{sen} \frac{m\pi}{a}(x - x')$ definidos en (A.31). Así evitamos la indeterminación de la función signo para argumento nulo.

³Los cuatro dobles del tipo $\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}$ son las cuatro diádicas unitarias o *diadas*. En general en \mathbb{R}^3 existen nueve diadas. Cada una está formada por un par de vectores unitarios cuya posición no es conmutativa. Para más detalles se puede consultar [5].

A.3.1. Componente $\hat{x}\hat{x}$

La componente $\hat{x}\hat{x}$ se calcula a partir de la expresión (A.3) como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'} &= \frac{4\pi^2}{a^3 b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y'\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \\ &= \frac{b}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{b}(y-y') - \cos\frac{n\pi}{b}(y+y')}{n^2 + \left(\frac{mb}{a}\right)^2}\end{aligned}\quad (\text{A.48})$$

Recordando la expresión (A.13a) podemos reescribir (A.48) como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'} &= \\ &= \frac{\pi}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-m\frac{\pi}{a}|y-y'+2nb|} - e^{-m\frac{\pi}{a}|y+y'+2nb|} = \\ &= \frac{\pi}{2a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m \left[\cos\frac{m\pi}{a}(x+x') + \cos\frac{m\pi}{a}(x-x') \right] \left[e^{-m\frac{\pi}{a}|y-y'+2nb|} - e^{-m\frac{\pi}{a}|y+y'+2nb|} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.49})$$

donde ahora necesitamos saber cómo se suman expresiones del tipo:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-m\beta} e^{jm\alpha} &= \sum_{m=1}^{\infty} m e^{mz} \Big|_{z=j\alpha-\beta} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dz} e^{mz} \\ &= \frac{d}{dz} \sum_{m=1}^{\infty} e^{mz} = \frac{e^z}{(1-e^z)^2} = \frac{e^{j\alpha-\beta}}{(1-e^{j\alpha-\beta})^2} \\ &= \frac{e^{j\alpha-\beta} (1-e^{-j\alpha-\beta})^2}{|1-e^{j\alpha-\beta}|^4} \\ &= \frac{e^{-\beta} (\cos\alpha + j \operatorname{sen}\alpha) - 2e^{-2\beta} + e^{-3\beta} (\cos\alpha - j \operatorname{sen}\alpha)}{\left[(1-e^{-\beta} \cos\alpha)^2 + (e^{-\beta} \operatorname{sen}\alpha)^2 \right]^2} \\ &= \frac{(e^{-\beta} + e^{-3\beta}) \cos\alpha - 2e^{-2\beta}}{(1+e^{-2\beta} - 2e^{-\beta} \cos\alpha)^2} + j \frac{(e^{-\beta} - e^{-3\beta}) \operatorname{sen}\alpha}{(1+e^{-2\beta} - 2e^{-\beta} \cos\alpha)^2} \\ &= \frac{\cosh\beta \cos\alpha - 1}{2(\cosh\beta - \cos\alpha)^2} + j \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{senh}\beta}{2(\cosh\beta - \cos\alpha)^2}\end{aligned}\quad (\text{A.50})$$

donde hemos aplicado que la serie de una derivada de una función es la derivada de la serie de funciones, porque la serie es geométrica y por ello uniformemente convergente⁴. Identifi-

⁴Si una serie de funciones es uniformemente convergente podemos permutar el orden del sumatorio y la derivación o el sumatorio y la integral o el sumatorio y el límite sin alterar el resultado. Véase [4].

cando pues partes reales e imaginarias en la igualdad anterior obtenemos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-m\beta} \cos(m\alpha) = \frac{\cosh \beta \cos \alpha - 1}{2(\cosh \beta - \cos \alpha)^2} \quad (\text{A.51a})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-m\beta} \operatorname{sen}(m\alpha) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} \beta}{2(\cosh \beta - \cos \alpha)^2} \quad (\text{A.51b})$$

Finalmente obtenemos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'} = \frac{\pi}{4a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{10} - T_n^{11} + T_n^{00} - T_n^{01} \quad (\text{A.52})$$

donde

$$T_n^{pq} = \frac{\cosh \left[\frac{\pi}{a} (y - (-1)^q y' + 2nb) \right] \cos \left[\frac{\pi}{a} (x - (-1)^p x') \right] - 1}{\left\{ \cosh \left[\frac{\pi}{a} (y - (-1)^q y' + 2nb) \right] - \cos \left[\frac{\pi}{a} (x - (-1)^p x') \right] \right\}^2} \quad (\text{A.53})$$

A.3.2. Componente $\hat{x}\hat{y}$

La siguiente componente de la diádica a calcular es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y'} &= \frac{4\pi^2}{a^2 b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x' \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y' \right)}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x' \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} (y + y') + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} (y - y')}{n^2 + \left(\frac{mb}{a} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

El siguiente paso es poder acelerar la serie de índice n en (A.54) por medio de la suma de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n e^{j\beta n}}{n^2 + \gamma^2} = j\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\beta + 2n\pi) e^{-\gamma|\beta+2n\pi|} = j\pi \frac{\operatorname{senh} \gamma (\pi - \beta)}{\operatorname{senh} \gamma \pi} \quad (\text{A.55})$$

ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{j\beta t}}{t^2 + \gamma^2} e^{j\omega t} dt = j\pi \operatorname{sgn}(\beta + \omega) e^{-\gamma|\beta+\omega|} \quad (\text{A.56})$$

La transformada de Fourier anterior se calcula como se indica en la sección A.4, utilizando además el mismo circuito mostrado en dicha sección. Por tanto, igualando partes reales e imaginarias en (A.55) concluimos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(\beta n)}{n^2 + \gamma^2} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\beta + 2n\pi) e^{-\gamma|\beta+2n\pi|} \quad (\text{A.57a})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \cos(\beta n)}{n^2 + \gamma^2} = 0 \quad (\text{A.57b})$$

y utilizando (A.57a) en (A.54) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y'} &= \\
& \frac{\pi}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x'\right) \\
& \left[\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{b}(y+y') + 2n\pi\right) e^{-m\frac{\pi}{a}|y+y'+2nb|} + \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{b}(y-y') + 2n\pi\right) e^{-m\frac{\pi}{a}|y-y'+2nb|} \right] \\
&= \frac{\pi}{2a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m \left[\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}(x+x')\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}(x-x')\right) \right] \\
& \left[\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{b}(y+y') + 2n\pi\right) e^{-m\frac{\pi}{a}|y+y'+2nb|} + \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{b}(y-y') + 2n\pi\right) e^{-m\frac{\pi}{a}|y-y'+2nb|} \right]
\end{aligned} \tag{A.58}$$

En virtud de (A.51b) la componente $\hat{x}\hat{y}$ de la diádica queda finalmente como:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y'} = \frac{\pi}{4a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{11} + T_n^{10} - T_n^{01} - T_n^{00} \tag{A.59}$$

donde

$$\begin{aligned}
T_n^{pq} &= S_n^q \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{a}(x - (-1)^p x')\right] \operatorname{senh}\left[\frac{\pi}{a}|y - (-1)^q y' + 2nb|\right]}{\left\{ \cosh\left[\frac{\pi}{a}|y - (-1)^q y' + 2nb|\right] - \cos\left[\frac{\pi}{a}(x - (-1)^p x')\right] \right\}^2} \\
S_n^q &= \operatorname{sgn}\left[\frac{\pi}{b}(y - (-1)^q y') + 2n\pi\right]
\end{aligned} \tag{A.60}$$

A.3.3. Cálculo del resto de componentes de la diádica

Respecto a las expresiones de las demás componentes, podemos aprovechar las propiedades de simetría de la función de Green para obtenerlas a partir de las ya calculadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x'}(x, y; x', y'; a, b) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y'}(y, x; y', x'; b, a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y'}(x', y'; x, y; a, b) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y'}(x, y; x', y'; a, b) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'}(y, x; y', x'; b, a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'}(y', x'; y, x; b, a)
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Para las componente cruzada elegiremos la más conveniente dependiendo de la relación a/b , ya que de las posibilidades que tenemos para escoger sólo una tendrá una mejor convergencia para cierto valor de a/b . Para las componentes no cruzadas no hay solución: una convergerá más rápida que la otra.

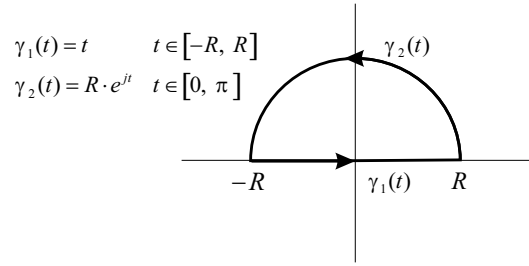


Figura A.1. Circuito de integración para el semiplano superior con la parametrización de los caminos que lo componen.

