

*UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA*

*ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ALCOY*



*MODELOS MULTICRITERIO PARA LA SELECCIÓN DE  
PORTAFOLIOS EN LA BOLSA DE MADRID*

---

*TESIS DOCTORAL*

***Doctorando: D. David Plà Santamaría***

***Director: D. Enrique Ballester Pareja***

*Alcoy, 2000*



# UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

## ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ALCOY



### MODELOS MULTICRITERIO PARA LA SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS EN LA BOLSA DE MADRID

---

*Tesis Doctoral Presentada por:*

**D. David Plà Santamaría**

*para optar al grado de*

**Doctor por la Universidad Politécnica de Valencia**

*Dirigida por:*

**D. Enrique Ballester Pareja**

*Alcoy, 2000.*



*dedicado a Virginia, Luis, Lorena y Rosana*



## AGRADECIMIENTOS

---

Mi agradecimiento a todas aquellas personas que por sus aportaciones o mediación en el desarrollo de la investigación, han hecho posible la finalización de este trabajo.

Al director de esta tesis Catedrático Enrique Ballestero por su dedicación en la dirección y orientación de este trabajo.

Al profesor de la *EPSA* Pablo Bernabeu, sin el empuje y confianza del cual, no hubiera podido iniciar mi carrera docente.

A mi compañero y amigo Moises Navarro por su infinita paciencia e inestimable colaboración.

A toda mi familia por su apoyo y aliento constantes durante los diez años que ha durado mi condición de estudiante.

A los departamentos de la *UPV* “Departamento de Economía y Ciencias Sociales” y “Departamento de Ingeniería Textil y Papelera”, por su orientación en la fase de tercer ciclo de estudios universitarios.

A la *EPSA* por su aportación de medios, en especial al equipo de *PAS* de la *EPSA*, también por su paciencia en las horas extras realizadas durante la fase de cálculos del trabajo.

A todos los profesores de los distintos departamentos con representación en la *EPSA*, con la esperanza de que la lectura de esta trabajo les impulse hacia la finalización de sus propias tesis doctorales y todos juntos, podamos dotar a nuestra escuela de un nutrido cuerpo de profesores-doctores especialistas en nuestras áreas respectivas.



## CONTENIDOS PRINCIPALES

---

### **Capítulo 1: Introducción** \_\_\_\_\_ **10**

Propósito de la investigación	11
Fuentes de datos	11
Metodología	11
Estructura y contenidos principales	13
Aplicabilidad	14

## **PARTE II**

### **METODOLOGÍA FINANCIERA Y ANÁLISIS MULTICRITERIO** \_\_\_\_\_ **16**

### **Capítulo 6: Una Perspectiva Histórica** \_\_\_\_\_ **17**

Introducción	18
Retornos del Portafolio	20
Portafolio con dos activos	31
La frontera eficiente y la utilidad del inversor	44

### **Capítulo 7: La Moderna Teoría del Portafolio (MPT)** \_\_\_\_\_ **47**

La Complejidad de los Mercados Financieros	49
El Modelo de un solo índice (Single-Index Model)	61
Modelos Multi-Índice	69
Modelos de Selección de Portafolios	73
La Potencia Replicadora de la Optimización de Markowitz	82
Análisis de Utilidad	88

## **PARTE III**

### **METODOLOGÍA MULTICRITERIO** \_\_\_\_\_ **97**

### **Capítulo 8: Programación Compromiso en Selección de Portafolios** \_\_\_\_\_ **98**

PARTE A: Aproximación para Inversores Estándar	100
PARTE B: Aproximación del Portafolio Óptimo para un Inversor con Preferencias Particulares	116

## **PARTE IV**

### **CASO ESTUDIO Y CONCLUSIONES** \_\_\_\_\_ **122**

### **Capítulo 9: Caso Estudio: Aplicación a la Bolsa de Madrid** \_\_\_\_\_ **123**

Introducción	124
--------------	-----



<b>Cálculo de Rendimientos Mensuales</b>	<b>129</b>
<b>Cálculo de Fronteras Eficientes</b>	<b>134</b>
<b>Estimación de Óptimos para Clientes Estándar</b>	<b>147</b>
<b>Estimación de Óptimos para Clientes Agresivos</b>	<b>152</b>
<b>Estimación de Óptimos para Clientes Conservadores</b>	<b>153</b>
<b>RESUMEN Y CONCLUSIONES</b>	<b>156</b>
<b>INDICE DE TABLAS</b>	<b>309</b>
<b>INDICE DE FIGURAS</b>	<b>311</b>
<b>INDICE BIBLIOGRÁFICO</b>	<b>313</b>



## CONTENIDOS DETALLADOS

<b>Capítulo 1: Introducción</b>	<b>10</b>
Propósito de la investigación	11
Fuentes de datos	11
Metodología	11
Estructura y contenidos principales	13
Aplicabilidad	14

## PARTE II

<b>METODOLOGÍA FINANCIERA Y ANÁLISIS MULTICRITERIO</b>	<b>16</b>
--	-----------

<b>Capítulo 6: Una Perspectiva Histórica</b>	<b>17</b>
--	-----------

<b>Introducción</b>	<b>18</b>
<b>Retornos del Portafolio</b>	<b>20</b>
Varianza (desviación típica) de los retornos	21
Covarianza de retornos (Explicación y Ejemplo)	22
Covarianza y correlación	27
Desviación típica de un portafolio	29
<b>Portafolio con dos activos</b>	<b>31</b>
Igual riesgo y retorno	31
Combinación de valores con retornos y riesgos distintos	35
Cambio de pesos	37
<b>La frontera eficiente y la utilidad del inversor</b>	<b>44</b>

<b>Capítulo 7: La Moderna Teoría del Portafolio (MPT)</b>	<b>47</b>
---	-----------

<b>La Complejidad de los Mercados Financieros</b>	<b>49</b>
La Evolución de la Práctica Inversora	49
Periodo anterior a la década de los 70	49
Las hipótesis de los mercados eficientes (EMH)	50
Estudios de finales de los 70 y principio de los 80	53
El modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM)	54
La visión actual	56
<b>El Modelo de un solo índice (Single-Index Model)</b>	<b>61</b>
Introducción	61
Inputs necesarios para el análisis de portafolios	63
Visión general del Modelo de un solo índice	65
<b>Modelos Multi-Índice</b>	<b>69</b>
Visión general de los Modelos Multi-Índice	70
Funcionalidad de los modelos Multi-Índice	72
<b>Modelos de Selección de Portafolios</b>	<b>73</b>
Introducción	73
Maximización de la Media Geométrica de los Retornos	76
Seguridad Primero (Safety First)	77
El criterio desarrollado por Roy	77



Criterio desarrollado por Kataoka	77
Criterio desarrollado por Telser	78
Dominación Estocástica (Stochastic Dominance)	78
Definición	78
Relación de la Metodología DE con la Metodología E-V	80
Conexión DE Primer Orden con E-V	80
Conexión DE Segundo Orden con E-V	81
Conclusiones	82
<b>La Potencia Replicadora de la Optimización de Markowitz</b>	<b>82</b>
Condiciones Requeridas para la Eficiencia de Portafolios Construidos Mediante Ponderaciones de sus Capitalizaciones Bursátiles (Capitalized Weighted Portfolios, C-W)	83
Cuando los Portafolios C-W son Ineficientes	84
Los Inversores no Coinciden en sus Expectativas con Relación a los Valores	84
Ausencia de venta a corto	85
Impuestos	86
Los Beneficios de la Optimización de Portafolios	87
<b>Análisis de Utilidad</b>	<b>88</b>
Una Derivación Axiomática del Teorema de la Utilidad Esperada	88
Selección Optimizada de Portafolios	94

### PARTE III

## METODOLOGÍA MULTICRITERIO 97

### Capítulo 8: Programación Compromiso en Selección de Portafolios 98

#### PARTE A: Aproximación para Inversores Estándar 100

Introducción	100
Programación Compromiso Aplicada al Problema del Portafolio: Conceptos Previos	102
Conjunto Compromiso Para Portafolios: Determinación Gráfica	105
La Cuestión de los Pesos	106
Maximización de la Utilidad del Inversor Estándar: Solución Subrogada CP	108
Una Comparación Tentativa de Procedimientos	113
Conclusiones	115

#### PARTE B: Aproximación del Portafolio Óptimo para un Inversor con

#### Preferencias Particulares 116

Introducción	116
Asunciones y Definiciones	116
Definiciones y Asunciones más Comunes (normalmente aceptadas en Economía)	117
El Teorema de Acotación	119
Conclusiones	121

### PARTE IV

## CASO ESTUDIO Y CONCLUSIONES 122

### Capítulo 9: Caso Estudio: Aplicación a la Bolsa de Madrid 123

Introducción	124
Cálculo de Rendimientos Mensuales	129
Cálculo de Fronteras Eficientes	134
Introducción	134
Cálculo Detallado de las Fronteras Eficientes	135
Estimación de Óptimos para Clientes Estándar	147





<b>Estimación de Óptimos para Clientes Agresivos</b>	<b>152</b>
<b>Estimación de Óptimos para Clientes Conservadores</b>	<b>153</b>

**RESUMEN Y CONCLUSIONES** **156**

Conclusiones relativas a la Bolsa de Madrid, en aspectos generales, durante la década	
1990	156
Conclusiones relativas a la MPT y sus contrastes empíricos	157
Conclusiones relativas a la selección de carteras mediante análisis compromiso	160
Conclusiones relativas al caso estudio: portafolios obtenidos en la Bolsa de Madrid para	
1997	161

<b>INDICE DE TABLAS</b>	<b>309</b>
<b>INDICE DE FIGURAS</b>	<b>311</b>
<b>INDICE BIBLIOGRÁFICO</b>	<b>313</b>
Bibliografía Citada	313
Bibliografía Complementaria	320





# **CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN**

- 1.1. Propósito de la Investigación
- 1.2. Fuentes de Datos
- 1.3. Metodología
- 1.4. Estructura y Contenidos Principales
- 1.5. Aplicabilidad



### PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

En este trabajo se pone en práctica uno de los más novedosos avances en técnicas de selección de carteras, aplicándolo a la Bolsa de Madrid durante el periodo 1992-1997. Con esta avanzada técnica intentamos obtener una cartera óptima en conjunción con las preferencias del inversor sea cual sea su perfil de utilidad, respecto a las variables rentabilidad y riesgo.

### FUENTES DE DATOS

La información requerida ha sido facilitada por el Servicio de Estudios de BolsaMadrid e InfoBolsa<sup>1</sup> en soporte magnético y a través de la red Internet. Esta información incluye los siguientes datos:

- Cotizaciones diarias correspondientes a 142 valores bursátiles del mercado continuo español.
- Ampliaciones de capital correspondientes a los 142 valores considerados.
- Cotizaciones de los derechos de suscripción para cada uno de dichos valores.
- Dividendos pagados por las sociedades consideradas en el periodo de estudio.

La serie histórica comprende observaciones diarias extendidas a 72 meses desde primero de enero de 1992.

### METODOLOGÍA

Recurriremos a las técnicas más recientes de selección de carteras tal como se han investigado en la *MPT* y en los trabajos sobre funciones de utilidad compromiso publicados en la literatura de análisis multicriterio.

---

<sup>1</sup> <http://www.infobolsa.es/home.htm>



Las herramientas multicriterio permiten acotar un portafolio óptimo (o en ciertos casos un número reducido de portafolios), ya sobre una frontera tradicional, ya sobre tipos especiales de fronteras “rentabilidad-riesgo”. En otras palabras esta metodología se puede implementar en un *framework* donde se confronten una medida de rentabilidad con otra medida de riesgo, ya que ambas variables son decisivas en selección de carteras.

Dentro de la metodología que se apoya en el análisis multicriterio, y especialmente, en las funciones de utilidad-compromiso, el problema selectivo del portafolio se aborda, siguiendo dos modelos de comportamiento inversor. El primero de estos modelos se refiere a un inversor estándar, definiendo la figura del inversor estándar como la de un agente económico cuyas preferencias respecto a la rentabilidad y al riesgo responden a una fisonomía de individuo estadístico moda o bien, de individuo estadístico promedio. Sin duda, el agente económico será seguramente un inversor institucional, en la línea de los fondos de inversión mobiliaria.

El segundo modelo concierne a un agente económico, cuyas preferencias aparecen sesgadas hacia la rentabilidad o, por el contrario, hacia el riesgo. En el primer caso, hablaremos de inversor agresivo, mientras que en el segundo caso nos referiremos a este agente llamándole inversor cauteloso o inversor conservador. Análogamente a la figura del inversor estándar, habrá que entender al inversor sesgado como un agente institucional en la mayoría de los casos. Se tratará, ya de un fondo de inversión cuyo objetivo consiste en ofrecer portafolios atractivos para una clientela de inversores conservadores, (temerosos por los posibles riesgos de su aventura), ya de un fondo de inversión que ofrece carteras arriesgadas pensando en una clientela que prefiere aventurarse hasta ciertos límites con el objetivo de conseguir altas rentabilidades.



## ESTRUCTURA Y CONTENIDOS PRINCIPALES

---

La presentación del trabajo ha sido elaborada en cuatro partes bien diferenciadas. En la primera parte, se hace una introducción completa al entorno aplicativo en donde se tratará la participación de los agentes activos y pasivos del mercado secundario. Este tema se tratará en los capítulos segundo y tercero. También se introducirá el funcionamiento interno de la Bolsa de Madrid en el cuarto capítulo. Para acabar, en el quinto y último capítulo de esta primera parte del trabajo se introducirán los índices más usuales del mercado bursátil madrileño.

La segunda parte de la tesis se introduce de lleno en la literatura científica de la materia, analizando los trabajos previos así como estudiando los modelos que pueden verse completados por la metodología multicriterio que aquí se emplea. Así pues, en el sexto capítulo trata una introducción histórica a los modernos métodos de selección de portafolios. En el siguiente capítulo, el séptimo, se analiza con detalla el conocimiento y las tendencias de pensamiento actuales, haciendo un profundo repaso a las teorías que más defensores y detractores tienen dentro de la moderna teoría del portafolio. En este tema se introducen criterios que posteriormente se pondrán en práctica en el capítulo del caso estudio.

La tercera parte coincide con el capítulo octavo. Es en este capítulo en donde se detalla la metodología multicriterio en la que se basa este trabajo. Este capítulo es el más específico de la nueva metodología que se quiere introducir con este trabajo.

Para finalizar, la cuarta y última parte, agrupa el capítulo 9 y las conclusiones finales. El capítulo noveno desarrolla el caso estudio en toda su extensión. Este capítulo se ve complementado por el *CD Rom* de apéndices que ponen a disposición del lector todos los datos utilizados en el estudio. El resumen y las conclusiones para el conjunto de la tesis



se inserta como parte independiente de los capítulos, al final del trabajo, ocupando unas 16 páginas.

### APLICABILIDAD

---

Como ya hemos dicho, la tesis pretende a los fondos de inversión y otras entidades que existen actualmente en España para que puedan implementar sus portafolios de un modo racional, seleccionando los valores que se ofrecen en cada momento según un modelo multicriterio que permite la toma de decisiones en tiempo real.

Así pues los clientes o destinatarios de la investigación que aquí se desarrolla son todas aquellas entidades que administren algún tipo de fondo de inversión, sin restricción con relación a qué activos entran a formar parte de las inversiones. Es decir, la metodología es aplicable a cualquier tipo de fondo de renta fija, variable, fondos inmobiliarios o mobiliarios, incluso de activos de otros tipos diversos. No existe límite siempre que se pueda calcular una medida de riesgo y una medida de rentabilidad.

Las entidades que pueden beneficiarse de esta nueva metodología son: bancos, fondos de inversión, entidades gestoras, sociedades de valores, sociedades de seguros, cajas de ahorro, cajas postales, sociedades de crédito, mutualidades, grandes empresas, etc.

Como se verá en el desarrollo del trabajo, uno de los métodos más populares de los últimos años, es la estrategia del “*tracking portfolio*”, la cual consiste en indexar el fondo de inversión de manera que replique a un índice preseleccionado. En general, se demostrará que este sistema de inversión no es eficiente.

El método aquí presentado resuelve este problema al no utilizar la capitalización como criterio para seleccionar los pesos del portafolio. La metodología presentada en este trabajo, posee todas las ventajas de la selección por minimización del riesgo, medido en este caso por la varianza (aunque es viable cualquier otra medida del riesgo); y además,



soluciona la segunda parte del problema de selección sobre la frontera eficiente utilizando la metodología compromiso que asegura una reducción drástica en la probabilidad de seleccionar un portafolio no óptimo.





La versión original de la tesis contaba con una primera parte que versaba sobre el entorno aplicativo del modelo utilizado, es decir, sobre la Bolsa de Madrid. Para esta edición del trabajo se ha decidido suprimir esta primera parte debido a que tanto el tribunal de tesis, como el director, como el doctorando han considerado que no ayuda en la comprensión del modelo presentado como trabajo básico de esta tesis.

## *PARTE II*

---

### *METODOLOGÍA FINANCIERA Y ANÁLISIS MULTICRITERIO*

---

Capítulo 6: Una perspectiva histórica

Capítulo 7: La Moderna Teoría del Portafolio (MPT)

Capítulo 8: Programación Compromiso en Selección de Portafolios

Capítulo 9: Caso Estudio: Aplicación a la Bolsa de Madrid



## **CAPÍTULO 6: UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA**

- 6.1. Introducción
- 6.2. Retornos del portafolio
  - 6.2.1. Varianza (desviación típica) de los retornos
    - 6.2.1.1. Covarianza de retornos (Explicación y Ejemplo)
    - 6.2.1.2. Covarianza y correlación.
  - 6.2.2. Desviación típica de un portafolio.
- 6.3. Portafolio con dos activos
  - 6.3.1. Igual riesgo y retorno
  - 6.3.2. Combinación de valores con retornos y riesgos distintos
  - 6.3.3. Cambio de pesos
- 6.4. La frontera eficiente y la utilidad del inversor



## INTRODUCCIÓN

---

En la década de los 50 y de los 60 un amplio segmento de la comunidad de inversores e investigadores estaban interesados en el concepto de “riesgo”, pero había un problema, no existía una medida especificada para el término. El modelo básico de selección de portafolios, desarrollado por Harry Markowitz<sup>2, 3</sup>, en 1952, derivaba el retorno esperado para un portafolio de activos y una medida del riesgo esperado asociada a ese retorno<sup>4, 5</sup>. Markowitz mostraba que la varianza del retorno esperado era una medida del riesgo que tenía significado bajo una serie de asunciones racionales y no demasiado restrictivas y derivó las fórmulas para el cálculo de la varianza del portafolio. Esta formulación de la varianza del portafolio indicaba la importancia de la diversificación a la hora de reducir el riesgo y mostraba cómo diversificar adecuadamente. El modelo de Markowitz se basaba en varias asunciones que están relacionadas con el comportamiento del inversor:

1. Los inversores consideran cada inversión alternativa como representada por una distribución de probabilidad de los retornos esperados sobre un periodo de inversión.
2. Los inversores maximizan la utilidad esperada de un periodo y poseen curvas de utilidad que demuestran la disminución de la utilidad marginal de la riqueza.
3. Los individuos estiman el riesgo sobre la base de la variabilidad de los retornos esperados.

---

<sup>2</sup> Gitman L.J. and Joehnk M.K. (1996) *Fundamentals of Investing*, Harper Collins, New York, 670-678.

<sup>3</sup> Copeland T. E. and Weston J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Reading, Massachusetts, 87-92.

<sup>4</sup> Markowitz H. (1952) “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, 7, 1.

<sup>5</sup> Markowitz H. (1959) *Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investments* New Haven, Conn. Yale University Press.



4. Los inversores basan sus decisiones únicamente en los retornos esperados y el riesgo; es decir, solamente en sus funciones de utilidad y varianza (o desviación típica) de los retornos.
5. Para un nivel de riesgo dado, los inversores prefieren retornos mayores a menores. De la misma forma, para un nivel de retornos esperados dado, los inversores prefieren menos riesgo a más riesgo.

Bajo estas asunciones, *un solo activo o portafolio de activos es considerado eficiente si no existe otro activo o portafolio de activos que ofrezca un retorno esperado mayor con el mismo (o menor) riesgo, o más bajo riesgo con el mismo (o mayor) retorno esperado.*

La medida de riesgo que Markowitz utilizaba era la *varianza o la desviación típica de los retornos esperados*. Es una medida estadística de la dispersión de los retornos alrededor del valor esperado; es decir, un valor mayor indica más dispersión, siendo todos los demás factores iguales. La idea es que cuanto más dispersos los retornos, más grande es la incertidumbre de los mismos en cualquier periodo futuro. Otra medida de riesgo es el rango de los retornos basada en la asunción de que un más grande rango de retornos, desde el más bajo hasta el más alto, significa más incertidumbre en relación a los retornos esperados futuros.

En contraste a la utilización de medidas que analizan las desviaciones de las expectativas, algunos autores opinan que el inversor debería únicamente preocuparse por los retornos por debajo de sus expectativas, desviaciones por debajo del valor medio. Una medida que considera únicamente esas desviaciones adversas es la semivarianza<sup>6</sup>. Una extensión de esta medida serían desviaciones menores que cero o retornos negativos. Ambas medidas implícitamente asumen que los inversores quieren minimizar las posibilidades de obtener retornos por debajo de la media. Similarmente, Zinbarg propuso el uso de *la*

---

<sup>6</sup> Copeland T. E. and Weston J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Reading, Massachusetts, 120-121.



oportunidad de retornos negativos como medida de riesgo. Estas oportunidades de retornos negativos son retornos por debajo de la tasa libre de riesgo<sup>7</sup>.

Aunque hay numerosas medidas potentes de riesgo, se empieza por describir aquí la varianza o desviación típica de los retornos, ya que esta medida es bastante intuitiva, es una medida de riesgo correcta para la mayoría de inversores y por ello ha sido la elegida para la realización de este trabajo.

### RETORNOS DEL PORTAFOLIO<sup>8</sup>

El retorno esperado de un portafolio de activos es simplemente la media ponderada de los retornos esperados para los activos individuales del portafolio. Se pueden definir los retornos individuales de un activo de la siguiente forma:

$$R_i = \frac{VF - VI + CF}{VI}$$

siendo  $VF$  el valor final,  $VI$  el valor inicial y  $CF$  el cash flow del periodo<sup>9</sup>,  
10.

Los pesos son la proporción del valor total para el activo. El retorno esperado para un activo individual hipotético se calcula en la Tabla 1. En este ejemplo, se asume que se han estimado las mismas probabilidades para todos los retornos posibles.

---

<sup>7</sup> Zinbarg E (1973) "Modern Approach to Investment Risk", *Financial Executive*, 41, 2, 44-48

<sup>8</sup> Copeland T. E. and Weston J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Reading, Massachusetts, 173-175.

<sup>9</sup> Haugen R.A. (1997) *Modern Investment Theory*, Upper Saddle River, New Jersey, 68-70.

<sup>10</sup> Gitman L.J. and Joehnk M.K. (1996) *Fundamentals of Investing*, Harper Collins, New York, 632-633.



El retorno esperado para *un activo individual* con el conjunto de retornos y probabilidades utilizadas en el ejemplo sería del 11 por ciento. El valor esperado para un hipotético portafolio de cuatro activos se muestra en la Tabla 2.

El valor esperado para el total del portafolio sería 11.5 por ciento. El efecto de incluir o excluir algún valor del portafolio sería fácilmente cuantificable, dados los nuevos pesos basados en los retornos esperados para cada uno de los activos. Este cálculo de los retornos esperados para el portafolio puede ser generalizado de la siguiente manera:

$$E(R_{port}) = \sum_{i=1}^n W_i R_i$$

#### *Varianza (desviación típica) de los retornos*

Ya se ha indicado que en este trabajo se utiliza la varianza como medida de riesgo. Así pues, en este punto se muestra el cálculo de la desviación típica de los retornos para un activo individual. Se considera el cómputo de la desviación típica o varianza para un portafolio de activos<sup>11</sup>.

La varianza o desviación típica es una medida de la dispersión de los posibles retornos ( $R_i$ ) con relación a los retornos esperados [ $E(R_i)$ ]:

$$\text{Varianza } (\sigma^2) = \sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 P_i$$

donde  $P_i$  es la probabilidad de los posibles retornos ( $R_i$ ).

$$\text{Desviación Típica } (\sigma) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 P_i}$$

El cálculo de la varianza y la desviación típica para los activos individuales con riesgo de la Tabla 1 está reflejado en la Tabla 3.

<sup>11</sup> Haugen R.A. (1997) *Modern Investment Theory*, Upper Saddle River, New Jersey, 70-71.



Tabla 1

CÁLCULO DE LOS RETORNOS ESPERADOS PARA ACTIVOS INDIVIDUALES CON RIESGO		
PROBABILIDAD	RETORNO %	RETORNO ESPERADO %
0.25	0.08	0.02
0.25	0.1	0.025
0.25	0.12	0.03
0.25	0.14	0.035
		E(R)=0.11

Tabla 2

CÁLCULO DE LOS RETORNOS ESPERADOS PARA UN PORTAFOLIO DE ACTIVOS ARRIESGADOS		
PESO ( $W_i$ ) % DE PORTAFOLIO	RETORNO ESPERADO DEL VALOR ( $R_i$ )	RETORNO ESPERADO DEL PORTAFOLIO % ( $W_i \times R_i$ )
0.2	0.08	0.02
0.3	0.1	0.025
0.3	0.12	0.03
0.2	0.14	0.035
		E(R)=0.11

Tabla 3

CÁLCULO DE LA VARIANZA PARA UN ACTIVO INDIVIDUAL CON RIESGO					
RETORNO ( $R_i$ )	RETORNO ESPERADO $E(R_i)$	$R_i - E(R_i)$	$[R_i - E(R_i)]^2$	$P_i$	$[R_i - E(R_i)]^2 P_i$
0.08	0.11	-0.03	0.0009	0.25	0.000225
0.1	0.11	-0.01	0.0001	0.25	0.000025
0.12	0.11	0.01	0.0001	0.25	0.000025
0.14	0.11	0.03	0.0009	0.25	0.000225

Antes de emprender la derivación del riesgo del portafolio, es necesario entender dos conceptos básicos en estadística: covarianza y correlación.

#### Covarianza de retornos (Explicación y Ejemplo)

La covarianza es una medida del grado al cual dos variables “se mueven a la vez” a lo largo del tiempo. En el análisis de portafolios, lo normal es que el valor relevante sea la covarianza de retornos en vez de otras como los precios u otra cualquiera<sup>12</sup>. Si la covarianza entre los retornos para dos activos es positiva, esto indica que los retornos tienden a moverse en la misma dirección, al mismo tiempo, si la covarianza es negativa, indica que los retornos tienden a moverse en direcciones opuestas<sup>13</sup>. La *magnitud* de la covarianza depende de las

<sup>12</sup> Los retornos, por supuesto, pueden ser medidos de varias formas, dependiendo del tipo de activo considerado.

<sup>13</sup> Gitman L.J. and Joehnk M.K. (1996) *Fundamentals of Investing*, Harper Collins, New York, 661-667.



varianzas de las series individuales de retornos, así como de la relación entre las series<sup>14</sup>.

Tabla 4

CÁLCULO DE RETORNOS MENSUALES						
	TELEFÓNICA			BBV		
	PRECIO DE CIERRE	DIVIDENDO	RETORNO %	PRECIO DE CIERRE	DIVIDENDO	RETORNO %
dic-81	1500	50		3560	200	
ene-82	1550		3.333	3850		8.146
feb-82	1520		-1.935	3860		0.260
mar-82	1480		-2.632	4220		9.326
abr-82	1450		-2.027	4350		3.081
may-82	1490		2.759	4250		-2.299
jun-82	1360	50	-5.369	4600	200	12.941
jul-82	1370		0.735	4400		-4.348
ago-82	1350		-1.460	4650		5.682
sep-82	1310		-2.963	4860		4.516
oct-82	1300		-0.763	4990		2.675
nov-82	1250		-3.846	5200		4.208
dic-82	1290	50	7.200	5500	200	9.615

La Tabla 4 contiene los precios de cierre mensuales y dividendos para cotizaciones hipotéticas de Telefónica y BBV. Dados estos datos es posible calcular los retornos mensuales para estos dos valores durante el año 1982.

La Figura 1 y la Figura 2 contienen los gráficos de series temporales de los retornos mensuales de los dos valores. Aunque parece que las dos series de retornos se movieron en la misma dirección en algunos meses, en otros meses parece que los retornos se mueven en direcciones opuestas. El propósito de la medida de la covarianza es proveer una medida absoluta de su movimiento en el tiempo<sup>15</sup>.

Para dos activos,  $i$  y  $j$ , la covarianza de los retornos mensuales se define como:

$$Cov_{ij} = E \left[ \left( R_i - E(R_i) \right) \left( R_j - E(R_j) \right) \right] = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \left( R_i - E(R_i) \right) \left( R_j - E(R_j) \right)$$

<sup>14</sup> Sharpe W. F. (1985) *Investments*, Prentice-Hall, New Jersey, 126-130.

<sup>15</sup> Copeland T. E. and Weston J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Reading, Massachusetts, 161-184.





Como puede verse, si los retornos para un valor están por encima de su media durante un periodo dado, y los retornos del otro valor están también sobre su media durante el mismo periodo, entonces el *producto* de estas desviaciones a partir de la media serán positivas (es decir, la covarianza será un valor positivo). En contraste, si, durante un mes dado, el retorno de Telefónica estuviera por encima de su media y el retorno del BBV estuviera por debajo de su media, entonces el producto de estas desviaciones sería negativo. Si este movimiento contrario ocurriera consistentemente, la covarianza entre los retornos sería un valor negativo.

Por ejemplo, la Tabla 5 contiene los retornos antes expuestos para Telefónica y BBV. Antes de ojear la tabla, uno podría esperar que los retornos para ambos valores tuvieran una covarianza relativamente pequeña debido a las diferencias en los productos de estas dos empresas. Los retornos esperados  $E(R)$  son la media aritmética de los retornos mensuales.

$$E(R_i) = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} R_{it} \quad \text{and} \quad E(R_j) = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} R_{jt}$$

Todas las figuras (excepto las de la última columna) están redondeadas al segundo decimal más próximo.

Figura 1

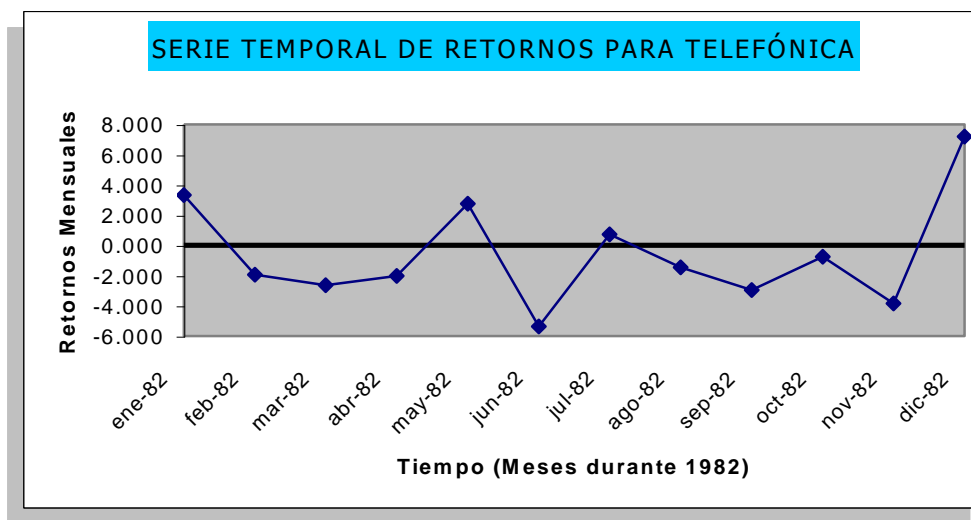




Figura 2

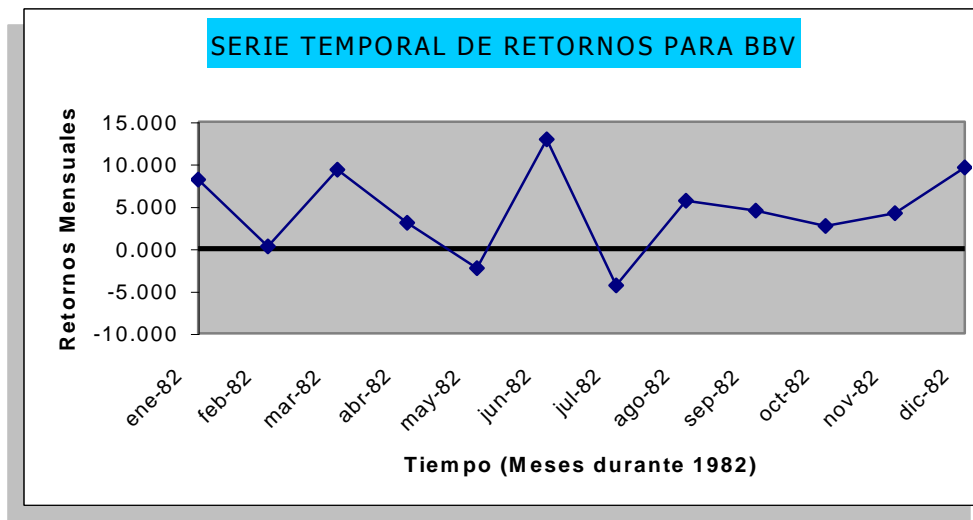




Tabla 5

CÁLCULO DE LA COVARIANZA DE LOS RETORNOS PARA TELEFÓNICA Y BBV					
MES-AÑO	RETORNO MENSUAL %		$R_i - E(R_i)$	$R_j - E(R_j)$	$[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]$
	TELEFÓNICA	BBV			
ene-82	3.333	8.146	3.914	3.662	14.335
feb-82	-1.935	0.260	-1.355	-4.224	5.723
mar-82	-2.632	9.326	-2.051	4.843	-9.932
abr-82	-2.027	3.081	-1.446	-1.403	2.029
may-82	2.759	-2.299	3.339	-6.783	-22.649
jun-82	-5.369	12.941	-4.788	8.458	-40.498
jul-82	0.735	-4.348	1.316	-8.831	-11.622
ago-82	-1.460	5.682	-0.879	1.198	-1.053
sep-82	-2.963	4.516	-2.382	0.032	-0.077
oct-82	-0.763	2.675	-0.183	-1.809	0.330
nov-82	-3.846	4.208	-3.265	-0.275	0.899
dic-82	7.200	9.615	7.781	5.132	39.928
					$\Sigma = -22.588$

Como ya se ha podido ver, el retorno medio mensual en Telefónica fue de  $-0.581$  por ciento y el retorno medio mensual para BBV fue de  $4.484$  por ciento. De los resultados de la última columna, podemos derivar la covarianza entre estos dos valores como sigue:

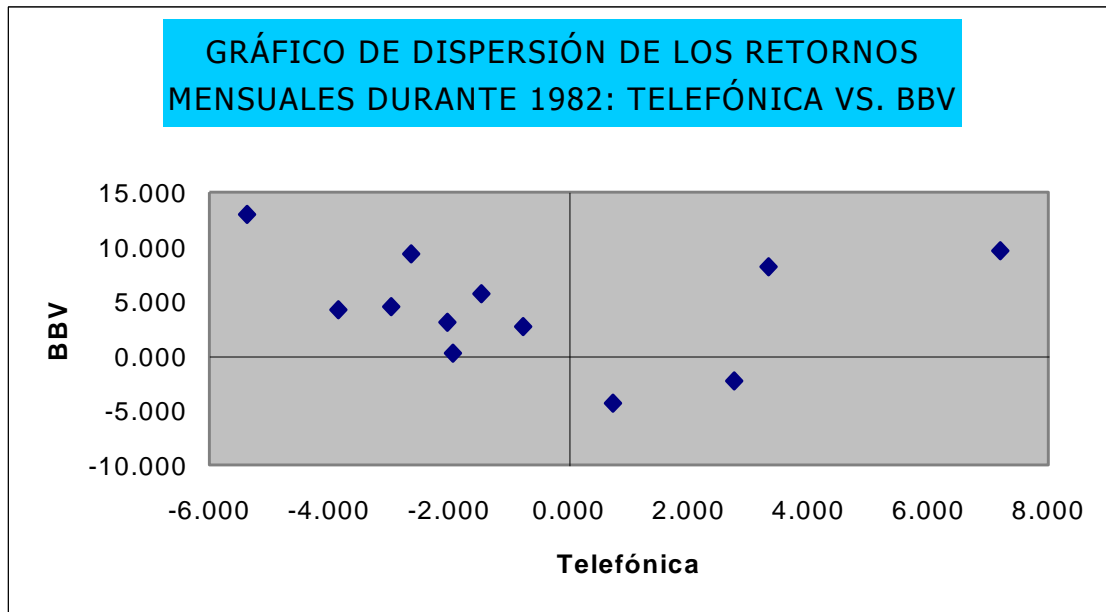
$$Cov_{ij} = \frac{1}{12}(-22.59) = -1.80$$

La interpretación de un número como  $-1.80$  es difícil, es decir, ¿es  $-1.80$  un covarianza alta o baja? Sabemos que la relación es, en general negativa, pero no es posible ser más específico.

La Figura 3 muestra un diagrama de dispersión con los pares de valores de  $R_{it}$  y  $R_{jt}$  enfrentados. Este diagrama muestra la naturaleza lineal y el posible ajuste de la relación.



Figura 3



### Covarianza y correlación

La covarianza se ve afectada por la variabilidad de las dos series de retornos. Así pues, la interpretación de un número como  $-1.80$  es difícil porque, si las dos series individualmente son muy volátiles,  $-1.80$  puede no indicar una relación lineal demasiado ajustada. Por otro lado, si las dos series fueran muy estables, un valor de  $-1.80$  podría ser relativamente alto. Obviamente, lo que se necesita es “estandarizar” esta covarianza para la variabilidad individual de las dos series de retornos<sup>16</sup>. Esto se hace de la siguiente manera:

$$r_{ij} = \frac{Cov_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

donde:

$r_{ij}$  = coeficiente de correlación de los retornos

$\sigma_i$  = desviación estándar de  $R_{it}$

$\sigma_j$  = desviación estándar de  $R_{jt}$

<sup>16</sup> Sharpe W. F. (1985) *Investments*, Prentice-Hall, New Jersey, 127-129.



$$\sigma_i^2 = E \left[ R_i - E(R_i) \right]^2 = \sum_{t=1}^N \left[ R_{it} - E(R_i) \right]^2 \frac{1}{N}$$

$$\sigma_j^2 = E \left[ R_j - E(R_j) \right]^2 = \sum_{t=1}^N \left[ R_{jt} - E(R_j) \right]^2 \frac{1}{N}$$

Como ya se ha mostrado, cuando se estandariza la covarianza mediante las desviaciones estándar individuales, derivamos el coeficiente de correlación ( $r_{ij}$ ), el cual solamente varía en el rango  $-1$  a  $+1$ . Un valor de  $+1$  indicaría una relación lineal perfecta y positiva entre  $R_i$  y  $R_j$ ; es decir, los retornos de los dos valores se moverían juntos de forma perfectamente lineal.

Tabla 6

CÁLCULO DE LA DESVIACIÓN TÍPICA DE LOS RETORNOS PARA TELEFÓNICA Y BBV				
MES-AÑO	$R_{it}-E(R_i)$	$[R_{it}-E(R_i)]^2$	$R_{jt}-E(R_j)$	$[R_{jt}-E(R_j)]^2$
ene-82	3.914	15.320	3.662	13.413
feb-82	-1.355	1.835	-4.224	17.842
mar-82	-2.051	4.206	4.843	23.452
abr-82	-1.446	2.092	-1.403	1.969
may-82	3.339	11.151	-6.783	46.002
jun-82	-4.788	22.929	8.458	71.530
jul-82	1.316	1.732	-8.831	77.995
ago-82	-0.879	0.773	1.198	1.436
sep-82	-2.382	5.675	0.032	0.001
oct-82	-0.183	0.033	-1.809	3.272
nov-82	-3.265	10.663	-0.275	0.076
dic-82	7.781	60.539	5.132	26.335
		$\Sigma = 136.949$		$\Sigma = 283.322$

Para derivar esta medida estandarizada de la relación, es necesario calcular las desviaciones típicas para las series individuales. Anteriormente, ya se han realizado estos cálculos en la Tabla 5. Ahora obtenemos el cuadrado de cada uno de estos valores y los sumamos como se ha mostrado en la Tabla 6, así obtenemos:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{12}(136.949) = 11.41 \quad \text{y}$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{12}(283.322) = 23.61$$

Así pues:



$$\sigma_i = \sqrt{11.41} = 3.38 \%$$

$$\sigma_j = \sqrt{23.61} = 4.86 \%$$

Por tanto, el coeficiente de correlación entre los retornos para Telefónica y BBV es:

$$r_{ij} = \frac{Cov_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{-1.80}{(3.38)(4.86)} = -0.11$$

Como ya se ha dicho una correlación de +1 indicaría una correlación positiva perfecta, un valor de -1 significaría que los retornos se moverían en direcciones completamente opuestas, mientras que un valor de 0 significaría que no existe relación lineal alguna entre los retornos. Esto querría decir que ellos están incorrelacionados desde un punto de vista estadístico; lo cual no implica que sean independientes. El valor  $r_{ij} = -0.11$  es significativo aunque no es demasiado elevado si lo comparamos con la correlación que se obtiene entre algunos valores pertenecientes al mismo sector industrial, donde las correlaciones superan el 0.85.

Dada esta somera explicación de los conceptos de covarianza y correlación, es posible considerar ahora la fórmula para calcular la desviación típica de los retornos para un portafolio de activos. Es necesario ser capaz de calcular las desviaciones típicas porque esta es la medida de riesgo que se va a utilizar en este trabajo, aunque debe quedar claro que para cualquier otra medida de riesgo distinta de la varianza, la metodología multicriterio que analizo en este trabajo es aplicable. Como se ha indicado, la derivación de la fórmula para el cálculo de la desviación típica de un portafolio de activos fue obtenida por Markowitz.

### *Desviación típica de un portafolio*

Anteriormente en este trabajo se presentó la fórmula para el retorno esperado de un portafolio de activos y se mostró que el retorno esperado de un portafolio era simplemente la media ponderada de los



retornos esperados de los activos individuales del portafolio; los pesos son los porcentajes del valor del portafolio. (Ver, por ejemplo la Tabla 2). En tales condiciones, es relativamente fácil ver el impacto sobre el retorno esperado del portafolio al añadir o sustraer un activo determinado. Basándose en esto, uno puede asumir que es posible determinar la desviación típica del portafolio de la misma forma, es decir, calculando la media ponderada de las desviaciones típicas para los activos individuales. Pero lo cierto es que haciendo el cálculo de esta manera, el resultado *no es correcto*. Cuando Markowitz derivó la fórmula general para la desviación típica de un portafolio, obtuvo lo siguiente<sup>17</sup>:

$$\sigma_{port} = \sum_{i=1}^N W_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N W_i W_j Cov_{ij}$$

donde:

$\sigma_{port}$  = la desviación típica de los portafolios

$W_i^2$  = los pesos de los activos individuales en el portafolio, donde los pesos están determinados por la proporción de valor en el portafolio.

$\sigma_i^2$  = la varianza del activo  $i$

$Cov_{ij}$  = la covarianza entre los retornos para los activos  $i$  y  $j$ .

En otras palabras, esta fórmula indica que la desviación típica del portafolio es una función de la media ponderada de las varianzas individuales (en donde los pesos están elevados al cuadrado), más dos veces las covarianzas ponderadas entre todos los activos del portafolio. La clave reside en que la desviación típica del portafolio no abarca únicamente las varianzas, sino también las covarianzas entre los pares de valores individuales. Además, puede ser demostrado que en un portafolio con un gran número de valores, esta fórmula puede expresarse como la suma de las covarianzas. Esto indica que el factor

---

<sup>17</sup> Sharpe W. F. (1985) *Investments*, Prentice-Hall, New Jersey, 645-646.



relevante a considerar al sumar los activos a un portafolio con un número de otros activos no es la varianza del activo individual, sino su *covarianza ponderada con todos los demás activos en el portafolio*. En los siguientes ejemplos se considerará el caso más simple de un portafolio con dos activos. Es importante ver el impacto de covarianzas distintas sobre el riesgo total (desviación típica) del portafolio.

### *PORTAFOLIO CON DOS ACTIVOS*

Examinando el caso más simple, en el cual únicamente dos activos son combinados para crear un portafolio, sirve para ilustrar los cálculos necesarios y ayuda a explicar la forma característica de una frontera eficiente. Debido a que el modelo de Markowitz asume que cualquier activo o portafolio de activos puede ser descrito por solo dos parámetros, el retorno esperado y la desviación típica esperada de los retornos, lo siguiente puede ser aplicado a dos activos *individuales* con los parámetros y coeficientes de correlación indicados, o a dos *portafolios* de activos con los mismos parámetros y coeficientes de correlación<sup>18</sup>.

#### *Igual riesgo y retorno*

Considérese primero el caso en que ambos activos tienen el mismo retorno esperado y la misma desviación típica de los retornos. Como ejemplo, se supondrá:

$$E(R_1) = 0.2$$

$$E(\sigma_1) = 0.1$$

$$E(R_2) = 0.2$$

$$E(\sigma_2) = 0.1$$

Para ver el efecto de covarianzas distintas (es decir, se suponen niveles diferentes de correlación entre dos activos), se considera el siguiente ejemplo donde los dos activos tienen pesos iguales en el portafolio ( $W_1 = 0.50$ ;  $W_2 = 0.50$ ) Así pues, el único valor que variará en los siguientes

<sup>18</sup> Copeland T. E. and Weston J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Reading, Massachusetts, 26-37.





ejemplos es la correlación entre los retornos para los dos activos. Recuérdese que:

$$Cov_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Así, considérense los siguientes coeficientes de correlación y covarianzas alternativas. La covarianza será igual a:  $(r_{1,2})(0.1)(0.1)$  ya que ambas desviaciones típicas son 0.1.

1.  $r_{1,2} = 1.00$        $Cov_{1,2} = (1.00)(0.10)(0.10) = 0.01$
2.  $r_{1,2} = 0.50$        $Cov_{1,2} = 0.005$
3.  $r_{1,2} = 0.00$        $Cov_{1,2} = 0.000$
4.  $r_{1,2} = -0.50$        $Cov_{1,2} = -0.005$
5.  $r_{1,2} = -1.00$        $Cov_{1,2} = -0.01$

Ahora, si se calcula la desviación típica del portafolio en cada uno de estos casos:

Recordar que:

$$\sigma_{port} = \sum_{i=1}^N W_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N W_i W_j Cov_{ij}$$

Por tanto, para el caso 1.:

$$\begin{aligned} \sigma_{port(A)} &= \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.1)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.01)} = \\ &= \sqrt{(0.25)(0.01) + (0.25)(0.01) + 2(0.25)(0.01)} = \\ &= \sqrt{(0.0025) + (0.0025) + (0.50)(0.01)} = \\ &= \sqrt{(0.0050) + (0.0050)} = \\ &= \sqrt{0.01} = \\ &= 0.10 \end{aligned}$$

Como se ha mostrado, en este caso los retornos para los dos activos están perfectamente correlacionados, por tanto la desviación típica para el portafolio es la media ponderada de las desviaciones típicas individuales, y no se produce ningún beneficio real al combinar los dos



activos; son como un solo activo ya que sus retornos se mueven idénticamente.

Pasamos al caso 2. en donde  $r_{1,2}$  es igual a 0.50.

$$\begin{aligned}\sigma_{port(B)} &= \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.1)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.05)} = \\ &= \sqrt{(0.0025) + (0.0025) + (0.50)(0.05)} = \\ &= \sqrt{(0.0050) + (0.0025)} = \\ &= \sqrt{0.0075} = \\ &= 0.0866\end{aligned}$$

Como puede verse mediante simple comparación con el ejemplo anterior, Caso 1., el único término que cambia en el cómputo ha sido el último ( $Cov_{1,2}$ ) el cual pasa de 0.01 a 0.005. El resultado de esto ha sido que la desviación típica ha disminuido cerca de un 13 por ciento desde 0.10 hasta 0.0866. Hay que recordar que *el retorno esperado no ha variado* ya que este se define como la media ponderada de los retornos esperados individuales; es decir, es igual a 0.20 en ambos casos.

Operando de la misma forma, se obtendrá  $\sigma_{port} = 0.0707$  y  $\sigma_{port} = 0.50$  para los casos 3. y 4. respectivamente.

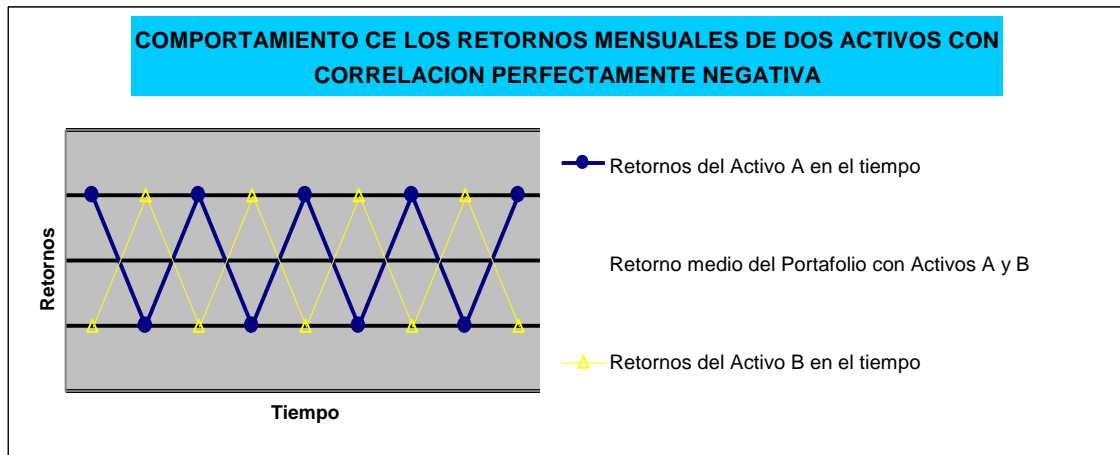
En el último caso, en donde las correlaciones entre los dos activos es  $-1.00$ , resulta ser en donde mejor se pueden ver los beneficios de la diversificación.

$$\begin{aligned}\sigma_{port(E)} &= \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.1)^2 + 2(0.5)(0.5)(-0.01)} = \\ &= \sqrt{(0.0025) + (0.0025) + (0.0025) + (0.5)(-0.01)} = \\ &= \sqrt{(0.0050) + (-0.0050)} = \\ &= \sqrt{0} = \\ &= 0\end{aligned}$$

En este último caso, el término de la covarianza hace desaparecer exactamente la varianza de los términos individuales, y de este modo la desviación típica del portafolio es cero. Este sería un *portafolio sin riesgo*. Un gráfico de tal comportamiento se puede ver en la Figura 4.

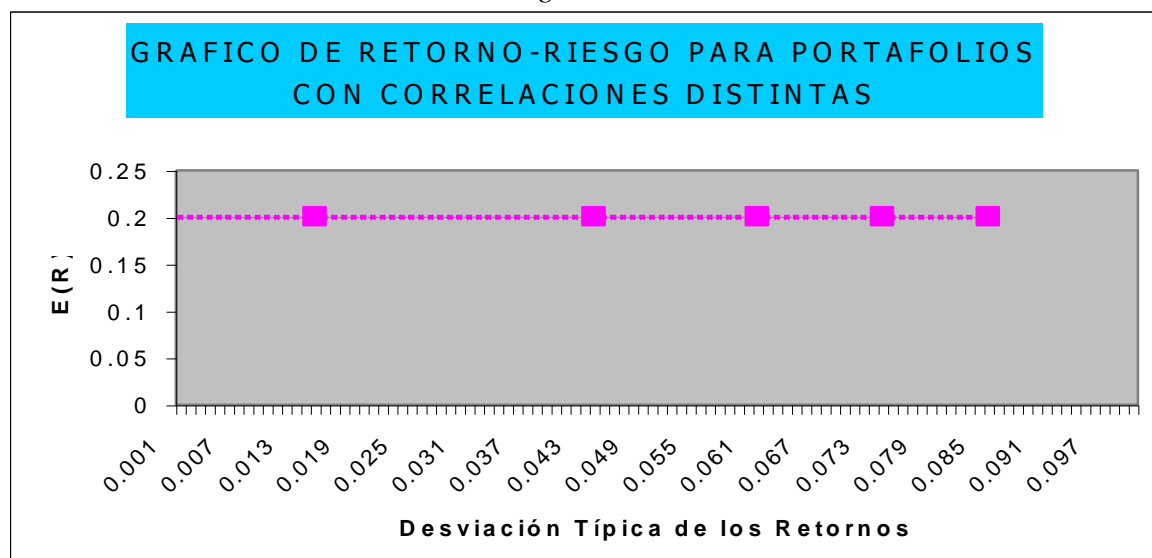


Figura 4



El resultado de una correlación perfectamente negativa es que el retorno medio para los dos activos combinados a lo largo del tiempo es igual a la media para cada uno de ellos, y no existe variabilidad de los retornos para el portafolio. Los retornos sobre y por debajo de la media para cada uno de los activos son *completamente compensados* por el retorno del otro activo, por lo tanto no existe variabilidad en los retornos totales del portafolio; es un portafolio sin riesgo ya que no existe incertidumbre en cuanto a los retornos. La combinación de dos activos con correlación perfectamente negativa produce el beneficio máximo de la diversificación, elimina el riesgo.

Figura 5





El gráfico de la Figura 5 muestra la diferencia en el conjunto riesgo-retorno para estos cinco casos. Como se ha dicho, el único impacto del cambio en la correlación es el cambio en la desviación típica de un portafolio que contenga los dos activos. En la medida que se combinen activos que no estén perfectamente correlacionados, no se afecta el retorno esperado del portafolio, aunque sí que podemos reducir el riesgo del portafolio (su desviación típica) hasta conseguir la combinación óptima en la que existe correlación perfectamente negativa y se *elimina* el riesgo.

### *Combinación de valores con retornos y riesgos distintos*

La explicación previa indicaba qué ocurría cuando se combinaban dos activos con el mismo retorno esperado y desviación típica, y la única diferencia era el coeficiente de correlación (covarianza) entre los activos. En esta sección se considerarán dos activos (o portafolios) que han tenido diferentes retornos esperados y desviaciones típicas individuales. Se mostrará qué ocurre cuando variamos las correlaciones entre ellos. Supondremos lo siguiente:

Valor	$E(R_i)$	$W_i$	$\sigma_i^2$	$\sigma_i$
1	0.10	0.50	0.0049	0.07
2	0.20	0.50	0.0100	0.10

Se considerará el mismo conjunto de coeficientes de correlación anterior, con un conjunto diferente de covarianzas de la siguiente manera:



Caso	Coficiente de correlación	Covarianza ( $r_{ij} \sigma_i \sigma_j$ )
A	+1.00	0.0070
B	+0.50	0.0035
C	0.00	0.0000
D	-0.50	-0.0035
E	-1.00	-0.0070

Como estamos suponiendo que la proporción (pesos) en todos los casos es la misma (0.50, 0.50), el retorno esperado en todas las instancias será:

$$E(R_{port}) = 0.50(0.10) + 0.50(0.20) = 0.15$$

La desviación típica para el Caso A será:

$$\begin{aligned} \sigma_{port(A)} &= \sqrt{(0.5)^2(0.7)^2 + (0.5)^2(0.1)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.0070)} = \\ &= \sqrt{(0.25)(0.0049) + (0.25)(0.01) + (0.5)(0.0070)} = \\ &= \sqrt{0.007225} = \\ &= 0.085 \end{aligned}$$

De nuevo, se muestra que *en el caso de correlación positiva perfecta, la desviación típica del portafolio es la media ponderada de las desviaciones de los activos individuales:*

$$(0.50)(0.070) + (0.50)(0.10) = 0.085$$

Obviamente, a medida que cambiamos los pesos, la desviación típica cambiaría de modo lineal. Esta propiedad se enfatiza ya que es importante en la introducción a los modelos CAPM (Capital Asset Pricing Models), los cuales intentan, entre otras cosas, profundizar en el



trabajo de Markowitz. Para los casos B,C,D y E, la desviación típica para el portafolio sería como sigue<sup>19</sup>:

$$\begin{aligned}\sigma_{port(B)} &= \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(0.0035)} = \\ &= \sqrt{0.005475} = \\ &= 0.07399\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{port(C)} &= \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(0)} = \\ &= \sqrt{0.003725} = \\ &= 0.0610\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{port(D)} &= \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(-0.0035)} = \\ &= \sqrt{0.001975} = \\ &= 0.0444\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{port(E)} &= \sqrt{(0.001225) + (0.5)(-0.0070)} = \\ &= \sqrt{0.000225} = \\ &= 0.015\end{aligned}$$

Indicar que en este conjunto de ejemplos, con correlación negativa perfecta, la desviación típica del portafolio no es cero. Esto se debe a que los diferentes ejemplos tienen pesos iguales, pero las desviaciones típicas individuales no son iguales.

La Figura 6 muestra los resultados para los dos activos individuales y el portafolio de los dos activos bajo la suposición de coeficientes de correlación diferentes como realizado en los casos A, hasta E. Como antes, los retornos esperados no cambian debido a que las proporciones se hacen todas (0.50, 0.50), de forma que todos los portafolios caigan a lo largo de la línea horizontal de retorno  $R = 0.15$ .

### *Cambio de pesos*

Si se cambiaran los pesos de los dos activos para un coeficiente de correlación dado, se derivarían una serie de combinaciones las cuales trazarían una elipse que nacería en el valor dos, atravesaría el

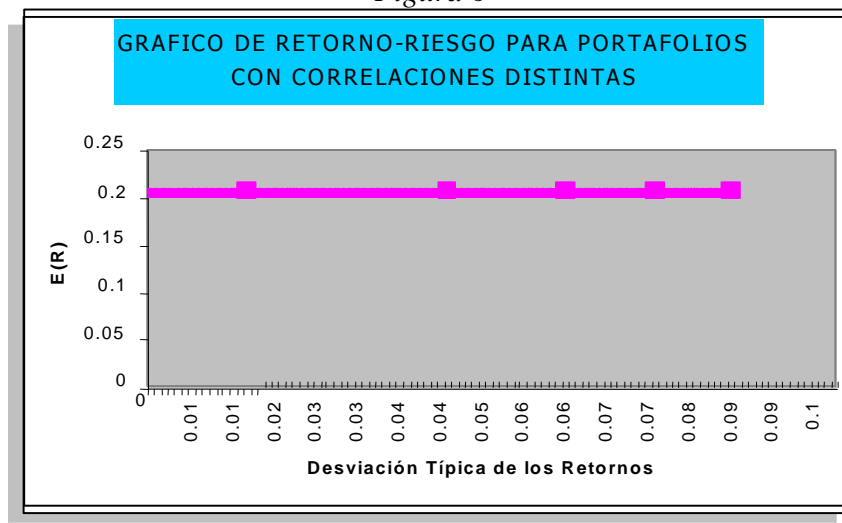
<sup>19</sup> En todos los ejemplos siguientes, se saltarán algunos pasos debido a que ya ha quedado claro que únicamente el último término es el que varía.



punto (0.50, 0.50) y finalizaría en el valor uno. Para demostrar esto, se considera el Caso C en el cual el coeficiente de correlación es cero (lo cual simplifica los cálculos), y se cambian los pesos de la siguiente forma:

Caso	$W_1$	$W_2$	$E(R_i)$
F	0.20	0.80	0.18
G	0.40	0.60	0.16
H	0.50	0.50	0.15
I	0.60	0.40	0.14
J	0.80	0.20	0.12

Figura 6



En los casos F, G, I y J, las desviaciones típicas serían (el  $\sigma$  para el portafolio H es ya conocido):

$$\begin{aligned}\sigma_{port(F)} &= \sqrt{(0.20)^2(0.07)^2 + (0.80)^2(0.10)^2 + 2(0.20)(0.80)(0)} = \\ &= \sqrt{(0.04)(0.0049) + (0.64)(0.01) + 0} = \\ &= \sqrt{0.006596} = \\ &= 0.0812\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma_{port(G)} &= \sqrt{(0.40)^2(0.07)^2 + (0.60)^2(0.10)^2 + 2(0.40)(0.60)(0)} = \\ &= \sqrt{0.004384} = \\ &= 0.0662\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{port(I)} &= \sqrt{(0.60)^2(0.07)^2 + (0.40)^2(0.10)^2 + 2(0.60)(0.40)(0)} = \\ &= \sqrt{0.003364} = \\ &= 0.0580\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{port(J)} &= \sqrt{(0.80)^2(0.07)^2 + (0.20)^2(0.10)^2 + 2(0.80)(0.20)(0)} = \\ &= \sqrt{0.003536} = \\ &= 0.0595\end{aligned}$$

Así pues, los pesos alternativos, suponiendo las mismas correlaciones, indican las siguientes combinaciones riesgo-retorno:

Caso	$W_1$	$W_2$	$E(R_i)$	$E(\sigma_{port})$
F	0.20	0.80	0.18	0.0812
G	0.40	0.60	0.16	0.0662
H	0.50	0.50	0.15	0.0610
I	0.60	0.40	0.14	0.0580
J	0.80	0.20	0.12	0.0595





Figura 7a

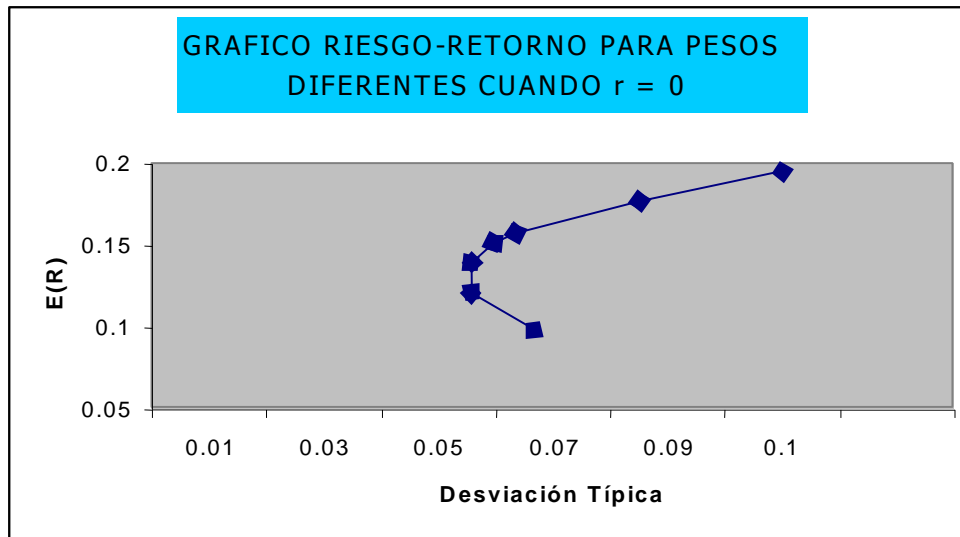
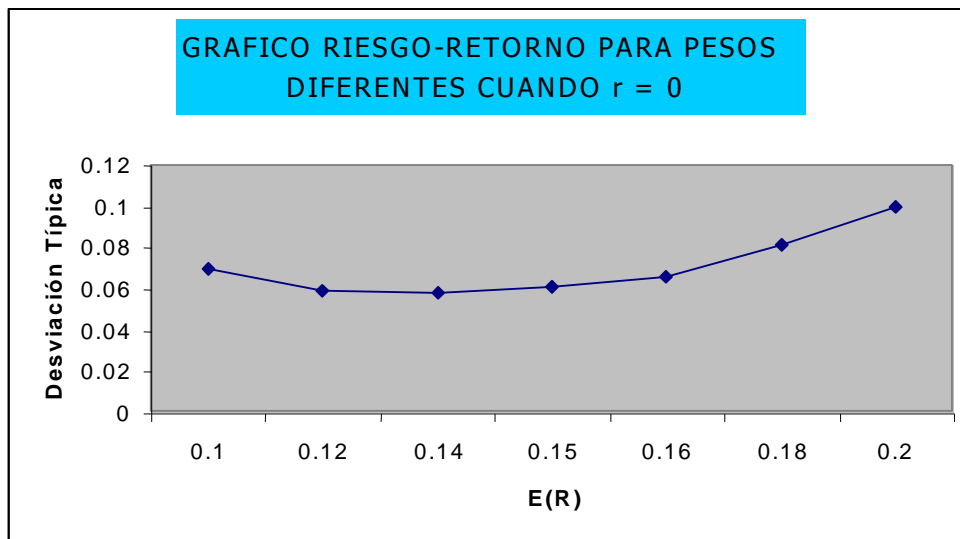


Figura 36b



Una representación gráfica de lo que estas combinaciones suponen en términos de retorno y riesgo se puede ver en la Figura 7a y Figura 36b. Estas figuras representan la misma curva desde las dos vertientes, el riesgo y el retorno. Es posible derivar una curva completa simplemente variando los pesos mediante pequeños incrementos.

Como se puede observar, la curvatura de la función en los gráficos dependerá de la correlación entre los dos activos o portafolios.



En el caso en que  $r_{ij} = 1$ , las combinaciones se situarían sobre una línea recta entre los dos activos. Si se dibujan las posibles combinaciones cuando se asume que  $r_{ij} = -1$ , el gráfico el gráfico resultará más curvado que el de la Figura 7a y Figura 36b, e incluso llegaría a tocar el eje donde se representan los retornos  $E(R)$  (el riesgo sería cero en este caso).

Si se examinan un número más grande de activos y se derivan las curvas suponiendo todas las posibles combinaciones de pesos, se obtendría un gráfico como el de la



Figura 8, si solo se consideraran combinaciones de dos activos o portafolios.

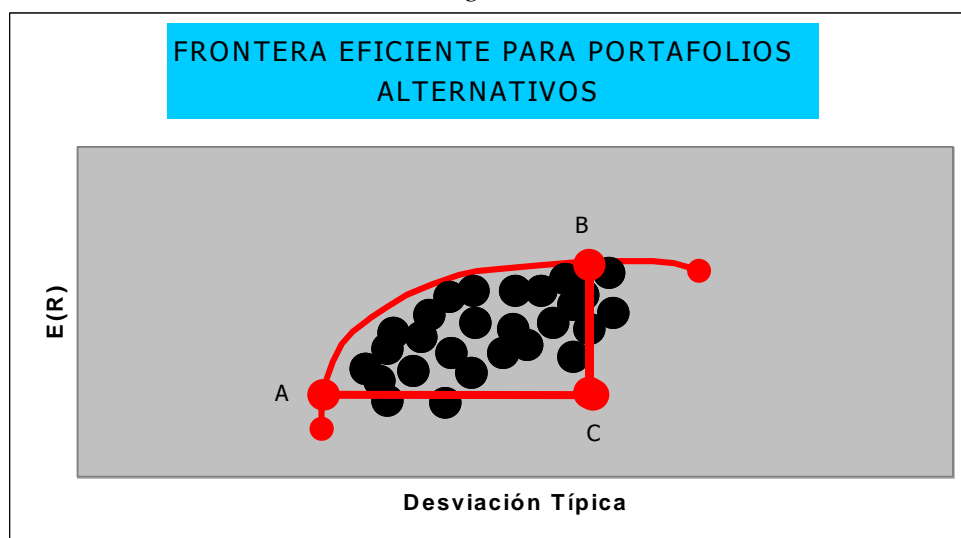
La curva envolvente que contiene las mejores de todas estas combinaciones se denomina la *frontera eficiente*. Más específicamente, *la frontera eficiente es aquel conjunto de portafolios que tiene el retorno máximo para cada nivel de riesgo, o el mínimo riesgo para cada nivel de retorno*. Un ejemplo de esta frontera está expresado en la Figura 8.9. Como puede verse, el conjunto de portafolios de la frontera eficiente domina todos los portafolios *debajo* de esa frontera. En detalle, cada uno de los portafolios *sobre* la frontera, cumple alguna de las dos siguientes condiciones: (a) tiene más retorno para un mismo riesgo o (b) sufre un menor riesgo para el mismo retorno, que cualquiera de los portafolios situados por debajo de la frontera. Por ejemplo, el portafolio A domina el portafolio C porque tiene el mismo retorno pero mucho menos riesgo. El portafolio B domina el portafolio C porque tiene el mismo riesgo pero un retorno inferior. Debido a los beneficios de la diversificación entre activos que no están correlacionados de forma perfecta, se puede afirmar que la frontera eficiente estará formada por *portafolios*, con la posible excepción de los dos puntos extremos (es decir, el activo con más alto retorno y el activo con menor riesgo).

Figura 8



De este modo los inversores, decidirán dónde colocarse sobre la frontera basándose en su propia función de utilidad y actitud frente al riesgo. Los inversores seleccionarán uno de los portafolios sobre la frontera basándose en sus preferencias respecto al riesgo. Ningún portafolio situado sobre la frontera eficiente resulta dominado por algún otro portafolio. Todos ellos tienen diferentes niveles de retorno y riesgo, y el retorno crece con el riesgo durante toda la longitud de la frontera que utilizaremos para la aplicación del teorema objeto de estudio en este trabajo.

Figura 9





## LA FRONTERA EFICIENTE Y LA UTILIDAD DEL INVERSOR

Una vez se ha derivado la frontera eficiente para portafolios contruidos con los valores objeto de estudio, el inversor tiene que tomar una decisión. La frontera eficiente le mostrará el portafolio que ofrece el máximo retorno posible para cada nivel de riesgo (o el mínimo riesgo posible para cada nivel de retorno exigido). La curva de la frontera eficiente, como puede verse en la

Figura 9, tiene una forma que provoca que cuando un inversor quiere obtener un mayor rendimiento, también deberá asumir un mayor riesgo. La pendiente de la frontera eficiente<sup>20</sup>:

$$\frac{\Delta E(R_{port})}{\Delta E(\sigma_{port})}$$

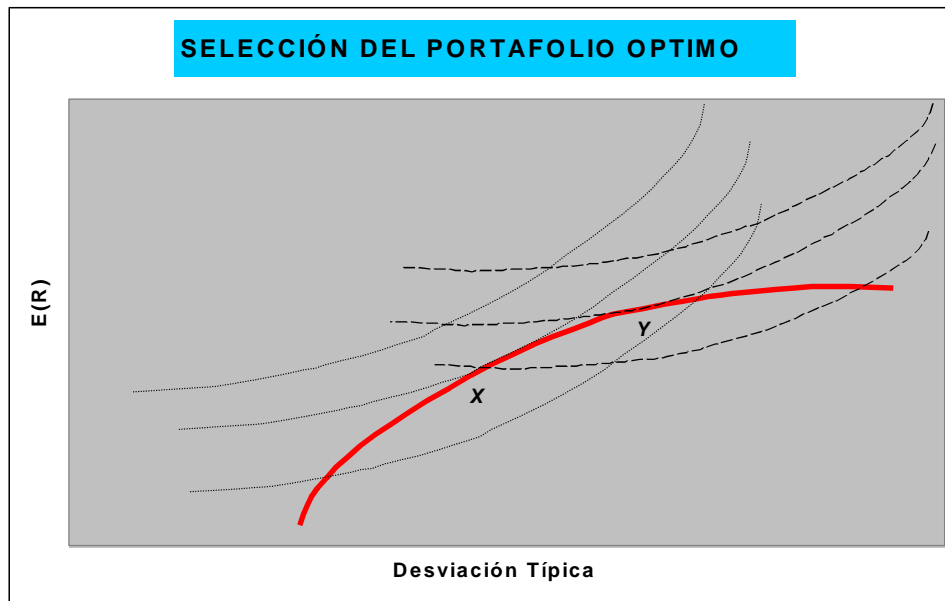
decrece sostenidamente a medida que se mueve hacia arriba. Esto implica la necesidad de asumir cada vez un mayor incremento de riesgo a medida que se le demandan incrementos iguales de retorno.

Las curvas de utilidad para un individuo especifican las relaciones *trade-off* que éste está dispuesto a aceptar entre retornos esperados y riesgo. Las funciones de utilidad de un individuo se utilizan conjuntamente con la frontera eficiente para determinar qué portafolio es el mejor, dadas las preferencias del inversor. Dos inversores no seleccionarán el mismo portafolio del conjunto eficiente a menos que sus curvas de utilidad sean idénticas. En la Figura 10, dos conjuntos de curvas de utilidad se han dibujado, junto con la frontera eficiente. Las curvas denominadas  $U_1$  son para un inversor adverso al riesgo (con  $U_3 > U_2 > U_1$ ). Estas curvas son bastante pronunciadas e indican que el inversor no tolerará demasiado riesgo adicional para obtener retornos adicionales. El inversor es indiferente a cualquier combinación  $E(R)$ ,

<sup>20</sup> Copeland T. E. and Weston J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Reading, Massachusetts, 169, 170, 172, 179, 333.

$E(\sigma)$  que residan a lo largo de una curva específica de utilidad<sup>21</sup> (por ejemplo  $U_1$ ).

Figura 10



Las curvas denominadas  $U'_1$  ( $U'_3 > U'_2 > U'_1$ ) son las correspondientes a un inversor menos adverso al riesgo. Éste está dispuesto a tolerar un poco más de riesgo para obtener un retorno esperado más alto; por tanto, elegirá un portafolio con más alto riesgo y retorno esperado que el que elegirá el inversor cuyas curvas de indiferencia son descritas por  $U_1, U_2, U_3$ .

El portafolio óptimo es el portafolio eficiente con la utilidad más alta. Este se encuentra en *el punto de tangencia entre la frontera eficiente y la curva con la más alta utilidad para un inversor dado*. Para el inversor más conservador, el punto de tangencia está en el punto donde la curva  $U_2$  toca la frontera eficiente, punto X en la Figura 8.10. El otro inversor, debido a que es menos adverso al riesgo, elegiría portafolio Y, el cual tiene mayor valor que el punto X en ambas dimensiones, el retorno esperado y el riesgo (desviación típica). Así pues, dadas sus respectivas actitudes hacia el riesgo y el retorno, es

<sup>21</sup> Copeland T. E. and Weston J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Reading, Massachusetts, 77, 102.



perfectamente lógico que estos dos inversores elijan diferentes portafolios del conjunto eficiente.

Aquí es donde reside el problema que se intenta resolver en este trabajo. Dadas las infinitas funciones de utilidad que pueden tener los inversores, no podemos conocer el punto de tangencia entre la frontera eficiente y la curva de utilidad a menos que conozcamos qué función explícita de utilidad posee el inversor, suposición bastante poco realista<sup>22</sup>.

Con la metodología utilizada en este trabajo, podemos acotar la parte de la frontera eficiente en donde cualesquiera función de utilidad, que cumpla una serie de condiciones muy poco restrictivas, será tangente a la frontera. A partir de esta acotación podemos seleccionar una cartera dentro de un conjunto de posibilidades mucho más concreto.

---

<sup>22</sup> Gitman L.J. and Joehnk M.K. (1996) *Fundamentals of Investing*, Harper Collins, New York, 672-673.



## **CAPÍTULO 7: LA MODERNA TEORÍA DEL PORTAFOLIO (MPT)**

- 7.1. La complejidad de los mercados financieros
  - 7.1.1. La evolución de la práctica inversora
    - 7.1.1.1. Periodo anterior a la década de los 70
    - 7.1.1.2. Las hipótesis de los mercados eficientes (*EMH*)
    - 7.1.1.3. Estudios de finales de los 70 y principio de los 80
    - 7.1.1.4. El modelo *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*
  - 7.1.2. La visión actual
- 7.2. El Modelo de un solo índice (*Single-Index Model*)
  - 7.2.1. Introducción
    - 7.2.1.1. *Inputs* necesarios para el análisis de portafolios
    - 7.2.1.2. Visión general del Modelo de un solo índice
- 7.3. Modelos Multi-Índice
  - 7.3.1. Visión general de los Modelos Multi-Índice
  - 7.3.2. Funcionalidad de los modelos Multi-Índice
- 7.4. Modelos de Selección de Portafolios
  - 7.4.1. Introducción
  - 7.4.2. Maximización de la Media Geométrica de los Retornos
  - 7.4.3. Seguridad Primero (*Safety First*)
    - 7.4.3.1. El criterio desarrollado por Roy
    - 7.4.3.2. El criterio desarrollado por Kataoka
    - 7.4.3.3. El criterio desarrollado por Telser →





→

#### 7.4.4. Dominación Estocástica (*Stochastic Dominance*)

##### 7.4.4.1. Definición

##### 7.4.4.2. Relación de la Metodología *DE* con la Metodología *E-V*

###### 7.4.4.2.1. Conexión *DE* Primer Orden con *E-V*

###### 7.4.4.2.2. Conexión *DE* Segundo Orden con *E-V*

###### 7.4.4.2.3. Conclusiones

#### 7.5. La Potencia Replicadora de la Optimización de Markowitz

##### 7.5.1. Condiciones Requeridas para la Eficiencia de Portafolios Construidos Mediante Ponderaciones de sus Capitalizaciones Bursátiles (*Capitalized Weighted Portfolios, C-W*)

##### 7.5.2. Cuando los Portafolios *C-W* son Ineficientes

###### 7.5.2.1. Los Inversores no Coinciden en sus Expectativas con Relación a los Valores

###### 7.5.2.2. Ausencia de Venta a Corto

###### 7.5.2.3. Impuestos

##### 7.5.3. Los Beneficios de la Optimización de Portafolios

#### 7.6. Análisis de Utilidad

##### 7.6.1. Una Derivación Axiomática del Teorema de la Utilidad Esperada

##### 7.6.2. Selección Optimizada de Portafolios



## LA COMPLEJIDAD DE LOS MERCADOS FINANCIEROS

---

### *La Evolución de la Práctica Inversora*

#### Periodo anterior a la década de los 70

A lo largo de toda la primera mitad de todo este siglo y hasta bien entrada la segunda mitad, aproximadamente hasta la década de los 70, los inversores utilizaban exclusivamente el análisis de valores para tomar sus decisiones de selección de inversiones. Los *managers* o administradores de los portafolios dependían de una manera decisiva de los economistas, analistas fundamentales y analistas técnicos para realizar su trabajo.

En este sistema de selección de carteras a cuatro bandas el economista aportaba su visión general de la economía y de las interrelaciones macroeconómicas que pudiesen afectar a las distintas inversiones. El analista fundamental aportaba las previsiones de crecimiento de la empresa basándose, sobre todo, en las cuentas anuales de las empresas<sup>23</sup>, auditorías y noticias sobre políticas empresariales que pudieran filtrarse al exterior de la empresa. El analista técnico estudiaba la evolución de los precios de cotización de las acciones de las empresas y obtenía previsiones sobre el comportamiento futuro del valor<sup>24</sup>.

Por último, la finalidad del *manager* era principalmente aglutinar la información que le llegaba de los otros tres departamentos indicados y basar decisiones en la información recogida.

La razón por la que se seguía el método antes indicado tiene explicación lógica. Durante todo este tiempo, la creencia era que una

---

<sup>23</sup> Ballestero E., Plà-Santamaría D., García A., Picó A. y Gadea J.E. (1999) *Auditoría Evaluativa de Sociedades*. Dossat. Madrid.

<sup>24</sup> Un estudio de calidad sobre los sistemas utilizados en este tipo de análisis se puede encontrar en Edwads, R. and Magee, J. (1989) *Análisis Técnico de la Tendencia de los Valores*, Gesmovasa, Madrid.



sola persona no era capaz de tener todo el conocimiento necesario para poder seleccionar una cartera de valores en los que invertir. La dificultad se centraba entonces en encontrar una persona o departamento que fuera capaz de aglutinar toda la información que los departamentos de economía, análisis fundamental y análisis técnico pudieran obtener. El sistema fue un completo desastre, ya que la tarea de aglutinar todo el *output* de los demás departamentos se convirtió en imposible.

### Las hipótesis de los mercados eficientes (EMH<sup>25</sup>)

Mientras que la definición de un mercado eficiente de capitales es bastante directa, solemos olvidarnos de considerar porqué los mercados de capitales deben ser eficientes. ¿Qué condiciones se asume que existen para tener un mercado de capitales eficiente?

La primera premisa, y de las más importantes, es que acudan a él un gran número de participantes o agentes maximizadores de beneficio preocupados por el análisis y valoración de las acciones y que actúan de forma independiente unos de otros. Una segunda asunción es que toda la nueva información relacionada con los valores llega al mercado de manera aleatoria y además las noticias que llegan son en general, independientes unas de otras<sup>26</sup>. La tercera asunción de un mercado eficiente es especialmente crucial. Los inversores ajustan los precios rápidamente para reflejar el efecto de la nueva información. Mientras que el ajuste de los precios que se produce no es siempre perfecto, sí que es insesgado (esto es, algunas veces hay un ajuste superior al necesario, y aveces el ajuste es inferior, pero nunca se puede prever cual de los dos errores se cometerá en un momento determinado). Sabemos que el tiempo que se tarda en ajustar el precio

---

<sup>25</sup> Fama E.F. (1970) "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work" *Journal of Finance*, 25, 2, 383 – 417.

<sup>26</sup> Fama E.F., Fisher, L. Jensen, M. and Roll, R. (1969) "The Adjustment of Stock Prices to New Information" *International Economic Review*, 10, 1, 1-21.



de un valor es muy poco, debido al alto número de participantes maximizadores de beneficio que acuden al mercado. El efecto combinado de (1) información llegando de un modo aleatorio, y (2) numerosos inversores que ajustan rápidamente los precios de los valores para reflejar la nueva información hace *que los cambios en los precios sean independientes y aleatorios*. Un punto crucial en esta discusión es que el proceso de ajuste requiere un alto número de inversores que siguen el movimiento de precios del valor, analizan el impacto de la nueva información, y compran o venden el valor para ajustar el precio de forma que refleje la nueva noticia. Esto implica que los mercados eficientes requieren un mínimo de *trading* o contratación y que cuanta más contratación más rápido será el ajuste de los precios, es decir más eficiencia.

Finalmente, debido a que los precios de los valores se ajustan a toda la nueva información y por tanto, se supone que reflejan toda la información pública en cualquier momento del tiempo. Los precios deben ser un estimador insesgado de toda la información accesible. Teniendo en cuenta todo lo indicado podemos decir que un mercado eficiente es un mercado en el que los precios de los valores se ajustan rápidamente ante la infusión de nueva información, y por tanto, los precios de los valores en cada instante reflejan fielmente toda la información disponible incluyendo el riesgo involucrado. Así pues, los retornos reflejan el riesgo implícito, y el retorno esperado es consistente con el riesgo.

Estas hipótesis supusieron una arremetida contra el sistema tradicional de inversión. Todo el sistema de selección de inversiones que se había mantenido hasta la aparición de esta teoría se quedó anticuado de la noche a la mañana.

Además, debido al ya alto número de participantes que los mercados financieros tenían en aquellos años, sobre todo los de los EE.UU. se pensó que los mercados financieros de aquel país eran eficientes. Por lo tanto, con esto se estaba afirmando que los precios de



los valores se comportan siguiendo un patrón aleatorio, con lo que en realidad no hay nadie que pueda predecir sus movimientos y por tanto beneficiarse de un análisis científico. Las únicas personas que podrían obtener un beneficio sostenido en los mercados financieros son los *insiders*, ya que éstos cuentan con la información relevante de un valor antes que el público en general<sup>27</sup>.

Con todo ello, el paradigma central del estudio de los mercados financieros durante el final de la década de los 70 y hasta bien entrados los 80 fueron las *EMH*.

Consecuencia de esta teoría fue el éxito de la administración pasiva de los fondos de inversión que empezó a ser popular en aquella época. El razonamiento era muy lógico. Si los mercados financieros son mercados eficientes, significa que ajustan automáticamente los precios de los valores a las noticias en cuanto se conocen. Por tanto, no podemos predecir en absoluto el movimiento futuro de una cotización. Además la eficiencia hace que los cambios en los precios sean independientes y aleatorios. Con todo ello, es absolutamente imposible vencer al mercado. Solo nos queda una solución: seguirlo. Esto es lo único que cabe hacer si confiamos en que los mercados bursátiles tienden a incrementar precios a largo plazo. Debido a esta creencia

---

<sup>27</sup> Los principales estudios en esta área son:

Lorie J.H. and Niederhoffer (1968) "Predictive and Statistical Properties of Insider Trading", *Journal of Law and Economics*, 11, 35-53,

Pratt S.P. and DeVere C.W. (1972) "Relationship between Insider Trading and Rates of Return for NYSE Common Stocks, 1960-1966", included in Lorie J. and Brealey R., eds. *Modern Developments in Investment Management*, Praeger Publishers, New York, 268-279,

Jaffe J. (1974) "Special Information and Insider Trading", *Journal of Business* 47, 3, 410-428,

Finnerty J.E. (1976) "Insiders and Market Efficiency", *Journal of Finance*, 31, 4, 1141-1148,

Finnerty J.E. (1976) "Insiders Activity and Inside Information: A Multivariate Analysis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 11, 2, 205-215.



nacieron los fondos indexados y todos los sistemas de inversión que tratan de obtener los mismos retornos que un determinado índice.

### Estudios de finales de los 70 y principio de los 80

Durante estos años se hicieron un gran número de estudios empíricos cuyo objetivo era desenmascarar distintas pautas de conducta de los retornos. Algunos de estos estudios se basaban en creencias que durante largo tiempo habían estado formando parte del folklore de los mercados financieros como métodos de inversión.

Algunos de los sistemas de inversión que se testaron durante este periodo fueron: (1) invertir en valores de bajo *PER*<sup>28, 29</sup>; (2) invertir en empresas de capitalización baja<sup>30, 31</sup>; (3) efecto enero; (4) invertir en empresas de alta tecnología o de gran crecimiento. Los estudios que se realizaron demostraron que en algunos casos podían obtenerse retornos significativamente superiores a la media y de forma consistente. Por lo que proveían evidencia en contra del paradigma central que en aquel tiempo regía, el de las *EMH*<sup>32</sup>.

---

<sup>28</sup> Basu S. (1977) "Investment performance of Common Stocks in Relation to Their Price-Earning Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis", *Journal of Finance*, 32, 3, 663-682.

<sup>29</sup> Basu S. (1975) "The Information Content of Price Earning Ratios", *Financial Management*, 4, 2, 53-64.