A.4. Cálculo de transformadas de Fourier

La transformada de Fourier de la función definida según (A.10) se obtiene por integración en el plano complejo. Los conocimientos necesarios sobre teoría de variable compleja los podemos encontrar en [6]. Para el cálculo de transformadas y análisis operacional puede consultarse también [7]. La transformada a calcular tiene pues el siguiente aspecto:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\alpha t}}{t^2 + a^2} e^{j\omega t} dt \quad (\text{A.62})$$

Como los polos del integrando están situados en el eje imaginario (uno en el semiplano superior y otro en el inferior) utilizaremos el circuito “normal” en estos casos: un semicírculo en cada semiplano. Para el semiplano superior tenemos el circuito mostrado en la figura A.1, donde aparecen parametrizados los caminos de integración sobre el circuito.

La integral a lo largo del circuito vale pues:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi j \sum_k \text{RES}(f; a_k) \quad (\text{A.63})$$

donde los a_k son los polos que están encerrados dentro del circuito y $\text{RES}(f; a_k)$ representa el valor del residuo de la función f en el polo a_k . La integral a lo largo del camino γ_1 es la integral que buscamos, y en cuanto a la integral sobre γ_2 a continuación se muestra cómo obtener su valor.

Lema de Jordan

Sea S un sector del semiplano $\text{Im}(z) \geq 0$, $f : S \rightarrow C$ continua, y sea $\gamma_R(t) = R \cdot e^{jt}$, $t \in [\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$, $\gamma_R^* \subset S$, tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Entonces, si $a > 0$ se verifica que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{jaz} dz = 0 \quad (\text{A.64})$$

Gracias al lema anterior sabemos que la integral a lo largo del arco γ_2 , cuando hacemos que el arco abarque todo el semiplano superior, vale cero. El lema se cumple igualmente si $a < 0$, pero en ese caso tendremos que escoger el semicírculo invertido y, como siempre, recorrerlo en sentido positivo (antihorario).

En nuestro caso tenemos que hacer un cálculo de la integral sobre el circuito que hemos visto, posteriormente sobre el circuito invertido y finalmente fundir los resultados. Nuestra integral la podemos escribir pues como:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{t^2 + a^2} e^{j(\alpha+\omega)t} dt = 2\pi j \text{ RES} \left(\frac{e^{j(\alpha+\omega)z}}{z^2 + a^2}; z = ja \right) \quad (\text{A.65})$$

ya que sólo existe un polo en el semiplano superior. Todo esto es válido, como se ha dicho anteriormente, para $\alpha + \omega > 0$. Posteriormente nos encargaremos del otro caso. Así pues, nos queda por evaluar el segundo término de (A.65):

$$\text{RES} \left(\frac{e^{j(\alpha+\omega)z}}{z^2 + a^2}; z = ja \right) = \lim_{z \rightarrow ja} \frac{(z - ja) e^{j(\alpha+\omega)z}}{(z - ja)(z + ja)} = \frac{e^{-a(\alpha+\omega)}}{2ja} \quad (\text{A.66})$$

y por tanto la integral queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\alpha t}}{t^2 + a^2} e^{j\omega t} dt = \frac{\pi}{a} e^{-a(\alpha+\omega)} \quad (\text{A.67})$$

El caso para $\alpha + \omega < 0$ es análogo, con la salvedad de que para obtener la integral buscada hay que recorrer el circuito (semicírculo que ocupe el semiplano inferior) en sentido negativo (horario), y por lo tanto la integral valdrá:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{t^2 + a^2} e^{j(\alpha+\omega)t} dt = -2\pi j \text{ RES} \left(\frac{e^{j(\alpha+\omega)z}}{z^2 + a^2}; z = -ja \right) \quad (\text{A.68})$$

y el residuo será:

$$\text{RES} \left(\frac{e^{j(\alpha+\omega)z}}{z^2 + a^2}; z = -ja \right) = \lim_{z \rightarrow -ja} \frac{(z + ja) e^{j(\alpha+\omega)z}}{(z - ja)(z + ja)} = \frac{e^{a(\alpha+\omega)}}{-2ja} \quad (\text{A.69})$$

y la integral buscada tendrá el siguiente valor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\alpha t}}{t^2 + a^2} e^{j\omega t} dt = \frac{\pi}{a} e^{a(\alpha+\omega)} \quad (\text{A.70})$$

concluyéndose finalmente que:

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{a} e^{-a(\alpha+\omega)} & \text{si } \alpha + \omega > 0, \\ \frac{\pi}{a} e^{a(\alpha+\omega)} & \text{si } \alpha + \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{A.71})$$

Este resultado se puede expresar de forma compacta. La transformada de Fourier buscada presenta pues la siguiente expresión final:

$$F(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\alpha+\omega|} \quad (\text{A.72})$$

Bibliografía

- [1] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, Ltd., 1989.
- [2] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. International series in pure and applied physics, New York: McGraw-Hill, 1953.
- [3] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE Press, second ed., 1991.
- [4] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté, S.A., segunda ed., 1982.
- [5] C.-T. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*. Series on Electromagnetic Waves, New York: IEEE Press, second ed., 1994.
- [6] M. R. Spiegel, *Variable Compleja*. Madrid: McGraw-Hill, 1994.
- [7] M. R. Spiegel, *Transformadas de Laplace*. México: McGraw-Hill, 2000.

Apéndice B

Condiciones de contorno para estructuras simétricas

B.1. Introducción

En este apéndice se va a utilizar las simetrías de una estructura para, a partir de una porción de la estructura, generar unas condiciones de contorno que produzcan soluciones modales dentro de la citada porción totalmente equivalentes a las soluciones que se obtendrían si consideráramos el problema completo.

Primero se planteará el problema demostrándose la ortogonalidad de los modos con diferente simetría (par o impar) dentro de una misma guía, e incluso se demostrará esta ortogonalidad dentro de guías diferentes con una superficie común con un eje de simetría (lo cual será útil cuando tengamos que analizar estructuras compuestas por guías y uniones planares entre ellas). Posteriormente se demostrarán las condiciones de contorno que hay que aplicar al plano de simetría para conseguir una solución equivalente del problema original. Finalmente, se explicará cómo descartar familias de modos que no se van a acoplar en dispositivos con planos de simetría.

El objetivo final de este apéndice será disminuir el número de modos a tener en cuenta en una estructura con cierto grado de simetría, para así poder reducir el tamaño del problema si empleamos una técnica de análisis modal.

B.2. Planteamiento del problema

Supongamos una guía de ondas hueca o rellena con un dieléctrico lineal y homogéneo con contorno perfectamente conductor y con un plano de simetría (ver figura B.1). Esto supone que la sección transversal es simétrica respecto a un eje. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que este eje coincide con el eje y . La dirección de propagación coincide con el eje z y con respecto al eje x no tenemos ningún tipo de simetría. Las coordenadas

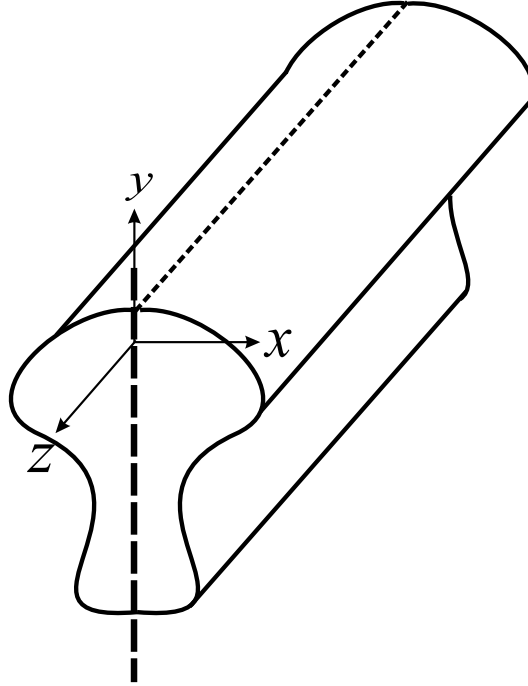


Figura B.1. Guía de ondas con sección transversal arbitraria y con un plano de simetría coincidente con el plano YZ .

transversales serían las coordenadas (x, y) , tal y como se muestra en la figura B.1. La sección transversal S tendrá un contorno que llamaremos C con un vector unitario normal \hat{n} .

Sea una función potencial $\phi_m(x, y)$ solución de la ecuación de Helmholtz homogénea

$$\nabla_t^2 \phi_m + k_m^2 \phi_m = 0 \quad (\text{B.1})$$

con las siguientes condiciones de contorno sobre C :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_m}{\partial n} &= 0, & \text{para modos TE}^z \\ \phi_m &= 0, & \text{para modos TM}^z \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Una vez calculada la función escalar ϕ_m para modos TE^z y TM^z , los vectores de campo transversales pueden calcularse como

$$\mathbf{e}_m = \begin{cases} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi_m, & \text{para modos TE}^z \\ -\nabla_t \phi_m, & \text{para modos TM}^z \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{h}_m = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_m \quad (\text{B.4})$$

El objetivo es obtener modos que tengan cierta simetría respecto al eje de simetría mostrado en la figura B.1.