<sup>30</sup> Reinganum, M.R. (1981) "Abnormal Returns in Small Firm Portfolios" *Financial Analysts Journal*, 37, 2, 52-57.

<sup>31</sup> Reinganum, M.R. (1982) "A Direct Test of Roll's Conjecture on the Firm Size Effect" *Journal of Finance*, 37, 1, 27-35.

<sup>32</sup> Nawrocki D. (2000) "Portfolio Optimization, Heuristics, and the 'Butterfly Effect'", *Journal of Financial Planning*, In Press.

Nawrocki D. (1999) "A Brief History of Downside Risk Measures." *Journal of Investing*, 1-17.

Nawrocki D. and Carter W. (1998) "Earnings Announcements and Portfolio Selection: Do They Add Value?", *International Review of Financial Analysis*, Vol. 7, No.1, 1998, 37-50.



## El modelo Capital Asset Pricing Model (*CAPM*<sup>33, 34, 35</sup>)

Este modelo se inicia justo donde acaba el modelo de Markowitz tratado en el capítulo anterior. El propósito de los *CAPM* es extender la teoría del portafolio a un modelo que pueda servir para valorar todos los activos arriesgados. Los *CAPM* permiten determinar el retorno a exigir a una inversión arriesgada. El principal problema que presentan es que su validez se restringe a un mundo con muchas restricciones que no se aproxima al real. Por ello, los *CAPM* han sido muy criticados sobre todo en los últimos años.

Las principales asunciones de los *CAPM* son:

Como se ha indicado anteriormente, los *CAPM* comienzan justo donde la teoría de Markowitz acaba, por lo que necesita de todas las asunciones que el modelo de Markowitz requería. Pero en los *CAPM* se expanden del siguiente modo:

1. Todos los inversores son eficientes en el sentido de Markowitz y aspiran a posicionarse en algún punto sobre la frontera eficiente. La posición exacta sobre la frontera eficiente dependerá de la función riesgo-retorno del inversor y será diferente para distintos inversores.
2. Los inversores pueden pedir prestado o prestar cualquier cantidad de dinero al tipo de interés de los activos sin riesgo (*risk free rate*, *RFR*). Obviamente, siempre es posible prestar dinero al tipo de interés sin riesgo nominal mediante la compra de letras del tesoro o activos equivalentes. Lo que ya es más complicado es pedir prestado al mismo tipo de interés. Pero de todas formas se puede demostrar

---

Nawrocki D. (1997) "Capital Market Theory: Is It Relevant to Practitioners?" *Journal of Financial Planning*, 97-102.

<sup>33</sup> Sharpe W.F. (1964) "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19, 3, 425-442.

<sup>34</sup> Lintner, J. (1965) "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification" *Journal of Finance*, 20, 4, 587- 615.

<sup>35</sup> Mossin, J. (1966) "Equilibrium in a Capital Asset Market" *Econometrica*, 34, 4, 768 – 783.



que asumir un tipo de interés más alto para los préstamos no afecta demasiado el resultado.

3. Todos los inversores tienen expectativas homogéneas; es decir, todos los inversores estiman distribuciones estadísticas idénticas para los retornos futuros. Esta asunción puede ser relajada y, mientras las expectativas no sean demasiado divergentes, el efecto no es relevante.
4. Todos los inversores tienen el mismo horizonte temporal de un solo periodo. Por ejemplo, un mes, seis meses, un año, etc. El modelo será desarrollado para un periodo hipotético. Pero se sabe que los resultados podrían verse afectados si asumiéramos un periodo distinto ya que el inversor debe derivar medidas de riesgo que sean consistentes con el horizonte temporal seleccionado.
5. Las inversiones son divisibles hasta el infinito. Es posible comprar o vender pequeñas partes (acciones) de todos los activos del portafolio. Esta asunción permite decidir sobre las distintas posibilidades de inversión como curvas continuas. Cambiar esta asunción no tendría un impacto elevado sobre el modelo.
6. No existen impuestos o costes de transacción al comprar o vender los activos. Esta asunción es razonable en algunos escenarios. Por ejemplo hay muchos inversores que no tienen que pagar impuestos como los fondos de pensiones. Además los costes de transacción para la mayoría de las instituciones es menos del 1 por ciento en la mayor parte de los instrumentos financieros. De nuevo, la relajación de esta asunción modifica los resultados, pero no cambia el resultado básico.
7. No existe inflación ni cambios en los tipos de interés. O, lo que es lo mismo, la inflación se puede anticipar totalmente. Esta es una asunción de partida razonable que puede ser modificada con posterioridad.





Los mercados de capitales están en equilibrio. Esto implica que el análisis parte de una situación en la que todos los activos están valorados apropiadamente en términos del riesgo que implican.

Con todas estas asunciones los modelos *CAPM* intentan simplificar la realidad de forma que sea posible obtener aproximaciones a las valoraciones del riesgo implícito en cada uno de los activos cotizados en los mercados de valores.

### *La visión actual*

En los últimos años ha ido tomando forma la nueva visión del comportamiento de los mercados financieros. En esta visión moderna se considera que los mercados financieros son sistemas complejos, no eficientes. Cualquier mercado puede comportarse siguiendo uno de los tres siguientes sistemas de comportamiento<sup>36</sup>:

1. Sistemas predecibles: son simples, como la forma de ordenarse los átomos de carbono en el diamante.
2. Sistemas intrínsecamente impredecibles, como el análisis de la afluencia de tráfico en una determinada autopista dentro de 100 años.
3. Sistemas aleatorios: un modelo de comportamiento que se situaría entre los dos anteriores. Estos sistemas de comportamiento se caracterizan por que en ellos se pueden predecir los acontecimientos relevantes, mientras que los irrelevantes no son estimables. Se subdividen en dos sistemas:
  - Sistemas aleatorios simples: aquellos en los que pueden modelizarse los procesos mediante modelos simples, como por ejemplo un modelo de regresión de un solo índice, (ver la siguiente sección).

---

<sup>36</sup> Simon, Herbert (1987) "Rationality in Psychology and Economics" In Hogart and Reder, eds., *Rational Choice: The Contrast Between Economics and Psychology*, University of Chicago Press, Chicago.



- Sistemas aleatorios complejos: aquellos en los que para modelizar sus procesos requieren la inclusión de una gran cantidad de variables. Por ejemplo la alta complejidad del *DNA* y la dificultad que implica su comprensión es posible descifrarla mediante la ayuda de los modernos sistemas de gestión de la información y el raciocinio humano<sup>37</sup>.

Los mercados financieros son sistemas aleatorios complejos, ni intrínsecamente impredecibles ni predecibles, por lo que las teorías simplificadoras no son capaces de explicarlos. Por ello, últimamente los *CAPM* están siendo criticados con más ahínco, ya que no pueden representar la complejidad de los mercados financieros.

Los mercados financieros son, como se acaba de indicar, sistemas muy complejos en los que la mayoría de las veces se producen profundas redes de efectos interrelacionados. Pero, de todas formas, esto no justifica la visión nihilista de los administradores “indexadores”, ya que el sistema que siguen no es impredecible. Por lo tanto es posible encontrar medios computacionales capaces de detectar regularidades<sup>38</sup>. Estos sistemas deben ser rigurosos, objetivos y coordinados, es decir, antagónicos a los modelos departamentalizados que existieron hasta la década de los 70. Con un sistema del tipo que se acaba de citar es posible localizar las enormes ineficiencias que se producen en los mercados financieros y obtener, de este modo, oportunidades de inversión<sup>39</sup>.

Como ejemplo de las ineficiencias que se producen en los mercados financieros se pueden citar multitud de estudio entre los que

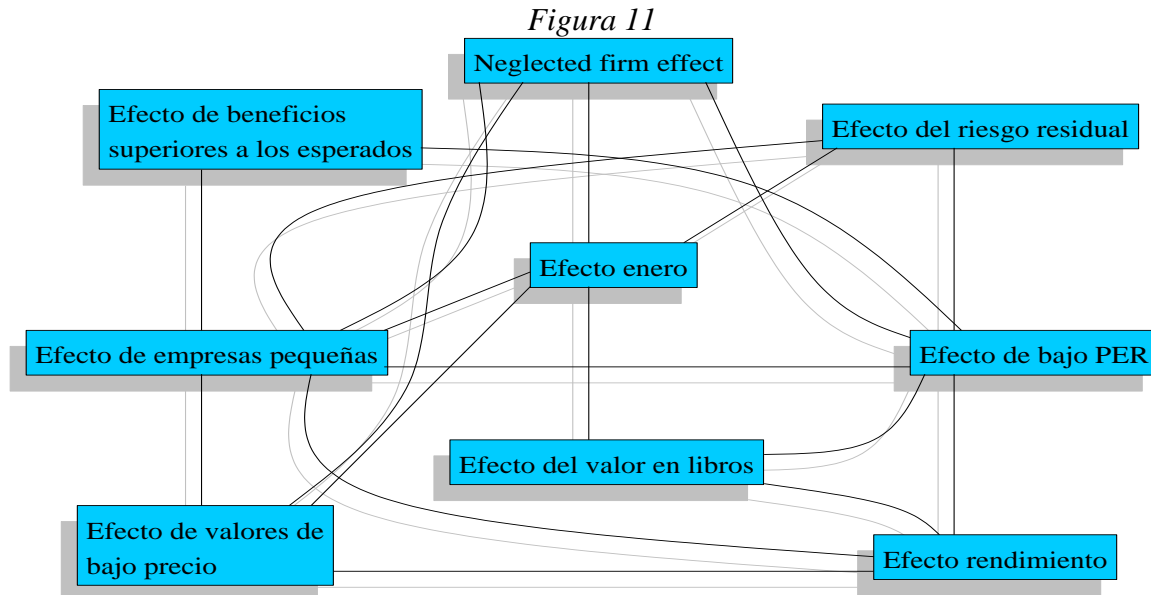
---

<sup>37</sup> Kuhn, Thomas (1970) *The Structure of Scientific Revolutions*, 2<sup>nd</sup> edition, University of Chicago Press, Chicago.

<sup>38</sup> Pagels, Heinz (1988) *The Dreams of Reason: The Computer and the Raise of the Sciences of Complexity*, Simon and Schuster, New York.

<sup>39</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1990) “A Revolution in Common Stock Management: Exploiting Market Inefficiencies and Forecasting Security Returns”, Dow-Jones Irwin, Homewood. IL.

destacan las conclusiones obtenidas por Jacobs, Bruce y Levy<sup>40, 41, 42, 43</sup> (1986 -1989). En la Figura 11 se pueden observar las interrelaciones que existen entre algunas de las distintas anomalías detectadas en los mercados financieros.



Si se tiene en cuenta la gran cantidad de posibles relaciones entre los distintos efectos que han sido analizados como posibles anomalías de la eficiencia de los mercados<sup>44</sup>, es obvio que únicamente un estudio conjunto de todos los efectos que pueden afectar a los

<sup>40</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1988) "Calendar Anomalies: Abnormal Returns at Calendar Turning Points" *Financial Analysts Journal*, 28-39.

<sup>41</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1989) "Forecasting the Size Effect" *Financial Analysts Journal*.

<sup>42</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1989) "How Dividend Discount Models Can Be Used To Add Value" In *Improving Portfolio Performance With Quantitative Models*. Charlottesville: The Institute of Chartered Financial Analysts Continuing Education Series.

<sup>43</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1987) "Investment Management: Opportunities in Anomalies?" *Pension World*, 46-47.

<sup>44</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1986) "Anomaly Capture Strategies" Presented at the Berkley Program in Finance Seminar on The Behaviour of Security Prices: Market Efficiency, Anomalies and Trading Strategies.



retornos y en un escenario unificado puede distinguir entre efectos reales y efectos ficticios. Este análisis supone un modelo de aplicación con el mínimo número de asunciones posible y lo más aproximado a la realidad que se pueda dar, ya que de lo contrario, las relaciones entre los efectos pueden difuminarse<sup>45</sup>.

Los sistemas simplificativos como por ejemplo los *CAPM* no contemplan relaciones tan complicadas como las de la Figura 11. En concreto, los *CAPM* defienden que la única característica que debe recibir compensación es el riesgo sistemático o beta. La cual es una medida de riesgo clásica utilizada por los *CAPM*, basada en la variabilidad propia de los retornos de un valor. Por lo tanto factores del tipo mes, tamaño, beneficios inesperados, etc. no deberían recibir ningún tipo de compensación, como de hecho, los estudio citados demuestran que sí lo hacen. Esto denota claras evidencias de ineficiencia en los modelos simplificados como los *CAPM*.

Las expectativas de retornos obtenidos por sistemas sencillos se denominan *naive returns* (retornos “ingenuos”). En la visión actual de los mercados solo se consideran los retornos denominados “puros”. Estos retornos se deducen de un análisis simultáneo de todos los atributos y efectos de la industria utilizando métodos que consideren diversos *inputs*, como por ejemplo la regresión simple<sup>46</sup>.

Otro campo en el que la actual corriente de conocimiento ha avanzado bastante es la de la administración del riesgo. En parte debido al misterio que todavía siguen siendo los porqués de las

---

<sup>45</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1988) “Web of ‘Regularities’ Leads to Opportunity”, *Pensions and Investment Age*, 14-15.

<sup>46</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1989) “Trading Tactics in an Inefficient Market” In Wayne Wagner, ed. *A Complete Guide to Security Transactions: Controlling Costs and Enhancing Performance*, John Wiley, New York.



anomalías acontecidas en los retornos<sup>47</sup>. En la actualidad, se han investigado diversos tipos de medidas de riesgo como son la clásica varianza o desviación típica, la semivarianza y además medidas del tamaño de la empresa, los distintos tipos de apalancamiento, la obtención de objetivos y combinaciones de diversas medidas.

Dentro de los trabajos que investigan el paradigma actual, se encuentran, por ejemplo, aquellos que estudian la importancia de los fundamentos de las empresas o de la economía en general. Se puede citar a Roll (1988) el cual muestra la imposibilidad de demostrar que los factores económicos de la sociedad puedan influir en más de un 33 por ciento de los movimientos de las cotizaciones de los valores<sup>48</sup>. En el mismo camino pero a otro nivel se encuentra el estudio de Schiller (1981), el cual concluye que los retornos de los valores son demasiado volátiles para ser explicados por variaciones de *cash-flows* o incrementos de las tasas de interés<sup>49</sup>. Por último, French y Roll (1986) demuestran que la volatilidad de los mercados es mayor cuando estos están situados en un contexto de apertura financiera. Además, esta característica se produce independientemente de la información fundamental que llegue al mercado referente a la economía o a las firmas en particular<sup>50</sup>. A esta misma conclusión llegaron Frankel y Meese (1987)<sup>51</sup> y Roll (1984)<sup>52</sup> en distintos mercados. En definitiva, de todos estos estudios se concluye que es muy difícil intentar explicar el

---

<sup>47</sup> Jacobs, Bruce and Levy (1988) "Disentangling Equity Return Regularities" In *Equity Markets and Valuation Methods*. Charlottesville: The Institute of Chartered Financial Analysts Continuing Education Series, 36-46.

<sup>48</sup> Roll R. (1988) "R<sup>2</sup>", *Journal of Finance*, 43, 541-566.

<sup>49</sup> Schiller R. (1981) "Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Dividends?", *American Economic Review*, 71, 421-436.

<sup>50</sup> French K. and Roll R. (1986) "Stock Returns Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders", *Journal of Financial Economics*, 19, 3-30.

<sup>51</sup> Roll R. (1984) "Orange Juice and Weather", *American Economic Review*, 861-880.

<sup>52</sup> Frankel J. and Meese R. (1987) "Are Exchange Rates Excessively Variable?", in Fischer S., ed., *NBER Macroeconomics Annual 1987*. MIT Press, Cambridge.



50 por ciento o menos de las volatilidades registradas en los retornos en función, únicamente, de los datos fundamentales<sup>53</sup>.

Como conclusión a las ideas apuntadas en este repaso de la corriente de pensamiento actual, decir que se afirma que los mercados financieros son sistemas complejos en los que no funcionan las estrategias simples como por ejemplo invertir en empresas de baja capitalización. Esto no quiere decir que el seguimiento de estrategias simples implique necesariamente retornos negativos. Simplemente, indica que cuando se siguen este tipo de reglas, no tenemos ninguna seguridad de que la inversión sea rentable. Por otro lado, los mercados financieros no se comportan de manera aleatoria como defendía la teoría *EMH* por lo que los fondos indexados no tienen ninguna justificación. Los mercados financieros se caracterizan por su complejidad, por lo que son necesarios sistemas computacionales para poder emprender un análisis con alguna esperanza de éxito. Estos sistemas de análisis nos deben permitir desmenuzar los efectos que influyen sobre los movimientos de los precios de las cotizaciones y así, llegar a comprender un poco más su comportamiento<sup>54</sup>,<sup>55</sup>.

### EL MODELO DE UN SOLO ÍNDICE (SINGLE-INDEX MODEL)

#### *Introducción*

El centro de la MPT no es nuevo, de hecho fue presentado por Markowitz en 1956 en su artículo pionero y su libro subsecuente. Un

---

<sup>53</sup> Cutler, D.M., Poterba J.M. and Summers L.H. (1989) "What Moves Stock Prices", in Bernstein P.L. and Fabozzi F.J., eds., *Streetwise, The Best Of The Journal of Portfolio Selection* (1997), Princeton University Press, Princeton 56-65.

<sup>54</sup> Jacobs, B.I. and Levy K.N. (1990) "Stock Market Complexity and Investment Opportunity" In Frank Fabozzi, ed., *Managing Institutional Assets*, New York, Ballinger.

<sup>55</sup> Jacobs, B.I. and Levy K.N. (1989) "The Complexity of the Stock Market" in Bernstein P.L. and Fabozzi F.J., eds., *Streetwise, The Best of The Journal of Portfolio Management* (1997), Princeton University Press, Princeton, 65-74.



pequeño resumen de su trabajo ha sido introducido aquí en el Capítulo 6: Una perspectiva histórica. Algún lector, viendo que la obra básica de la teoría tiene más de 40 años de existencia, puede preguntarse qué ha ocurrido desde que la teoría fue desarrollada. Más aun, si el lector tiene conocimientos acerca de los procedimientos de las instituciones financieras, se puede preguntar por qué la teoría tardó tanto tiempo en ser utilizada por éstas. La respuesta a ambas preguntas está muy relacionada. La mayoría de las investigaciones en administración de portafolios de los últimos 35 años se ha concentrado en métodos para la puesta en práctica de la teoría básica. Muchos de los avances en la implementación tardaron en llegar y fue solo con estos avances con los que la teoría del portafolio fue útil. A partir de ese momento pudieron empezar a investigarse nuevas metodologías en la teoría del portafolio.

En los próximos epígrafes se trata la implementación de la teoría del portafolio, que tantos años de investigación requirió. Los principales avances en la implementación se pueden resumir en dos categorías: la primera supone una simplificación de la cantidad y tipos de datos necesarios para llevar a cabo una selección de portafolios. El segundo supone una simplificación del proceso computacional requerido para calcular portafolios óptimos. Estos dos métodos son interdependientes. Además su resolución únicamente simplifica a grandes rasgos el análisis de portafolios. Sus resultados redundan en la habilidad para describir el problema de selección de carteras y sus soluciones en términos relativamente simples, términos que tienen significado intuitivo y también analítico; y términos en los cuales los profesionales de la selección de carteras pueden asociar. En este epígrafe se empieza con el problema de simplificar los *inputs* del problema del portafolio. Se inicia con una discusión de la cantidad y tipo de información que se considera necesaria para resolver un problema de selección de carteras. A partir de ese momento, se explica la más antigua aunque más utilizada simplificación de la estructura del portafolio: el modelo de un



solo índice. La naturaleza del modelo así como algunas de sus técnicas estimativas son examinadas.

En los siguientes epígrafes, se analizarán representaciones de simplificaciones alternativas del modelo del portafolio. Se tratarán con detalle algunas formas de representar y predecir la estructura de correlación entre retornos. También se verá, con relación a la implementación, cómo cada una de las técnicas que han sido desarrolladas para simplificar el *input* para el análisis de portafolios puede ser utilizada para reducir y simplificar los cálculos necesarios para encontrar portafolios óptimos.

### *Inputs necesarios para el análisis de portafolios*

Para que se pueda definir la frontera eficiente sobre la que se colocan los portafolios eficientes en el sentido de Markowitz, analizada en el Capítulo anterior, se requiere:

$$\bar{R}_{port} = \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i \quad (7.1)$$

donde:

$\bar{R}_{port}$  = Media aritmética o esperanza matemática de los retornos del portafolio (medida de la rentabilidad esperada)

$w_i$  = Peso relativo del *stock*  $i$  en el portafolio

$\bar{R}_i$  = Media aritmética o esperanza matemática de los retornos de cada uno de los  $i$  *stocks* que forman parte del portafolio

$N$  = número de *stocks* que entran a formar parte del portafolio

Y también:

$$\sigma_{port} = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j Cov_{ij} \quad (7.2)$$

donde:





$\sigma_{port}$  = desviación típica de los retornos del portafolio (medida del riesgo esperado)

$\sigma_i^2$  = varianza de los retornos del *stock i*

$Cov_{ij}$  = covarianza de los retornos entre el *stock i* y el *stock j*

Estas dos ecuaciones (7.1) y (7.2) son las mínimas suficientes para llevar a cabo un análisis de portafolio. A partir de ellas, la necesidad de estimadores de las covarianzas o de los coeficientes de correlación (según se formule la ecuación 7.2) difieren en magnitud y sustancia de la necesidad de datos antes de plantear estas dos ecuaciones que simplifican el análisis.

Por ejemplo, si se tiene un conjunto de aproximadamente 150-250 valores (que es el conjunto de valores al que normalmente una institución financiera viene a hacer frente como máximo), a partir de las ecuaciones (7.1) y (7.2), únicamente se necesita 150-250 esperanzas matemáticas y 150-250 varianzas o coeficientes de correlación. Esto simplifica la necesidad anterior de datos que se establecía en disponer de cada uno de los retornos de cada uno de los valores para la totalidad del periodo estudiado o el dato más básico de todos: cada una de las cotizaciones. Con las esperanzas y las varianzas se tiene resumida una gran parte de la información relativa al movimiento de los valores, pero todavía se presenta otro problema: las covarianzas. Para poder tener una información más completa de las series de retornos de los valores o *stocks*, hemos de tener en cuenta cómo se relacionan los movimientos de los retornos entre los diversos valores. Esta información está almacenada en las covarianzas o en los coeficientes de correlación y el número de éstos ya no es tan reducido como el de los otros datos. El número de estimadores de esta relación que se necesitarían para un conjunto de 150-250 valores sería de  $N(N-1)/2$  datos; esto significa un número que oscila entre 11175 y 31125 estimadores. Esta alta cantidad de estimadores de un dato tan importante como son las covarianzas ha



dificultado durante algún tiempo la implementación de las ecuaciones (7.1) y (7.2) en la resolución práctica del problema del portafolio.

Los modelos desarrollados para prever estructuras de correlación son principalmente dos: 1) modelos indexados, que surgieron sobre todo durante la época en que el paradigma existente era el *EMH*, 2) técnicas de medias. La técnica que vamos a ver a continuación se enclava en el primer grupo y supone que el comovimiento entre los valores se debe a una sola influencia común o índice. Se denomina modelo de un solo índice o modelo del índice sencillo o simple.

### *Visión general del Modelo de un solo índice*<sup>56</sup>

En general, en cualquier mercado financiero del mundo ocurre que cuando uno de los índices representativos de la plaza sube, la mayoría de los valores incrementan su precio, y a la inversa. Éste fenómeno tan simple que puede ser detectado por mera observación, es la base del modelo de un solo índice<sup>57</sup>. El fenómeno sugiere que una de las razones por las que los retornos de los valores pueden estar correlacionados es por una respuesta común a los cambios del mercado. Por tanto, una buena medida de esta correlación se obtiene relacionando el retorno de un valor al retorno del mercado.

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m \quad (7.3)$$

donde:

$\alpha_i$  = componente del retorno del valor  $i$  independiente del mercado (variable aleatoria)

$R_m$  = tasa de retorno del índice del mercado (variable aleatoria)

---

<sup>56</sup> Elton, E.J. and Gruber, M.J. (1984) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 2<sup>nd</sup> Edition, 105-137, John Wiley and Sons, New York.

<sup>57</sup> Latane, H., Tuttle, J. and Young, A. (1971) "How to Choose a Market Index" *Financial Analysts Journal*, 27, 4, 75-85.



$\beta_i$  = constante que mide el cambio esperado en  $R_i$  dado un cambio en  $R_m$

Por otro lado, tenemos que, además:

$$a_i = \alpha_i + \varepsilon_i \tag{7.4}$$

donde:

$\alpha_i$  = valor esperado de  $a_i$

$\varepsilon_i$  = elemento aleatorio de  $a_i$  con valor esperado = 0

Por tanto, sustituyendo tenemos que la ecuación (7.3) se nos convierte en:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \tag{7.5}$$

Además es conveniente que se cumpla la siguiente condición:

$$Cov(\varepsilon_i, R_m) = E[(\varepsilon_i - 0)(R_m - \bar{R}_m)] = 0$$

de esta forma, el nivel de ajuste descrito por la ecuación (7.5), para cualquier valor, es independiente de cuál sea el retorno del mercado.

Construido el modelo de esta forma solamente nos resta estimar las variables que lo forman:  $\alpha_i, \beta_i, \sigma_{\varepsilon_i}^2$ . Estos estimadores pueden obtenerse mediante regresión lineal u otra técnica similar<sup>58</sup>.

La asunción principal del modelo es que  $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ , lo cual significa que los valores se mueven en la misma dirección únicamente por el movimiento en común con el mercado, no existen otros factores que influyan al comovimiento.

A modo de ficha-resumen del modelo podemos escribir:

- Ecuación básica:  $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$

<sup>58</sup> Cornell, B. and Dietrich K. (1978) "Mean-Absolute-Deviation versus Least-Squares Regression Estimation of Beta Coefficients", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, XIII, 1, 123-131.



- Por construcción:  $E \varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$
- Por asunción:
  - Índice relacionado a un solo retorno:  
 $Cov(\varepsilon_i, R_m) = E \varepsilon_i (R_m - \bar{R}_m) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$
  - $E \varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \quad \forall$  parejas  $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$

• Por definición:

- $V \varepsilon_i = E \varepsilon_i^2 = \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$
- $V R_m = E (R_m - \bar{R}_m)^2 = \sigma_m^2$

Por tanto se llega a:

$\bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_m$ , que se compone de dos partes<sup>59</sup>:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{única} : \alpha_i \\ \text{relacionada con el mercado} : \beta_i \bar{R}_m \end{array} \right.$

$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$ , que, a su vez, también se compone de dos partes:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{única} : \sigma_{\varepsilon_i}^2 \\ \text{relacionada con el mercado} : \beta_i^2 \sigma_m^2 \end{array} \right.$

$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$ , solo tiene una parte y ésta depende del mercado.

Para poder resolver este modelo se necesitan los siguientes datos, los cuales se deben obtener mediante estimadores estadísticos.

Los estimadores necesarios son:

- Un estimador para cada uno de los  $N \alpha_i$ .
- Un estimador para cada uno de los  $N \beta_i$ .
- Un estimador para cada uno de los  $N \sigma_{\varepsilon_i}^2$ .
- Un estimador para  $\bar{R}_m$ .



- Un estimador para  $\sigma_m^2$ .

Todos estos estimadores suponen un total de  $3N+2$  datos, que para un conjunto de valores como el que se está poniendo como ejemplo (150-250 *stocks*) supone una drástica disminución desde los 11475-31625 datos sin simplificar hasta los 452-752 estimadores para esta estructura simplificada<sup>60</sup>.

La única nueva variable con respecto al modelo sin simplificar es  $\beta$ . Esta es simplemente una medida de la sensibilidad de un valor a movimientos del mercado.

Por último, solo queda indicar que existen una gran diversidad de formas a la hora de estimar los datos necesarios:

- Mediante datos históricos.
- Mediante el ajuste o filtro de los mismos datos históricos.
- Mediante la Técnica de Blume.<sup>61, 62, 63</sup>
- Mediante la Técnica de Vasicek.<sup>64</sup>
- Mediante datos fundamentales del mercado y de las respectivas firmas.

---

<sup>59</sup> Frankfurter, G. and Philips, H. (1977) "Alpha-Beta Theory: A Word of Caution", *Journal of Financial Management*, 3, 4, 35-40.

<sup>60</sup> Dickinson, J.P. (1974) "The Reliability of Estimation Procedures in Portfolio Analysis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, IX, 3, 447-462.

<sup>61</sup> Blume, M (1970) "Portfolio Theory: A Step Toward Its Practical Application", *Journal of Business*, 43, 2, 152-173.

<sup>62</sup> Blume, M (1971) "On the Assessment of Risk", *Journal of Finance*, VI, 1, 1-10.

<sup>63</sup> Blume, M (1975) "Betas and Their Regression Tendencies", *Journal of Finance*, X, 3, 785-795.

<sup>64</sup> Vasicek, O (1973) "A Note on Using Cross-Sectional Information in Bayesian Estimation of Security Betas" *Journal of Finance*, VIII, 5, 1233-1239.



## MODELOS MULTI-INDICE

---

Dentro de los modelos indexados que han sido utilizados ampliamente para explicar y estimar las estructuras de correlación de los retornos de los valores el siguiente que vamos a estudiar es el Multi-Índice. Estos modelos intentan capturar algunas influencias no relacionadas con el mercado que hacen que los valores se muevan en la misma dirección. Estas influencias pueden ser factores económicos o grupos estructurales como determinadas industrias que cuentan con movimientos comunes en precios más allá de los detectados a través del índice de mercado. Es fácil encontrar un conjunto de índices que puedan asociarse con efectos que no sean del mercado global en un periodo, pero es otro tema mucho más complejo, el encontrar un conjunto que resulte exitoso al predecir covarianzas que no estén relacionadas con el mercado.

En contraposición a estos modelos indexados, ya sean simples (modelo de un solo índice) o Multi-Índice, existen las técnicas alisadoras (o de medias). El problema de los Multi-Índices es que al contener varias “fuentes de información” fácilmente puede incorporar ruido aleatorio que perjudique el resultado. Las técnicas alisadoras simplifican la matriz de correlaciones históricas en un intento de amortiguar ese ruido y mejorar las predicciones. Pero este procedimiento no está exento de peligros, estas técnicas pueden provocar la pérdida de información real. Así pues toda metodología tiene sus pros y sus contras, el analista va a tener que seleccionar el sistema que considere más oportuno para el escenario en que deba realizar su estudio.

La selección de los índices a considerar puede ser también bastante subjetiva. Existen modelos Multi-Índice basados en regresores industriales<sup>65</sup> (datos fundamentales de fabricación), otros que se centran en regresores comerciales, otros que fijan su atención en

---

<sup>65</sup> Aber J. (1976) “Industry Effects and Multivariate Stock Price Behaviour”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, XI, 4, 617-624.



índices técnicos del mercado<sup>66</sup>, otros que mezclan distintos tipos de regresores<sup>67</sup>. El analista puede construir el modelo Multi-Índice que más se ciña a las expectativas de resultados que espera obtener.

### *Visión general de los Modelos Multi-Índice*<sup>68</sup>

En este caso la ecuación que representa el modelo se trata de una ecuación de regresión múltiple. Aquí, el retorno podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$R_i = \alpha_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + \dots + b_{iL}I_L + \varepsilon_i \quad (7.6)$$

donde:

$I_j$  = valor real del índice  $j$

$b_{ij}$  = medida de la respuesta del retorno de  $i$  a cambios en el índice  $j$

La parte del retorno  $R_i$  no relacionada con los índices está representada por dos sumandos:  $c_i$ , componente aleatorio con media cero y varianza  $\sigma_{c_i}^2$ , y  $\alpha_i$ , valor esperado del retorno. Este tipo de modelos como el presentado arriba, pueden ser utilizados directamente, pero es más conveniente (debido a diversas propiedades matemáticas) si los índices fueran ortogonales (es decir, incorrelacionados) ya que simplifica el cálculo del riesgo y también la selección de portafolios óptimos. Afortunadamente esto no representa mayor problema, ya que matemáticamente siempre es posible tomar un conjunto de índices correlacionados y convertirlos en incorrelacionados.

---

<sup>66</sup> Cohen K. and Pogue J. (1967) "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio Selection Models" *Journal of Business*, 46, 166-193.

<sup>67</sup> Elton E. and Gruber M.J. (1971) "Improving Forecasting Through the Design of Homogeneous Groups", *Journal of Business*, 44, 4.

<sup>68</sup> Elton, E.J. and Gruber, M.J. (1984) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 2<sup>nd</sup> Edition, 138-157, John Wiley and Sons, New York.



Por otra parte, también es recomendable que  $E \left[ \left( R_j - \bar{I}_j \right)^2 \right] > 0 \quad \forall j$ .

Al cumplirse esta esperanza matemática, se consigue que la ecuación (7.6) describa el retorno de cualquier valor  $i$  de forma independiente del nivel que alcance cualquiera de los índices.

A modo de ficha-resumen del modelo Multi-Índice podemos escribir:

- Ecuación básica:  $R_i = \alpha_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + \dots + b_{iL}I_L + \varepsilon_i$

- Por definición:  $\begin{cases} \text{la varianza residual de } i \equiv \sigma_{\varepsilon_i}^2, & \forall i = 1, 2, \dots, N \\ \text{la varianza del índice } j \equiv \sigma_{I_j}^2, & \forall j = 1, 2, \dots, L \end{cases}$

- Por construcción:

$$- E \left[ \varepsilon_i \right] = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$- \text{Cov} \left( \varepsilon_j, I_k \right) = E \left[ \left( R_j - \bar{I}_j \right) \left( I_k - \bar{I}_k \right) \right] = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, L \text{ y } k = 1, 2, \dots, L \text{ (} j \neq k \text{)}$$

$$- \text{Cov} \left( \varepsilon_i, I_j \right) = E \left[ \left( R_i - \bar{I}_i \right) \left( I_j - \bar{I}_j \right) \right] = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, L \text{ y } i = 1, 2, \dots, N$$

- Por asunción:

$$- \text{Cov} \left( \varepsilon_i, \varepsilon_j \right) = E \left[ \varepsilon_i \varepsilon_j \right] = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, L \text{ y } i = 1, 2, \dots, N$$

Esta asunción del modelo Multi-Índice indica que la única razón por la que los valores varían unidos es por causa del comovimiento común con el conjunto de índices que han sido especificados en el modelo. Por lo tanto no existe ninguna otra razón que pueda influir en el comovimiento de dos valores que no esté contemplada en los índices regresores.

Obviamente, no hay nada en la construcción del modelo que asegure esto, se trata de una simplificación. El éxito del modelo, por tanto, dependerá de cuán buena es la aproximación. A su vez, esto dependerá de los  $I_j$  elegidos para capturar las pautas de movimiento de los valores.





La esperanza de los retornos y covarianza entre valores cuando es el modelo Multi-Índice el que describe la estructura de los retornos es:

- Retorno esperado:  $\bar{R}_i = \alpha_i + b_{i1}\bar{I}_1 + b_{i2}\bar{I}_2 + \dots + b_{iL}\bar{I}_L$
- Varianza del retorno:  $\sigma_i^2 = b_{i1}^2\sigma_{I_1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{I_2}^2 + \dots + b_{iL}^2\sigma_{I_L}^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$
- Covarianza entre valores  $i,j$ :  $\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}\sigma_{I_1}^2 + b_{i2}b_{j2}\sigma_{I_2}^2 + \dots + b_{iL}b_{jL}\sigma_{I_L}^2$

Ante una situación como la planteada, necesitaremos:

- $N$  estimadores para cada uno de los  $\alpha_i$
- $N \cdot L$  estimadores para cada uno de los  $b_{ik}$
- $N$  estimadores para cada uno de los  $\sigma_{\varepsilon_i}$
- $L$  estimadores para cada uno de los  $I_j$
- $L$  estimadores para cada uno de los  $\sigma_{ij}^2$

En total se tendrán  $2L+2N+NL$  estimadores. Si recogemos el ejemplo anterior de una institución financiera que trabaja con 150-250 valores y suponiendo un número de índices igual a 10 ( $L=10$ ) se tendrán 1820-3020 estimadores para este modelo; que aunque no es tan una reducción tan importante como la ocurrida en el modelo anteriormente expuesto (modelo de un solo índice) sí es una mejora significativa respecto a lo que sería el modelo sin simplificar.

### *Funcionalidad de los modelos Multi-Índice*

En principio parece lógico que cuantos más índices se introduzcan a la hora de construir el modelo, más complejo será su manejo (solventable mediante equipos computerizados de cálculo), aunque más acertada su matriz de correlaciones históricas. Por lo tanto existe un punto a favor de la introducción de un alto número de índices regresores.



Pero esta buena noticia deja de serlo cuando se introduce la variable tiempo en el modelo. El que la matriz inicial de correlaciones históricas sea más acertada, no implica que las futuras matrices de correlación se estimen con igual perfección. Este problema de correlación incierta se debe a que los modelos Multi-Índice a menudo contienen más ruido estadístico que información relevante relacionada con la predicción.

Debido a que las posibilidades de construcción de modelos Multi-Índice son prácticamente infinitas y por tanto es imposible experimentar con todas, no se puede asegurar que los Multi-Índice sean modelos que reflejan la realidad con mayor precisión que los modelos de un solo índice.

## *MODELOS DE SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS*

---

### *Introducción*

Una vez se tiene construido el modelo de regresión que trata de simplificar el análisis de los movimientos de los precios en los mercados financieros, se deben analizar las variaciones en los retornos para seleccionar los valores que prometen una mayor rentabilidad con menor riesgo.

Una de las ventajas de llevar a cabo la modelización previa de la estimación de los retornos para que sea más sencillo su análisis es que gracias a esta simplificación los *inputs* del problema de selección de carteras son mucho más manejables<sup>69</sup>. Incluso en algunos modelos de un solo regresor no hace falta ni siquiera una computadora para solucionar el problema del portafolio. Obviamente, tal simplicidad, posiblemente pueda resultar en conclusiones erróneas. Por otro lado este tipo de sencillas operativas es útil a la hora de comprender porqué un determinado valor entra o no a formar parte de un portafolio óptimo.

---

<sup>69</sup> Bawa V. Elton E.J. and Gruber M.J. (1979) "Simple Rules for Optimal Portfolio Selection in a Stable Paretian Market", *Journal of Finance*, 34, 2.



Esto se debe a que en los modelos de un solo índice y modelos Multi-Índice<sup>70</sup>, la estructura de correlaciones formada da pie a la posibilidad de crear un único *ranking* de valores utilizando la siguiente fórmula:

$$\frac{\bar{R}_i - R_f}{\beta_i}$$

de forma que si el *stock i* entra a formar parte del portafolio óptimo, también lo harán todos los anteriores<sup>71,72</sup>. Esto permite al analista hacerse una idea de las características de cada uno de los valores antes incluso de comenzar con el análisis de selección<sup>73</sup>.

Los modelos de selección de portafolios más avanzados del tipo esperanza-varianza o media-varianza (*E-V*) permiten una solución más óptima del problema del portafolio al considerar aspectos que escapan a los modelos más simples.

Existen otros criterios diferentes al *E-V*, pero en este punto se va a demostrar que la mayoría de ellos conducen a una solución idéntica a la solución *E-V*, bajo ligeras restricciones.

1. Las hipótesis de aplicación del criterio *E-V* son las siguientes:
2. Los inversores intentan maximizar la utilidad esperada de sus ahorros.
3. Los inversores siempre prefieren más retornos a menos retornos.
4. Los inversores son adversos al riesgo.

---

<sup>70</sup> Elton E., Gruber M.J. and Padberg, M.W. (1979) "Simple Rules for Optimal Portfolio Selection: The Multi-Index Case" in Elton and Gruber, *Portfolio Theory: 25 Years Later*.

<sup>71</sup> Sharpe, W.F. (1972) "Simple Strategies for Portfolio Diversification: Comment" *Journal of Finance*, VII, 1, 127-129.

<sup>72</sup> Sharpe, W.F. (1972) "Simple Strategies for Portfolio Diversification: Comment. A Correction" *Journal of Finance*, VII, 3, 733.

<sup>73</sup> Elton, E.J. and Gruber, M.J. (1984) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 2<sup>nd</sup> Edition, 158-190, John Wiley and Sons, New York.



5. Los retornos de los valores analizados se comportan como una variable aleatoria *gaussiana*. O las funciones de utilidad de los inversores son cuadráticas. Cualquiera de estas dos asunciones conduce a las mismas propiedades.

Como se observa, las hipótesis de aplicación de la metodología *E-V* son muy suaves y pueden relajarse todavía en mayor medida. Incluso cuando son violadas las asunciones 1) ó 2) el análisis se cumple con una aproximación muy elevada<sup>74</sup>. Respecto a la hipótesis 4), las aproximaciones cuadráticas son normalmente bastante buenas para funciones no cuadráticas.

El primero de las metodologías alternativas a la *E-V* es la *Maximización de la Media Geométrica de los Retornos*. El problema del portafolio resuelto por este método, sorprendentemente conduce, bajo algunas asunciones alternativas, a la selección de portafolios sobre la frontera eficiente. Por lo tanto, los portafolios que este método selecciona son eficientes desde el punto de vista de la *E-V*.

Otro criterio de selección analizado en este capítulo, es el de *Seguridad Primero (Safety First)*. En este caso se puede probar que el portafolio que maximiza la seguridad, a menudo cae sobre el conjunto eficiente *E-V*, por tanto también posee las propiedades de los portafolios eficientes *E-V*.

Un tercer criterio de selección ampliamente conocido es el de la *Dominación Estocástica (Stochastic Dominance)*. Sus hipótesis de trabajo son hipótesis algo más relajadas que las de la metodología *E-V*, pero bajo ciertas asunciones es consistente con el análisis *E-V* y además conduce al mismo conjunto eficiente.

---

<sup>74</sup> Markowitz H. (1959) *Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons Inc, New York.



El cuarto y último de los criterios es el de *Skewness*<sup>75</sup>. Esta metodología complica el análisis al ser programación no lineal y requiere además una extensión del análisis que se necesita para obtener los portafolios eficientes *E-V*. Esta es la única de las metodologías que no vamos a estudiar con detalle.

### *Maximización de la Media Geométrica de los Retornos*

Esta metodología tiene muchos defensores que abogan por su utilización para cualquier forma de la función de utilidad de los inversores y para cualquiera que sea la función de distribución de los retornos de los *stocks*. Según estos investigadores, un inversor standard elegirá el portafolio que tenga el más alto valor esperado de la riqueza terminal (al final de la operación)<sup>76</sup>. Letane demostró que el portafolio que maximiza la riqueza terminal es precisamente el portafolio con la media de retornos más alta<sup>77</sup>.

Los investigadores que defienden este método indican que el portafolio de máxima media geométrica:

- 1) tiene la más alta probabilidad de alcanzar o exceder un nivel de riqueza dado en el periodo de tiempo más corto;
- 2) tiene la probabilidad más alta de exceder cualquier nivel de riqueza dado sobre un periodo de tiempo dado.

El atractivo de estas características es lo que ha provocado que el criterio aquí analizado tenga un alto número de adeptos y defensores.

Pero no todos defienden las bondades de este sistema de selección. La metodología tiene también detractores. Éstos indican que

---

<sup>75</sup> Cheng L. (1977) "Functional Form, Skewness Effect and the Risk-Return Relationship", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, 1, 55-72.

<sup>76</sup> Elton E.J. and Gruber M.J. (1974) "An Algorithm for Maximizing the Geometric Mean", *Management Science*, 483-488.

<sup>77</sup> Letane H. (1959) "Criteria for Choice Among Risky Ventures", *Journal of Political Economy*, 144-155.



maximizar el *valor esperado de la riqueza final* no es lo mismo que maximizar la *utilidad de la riqueza final*. Esto les lleva a rechazar la metodología considerando que lo realmente relevante para los inversores es maximizar su utilidad, no su riqueza.

### *Seguridad Primero (Safety First)*<sup>78</sup>

Se trata de una metodología que enfatiza la seguridad del inversor. Este criterio antepone la seguridad de la inversión ante cualquier posible incremento del retorno. Existen tres criterios Seguridad Primero (*SP*) diferentes:

#### El criterio desarrollado por Roy<sup>79</sup>

Según este autor, el mejor portafolio es aquel que tiene la menor probabilidad de producir un retorno por debajo de un nivel previamente especificado. Este criterio cumple lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sea } R_p = \text{retorno del portafolio } y \\ R_L = \text{nivel por debajo del cual el inversor no desea que los retornos caigan} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

el portafolio óptimo será aquel que cumpla que:

$$\text{Min } \Pr \{ R_p < R_L \} \quad (7.7)$$

#### Criterio desarrollado por Kataoka<sup>80</sup>

En este caso, se trata de maximizar el límite inferior sujeto a que la probabilidad de los retornos inferiores a, o iguales que, el límite inferior, no sea mayor que un valor predeterminado. Es decir:

<sup>78</sup> Bawa V. (1978) "Safety-First, Stochastic Dominance, and Optimal Portfolio Choice", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, 5, 255-271.

<sup>79</sup> Roy A.D. (1952) "Safety-First and the Holding of Assets", *Econometrics*, 20, 431-449.

<sup>80</sup> Reichling, P. (1996) "Safety First-Ansätze in der Portfolio-Selektion" *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 48, S. 31 - 55.



$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & R_L \\ \text{s.a.} \quad & \Pr \{ R_p < R_L \} \leq \alpha \end{aligned} \quad (7.8)$$

### Criterio desarrollado por Telser

Aquí se maximiza el retorno esperado, sujeto a la restricción de que la probabilidad de un retorno inferior, o igual, a algún límite predeterminado no es superior que un valor dado. En símbolos:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & R_p \\ \text{s.a.} \quad & \Pr \{ R_p \leq R_L \} \leq \alpha \end{aligned} \quad (7.9)$$

El criterio *SP* fue elaborado originalmente como un criterio atractivo para la toma de decisiones en el problema de selección de portafolios. Además se estableció como una alternativa a la metodología de la utilidad esperada del análisis tradicional. Considerando que la función de probabilidad de los retornos se comporta de modo normal o solamente lo suficiente para que la inecuación de Tchebyshev se cumpla, entonces cualquiera de los tres criterios *SP* llegan al mismo portafolio eficiente que la metodología *E-V*.

### *Dominación Estocástica (Stochastic Dominance)*

#### Definición

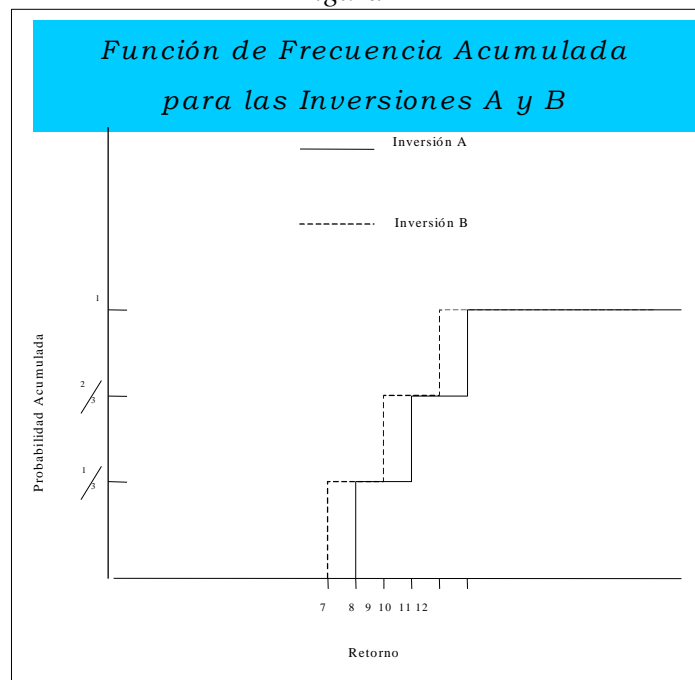
Dominación Estocástica es un método de filtrado de valores o portafolios en base a sus propiedades de riesgo-rentabilidad utilizando la función de densidad acumulada de la distribución de activos. Este método no asume ningún tipo de función de probabilidad e incluye un amplio grupo de funciones de utilidad en su análisis.

El teorema formal es el siguiente: si los inversores prefieren más a menos, y si la probabilidad acumulada de *A* no es nunca superior a la probabilidad acumulada de *B*, e incluso menor, entonces *A* es preferida a *B*.

Aunque este teorema formal parece algo ilógico. Se verá más claro con la siguiente Figura 12.



Figura 12



Obsérvese la Figura 12, si un inversor prefiere más a menos, entonces la inversión en el activo A será preferible a la inversión en el activo B, ya que para cualquier situación futura, A siempre ofrecerá un retorno mayor que B.

Existen varios niveles o formas de Dominación Estocástica (DE). El grado más general de dominación estocástica no hace asunciones acerca de la forma de la función de probabilidad de los retornos. Por otro lado, no requiere en ningún momento, la asunción de una forma específica de la función de utilidad del inversor. Se puede, de este modo, determinar conjuntos eficientes bajo asunciones alternativas acerca de las características generales de las funciones de utilidad de los inversores, que son consistentes con familias enteras de funciones de utilidad.

Existen tres asunciones progresivamente más fuertes acerca del comportamiento del inversor empleadas en la literatura de DE<sup>81</sup>:

<sup>81</sup> Rentz W. and Westin R. (1975) "A Note on First-Degree Stochastic Dominance and Portfolio Composition", *Management Science*, 22, 4, 501-504.





- 1) *DE* de primer orden: asume que un inversor prefiere más a menos.
- 2) *DE* de segundo orden: asume la *DE* de primer orden y además considera que los inversores son adversos al riesgo.
- 3) *DE* de tercer orden: asume la *DE* de segundo orden y además considera una aversión absoluta al riesgo decreciente (la tercera derivada de la función de utilidad es positiva).

Asociado con cada nivel de *DE*, hay un teorema que permite al inversor eliminar una amplia cantidad de portafolios del estudio. La expresión detallada de estos teoremas, así como su demostración matemática escapan a los objetivos de este trabajo.

#### Relación de la Metodología *DE* con la Metodología *E-V*<sup>82</sup>

La relación entre ambas metodologías está clara sobre todo cuando se cumple la hipótesis de retornos distribuidos normalmente. Considerando esta hipótesis, podemos analizar la relación con mayor detalle.

#### Conexión *DE* Primer Orden con *E-V*

La asunción que caracteriza la *DE* de primer orden es que los inversores prefieren más retorno a menos. El modelo de *E-V* también tiene esta asunción y por tanto esto nos lleva a la conclusión de que a cualquier nivel de riesgo  $\sigma$ , el inversor prefiere mayor retorno  $R$ , en ambas metodologías. Por consiguiente, esto implica que los portafolios seleccionados por la metodología *DE* de primer orden son coherentes y consistentes con los elegidos por el criterio *E-V* cuando los retornos se distribuyen normalmente.

---

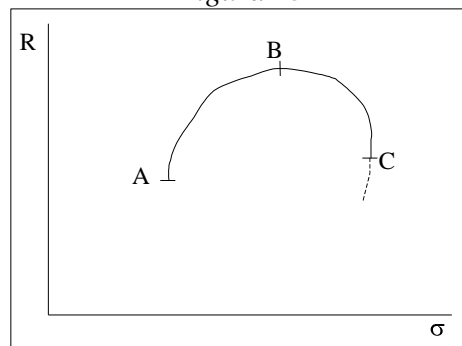
<sup>82</sup> Porter B. (1973) "An Empirical Comparison of Stochastic Dominance and Mean-Variance Portfolio Choice Criteria", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8, 4, 587-608.



Además indicar que si la venta a corto está permitida, la selección del portafolio con mayor retorno para cada nivel de riesgo nos conducirá a la frontera eficiente  $E-V$ .

Si las ventas a corto no están permitidas, la metodología  $DE$  de primer orden produce un conjunto de portafolios que se colocan en la mitad superior del borde externo del conjunto eficiente producido por el análisis  $E-V$ . Estos portafolios, incluyen el conjunto eficiente del análisis  $E-V$  y además todos los portafolios que tengan el máximo retorno posible para cada nivel de riesgo. Ver Figura 13.

Figura 13



En la figura anterior, podemos ver que los portafolio BC no están en la frontera eficiente AB, pero cumplen la hipótesis  $DE$  de primer orden.

#### Conexión $DE$ Segundo Orden con $E-V$

Repásense las asunciones de la  $DE$  de segundo orden: 1) los inversores prefieren más a menos y 2) los inversores son adversos al riesgo.

Recuérdese que estas son exactamente las mismas asunciones que conducen al teorema de la frontera eficiente. Por tanto, no es sorprendente que si añadimos la hipótesis de distribución normal de retornos, el único conjunto de portafolios que no está dominado es el de la frontera eficiente.

La ventaja de la metodología  $DE$  es que puede utilizarse para derivar conjuntos de portafolios deseables cuando los retornos sigan



otras distribuciones o cuando no se quieran asumir funciones de utilidad específicas.

## Conclusiones

No se debe sobreenfatizar la importancia de las ventajas de la metodología *DE*. En general la *DE* trata de comparaciones 2 a 2 entre todas las alternativas posibles de portafolios. Pero, en selección de carteras las posibilidades son infinitas, a este nivel, la *DE* se vuelve irrealizable. De todas formas, si los retornos siguen una distribución de “buen comportamiento”, la utilización de *DE* muestra que los portafolios pueden ser seleccionados de formas más simples. Por ejemplo, si la distribución de los retornos es normal, la *DE* conduce a la misma solución que el análisis *E-V*. Según Bawa<sup>83</sup>, “cuando los retornos siguen una distribución de dos parámetros, la *DE* puede ser utilizada para derivar reglas más simples basadas en esos dos parámetros para la selección de portafolios”.

## LA POTENCIA REPLICADORA DE LA OPTIMIZACIÓN DE MARKOWITZ<sup>84</sup>

En los últimos años se ha detectado un incremento considerable de la popularidad de los fondos de inversión que pretenden, como objetivo fundamental, replicar la evolución de algún índice. Generalmente, estos índices están contruidos mediante la inclusión en ellos de los *stocks* de mayor relevancia según diferentes criterios, ponderados de diversos modos. Por ejemplo, tenemos el S&P 500, el cual contiene los 500 *stocks* de mayor capitalización del mercado neoyorquino. También es importante el *Wilshire* 5000, el cual se construye aproximadamente de la misma forma pero para los 5000

---

<sup>83</sup> Bawa V. (1975) “Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects”, *Journal of Financial Economics*, 2, 95-121.

<sup>84</sup> Haugen, R. and Baker, N. (1991) “The Efficient Market Inefficiency of Capitalization-Weighted Stock Portfolios”, *Journal of Portfolio Management*.



valores más importantes según el criterio de la capitalización bursátil<sup>85</sup>. En nuestro estudio, utilizaremos el índice español más relevante: el *IBEX-35*.

Los gestores de carteras que plantean portafolios cuyo objetivo es replicar la evolución de un índice de este tipo, están planteando carteras en donde la ponderación viene definida por la capitalización bursátil de los valores que la componen. En este punto se analizarán diversas razones que demostrarán que este popular sistema de selección de carteras puede tener una *performance* inferior en comparación con portafolios contruidos eficientemente.

*Condiciones Requeridas para la Eficiencia de Portafolios Contruidos Mediante Ponderaciones de sus Capitalizaciones Bursátiles (Capitalized Weighted Portfolios, C-W)*<sup>86</sup>

Hacia el final de 1995, los 200 mayores planes de pensiones de los EEUU habían indexado un total combinado de aproximadamente 400000 millones de dólares en portafolios del tipo C-W replicando el índice Wilshire 5000. Los administradores de estos fondos presumiblemente creían que esto era una inversión eficiente, en el sentido que portafolios alternativos con el mismo retorno esperado pero volatilidad significativamente menor no eran alcanzables.

Este punto muestra entre otras cosas que los portafolios C-W son inversiones ineficientes. Además se argumentará que excepto bajo hipótesis extremadamente restrictivas, la teoría predice que estas carteras serán ineficientes incluso si los precios del mercado de valores reflejaran eficientemente las expectativas de *cash flows* relativas a los

---

<sup>85</sup> Standard and Poor's Corporation (1997) *Standard & Poor's stock market encyclopedia of the S & P "500"*, Annual Reports. Standard & Poor's Corporation, New York.

<sup>86</sup> Haugen R. (1997) *Modern Investment Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 281-304.



*stocks*, e incluso si todos los inversores optimizaran la relación entre riesgo y retorno esperado en equilibrio.

Para que un portafolio *C-W* sea eficiente en el contexto de una población de *stocks* que forma un índice, debe estar basada en un conjunto de asunciones que incluyen las siguientes:

1. El conjunto de oportunidades de la inversión para todos los inversores que mantengan en cartera cualquiera de los valores del índice se restringe a los *stocks* incluidos en el índice *C-W*.
2. Todos los inversores están de acuerdo acerca del riesgo y el retorno esperado para todos los valores.
3. Todos los inversores pueden vender a corto todos los valores en el índice sin ningún tipo de restricción.
4. Todos y cada uno de los retornos de los inversores está exento de cualquier tipo de impuesto u obligación de pago.

Si alguna de estas asunciones no se cumple, incluso los portafolios *C-W* más amplios ocupan puntos *dentro* del conjunto de oportunidades quedando, por tanto, fuera de la frontera eficiente. En este contexto la teoría nos dirige hacia una administración del riesgo que obtenga carteras con la mínima volatilidad posible, dado un retorno esperado.

### *Cuando los Portafolios C-W son Ineficientes*

#### Los Inversores no Coinciden en sus Expectativas con Relación a los Valores

Supóngase que los inversores tienen diferentes opiniones acerca del riesgo y de los retornos esperados de los valores. Fama ha demostrado que en el contexto de ventas a corto sin restricción y existencia de un activo libre de riesgo, en equilibrio el índice de mercado *C-W* será eficiente. Pero esto debe ser analizado desde el contexto de medias ponderadas por las expectativas de todos los inversores acerca de los retornos de los valores y sus covarianzas. Al tomar la media ponderada, se están pesando las expectativas de los inversores



mediante su tasa marginal de sustitución de consumo futuro por la varianza de consumo futuro.

Mientras el índice de mercado  $C-W$  es eficiente en este sentido, ningún inversor lo verá eficiente excepto bajo la circunstancia altamente inusual de que sus expectativas respecto riesgo y retorno coincidan con medias ponderadas de todos los valores del índice. Además, ningún ahorrador, realiza su inversión sobre el mismo índice  $C-W$ . Si no que todos ellos administran el riesgo en el contexto de sus propias expectativas y toman posiciones óptimas sobre la frontera eficiente que ellos mismos perciben.

Algunos podrían sugerir que aquellos que invierten en portafolios  $C-W$  opinan que el mercado se comporta de forma eficiente, en el sentido que los precios reflejan la más reciente información referente a las expectativas para cada valor. Así pues, ellos están dispuestos a aceptar la eficiencia  $E-V$  del índice  $C-W$  sobre la base de unas expectativas consensuadas del mercado. En un mercado “*informacinoalmente*” ineficiente, los precios de los valores reflejan las expectativas de los inversores *mejor* informados, en oposición al consenso de los puntos de vista de todos los inversores.

#### Ausencia de venta a corto

Se analizará ahora la asunción de que todo el mundo puede practicar la venta a corto sin restricción. De hecho, en los mercados financieros internacionales reales, muy pocos inversores realizan esta práctica. *Con restricciones en la venta a corto, se pierde la propiedad de que combinaciones de portafolios eficientes son a su vez eficientes.*

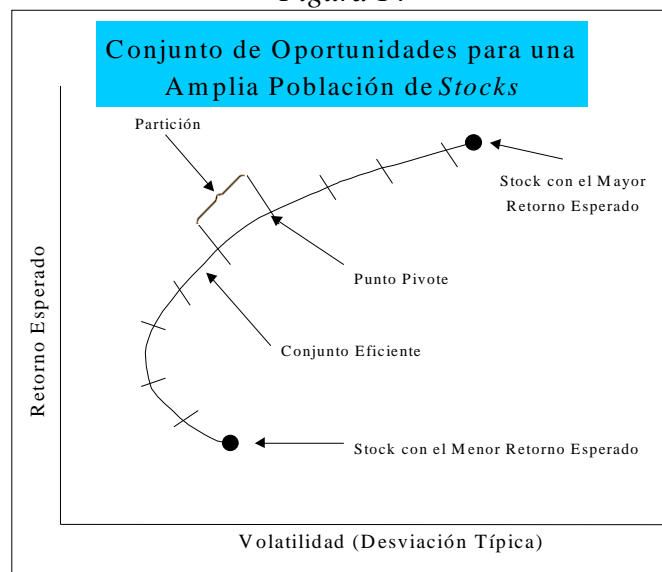
En un contexto más amplio, con poblaciones de valores más amplias, el reducido conjunto eficiente aparece como el representado en la Figura 14. El conjunto de portafolios con volatilidad mínima está acotado en cada extremo por los valores con mayor y menor retorno esperado. A medida que se avanza por el conjunto eficiente desde uno de los extremos hacia el centro, se atraviesan varios puntos pivote, que



sirven para dividir el conjunto. Dentro de cada partición, dos o más *stocks* específicos están siendo incluidos en todos los portafolios incluidos en el conjunto de la partición. En el momento que se cruza un punto pivote, uno de los *stocks* deja de estar en el conjunto o, también es posible que un nuevo valor sea añadido. Mientras las combinaciones de dos o más portafolios tomados dentro de una misma partición son también eficientes, combinaciones de portafolios tomados de diferentes particiones serán ineficientes.

El conjunto eficiente para la totalidad del mercado contiene muchas particiones. Esto significa que cuando combinamos los portafolios eficientes que mantienen los inversores (la mayoría de los cuales no pueden vender a corto sin restricciones), el índice agregado del mercado no puede ser eficiente.

Figura 14



### Impuestos

La existencia de un impuesto gravando los retornos de las inversiones, conduce el índice de mercado C-W a una posición de relativa ineficiencia. Los inversores difieren en su exposición a los impuestos. Los dividendos recibidos por las corporaciones, por ejemplo, pagan un tipo de gravamen diferente al que paga el inversor individual. Los inversores pagarán un tipo de gravamen diferente según sus



ingresos totales anuales. Inversores con históricos de negociaciones diferentes tendrán distintas bases imponibles sobre las que calcular las ganancias o pérdidas. Así pues, habrán diferencias diversas en el conjunto de oportunidades después de impuestos de cada inversor. Un portafolio que es eficiente después de impuestos para un inversor, será ineficiente para otro y el agregado C-W de estos portafolios probablemente no será eficiente para un fondo de pensiones que no pague impuestos.

### *Los Beneficios de la Optimización de Portafolios*

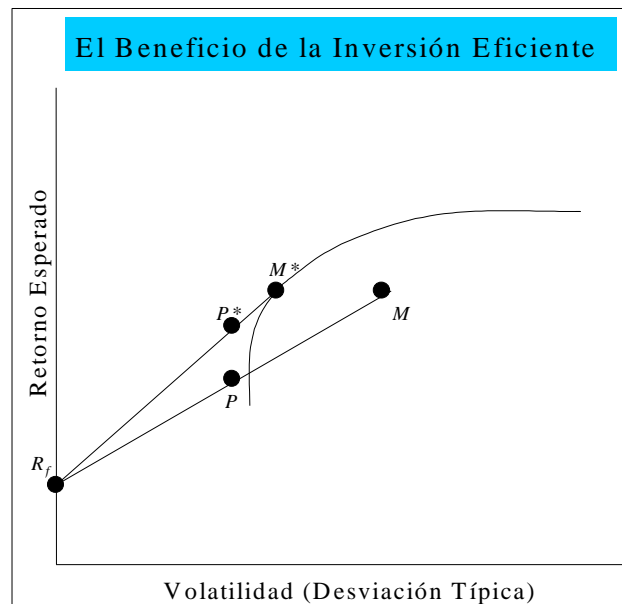
En estos contextos más realistas, si los inversores intentan duplicar el mercado, deben tener en cuenta el riesgo no compensado. Esto supone que portafolios alternativos son alcanzables con menor volatilidad y el mismo retorno esperado que los índices C-W. La teoría financiera nos conduce a la administración del riesgo para invertir eficientemente.

Los beneficios potenciales de las inversiones eficientes son sustanciales. Los fondos de pensiones, por ejemplo, típicamente combinan inversiones en acciones domésticas con inversiones de retornos fijos en una proporción aproximada de 60/40. Si las inversiones de retornos fijos se suponen libres de riesgo, pueden ocupar una posición cerca d  $R_f$  en la

Figura 15. Combinando  $M$  con los bonos libres de riesgo en una proporción 60/40, obtenemos el punto  $P$  pero combinando eficientemente  $M^*$  con los bonos en una proporción de 70/30, obtenemos  $P^*$ . La diferencia en el retorno esperado entre  $P$  y  $P^*$  representa el beneficio de una inversión eficiente en el mercado de acciones.

*Figura 15*





La evidencia soporta la siguiente hipótesis: Desde 1972 hasta 1989, hubieron oportunidades de utilizar la metodología *E-V* para la construcción de portafolios con igual o mayor retorno y una volatilidad significativamente menor que los más amplios portafolios construidos mediante el método *C-W*. En un principio puede parecer sorprendente, pero dadas las restricciones impuestas sobre los inversores comentadas anteriormente, esta hipótesis es totalmente consistente con las predicciones de la MPT.

### ANÁLISIS DE UTILIDAD

#### *Una Derivación Axiomática del Teorema de la Utilidad Esperada*

El Teorema de la Utilidad Esperada (*TUE*) puede ser desarrollado desde un conjunto de axiomas o postulados que conciernen al comportamiento del inversor. Si un inversor actúa de acuerdo con estos postulados, entonces el comportamiento del inversor no es distinguible de aquel que tome sus decisiones basándose en el *TUE*<sup>87</sup>. Los dos primeros axiomas conciernen la ordenación de preferencias. Los dos

<sup>87</sup> Lease, R. Lewellen, W. and Schoarbaum, G. (1974) "The Individual Investor: Attributes and Attitudes", *Journal of Finance*, 9, 2, 413-433.



siguientes conciernen la racionalidad al ordenar esperanzas aleatorias. Los axiomas son<sup>88</sup>:

1. *Comparabilidad.* Un inversor puede establecer preferencias entre todas las posibilidades alternativas. Entonces, si el inversor tiene que elegir entre el proyecto  $A$  y el  $B$ , su preferencia por  $A$  ó por  $B$  puede establecerse o puede expresar su indiferencia entre los dos. La asunción de que los inversores pueden realizar comparaciones entre los proyectos es un estándar en teoría económica.
2. *Transitividad.* Si el inversor prefiere  $A$  a  $B$  y  $B$  a  $C$ , entonces,  $A$  se prefiere a  $C$ . Esta es una asunción en la que los inversores son consistentes en su *ranking* de ordenación de resultados. Aunque resultaría razonable que la mayoría de los inversores se comportaran de esta manera, en situaciones experimentales, no siempre ocurre así. La dificultad reside en que en algunas situaciones son lo suficientemente complicadas como para que el inversor no comprenda todas las implicaciones de su decisión. En situaciones experimentales, cuando se detectan intransitividades, y se exploran sus implicaciones, la mayoría de los individuos prefieren revisar sus decisiones, de forma que sean consistentes con este axioma.
3. *Independencia.* Considérense dos resultados posibles referentes a dos proyectos de investigación diferentes,  $X$  e  $Y$ . Supóngase que el inversor es indiferente entre ellos. Désígnese un tercer proyecto  $Z$ . La independencia implica que el inversor es indiferente entre los siguientes dos juegos:  
  
X con probabilidad  $P$  y  $Z$  con probabilidad  $1-P$ , y  
  
Y con probabilidad  $P$  y  $Z$  con probabilidad  $1-P$ .

---

<sup>88</sup> Elton, E. and Gruber, M. (1984) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 193-216.



Al inversor puede que le gusten los dos o puede que no le guste ninguno, pero el punto relevante es que él o ella se sentirá igualmente satisfecho o insatisfecho con cada uno.

Por ejemplo, si una persona es indiferente entre tener un *Talbot* o un *Citroën*, entonces a esa misma persona le será indiferente comprar por 1000 pesetas un *ticket* de rifa que ofreciera 1/500 oportunidades de ganar un *Talbot* o un *ticket* de rifa que, costando lo mismo, ofreciera 1/500 oportunidades de ganar un *Citroën*. Esta persona puede preferir no comprar ningún *ticket*, pero si la decisión de participar en una rifa está tomada, entonces a la persona no le importaría qué *ticket* adquirir.

4. *Equivalente seguro*. Para cada juego hay un valor (llamado la equivalente seguro) tal que el inversor es indiferente entre el juego y el equivalente seguro. Esta asunción establece simplemente que todo tiene un precio.

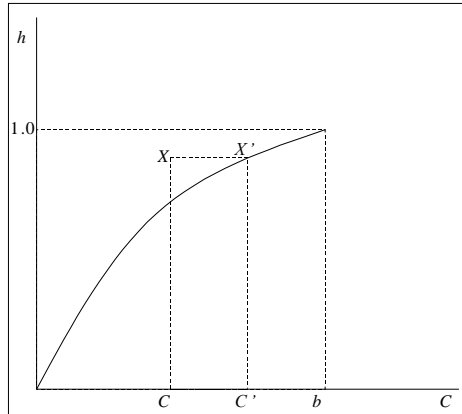
Utilizando estos axiomas, podemos derivar el *TUE*. Lo que sigue es una explicación intuitiva. Para una explicación más rigurosa, ver Fama y Miller<sup>89</sup>. Considérese un valor  $G$  con dos posibles resultados:

$$G = \begin{bmatrix} b \text{ con probabilidad } h \\ 0 \text{ con probabilidad } 1 - h \end{bmatrix}$$

Sea  $C$  la cantidad de dinero que haría indiferente la elección del inversor entre el juego  $G$  y la cantidad de dinero  $C$ , que es el equivalente seguro. Claramente  $C$  depende de la probabilidad de recibir  $b$  (es decir, el valor de  $h$ ). De todas formas, del axioma 4 se deduce que  $C$  debe existir. Si  $h$  variara, entonces el valor apropiado para  $C$  sería distinto. Si se variara  $h$  en una banda amplia de valores y se dibujasen todos los valores de  $h$  frente a  $C$ , tendríamos un diagrama como el de la Figura 16.

Figura 16

<sup>89</sup> Fama E. and Miller M. (1972) *Theory of Finance*, Holt Rinehart and Winston, New York.



La curva de esta figura es la curva de indiferencia del inversor. Separa combinaciones de  $C$  y  $h$  para las cuales el inversor prefiere el *stock* de los puntos en que el inversor prefiere la cantidad cierta. Considérese el punto  $X'$ , el cual representa el mismo juego que  $X$  pero con un equivalente seguro más alto. El inversor ha indicado que él es indiferente entre  $X'$  y  $C'$ , donde  $C$  es un equivalente seguro menor que  $C'$ . La mayoría de los inversores prefieren más a menos, por lo que ellos preferirán el juego  $X$  al equivalente seguro  $C$ . Esto implica que los puntos sobre la curva son puntos donde el juego es preferido y los puntos por debajo de la misma, son puntos donde el equivalente seguro se prefiere. Ahora considérese un portafolio de *stocks*,  $S_1$  con  $N$  resultados posibles definido así:

$$S_1 = \begin{bmatrix} w_1 \text{ con probabilidad } P_1 \\ w_2 \text{ con probabilidad } P_2 \\ \dots\dots\dots \\ w_N \text{ con probabilidad } P_N \end{bmatrix}$$

Como cada  $w_i$  es un *payoff* conocido y como las  $C_i$  existen de todos los tamaños, se puede sustituir cada  $w_i$  con un  $C_i$  del mismo tamaño. Así pues, el portafolio  $S_1$  puede representarse como sigue:

$$S_1 = \begin{bmatrix} C_1 \text{ con probabilidad } P_1 \\ C_2 \text{ con probabilidad } P_2 \\ \dots\dots\dots \\ C_N \text{ con probabilidad } P_N \end{bmatrix}$$



Ya que para cada  $C_i$  existe una lotería alternativa, podemos representar un portafolio alternativo como:

$$S_2 = \left[ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} b \text{ con probabilidad } h_1 \\ 0 \text{ con probabilidad } 1 - h_1 \end{array} \right] \text{ con probabilidad } P_1 \\ \left[ \begin{array}{l} b \text{ con probabilidad } h_2 \\ 0 \text{ con probabilidad } 1 - h_2 \end{array} \right] \text{ con probabilidad } P_2 \\ \dots\dots\dots \\ \left[ \begin{array}{l} b \text{ con probabilidad } h_N \\ 0 \text{ con probabilidad } 1 - h_N \end{array} \right] \text{ con probabilidad } P_N \end{array} \right]$$

El inversor se declara indiferente entre cada  $C_i$  y la lotería. Por tanto, es razonable que  $S_1$  y  $S_2$  sean equivalentes.

Explórese este modelo en detalle. Supóngase que ocurre la opción  $i$ . Entonces, si el inversor selecciona la opción  $S_1$ , se recibirá  $C_i$ . Si el inversor selecciona  $S_2$ , entonces se recibirá  $b$  con probabilidad  $h_i$  y  $0$  con probabilidad  $1-h_i$ . De todos modos, durante la construcción de la curva de preferencias el inversor ha indicado una indiferencia entre  $C_i$  y esta lotería. Así pues,  $S_2$  es equivalente a  $S_1$ . Nótese que por el axioma 3, el inversor no cambia sus preferencias simplemente porque las alternativas son parte de una lotería.

Un diagrama en árbol puede clarificar esta selección. La

Figura 17 representa el portafolio  $S_1$  y la



Figura 18 el portafolio  $S_2$ . Nótese que mientras el portafolio  $S_2$  es equivalente a  $S_1$ ,  $S_2$  tiene únicamente dos posibles resultados:  $b$  y 0. Se podría escribir de forma equivalente  $S_2$  como  $b$  con probabilidad  $\sum_i P_i h_i$  y 0 con probabilidad  $1 - \sum_i P_i h_i$ . Utilizando esta técnica podemos hacer lo mismo para cualquier portafolio. Así pues, cualquier portafolio puede reducirse a dos resultados,  $b$  y 0, con probabilidades conocidas.

Figura 17

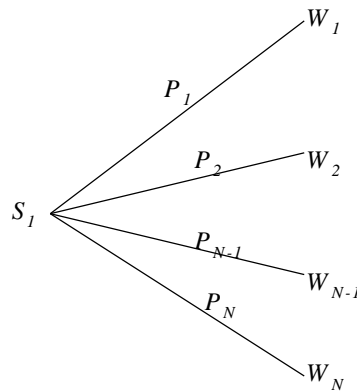
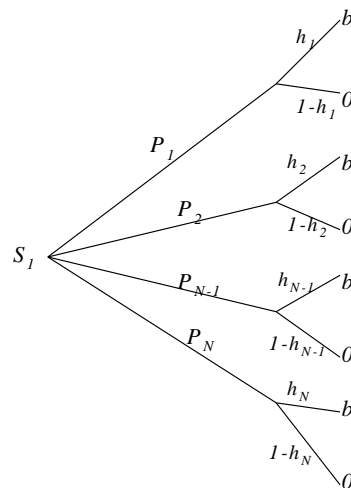




Figura 18



¿Cómo se debe seleccionar entre estos portafolios? Para decidir, el individuo solo necesita considerar la probabilidad de recibir  $b$ , y aquel con probabilidad más alta será el seleccionado. Definase  $H_i = \sum_i P_i h_i$ , donde  $P$  y  $h$  son los valores apropiados para el stock en cuestión. Entonces si  $H_K > H_L$ , el stock  $K$  se preferirá al stock  $L$ . Esto conduce directamente al TUE. Antes se reemplazaron todas las  $w_i$  por  $C_i$ ; asociadas con cada  $C_i$  había una  $h$ . Por tanto, para cada  $w_i$  corresponde una  $h_i$ . Llámese a la función que relaciona  $w_i$  con  $h_i$  una función de utilidad y denótesela por  $u()$ . Entonces, indicar que  $h_i$  es una función de  $w_i$  es lo mismo que escribir  $h_i = u(w_i)$ . Además, los sentimientos de un inversor acerca de un juego o lotería pueden ser expresados así:

$$H_i = \sum_i P_i h_i = \sum_i P_i u(w_i)$$

$\sum_i P_i u(w_i)$  es la utilidad esperada. Por tanto, expresar los sentimientos acerca de una inversión en términos de  $H_i$  es equivalente a expresarlos en términos de la utilidad esperada. Ordenar los distintos proyectos de inversión por  $H_i$  es equivalente a ordenarlos por utilidad esperada.

### Selección Optimizada de Portafolios

En cualquier problema de optimización tenemos que seleccionar la mejor opción posible de entre un conjunto de oportunidades posibles.



El problema de selección de carteras no escapa a esta generalidad. Desde el momento en que el conjunto de oportunidades queda dilucidado utilizando la metodología  $E-V$  u otra cualquiera, todavía resta seleccionar el portafolio que optimice la utilidad del inversor. En el caso aquí analizado, al ser utilizada la metodología  $E-V^{90}$ , el conjunto de oportunidades coincide con la frontera eficiente de portafolios.

El portafolio eficiente que maximice la utilidad del inversor, por Teoría de la Utilidad, será aquel que resulte tangente a la función de preferencias del inversor. Por tanto, cualquiera que sea el conjunto de oportunidades al que se enfrenta el inversor, su función de preferencias jugará un papel determinante en su decisión óptima.

La estimación de esta función de preferencias ha sido analizada con detalle<sup>91</sup>. La manera de realizar estos estudios ha sido haciendo que un inversor tome decisiones entre una serie de inversiones simples alternativas. Estudiando las decisiones del inversor, se puede determinar la función de utilidad que éste está utilizando implícitamente<sup>92</sup>. Aplicando esta función de utilidad a proyectos de inversión más complejos, se debería poder determinar cuál de ellos seleccionaría el inversor.

Un importante número de bancos y firmas han desarrollado programas para extraer la función de utilidad del inversor cuestionando la actitud del inversor ante diferentes inversiones simples. Su éxito ha sido limitado. Muchos de los inversores no obedecen todos los postulados racionales sobre los que se asientan las bases de las funciones de utilidad cuando se les plantea seleccionar entre

---

<sup>90</sup> Baron D. (1977) "On the Utility Theoretic Foundations of Mean Variance Analysis", *Journal of Finance*, 12, 5, 1683-1697.

<sup>91</sup> Baker, K., Hargrove, M. and Haslem J. (1977) "An Empirical Analysis of the Risk Return Preferences of Individual Investors", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, 3, 377-389.

<sup>92</sup> Friedman, M. and Savage, L. (1948) "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy*, 279-304.





inversiones alternativas, incluso cuando los mismos inversores encuentran perfectamente lógicos los principios indicados. Además, muchos inversores, cuando se les enfrenta a una selección entre proyectos de inversión complejos, encuentran aspectos del problema que no se habían considerado en la selección de proyectos simples.

Incluso si el inversor o el administrador de fondos, no creen en la derivación formal de funciones de utilidad, este análisis puede aclarar muchos puntos. Un conocimiento profundo de las propiedades de las funciones de utilidad alternativas, puede ayudar en el proceso de selección racional. Esto permitirá al administrador del fondo o al inversor, eliminar algunos portafolios del conjunto eficiente. De esta manera la probabilidad de tomar una decisión equivocada se reduce.

La metodología multicriterio utilizada en este estudio, tiene como objetivo precisamente reducir el conjunto de portafolios eficientes a un mucho menor subconjunto, consiguiendo una drástica reducción de la posibilidades de elección del inversor. Esto redundará en su beneficio al asegurar este teorema que los portafolios desechados, quedan *dominados* por los portafolios seleccionados en el subconjunto eficiente.



## *PARTE III*

---

### *METODOLOGIA MULTICRITERIO*

---

#### Capítulo 8: Programación Compromiso en Selección de Portafolios



# **CAPÍTULO 8: PROGRAMACIÓN COMPROMISO EN SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS**

El presente capítulo constituye un núcleo esencial de nuestra tesis. En él se abordan la selección de portafolios desde la perspectiva del análisis compromiso como herramienta frontera. Dividiremos el tema en dos partes. En la primera se aplica la programación compromiso a estimar el óptimo de un inversor estándar. En la segunda, la misma técnica de programación se aplica al caso de un inversor con preferencias particulares hacia la rentabilidad y el riesgo.

## ***PARTE A: APROXIMACIÓN PARA INVERSORES ESTÁNDAR***

- 8.1. Introducción
- 8.2. Programación Compromiso Aplicada al Problema del Portafolio:  
Conocimientos Previos
- 8.3. Conjunto Compromiso para Portafolios: Determinación Gráfica
- 8.4. La Cuestión de los Pesos
- 8.5. Maximización de la Utilidad del Inversor Estándar: Solución  
Subrogada *CP*
- 8.6. Una Comparación Tentativa de Procedimientos
- 8.7. Conclusiones Referentes al Inversor Estándar



*PARTE B: APROXIMACIÓN DEL PORTAFOLIO OPTIMO PARA UN INVERSOR CON PREFERENCIAS PARTICULARES*

---

8.8. Introducción

8.9. Definiciones y Asunciones

8.10. El Teorema de Acotación

8.11. Conclusiones Referentes al Inversor con Preferencias Particulares.



## PARTE A: APROXIMACIÓN PARA INVERSORES ESTÁNDAR<sup>93</sup>

### Introducción

El método de Markowitz<sup>94,95,96</sup>, Freund<sup>97</sup> y Pratt<sup>98</sup> para la selección de inversiones (en particular para la selección de portafolios de *stocks*) se compone de dos fases distintas: (i) Determinar el conjunto de oportunidades de inversión como una restricción del problema, acudiendo para ello a la metodología *E-V*. Este es un método muy bien conocido, como ya se ha nombrado anteriormente aunque según Kroll et al. algo restrictivo<sup>99</sup>, y (ii) maximizar la utilidad esperada de los retornos, que se denominará  $Eu(R)$  para el inversor sobre la frontera.

La primera fase no representa demasiadas dificultades. El conjunto eficiente *E-V* puede ser fácilmente aproximado recurriendo a técnicas de programación matemática. La segunda fase está llena de dificultades conceptuales y operacionales. Como Markowitz y Levy<sup>100</sup> han indicado, la opción exacta del portafolio eficiente que maximiza  $Eu(R)$  únicamente es posible si los retornos para todos los valores están distribuidos normalmente, o si la función de utilidad  $u(R)$  es cuadrática.

---

<sup>93</sup> Ballesteros, E. and Romero, C. (1996) "Portfolio Selection: A Compromise Programming Solution", *Journal of the Operational Research Society*, 47, 1377-1386.

<sup>94</sup> Markowitz, H. (1952) "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 7, 77-91.

<sup>95</sup> Markowitz, H. (1970) *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley and Sons, New York.

<sup>96</sup> Markowitz, H. (1987) *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Basil Blackwell, New York.

<sup>97</sup> Freund, R. (1956) "The Introduction of Risk into a Programming Model", *Econometrica*, 24, 253-263.

<sup>98</sup> Pratt, J. (1964) "Risk Aversion in the Small and in the Large". *Econometrica*, 32, 112-136.

<sup>99</sup> Kroll, Y., Levy, H. and Markowitz, H. (1984) "Mean Variance versus Direct Utility Maximization", *Journal of Finance*, 39, 47-61.

<sup>100</sup> Levy, H. and Markowitz, H. (1979) "Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance", *American Economic Review*, 69, 308-317.



Pero las distribuciones de retornos normales son solo una hipótesis que no ha sido corroborada empíricamente y las funciones de utilidad cuadráticas presentan muchos flecos lógicos (por ejemplo, su aversión al riesgo absoluta crece con la riqueza, ver Pratt<sup>101</sup> y Arrow<sup>102</sup>, entre otros).

Algunos analistas han iniciado una complicada vía de entrada al problema comparando las soluciones obtenidas a partir de los problemas de maximización de la  $Eu(R)$  para una muestra de funciones de utilidad (ver Markowitz<sup>103</sup>, pag. 67). Estos investigadores intentan clarificar si las objeciones teóricas al enfoque  $Eu(R)$  son menos perjudiciales en la práctica. Kallberg y Ziemba muestran que portafolios “similares” pueden ser obtenidos utilizando una gran variedad de funciones de utilidad con formas y parámetros diferentes, siempre que tengan el mismo coeficiente absoluto de aversión al riesgo de Arrow<sup>104</sup>.

En este apartado, se ofrece una metodología alternativa al enfoque  $Eu(R)$ . Este modelo difiere del problema de maximización de  $Eu(R)$  en los siguientes puntos: (a) se inicia con la función de utilidad bicriterio para el inversor estándar  $u(\theta_1, \theta_2)$ , donde  $\theta_1$  es un índice de beneficio de la inversión, y  $\theta_2$  un índice de seguridad (opuesto al riesgo); (b) solamente se necesita una asunción que está muy relacionada con la bien conocida ley de rendimiento marginal de sustitución (*marginal rate of substitution, MRS*); (c) el problema se enfoca:  $\max u(\theta_1, \theta_2)$  sujeto al conjunto eficiente  $E-V$  para un inversor estándar en el contexto de

<sup>101</sup> Pratt, J. (1964) “Risk Aversion in the Small and in the Large”. *Econometrica*, 32, 112-136.

<sup>102</sup> Arrow, K. (1965) *Aspects of the Theory of Risk Bearing*, Academic Book Store, Helsinki.

<sup>103</sup> Markowitz, H. (1987) *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Basil Blackwell, New York.

<sup>104</sup> Arrow, K. (1965) *Aspects of the Theory of Risk Bearing*, Academic Book Store, Helsinki.



información incompleta referente a  $u$  y (d) para este propósito, se utiliza un sustituto de la optimización *Lagrangiana*.