Supongamos que el modo que hemos obtenido no tiene simetría respecto al eje, es decir, no es una función par ni impar con respecto a la coordenada x . Siempre podemos escribir:

$$\phi_m = \phi_m^{(P)} + \phi_m^{(I)} \quad (\text{B.5})$$

donde:

$$\phi_m^{(P)} = \frac{1}{2} [\phi_m(x, y) + \phi_m(-x, y)] \quad (\text{B.6a})$$

$$\phi_m^{(I)} = \frac{1}{2} [\phi_m(x, y) - \phi_m(-x, y)] \quad (\text{B.6b})$$

Vemos de la ecuación anterior que la función $\phi_m^{(P)}$ es par y la función $\phi_m^{(I)}$ es impar, pues se cumplen las condiciones:

$$\phi_m^{(P)}(x, y) = \phi_m^{(P)}(-x, y) \quad (\text{B.7a})$$

$$\phi_m^{(I)}(x, y) = -\phi_m^{(I)}(-x, y) \quad (\text{B.7b})$$

Sabemos que si $\phi_m(x, y)$ verifica (B.1) y (B.2) entonces $\phi_m(-x, y)$ también va a verificar ambas ecuaciones por simetría. Por tanto $\phi_m(-x, y)$ es solución de la Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) definida según (B.1) y cuyas condiciones de contorno se recogen en (B.2). Como (B.1) es homogénea, esto significa que cualquier combinación lineal de soluciones de (B.1) también es solución de dicha ecuación y por tanto queda demostrado que (B.6) también son soluciones de la EDP. Por ello se escogerán estas funciones con propiedades de simetría como conjunto de soluciones de (B.1) ya que generarán todo el espacio de soluciones y además sus propiedades de simetría nos serán útiles en los siguientes apartados.

También se podría enfocar desde el punto de vista de que todas las soluciones de nuestro problema (modos) se pueden descomponer en soluciones que pertenecen a una de las dos familias consideradas (pares o impares), no quedándose ningún modo original fuera de esta posible descomposición.

B.2.1. Ortogonalidad de las soluciones

De [1] y [2] se sabe que cualquier par de soluciones de (B.1) que cumpla las condiciones de contorno son ortogonales. Pero si dos modos son degenerados¹ podemos conseguir que sean ortogonales por el procedimiento citado en [1].

En nuestro caso los modos no hace falta ortogonalizarlos porque ya son de por sí ortogonales. Sea S_I la superficie de la sección transversal de la guía que queda a la izquierda del eje de simetría ($x < 0$) y sea S_D la superficie que queda a la derecha del eje de simetría ($x > 0$). Sea $f(x)$ la función que parametriza el contorno C por encima del eje x en función

¹Es decir que cumplen la misma EDP para el mismo valor de k_m .

de x . Sea $g(x)$ la función que parametriza el contorno C por debajo del eje x en función de x . Obviamente, las dos funciones son pares respecto al eje de simetría.

$$\begin{aligned} \iint_S \phi_m^{(P)} \phi_m^{(I)} ds &= \\ \iint_{S_I} \phi_m^{(P)}(x, y) \phi_m^{(I)}(x, y) ds &+ \iint_{S_D} \phi_m^{(P)}(x, y) \phi_m^{(I)}(x, y) ds \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

La integral en el recinto S_I la llamaremos I_I y la integral en el recinto S_D la llamaremos I_D . La integral I_I la podemos expresar como

$$I_I = \iint_{S_I} \phi_m^{(P)}(x, y) \phi_m^{(I)}(x, y) ds = \int_{x=-a}^{x=0} \int_{y=g(x)}^{y=f(x)} \phi_m^{(P)}(x, y) \phi_m^{(I)}(x, y) dx dy \quad (\text{B.9})$$

donde a es la máxima coordenada x del contorno C . Hacemos el cambio de variable $x = -x'$, $dx = -dx'$ y obtenemos

$$I_I = - \int_{x'=a}^{x'=0} \int_{y=g(-x')}^{y=f(-x')} \phi_m^{(P)}(-x', y) \phi_m^{(I)}(-x', y) dx' dy \quad (\text{B.10})$$

y sabiendo las propiedades de paridad de las funciones del integrando (B.7) y ya que la función $f(x)$ es par y $g(x)$ también, obtenemos:

$$I_I = - \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=g(x)}^{y=f(x)} \phi_m^{(P)}(x, y) \phi_m^{(I)}(x, y) dx dy = -I_D \quad (\text{B.11})$$

por tanto podemos decir que:

$$\iint_S \phi_m^{(P)} \phi_m^{(I)} ds = I_I + I_D = 0 \quad (\text{B.12})$$

Con este razonamiento se ha conseguido demostrar que las funciones escalares pares e impares no se acoplan entre sí.

B.2.2. Corolarios útiles

En la demostración anterior no ha sido necesario suponer que las funciones modales pares o impares pertenecieran a la misma guía. Sólo ha sido necesario suponer que el dominio de integración tiene un eje de simetría. Por ello, la demostración anterior también demuestra que funciones modales de diferente paridad pertenecientes a diferentes guías con una superficie común simétrica no se van a acoplar. Si las funciones escalares son ortogonales, las funciones vectoriales modales que representan campo eléctrico y magnético también lo son y la demostración aparece en [1].

Esto es útil para el cálculo de integrales de acoplo entre dos guías de sección arbitraria cuya unión planar es una superficie con un eje de simetría.

Todos estos hechos recién demostrados se pueden resumir en los siguientes corolarios:

Corolario B.1 *Si las funciones escalares son ortogonales, entonces las funciones vectoriales que representan a los campos también lo son.*

Corolario B.2 *Si dentro de una misma guía los modos tienen paridad distinta, entonces son ortogonales.*

Corolario B.3 *Si tenemos una unión entre dos guías que define una superficie común con un eje de simetría, entonces los modos de una guía con cierta paridad no se acoplan con los modos de paridad distinta en la otra guía.*

B.3. Condiciones de contorno

Una vez sabemos que las soluciones pares e impares de la EDP junto con las condiciones de contorno nos proporcionan un conjunto completo de soluciones, necesitamos saber qué condiciones tenemos que imponer en el eje de simetría para analizar sólo una parte del problema. Distinguiremos dos casos: el TM^z y el TE^z .

B.3.1. Modos TM^z

Si el modo TM^z que estamos considerando es impar respecto al eje de simetría $x = 0$, tenemos que en este eje:

$$\phi_m^{(I)}(x, y)|_{x=0} = \frac{1}{2} [\phi_m(x, y) - \phi_m(-x, y)]|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.13})$$

y por tanto la condición de contorno será:

$$\phi_m^{(I)} = 0 \quad \text{en el eje (pared eléctrica)} \quad (\text{B.14})$$

Si el modo TM^z que estamos considerando es par respecto al eje de simetría $x = 0$, tenemos que en este eje:

$$\phi_m^{(P)}(x, y)|_{x=0} = \frac{1}{2} [\phi_m(x, y) + \phi_m(-x, y)]|_{x=0} = \phi_m(0, y) \quad (\text{B.15})$$

El campo eléctrico en el eje se calcula como:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_m^{(P)}|_{x=0} &= -\nabla_t \phi_m^{(P)}(x, y)|_{x=0} = \frac{1}{2} [-\nabla_t \phi_m(x, y) - \nabla_t \phi_m(-x, y)]|_{x=0} \\ &= -\frac{\partial \phi_m}{\partial y} \Big|_{x=0} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

El campo magnético se calcula pues como:

$$\mathbf{h}_m^{(P)}|_{x=0} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_m^{(P)}|_{x=0} = \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \Big|_{x=0} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{B.17})$$

es decir, campo eléctrico tangente al plano de simetría y campo magnético perpendicular al plano de simetría. Esto son las condiciones de contorno para una pared magnética. La variación respecto a la normal al plano es nula:

$$\left. \frac{\partial \phi_m^{(P)}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.18})$$

B.3.2. Modos TE^z

Si el modo TE^z que estamos considerando es par respecto al eje de simetría $x = 0$, tenemos que en este eje el campo eléctrico tiene la forma

$$\mathbf{e}_m^{(P)} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi_m^{(P)} = \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\partial \phi_m}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{B.19})$$

y el campo magnético es de la forma

$$\mathbf{h}_m^{(P)} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_m^{(P)} = -\frac{\partial \phi_m}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{B.20})$$

El campo eléctrico es perpendicular al plano de simetría y el campo magnético es paralelo al plano de simetría, por tanto el eje debe ser una pared eléctrica.

Si el modo TE^z es impar respecto al eje, para el campo eléctrico tenemos

$$\mathbf{e}_m^{(I)} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi_m^{(I)} = \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} = \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{B.21})$$

y para el campo magnético:

$$\mathbf{h}_m^{(I)} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_m^{(I)} = \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\partial \phi_m}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{B.22})$$

El campo eléctrico es paralelo al plano de simetría y el campo magnético perpendicular al plano de simetría. Son las condiciones de una pared magnética.

Estas condiciones de contorno para el plano de simetría se pueden resumir en una tabla como la mostrada en [B.1](#).

De ella podemos extraer también dos conclusiones directas:

- Si en una estructura consideramos una pared eléctrica en un eje de simetría sabemos que, según la tabla [B.1](#), se excitarán modos TM^z impares respecto al eje de simetría mientras que se excitarán modos TE^z pares respecto al mismo eje.
- Si en una estructura consideramos una pared magnética en un eje de simetría sabemos que, según la tabla [B.1](#), se excitarán modos TM^z pares respecto al eje de simetría mientras que los modos TE^z que se excitarán serán los impares respecto al mismo eje.