### *Programación Compromiso Aplicada al Problema del Portafolio: Conceptos Previos*

El problema de selección de portafolios puede ser formulado como un problema bi-criterio y puede ser resuelto con una metodología multicriterio (*multiple criteria decision-making, MCDM*). Utilizando los criterios retornos esperados y varianza de los retornos, el problema puede ser reformulado como un problema de programación compromiso (*compromise programming, CP*). Este primer paso no es nuevo en la literatura (ver, Zeleny<sup>105</sup>, pp.393-394 y Romero et al<sup>106</sup>.) pero es un punto de partida ineludible para el análisis.

Se introduce la siguiente notación que, en parte, ya hemos utilizado en anteriores apartados de este trabajo, pero la recordamos de nuevo aquí:

$E$  = retornos esperados del portafolio.

$V$  = varianza de los retornos.

$u(E, V)$  = función de utilidad de los inversores en el espacio  $E-V$ .

$E^*$  = valor ideal o ancla para  $E$ , es decir, el mayor retorno esperado posible compatible con las restricciones del problema.

$V^*$  = valor ideal o ancla para  $V$ , es decir, la menor varianza de los retornos posible compatible con las restricciones del problema.

$E^*$  = valor anti-ideal para  $E$ , es decir el valor de  $E$  que corresponde al portafolio con la mínima varianza  $V^*$ .

---

<sup>105</sup> Zeleny, M. (1982) *Multiple Criteria Decision-Making*. McGraw-Hill, New York.

<sup>106</sup> Romero, C., Rehman, T. and Domingo, J. (1988) "Compromise Risk Programming for Agricultural Resource Allocation: An Illustration", *Journal of Agricultural Economy*, 39, 271-276.



$V^*$  = valor anti-ideal para  $V$ , es decir el valor de  $V$  que corresponde al portafolio con la máxima esperanza  $E^*$ .

$y$  = portafolio mix.

$y_i$  = fracción del portafolio invertida en el *stock*  $i$ -ésimo.

$F$  = conjunto de restricciones que deben cumplir los portafolios factibles.

$w_1, w_2$  = pesos asignados a los criterios  $E$  y  $V$  respectivamente.

$p$  = métrica, es decir, el parámetro que define la familia de funciones de distancia.

$\mathcal{C}_{1, L_\infty}$  = la mejor solución compromiso para las métricas  $p = 1$  y  $p = \infty$ , respectivamente, son los límites del conjunto compromiso.

$x_i$  =  $i$ -ésimo atributo en un contexto general de  $CP$ .

$x_i^*$  = valor ancla para el atributo  $i$  en el mismo contexto.

$\rho$  = tipo de interés.

$\theta_1$  = índice de la rentabilidad del portafolio.

$\theta_2$  = índice de la seguridad del portafolio.

$u_{\mathcal{C}_{1, \theta_2}}$  = función de utilidad del inversor en el espacio  $\mathcal{C}_{1, \theta_2}$ .

$MRS_{\mathcal{C}_{1, \theta_2} \in u = u_0}$  = tasa marginal de sustitución en el punto  $\mathcal{C}_{1, \theta_2}$  de  $u = u_0$ , es decir,  $u_1/u_2$ , donde  $u_1 = \partial u / \partial \theta_1$  y  $u_2 = \partial u / \partial \theta_2$ .

La definición del problema de selección de portafolios en la forma de un problema de  $CP$  sería:

$$\begin{aligned} \min L_p &= \left[ w_1^p |E^* - E|^p + w_2^p |V - V^*|^p \right]^{1/p} \\ \text{s.a. } &y \in F \end{aligned} \tag{8.1}$$

Esto define los punto y líneas mostrados en la Figura 19.

Para  $p = 1$  el modelo (8.1) se convierte en:





$$\begin{aligned} \max \quad & w_1 E - w_2 V \\ \text{s.a.} \quad & y \in F \end{aligned} \tag{8.2}$$

Resolviendo el programa (8.2) se obtiene el mejor portafolio compromiso  $L_1$ . Para  $p = \infty$  solo cuenta la desviación más grande por lo que la distancia en la ecuación (8.1) se convierte en:

$$\max \quad \max \left\{ w_1 (E^* - E), w_2 (V - V^*) \right\} \tag{8.3}$$

Así pues, el límite  $L_\infty$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & D = \min \max \left\{ w_1 (E^* - E), w_2 (V - V^*) \right\} \\ \text{s.a.} \quad & y \in F \end{aligned} \tag{8.4}$$

lo cual es equivalente a (ver, por ejemplo, Zeleny<sup>107</sup> y Cohon<sup>108</sup>, pag. 185-187)

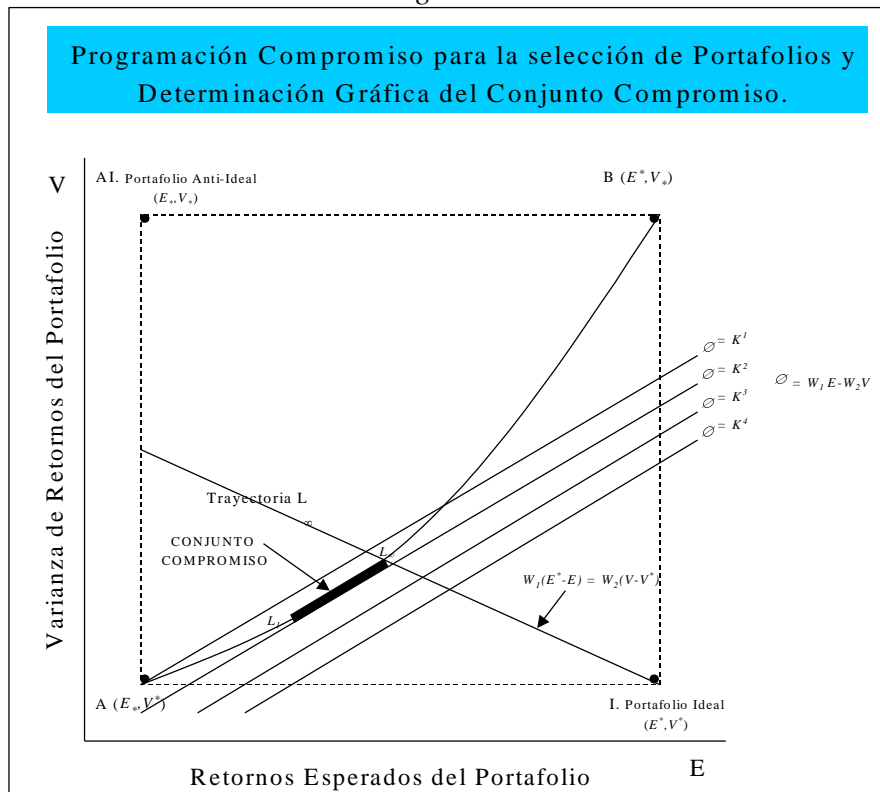
$$\begin{aligned} \min \quad & D \\ \text{s.a.} \quad & w_1 (E^* - E) \leq D \\ & w_2 (V - V^*) \leq D \\ & y \in F \end{aligned}$$

<sup>107</sup> Zeleny, M. (1982) *Multiple Criteria Decision-Making*. McGraw-Hill, New York.

<sup>108</sup> Cohon, J. (1978) *Multiobjective Programming and Planning*. Academic Press, New York.



Figura 19



Yu<sup>109</sup> probó que  $L_1$  y  $L_\infty$  son los dos límites del conjunto compromiso sobre la frontera eficiente (en un espacio bi-criterio). Las soluciones definidas por las demás métricas, es decir, las restantes soluciones compromiso, caen en el conjunto compromiso entre  $L_1$  y  $L_\infty$ . Como ya se ha indicado anteriormente, los límites ( $L_1$ ,  $L_\infty$ ) pueden ser calculados resolviendo los programas lineales (8.2) y (8.3). Aunque estos modelos de programación no lineal en el espacio podrían crear complicaciones matemáticas, por tanto se mostrará aquí una forma más sencilla para determinar ( $L_1$ ,  $L_\infty$ ) en problemas de portafolio sin tener que recurrir a los modelos (8.2) y (8.3).

### Conjunto Compromiso Para Portafolios: Determinación Gráfica

Resolver los modelos (8.2) y (8.3) puede ser evitado. La estructura (8.2) es un modelo no lineal si se define en el espacio de la variable de decisión ( $y$ ), pero su función objetivo es lineal cuando se

<sup>109</sup> Yu, P. (1973) "A Class of Solutions for Group Decision Problems", *Management Science*, 19, 936-946



define en el espacio  $E-V$ . Por lo tanto, la función objetivo del modelo (8.2) alcanza un máximo en el punto de tangencia entre la familia de las iso-líneas  $w_1E-w_2V = K$  y el conjunto eficiente  $E-V$  (ver Figura 19). Este punto de tangencia representa el límite  $L_1$ .

El límite  $L_\infty$  puede ser calculado utilizando el siguiente *lemma*:

*Lemma 1*

El límite  $L_\infty$  del conjunto compromiso es el punto donde la línea recta  $w_1(x_1^* - x_1) = w_2(x_2^* - x_2)$  corta el conjunto eficiente o la frontera alcanzable (Ballestero y Romero<sup>110</sup>).

Cambiando los atributos  $(x_1, x_2)$  a un escenario del problema del portafolio donde uno de ellos (la varianza) obedece el postulado de “cuanto menos mejor”, la trayectoria  $L_\infty$  puede escribirse:

$$w_1(E^* - E) = w_2(V - V^*) \quad (8.5)$$

Por consiguiente, una vez se ha generado el conjunto eficiente  $E-V$ , ya no tiene que resolverse ninguna otra programación matemática para obtener el conjunto compromiso.

*La Cuestión de los Pesos*

Los pesos  $w_1$  y  $w_2$  juegan el siguiente doble papel: (a) normalizar los dos criterios  $E-V$  y (b) medir las preferencias del inversor para el retorno y riesgo esperados ( $E-V$ ).

La función (a) de los pesos puede ser ejecutada recurriendo a cualquier método de normalización propuesto por el campo *MCDM* (ver Romero<sup>111</sup>, pag. 35-43). Como se demostrará más adelante, la segunda función (b) puede ser eliminada en la práctica si el análisis se centra en

<sup>110</sup> Ballestero, E. and Romero, C. (1991) “A Theorem Connecting Utility Function Optimization and Compromise Programming”, *Operation Research Letters*, 10, 421-427.

<sup>111</sup> Romero, C. (1991) *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press, Oxford.



el inversor estándar, el cual se supone que tiene una función de utilidad estándar. El caso de los inversores no estándar se analizará en el próximo punto. Obviamente, la estimación de preferencias mediante pesos es más sencillo que hacerlo mediante funciones de utilidad. Los pesos pueden aproximarse mediante un método *MCDM* interactivo (ver Olson<sup>112</sup> como resumen de unos cuantos de estos métodos). Alternativamente el problema puede ser reducido implementando un análisis de sensibilidad junto con los valores de los pesos.

Los pesos que aquí se utilizan son los pesos *CP* estándar; no son automáticamente los pesos del inversor estándar. Los utilizamos como un punto de partida. Así, tenemos:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{V_* - V^*}{E^* - E_*} \quad (8.6)$$

Examinemos el significado de pesar de esta manera en nuestro escenario financiero. Sea  $(E, V)$  un punto del conjunto  $E$ - $V$  y considérese la expresión:

$$w_1 E - w_2 V = M \quad (8.7)$$

donde  $M$  es un parámetro dado. Haciendo  $w_1 = 1/\rho$ , siendo  $\rho$  un tipo de interés apropiado y se enfoca  $w_2$  como una tasa de descuento para el riesgo.  $M$  puede interpretarse como el valor presente de  $E$  después de corregirlo mediante un factor de descuento de riesgo  $w_2 V$ . Dado un valor de  $M$ , los valores  $w_1 = 1/\rho$  y  $w_2$  cambiarán a medida que el punto  $(E, V)$  se mueva sobre la frontera eficiente. De todas formas, podemos determinar un par de tasas sombra (precios sombra)  $w_1$  y  $w_2$  que satisfagan:

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1 E - w_2 V \geq M \\ \text{s.a.} \quad & w_1 E - w_2 V \leq M \end{aligned} \quad (8.8)$$

<sup>112</sup> Olson, D. (1992) "Review of Empirical Studies in Multiobjective Mathematical Programming: Subject Reflection of Non-linear Utility and Learning", *Decision Science*, 23, 1-20.



para cada punto sobre la frontera  $E$ - $V$ . Hay una sola solución para este problema, los pesos dados por la ecuación (8.6) (Ballestero y Romero<sup>113</sup>). Por tanto, las tasas sombra  $(w_1, w_2)$  minimizan las discrepancias dadas por la función objetivo del modelo (8.8) y al mismo tiempo aseguran que el nivel  $M$  se alcanza (como muestra la restricción).

### Maximización de la Utilidad del Inversor Estándar: Solución Subrogada CP

Examínense los rasgos esenciales de la maximización de la utilidad para un inversor estándar cuya función de utilidad es virtualmente desconocida. Aunque la minimización de la distancia CP no puede ser interpretada directamente como la optimización de la utilidad, se puede detectar una asociación entre el óptimo de la utilidad y el conjunto compromiso bajo ciertas condiciones plausibles. Así pues, en esta sección se demostrará que bajo circunstancias normales, el óptimo de utilidad cae sobre el conjunto compromiso.

Considérense los siguientes dos índices:

$$\theta_1 = \text{Índice de rentabilidad} = \frac{E - E^*}{E^* - E_*} \quad (8.9)$$

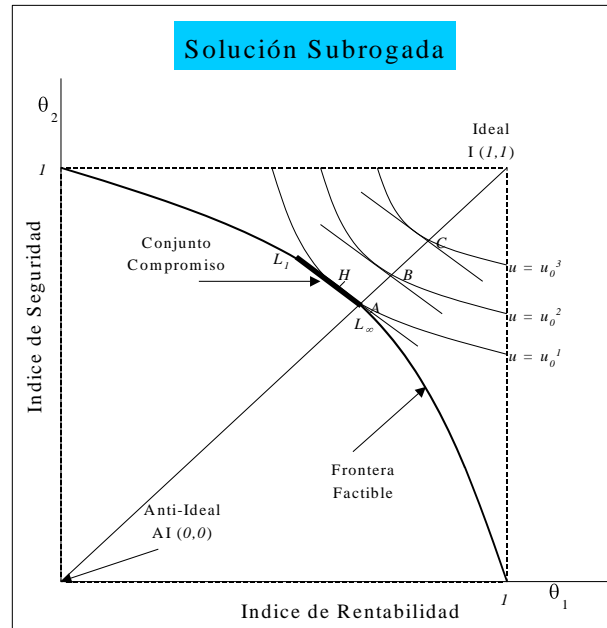
$$\theta_2 = \text{Índice de seguridad} = 1 - \text{Índice de riesgo} = 1 - \frac{V - V^*}{V_* - V^*} = \frac{V_* - V}{V_* - V^*} \quad (8.10)$$

Obviamente,  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq 1$ .

Con estos dos índices normalizados el punto ideal es  $(\theta_1^* = 1, \theta_2^* = 1)$ , el anti-ideal es  $(0,0)$ . (Ver Figura 20). Se demostrará que ambos, el ideal y el anti-ideal (*derivados directamente desde el conjunto de oportunidades del inversor*) están además relacionados con el mapa de utilidad del inversor estándar si una condición plausible se cumple (ver más adelante).

Figura 20

<sup>113</sup> Ballestero, E. and Romero, C (1993) "Weighting in Compromise Programming: A Theorem on Shadow Prices", *Operation Research Letters*, 13, 325-329.



Por otra parte, la trayectoria  $L_\infty$  es la línea recta  $\theta_1 = \theta_2$  como puede comprobarse fácilmente mediante sustitución. De las ecuaciones (8.9) y (8.10) y  $u = u(E, V)$  la utilidad del inversor estándar definida en el espacio  $\mathcal{Q}_1, \theta_2$  se convierte en :

$$u(\mathcal{Q}_1, \theta_2) \stackrel{\sim}{=} u(E_* + \theta_1(E^* - E_*) - E_* - \theta_2(V_* - V^*) - V_*) \quad (8.11)$$

Ahora, considérese el siguiente teorema (Ballestero y Romero<sup>114,115</sup>), reformulado en el contexto del problema del portafolio:

*Teorema 1*

Para portafolios para los cuales  $\theta_1 = \theta_2$ , la condición:

$$MRS(\mathcal{Q}_1, \theta_2 \in u = u_0) \stackrel{\sim}{=} 1$$

es condición necesaria y suficiente para garantizar que el máximo de la función de utilidad del inversor  $u(\mathcal{Q}_1, \theta_2)$  está situado sobre el conjunto compromiso.

<sup>114</sup> Ballestero, E. and Romero, C. (1991) "A Theorem Connecting Utility Function Optimization and Compromise Programming", *Operation Research Letters*, 10, 421-427.

<sup>115</sup> Ballestero, E. and Romero, C. (1994) "Utility Optimization When the Utility Function is Virtually Unknown", *Theory and Decision*, 37, 233-243.



La condición en este teorema puede estar conectada con la bien conocida ley de la tasa de sustitución marginal decreciente. En los escenarios en donde se cumple “cuanto más mejor” (en nuestro caso para ambos índices, rentabilidad y seguridad), esta ley *MRS* indica que: a lo largo de una curva de iso-utilidad  $u=u_0$

$$\theta_1 \text{ crece} \Rightarrow MRS = u_1/u_2 \text{ decrece}$$

$$\theta_1 \text{ decrece} \Rightarrow MRS = u_1/u_2 \text{ crece}$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  son derivadas parciales de  $u$  con respecto a  $\theta_1$  y  $\theta_2$  respectivamente. De acuerdo con esta ley, se supone que la función de utilidad del inversor estándar  $u(\theta_1, \theta_2)$  cumple las típicas propiedades generales para este tipo de función. Como el inversor es un individuo estándar con preferencias equilibradas entonces, de acuerdo con la ley *MRS*, se sugiere la estructura siguiente:

$$\theta_1 \text{ muy alto} \Leftrightarrow MRS = u_1/u_2 \text{ muy bajo}$$

$$\theta_2 \text{ muy bajo} \Leftrightarrow MRS = u_2/u_1 \text{ muy alto}$$

$$\theta_1 \text{ decreciendo} \Leftrightarrow MRS = u_1/u_2 \text{ creciendo}$$

$$\theta_2 \text{ creciendo} \Leftrightarrow MRS = u_2/u_1 \text{ decreciendo}$$

$$\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow MRS = u_1/u_2 = 1$$

$$\theta_1 \text{ decreciendo} \Leftrightarrow MRS = u_1/u_2 \text{ creciendo}$$

$$\theta_2 \text{ creciendo} \Leftrightarrow MRS = u_2/u_1 \text{ decreciendo}$$

$$\theta_1 \text{ muy bajo} \Leftrightarrow MRS = u_1/u_2 \text{ muy alto}$$

$$\theta_1 \text{ muy alto} \Leftrightarrow MRS = u_2/u_1 \text{ muy bajo}$$

Así pues, tenemos:  $\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow MRS = u_1/u_2 = 1 \rightarrow$  se cumple la condición del teorema  $\rightarrow$  el máximo *Lagrangiano* de  $u$  es el punto  $(\theta_1, \theta_2)$  sobre el conjunto compromiso. Así pues, la optimización *CP* se convierte en un buen subrogado, para la utilidad de un inversor estándar.



Aunque la ley de la tasa de sustitución marginal decreciente no implica por lógica, la asunción aquí establecida (en lo que concierne al valor  $u_1/u_2 = 1$ ), esta conjetura (la única necesaria para apuntalar al solución subrogada CP) parece plausible ya que partimos del siguiente trasfondo; la MRS disminuye (o crece) por el progresivo desequilibrio del mix  $(\theta_1, \theta_2)$  (es decir, por causa de la creciente discrepancia entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ). Así pues, *sensu contrario*, podemos asumir que  $\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow MRS = u_1/u_2 = 1 \Leftrightarrow MRS = 1$  como el postulado coherente con la ley MRS. Para justificar esta aserción, supóngase que un analista pregunta al inversor estándar: “Si usted se encuentra en una posición de equilibrio con respecto al rendimiento y a la seguridad (es decir en la posición  $\theta_1 = \theta_2$ ), ¿cuántas unidades marginales de seguridad está usted dispuesto a sacrificar para incrementar su rendimiento en una unidad marginal?” El analista puede fácilmente esperar una respuesta como esta: “una por una” (es decir, una unidad marginal por una unidad marginal) ya que un inversor estándar que está en una posición de equilibrio probablemente preferirá mantenerse todo lo cerca de su actual posición como sea posible. Por lo tanto, el analista probablemente obtendrá la siguiente información  $|\Delta\theta_1| = |\Delta\theta_2|$  cuando  $\theta_1 = \theta_2$ . Esto es equivalente a  $u_1 = u_2$  para  $\theta_1 = \theta_2$  ya que:

$$u_1\Delta\theta_1 + u_2\Delta\theta_2 = 0$$

sobre una curva de iso-utilidad. Por lo tanto, la respuesta de este inversor estándar (en correspondencia con un comportamiento estándar) y la asunción básica del trabajo, normalmente coincidirán.

Notar que no se establece ninguna asunción rígida como: “las preferencias del inversor estándar en la situación de equilibrio  $\theta_1 = \theta_2$  están tan marcadas que éste necesariamente deberá seleccionar la posición  $\theta_1 = \theta_2$  bajo cualquier circunstancia”. Esta asunción sería restrictiva e inflexible y conduciría el equilibrio al punto  $L_\infty$ . Por lo tanto, *solo se asume un comportamiento conservador cuando el individuo estándar está en una posición de equilibrio*. Según el Teorema 1, este





comportamiento conservador es suficiente para determinar que el óptimo de la utilidad se sitúa sobre el conjunto compromiso. Así pues, los puntos  $L_1$  y  $L_\infty$  (aunque se han derivado de información técnica procedentes de las oportunidades de inversión) pueden limitar el arco preferente sobre la frontera eficiente. El modelo  $CP$  propuesto en este trabajo puede ser utilizado, para aproximar soluciones para los inversores estándar, introduciendo la normalización de pesos propuesta en la ecuación (8.6).

Este punto se finaliza resumiendo los pasos necesarios para implementar el procedimiento de selección de portafolios, que será el que se desarrolle con más detalle (salvando algunas modificaciones técnicas que serán explicadas en su momento) en el próximo capítulo.

1. Obtener el conjunto eficiente  $E-V$  mediante la técnica tradicional;
2. Transformar el espacio  $(E, V)$  en el espacio  $(\theta_1, \theta_2)$  mediante las relaciones (8.9) y (8.10); notar que el punto ideal  $(\theta_1^*, \theta_2^*)$  es el  $(1, 1)$  como muestra la Figura 20.
3. Determinar el punto  $L_\infty$  mediante la intersección  $\theta_1 = \theta_2$  y el conjunto eficiente.
4. Determinar el punto  $L_1$  mediante la resolución del programa:

$$\max \theta_1 + \theta_2 \quad (8.12)$$

s.a. la solución se encuentra dentro del conjunto eficiente y  $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$ . En realidad este cálculo puede evitarse ya que el punto  $L_1$  coincide con el punto de tangencia entre la familia de iso-líneas  $\theta_1 + \theta_2 = k$  y el conjunto eficiente. Los puntos entre  $L_1$  y  $L_\infty$  sobre el conjunto eficiente corresponden a las soluciones subrogadas.

Un procedimiento equivalente, sin necesitar la transformación del espacio  $(E, V)$  en el espacio  $(\theta_1, \theta_2)$  es el siguiente:

1. Obtener el conjunto eficiente  $E-V$  o frontera eficiente.



2. Calcular los pesos utilizando la fórmula (8.6).
3. Determinar  $L_1$  mediante el modelo (8.2).
4. Determinar  $L_\infty$  a través del programa (8.4) o mediante la intersección de la ecuación (8.5) y la frontera.

Como se ha indicado anteriormente, los puntos del conjunto compromiso son las soluciones subrogadas.

### *Una Comparación Tentativa de Procedimientos*

La metodología compromiso propuesta en este trabajo y la más usual metodología de la maximización de  $Eu(R)$  representan distintos marcos de trabajo desde donde enfocar el problema de la selección de portafolios y no pueden compararse directamente. Aún así, se pueden comparar los resultados numéricos obtenidos por ambos procedimientos en un contexto real. Para llevar a cabo esta tarea se considera el ejemplo utilizado por Kroll *et al*<sup>116</sup>. con 20 *stocks* a lo largo del periodo que discurre entre los años 1949-1968. De la información analizada, ellos obtuvieron una malla de 29 portafolios eficientes  $E-V$  con medias dentro del intervalo [0.165-0.303]. Además, seleccionaron ocho funciones usuales de utilidad para describir un espectro del comportamiento del inversor.

En la

Tabla 7 los valores óptimos del método de Kroll y las ocho funciones de utilidad se comparan con los límites compromiso del portafolio  $L_1$  y  $L_\infty$ . Incluso se añade una comparación en términos del equivalente o sustituto cierto. (Ver la

---

<sup>116</sup> Kroll, Y., Levy, H. and Markowitz, H. (1984) "Mean Variance versus Direct Utility Maximization", *Journal of Finance*, 39, 47-61.



Tabla 7 en donde las funciones de utilidad están ordenadas en orden decreciente respecto a la aversión al riesgo).

Tabla 7

Resultados Comparativos Basados en un Caso Estudio de Kroll, Levy y Markowitz (1984)

Funciones de Utilidad (1)	Coeficiente Absoluto de Aversión al Riesgo		Portafolio Compromiso						Equivalente o Sustituto Cierto		
	Riqueza Anterior a los Retornos (2)	Riqueza Posterior a los Retornos (3)	Utilidad Máxima del Portafolio (4)		Límite $L_1$ (5)		Límite $L_\infty$ (6)		Para la Máxima Utilidad (7)	Para el Límite $L_1$ (8)	Para el Límite $L_\infty$ (9)
$-e^{-x}$	1	1	0.225	0.073	0.265	0.297	0.277	0.445	0.188	0.222	0.212
$\ln(x)$	1	0.81	0.229	0.084	0.265	0.297	0.277	0.445	0.195	0.222	0.212
$x^{0.1}$	0.90	0.73	0.231	0.090	0.265	0.297	0.277	0.445	0.198	0.222	0.212
$x^{0.5}$	0.50	0.40	0.257	0.224	0.265	0.297	0.277	0.445	0.213	0.222	0.212
$\ln(x+1)$	0.50	0.44	0.247	0.157	0.265	0.297	0.277	0.445	0.212	0.222	0.212
$(x+1)^{0.1}$	0.45	0.40	0.257	0.224	0.265	0.297	0.277	0.445	0.212	0.222	0.212
$(x+1)^{0.5}$	0.25	0.22	0.285	0.575	0.265	0.297	0.277	0.445	0.222	0.222	0.212
$x^{0.9}$	0.10	0.08	0.305	0.962	0.265	0.297	0.277	0.445	0.268	0.222	0.212

La

Tabla 7 muestra una similitud entre los portafolios con utilidad óptima de Kroll y los portafolios compromiso para los inversores estándar cuando el coeficiente absoluto de aversión al riesgo de Arrow toma valores “no extremos” (es decir, entre 0.25 y 0.70). Esta magnífica aproximación parece desvanecerse cuando la aversión al riesgo toma valores extremos (por ejemplo 0.1 ó 1). Estos resultados parece que apoyan el análisis aquí realizado. Obviamente, un inversor con una aversión al riesgo extremadamente alta o baja, no es un inversor estándar con una función de utilidad  $u(x) = -e^{-\theta x}$  que no cumple las condiciones del Teorema 1, y consecuentemente su  $Eu(R)$  máxima y sus



portafolios compromiso pueden diferir significativamente. Por el contrario, si se enfoca el inversor estándar (es decir, individuos cuyos coeficientes de aversión al riesgo se mueven a lo largo de un rango intermedio) las funciones de utilidad  $u_{\theta_1, \theta_2}$  generalmente satisfacen las condiciones del Teorema 1 y los portafolios con máxima utilidad se aproximan a las soluciones de los mejores portafolios compromiso.

### Conclusiones

La solución subrogada compromiso parece ser una alternativa a los enfoques tradicionales utilizados para la selección de portafolios. Primero, la metodología propuesta requiere pocas asunciones (la principal asunción se deriva de la ley *MRS*) por lo que parece ser un esquema más plausible que el conjunto de asunciones requeridas por los enfoques estándar  $Eu(R)$ . Además, el peso computacional parece ser bastante sencillo. Una vez se ha establecido la frontera eficiente, los límites  $L_1$  y  $L_\infty$  pueden ser determinados gráficamente.



*PARTE B: APROXIMACIÓN DEL PORTAFOLIO OPTIMO PARA UN INVERSOR CON PREFERENCIAS PARTICULARES*<sup>117</sup>

*Introducción*

El propósito de esta sección es extender el enfoque presentado en la sección anterior a inversores no estándar mediante un nuevo teorema de acotación. En el enfoque que aquí se presenta, ni la asunción principal, ni la prueba matemática se relacionan con el esquema de la anterior sección.

Se inicia con los siguientes índices (ya nombrados anteriormente):

$$\theta_1 = \text{Índice de rentabilidad ad} = \frac{E - E^*}{E^* - E_*} \quad (8.13)$$

$$\theta_2 = \text{Índice de seguridad} = 1 - \text{Índice de riesgo} = 1 - \frac{V - V^*}{V_* - V^*} = \frac{V_* - V}{V_* - V^*} \quad (8.14)$$

donde  $(E, V)$  es un punto de la frontera eficiente de media-varianza;  $(E^*, V^*)$  es el punto ideal (máximo  $E$ , mínimo  $V$ ); y  $(E_*, V_*)$  es el punto anti-ideal (mínimo  $E$ , máximo  $V$ ).

En (8.13) y (8.14), se cumple que  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq 1$ . Mediante un cambio en (8.13) y (8.14), la frontera eficiente de media-varianza se convierte en la forma  $T(\theta_1, \theta_2) = 0$  con  $\theta_1 \geq 0$  y  $\theta_2 \geq 0$  mientras que la función de utilidad del inversor se expresa  $u = u(\theta_1, \theta_2)$ .

*Asunciones y Definiciones*

En el espacio  $(\theta_1, \theta_2)$  el conjunto factible de portafolios está acotado y es convexo. Las asunciones comunes sobre su frontera eficiente [las cuales se derivan de la frontera eficiente de media-varianza  $(E, V)$  a través de (8.13) y (8.14)] se detallan a continuación.

<sup>117</sup> Ballester, E. (1998) "Approximating the optimum portfolio for an investor with particular preferences", *Journal of the Operational Research Society*, 49, 998-1000.



Definiciones y Asunciones más Comunes (normalmente aceptadas en Economía)

En relación con la función de utilidad del inversor  $u = u(\theta_1, \theta_2)$  se asume:

*Asunción A1*

“Cuanto más mejor”, es decir,  $u$  crece monótonamente a medida que crece  $\theta_1$  (o  $\theta_2$ ) y, a su vez,  $\theta_2$  (o  $\theta_1$ , respectivamente) no decrecen.

*Asunción A2*

Diferenciabilidad (en particular las derivadas parciales de  $u$  existen en todos los puntos del mapa de utilidad).

*Definición D1*

Sean  $u_{\theta_1}$  y  $u_{\theta_2}$  las derivadas parciales de  $u$  con respecto a  $\theta_1$  y  $\theta_2$  respectivamente entonces, la tasa marginal de sustitución (*MRS*) se define por  $(-1) d\theta_2/d\theta_1 = u_{\theta_1}/u_{\theta_2}$  a lo largo de la curva de iso-utilidad  $u = u_0$ .

*Asunción A3*

La ley *MRS* decrece monótonamente a medida que  $\theta_1$  crece.

*Asunción A4*

En relación con el conjunto alcanzable o factible de portafolios, se asume convexidad.

*Asunción A5*

En relación con la frontera eficiente  $T(\theta_1, \theta_2) = 0$  con  $\theta_1 \geq 0$  y  $\theta_2 \geq 0$  se supone diferenciabilidad (en particular, las derivadas parciales de  $T$  existen para cada uno de los puntos sobre la frontera eficiente).

*Asunción A6*

$\theta_2$  es una función decreciente de  $\theta_1$  a lo largo de la frontera eficiente, es decir,  $d\theta_2/d\theta_1 < 0$ .

*Asunción A7*

Concavidad estricta, es decir,  $d^2\theta_2/d\theta_1^2 < 0$ .



*Definición D2*

El máximo *Lagrangiano* de la función de utilidad del inversor  $u$  viene dada por la intersección de  $T(\theta_1, \theta_2) = 0$  con  $u_{\theta_1}/u_{\theta_2} = T_{\theta_1}/T_{\theta_2}$  donde  $T_{\theta_1}$  y  $T_{\theta_2}$  son derivadas parciales de  $T(\theta_1, \theta_2)$  con respecto a  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

*Asunción A8*

El máximo *Lagrangiano* de la utilidad del inversor  $u(\theta_1, \theta_2)$  existe sobre la frontera eficiente (este es el punto óptimo a seleccionar por el inversor).

*Asunción Principal*

En la función de utilidad del inversor, la tasa de sustitución marginal, (*MRS*) tiene un valor constante  $r_0$  a lo largo de la trayectoria  $\theta_1 = \theta_2$ .

Recuérdese el significado económico de la  $MRS = r_0$  a lo largo de la trayectoria  $\theta_1 = \theta_2$ . Imagínese un inversor con un portafolio equilibrado entre rentabilidad y seguridad, es decir, un portafolio que cumple  $\theta_1 = \theta_2$ . Si por ejemplo,  $r_0 = 1.2$  para este inversor, tenemos que por la *Definición D1*, haciendo  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ :

$$MRS(\theta, \theta) = u_{\theta_1}(\theta, \theta)/u_{\theta_2}(\theta, \theta) = r_0 = 1.2 \quad (8.15)$$

Por otra parte se tiene:

$$u_{\theta_1}d\theta_1 + u_{\theta_2}d\theta_2 = 0 \quad (8.16)$$

en los puntos  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . Desde (8.15) y (8.16) se obtiene directamente:

$$(-d\theta_2)/d\theta_1 = r_0 = 1.2 \quad (8.17)$$

Según (8.18) este inversor está dispuesto a perder 1.2 unidades marginales de seguridad (índice  $\theta_2$ ) para incrementar su rentabilidad (índice  $\theta_1$ ) en una unidad marginal.

Para justificar la asunción principal notar que las funciones de utilidad que satisfacen esta asunción son mucho más generales que las funciones de utilidad Coob-Douglas que requieren unas hipótesis



mucho más restrictivas (el valor constante de la *MRS* a lo largo de cada trayectoria  $\theta_2 = \lambda\theta_1$ ). Además en la utilidad Coob-Douglas, la *MRS* debe ser proporcional a  $(\theta_2/\theta_1)$ . Obviamente, las funciones Coob-Douglas (las cuales han sido recientemente propuesta por Coleman<sup>118</sup> como un enfoque suficiente capaz de reflejar cualquier clase de mapa de utilidades) son un caso particular en relación con la asunción principal.

### *El Teorema de Acotación*

De la asunción principal (junto con las asunciones A1 – A8) y las definiciones D1 – D2 aceptadas comúnmente en Economía) se puede demostrar lo siguiente:

#### *Teorema 1*

El máximo *Lagrangiano* de la utilidad del inversor  $u$  sobre la frontera eficiente  $T(\theta_1, \theta_2) = 0$  con  $\theta_1 \geq 0$  y  $\theta_2 \geq 0$  está acotado entre los puntos  $L_\infty$  y  $L$ , definidos como sigue (ver Figura 21):

$L_\infty$  es la mejor solución de programación compromiso con la métrica  $\infty$ . Es la intersección de  $\theta_1 = \theta_2$  con la curva de la frontera  $T(\theta_1, \theta_2) = 0$ . En otras palabras, este punto es el límite normalizado  $L_\infty$  del conjunto compromiso (esto quiere decir, cuando dos pesos relativos a preferencias iguales se atribuyen a los índices  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ). Así pues, este límite no depende de las preferencias del inversor.

$L$  es el punto máximo de la utilidad lineal  $V = r_0\theta_1 + \theta_2$ , sobre la frontera eficiente, es decir, la solución a  $\max (r_0\theta_1 + \theta_2)$  sujeto a  $T(\theta_1, \theta_2) = 0$ , con  $\theta_1 \geq 0$  y  $\theta_2 \geq 0$ . Si  $r_0 \neq 1$ , el límite  $L$  difiere del límite  $L_1$  del conjunto compromiso. Como diferentes inversores tienen diferentes valores de  $r_0$  (es decir, diferentes valores de sus respectivas *MRS* los cuales reflejan sus preferencias en la función de utilidad) el límite  $L$  depende de las preferencias del inversor entre rentabilidad y seguridad.

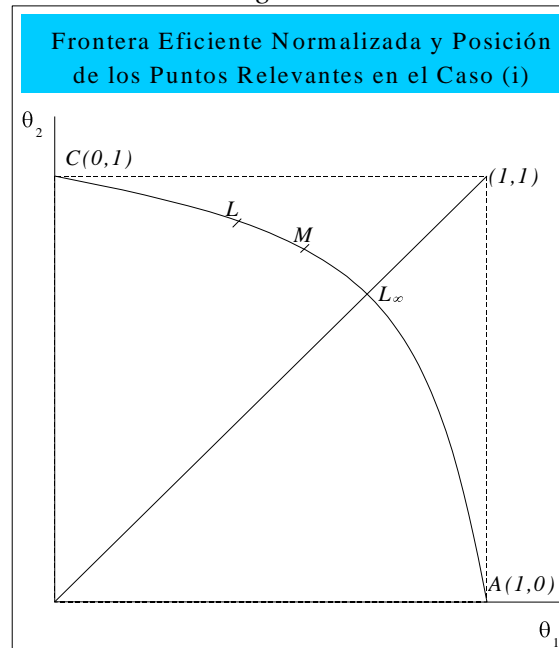
<sup>118</sup> Coleman, J. (1990) (Untitled). In: Swedberg R (Ed). *Economics and Sociology*, Princeton University Press, New Jersey, pp. 47-60.



*Demostración*

Sea  $M(\theta_{1M}, \theta_{2M})$  el máximo Lagrangiano de  $u$  [ver la Asunción A8] y  $L(\theta_{1L}, \theta_{2L})$  el máximo de  $V$ . Únicamente ocurren los dos siguientes casos no triviales: (i)  $\theta_{1L} < \theta_{1M}$ ; (ii)  $\theta_{1L} > \theta_{1M}$  (el caso trivial  $\theta_{1L} = \theta_{1M}$  directamente conduce a el cumplimiento del teorema). (Ver Figura 21)

Figura 21



- *Caso 1.*

En este caso, desde la Asunción A6 y la Asunción A7 la pendiente de  $T$  en el punto  $M$  es mayor que la pendiente en el punto  $L$  (ambos en valor absoluto). Entonces  $T_{\theta_1}(\theta_{1M}, \theta_{2M})/T_{\theta_2}(\theta_{1M}, \theta_{2M}) > r_0$ . Desde la Definición D2 (la condición de óptimo Lagrangiana de la utilidad del inversor), tenemos:

$$u_{\theta_1}(\theta_{1M}, \theta_{2M})/u_{\theta_2}(\theta_{1M}, \theta_{2M}) = T_{\theta_1}(\theta_{1M}, \theta_{2M})/T_{\theta_2}(\theta_{1M}, \theta_{2M}) > 0 \quad (8.18)$$

Ahora, desde (8.32), según la Asunción A3 (ley MRS) y la Asunción Principal, se tiene  $\theta_{1M} - \theta_{2M} < 0$ . De hecho,  $u_{\theta_1}/u_{\theta_2} = r_0$  en los puntos  $\theta_1 = \theta_2$  (Asunción Principal), entonces  $u_{\theta_1}/u_{\theta_2} > r_0$  implica que  $\theta_{1M} < \theta_{2M}$  (ley MRS). Sustituyendo las coordenadas  $(1,0)$  por  $(\theta_1, \theta_2)$  en  $(\theta_1 - \theta_2)$  el resultado es un número positivo [ $\theta_1 - \theta_2 = 1 - 0 = 1 > 0$ ]. Así pues, como



$\theta_{1M} - \theta_{2M} < 0$  y  $1 - 0 > 0$ ,  $L_\infty$  se sitúa entre  $M$  y el punto  $(1,0)$  ya que la línea  $\theta_1 - \theta_2 = 0$  intercepta la frontera en el punto  $L_\infty$ . Así pues,  $M$  se sitúa entre  $L$  y  $L_\infty$ .

- *Caso 2.*

Un razonamiento análogo conduce al mismo resultado. Por lo tanto, el *Teorema 1* queda demostrado.

### *Conclusiones*

Las diferencias principales entre el modelo presentado en la sección anterior y el presentado en esta son las siguientes:

1. El modelo anterior se refiere a un inversor estándar y por lo tanto, se basa en la asunción principal de comportamiento estándar. En contraste, el modelo presentado en esta sección viene referido a inversores con preferencias particulares. Su asunción principal refleja estas preferencias a través del parámetro  $r_0$ .
2. Los límites en el modelo anterior son  $L_1$  y  $L_\infty$  (es decir, los límites del conjunto compromiso de Yu<sup>119</sup>). En contraste, los puntos  $L_\infty$  y  $L$  (este último dependiente de  $r_0$ ) son los límites de este modelo. Cuanto menos dispersas estén las preferencias (de las preferencias del inversor estándar) más estrecho será el óptimo de utilidad en el este modelo.

---

<sup>119</sup> Yu, P. (1973) "A Class of Solutions for Joint Decision Problems", *Management Science*, 19, 936-946.



## *PARTE IV*

---

### *CASO ESTUDIO Y CONCLUSIONES*

---

Capítulo 9: Caso Estudio: Aplicación a la Bolsa de Madrid

Resumen y Conclusiones



## **CAPÍTULO 9: CASO ESTUDIO: APLICACIÓN A LA BOLSA DE MADRID**

- 9.1. Introducción
- 9.2. Cálculo de Rendimientos Mensuales
- 9.3. Cálculo de Fronteras Eficientes
- 9.4. Estimación de Óptimos para Clientes Estándar
- 9.5. Estimación de Óptimos para Clientes Agresivos
- 9.6. Estimación de Óptimos para Clientes Conservadores



## INTRODUCCIÓN

Para poder empezar con el análisis, lo primero que se necesita es situarnos en el tiempo. Los cálculos se realizaron durante el curso académico 1997-98, por ello, el periodo de análisis seleccionado fue el comprendido entre 1992-1997. De esta manera se cubría un “año económico” completo.

En el momento de comenzar el estudio, habían cotizando en el mercado continuo madrileño un total de 142 valores bursátiles, repartidos en 23 sectores diferentes como los que se indican en la Tabla 8.

Tabla 8

Sectores Contemplados en la Bolsa de Madrid a 31 de diciembre de 1997				
Aguas	Cartera	Construcción	Metálicas básicas	Servicios
Alimentación, bebidas y tabaco	Cementos y materiales de construcción	Eléctrico y gas	Otras industrias manufactureras	SIM
Aparcamientos y autopistas	Comercio	Holding	Papel y madera	Transformación productos metálicos
Automóviles	Compañías de seguros	Inmobiliarias	Petróleos	
Bancos	Comunicaciones	Maquinaria	Químicas	

Tras un estudio detallado de los datos de los que se disponía, se procedió a eliminar todos aquellos valores que no cumplieran con las siguientes características:

- El valor debe de haber estado cotizando desde el principio del periodo analizado.
- No debe de haberse fusionado con ninguna otra compañía durante el periodo de análisis, de manera que su cotización a partir del momento de la cotización se vea afectada de manera significativa.