	TM	TE
PAR	PM	PE
IMPAR	PE	PM

Cuadro B.1. Condiciones de contorno para estructuras simétricas respecto a un eje. PE=condiciones de pared eléctrica. PM=condiciones de pared magnética.

	No simetría	Simetría eje x	Simetría eje y	Simetría ejes x e y
TE^z	TE_{mn}^z	$TE_{m\ 2n}^z$	$TE_{2m+1\ n}^z$	$TE_{2m+1\ 2n}^z$
TM^z	TM_{mn}^z	$TM_{m\ 2n}^z$	$TM_{2m+1\ n}^z$	$TM_{2m+1\ 2n}^z$

Cuadro B.2. Tipos de modos a considerar en estructuras con diferentes tipos de simetría bajo excitación del modo fundamental TE_{10}^z .

B.4. Simetrías en dispositivos en guía rectangular

Se estudiarán a continuación, para el caso de dispositivos implementados en guía rectangular, las familias de modos que habrá que considerar si excitamos con un determinado modo fundamental. Se distinguirán dos de los casos más comunes en aplicaciones prácticas: el caso inductivo y el caso capacitivo.

En la tabla B.2 se resumen las diferentes familias de modos que deben considerarse cuando se excita con el modo TE_{10}^z una estructura general que presenta simetrías.

B.4.1. Caso inductivo

Supongamos que estamos estudiando el caso de una unión planar de guías rectangulares cuya altura b coincida para ambas guías, tal y como se muestra en la figura B.2.

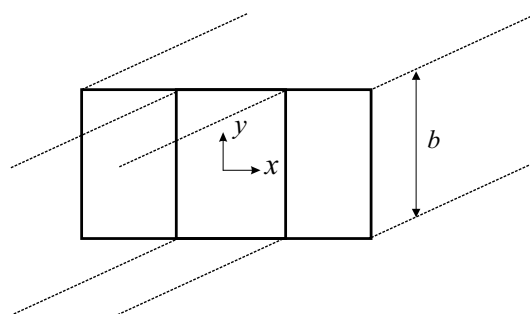


Figura B.2. Unión planar en guías rectangulares. Caso inductivo: la altura de las guías coincide y se podrá estudiar la estructura considerando un conjunto reducido de modos.

Debido a la ortogonalidad de las funciones escalares escogidas como solución de la ecuación de Helmholtz (B.1) con las condiciones de contorno (B.2) en una guía rectangular, y debido a que en la variable y las guías tienen exactamente la misma función de variación, sucede que las integrales en la variable y entre dos modos serán siempre nulas a menos que coincida el índice que varía con la variable y .

Si el modo excitado es el TE_{10}^z se generarán modos que tengan el mismo índice según y , es decir, modos TE_{m0}^z . No se excitan modos TM^z porque no existen modos de este tipo con subíndice cero.

Si además centramos la estructura de manera que pasamos de guías rectangulares a otras cuyos centros coinciden, podemos aplicar paridad respecto al eje y , y por tanto podemos restringir los índices respecto a la variable x . Si el modo fundamental es el TE_{10}^z , se generarán modos de la misma paridad en el interior de la estructura, es decir, de la forma TE_{2m+10}^z . Lo cual es una reducción sustancial del tamaño del problema a resolver. Esto conduce a soluciones más precisas con menores esfuerzos computacionales.

En la tabla B.3 se resumen los tipos de modos que deben escogerse para analizar una estructura inductiva ante excitación del modo fundamental TE_{10}^z .

B.4.2. Caso capacitivo

Supongamos ahora que la unión planar entre guías es como la mostrada en la figura B.3 (caso capacitivo). Ahora la anchura a coincide en las dos guías. Todo lo enunciado anteriormente para el caso inductivo es aplicable ahora al caso capacitivo, cambiando simplemente el subíndice que permanece fijo. La diferencia es que considerando de nuevo como excitación el modo TE_{10}^z , en este caso se generan en la estructura modos TE_{1n}^z y también TM_{1n}^z .

Si centramos la estructura y excitamos con el modo TE_{10}^z , tendremos que considerar tan sólo los modos TE_{12n}^z y los TM_{12n}^z . Obviamente son más modos que en el caso inductivo centrado. Los dispositivos capacitivos no se estudian con este conjunto de soluciones por esta razón. Se utilizan en lugar de modos TE^z y TM^z , modos TE^x o también llamados LSE^x que son aquellos con $E_x = 0$. Si fuera necesario imponer la condición $H_x = 0$, los modos utilizados serían los TM^x o también llamados LSM^x . Estos modos (TE^x) se suelen utilizar por ejemplo para estudiar codos rectangulares en plano E. Las expresiones detalladas de estos modos se recogen por ejemplo en [3].

De manera equivalente se puede estudiar una discontinuidad capacitiva usando los modos de guías de placas paralelas con excitación TM_0 y considerando que los modos excitados² son TM_m . Para ver el aspecto de estos modos, así como su utilización junto con la técnica de la ecuación integral para estudiar discontinuidades capacitivas, se recomienda consultar [3]. La expresión de estos modos puede encontrarse también en [2].

²En realidad en una guía de placas paralelas hay dos conductores y el modo fundamental excitado es un TEM. Para conservar la notación modal seguida en guías rectangulares se suele expresar como TM_0 por su variación espacial, aunque no sea la forma más ortodoxa de expresarlo.

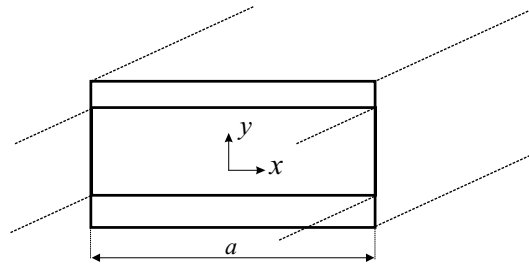


Figura B.3. Unión planar en guías rectangulares. Caso capacitivo: la anchura de las guías coincide y se podrá estudiar la estructura considerando un conjunto reducido de modos.

	Inductivo	Inductivo centrado	Capacitivo	Capacitivo centrado
\mathbf{TE}^z	\mathbf{TE}_{m0}	\mathbf{TE}_{2m+10}	\mathbf{TE}_{1n}	$\mathbf{TE}_{1\ 2n}$
\mathbf{TM}^z	—	—	\mathbf{TM}_{1n}	$\mathbf{TM}_{1\ 2n}$

Cuadro B.3. Tipos de modos a considerar en estructuras con diferentes tipos de simetría bajo excitación del modo fundamental \mathbf{TE}_{10}^z en guía rectangular.

En la tabla B.3 se resumen los tipos de modos a considerar si excitamos con el modo fundamental \mathbf{TE}_{10}^z una estructura capacitiva.

B.5. Conclusiones

En este apéndice se ha mostrado cómo, gracias a la existencia de simetrías en una guía con respecto a cierto plano, se puede reducir el problema bajo estudio a otro equivalente con condiciones de contorno adecuadas sobre el citado plano de simetría. También se ha demostrado que los modos con paridad distinta no se acoplan entre sí, si el dominio de integración es el mismo. Por ello, si tenemos una transición entre dos guías cuyas secciones transversales tengan un eje de simetría común, sabemos que la integral de acoplo entre modos de paridad distinta siempre valdrá cero. Esto es especialmente útil si tenemos en cuenta que un dispositivo con 2 ejes de simetría, cuando funcione a frecuencias de operación en las que se excita un único modo fundamental (e.g. \mathbf{TE}_{10}^z), sólo será necesario considerar modos cuya paridad coincida con la del fundamental (e.g. $\mathbf{TE}_{2m+1\ 2n}^z$ y $\mathbf{TM}_{2m+1\ 2n}^z$). Si el dispositivo es inductivo o capacitivo en guía rectangular, se ha estudiado cómo reducir más el número de modos a considerar.

Bibliografía

- [1] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE Press, second ed., 1991.
- [2] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*. London, UK: Peter Peregrinus Ltd., IEE Electromagnetic Waves Series 21, 1986.
- [3] G. Conciauro, M. Guglielmi, and M. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis - CAD Techniques for Waveguide Components and Filters*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2000.

Apéndice C

Teoremas sobre problemas de autovalores

C.1. Introducción

En este apéndice se van a enunciar algunos teoremas fundamentales sobre problemas de autovalores. Estos teoremas serán de utilidad para deducir ciertas propiedades sobre la magnitud y distribución de los autovalores en relación a su dominio.

La referencia básica de este apéndice ha sido [1], donde se trata con profundidad este tipo de problemas. En dicha referencia, el desarrollo de toda la teoría aparece referido a problemas de vibración de membranas conectado con la aplicación del cálculo variacional. Sin embargo, la formulación matemática presentada es indistinguible de la relacionada con un problema electromagnético [2]. De hecho, un problema electromagnético puede tratarse como un problema de vibraciones, donde cada función solución o vibración asociada es un “modo” tal y como lo conocemos en ondas guiadas [3].