Fruto de este tamiz previo, 104 valores resultaron aptos para aplicar el análisis de portafolio sobre ellos.



Se barajaron diversas preselecciones para sanear los datos de posibles errores por causas debidas a los datos analizados, entre ellas destacan, eliminación de valores con esperanza negativa, selección únicamente de los *stocks* que tuvieran un retorno superior al del activo sin riesgo, para el cual se consideraron las cotizaciones medias día a día del mercado secundario de las letras del tesoro entre entidades excepto el Banco de España. Finalmente, se optó por la opción de que fuese el mismo modelo el que filtrase estos valores que obviamente, no deberán entrar a formar parte de la cartera.

Los *stocks* sobre los que finalmente se comenzó a aplicar el análisis de portafolio se detallan en la Tabla 11, al final de esta sección. Los valores desde los que se partió en la realización de este análisis, que son los que estaban cotizando en el momento de dar comienzo los cálculos, se enumeran en la Tabla 9.



Tabla 9

Empresas Miembros del Mercado Continuo Madrileño a finales de 1997

Nº	SECTOR	EMPRESA	SÍMBOLO	Nº	SECTOR	EMPRESA	SÍMBOLO	Nº	SECTOR	EMPRESA	SÍMBOLO	Nº	SECTOR	EMPRESA	SÍMBOLO
1	AGUAS	SDAD GENERAL AGUAS DE BARCELONA, S.A.	AGS	41	BANCOS	BANCO DE VITORIA	VIT	81	ELECTRICO Y GAS	COMPAÑIA SEVILLANA DE ELECTRICIDAD S.A.	SEV	121	PAPEL Y MADERA	PAPELERA ESPAÑOLA, S.A.	PAP
2	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	EL AGUILA S.A.(FABR DE CERVEZAS Y MALTA	AGI	42	BANCOS	BANCO ZARAGOZANO, S.A.	ZRG	82	ELECTRICO Y GAS	UNION ELECTRICA-FENOSA S.A.	UNF	122	PAPEL Y MADERA	SARRIO S. A.	SAR
3	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	SDAD GENERAL AZUCARERA DE ESPAÑA, S.A.	AZU	43	CARTERA	GRUPO POKING PACK S.A.	GHS	83	ELECTRICO Y GAS	ELECTRA DE VIESGO, S.A.	VGO	123	PAPEL Y MADERA	SDAD. NAC. IND. APL. CEL. ESPAÑOLA, S.A. (SNACE)	SNC
4	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	BARON DE LEY, S.A.	BOL	44	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	CEMENTOS PORTLAND.	CPL	84	HOLDING	CORPORACION FINANCIERA ALBA, S.A.	ALB	124	PAPEL Y MADERA	TABLEROS DE FIERAS, S.A. (TAFSA)	TFI
5	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	BODEGAS Y BEBIDAS, S.A.	BYB	45	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	CRISTALERIA ESPAÑOLA, S.A.	CRI	85	HOLDING	CORPORACION FINANCIERA REUNDA, S.A. (COFIR)	CFR	125	PAPEL Y MADERA	UNPAPEL, S.A.	UPL
6	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	CAMPOFRO ALIMENTACION, S.A.	CFP	46	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	FINANCIERA Y MINERA, S.A.	FYM	86	HOLDING	DINAMA CAPITAL PRIVADO S.A.	DIN	126	PETROLEOS	CIA ESPAÑOLA DE PETROLEOS, S.A. (CEPSA)	CEP
7	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	COMPAÑIA VINICOLA DEL NORTE DE ESPAÑA.	CUN	47	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	HORNOS BERICOS ALBA (HISALBA)	HSB	87	HOLDING	GRUPO FOSFORERA S.A.	FFR	127	PETROLEOS	REPSOL S.A.	REP
8	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	EBRO AGRICOLAS, COMPAÑIA DE ALIMENTACION.	EBA	48	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	LAFARGE, S.A.	LFG	88	HOLDING	CORPORACION FINANCIERA DE BANESTO.	LCB	128	QUIMICAS	ENERGIA E INDUSTRIAS ARAGONESAS, S.A.	ARA
9	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	KOPE, S.A.	KOI	49	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	UNILAND CEMENTERIA S.A.	UND	89	INMOBILIARIAS	BAM, S.A. INMOBILIARIA DE CONSTRUCCIONES.	BAM	129	QUIMICAS	BAYER A.G.	BAY
10	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	PULEVA, S.A.	PUL	50	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	URALITA, S.A.	URA	90	INMOBILIARIAS	FILIO, S.A.	FIL	130	QUIMICAS	SAD ESPAÑOLA DE CARBUROS METALICOS, S.A.	CAR
11	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	BODEGAS RIOJANAS, S.A.	RIO	51	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	CIA VALENTIANA DE CEMENTOS PORTLAND, S.A.	YCP	91	INMOBILIARIAS	INMOBILIARIA ZABALEBURU, S.A.	IZB	131	QUIMICAS	ERCCOS S.A.	ECR
12	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	TABACALERA, S.A.	TAB	52	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	PORTLAND VALDERRIVAS, S.A.	VDR	92	INMOBILIARIAS	INMOBILIARIA METROPOLITANA VASCO CENTRAL, S.A.	MVC	132	QUIMICAS	FAES FABRICA ESP. PROD. QUIMICOS Y FARMAC.	FAE
13	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	VISCOFAN, S.A.	VIS	53	COMERCIO	ADOLFO DOMINGUEZ, S.A.	ADZ	93	INMOBILIARIAS	PRIMA INMOBILIARIA S.A.	FIN	133	SERVICIOS	ABENGOA, S.A.	ABG
14	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	AUTOPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.(ACESA)	ACE	54	COMERCIO	ALDEASA, S.A.	ALD	94	INMOBILIARIAS	SOTOGRADE S.A.	STG	134	SERVICIOS	GRUPO ANAYA S.A.	ANY
15	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	AUTOPISTAS DEL MARENOSTRUM, S.A.	AUM	55	COMERCIO	CENTROS COMERCIALES CONTINENTE, S.A.	CTE	95	INMOBILIARIAS	URBANIZACIONES Y TRANSPORTES, S.A. (URBAS)	UBS	135	SERVICIOS	DOGI	DGI
16	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	EUROPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.	EUP	56	COMERCIO	CORTEFEL, S.A.	CTF	96	INMOBILIARIAS	INMOBILIARIA URBIS, S.A.	URB	136	SERVICIOS	MARCO IBERICA DE DISTRIBUCIONES S.A. (MIDESA)	MDI
17	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	ESTACIONAMIENTOS SUBTERRANEOS, S.A.	HES	57	COMERCIO	FINANZAUTO, S.A.	FNZ	97	INMOBILIARIAS	VALLEHERMOSO, S.A.	VAL	137	SERVICIOS	PROSEUR S.A., CIA. DE SEGURIDAD.	PSG
18	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	IBERICA DE AUTOPISTAS, S.A. (IBERPISTAS)	IBP	58	COMERCIO	PRYCA S.A.	PRY	98	INMOBILIARIAS	INEBOS, S.A.	BES	138	SERVICIOS	SOL MELIA S.A.	SOL
19	AUTOMOVILES	CITROEN HISPANIA, S.A.	CIT	59	COMPAÑIAS DE SEGUROS	CATALANA OCCIDENTE, S.A. DE SEGUROS Y REAS.	GCO	99	MAQUINARIA	AMPER, S.A.	AMP	139	SERVICIOS	TELE PIZZA S.A.	TPZ
20	AUTOMOVILES	VOLKSWAGEN AKTIENGESELLCHFT.	YMG	60	COMPAÑIAS DE SEGUROS	CORPORACION MAPFRE, CIA INT. DE REASEGUROS.	MAP	100	MAQUINARIA	AZKOYEN S.A.	AZK	140	SM	CIA GENERAL DE INVERSIONES, S.A. S.I.M.	CGI
21	BANCOS	BANCO DE ALICANTE	ALI	61	COMPAÑIAS DE SEGUROS	MAPFRE VIDA, S.A. DE SEGUROS Y REAS. VIDA.	MPV	101	MAQUINARIA	CONSTRUCCIONES Y AUXILIAR DE FERR. MAQ. (C.A.F.)	CAF	141	TRANSFORMACION PROD METALICOS	GLOBAL STEEL WIRE, S.A.	GSW
22	BANCOS	BANCO DE ANDALUCIA, S.A.	AND	62	COMPAÑIAS DE SEGUROS	AGF UNION-FENIX, SEGUROS Y REASEGUROS, S.A.	UFE	102	MAQUINARIA	DIMETAL S.A.	DMT	142	TRANSFORMACION PROD METALICOS	TUBACEX, S.A.	TUB
23	BANCOS	CORPORACION BANCARIA DE ESPAÑA, S.A.	ARG	63	COMUNICACIONES	TELEFONICA DE ESPAÑA, S.A.	TEF	103	MAQUINARIA	GRUPO DURO FELGUERA, S.A.	MOF				
24	BANCOS	BANCO ATLANTICO, S.A.	ATL	64	CONSTRUCCION	ACS, ACTIVIDADES DE CONST Y SERVICIOS S.A.	ACS	104	MAQUINARIA	NICOLAS CORREA S.A.	NEA				
25	BANCOS	BANCO BILBAO VIZCAYA.	BBV	65	CONSTRUCCION	AGROMAN, S.A., EMPRESA CONSTRUCTORA.	AGR	105	MAQUINARIA	RADITRONICA S.A.	RAD				
26	BANCOS	BANCO CENTRAL HISPANO AMERICANO.	BCH	66	CONSTRUCCION	GRUPO ACCIONA S.A. (CUBERTAS)	ANA	106	MAQUINARIA	SDA ESPAÑOLA DEL ACUMULADOR TUDOR, S.A.	TUD				
27	BANCOS	BANKINTER, S.A.	BKT	67	CONSTRUCCION	DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.	DRC	107	MAQUINARIA	ZARDOYA OTIS, S.A.	ZOT				
28	BANCOS	BANCO ESPAÑOL DE CREDITO, S.A.	BTO	68	CONSTRUCCION	FOMENTO DE CONTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A. (FOCSA)	FCC	108	METALICAS BASICAS	ACERIALIA CORPORACION SIDERURGICA, S.A.	ACR				
29	BANCOS	BANCO DE VALENCIA, S.A.	BVA	69	CONSTRUCCION	HUARTE, S.A.	HBU	109	METALICAS BASICAS	ACERINOX, S.A.	ACX				
30	BANCOS	BANCO DE CASTILLA, S.A.	CAS	70	CONSTRUCCION	CONSTRUCCIONES LAIN S.A.	LAI	110	METALICAS BASICAS	ASTURIANA DEL ZINC S.A.	AZC				
31	BANCOS	COMMERZBANK AKTIENGESELLSCHAFT.	CBK	71	CONSTRUCCION	GRAL. OBRAS Y CONSTR. OBRASCON S.A.	OBR	111	METALICAS BASICAS	NUOVA MONTAÑA DE GIULIANO, S.A.	NMG				
32	BANCOS	BANCO DE CREDITO BALEAR S.A.	CEB	72	ELECTRICO Y GAS	HIROELECTRICA DEL CANTABRICO, S.A.	CAN	112	METALICAS BASICAS	ESPAÑOLA DEL ZINC, S.A.	ZNC				
33	BANCOS	BANCO DE GALICIA, S.A.	GAL	73	ELECTRICO Y GAS	GAS NATURAL SDG, S.A.(CATALANA GAS)	CTG	113	OTRAS INDUSTR MANUFACTURERAS	TAYEX ALGODONERA SAN ANTONIO, S.A.	ASA				
34	BANCOS	BANCO GUAZUZOANO, S.A.	GUZ	74	ELECTRICO Y GAS	ENDESA, S.A.	ELE	114	OTRAS INDUSTR MANUFACTURERAS	INDO INTERNACIONAL S.A.	IDO				
35	BANCOS	BANCO HERRERO, S.A.	HRR	75	ELECTRICO Y GAS	EMPRESA NAC. HIROELECTRICA RIBAGORZANA (ENHER)	ENH	115	OTRAS INDUSTR MANUFACTURERAS	SEDA DE BARCELONA, S.A. (LA).	SED				
36	BANCOS	BANCO PASTOR, S.A.	PAS	76	ELECTRICO Y GAS	ELECTRICAS REUNDAS DE ZARAGOZA, S.A.	ERZ	116	OTRAS INDUSTR MANUFACTURERAS	VIDRALA S.A.	VD				
37	BANCOS	BANCO POPULAR ESPAÑOL, S.A.	POP	77	ELECTRICO Y GAS	FUERZAS ELECTRICAS DE CATALUÑA, S.A. (FECSA)	FEC	117	PAPEL Y MADERA	EMPRESA NACIONAL DE CELLULOSAS, S.A. (ENCE)	ENC				
38	BANCOS	BANCO SANTANDER, S.A.	SAN	78	ELECTRICO Y GAS	GAS Y ELECTRICIDAD, S.A.	GES	118	PAPEL Y MADERA	EUROP PAPER & PACHOGINS INVEST.	EPC				
39	BANCOS	BANCO SIMON S.A.	SIM	79	ELECTRICO Y GAS	IBERDROLA, S.A.	IBE	119	PAPEL Y MADERA	IBERPAPEL GESTION, S.A.	IBG				
40	BANCOS	BANCO DE VASCONIA, S.A.	VAS	80	ELECTRICO Y GAS	SALTOS DEL NANSÁ, S.A.	NAN	120	PAPEL Y MADERA	MIQUEL Y COSTAS & MIQUEL, S.A.	MCM				



En la Tabla 10 se indican los valores que se desestimaron y la razón por la cual no entraron a formar parte del análisis.

Tabla 10

Valores Desestimados y su Causa	
ABENGOA, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
ACERALIA CORPORACION SIDERURGICA, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
ACS,ACTIVIDADES DE CONST.Y SERVICIOS S.A.	Fusión
ADOLFO DOMINGUEZ, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
AGF UNION-FENIX,SEGUROS Y REASEGUROS,S.A.	Fusión
ALDEASA, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
BANCO DE VALENCIA, S.A.	N/D
BANCO DE VITORIA.	N/D
BANCO SIMEON S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
BARON DE LEY, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
BAYER A.G.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
BODEGAS RIOJANAS, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
CATALANA OCCIDENTE,S.A.DE SEGUROS Y REAS.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
CEMENTOS PORTLAND.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
GENTROS COMERCIALES CONTINENTE, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
CIA.VALENCIANA DE CEMENTOS PORTLAND,S.A.	Fusión
COMMERZBANK AKTIENGESELLSCHAFT.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
COMPAÑIA VINICOLA DEL NORTE DE ESPAÑA.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
CORPORACION BANCARIA DE ESPAÑA, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
CORPORACION MAPFRE,CIA.INT.DE REASEGUROS.	N/D
CORTEFIEL, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
DINAMIA CAPITAL PRIVADO S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
DOGI	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
EMPRESA NACIONAL DE CELULOSAS, S.A. (ENCE)	N/D
ESTACIONAMIENTOS SUBTERRANEOS, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
FAES FABRICA ESP.PROD.QUIMICOS Y FARMAC.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
FOMENTO DE CONTRUCCIONES Y CONTRATAS,S.A. (FOCSA)	Fusión
GAS NATURAL SDG, S.A.(CATALANA GAS)	Fusión
GRUPO ACCIONA S.A. (CUBIERTAS)	Fusión
IBERPAPEL GESTION, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
INDO INTERNACIONAL S.A.	N/D
LAFARGE,S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
MAPFRE VIDA,S.A.DE SEGUROS Y REAS.VIDA.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
MIQUEL Y COSTAS & MIQUEL, S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
PAPELERA ESPAÑOLA, S.A.	N/D
SOL MELIA,S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
TELE PIZZA S.A.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92
VOLKSWAGEN AKTIENGESELLCHFT.	Comienza a Cotizar Después de 1/1/92

Como puede observarse en la tabla anterior, las causas principales por las que se han tenido que disminuir los valores desde 142 hasta 104 *stocks* son las indicadas anteriormente además de la falta de disponibilidad de datos para algunos valores.

Como paso previo a la iniciación del análisis con los valores preseleccionados, se presenta una tabla con todos los valores preseleccionados y los momentos de primer y segundo orden referentes a sus retornos mensuales calculados para la totalidad del periodo analizado.





Tabla 11

Valores Considerados en el Análisis y Momentos de Primer y Segundo Orden Referentes a sus Retornos Mensuales Calculados para la Totalidad del Periodo Analizado (1992-1997)					
Nº	SECTOR	VALOR	SÍMBOLO	ESPERANZA	DESVIACIÓN TÍPICA
1	AGUAS	SDAD.GENERAL AGUAS DE BARCELONA, S.A.	AGS	0.016713	0.086724
2	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	EL AGUILA,S.A.(FABR.DE CERVEZAS Y MALTA.	AGI	-0.005246	0.115520
3	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	SDAD.GENERAL AZUCARERA DE ESPAÑA, S.A.	AZU	0.012085	0.074811
4	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	BODEGAS Y BEBIDAS, S.A.	BYB	0.014025	0.107663
5	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	CAMPOFRIO ALIMENTACION,S.A.	CPF	0.013469	0.107134
6	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	EBRO AGRICOLAS, COMPAÑIA DE ALIMENTACION.	EBA	0.017043	0.093324
7	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	KOIFE, S.A.	KOI	0.016179	0.065262
8	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	PULEVA,S.A.	PUL	0.030282	0.147978
9	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	TABACALERA, S.A.	TAB	0.026792	0.110636
10	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	VISCOFAN, S.A.	VIS	0.022562	0.146951
11	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	AUTOPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.(ACESA)	ACE	0.032572	0.088162
12	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	AUTOPISTAS DEL MARE NOSTRUM, S.A.	AUM	0.020310	0.085265
13	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	EUROPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.	EUR	0.048537	0.146231
14	APARCAMIENTOS Y AUTOPISTAS	IBERICA DE AUTOPISTAS, S.A. (IBERPISTAS)	IBP	0.026618	0.086931
15	AUTOMOVILES	CITROEN HISPANIA, S.A.	CIT	0.017304	0.124665
16	BANCOS	BANCO DE ALICANTE.	ALI	-0.002246	0.031563
17	BANCOS	BANCO DE ANDALUCIA, S.A.	AND	0.022650	0.063945
18	BANCOS	BANCO ATLANTICO, S.A.	ATL	0.009594	0.036689
19	BANCOS	BANCO BILBAO VIZCAYA.	BBV	0.049411	0.091318
20	BANCOS	BANCO CENTRAL HISPANO AMERICANO.	BCH	0.026716	0.091522
21	BANCOS	BANKINTER,S.A.	BKT	0.038537	0.093229
22	BANCOS	BANCO ESPAÑOL DE CREDITO S.A.	BTO	0.025610	0.183036
23	BANCOS	BANCO DE CASTILLA, S.A.	CAS	0.024536	0.050666
24	BANCOS	BANCO DE CREDITO BALEAR S.A.	CBL	0.018870	0.098203
25	BANCOS	BANCO DE GALICIA, S.A.	GAL	0.022789	0.054854
26	BANCOS	BANCO GUIPUZCOANO, S.A.	GUI	0.013011	0.056455
27	BANCOS	BANCO HERRERO, S.A.	HRR	0.033378	0.128875
28	BANCOS	BANCO PASTOR, S.A.	PAS	0.018717	0.072824
29	BANCOS	BANCO POPULAR ESPAÑOL, S.A.	POP	0.045024	0.096676
30	BANCOS	BANCO SANTANDER, S.A.	SAN	0.058377	0.110423
31	BANCOS	BANCO DE VASCONIA, S.A.	VAS	0.025433	0.092944
32	BANCOS	BANCO ZARAGOZANO, S.A.	ZRG	0.021168	0.065807
33	CARTERA	GRUPO PICKING PACK,S.A.	GHS	0.015208	0.309938
34	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	CRISTALERIA ESPAÑOLA, S.A.	CRI	0.027496	0.123430
35	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	FINANCIERA Y MINERA, S.A.	FYM	-0.003202	0.169488
36	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	HORNOS IBERICOS ALBA. (HISALBA)	HSB	0.020370	0.157379
37	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	UNILAND CEMENTERA S.A.	UND	0.027297	0.136997
38	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	URALITA, S.A.	URA	0.019209	0.146349
39	CEMENTOS Y MATERIALES DE CONST	PORTLAND VALDERRIVAS, S.A.	VDR	0.011414	0.103219
40	COMERCIO	FINANZAUTO, S.A.	FNZ	0.018291	0.115106
41	COMERCIO	PRYCA S.A.	PRY	0.015675	0.078668
42	COMUNICACIONES	TELEFONICA DE ESPAÑA,S.A.	TEF	0.026643	0.084123
43	CONSTRUCCION	AGROMAN, S.A., EMPRESA CONSTRUCTORA.	AGR	0.371996	2.692824
44	CONSTRUCCION	DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.	DRC	0.031009	0.125485
45	CONSTRUCCION	HUARTE, S.A.	HHU	0.276004	2.165295
46	CONSTRUCCION	CONSTRUCCIONES LAIN S.A.	LAI	0.031632	0.160957
47	CONSTRUCCION	GRAL. OBRAS Y CONSTR. OBRASCON S.A.	OBR	0.056010	0.148417
48	ELECTRICO Y GAS	HIDROELECTRICA DEL CANTABRICO, S.A.	CAN	0.028072	0.081097
49	ELECTRICO Y GAS	ENDESA, S.A.	ELE	0.037576	0.089399
50	ELECTRICO Y GAS	EMPRESA NAC.HIDROELECTRICA RIBAGORZANA.(ENHER)	ENH	0.011227	0.080199



Tabla 63 Continuación

Valores Considerados en el Análisis y Momentos de Primer y Segundo Orden Referentes a sus Retornos Mensuales Calculados para la Totalidad del Periodo Analizado (1992-1997)					
Nº	SECTOR	VALOR	SÍMBOLO	ESPERANZA	DESVIACION TÍPICA
51	ELECTRICO Y GAS	ELECTRICAS REUNIDAS DE ZARAGOZA, S.A.	ERZ	0.043021	0.111511
52	ELECTRICO Y GAS	FUERZAS ELECTRICAS DE CATALUÑA, S.A. (FECSA)	FEC	0.025435	0.099853
53	ELECTRICO Y GAS	GAS Y ELECTRICIDAD, S.A.	GES	0.030519	0.085573
54	ELECTRICO Y GAS	IBERDROLA, S.A.	IBE	0.045214	0.103411
55	ELECTRICO Y GAS	SALTOS DEL NANSA, S.A.	NAN	0.030278	0.109249
56	ELECTRICO Y GAS	COMPANÍA SEVILLANA DE ELECTRICIDAD S.A.	SEV	0.034070	0.094341
57	ELECTRICO Y GAS	UNION ELECTRICA-FENOSA S.A.	UNF	0.040124	0.099766
58	ELECTRICO Y GAS	ELECTRA DE VIESGO, S.A.	VGO	0.029807	0.107708
59	HOLDING	CORPORACION FINANCIERA ALBA, S.A.	ALB	0.025909	0.091196
60	HOLDING	CORPORACION FINANCIERA REUNIDA.S.A. (COFIR)	CFR	0.033473	0.090587
61	HOLDING	GRUPO FOSFORERA S.A.	FFR	-0.018670	0.127788
62	HOLDING	CORPORACION IND.FINANCIERA DE BANESTO.	LCB	0.005518	0.159169
63	INMOBILIARIAS	BAMI.S.A.INMOBILIARIA DE CONSTRUCCIONES.	BAM	0.020344	0.199141
64	INMOBILIARIAS	FILO, S.A.	FIL	0.000697	0.128784
65	INMOBILIARIAS	INMOBILIARIA ZABALBURU, S.A.	IZB	0.002450	0.088823
66	INMOBILIARIAS	INMOBILIARIA METROPOLITANA VASCO CENTRAL. S.A.	MVC	0.015358	0.091326
67	INMOBILIARIAS	PRIMA INMOBILIARIA S.A.	PIN	0.005634	0.223474
68	INMOBILIARIAS	SOTOGRADE S.A.	STG	0.009686	0.144341
69	INMOBILIARIAS	URBANIZACIONES Y TRANSPORTES, S.A. (URBAS)	UBS	-0.000787	0.173052
70	INMOBILIARIAS	INMOBILIARIA URBIS, S.A.	URB	0.020440	0.142596
71	INMOBILIARIAS	VALLEHERMOSO, S.A.	VAL	0.022745	0.125994
72	INMOBILIARIAS	INBESOS, S.A.	BES	0.013783	0.124030
73	MAQUINARIA	AMPER, S.A.	AMP	0.051091	0.213394
74	MAQUINARIA	AZKOYEN S.A.	AZK	0.046741	0.134648
75	MAQUINARIA	CONSTRUCCIONES Y AUXILIAR DE FERR. MAQ. (C.A.F.)	CAF	0.001232	0.095747
76	MAQUINARIA	DIMETAL S.A.	DMT	-0.007798	0.212077
77	MAQUINARIA	GRUPO DURO FELGUERA, S.A.	MDF	0.017128	0.148813
78	MAQUINARIA	NICOLAS CORREA S.A.	NEA	0.043281	0.253743
79	MAQUINARIA	RADIOTRONICA S.A.	RAD	0.026883	0.200758
80	MAQUINARIA	SDA.ESPAÑOLA DEL ACUMULADOR TUDOR, S.A.	TUD	0.004021	0.161811
81	MAQUINARIA	ZARDOYA OTIS, S.A.	ZOT	0.092546	0.170491
82	METALICAS BASICAS	ACERINOX, S.A.	ACX	0.030701	0.103277
83	METALICAS BASICAS	ASTURIANA DEL ZINC S.A.	AZC	0.013504	0.151121
84	METALICAS BASICAS	NUEVA MONTAÑA DE QUIJANO, S.A.	NMQ	0.005950	0.126478
85	METALICAS BASICAS	ESPAÑOLA DEL ZINC, S.A.	ZNC	0.020456	0.179354
86	OTRAS INDUSTR MANUFACTURERAS	TAVEX ALGODONERA SAN ANTONIO, S.A.	ASA	0.021999	0.220546
87	OTRAS INDUSTR MANUFACTURERAS	SEDA DE BARCELONA, S.A. (LA)	SED	0.029732	0.326192
88	OTRAS INDUSTR MANUFACTURERAS	VIDRALA S.A.	VID	0.041521	0.132024
89	PAPEL Y MADERA	EUROP.PAPER A.PACKAGINS INVEST.	EPC	0.024269	0.281241
90	PAPEL Y MADERA	SARRIO S.A.	SAR	-0.001006	0.135433
91	PAPEL Y MADERA	SDAD. NAC. IND. APL. CEL. ESPAÑOLA, S.A. (SNIACE)	SNC	0.023744	0.209786
92	PAPEL Y MADERA	TABLEROS DE FIBRAS, S.A. (TAFISA)	TFI	0.003743	0.131037
93	PAPEL Y MADERA	UNIPAPEL, S.A.	UPL	0.008504	0.107641
94	PETROLEOS	CIA.ESPAÑOLA DE PETROLEOS, S.A. (CEPSA)	CEP	0.012771	0.079411
95	PETROLEOS	REPSOL S.A.	REP	0.021408	0.080192
96	QUIMICAS	ENERGIA E INDUSTRIAS ARAGONESAS, S.A.	ARA	0.019524	0.117336
97	QUIMICAS	SAD.ESPAÑOLA DE CARBUROS METALICOS, S.A.	CAR	0.020359	0.087936
98	QUIMICAS	ERCROS S.A.	ECR	0.003842	0.212519
99	SERVICIOS	GRUPO ANAYA S.A.	ANY	-0.009183	0.099447
100	SERVICIOS	MARCO IBERICA DE DISTRIBUCIONES S.A. (MIDESA)	MID	0.168729	0.742156
101	SERVICIOS	PROSEGUR S.A., CIA. DE SEGURIDAD.	PSG	0.052105	0.147164
102	SIM	CIA.GENERAL DE INVERSIONES,S.A.S.I.M.	CGI	0.758797	3.282496
103	TRANSFORMACION PROD METALICOS	GLOBAL STEEL WIRE, S.A.	GSW	0.061237	0.548057
104	TRANSFORMACION PROD METALICOS	TUBACEX,S.A.	TUB	0.032613	0.196677

### CÁLCULO DE RENDIMIENTOS MENSUALES

El primer cálculo que se ha realizado a partir de las primitivas cotizaciones diarias es el de estimación de los rendimientos mensuales. Para la estimación de este dato, se ha optado por una técnica *idealizadora* del comportamiento del mercado que paso a explicar a continuación.

La fórmula que se ha utilizado para el cálculo de los rendimientos mensuales es la siguiente:



$$R_{it} = \frac{E_{it} + A_{it} + D_{it} - B_{it}}{B_{it}} \quad (9.1)$$

donde:

$E_{it}$  = Cotización *idealizada* del valor  $i$  correspondiente al último día del mes  $t$ .

$A_{it}$  = Cotización media del derecho de suscripción del valor  $i$  valorado en el mes  $t$  (mes en donde el derecho deja de cotizar).

$D_{it}$  = Dividendos brutos repartidos por la entidad  $i$  en el mes  $t$ .

$B_{it}$  = Cotización *idealizada* del valor  $i$  correspondiente al primer día del mes  $t$ .

$R_{it}$  = Retornos *idealizados* correspondientes al valor  $i$  en el mes  $t$ .

El término retornos *idealizados* se está refiriendo a que éstos están calculados a partir de unas cotizaciones teóricas que no corresponden con las que tuvieron efectivamente lugar los días primero y último de cada mes. Para la obtención de estos valores se ha utilizado la siguiente regresión lineal para cada uno de los meses del periodo analizado.

$$P_{kit} = a_{it} + b_{it}d_i + \varepsilon_{it} \quad (9.2)$$

siendo:  $1 \leq i \leq 104$

$1 \leq t \leq 72$

$1 \leq k \leq 31$ , para los meses de enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre, diciembre.

$1 \leq k \leq 30$ , para los meses de abril, junio, septiembre, noviembre.

$1 \leq k \leq 28$ , para los meses de febrero.

donde:

$a_{it}$  = coeficiente independiente de la regresión lineal correspondiente al mes  $t$  y al valor  $i$ .

$b_{it}$  = coeficiente dependiente de  $d$  de la regresión lineal correspondiente al mes  $t$  y al valor  $i$ .



$d_i$  = variable independiente de la regresión lineal referente al valor  $i$ , en este caso, el número del día del mes  $t$  (1-31) del cual queremos conocer su valor *idealizado*.

$\varepsilon$  = coeficiente de error aleatorio para el valor  $i$  en el mes  $t$ .

$P_{kit}$  = Precio teórico del valor  $i$  en el día  $k$  del mes  $t$ .

La razón de los valores *idealizados* es eliminar posibles volatilidades que pudieran darse en los días primero y último de cada mes que, de hacerlo directamente sin idealizar, serían las únicas cotizaciones que se considerarían en el estudio. De esta forma, todas las cotizaciones del mes participan en la elaboración de una aproximación lineal a la tendencia de los precios y a partir de todas ellas, se estiman las plusvalías que se generan en el mes.

Así se obtienen las plusvalías *idealizadas* que tuvieron lugar durante los meses que contempla el estudio. Por tanto, definiendo las plusvalías del valor  $i$  en el mes  $t$  como  $L_{it}$ :

$$L_{it} = E_{it} - B_{it} \quad (9.3)$$

la ecuación (9.1) se convierte en :

$$R_{it} = \frac{L_{it} + A_{it} + D_{it}}{B_{it}} \quad (9.4)$$

Por lo cual, los retornos mensuales correspondientes a cada uno de los valores que forman parte del estudio se calculan mediante la adición de las plusvalías *idealizadas* (cuyo cálculo ya se ha explicado anteriormente), el valor de cotización medio de los derechos de suscripción y los dividendos repartidos por las sociedades. El resultado de esta suma se divide por la cotización *idealizada* al principio del periodo de cálculo, es decir, al principio del mes considerado. Con ello, se obtiene una estimación del rendimiento mensual de cada valor, neta de la volatilidad propia de los datos primero y último de cada mes. El número total de estimaciones de este tipo que se manejan en este trabajo es de 72 (mensualidades)  $\times$  104 (valores) = 7488 estimaciones.



A modo de ejemplo (ya que la totalidad de los datos se presentarán formando parte del Apéndice 1), en la Tabla 12

pueden verse las estimaciones de los rendimientos netos de volatilidad para los cinco primeros valores considerados en el estudio<sup>120</sup>. Las fórmulas de la aplicación utilizada que se han empleado para el cálculo efectuado son:

=PENDIENTE(rango de datos); esta fórmula se utilizó para calcular la pendiente  $d_i$  de la recta de regresión utilizada en la estimación de las cotizaciones *ideales* para cada mes y cada *stock*.

=INTERSECCION.EJE(rango de datos); esta fórmula se utilizó para calcular la ordenada en el origen  $a_{it}$  de la recta de regresión utilizada en la estimación de las cotizaciones *ideales* para cada mes y cada *stock*.

A partir de esas dos fórmulas, y utilizando la misma hoja de cálculo, se procede de la siguiente manera:

a) *Obtención de la Revalorización del Stock al Final de Cada Periodo Mensual ( $L_{it}$ ).*

La revalorización *idealizada* al final de cada mensualidad se obtiene mediante la siguiente operación:

=PENDIENTE(rango de datos)  $\times k_{max}$ , siendo  $k_{max}$  = valor máximo que puede tomar  $k$  en cada uno de los meses (número de días de cada mes).

b) *Obtención de los Retornos Mensuales ( $L_{it} + A_{it} + D_{it}$ ).*

Al precio calculado en a), se le deben adicionar los derechos de suscripción y el reparto de dividendos de la manera que anteriormente se ha indicado.

c) *Obtención de los Retornos Mensuales Normalizados ( $R_{it}$ ).*

<sup>120</sup> Todos los cálculos explicados en este apartado se realizaron con Microsoft® Excel 97.



Se divide el resultado obtenido en b) por el valor previamente calculado =INTERSECCION.EJE(rango de datos). Con esto se consiguen los retornos mensuales en tanto por uno. Estos son los datos que nos servirán como *input* para la siguiente fase del cálculo.

Tabla 12

Rendimientos Netos de Volatilidad					
	1	2	3	4	5
	AGUAS	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO	ALIMENTACION, BEBIDAS Y TABACO
	SDAD.GENERAL AGUAS DE BARCELONA, S.A.	EL AGUILA, S.A. (FABR. DE CERVEZAS Y MALTA.	SDAD.GENERAL AZUCARERA DE ESPAÑA, S.A.	BODEGAS Y BEBIDAS, S.A.	CAMPOFRIO ALIMENTACION,S.A.
	AGS	AGI	AZU	BYB	CPF
ene-92	0.126685	0.106400	-0.030190	-0.138650	-0.145570
feb-92	0.060615	-0.002950	-0.062053	-0.014009	0.023671
mar-92	-0.075933	0.254642	0.038570	-0.059381	-0.110860
abr-92	-0.024873	-0.044604	-0.056045	-0.058380	-0.041672
may-92	0.070258	-0.001592	0.017928	0.064485	0.039297
jun-92	-0.066613	-0.123357	-0.043025	0.009013	-0.109926
jul-92	-0.097028	-0.364608	-0.058812	0.067299	-0.154244
ago-92	-0.062906	-0.119479	-0.043159	-0.204168	0.083708
sep-92	-0.208069	-0.022278	-0.016191	-0.161093	-0.060346
oct-92	0.308739	0.178702	-0.160202	-0.011656	0.016514
nov-92	0.091853	0.055867	-0.099093	-0.064426	-0.048515
dic-92	0.226760	-0.058342	0.085883	-0.006297	0.038801
ene-93	0.197476	0.023442	-0.063595	0.049125	0.170972
feb-93	-0.037495	0.019461	0.011279	0.035306	-0.098506
mar-93	-0.020015	0.145308	-0.022345	-0.024027	0.063018
abr-93	-0.005582	0.020787	0.007318	0.008171	0.329209
may-93	-0.021088	0.020326	0.032858	0.005626	-0.022398
jun-93	0.042142	-0.055618	0.001880	0.000000	-0.069351
jul-93	-0.000793	0.027691	-0.030155	-0.037625	-0.036605
ago-93	0.079689	0.430168	0.198630	0.108334	0.221924
sep-93	-0.137603	-0.147195	-0.029980	-0.062844	-0.041373
oct-93	0.102534	0.006605	0.062492	-0.011277	-0.029991
nov-93	-0.064993	0.179460	0.017980	-0.093458	-0.051132
dic-93	0.155879	-0.023014	0.103848	0.369011	0.042283
ene-94	0.140834	0.127489	0.039527	-0.020892	0.127929
feb-94	-0.068828	-0.031050	0.118310	0.058744	-0.043797
mar-94	0.010081	-0.015040	0.007911	0.027550	-0.025294
abr-94	-0.064525	0.035114	0.068815	0.018299	-0.058398
may-94	0.094889	0.119935	0.122583	0.041984	0.246609
jun-94	-0.169456	-0.117711	0.033028	0.335830	-0.062892
jul-94	0.021540	-0.059397	0.019138	-0.049022	0.097389
ago-94	-0.073515	-0.127198	-0.048810	-0.030115	-0.022128
sep-94	-0.031527	-0.014028	0.162207	0.138113	0.013567
oct-94	0.018747	-0.203538	-0.074651	-0.050896	-0.091092
nov-94	0.058962	0.184451	-0.048803	0.027933	-0.032984
dic-94	-0.128754	-0.149747	-0.152830	-0.035559	-0.091111
ene-95	0.015271	-0.096292	-0.022467	-0.016243	-0.023032
feb-95	0.009068	-0.014443	-0.013498	0.003030	-0.105604
mar-95	-0.003457	-0.142310	0.059656	-0.008742	-0.215814
abr-95	0.052720	-0.035106	0.087165	0.016423	-0.079490
may-95	0.135326	-0.016742	-0.060339	-0.008714	0.153021
jun-95	0.016751	-0.043440	0.011663	0.002305	-0.024442
jul-95	0.029543	-0.023152	0.180317	0.019588	0.009074
ago-95	-0.008712	-0.002935	-0.065858	0.010961	-0.063361
sep-95	-0.040280	0.013052	-0.044247	-0.151797	-0.108195
oct-95	-0.006818	-0.070001	0.198420	0.014787	-0.049258
nov-95	0.028364	-0.135604	0.039079	0.013944	0.016890
dic-95	0.001103	-0.152632	-0.002945	0.026870	-0.090243
ene-96	0.051745	-0.120648	-0.078407	0.003648	0.078405
feb-96	0.066561	0.013421	-0.019888	0.036364	-0.015825
mar-96	0.008614	0.102777	0.004393	-0.002933	0.004267
abr-96	0.091494	0.139624	0.102494	-0.004231	-0.006788
may-96	0.064250	-0.041131	0.007864	-0.005653	-0.075399
jun-96	0.065881	0.109296	0.042085	-0.005247	0.125538
jul-96	-0.008212	-0.076265	-0.017402	0.022668	0.090601
ago-96	-0.026583	-0.024434	-0.006398	-0.025718	0.008640
sep-96	-0.021497	-0.075044	0.116555	-0.035462	-0.042748
oct-96	0.061457	-0.066895	0.059104	-0.007370	0.032151
nov-96	0.002589	0.080893	0.046149	0.078116	-0.012047
dic-96	0.029385	-0.045221	0.163896	0.067888	0.292614
ene-97	0.112168	0.075166	-0.008689	0.240223	0.159104
feb-97	-0.052265	0.038774	0.002970	-0.002889	0.128988
mar-97	-0.056667	-0.050305	0.019249	-0.050130	0.053544
abr-97	0.059882	0.067700	0.062742	0.048790	-0.024191
may-97	0.033101	0.133491	0.001349	0.167966	0.022971
jun-97	0.033831	-0.028422	0.027762	0.526091	0.244001
jul-97	-0.021341	0.116815	-0.015256	-0.037447	0.054415
ago-97	-0.080627	-0.088269	0.022473	-0.021534	-0.001896
sep-97	0.110449	-0.027447	-0.015031	-0.002274	0.081713
oct-97	-0.053366	-0.137983	-0.126032	-0.049714	0.063879
nov-97	0.035332	0.016257	0.003175	-0.039265	-0.004618
dic-97	-0.000799	-0.025543	-0.009434	-0.025609	0.227155



## CÁLCULO DE FRONTERAS EFICIENTES

---

### Introducción

Para la contrastación de la metodología que aquí se aplica, se han comparado diversos sistemas de inversión. Algunos de éstos, están basados en la elección de portafolios mediante la programación compromiso. Otros, se basan en sencillas reglas heurísticas<sup>121</sup>. Generalmente, en la literatura de selección de carteras, los nuevos sistemas de inversión se comparan con una selección aleatoria de *stocks* y se comprueba si el nuevo sistema de elección puede mejorar el rendimiento aleatorio de una forma continuada y consistente<sup>122</sup>. Con este objetivo como meta, se decide contrastar dos sistemas de inversión que siguen la metodología compromiso, con otros sistemas heurísticos o aleatorios. En este trabajo únicamente nos vamos a centrar en la obtención de los rendimientos realizados del sistema compromiso de selección de portafolios. El análisis de éstos rendimientos queda fuera del objetivo de esta tesis, dejándose para ulteriores investigaciones.

Los dos sistemas compromiso que se deciden evaluar cuentan con las siguientes características:

- *Sistema A*: portafolio selección **Compromiso Buy & Hold (CBH)**.

El portafolio *CBH* se obtiene aplicando la metodología compromiso sobre los datos de los retornos antes calculados teniendo en cuenta los 60 meses que van desde enero de 1992 hasta diciembre de 1996. Este portafolio *CBH* se mantendrá durante todo el año 1997. Año sobre el que se va a analizar la eficacia del sistema de selección.

---

<sup>121</sup> Gigerenzer G. and Todd P.M. (1999) *Simple heuristics that make us smart*, Oxford University Press, New York.

<sup>122</sup> Reilly, F. (1985) *Investment Analysis and Portfolio Management*, The Dryden Press, New York, p. 198.



- *Sistema B*: selección **Compromiso** con **Ajustes Dinámicos** mensuales (*CAD*).

El portafolio *CAD* se recalcula cada mensualidad de manera que el correspondiente a enero de 1997 coincide con el *CBH* ( $CAD_1 = CBH$ ). El correspondiente a febrero ( $CAD_2$ ) de 1997 se calculará utilizando los 60 datos mensuales provenientes de los meses de febrero de 1992 a enero de 1997 (60 meses). El  $CAD_3$  o portafolio *CAD* correspondiente a marzo se calculará teniendo en cuenta los datos de rendimientos mensuales de los meses que van desde marzo de 1992 hasta febrero de 1997. Y así sucesivamente hasta llegar al  $CAD_{12}$  que se habrá calculado utilizando los meses desde diciembre de 1992 hasta noviembre de 1997. Se supone que en esta estrategia se ajusta la cartera mensualmente vendiendo y comprando las cantidades oportunas de los valores seleccionados de manera que se obtenga el nuevo portafolio óptimo. Estas compras y ventas se considera que se realizan el primer día de cotización de cada mes (desde enero hasta diciembre de 1997). Se han dejado de considerar los costes transaccionales.

### *Cálculo Detallado de las Fronteras Eficientes*

Para la obtención de las 12 fronteras eficientes (una para cada mes de 1997) se siguieron los siguientes pasos:

#### *Primer paso:*

Obtención de los doce vectores  $1 \times 104$  de medias aritméticas de los rendimientos mensuales normalizados.

#### *Segundo paso:*

Obtención de las doce matrices  $104 \times 104$  de varianzas y covarianzas de los rendimientos mensuales normalizados.

A modo de ejemplo, en las siguientes tablas: Tabla 13, Tabla 14 y Tabla 14 Continuación, puede verse el vector de medias y la matriz de





varianzas y covarianzas correspondientes la primera mensualidad de 1997, calculada, como ya se ha indicado con los datos de los retornos mensuales de los meses de enero de 1992 hasta diciembre de 1996.

Tabla 13

Vector de Esperanzas											
Nº	SIMBOLO	ESPERANZA DE LOS RETORNOS	Nº	SIMBOLO	ESPERANZA DE LOS RETORNOS	Nº	SIMBOLO	ESPERANZA DE LOS RETORNOS	Nº	SIMBOLO	ESPERANZA DE LOS RETORNOS
1	AGS	0.018044	31	VAS	0.018544	61	FFR	-0.012242	91	SNC	0.012396
2	AGI	-0.007799	32	ZRG	0.016149	62	LCB	-0.005513	92	TFI	-0.003393
3	AZU	0.014981	33	GHS	0.002485	63	BAM	-0.001745	93	UPL	0.004888
4	BYB	0.004260	34	CRI	0.030036	64	FIL	-0.014244	94	CEP	0.010959
5	CPF	-0.000589	35	FYM	-0.020039	65	IZB	-0.011986	95	REP	0.019519
6	EBA	0.014561	36	HSB	0.018864	66	MVC	0.010646	96	ARA	0.012770
7	KOI	0.012085	37	UND	0.024784	67	PIN	0.001258	97	CAR	0.021798
8	PUL	0.017092	38	URA	0.012710	68	STG	0.007322	98	ECR	-0.008934
9	TAB	0.015475	39	VDR	0.006639	69	UBS	-0.014913	99	ANY	-0.015366
10	VIS	0.012322	40	FNZ	0.010900	70	URB	0.002373	100	MID	0.194969
11	ACE	0.034324	41	PRY	0.018747	71	VAL	0.019002	101	PSG	0.056839
12	AUM	0.020152	42	TEF	0.023792	72	BES	0.013684	102	CGI	0.503299
13	EUR	0.063173	43	AGR	0.435044	73	AMP	0.057996	103	GSW	0.075416
14	IBP	0.025769	44	DRC	0.025875	74	AZK	0.050114	104	TUB	0.021390
15	CIT	0.008062	45	HHU	0.027606	75	CAF	-0.001017			
16	ALI	0.000451	46	LAI	0.016579	76	DMT	-0.004906			
17	AND	0.020776	47	OBR	0.040764	77	MDF	0.017056			
18	ATL	0.006147	48	CAN	0.028660	78	NEA	0.030088			
19	BBV	0.045014	49	ELE	0.041112	79	RAD	0.025492			
20	BCH	0.017521	50	ENH	0.012740	80	TUD	-0.009835			
21	BKT	0.037851	51	ERZ	0.049395	81	ZOT	0.095353			
22	BTO	0.023394	52	FEC	0.028695	82	ACX	0.033145			
23	CAS	0.018910	53	GES	0.031295	83	AZC	0.002575			
24	CBL	0.015957	54	IBE	0.051502	84	NMQ	0.002140			
25	GAL	0.020811	55	NAN	0.034218	85	ZNC	0.005911			
26	GUI	0.005321	56	SEV	0.037261	86	ASA	0.018148			
27	HRR	0.033110	57	UNF	0.043914	87	SED	0.040380			
28	PAS	0.012066	58	VGO	0.027285	88	VID	0.039680			
29	POP	0.044286	59	ALB	0.025265	89	EPC	-0.002089			
30	SAN	0.058100	60	CFR	0.024516	90	SAR	-0.006578			

Para el cálculo de estos valores se ha utilizado de nuevo la aplicación Microsoft® Excel 97. La fórmula que ha permitido obtener la media aritmética de los rendimientos ha sido: =PROMEDIO(rango de rendimientos). Por otro lado, la fórmula que ha permitido obtener la matriz de varianzas y covarianzas ha sido: =COVAR(primer rango de rendimientos; segundo rango de rendimientos). Cuando lo que se quiere obtener es la varianza de un valor, los dos rangos de rendimientos coincidirán.









*Tercer paso:*

Una vez se dispone de las matrices de covarianzas y esperanzas, se procede a introducir los datos en una aplicación o programa de optimización que sea capaz de calcular el portafolio con mínima varianza para una esperanza dada. Los detalles del programa que se ha utilizado en este trabajo pueden verse en la Figura 22.

*Figura 22*



Este programa *LINGO*, tiene una colección de modelos-ejemplo entre los que se encuentra el modelo de optimización utilizado en este trabajo. Si el modelo no estuviera en el conjunto ejemplos (*samples*), se debería programar la aplicación para que realizara la optimización que nos interesa.

La optimización que aquí se estudia aparece, como se acaba de indicar, entre los modelos-ejemplo de la aplicación. El problema reside en que el modelo-ejemplo que trata la aplicación es para una matriz de covarianzas de  $3 \times 3$ , por lo que se tuvo que estudiar las características del programa y realizar algunos cambios en el programa de Markowitz para que pudiera optimizar una población de  $104 \times 104$  valores.

El modelo original, tal como se presenta en el programa *LINGO* es el siguiente.

```
MODEL:  
! GENPRT: Generic Markowitz portfolio;  
SETS:  
  ASSET/1..3/: RATE, UB, X;  
  COVMAT( ASSET, ASSET): V;  
ENDSETS
```



```
DATA:
! The data;
! Expected growth rate of each asset;
RATE = 1.3 1.2 1.08;
! Upper bound on investment in each;
UB = .75 .75 .75;
! Covariance matrix;
V = 3 1 -.5
    1 2 -.4
    -.5 -.4 1;
! Desired growth rate of portfolio;
GROWTH = 1.12;
ENDDATA

! The model;
! Min the variance;
[ VAR] MIN = @SUM( COVMAT( I, J):
    V( I, J) * X( I) * X( J));
! Initial budget;
[ BUD] @SUM( ASSET: X) = 1;
! Upper bounds on each;
@FOR( ASSET: @BND( 0, X, UB));
! Desired value or return after 1 period;
[ RET] @SUM( ASSET: RATE * X) >= GROWTH;
END
```

Partiendo de este modelo, y realizando una serie de cambios que se comentarán mas adelante se llegó al modelo adecuado para la optimización de nuestro sistema. El programa de optimización que se utilizó fue el siguiente:

```
MODEL:
! GENPRT: Generic Markowitz portfolio;
SETS:
ASSET/1..104/: RATE, UB, X;
COVMAT( ASSET, ASSET): V;
ENDSETS
DATA:
! The data;
! Expected growth rate of each asset;
RATE = @IMPORT(D00.XLS, EXP_RET);
! Upper bound on investment in each;
UB = @IMPORT(D00.XLS, UPP_BOU);
! Covariance matrix;
V = @IMPORT(D00.XLS, COV_MAT);
```



```
! Desired growth rate of portfolio;
GROWTH = 0;

ENDDATA

! The model;
! Min the variance;
[ VAR] MIN = @SUM( COVMAT( I, J):
                V( I, J) * X( I) * X( J));
! Initial budget;
[ BUD] @SUM( ASSET: X) = 1;
! Upper bounds on each;
@FOR( ASSET: @BND( 0, X, UB));
! Desired value or return after 1 period;
[ RET] @SUM( ASSET: RATE * X) = GROWTH;
END
```

Este es el programa que corresponde al cálculo para la primera frontera eficiente, la aplicable a enero de 1997.

Repasando las alteraciones realizadas al programa se detectan las siguientes variaciones:

a) En la cuarta línea se observa el siguiente cambio:

Modelo primitivo: ASSET/1..3/: RATE, UB, X;

Modelo adaptado: ASSET/1..104/: RATE, UB, X;

Este cambio se debe a que es en esta línea en donde se define el rango de la matriz de varianzas y covarianzas, matriz de esperanzas y matriz de límite superior de los pesos.

b) En el apartado a la introducción de los datos en el programa, existen importantes modificaciones.

La razón de estas modificaciones reside en que la ventana de programación de *LINGO*, tiene una amplitud limitada. Así pues, si las matrices de datos son excesivamente grandes, deben guardarse en archivos separados, estableciendo un enlace entre el programa en *LINGO* y el archivo de datos. De esta manera tenemos:

Modelo primitivo:



```
DATA:
! The data;
! Expected growth rate of each asset;
RATE = 1.3 1.2 1.08;
! Upper bound on investment in each;
UB = .75 .75 .75;
! Covariance matrix;
V = 3 1 -.5
    1 2 -.4
    -.5 -.4 1;
! Desired growth rate of portfolio;
GROWTH = 1.12;
ENDDATA
```

### Modelo adaptado:

```
DATA:
! The data;
! Expected growth rate of each asset;
RATE = @IMPORT(D00.XLS, EXP_RET);
! Upper bound on investment in each;
UB = @IMPORT(D00.XLS, UPP_BOU);
! Covariance matrix;
V = @IMPORT(D00.XLS, COV_MAT);
! Desired growth rate of portfolio;
GROWTH = 0;
ENDDATA
```

De esta manera, el modelo adaptado está haciendo una llamada a un archivo de datos denominado D00.XLS en donde se encuentran las matrices de covarianzas y retornos. El modelo incluye una matriz adicional que recoge el límite superior al que pueden llegar los pesos dentro del portafolio. Este límite se ha establecido al 5 por ciento de forma que se cumpla la reglamentación legislativa española respecto al máximo peso de un mismo activo arriesgado en un fondo de inversión.

c) El siguiente cambio que aparece es el referente al crecimiento deseado para la cartera.

Modelo primitivo: GROWTH = 1.12;

Modelo adaptado: GROWTH = 0;





Esta línea se refiere al retorno que se le exige al portafolio. Así pues, el valor 0, habrá que ir elevándolo paulatinamente hacia valores superiores hasta que el rendimiento requerido sea inalcanzable.

d) El último cambio realizado al modelo se refiere a los límites de la optimización.

Modelo primitivo: [ RET] @SUM( ASSET: RATE \* X) >= GROWTH;

Modelo adaptado: [ RET] @SUM( ASSET: RATE \* X) = GROWTH;

Esto significa que se está minimizando la varianza del portafolio de forma que resulte un valor de la esperanza puntual, no un valor superior o igual al indicado. Este cambio se decidió incluir para poder representar gráficamente la frontera de forma exacta sobre las dimensiones esperanza-varianza.

Con el programa preparado y las matrices de datos creadas y enlazadas, se procede al cálculo de los puntos que forman la frontera eficiente. Para realizar estos cálculos, se utilizó un aula de informática del edificio Ferrándiz de la EPS Alcoy. Esta aula cuenta con 28 PC Pentium II a 166 Mhz con 32 Mb de RAM. La causa de la utilización de esta aula de informática es la necesidad de ahorrar tiempo, ya que cada punto de la frontera eficiente tarda entre cinco minutos y dos horas en ser calculado. De este modo, utilizando los 28 PC, fueron obtenidos 293 puntos correspondientes a 12 fronteras eficientes. El intervalo seleccionado para el incremento de la rentabilidad exigida al portafolio fue de 0.5 por ciento.

En la Tabla 15 pueden verse los 293 puntos que definen las fronteras eficientes calculadas. Podemos ver que no todos los meses tienen el mismo rango de rendimientos accesible. Algunos meses, como por ejemplo enero, no puede alcanzar una rentabilidad del 10.5 por ciento, mientras que el mes de octubre, alcanza hasta un 13.5 por ciento. Obsérvese, a modo de curiosidad, que a partir de agosto,



teniendo en cuenta las restricciones que hemos introducido en el programa, no es posible obtener una rentabilidad igual o inferior al 0.5 por ciento.

Tabla 15

Fronteras Eficientes Calculadas												
Esperanza exigida	enero-97	febrero-97	marzo-97	abril-97	mayo-97	junio-97	julio-97	agosto-97	septiembre-97	octubre-97	noviembre-97	diciembre-97
0.000	0.001209	0.001903	0.002019	0.002168	0.002311	0.004834						
0.005	0.000782	0.000964	0.000976	0.001030	0.001148	0.001734	0.003102					
0.010	0.000626	0.000676	0.000731	0.000785	0.000777	0.001031	0.001311	0.001419	0.001501	0.001968	0.001546	0.001808
0.015	0.000613	0.000727	0.000677	0.000710	0.000635	0.000695	0.000926	0.000895	0.000911	0.000935	0.001008	0.000952
0.020	0.001710	0.000696	0.000727	0.000647	0.000690	0.000627	0.000969	0.000853	0.000774	0.000852	0.001008	0.000626
0.025	0.000817	0.000618	0.000665	0.000753	0.001587	0.000915	0.001139	0.000837	0.000819	0.000801	0.000827	0.000866
0.030	0.001175	0.001090	0.001078	0.000979	0.001013	0.001046	0.001104	0.000910	0.001046	0.000968	0.000913	0.000960
0.035	0.001422	0.001434	0.001437	0.001306	0.001250	0.001374	0.001242	0.001094	0.001139	0.000968	0.001576	0.001083
0.040	0.001884	0.002110	0.002691	0.002593	0.001707	0.001697	0.001573	0.001467	0.001432	0.001340	0.001368	0.002055
0.045	0.002476	0.002462	0.002447	0.002323	0.002269	0.002385	0.002027	0.001714	0.001647	0.001693	0.001738	0.001785
0.050	0.003148	0.003220	0.003154	0.003321	0.004557	0.002762	0.002602	0.002412	0.002117	0.002104	0.002232	0.002212
0.055	0.004915	0.004037	0.004099	0.003801	0.003613	0.003501	0.003028	0.002873	0.002702	0.002358	0.003012	0.005334
0.060	0.005129	0.005149	0.005109	0.004848	0.004631	0.004450	0.004305	0.003652	0.003495	0.003030	0.006456	0.005455
0.065	0.006498	0.006520	0.006588	0.006129	0.005846	0.005599	0.005442	0.004505	0.004317	0.003822	0.004681	0.004639
0.070	0.008151	0.008098	0.008012	0.007657	0.007305	0.007637	0.006027	0.005783	0.005794	0.004825	0.007555	0.005682
0.075	0.010193	0.010076	0.010000	0.009630	0.009054	0.008581	0.007441	0.007027	0.006738	0.005928	0.007302	0.007139
0.080	0.012778	0.012496	0.012341	0.011791	0.011266	0.010550	0.009161	0.008671	0.008258	0.007423	0.009004	0.008721
0.085	0.015885	0.015524	0.015159	0.014643	0.014058	0.012954	0.011281	0.010755	0.010176	0.008985	0.011125	0.010634
0.090	0.019869	0.019016	0.018552	0.017889	0.017295	0.015901	0.013878	0.013225	0.012545	0.011194	0.013850	0.013126
0.095	0.026555	0.023263	0.022513	0.021778	0.021150	0.019125	0.016880	0.017126	0.015414	0.013717	0.016765	0.018136
0.100	0.035809	0.027595	0.027037	0.026218	0.025599	0.022904	0.020508	0.019723	0.018762	0.017162	0.020368	0.019664
0.105		0.033087	0.032305	0.031279	0.030622	0.027211	0.024409	0.023752	0.022621	0.020449	0.024513	0.023727
0.110		0.040999	0.039898	0.038388	0.037452	0.031987	0.028945	0.028322	0.027095	0.024589	0.029263	0.028309
0.115						0.037375	0.033921	0.033413	0.031899	0.028288	0.034383	0.033427
0.120						0.044063	0.039620	0.038988	0.037297	0.034423	0.040145	0.039882
0.125						0.052206	0.046720	0.045790	0.043881	0.040234	0.046950	0.045709
0.130						0.062250	0.055267	0.053952	0.050638	0.047309	0.055048	0.053658
0.135										0.055680		

Un dato curioso que se obtuvo al calcular estas fronteras y que se detectó al representarlas gráficamente, fue que en la zona próxima a los menores rendimientos exigidos, un *incremento* de la rentabilidad exigida propiciaba un *decremento* del riesgo o varianza. Esta irregularidad de la frontera que parecía un error de cálculo o de programación, resultó ser corroborada por los diversos autores que fueron consultados ver, por ejemplo, a Haugen<sup>123</sup>. Esta irregularidad es la causa de que la frontera eficiente tome una frontera con forma de bala, (*bullet shaped*), nombre con el que se la conoce en la literatura especializada. Para que la zona irregular, pueda observarse mejor, se ha ampliado la sección de la Figura 23, que la incluye. Esta ampliación se representa en la Figura 24. Se pueden detectar otras irregularidades en las fronteras eficientes, las cuales van haciéndose más regulares a medida que se van incrementando los valores de la rentabilidad exigida y la volatilidad resultante. Estas irregularidades no son tan llamativas como la señalada anteriormente, aunque aparecen como extrañas desviaciones de una normal evolución del riesgo en relación con la

<sup>123</sup> Haugen. R. (1997) *Modern Investment Theory*, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River.



rentabilidad exigida. Estas pequeñas alteraciones de la figura típica de la frontera eficiente, no son extrañas cuando ésta se estima a partir de datos reales, ya que éstos pueden provocar puntos de inflexión debido a su estructura.

La citada Figura 23, contiene la representación gráfica de las doce fronteras estimadas. En el Apéndice 5 del trabajo aparecen las gráficas de las fronteras por separado. Indicar que generalmente, en el eje de abscisas se representa la varianza, y en el de ordenadas el rendimiento. En este caso no se ha hecho así por imposibilidad física, ya que el programa con el que se han hecho las figuras, no facilitaba el cambio de eje.

Figura 23

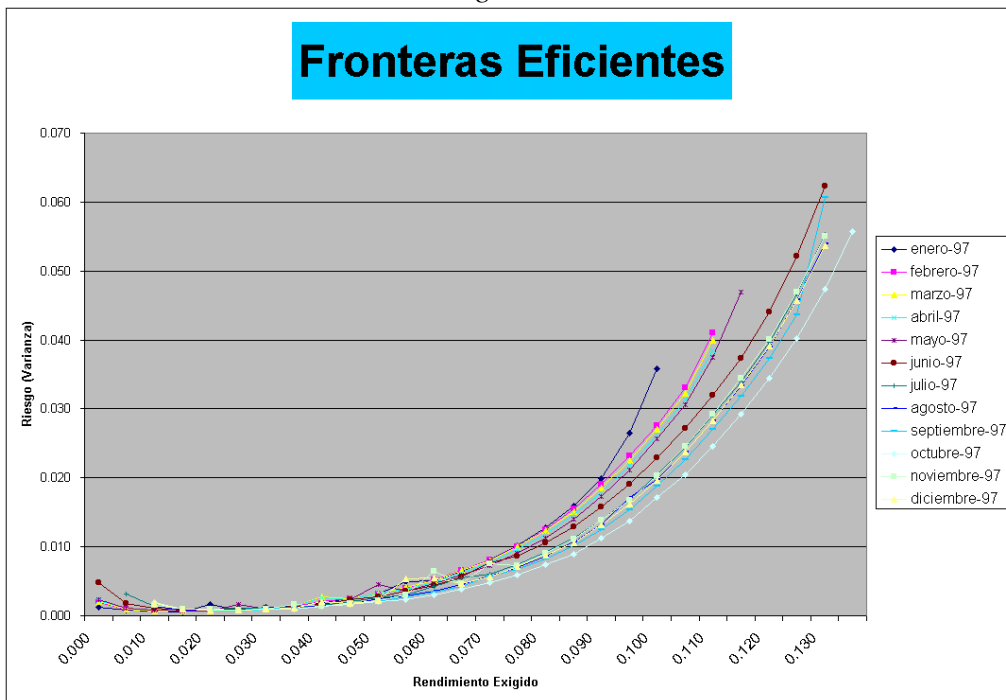
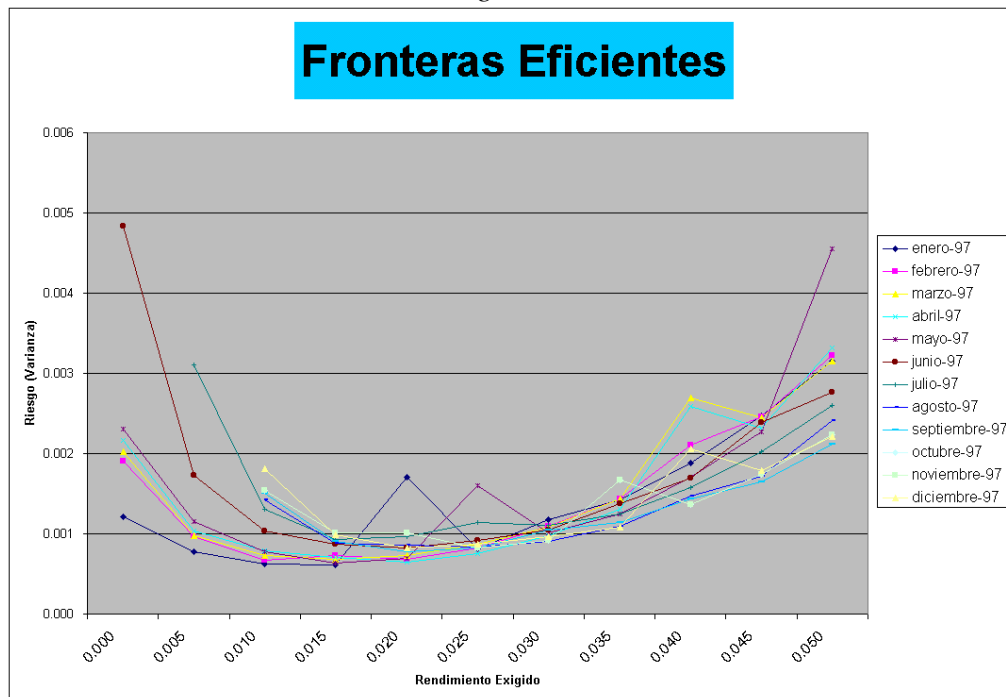




Figura 24



### ESTIMACIÓN DE ÓPTIMOS PARA CLIENTES ESTÁNDAR

Teniendo ya calculadas las fronteras eficientes, procedemos a la estimación de los óptimos para el primer tipo de inversores analizados, los inversores estándar. Este proceso consta de los siguientes pasos:

#### Primer paso:

Calcular la frontera rentabilidad-seguridad que nos permitirá aplicar el teorema de selección compromiso. Para la estimación de esta frontera complementaria a la eficiente, se debe llevar a cabo previamente una transformación sobre los datos referentes a rentabilidad y varianza, de la siguiente forma:

$$\theta_1 = \text{Índice de rentabilidad ad} = \frac{E - E_*}{E^* - E_*} \quad (9.5)$$

$$\theta_2 = \text{Índice de seguridad} = 1 - \text{Índice de riesgo} = 1 - \frac{V - V^*}{V_* - V^*} = \frac{V_* - V}{V_* - V^*} \quad (9.6)$$

Donde:

$E$  = retornos esperados del portafolio.



$V$  = varianza de los retornos.

$E^*$  = valor ideal o ancla para  $E$ , es decir, el mayor retorno esperado posible compatible con las restricciones del problema.

$V^*$  = valor ideal o ancla para  $V$ , es decir, la menor varianza de los retornos posible compatible con las restricciones del problema.

$E^*$  = valor anti-ideal para  $E$ , es decir el valor de  $E$  que corresponde al portafolio con la mínima varianza  $V^*$ .

$V^*$  = valor anti-ideal para  $V$ , es decir el valor de  $V$  que corresponde al portafolio con la máxima esperanza  $E^*$ .

Así, se obtienen unos índices de rentabilidad y seguridad sobre los que poder trabajar.

Por tanto, este primer paso trata de calcular los índices  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , para cada uno de las fronteras eficientes. Transformando cada frontera eficiente rentabilidad-riesgo en una nueva frontera eficiente rentabilidad-seguridad.

Antes de proceder al cálculo, se ha de despreciar la parte irregular de la frontera eficiente primitiva, aquellos puntos en donde al incrementar la rentabilidad disminuye el riesgo medido por la varianza. De este modo el cálculo de los índices  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , se lleva a cabo utilizando las fórmulas (9.5) y (9.6). A modo de ejemplo, se presenta en la Tabla 16 el cálculo realizado para la frontera correspondiente al mes de enero de 1997, el resto de tablas referentes a este cálculo pueden consultarse en el Apéndice 6.

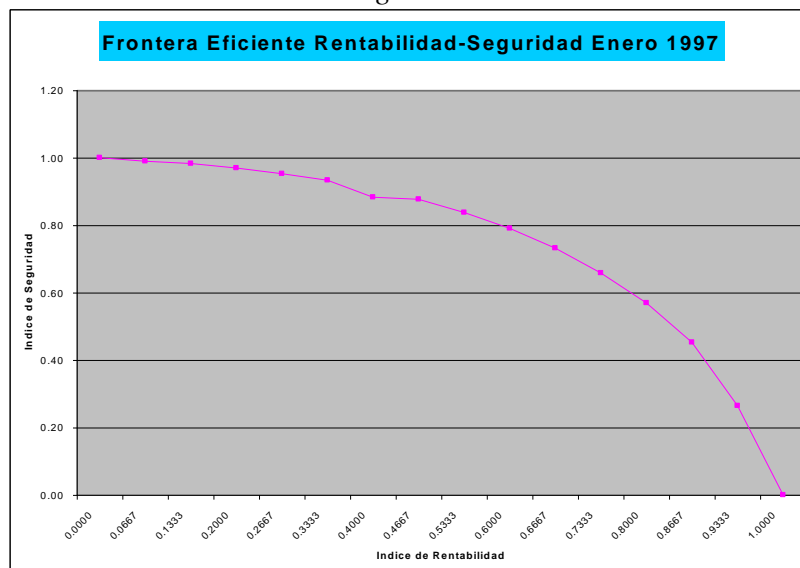


Tabla 16

Frontera Eficiente Rendimiento-Seguridad Enero 1997			
Esperanzas	Varianzas	Teta 1	Teta 2
0.000	0.001209		
0.005	0.000782		
0.010	0.000626		
0.015	0.000613		
0.020	0.001710		
0.025	0.000817	0.0000	1.0000
0.030	0.001175	0.0667	0.9898
0.035	0.001422	0.1333	0.9827
0.040	0.001884	0.2000	0.9695
0.045	0.002476	0.2667	0.9526
0.050	0.003148	0.3333	0.9334
0.055	0.004915	0.4000	0.8829
0.060	0.005129	0.4667	0.8768
0.065	0.006498	0.5333	0.8377
0.070	0.008151	0.6000	0.7904
0.075	0.010193	0.6667	0.7320
0.080	0.012778	0.7333	0.6582
0.085	0.015885	0.8000	0.5694
0.090	0.019969	0.8667	0.4527
0.095	0.026555	0.9333	0.2644
0.100	0.035809	1.0000	0.0000

A partir de estos datos, se pueden construir todas las fronteras eficientes rentabilidad-seguridad correspondientes a los doce meses de 1997. A modo de ejemplo, se expone aquí la correspondiente a enero de 1997 (Figura 25), el resto de las fronteras aparecen en el Apéndice 6.

Figura 25



Segundo paso:

Una vez tenemos las doce fronteras normalizadas rentabilidad-seguridad, se procede a la aplicación del teorema compromiso por el que se seleccionan los portafolios óptimos dentro del conjunto accesible.

Para ello, partimos de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , calculados anteriormente y se opera de la forma indicada en el Capítulo 8. Los cálculos se pueden observar en la Tabla 17.



Tabla 17

Obtención de $L_1$ y $L_{\infty}$ para Enero 1997					
Esperanzas	Varianzas	Teta 1	Teta 2	Teta1/Teta2	$L_1 = \text{Max}(\text{Teta1} + \text{Teta2})$
0.000	0.001209				
0.005	0.000782				
0.010	0.000626				
0.015	0.000613				
0.020	0.001710				
0.025	0.000817	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000
0.030	0.001175	0.0667	0.9898	0.0674	1.0564
0.035	0.001422	0.1333	0.9827	0.1357	1.1160
0.040	0.001884	0.2000	0.9695	0.2063	1.1695
0.045	0.002476	0.2667	0.9526	0.2799	1.2193
0.050	0.003148	0.3333	0.9334	0.3571	1.2667
0.055	0.004915	0.4000	0.8829	0.4531	1.2829
0.060	0.005129	0.4667	0.8768	0.5323	1.3434
0.065	0.006498	0.5333	0.8377	0.6367	1.3710
0.070	0.008151	0.6000	0.7904	0.7591	1.3904
<b>0.075</b>	<b>0.010193</b>	<b>0.6667</b>	<b>0.7320</b>	<b>0.9107</b>	<b>1.3987</b>
0.080	0.012778	0.7333	0.6582	1.1142	1.3915
0.085	0.015885	0.8000	0.5694	1.4050	1.3694
0.090	0.019969	0.8667	0.4527	1.9146	1.3193
0.095	0.026555	0.9333	0.2644	3.5293	1.1978
0.100	0.035809	1.0000	0.0000	#!DIV/0!	1.0000

Las cuatro primeras columnas son las mismas que se tenían hasta ahora. La quinta columna:  $\theta_1/\theta_2$ , se incluye para calcular la métrica  $L_{\infty}$ . La sexta columna:  $L_1 = \text{Max}(\theta_1 + \theta_2)$ , se incluye para calcular la métrica  $L_1$ .

El cálculo de  $L_{\infty}$  se realiza de la siguiente forma.  $L_{\infty}$  es aquel punto en que  $\theta_1 = \theta_2$ , por lo que si se calcula el cociente entre ambos, el punto más cercano a  $L_{\infty}$  será aquel en que se cumpla que el cociente entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se aproxime más a uno. El valor seleccionado se ha coloreado en la Tabla 17 con fondo anaranjado claro. En el caso de la frontera de enero de 1997, este valor es el 0.9107, que se corresponde con una rentabilidad esperada de un 7.5 por ciento.

El cálculo de  $L_1$  es más sencillo.  $L_1$  se corresponde con el punto en donde  $\theta_1 + \theta_2$  alcanza un máximo. Así pues, el punto en que se cumple esta condición para la frontera de enero del 97 es el correspondiente a una rentabilidad esperada de 7.5 por ciento. Este punto se ha coloreado en la Tabla 17 con fondo amarillo.

Con esto se concluye el subconjunto de la frontera eficiente primitiva que maximiza la utilidad de un inversor estándar será aquel que tenga un rentabilidad esperada exactamente igual a 7.5 por ciento. Obviamente el conjunto compromiso será más amplio, pero para



localizar otros puntos se debería reducir el intervalo del incremento de la rentabilidad exigida. Así pues, en este caso, la única cartera de las estimadas que se encuentra dentro del conjunto compromiso es aquella a la que se le exige una rentabilidad del 7.5 por ciento.

El criterio que se ha seguido en este trabajo para la selección de la cartera que será computada, cuando más de una cartera forme parte del conjunto compromiso, ha sido el siguiente:

Tres casos posibles:

- Si coinciden  $L_1$  y  $L_\infty$  en el mismo portafolio, se elige este. Esta posibilidad se ha presentado en los meses de enero y marzo.
- Si  $L_1$  y  $L_\infty$  no coinciden en el mismo portafolio, y existe un portafolio entre ellos dos, se selecciona el portafolio interior. Esta posibilidad se ha presentado en los meses de: junio, septiembre, noviembre y diciembre.
- En el tercer caso que se ha presentado, se estudia qué punto se ha seleccionado como  $L_\infty$ , si se trata de un punto donde el resultado de  $\theta_1/\theta_2$  más cercano a 1 supera la unidad, entonces se selecciona el límite inferior, ya que el verdadero  $L_\infty$  será inferior a ese punto y por lo tanto ese portafolio se encontrará fuera del conjunto compromiso. Este caso se ha presentado en el mes de mayo. Por el contrario, si el punto seleccionado como  $L_\infty$  se corresponde con un punto donde el resultado de  $\theta_1/\theta_2$  más cercano a 1 no supera la unidad, se selecciona este mismo valor, ya que se situará *dentro* del conjunto compromiso.

Siguiendo estos mismos criterios, para todas las fronteras rentabilidad-seguridad calculadas, se obtienen cada uno de los portafolios óptimos para cada mensualidad. Estos portafolios compromiso óptimos, así como los conjuntos compromiso se indican en la Tabla 18.





Tabla 18

Conjuntos Compromiso y Selección del Portafolio Óptimo Para el Inversor Estándar						
	Esperanzas	Varianzas	Teta 1	Teta 2	Teta1/Teta2	L1 = Max (Teta1+Teta2)
Enero	<b>0.075</b>	0.0102	0.6667	0.7320	0.9107	1.3987
Febrero	0.075	0.0101	0.6111	0.7671	0.7967	1.3782
	<b>0.080</b>	0.0125	0.6667	0.7071	0.9429	1.3737
Marzo	<b>0.085</b>	0.0152	0.6154	0.6606	0.9316	1.2760
Abril	0.075	0.0096	0.6111	0.7620	0.8020	1.3731
	<b>0.080</b>	0.0118	0.6667	0.7047	0.9460	1.3714
Mayo	<b>0.090</b>	0.0173	0.5833	0.6844	0.8523	1.2677
	0.095	0.0212	0.6667	0.5955	1.1195	1.2621
Junio	0.085	0.0130	0.5909	0.8026	0.7363	1.3935
	<b>0.090</b>	0.0158	0.6364	0.7562	0.8415	1.3926
Julio	0.095	0.0191	0.6818	0.7021	0.9711	1.3839
	0.090	0.0139	0.6000	0.7642	0.7852	1.3642
Agosto	<b>0.095</b>	0.0169	0.6500	0.7087	0.9171	1.3587
	0.090	0.0132	0.6190	0.7668	0.8074	1.3858
Septiembre	<b>0.095</b>	0.0171	0.6667	0.6933	0.9616	1.3600
	0.090	0.0125	0.6364	0.8034	0.7921	1.4397
Octubre	<b>0.095</b>	0.0154	0.6818	0.7555	0.9025	1.4373
	0.100	0.0188	0.7273	0.6995	1.0397	1.4268
Noviembre	0.095	0.0137	0.6000	0.7670	0.7823	1.3670
	<b>0.100</b>	0.0172	0.6500	0.7041	0.9232	1.3541
Diciembre	0.085	0.0111	0.5714	0.8101	0.7054	1.3815
	<b>0.090</b>	0.0139	0.6190	0.7598	0.8147	1.3789
Diciembre	0.095	0.0168	0.6667	0.7061	0.9442	1.3727
	0.085	0.0106	0.5909	0.8144	0.7256	1.4053
Diciembre	<b>0.090</b>	0.0131	0.6364	0.7672	0.8295	1.4035
	0.095	0.0161	0.6818	0.7102	0.9600	1.3920

Los portafolios coloreados con un fondo azul claro, corresponden a los seleccionados para su computación en el caso estudio que se está llevando a cabo.

### ESTIMACIÓN DE ÓPTIMOS PARA CLIENTES AGRESIVOS

Repitiendo los dos pasos que se acaban de explicar para el caso de los inversores estándar, pero esta vez para los inversores arriesgados o agresivos se obtiene el siguiente cuadro de portafolios óptimos.



Tabla 19

Conjuntos Compromiso y Selección del Portafolio Óptimo Para el Inversor Agresivo						
	Esperanzas	Varianzas	Teta 1	Teta 2	Teta1/Teta2	L = Max (Teta1*1.7+Teta2)
Enero	0.075	0.0102	0.6667	0.7320	0.9107	1.8654
	<b>0.080</b>	0.0128	0.7333	0.6582	1.1142	1.9048
	0.085	0.0159	0.8000	0.5694	1.4050	1.9294
Febrero	0.080	0.0125	0.6667	0.7071	0.9429	1.8404
	<b>0.085</b>	0.0155	0.7222	0.6320	1.1428	1.8597
	0.090	0.0190	0.7778	0.5453	1.4262	1.8676
Marzo	0.085	0.0152	0.6154	0.6606	0.9316	1.7067
	0.090	0.0186	0.6923	0.5700	1.2146	1.7469
	<b>0.095</b>	0.0225	0.7692	0.4642	1.6571	1.7719
Abril	0.100	0.0270	0.8462	0.3434	2.4641	1.7819
	0.080	0.0118	0.6667	0.7047	0.9460	1.8381
	<b>0.085</b>	0.0146	0.7222	0.6292	1.1479	1.8569
Mayo	0.090	0.0179	0.7778	0.5432	1.4319	1.8654
	0.095	0.0212	0.6667	0.5955	1.1195	1.7288
	<b>0.100</b>	0.0256	0.7500	0.4929	1.5217	1.7679
Junio	0.105	0.0306	0.8333	0.3768	2.2117	1.7935
	0.095	0.0191	0.6818	0.7021	0.9711	1.8612
	<b>0.100</b>	0.0229	0.7273	0.6406	1.1353	1.8769
Julio	0.105	0.0272	0.7727	0.5705	1.3546	1.8841
	0.095	0.0169	0.6500	0.7087	0.9171	1.8137
	<b>0.100</b>	0.0205	0.7000	0.6417	1.0908	1.8317
Agosto	0.105	0.0244	0.7500	0.5697	1.3164	1.8447
	0.095	0.0171	0.6667	0.6933	0.9616	1.8267
	<b>0.100</b>	0.0197	0.7143	0.6444	1.1084	1.8587
Septiembre	0.105	0.0238	0.7619	0.5686	1.3400	1.8638
	0.100	0.0188	0.7273	0.6995	1.0397	1.9359
	<b>0.105</b>	0.0226	0.7727	0.6351	1.2168	1.9487
Octubre	0.110	0.0270	0.8182	0.5618	1.4563	1.9527
	0.100	0.0172	0.6500	0.7041	0.9232	1.8091
	<b>0.105</b>	0.0204	0.7000	0.6440	1.0870	1.8340
Noviembre	0.110	0.0246	0.7500	0.5683	1.3197	1.8433
	0.095	0.0168	0.6667	0.7061	0.9442	1.8394
	<b>0.100</b>	0.0204	0.7143	0.6396	1.1168	1.8539
Diciembre	0.105	0.0245	0.7619	0.5632	1.3529	1.8584
	0.095	0.0161	0.6818	0.7102	0.9600	1.8693
	<b>0.100</b>	0.0197	0.7273	0.6434	1.1303	1.8798
	0.105	0.0237	0.7727	0.5665	1.3640	1.8802

Los portafolios óptimos para los inversores arriesgados se han obtenido calculando el punto  $L$ , en vez del punto  $L_1$ , este punto  $L$  se obtiene calculando el  $Max(\theta_1 r_0 + \theta_2)$ . En este trabajo se ha considerado que  $r_0$ , para los inversores agresivos, toma un valor igual a 1.7 a modo de ejemplo. El cual respondería a un inversor con unas preferencias más marcadas por la rentabilidad que por la seguridad, aunque sin llegar a desestimar totalmente éste último bien.

ESTIMACIÓN DE ÓPTIMOS PARA CLIENTES CONSERVADORES

Repitiendo de nuevo, los dos pasos que se acaban de explicar para el caso de los inversores estándar y agresivos, pero esta vez para los inversores conservadores, se obtiene el siguiente cuadro de portafolios óptimos.



Tabla 20

Conjuntos Compromiso y Selección del Portafolio Óptimo Para el Inversor Conservador						
	Esperanzas	Varianzas	Teta 1	Teta 2	Teta1/Teta2	L = Max (Teta1*0.3+Teta2)
Enero	0.0500	0.0031	0.3333	0.9334	0.3571	1.0334
	0.0550	0.0049	0.4000	0.8829	0.4531	1.0029
	0.0600	0.0051	0.4657	0.8768	0.5323	1.0168
	<b>0.065</b>	<b>0.0065</b>	<b>0.5333</b>	<b>0.8377</b>	<b>0.6367</b>	<b>0.9977</b>
	0.0700	0.0082	0.6000	0.7904	0.7591	0.9704
	0.0750	0.0102	0.6667	0.7320	<b>0.9107</b>	0.9320
	0.0800	0.0125	0.6667	0.7071	<b>0.9429</b>	0.9071
Febrero	0.0500	0.0032	0.3333	0.9372	0.3557	1.0372
	0.0550	0.0040	0.3889	0.9169	0.4241	1.0336
	0.0600	0.0051	0.4444	0.8893	0.4898	1.0227
	<b>0.065</b>	<b>0.0065</b>	<b>0.5000</b>	<b>0.8553</b>	<b>0.5846</b>	<b>1.0053</b>
	0.0700	0.0081	0.5556	0.8162	0.6807	0.9828
	0.0750	0.0101	0.6111	0.7671	0.7967	0.9504
	0.0800	0.0125	0.6667	0.7071	<b>0.9429</b>	0.9071
Marzo	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Abril	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Mayo	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Junio	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Julio	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Agosto	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Septiembre	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Octubre	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Noviembre	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974
Diciembre	0.0500	0.0032	0.0769	0.9811	0.0784	1.0042
	0.0550	0.0041	0.1538	0.9559	0.1639	1.0020
	0.0600	0.0051	0.2306	0.9289	0.2484	0.9981
	0.0650	0.0066	0.3077	0.8994	0.3459	0.9817
	<b>0.070</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.3846</b>	<b>0.8514</b>	<b>0.4517</b>	<b>0.9668</b>
	0.0750	0.0100	0.4615	0.7983	0.5781	0.9368
	0.0800	0.0123	0.5385	0.7358	0.7318	0.8974

Los portafolios óptimos para los inversores agresivos se han obtenido calculando el punto  $L$ , en vez del punto  $L_1$ , este punto  $L$  se obtiene calculando el  $Max(\theta_1 r_0 + \theta_2)$ . En este trabajo se ha considerado que el  $r_0$ , para inversores conservadores, toma un valor igual a 0.3 a modo de ejemplo. El cual respondería a un inversor con unas



preferencias más marcadas por la seguridad que por la rentabilidad, aunque sin llegar a desestimar totalmente éste último bien.

El siguiente paso natural es la contrastación de estos resultados. Esta comparativa puede hacerse de dos formas diferentes:

- Mediante la comparación de los retornos obtenidos con el sistema compromiso con los retornos que se hubieran obtenido utilizando otros sistemas de inversión “*naive*” o ingénuos. Como por ejemplo, la inversión en carteras aleatorias del mismo tamaño, o sistemas de inversión en donde la cartera concede igual peso a la totalidad del universo de activos, etcétera. El modelo compromiso será superior si es capaz de obtener mejores retornos de una forma continuada y consistente.
- Mediante la obtención de índices de *performance* que permitan construir un ránking entre los portafolios analizados.