Las demostraciones de los teoremas que se van a enunciar pueden verse en la referencia básica [1]. Algunos nos pueden parecer obvios si los identificamos con un problema de ondas guiadas, pero debe tenerse en cuenta que la formulación se ha desarrollado para cualquier tipo de contorno y para ciertas condiciones de contorno bastante generales. Esto nos servirá para aplicar todos los teoremas que se van a enunciar a una guía de contorno arbitrario, cuyos autovalores están directamente relacionados con la frecuencia de corte de los modos. Recuérdese que la ecuación de Helmholtz homogénea $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ es la ecuación que rige el comportamiento de los campos en el interior de una guía, y esta ecuación es una ecuación típica de autovalores donde el correspondiente n -ésimo autovalor (λ_n) es el número de onda al cuadrado (k_n^2) del correspondiente modo (n -ésima autofunción), y éste número de onda es proporcional a la frecuencia de corte del modo n -ésimo en cuestión¹. Por lo tanto,

¹El método BI-RME plantea un problema de autovalores matricial, pero ya que los autovalores incógnita están directamente relacionados con el número de onda que aparece en la ecuación de Helmholtz, todo lo dicho es aplicable también a este método.

nos será útil poder saber el tipo de comportamiento y distribución de los autovalores si el contorno es arbitrario, así como la variación de la magnitud de los autovalores cuando hay una perturbación en el mismo.

C.2. Planteamiento del problema

Consideremos el problema de autovalores de una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) de segundo orden autoadjunta:

$$L[u] + \lambda \rho u = \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) - qu + \lambda \rho u = 0 \quad (p > 0, \rho > 0) \quad (\text{C.1})$$

aquí x e y son variables independientes² en el dominio fundamental G , cuyo contorno está formado por una o varias curvas continuas Γ con tangentes continuas a trozos. Sea una condición de contorno de la forma $u = 0$, o en general $\partial u / \partial n + \sigma u = 0$, donde σ denota una función de posición continua a trozos en el contorno Γ y $\partial / \partial n$ es la diferenciación en la dirección normal exterior. Las expresiones típicas de los funcionales cuadráticos para problemas variacionales de autovalores son:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_{\Gamma} p \sigma \varphi^2 ds \quad (\text{C.2})$$

con

$$D[\varphi] = \iint_G p \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \iint_G q \varphi^2 dx dy \quad (\text{C.3})$$

y

$$H[\varphi] = \iint_G \rho \varphi^2 dx dy \quad (\text{C.4})$$

Se requiere que la función φ sea continua en $G + \Gamma$ y que tenga primera derivada continua a trozos en G . Si se prescribe la condición de contorno $u = 0$, entonces se asume que u es continua en la región cerrada $G + \Gamma$ y se anula en Γ .

Obtenemos los autovalores λ_ν y las autofunciones asociadas u_ν de la ecuación diferencial (C.1) de las propiedades mínimas siguientes: *La función admisible que minimiza la expresión $\mathfrak{D}[\varphi]$ bajo la condición $H[\varphi] = 1$ es una autofunción u_1 para la ecuación diferencial (C.1) y satisface la condición de contorno natural $\partial \varphi / \partial n + \sigma \varphi = 0$; el mínimo valor de \mathfrak{D} es el correspondiente autovalor.*

Sutilezas referentes a ortogonalización entre diferentes autofunciones se pueden conseguir imponiendo restricciones adicionales que pueden consultarse en [1].

²Se supone que el problema es invariante con la coordenada z . La ecuación de Helmholtz $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ es un caso particular de este tipo de problema. El operador lineal L es un operador de Sturm-Liouville bidimensional. La teoría del problema unidimensional general de Sturm-Liouville puede consultarse en [4]. Para ver aplicaciones a la cuerda vibrante y a problemas electromagnéticos véase [5].

C.3. Principios fundamentales

Podemos extraer importantes conclusiones aplicando simples principios del cálculo variacional que nos ayuden a comprender el comportamiento de una estructura regida por las ecuaciones y condiciones de contorno enunciadas. El primero de estos principios es:

Aumentando las condiciones en un problema de mínimos no disminuimos el valor del mínimo; a la inversa, debilitando las condiciones el mínimo decrece, o por lo menos no aumenta.

El segundo principio establece:

Dados dos problemas de mínimos con la misma clase de funciones admisibles φ , tal que para cada φ el funcional a ser minimizado es no menor en el primer problema que en el segundo, entonces el mínimo para el primer problema es también no menor que el mínimo para el segundo.

Establezcamos algunos teoremas útiles con estos principios:

Teorema C.1 *Si un sistema que es capaz de vibrar es sujeto a condiciones restrictivas, el tono fundamental y cada tono superior se vuelven más altos (al menos no más bajos). A la inversa, si se eliminan condiciones restrictivas, el tono fundamental y cada tono superior se vuelven menores (al menos no mayores).*

Esto sucede por ejemplo si, aparte de una condición de contorno, añadimos condiciones en el interior de una guía, como por ejemplo una pequeña lámina metálica, una excitación determinada, etc. Todo ello provocará una vibración “forzada”, y por tanto la frecuencia de corte aumentará respecto a la frecuencia de corte del problema original.

Teorema C.2 *Supongamos que G' , G'' , G''' , ... son un número finito de subdominios de G que no se solapan entre sí. Sea $A(\lambda)$ que denota el número de autovalores menores que λ de la ecuación diferencial $L[u] + \lambda \rho u = 0$ para G con la condición de contorno $u = 0$. Entonces el número total de autovalores menores que λ para todos los subdominios separados con la misma condición de contorno no excede $A(\lambda)$.*

Por ejemplo, supongamos que tenemos una guía de onda de un cierto tamaño que tiene por ejemplo 5 modos propagándose (5 frecuencias de corte) por debajo de los 10 GHz. Si el interior de la guía lo sustituimos por guías más pequeñas, entonces sabemos por este teorema que en ninguna guía pequeña tendremos más de 5 modos propagándose por debajo de los 10 GHz.

Teorema C.3 *Bajo la condición de contorno $u = 0$ el n -ésimo autovalor para un dominio G nunca excede al n -ésimo autovalor para un subdominio de G .*

Ejemplo: si una guía tiene una sección transversal que pueda estar contenida en otra guía, entonces las frecuencias de corte de la guía mayor serán menores que las de la guía menor.

Teorema C.4 *Supongamos que G', G'', G''', \dots son un número finito de subdominios de G que no se solapan entre sí y que reconstruyen completamente el dominio G . Sea $B(\kappa)$ que denota el número de autovalores menores que κ de la ecuación diferencial $L[u] + \lambda\rho u = 0$ para G con la condición de contorno $\partial u/\partial n = 0$. Entonces el número total de autovalores menores que κ para todos los subdominios separados con la misma condición de contorno es al menos tan grande como $B(\kappa)$.*

Este teorema se puede enunciar como sigue: Sea κ_n^* el n -ésimo número, dispuesto en orden creciente de magnitud, en el conjunto combinado de autovalores pertenecientes a los subdominios $G^{(i)}$, asociados a la condición de contorno $\partial u/\partial n = 0$, donde cada autovalor está tomado con su correcta multiplicidad. Entonces, el n -ésimo autovalor κ_n del dominio G para la misma condición de contorno es mayor o igual al número κ_n^* .

Este es el correspondiente teorema para condiciones de contorno aplicadas a la derivada de la función y no a la propia función. Esto es fácil de probar ya que hemos dividido un dominio en partes y en cada parte aplicamos un condición de contorno que no exige continuidad entre dominios. Estamos relajando las condiciones y por el principio primero sabemos que el autovalor debe disminuir o, al menos, no aumentar.

Teorema C.5 *Sea λ_n el n -ésimo autovalor de la ecuación diferencial $L[u] + \lambda\rho u = 0$ para el dominio G bajo la condición de contorno $u = 0$, y sea μ_n el n -ésimo autovalor para la condición $\partial u/\partial n + \sigma u = 0$, o más generalmente para la condición $\partial u/\partial n + \sigma u = 0$ en una parte Γ' del contorno Γ , $u = 0$ en la parte restante Γ'' del contorno. Entonces $\mu_n \leq \lambda_n$.*

A la vista de este teorema se observa que es más restrictivo desde el punto de vista variacional las condiciones de contorno homogéneas sobre la función que sobre su derivada. Identificamos sin problemas que se habla de modos TE cuando se aplican condiciones de contorno sobre derivadas y de modos TM si se aplican condiciones de contorno homogéneas sobre las funciones. De este teorema se deduce que para una guía de sección arbitraria tendremos que el primer modo TE tendrá una frecuencia de corte menor (o a lo sumo igual) que el primer modo TM.

Teorema C.6 *Si en la condición de contorno $\partial u/\partial n + \sigma u = 0$ en Γ , la función σ se incrementa o disminuye en cada punto, entonces cada autovalor individual puede cambiar sólo en el mismo sentido.*

Como se ha dicho anteriormente la condición más restrictiva es la condición de contorno homogénea para la función, ya que si se hace variar monótonamente σ en cada punto desde 0 hasta ∞ , cada autovalor individual μ se incrementa monótonamente desde el valor que se obtendría aplicando tan sólo la condición de contorno $\partial u/\partial n = 0$ hasta el valor que se tendría si aplicáramos únicamente la condición de contorno $u = 0$.

Teorema C.7 *Si en la ecuación diferencial $L[u] + \lambda \rho u = 0$, el coeficiente ρ varía en cada punto en el mismo sentido, entonces, para cada condición de contorno, el n -ésimo autovalor cambia en el sentido opuesto. Si el coeficiente p ó q cambia en todos los puntos en el mismo sentido, cada autovalor cambia en el mismo sentido. Si la condición de contorno es $\partial u / \partial n + \sigma u = 0$, asumimos que $\sigma \geq 0$.*

C.4. Continuidad de los autovalores

Unas preguntas fundamentales cuando tratamos un problema como el de hallar las frecuencias de corte de una guía de sección transversal arbitraria son:

- *¿Qué sucede con las frecuencias de corte si deformamos ligeramente la guía en su contorno?*
- *Si en una guía con reentrante (en inglés *ridge waveguide*), de la que hemos hallado sus frecuencias de corte, aumentamos la profundidad de penetración del reentrante, ¿que sucederá con las frecuencias de corte?*
- *Si disminuimos la profundidad de penetración del reentrante poco a poco hasta que el contorno de la guía coincida con el contorno básico (rectangular o circular), ¿las frecuencias de corte cambiarán bruscamente durante el proceso o lo harán de forma continua?*

Veremos en primer lugar que no sucede nada inesperado cuando variamos la ecuación de forma continua:

Teorema C.8 *Para todas las condiciones de contorno consideradas, el n -ésimo autovalor de la ecuación diferencial $L[u] + \lambda \rho u = 0$ depende **continuamente** de los coeficientes de la ecuación.*

De forma análoga tenemos para las condiciones de contorno:

Teorema C.9 *El n -ésimo autovalor depende **continuamente** de la función σ que aparece en la condición de contorno $\partial u / \partial n + \sigma u = 0$.*

Las propiedades de continuidad para el n -ésimo autovalor en función del dominio es lo único que resta por establecer. Si un dominio G con un autovalor n -ésimo se aproxima a otro dominio G' con otro n -ésimo autovalor diferente, tenemos que definir un concepto suficientemente fuerte de aproximación de un dominio a otro³ para evitar que los autovalores sufran patologías extrañas cuyo estudio está fuera de nuestro interés. En general, si la variación es continua y lo suficientemente suave, la variación de los autovalores también lo es:

³Es suficiente que los dominios se aproximen punto a punto y además que las normales también se aproximen.

Teorema C.10 *Para cualquiera de las condiciones de contorno consideradas, el n -ésimo autovalor de la ecuación diferencial $L[u] + \lambda\rho u = 0$ varía continuamente cuando el dominio G se deforma continuamente en el sentido definido arriba.*

Si las condiciones de contorno son homogéneas se puede ser más preciso:

Teorema C.11 *Para la condición de contorno $u = 0$, el n -ésimo autovalor de la ecuación $L[u] + \lambda\rho u = 0$ es una función **continua** del dominio G , incluso si las normales al contorno no varían de forma **continua** cuando el dominio se deforme de forma **continua**.*

C.5. Distribución asintótica de autovalores

Alguna preguntas típicas cuando tratamos problemas de autovalores para guías arbitrarias son sencillas de formular, pero en esencia profundas y difíciles de responder. He aquí unos ejemplos de preguntas que pueden asaltarnos al estudiar guías de sección transversal arbitraria con métodos que plantean problemas de autovalores:

- *¿Qué dependencia tienen los autovalores con la forma del dominio?*
- *Los autovalores que aparecen en una guía arbitraria, ¿dependen de la forma de la guía o sólo del área de la sección transversal de la misma?*
- *Si los autovalores dependen de la sección transversal de la guía (en forma y tamaño), ¿la dependencia se mantiene para cualquier autovalor (a cualquier frecuencia)?*

Responderemos en esta sección a estas preguntas fundamentales que pueden englobarse en un mismo tema: el comportamiento asintótico de los autovalores.

Obviamente, si mantenemos el área constante no tenemos porqué obtener las mismas frecuencias de corte o autovalores para problemas con guías de sección transversal arbitraria. Es suficiente analizar una guía rectangular y otra circular de la misma área de sección transversal para darnos cuenta de que no conseguimos la misma frecuencia de corte para el modo fundamental⁴.

Resta por estudiar el comportamiento asintótico de los autovalores cuando éstos aumentan en magnitud. En dicho caso, ¿seguirán dependiendo del área de la guía así como de su forma? Es decir, ¿las frecuencias de corte de los modos elevados dependerán también de la forma de la sección transversal o sólo del área? Obtendremos un resultado significativo para problemas físicos:

El comportamiento asintótico de los autovalores para ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes no depende de la forma, sino solamente del tamaño del dominio fundamental.

⁴Ejemplo: una guía WR-75 ($a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm) tiene una frecuencia de corte para el modo fundamental TE₁₀ de valor $f_c = 7,87$ GHz. El radio de la guía circular de la misma área es $r = 7,6$ mm. Esto supone que el modo fundamental TE₁₁ de la guía circular tenga una frecuencia de corte de $f_c = 11,57$ GHz.

Es decir: las frecuencias de corte de modos suficientemente elevados serán independientes de la forma de la sección transversal, y sólo dependerán del área de dicha sección.

C.5.1. La ecuación $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ para una guía rectangular

La ecuación de Helmholtz homogénea

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \quad (\text{C.5})$$

se trata ampliamente en el caso de dominios con plano de simetría en el apéndice B. Comúnmente se considera que $\lambda = k^2$, pero en este apéndice mantendremos la notación con λ para preservar uniformidad de criterios con las referencias donde se tratan problemas de autovalores y funciones de Green (por ejemplo en [5]–[7]).

Supongamos el problema (C.5) en un dominio rectangular de lados con longitudes a y b como hacemos de forma usual. Las autofunciones y autovalores son sobradamente conocidos para las típicas condiciones de contorno. Si obviamos los factores de normalización, tenemos para la condición de contorno $u = 0$ las siguientes autofunciones y autovalores:

$$u = \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad \lambda = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.6})$$

y para la condición de contorno⁵ $\partial u / \partial n = 0$ las expresiones de las autofunciones y autovalores son:

$$u = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad \lambda = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7})$$

donde m y n no pueden ser cero simultáneamente. Si el número de autovalores menor que un límite λ se denota en el primer caso por $A(\lambda)$ y en el segundo caso por $B(\lambda)$, entonces $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son iguales al número de soluciones enteras de la desigualdad

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2} \quad (\text{C.8})$$

aquí $m > 0, n > 0$ para la condición de contorno $u = 0$, y $m \geq 0, n \geq 0$ para la condición de contorno $\partial u / \partial n = 0$. Ahora podemos deducir expresiones asintóticas simples para los números $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ para λ grande. Por ejemplo, $B(\lambda)$ es precisamente igual al número de puntos de la retícula con coordenadas enteras pertenecientes al sector de la elipse definida por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda}{\pi^2} \quad (\text{C.9})$$

⁵No confundamos aquí el índice n de los autovalores con la dirección n saliente y normal al contorno. Por el contexto debe estar claro el significado pero si no es así, se especificará.

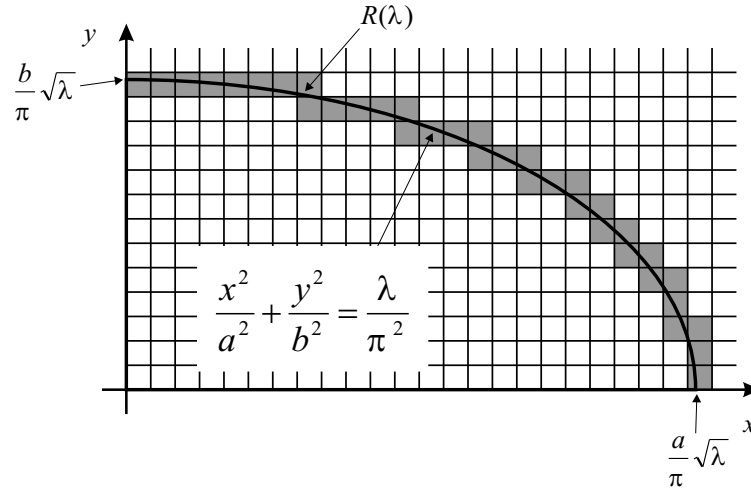


Figura C.1. Elipse cuya área indica el número de autovalores menores o iguales que el límite λ . El número de cuadrados sombreados es $R(\lambda)$ y $B(\lambda)$ es el número de cuadrados interiores a la elipse más el número de cuadrados sombreados por los que pasa el arco de la elipse.

y situada en el cuadrante $x \geq 0, y \geq 0$. Para λ suficientemente grande, el cociente entre el área del sector y el número de puntos de la rejilla contenida en él está muy próximo a 1. Si un cuadrado unidad situado arriba y a la derecha de cada punto de la rejilla se asocia con él, entonces la región formada por estos cuadrados contiene al sector de la elipse; sin embargo, si omitimos los cuadrados a través de los cuales la elipse pasa—denominaremos a ese número de cuadrados $R(\lambda)$ —entonces la región que queda está totalmente contenida en el sector de la elipse (véase figura C.1). Tenemos entonces la relación entre áreas dada por la siguiente desigualdad:

$$B(\lambda) - R(\lambda) \leq \lambda \frac{ab}{4\pi} \leq B(\lambda) \quad (\text{C.10})$$

El arco de la elipse contenido en dos cuadrados vecinos pertenecientes al contorno tiene, para un λ suficientemente grande, al menos la longitud 1. Por lo tanto $R(\lambda) - 1$ es a lo sumo igual a dos veces la longitud del arco del cuarto de la elipse, y ésta se incrementa sólo como $\sqrt{\lambda}$. Se puede concluir por tanto la siguiente fórmula asintótica:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = \frac{ab}{4\pi} \quad (\text{C.11})$$

o de forma equivalente:

$$B(\lambda) \sim \lambda \frac{ab}{4\pi} \quad (\text{C.12})$$

Podemos escribir de forma más precisa:

$$B(\lambda) = \frac{ab}{4\pi} \lambda + \theta_c \sqrt{\lambda} \quad (\text{C.13})$$

donde c es una constante independiente de λ , y $|\theta| < 1$. Esta fórmula es válida para las dos condiciones de contorno consideradas; es decir, también se mantiene para $A(\lambda)$, ya que el número de puntos de la rejilla situados en los límites rectos del sector de la elipse (que debieran restarse al valor $B(\lambda)$ recién deducido) es asintóticamente igual a la suma de los dos semiejes, es decir, $(a+b)\sqrt{\lambda}/\pi$. Si los autovalores están escritos en una secuencia ordenada $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de acuerdo a su magnitud, podemos calcular asintóticamente el n -ésimo autovalor asumiendo $A(\lambda_n) = n$ y $B(\lambda_n) = n$. Obtenemos pues:

$$\lambda_n \sim \frac{4\pi}{ab}A(\lambda_n) \sim \frac{4\pi}{ab}n \quad (\text{C.14})$$

o también que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{ab} \quad (\text{C.15})$$

El teorema que podemos extraer de todo este desarrollo se enuncia a continuación:

Teorema C.12 *Para todas las condiciones de contorno consideradas, el número $A(\lambda)$ de autovalores menores que un valor límite λ de la ecuación diferencial $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ para un dominio rectangular⁶ de área f es asintóticamente igual a $f\lambda/4\pi$; esto es:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{f\lambda} = \frac{1}{4\pi} \quad (\text{C.16})$$

Más exactamente, para todo λ suficientemente grande se cumple la relación:

$$\left| \frac{4\pi A(\lambda)}{f\lambda} - 1 \right| < \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{C.17})$$

donde C es una constante independiente de λ .

Si ρ_n denota el n -ésimo autovalor correspondiente a una de las condiciones de contorno en cuestión, este teorema es equivalente a la siguiente ecuación⁷:

$$\rho_n = \frac{4\pi}{f}n + \theta c\sqrt{n} \quad (\text{C.18})$$

donde otra vez $-1 \leq \theta \leq 1$ y c es una constante independiente de n .

C.5.2. Distribución asintótica de autovalores para un dominio arbitrario

Hemos visto cómo se distribuyen los autovalores si el dominio es rectangular, pero ahora la pregunta natural es: *¿Qué sucede si el dominio tiene forma arbitraria?*

⁶O también para un dominio compuesto por un número finito de rectángulos.

⁷Para ver esto sólo hay que hacer $A(\rho_n) = n$ en (C.17).

Consideremos un dominio plano G arbitrario (sección transversal de la guía arbitraria) cuyo contorno tiene curvatura continua y consideremos la EDP $\nabla^2 u + \lambda u = 0$.

Por división del dominio G en cuadrados, y aplicando teoremas vistos anteriormente⁸, podemos deducir el siguiente teorema referente al comportamiento asintótico de autovalores en dominios arbitrarios:

Teorema C.13 *Bajo cualquiera de las condiciones de contorno consideradas, el número $A(\lambda)$ de autovalores menores que un límite λ de la ecuación diferencial $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ para el dominio G es asintóticamente igual a $\lambda f/4\pi$; en otras palabras:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1 \quad (\text{C.19})$$

donde f denota el área del dominio.

Hay que remarcar que en un principio se ha dicho que la curvatura debe ser continua, y esto exige que no haya esquinas en el dominio G . Sin embargo, el teorema se cumple en esencia si se admiten un número finito de vértices.

Se puede demostrar también que para cierto λ suficientemente grande:

$$A(\lambda) \leq \frac{f}{4\pi} \lambda + C\sqrt{\lambda} \log \lambda \quad (\text{C.20})$$

donde C es una constante independiente de λ . La misma expresión se puede encontrar para el límite inferior de $A(\lambda)$, con C negativo. Con esto establecemos el comportamiento asintótico de los autovalores para dominio arbitrario:

Teorema C.14 *Bajo cualquiera de las condiciones de contorno consideradas, la diferencia $A(\lambda) - f\lambda/4\pi$ es, para $\lambda \rightarrow \infty$, de orden no mayor que $\sqrt{\lambda} \log \lambda$.*

En conclusión: para grandes autovalores (frecuencias de corte elevadas) la forma del dominio no importa, sólo influye el área de la sección transversal⁹.

Ejemplo

Sea una guía WR-75 ($a = 19,05$ mm y $b = 9,525$ mm). La fórmula asintótica para el autovalor 700 y para la condición de contorno $\partial u/\partial n = 0$ (modos TE) nos da:

$$\lambda_{700} \sim \frac{4\pi}{ab} 700 = 4,8478 \cdot 10^7 \quad (\text{C.21})$$

⁸El razonamiento puede verse en [1].

⁹Esta es la razón de porqué en el programa ANAPLAN-W (que implementa el método BI-RME con discretización a tramos rectos) al discretizar una perturbación siempre mantiene el área constante, aunque el contorno real de la perturbación no esté formado por tramos rectos.

donde se han obviado las unidades¹⁰. El valor exacto se obtiene ordenando las soluciones enteras que aparecen dentro de una elipse de la forma definida por (C.9) que contenga al menos los 700 modos TE. El modo 700 es el TE_{10 20} y por lo tanto el número de onda al cuadrado (el autovalor de la ecuación de Helmholtz) vale $\lambda_{700} = 4,6234 \cdot 10^7$.

Veamos si estamos cerca o lejos del límite asintótico expresado mediante (C.19):

$$\frac{4\pi 700}{ab\lambda_{700}} = 1,0486 \quad (\text{C.22})$$

comprobando que en efecto ya estamos muy cerca del límite teórico 1.

Para una guía circular de la misma área ($r = 7,5999$ mm) obtenemos, para la misma condición de contorno, el mismo valor asintótico ya que el área no ha cambiado. El valor real se obtiene calculando las raíces de la primera derivada de la función de las funciones de Bessel de orden entero. En nuestro caso, el modo 700 es el TE_{21 8} asociado a la raíz octava de la primera derivada de $J_{21}(x)$:

$$\frac{d}{dr} J_{21}(r\sqrt{\lambda_{700}}) = 0 \Rightarrow \lambda_{700} = \left(\frac{51,401365922}{r} \right)^2 = 4,5745 \cdot 10^7 \quad (\text{C.23})$$

Este autovalor es similar al obtenido para la guía rectangular. Veamos si estamos cerca del límite asintótico definido en (C.19):

$$\frac{4\pi 700}{\pi r^2 \lambda_{700}} = 1,0598 \quad (\text{C.24})$$

observando que aquí también estamos cerca del límite, y por ello la aproximación asintótica es también aceptable. Como se ve, la aproximación asintótica es lo suficientemente buena para ambos dominios aunque su forma es muy distinta.

C.6. Nodos de autofunciones

En general, es posible hacer afirmaciones precisas con respecto al comportamiento de los autovalores; sin embargo, la investigación de propiedades generales de las autofunciones ofrece mayores dificultades. Esto no es sorprendente a la vista del gran número de clases de funciones definidas por medio de problemas de autovalores. Veamos algunas propiedades generales de las autofunciones que nos pueden ser útiles.

Se llaman *nodos* a aquellas zonas del dominio fundamental G en los cuales alguna autofunción se anula. Tratando con problemas de una, dos, tres, ... dimensiones, hablamos de

¹⁰No se debe confundir aquí λ_{700} con el valor de la longitud de onda de corte de ese modo. Las unidades del autovalor dependen del problema en concreto. En este caso serían unidades de número de onda al cuadrado (m^{-2}).

puntos nodales, curvas nodales, superficies nodales, respectivamente. En general se utilizará el término *nodos*¹¹.

Subrayar aquí que la primera autofunción de un problema de autovalores puede no tener nodos en el interior del dominio fundamental. Por lo tanto, debe tener el mismo signo en todos los puntos, y por lo tanto cualquier otra autofunción ortogonal a ella debe tener nodos.

Es posible hacer afirmaciones generales concernientes a la posición y densidad de los nodos. Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ con la condición de contorno $u = 0$. Si G' es un dominio contenido por completo en G y no contiene puntos nodales de u_n , consideremos a continuación el menor subdominio G'' de G que contiene a G' y limitado por nodos de la función u_n . Para este dominio G'' la función u_n debe ser la primera autofunción y λ_n el menor autovalor. Por otra parte, de acuerdo con el teorema C.3 enunciado previamente, el primer autovalor de G'' no puede ser mayor que el primer autovalor γ de G' , y por lo tanto $\gamma \geq \lambda_n$. Por ejemplo, si G' es un círculo de radio a entonces $\gamma = \tau^2$, donde τ es la menor raíz de la ecuación $J_0(a\tau) = 0$. Por lo tanto tenemos $\gamma = k_{0,1}^2/a^2$, donde $k_{0,1}$ es el primer cero de la función de Bessel de orden cero. Obtenemos por lo tanto que $a^2 \leq k_{0,1}^2/\lambda_n$; esta relación nos cuenta tanto de la densidad de la red de líneas nodales como, en general, puede esperarse. Si tenemos en cuenta la relación asintótica $\lambda_n \sim 4\pi n/f$, vemos que si n es suficientemente grande cada círculo cuya área sea mayor que $f k_{0,1}^2/4n$ debe contener líneas nodales de la n -ésima autofunción. Si en lugar de una guía circular consideramos una guía de sección cuadrada de lado a , encontramos análogamente $a^2 \leq 2\pi^2/\lambda_n$.

Es posible probar el siguiente teorema general concerniente a los nodos de una autofunción:

Teorema C.15 *Dada la ecuación diferencial de segundo orden autoadjunta $L[u] + \lambda\rho u = 0$ ($\rho > 0$) para un dominio G con condiciones de contorno homogéneas arbitrarias; si sus autofunciones se ordenan de acuerdo a autovalores crecientes, entonces los nodos de la n -ésima autofunción u_n dividen el dominio en no más de n subdominios. No importa el número de variables independientes del problema.*

Este teorema se puede generalizar: *Cualquier combinación lineal de las primeras n autofunciones divide el dominio, por medio de sus nodos, en no más de n subdominios.*

La consecuencia de este teorema es importante: el que existan líneas nodales en cierto dominio implica que se ha establecido una pared eléctrica en cierta región de la guía. Es decir, condiciones de contorno más restrictivas. Esta pared se puede aprovechar (por ejemplo si existe simetría) para obtener los autovalores del problema en cuestión analizando sólo un subdominio. El aprovechamiento de las simetrías se estudia en el apéndice B.

¹¹Supondremos que para la ecuación diferencial bajo consideración los nodos son curvas o superficies suaves a trozos, y descomponen el dominio fundamental en subdominios con contornos suaves a trozos.

Bibliografía

- [1] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. I of *Wiley Classics Library*. New York: John Wiley & Sons Wiley-Interscience, 1989.
- [2] J. V. Bladel, *Electromagnetic Fields*. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1988.
- [3] E. C. Cherry, “The analogies between the vibrations of elastic membranes and the electromagnetic fields in guides and cavities,” *Proceedings of the IEE*, vol. 96, no. 3, pp. 346–360, 1949.
- [4] G. F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. Madrid: Mc Graw-Hill, segunda ed., 1993.
- [5] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, Ltd., 1989.
- [6] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. International series in pure and applied physics, New York: McGraw-Hill, 1953.
- [7] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE Press, second ed., 1991.

Apéndice D

Publicaciones

En este apéndice se recogen las publicaciones de mayor importancia relacionadas con el trabajo realizado en la presente tesis.

D.1. El método BI-RME

Las publicaciones referidas al capítulo del método BI-RME han sido:

- S. Cogollos, V. E. Boria, and B. Gimeno, “ROCOTEH v.1.00: A software tool for the analysis of H- and E-plane T-junctions in rectangular waveguide with rounded corners,” Tech. Rep. 12870/98/NL/MV, European Space Agency, 1999.
- S. Cogollos, A. Vidal, H. Esteban, and V. E. Boria, “An efficient approach for the computation of the modal spectrum of ridged rectangular waveguides,” *Proceedings of PIERS*, vol. 3, p. 1181, July 1998.
- S. Cogollos, H. Esteban, and V. E. Boria, “Efficient computation of field patterns in arbitrary cross section waveguides,” *IEEE AP-S International Symposium Digest*, vol. 1, p. 6, July 1999.
- S. Marini, P. Soto, S. Cogollos, V. E. Boria, and B. Gimeno, “Efficient full-wave modal analysis of waveguides with arbitrary geometry defined by straight, circular and elliptical segments,” *Proceedings of PIERS 2002*, vol.—, pp.—, July 2002.

donde la última publicación referenciada ha sido aceptada pero no ha sido publicado todavía (17 de julio de 2003) el libro de actas del congreso.

D.2. Teoría de cavidades

Las publicaciones referidas al capítulo de teoría de cavidades han sido:

- V. E. Boria, S. Cogollos, H. Esteban, M. Guglielmi, and B. Gimeno, “Efficient analysis of a cubic junction of rectangular waveguides using the admittance matrix representation,” *IEE Proceedings on Microwaves, Antennas and Applications*, vol. 147, pp. 417–422, December 2000.
- S. Cogollos, V. E. Boria, H. Esteban, B. Gimeno, and M. Guglielmi, “Efficient analysis of general waveguide multiport junctions using a segmentation technique and hybrid matrix formulations,” *Annales des Télécommunications*, vol. 56, pp. 94–103, January–February 2000.
- S. Cogollos, V. E. Boria, and B. Gimeno, “Analysis of H-plane T-junctions in rectangular waveguide with rounded corners,” *Proceedings of the final presentation days of the payload systems division*, vol.—, p. 4, september 1999.
- S. Cogollos, V. E. Boria, H. Esteban, M. Guglielmi, and B. Gimeno, “Efficient analysis of multi-port junctions with arbitrarily shaped waveguide ports using a segmentation technique and hybrid matrix formulations,” *Proceedings of 3rd European Conference on Numerical Methods in Electromagnetism*, pp. 162–163, March 2000.
- S. Cogollos, H. Esteban, V. E. Boria, and B. Gimeno, “Análisis eficiente de una unión cúbica de guías rectangulares y aplicaciones,” *Actas de congreso de la unión científica internacional de radio URSI*, pp. 623–624, Septiembre 1998.
- V. E. Boria, S. Cogollos, P. Soto, H. Esteban, y B. Gimeno, “Desarrollo de nuevos componentes en las bandas de microondas y milimétricas para futuros sistemas de radiocomunicaciones,” *Actas del X congreso Jornadas de telecomunicación I+D*, pp. 7, Noviembre 2000.
- V. E. Boria, S. Cogollos, H. Esteban, A. A. San Blas, and B. Gimeno, “Efficient techniques for the accurate analysis and design of passive waveguide components with arbitrary geometry,” *Proceedings of PIERS 2002*, vol.—, pp.—, July 2002.

donde la última publicación referenciada ha sido aceptada pero no ha sido publicado todavía (17 de julio de 2003) el libro de actas del congreso.

La referencia titulada “Desarrollo de nuevos componentes en las bandas de microondas y milimétricas para futuros sistemas de radiocomunicaciones”, obtuvo el *Premio a la Mejor Comunicación en el Área de Sistemas y Tecnologías de Radiocomunicaciones*.

D.3. Análisis y diseño de filtros con esquinas redondeadas

Las publicaciones referidas al capítulo de análisis y diseño de filtros con esquinas redondeadas han sido:

- S. Cogollos, V. E. Boria, P. Soto, B. Gimeno, and M. Guglielmi, “Efficient CAD tool for inductively coupled rectangular waveguide filters with rounded corners,” *Proceedings of the 31st European Microwave Conference*, vol. 1, pp. 315–318, September 2001.
- S. Cogollos, P. Soto, A. A. San Blas, H. Esteban, y V. E. Boria, “Análisis y diseño de dispositivos en guía rectangular con sección transversal arbitraria,” *Actas del II Encuentro de electromagnetismo computacional*, pp. 1, Diciembre 2001.
- V. E. Boria, M. Bozzi, F. Bruni, S. Cogollos, G. Conciauro, and L. Perregrini, “Efficient analysis of waveguide filters by the integral equation technique and the BI-RME method,” *Proceedings of the International Microwave Symposium*, vol.—, pp.—, June 2002.

donde la última publicación referenciada han sido aceptada pero no ha sido publicado todavía (17 de julio de 2003) el libro de actas del correspondiente congreso.

D.4. Análisis eficiente de diplexores

Las publicaciones referidas al capítulo de análisis y diseño de filtros con esquinas redondeadas han sido:

- S. Cogollos, V. E. Boria, H. Esteban, A. A. San Blas, and B. Gimeno, “Efficient and accurate analysis of waveguide diplexers using hybrid methods and integral equation techniques,” *Proceedings of the USNC/URSI National Radio Science Meeting*, vol.—, pp.—, June 2002.

donde la publicación referenciada ha sido aceptada pero no ha sido publicado todavía (17 de julio de 2003) el libro de actas del congreso.

D.5. Análisis de uniones planares mediante ecuación integral

Los artículos publicados referentes a este capítulo son los mismos que han sido recogidos en las anteriores secciones ya que se ha utilizado esta técnica en la caracterización de todas las transiciones que aparecen en los dispositivos objeto de estudio en los citados artículos.