El contraste del modelo queda fuera del objetivo de nuestro estudio, pero no fuera de las metas a medio plazo del equipo de investigación encabezado por el director de esta tesis. Es por tanto éste el camino por el cual se van a encaminar las futuras investigaciones.



## RESUMEN Y CONCLUSIONES

---

### *Conclusiones relativas a la Bolsa de Madrid, en aspectos generales, durante la década 1990*

- I. La política de BolsaMadrid en los últimos años, incluyendo el periodo de análisis considerado en este trabajo ha sido la de facilitar al máximo la entrada de nuevas sociedades en los mercados bursátiles. Por su parte, un buen número de agentes pasivos se han percatado de las ventajas que reporta la cotización y han optado por utilizar este medio de financiamiento. Tanto es así que en 1997 se quiebra al alza la línea descendente mantenida desde comienzo de los noventa, en número de sociedades cotizadas. Esta importante oferta de valores, públicos, antiguos públicos privatizados y privados, vio su contrapartida en un mercado en donde los inversores individuales e institucionales debían de buscar alternativas a los bajos retornos de la renta fija clásica.
- II. Con referencia a los agentes activos, se puede concluir que las familias y las *IIC* han ido creciendo en importancia durante el periodo de análisis, llegando a poseer en 1997 el 30 por ciento de la capitalización bursátil española. El crecimiento más impresionante lo disfrutaron los *FIM*, superando un incremento en participantes del 80 por ciento en un solo año (1996-1997). Por su parte, el sector público ha ido perdiendo relevancia debido a las privatizaciones. Por último, encontramos que la mayoría de las acciones en poder de bancos y cajas de ahorro tienen una finalidad de control; se puede decir que la relevancia de estas carteras de control se ha mantenido invariable en niveles relativos durante el periodo.
- III. Como se sabe, los mercados secundarios oficiales del sistema financiero español son las bolsas de valores y el mercado de



derivados. A estos mercados secundarios debemos añadir el de deuda pública y el *AIAF* de renta fija. Este conjunto de cuatro mercados forman la base aplicativa de cualquier modelo de selección de portafolios mixto que pretenda ser aplicado exclusivamente sobre la Bolsa de Madrid.

- IV. Con la introducción del Sistema de Interconexión Bursátil Español (*SIBE*), se ha conseguido gestionar un volumen creciente de contratación entre los años 1992-1997 con garantías de eficacia y transparencia.
- V. Considerando el *IGBM* durante el año 1997 hubo un conjunto de sectores tales como Bancos y Financieras, Alimentación y Construcción que obtuvieron rendimientos superiores a dicho índice. El resto de los sectores obtuvieron niveles inferiores a los alcanzados por el índice general. Estos sectores fueron: Eléctricas, Inversión, Metal-Mecánica, Petróleo-Químicas, Comunicación y Otras Industrias y Servicios.
- VI. Por su parte, los sectores que obtuvieron retornos superiores al *ITBM* fueron: Construcción, Alimentación, Bancos y Financieras. Otros sectores como Comunicaciones, Inversión, Metal-Mecánica, Petróleo-Químicas, Otras Industrias y Servicios y Eléctricas, no alcanzaron los retornos del *ITBM*.
- VII. El tercer índice relevante de BolsaMadrid, el *IBEX-35* tuvo un comportamiento muy similar al del *IGBM*, alcanzando un coeficiente de correlación superior al 95 por ciento.

#### *Conclusiones relativas a la MPT y sus contrastes empíricos*

- VIII. Revisando los procedimientos para seleccionar carteras, tal como se usaban con anterioridad al análisis estándar de inversiones (1952-1970), estos procedimientos desarrollados por economistas, analistas y gestores demostraban una cierta esterilidad, pues eran incapaces de sintetizar la abundante y fiable información existente.



- IX. La selección de portafolios según el modelo canónico  $E-V$ , se desarrolla en dos fases perfectamente definidas. En la primera de ellas se determina la frontera eficiente que minimiza la volatilidad (medida a través de la varianza) para diversos niveles de rentabilidad. Cada uno de estos niveles viene expresado por la esperanza matemática de los retornos. En la segunda fase, el analista debe encontrar el óptimo de utilidad que corresponde al perfil del inversor, teniendo en cuenta que este óptimo cae sobre la frontera eficiente.
- X. La frontera eficiente presenta distintos rangos de la variable esperanza, los cuales dependen de la serie histórica que ha servido como base empírica para el análisis. Los periodos de tiempo (semanas o meses) en que se ha estructurado la serie histórica para recoger la información empírica sobre promedios y volatilidades es una circunstancia que influye sobre las características de la frontera.
- XI. La forma que canónicamente toma la frontera eficiente es la de una curva sobre el plano varianza-esperanza, dónde al crecer la esperanza aumenta correlativamente la varianza. Sin embargo, se aprecia a veces en esta curva un tramo inicial irregular dónde la varianza va disminuyendo a medida que la esperanza aumenta. Las fronteras de este tipo se llaman curvas-bala (*bullet shaped*). Dicha forma peculiar se explica matemáticamente, aunque no es intuitiva.
- XII. Las variables macroeconómicas no parecen explicar más del 33 por ciento de las cotizaciones correspondientes a muestras de valores, cuando dichas cotizaciones se toman como variable endógena en un modelo de regresión múltiple cuyas variables exógenas son indicadores macro.
- XIII. Las variables fundamentales de cada sociedad, tales como su *cash-flow* y la tasa media de interés sobre su exigible, apenas



- explican el 50 por ciento de las volatilidades correspondientes a los retornos.
- XIV. Ciertos criterios de selección tales como la Máxima media Geométrica, Seguridad Prioritaria (en sus diversas formulaciones) y Dominación Estocástica conducen a la misma solución que el modelo *E-V* bajo algunas hipótesis, especialmente la normalidad de los retornos.
- XV. A partir de varios estudios en la literatura, se puede afirmar que los portafolios ponderados por capitalización bursátil tienen *performance* relativamente bajas si se comparan con portafolios derivados de fronteras eficientes.
- XVI. Los inversores bursátiles, en un alto porcentaje, no obedecen el conjunto de postulados racionales sobre los que se asientan las funciones de utilidad. Con independencia de que dichos inversores juzguen o no coherentes los postulados utilitarios, rara vez atinan a manejar funciones de utilidad para seleccionar inversiones alternativas.
- XVII. Si nos ceñimos a la selección canónica de inversiones mediante fronteras eficientes y curvas de utilidad, el problema de encontrar el óptimo de  $U$  sobre la frontera no fue resuelto satisfactoriamente por los investigadores de la *MPT* que no manejaban el análisis multicriterio. En efecto, dado que la función de utilidad correspondiente a un inversor presenta formas y parámetros difícilmente estimables por el analista, resulta casi imposible determinar el punto de tangencia entre la frontera eficiente y la curva de utilidad.
- XVIII. Según un estudio de Kallberg-Ziemba, se pueden obtener portafolios “similares” con diversas funciones de utilidad, siempre que estas funciones tengan similares coeficientes de Arrow.





*Conclusiones relativas a la selección de carteras mediante análisis compromiso*

- XIX. La selección de portafolios puede ser reformulada como un problema de *Compromise Programming (CP)*, en base a los criterios retornos esperados y varianza de los retornos.
- XX. Las infinitas soluciones *CP* que corresponden a las métricas posibles  $(1-\infty)$  caen todas ellas en el conjunto compromiso que está limitado por las métricas  $L_1-L_\infty$  (teorema de Yu).
- XXI. Según un teorema de 1991, si consideramos un inversor de perfil standard, su óptimo de utilidad se encuentra acotado entre los puntos  $L_1-L_\infty$  sobre la frontera eficiente, es decir, su óptimo cae en el conjunto compromiso.
- XXII. Según un teorema de 1998, si consideramos un inversor con preferencias particulares que pueden sesgar ya hacia la rentabilidad (inversor agresivo) ya hacia la seguridad (inversor conservador), su óptimo de utilidad se encuentra acotado entre los puntos  $L-L_\infty$  sobre la frontera eficiente. Cuanto más sesgadas estén las preferencias respecto al perfil inversor standard, tanto más amplio será el arco  $L-L_\infty$ .
- XXIII. En la selección compromiso de portafolios, la primera fase coincide con la canónica *E-V*. En otras palabras, la selección compromiso se apoya también en una frontera eficiente, donde se minimiza la varianza con una restricción paramétrica de esperanzas para los retornos. El propio modelo *E-V* filtra las esperanzas negativas y también las esperanzas positivas que no alcanzan el nivel para activos sin riesgo.
- XXIV. Al usar retornos idealizados (los cuales se calculan mediante análisis de regresión) eliminamos las volatilidades corrientes que aparecen, con más o menos intensidad, entre las cotizaciones primera y última de cada periodo. Mediante esta técnica, el conjunto de cotizaciones a lo largo del periodo determina la línea



de regresión que sirve para calcular la plusvalía correspondiente a dicho periodo.

XXV. La metodología compromiso tal como se ha comenzado a aplicar a la selección de inversiones, exige un limitado apoyo axiomático si se compara con métodos alternativos de selección, por ejemplo, la maximización directa de Kroll, Levy y Markowitz. Esta última intenta superar ciertas dificultades inherentes al modelo *E-V*, dificultades que entroncan con las paradojas de Borch y Feldstein. Sin embargo, su aplicación resulta inviable por su complejidad. Así lo reconocen sus propios autores. Según sus palabras el método no resulta fácil “*even by computer*”.

XXVI. Aunque el óptimo de utilidad mediante análisis compromiso se puede estimar por procedimientos gráficos, la determinación analítica parece más adecuada y precisa en la mayoría de los casos.

XXVII. El enlace entre análisis compromiso y aversión al riesgo se ha iniciado en un teorema de 1997, pero se pueden esperar prolongaciones a esta investigación.

XXVIII. El estudio empírico de Kallberg-Ziembra (véase conclusión XVIII) resulta ser efectivamente, un test del método compromiso para selección de portafolios. Sin embargo, creemos que ulteriores contrastes siguiendo la línea de la *performance MPT* o bien otras direcciones son prometedores y aconsejables. Actualmente, esta línea de investigación se está desarrollando en la Escuela Politécnica Superior de Alcoy, sobre bases de datos correspondientes a la Bolsa de Madrid.

### *Conclusiones relativas al caso estudio: portafolios obtenidos en la Bolsa de Madrid para 1997*

XXIX. A parte la revisión metodológica que constituye un núcleo de esta tesis, nuestro objetivo se ha centrado en aplicar la metodología compromiso a casos reales de selección en la Bolsa de Madrid.



Hemos acometido las dos fases antes indicadas, es decir: i) el cálculo de fronteras eficientes con base a información empírica de 60 meses, especificando sus ecuaciones, representando las curvas gráficamente y analizando las formas peculiares de bala; ii) la optimización compromiso, acotando el óptimo de utilidad entre límites estrechos sobre la frontera eficiente, para diversos perfiles del inversor.

XXX. Hemos calculado doce fronteras, con un total de 293 portafolios eficientes. Cada una de las fronteras encontradas es una curva-bala con rangos de esperanza comprendidos entre cero y 13.5 por ciento mensual. El tiempo medio de PC (Pentium II a 166 Mhz con 32 Mb de RAM) para obtener un portafolio eficiente fue de 20 minutos, lo que equivale a un total de 5860 minutos, es decir, 8 horas 8 minutos por frontera.

XXXI. En nuestro estudio hemos considerado dos estrategias alternativas para tres tipologías de aversión al riesgo. De esta forma hemos obtenido 6 portafolios óptimos diferentes según la estrategia y la aversión al riesgo del inversor. Estos portafolios aparecen clasificados en la siguiente tabla.

		Estrategias	
		Buy and Hold	Movil
Perfiles	Agresivo	Portafolio Agresivo Buy and Hold	Portafolio Agresivo Movil
	Standard	Portafolio Standard Buy and Hold	Portafolio Standard Movil
	Conservador	Portafolio Conservador Buy and Hold	Portafolio Conservador Movil

XXXII. Para inversores agresivos con estrategia *buy & hold*, hemos seleccionado un portafolio óptimo con las siguientes características relevantes:



Esperanza anual		0.960
Varianza anual		0.1536
Ratio Riesgo/Rentabilidad		0.4082
<b>Intervalo compromiso</b>	L	Linfinito
Esperanza	1.020	0.900
Varianza	0.1908	0.1224
<b>Composición</b>		
Título Bursátil	Símbolo	Peso
SDAD.GENERAL AGUAS DE BARCELONA, S.A.	AGS	
EL AGUILA,S.A.(FABR.DE CERVEZAS Y MALTA.	AGI	
SDAD.GENERAL AZUCARERA DE ESPAÑA, S.A.	AZU	
BODEGAS Y BEBIDAS, S.A.	BYB	
CAMPOFRIO ALIMENTACION,S.A.	CPF	
EBRO AGRICOLAS, COMPAÑIA DE ALIMENTACION.	EBA	
KOIKE, S.A.	KOI	
PULEVA,S.A.	PUL	
TABACALERA, S.A.	TAB	
VISCOFAN, S.A.	VIS	
AUTOPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.(ACESA)	ACE	
AUTOPISTAS DEL MARE NOSTRUM, S.A.	AUM	
EUROPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.	EUR	0.050
IBERICA DE AUTOPISTAS, S.A. (IBERPISTAS)	IBP	
CITROEN HISPANIA, S.A.	CIT	
BANCO DE ALICANTE.	ALI	
BANCO DE ANDALUCIA, S.A.	AND	
BANCO ATLANTICO, S.A.	ATL	
BANCO BILBAO VIZCAYA.	BBV	0.050
BANCO CENTRAL HISPANO AMERICANO.	BCH	
BANKINTER,S.A.	BKT	0.050
BANCO ESPAÑOL DE CREDITO,S.A.	BTO	
BANCO DE CASTILLA, S.A.	CAS	
BANCO DE CREDITO BALEAR S.A.	CBL	
BANCO DE GALICIA, S.A.	GAL	
BANCO GUIPUZCOANO, S.A.	GUI	
BANCO HERRERO, S.A.	HRR	0.050
BANCO PASTOR, S.A.	PAS	
BANCO POPULAR ESPAÑOL, S.A.	POP	0.050
BANCO SANTANDER, S.A.	SAN	0.050
BANCO DE VASCONIA, S.A.	VAS	
BANCO ZARAGOZANO, S.A.	ZRG	
GRUPO PICKING PACK,S.A.	GHS	
CRISTALERIA ESPAÑOLA, S.A.	CRI	
FINANCIERA Y MINERA, S.A.	FYM	
HORNOS IBERICOS ALBA. (HISALBA)	HSB	
UNILAND CEMENTERA S.A.	UND	
URALITA, S.A.	URA	
PORTLAND VALDERRIVAS, S.A.	VDR	
FINANZAUTO, S.A.	FNZ	
PRYCA S.A.	PRY	
TELEFONICA DE ESPAÑA,S.A.	TEF	
AGROMAN, S.A., EMPRESA CONSTRUCTORA.	AGR	0.013
DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.	DRC	
HUARTE, S.A.	HHU	
CONSTRUCCIONES LAIN S.A.	LAI	
GRAL. OBRAS Y CONSTR. OBRASCON S.A.	OBR	
HIDROELECTRICA DEL CANTABRICO, S.A.	CAN	
ENDESA, S.A.	ELE	0.050
EMPRESA NAC.HIDROELECTRICA RIBAGORZANA.(ENHER)	ENH	
ELECTRICAS REUNIDAS DE ZARAGOZA, S.A.	ERZ	0.050
FUERZAS ELECTRICAS DE CATALUÑA, S.A. (FECSA)	FEC	

Composición (continuación)		
IBERDROLA, S.A.	IBE	0.050
SALTOS DEL NANSÁ, S.A.	NAN	0.050
COMPAÑIA SEVILLANA DE ELECTRICIDAD S.A.	SEV	
UNION ELECTRICA-FENOSA,S.A.	UNF	0.050
ELECTRA DE VIESGO, S.A.	VGO	
CORPORACION FINANCIERA ALBA, S.A.	ALB	
CORPORACION FINANCIERA REUNIDA,S.A. (COFIR)	CFR	
GRUPO FOSFORERA S.A.	FFR	
CORPORACION IND.FINANCIERA DE BANESTO.	LCB	
BAMI,S.A.INMOBILIARIA DE CONSTRUCCIONES.	BAM	
FILO, S.A.	FIL	
INMOBILIARIA ZABALBURU, S.A.	IZB	
INMOBILIARIA METROPOLITANA VASCO CENTRAL. S.A.	MVC	
PRIMA INMOBILIARIA S.A.	PIN	
SOTOGRADE S.A.	STG	
URBANIZACIONES Y TRANSPORTES, S.A. (URBAS)	UBS	
INMOBILIARIA URBIS, S.A.	URB	
VALLEHERMOSO, S.A.	VAL	
INBESOS, S.A.	BES	
AMPER, S.A.	AMP	0.050
AZKOYEN S.A.	AZK	0.050
CONSTRUCCIONES Y AUXILIAR DE FERROCARRIL MAQUINARIA. (C.A.F.)	CAF	
DIMETAL S.A.	DMT	
GRUPO DURO FELGUERA, S.A.	MDF	
NICOLAS CORREA S.A.	NEA	
RADIOTRONICA S.A.	RAD	
SDA.ESPAÑOLA DEL ACUMULADOR TUDOR, S.A.	TUD	
ZARDOYA OTIS, S.A.	ZOT	0.050
ACERINOX, S.A	ACX	
ASTURIANA DEL ZINC S.A.	AZC	
NUEVA MONTAÑA DE QUIJANO, S.A.	NMQ	
ESPAÑOLA DEL ZINC, S.A.	ZNC	
TAVEX ALGODONERA SAN ANTONIO, S.A.	ASA	
SEDA DE BARCELONA, S.A. (LA).	SED	0.050
VIDRALA S.A.	VID	0.050
EUROP.PAPER A.PACKAGINS INVEST.	EPC	
SARRIO S.A.	SAR	
SDAD. NAC. IND. APL. CEL. ESPAÑOLA, S.A. (SNIACE)	SNC	
TABLEROS DE FIBRAS, S.A. (TAFISA)	TFI	
UNIPAPEL, S.A.	UPL	
CIA.ESPAÑOLA DE PETROLEOS, S.A. (CEPSA)	CEP	
REPSOL S.A.	REP	
ENERGIA E INDUSTRIAS ARAGONESAS, S.A.	ARA	
SAD.ESPAÑOLA DE CARBUROS METALICOS, S.A.	CAR	
ERCROS S.A.	ECR	
GRUPO ANAYA S.A.	ANY	
MARCO IBERICA DE DISTRIBUCIONES S.A. (MIDES)	MID	0.050
PROSEGUR S.A., CIA. DE SEGURIDAD.	PSG	0.050
CIA.GENERAL DE INVERSIONES,S.A.S.I.M.	CGI	0.038
GLOBAL STEEL WIRE, S.A.	GSW	0.050
TUBACEX,S.A.	TUB	
<b>TOTAL</b>		<b>1.000</b>

El óptimo de utilidad se ha podido determinar entre límites estrechos, ya que se encuentra entre dos cotas que solo dejan un portafolio intermedio.



XXXIII. Para inversores standard con estrategia *buy & hold*, hemos seleccionado un portafolio óptimo con las siguientes características relevantes:

Composición		
Título Bursátil	Símbolo	Peso
SDAD.GENERAL AGUAS DE BARCELONA, S.A.	AGS	
EL AGUILA,S.A.(FABR.DE CERVEZAS Y MALTA.	AGI	
SDAD.GENERAL AZUCARERA DE ESPAÑA, S.A.	AZU	
BODEGAS Y BEBIDAS, S.A.	BYB	
CAMPOFRIO ALIMENTACION,S.A.	CPF	
EBRO AGRICOLAS, COMPAÑIA DE ALIMENTACION.	EBA	
KOIKE, S.A.	KOI	
PULEVA,S.A.	PUL	
TABACALERA, S.A.	TAB	
VISCOFAN, S.A.	VIS	
AUTOPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.(ACESA)	ACE	
AUTOPISTAS DEL MARE NOSTRUM, S.A.	AUM	
EUROPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.	EUR	0.050
IBERICA DE AUTOPISTAS, S.A. (IBERPISTAS)	IBP	
CITROEN HISPANIA, S.A.	CIT	
BANCO DE ALICANTE.	ALI	
BANCO DE ANDALUCIA, S.A.	AND	
BANCO ATLANTICO, S.A.	ATL	
BANCO BILBAO VIZCAYA.	BBV	0.050
BANCO CENTRAL HISPANO AMERICANO.	BCH	
BANKINTER,S.A.	BKT	0.023
BANCO ESPAÑOL DE CREDITO,S.A.	BTO	
BANCO DE CASTILLA, S.A.	CAS	
BANCO DE CREDITO BALEAR S.A.	CBL	
BANCO DE GALICIA, S.A.	GAL	
BANCO GUIPUZCOANO, S.A.	GUI	
BANCO HERRERO, S.A.	HRR	0.050
BANCO PASTOR, S.A.	PAS	
BANCO POPULAR ESPAÑOL, S.A.	POP	0.050
BANCO SANTANDER, S.A.	SAN	0.050
BANCO DE VASCONIA, S.A.	VAS	
BANCO ZARAGOZANO, S.A.	ZRG	
GRUPO PICKING PACK,S.A.	GHS	
CRISTALERIA ESPAÑOLA, S.A.	CRI	
FINANCIERA Y MINERA, S.A.	FYM	
HORNOS IBERICOS ALBA. (HISALBA)	HSB	
UNILAND CEMENTERA S.A.	UND	
URALITA, S.A.	URA	
PORTLAND VALDERRIVAS, S.A.	VDR	
FINANZAUTO, S.A.	FNZ	
PRYCA S.A.	PRY	
TELEFONICA DE ESPAÑA,S.A.	TEF	
AGROMAN, S.A., EMPRESA CONSTRUCTORA.	AGR	0.010
DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.	DRC	
HUARTE, S.A.	HHU	
CONSTRUCCIONES LAIN S.A.	LAI	
GRAL. OBRAS Y CONSTR. OBRASCON S.A.	OBR	
HIDROELECTRICA DEL CANTABRICO, S.A.	CAN	
ENDESA, S.A.	ELE	0.050
EMPRESA NAC.HIDROELECTRICA RIBAGORZANA.(ENHER)	ENH	
ELECTRICAS REUNIDAS DE ZARAGOZA, S.A.	ERZ	0.050
FUERZAS ELECTRICAS DE CATALUÑA, S.A.(FECSA)	FEC	

Composición (continuación)		
Título Bursátil	Símbolo	Peso
IBERDROLA, S.A.	IBE	0.050
SALTOS DEL NANSÁ, S.A.	NAN	
COMPAÑIA SEVILLANA DE ELECTRICIDAD S.A.	SEV	
UNION ELECTRICA-FENOSA,S.A.	UNF	0.050
ELECTRA DE VIESGO, S.A.	VGO	
CORPORACION FINANCIERA ALBA, S.A.	ALB	
CORPORACION FINANCIERA REUNIDA,S.A.(COFIR)	CFR	
GRUPO FOSFORERA S.A.	FFR	
CORPORACION IND.FINANCIERA DE BANESTO.	LCB	
BAMI,S.A.INMOBILIARIA DE CONSTRUCCIONES.	BAM	
FILO, S.A.	FIL	
INMOBILIARIA ZABALBURU, S.A.	IZB	
INMOBILIARIA METROPOLITANA VASCO CENTRAL, S.A.	MVC	
PRIMA INMOBILIARIA S.A.	PIN	
SOTOGRADE S.A.	STG	
URBANIZACIONES Y TRANSPORTES, S.A. (URBAS)	UBS	
INMOBILIARIA URBIS, S.A.	URB	
VALLEHERMOSO, S.A.	VAL	
INBESOS, S.A.	BES	
AMPER, S.A.	AMP	0.050
AZKOYEN S.A.	AZK	0.050
CONSTRUCCIONES Y AUXILIAR DE FERROCARRIL MAQUINARIA. (C.A.F.)	CAF	
DIMETAL S.A.	DMT	
GRUPO DURO FELGUERA, S.A.	MDF	
NICOLAS CORREA S.A.	NEA	
RADIOTRONICA S.A.	RAD	
SDA.ESPAÑOLA DEL ACUMULADOR TUDOR, S.A.	TUD	
ZARDOYA OTIS, S.A.	ZOT	0.050
ACERINOX, S.A.	ACX	0.050
ASTURIANA DEL ZINC S.A.	AZC	
NUEVA MONTAÑA DE QUIJANO, S.A.	NMQ	
ESPAÑOLA DEL ZINC, S.A.	ZNC	
TAVEX ALGODONERA SAN ANTONIO, S.A.	ASA	
SEDA DE BARCELONA, S.A. (LA).	SED	0.042
VIDRALA S.A.	VID	0.050
EUROP.PAPER A.PACKAGINS INVEST.	EPC	
SARRIO S. A.	SAR	
SDAD. NAC. IND. APL. CEL. ESPAÑOLA, S.A. (SNIACE)	SNC	
TABLEROS DE FIBRAS, S.A. (TAFISA)	TFI	
UNIPAPEL, S.A.	UPL	
CIA.ESPAÑOLA DE PETROLEOS, S.A. (CEPSA)	CEP	
REPSOL S.A.	REP	
ENERGIA E INDUSTRIAS ARAGONESAS, S.A.	ARA	
SAD.ESPAÑOLA DE CARBUROS METALICOS, S.A.	CAR	
ERCROS S.A.	ECR	
GRUPO ANAYA S.A.	ANY	
MARCO IBERICA DE DISTRIBUCIONES S.A. (MIDESA)	MID	0.050
PROSEGUR S.A., CIA. DE SEGURIDAD.	PSG	0.050
CIA.GENERAL DE INVERSIONES,S.A.S.I.M.	CGI	0.030
GLOBAL STEEL WIRE, S.A.	GSW	0.045
TUBACEX,S.A.	TUB	
<b>TOTAL</b>		<b>1.000</b>

El óptimo de utilidad se ha determinado en el punto exacto ya que ambas métricas han coincidido en el mismo punto.



XXXIV. Para inversores conservadores con estrategia *buy & hold*, hemos seleccionado un portafolio óptimo con las siguientes características relevantes:

Composición		
Título Bursátil	Símbolo	Peso
SDAD.GENERAL AGUAS DE BARCELONA, S.A.	AGS	
EL AGUILA,S.A.(FABR.DE CERVEZAS Y MALTA.	AGI	
SDAD.GENERAL AZUCARERA DE ESPAÑA, S.A.	AZU	
BODEGAS Y BEBIDAS, S.A.	BYB	
CAMPOFRIO ALIMENTACION,S.A.	CPF	
EBRO AGRICOLAS, COMPAÑIA DE ALIMENTACION.	EBA	
KOIFE, S.A.	KOI	
PULEVA,S.A.	PUL	
TABACALERA, S.A.	TAB	
VISCOFAN, S.A.	VIS	
AUTOPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.(ACESA)	ACE	
AUTOPISTAS DEL MARE NOSTRUM, S.A.	AUM	
EUROPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.	EUR	0.050
IBERICA DE AUTOPISTAS, S.A. (IBERPISTAS)	IBP	
CITROEN HISPANIA, S.A.	CIT	
BANCO DE ALICANTE.	ALI	
BANCO DE ANDALUCIA, S.A.	AND	
BANCO ATLANTICO, S.A.	ATL	
BANCO BILBAO VIZCAYA.	BBV	0.050
BANCO CENTRAL HISPANO AMERICANO.	BCH	
BANKINTER, S.A.	BKT	
BANCO ESPAÑOL DE CREDITO,S.A.	BTO	
BANCO DE CASTILLA, S.A.	CAS	0.050
BANCO DE CREDITO BALEAR S.A.	CBL	
BANCO DE GALICIA, S.A.	GAL	0.016
BANCO GUIPUZCOANO, S.A.	GUI	
BANCO HERRERO, S.A.	HRR	0.050
BANCO PASTOR, S.A.	PAS	
BANCO POPULAR ESPAÑOL, S.A.	POP	0.050
BANCO SANTANDER, S.A.	SAN	0.050
BANCO DE VASCONIA, S.A.	VAS	0.014
BANCO ZARAGOZANO, S.A.	ZRG	
GRUPO PICKING PACK,S.A.	GHS	
CRISTALERIA ESPAÑOLA, S.A.	CRI	
FINANCIERA Y MINERA, S.A.	FYM	
HORNOS IBERICOS ALBA. (HISALBA)	HSB	
UNILAND CEMENTERA S.A.	UND	
URALITA, S.A.	URA	
PORTLAND VALDERRIVAS, S.A.	VDR	
FINANZAUTO, S.A.	FNZ	
PRYCA S.A.	PRY	
TELEFONICA DE ESPAÑA,S.A.	TEF	
AGROMAN, S.A., EMPRESA CONSTRUCTORA.	AGR	0.007
DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.	DRC	
HUARTE, S.A.	HHU	
CONSTRUCCIONES LAIN S.A.	LAI	
GRAL. OBRAS Y CONSTR. OBRASCON S.A.	OBR	
HIDROELECTRICA DEL CANTABRICO, S.A.	CAN	
ENDESA, S.A.	ELE	0.050
EMPRESA NAC.HIDROELECTRICA RIBAGORZANA.(ENHER)	ENH	
ELECTRICAS REUNIDAS DE ZARAGOZA, S.A.	ERZ	0.050
FUERZAS ELECTRICAS DE CATALUÑA, S.A. (FECSA)	FEC	

Composición (continuación)		
Título Bursátil	Símbolo	Peso
IBERDROLA, S.A.	IBE	0.050
SALTOS DEL NANSA, S.A.	NAN	
COMPAÑIA SEVILLANA DE ELECTRICIDAD S.A.	SEV	
UNION ELECTRICA-FENOSA,S.A.	UNF	0.019
ELECTRA DE VIESGO, S.A.	VGO	
CORPORACION FINANCIERA ALBA, S.A.	ALB	
CORPORACION FINANCIERA REUNIDA,S.A. (COFIR)	CFR	0.026
GRUPO FOSFORERA S.A.	FFR	
CORPORACION IND.FINANCIERA DE BANESTO.	LCB	
BAMI,S.A.INMOBILIARIA DE CONSTRUCCIONES.	BAM	
FILO, S.A.	FIL	
INMOBILIARIA ZABALBURU, S.A.	IZB	
INMOBILIARIA METROPOLITANA VASCO CENTRAL, S.A.	MVC	
PRIMA INMOBILIARIA S.A.	PIN	
SOTOGRADE S.A.	STG	
URBANIZACIONES Y TRANSPORTES, S.A. (URBAS)	UBS	
INMOBILIARIA URBIS, S.A.	URB	
VALLEHERMOSO, S.A.	VAL	
INBESOS, S.A.	BES	0.023
AMPER, S.A.	AMP	0.050
AZKOYEN S.A.	AZK	0.050
CONSTRUCCIONES Y AUXILIAR DE FERROCARRIL MAQUINARIA. (C.A.F.)	CAF	
DIMETAL S.A.	DMT	
GRUPO DURO FELGUERA, S.A.	MDF	
NICOLAS CORREA S.A.	NEA	
RADIOTRONICA S.A.	RAD	
SDA.ESPAÑOLA DEL ACUMULADOR TUDOR, S.A.	TUD	
ZARDOYA OTIS, S.A.	ZOT	0.050
ACERINOX, S.A.	ACX	0.016
ASTURIANA DEL ZINC S.A.	AZC	
NUEVA MONTAÑA DE QUIJANO, S.A.	NMQ	
ESPAÑOLA DEL ZINC, S.A.	ZNC	
TAVEX ALGODONERA SAN ANTONIO, S.A.	ASA	
SEDA DE BARCELONA, S.A. (LA).	SED	0.035
VIDRALA S.A.	VID	0.050
EUROP.PAPER A.PACKAGINS INVEST.	EPC	
SARRIO S. A.	SAR	
SDAD. NAC. IND. APL. CEL. ESPAÑOLA, S.A. (SNIACE)	SNC	
TABLEROS DE FIBRAS, S.A. (TAFISA)	TFI	
UNIPAPEL, S.A.	UPL	
CIA.ESPAÑOLA DE PETROLEOS, S.A. (CEPSA)	CEP	
REPSOL S.A.	REP	
ENERGIA E INDUSTRIAS ARAGONESAS, S.A.	ARA	
SAD.ESPAÑOLA DE CARBUROS METALICOS, S.A.	CAR	
ERCROS S.A.	ECR	
GRUPO ANAYA S.A.	ANY	
MARCO IBERICA DE DISTRIBUCIONES S.A. (MIDESA)	MID	0.043
PROSEGUR S.A., CIA. DE SEGURIDAD.	PSG	0.050
CIA.GENERAL DE INVERSIONES,S.A.S.I.M.	CGI	0.020
GLOBAL STEEL WIRE, S.A.	GSW	0.033
TUBACEX,S.A.	TUB	
<b>TOTAL</b>		<b>1.000</b>

El óptimo de utilidad se ha determinado entre límites suficientemente estrechos, ya que se encuentra entre dos puntos que dejan cuatro intermedios.





XXXV. Para inversores agresivos con estrategia móvil, hemos seleccionado un portafolio óptimo con las siguientes características relevantes:

		Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Total 1997
Esperanza mensual/anual		0,080	0,085	0,095	0,085	0,100	0,100	0,100	0,100	0,105	0,105	0,100	0,100	1,155
Varianza mensual/anual		0,0128	0,0155	0,0225	0,0146	0,0256	0,0229	0,0205	0,0197	0,0226	0,0204	0,0204	0,0197	0,2372
Ratio Riesgo/Rentabilidad		1,4142	1,4647	1,5769	1,4215	1,6000	1,5133	1,4318	1,4036	1,4317	1,3603	1,4263	1,4036	0,4217
<b>Intervalo Compromiso</b>														
Esperanza mensual/anual	L	0,085	0,090	0,100	0,090	0,105	0,105	0,105	0,105	0,110	0,110	0,105	0,105	1,215
	Linfito	0,075	0,080	0,085	0,080	0,095	0,095	0,095	0,095	0,100	0,100	0,095	0,095	1,090
Varianza mensual/anual	L	0,0159	0,0190	0,0270	0,0179	0,0306	0,0272	0,0244	0,0238	0,0270	0,0246	0,0245	0,0237	0,2666
	Linfito	0,0102	0,0125	0,0152	0,0118	0,0212	0,0191	0,0169	0,0171	0,0188	0,0172	0,0168	0,0161	0,1929
<b>Composicion</b>														
Título Bursátil	Símbolo	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Número de meses que entra a formar parte de la cartera
AUTOPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A (ACESA)	ACE		0,050											1
EUROPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.	EUR	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANCO BILBAO VIZCAYA.	BBV	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANKINTER S.A.	BKT	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,000	0,050	0,026			10
BANCO HERRERO, S.A.	HRR	0,050	0,004	0,039	0,050		0,026	0,025						6
BANCO POPULAR ESPAÑOL, S.A.	POP	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANCO SANTANDER, S.A.	SAN	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
UNILAND CEMENTERA S.A.	UND						0,004	0,050		0,001				4
AGROMAN, S.A., EMPRESA CONSTRUCTORA	AGR	0,013	0,015	0,019	0,014	0,022	0,019	0,018	0,019	0,021	0,020	0,019	0,019	12
HUARTE, S.A.	HHU						0,019	0,018	0,019	0,022	0,021	0,020	0,020	7
GRAL. OBRAS Y CONSTR. OBRASCON S.A.	ORR							0,005			0,000	0,050	0,050	4
ENDESA, S.A.	ELE	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050			10
ELECTRICAS REUNIDAS DE ZARAGOZA, S.A.	ERZ	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,040		11
IBERDROLA, S.A.	IBE	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,043	0,05	0,050	0,037	12
SALTOS DEL NANSÁ, S.A.	NAN	0,050												1
UNION ELECTRICAFENOSA S.A.	UNF	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,004			0,050	0,050	0,050	10
ELECTRA DE VIESGO, S.A.	VGO				0,005			0,002				0,050	0,038	4
CORPORACION FINANCIERA REUNIDA, S.A. (COFIR)	CFR							0,003						1
PRIMA INMOBILIARIA S.A.	PIN											0,022	0,042	2
AMPER, S.A.	AMP	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
AZKOYEN S.A.	AZK	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
NICOLAS CORREA S.A.	NEA				0,000	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	9
ZARDOYA OTIS, S.A.	ZOT	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
ACERINOX, S.A.	ACX		0,050	0,050	0,050	0,034	0,001	0,005	0,050					7
ESPAÑOLA DEL ZINC, S.A.	ZNC							0,001	0,019	0,050				3
TAVEX ALGODONERA SAN ANTONIO, S.A.	ASA										0,050	0,050	0,050	3
SEDA DE BARCELONA, S.A. (LA)	SED	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,046	0,050	0,033	0,027	0,018	0,014	0,013	12
VIDRALA S.A.	VID	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
MARCO IBERICA DE DISTRIBUCIONES S.A. (MIDES)	MID	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
PROSEQUIR S.A., CIA. DE SEGURIDAD	PSG	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
CIA GENERAL DE INVERSIONES, S.A.S.I.M.	CGI	0,038	0,031	0,042	0,030	0,045	0,038	0,035	0,034	0,036	0,035	0,034	0,032	12
GLOBAL STEEL WIRE, S.A.	GSW	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
TUBACEX, S.A.	TUB							0,050	0,026	0,050	0,031		0,042	5
<b>TOTAL</b>		<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	

El mes de peor ajuste fue el mes de marzo, para el cual se obtuvo un intervalo de 3 puntos. En todos los demás meses, los intervalos únicamente dejaron un punto intermedio.





XXXVI. Para inversores standard con estrategia móvil, hemos seleccionado un portafolio óptimo con las siguientes características relevantes:

		Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Total 1997
Esperanza mensual/anual		0,075	0,080	0,085	0,080	0,090	0,090	0,095	0,095	0,095	0,100	0,090	0,090	1,065
Varianza mensual/anual		0,0102	0,0125	0,0152	0,0118	0,0173	0,0158	0,0169	0,0171	0,0154	0,0172	0,0139	0,0131	0,1764
Ratio Riesgo/Rentabilidad		1,3468	1,3975	1,4505	1,3576	1,4614	1,3966	1,3684	1,3765	1,3063	1,3115	1,3100	1,2717	0,3944
<b>Intervalo Compromiso</b>														
Esperanza mensual/anual	L1	0,075	0,075	0,085	0,075	0,090	0,085	0,090	0,090	0,090	0,095	0,085	0,085	1,020
	Limfinito	0,075	0,080	0,085	0,080	0,095	0,095	0,095	0,095	0,095	0,100	0,095	0,095	1,090
Varianza mensual/anual	L1	0,0102	0,0101	0,0152	0,0096	0,0173	0,0130	0,0139	0,0132	0,0125	0,0137	0,0111	0,0106	0,1504
	Limfinito	0,0102	0,0125	0,0152	0,0118	0,0212	0,0191	0,0169	0,0171	0,0188	0,0172	0,0168	0,0161	0,1929
<b>Composicion</b>														
Título Bursátil	Símbolo	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Número de meses que entra a formar parte de la cartera
TABACALEDA, S.A.	TAB												0,001	1
EUROPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.	EUR	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANCO BILBAO VIZCAYA	BBV	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANKINTER, S.A.	BKT	0,023	0,011	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050		0,031			0,043	9
BANCO HERRERO, S.A.	HRR	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,026						6
BANCO POPULAR ESPAÑOL, S.A.	POP	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANCO SANTANDER, S.A.	SAN	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,049	0,050	0,050	0,050	0,050	12
UNILAND CEMENTERA S.A.	UND				0,002						0,024			4
AGROMAN, S.A., EMPRESA CONSTRUCTORA	AGR	0,010	0,012	0,015	0,012	0,016	0,015	0,016	0,018	0,017	0,018	0,016	0,015	12
HUARTE, S.A.	HHU						0,014	0,015	0,013	0,016	0,019	0,012	0,014	7
GRAL OBRAS Y CONSTR. OBRASCON S.A.	GBR											0,050	0,050	2
ENDESA, S.A.	ELE	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	10
ELECTRICAS REUNIDAS DE ZARAGOZA, S.A.	ERZ	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050		11
GAS Y ELECTRICIDAD, S.A.	GES	0,050	0,050											2
IBERDROLA, S.A.	IBE	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050		0,024		0,050	0,041	10
UNION ELECTRICAS-FENOSA S.A.	UNF	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050			0,049	0,050	0,050	9
ELECTRA DE VIESGO, S.A.	VGO			0,004						0,011		0,050	0,050	4
CORPORACION FINANCIERA REUNIDA, S.A. (COFIR)	CFR						0,003							1
PRIMA INMOBILIARIA S.A.	PIN											0,001	0,048	2
AMPER, S.A.	AMP	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,049	0,050	0,050	0,050	0,050	12
AZKOYEN S.A.	AZK	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,049	0,050	0,050	0,050	0,050	12
NICOLAS CORREA S.A.	NEA			0,025	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,045	0,050	0,050	9
ZARDOYA OTIS, S.A.	ZOT	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,047	0,050	0,050	0,050	0,050	12
ACERINOX, S.A.	ACX	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,042	0,050		0,002				8
ESPAÑOLA DEL ZINC, S.A.	ZNC								0,050	0,050	0,046			3
TAVEX ALGODONERA SAN ANTONIO, S.A.	ASA								0,049	0,019	0,049	0,050	0,050	5
SEDA DE BARCELONA, S.A. (LA)	SED	0,042	0,050	0,050	0,039	0,050	0,036	0,042	0,050	0,034	0,047	0,032	0,018	12
VIDRALA S.A.	VID	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,049	0,050	0,050	12
MARCO IBERICA DE DISTRIBUCIONES S.A. (MIDES)	MID	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,046	0,050	0,050	0,050	0,050	12
PROSEGUR S.A., CIA. DE SEGURIDAD.	PSG	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
CIA GENERAL DE INVERSIONES S.A.S.I.M.	CGI	0,030	0,027	0,031	0,025	0,034	0,029	0,031	0,031	0,028	0,030	0,026	0,024	12
GLOBAL STEEL WIRE, S.A.	GSW	0,045	0,050	0,050	0,047	0,050	0,050	0,050	0,049	0,050	0,050	0,050	0,050	12
TUBACEXS S.A.	TUB						0,020	0,050	0,045	0,047				5
<b>TOTAL</b>		<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	

Los meses con mejor ajuste fueron enero y marzo, en donde el ambas métricas coincidieron en el mismo punto. Los meses con ajuste menos exacto fueron junio, septiembre, noviembre y diciembre los cuales dejaron un único punto intermedio.



XXXVII. Para inversores conservadores con estrategia móvil, hemos seleccionado un portafolio óptimo con las siguientes características relevantes:

		Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Total 1997
Esperanza mensual/annual		0,065	0,065	0,070	0,065	0,075	0,075	0,075	0,080	0,080	0,085	0,075	0,075	0,885
Variación mensual/annual		0,0065	0,0065	0,0080	0,0061	0,0091	0,0086	0,0074	0,0087	0,0083	0,0090	0,0073	0,0071	0,0926
Ratio Riesgo/Rentabilidad		1,2403	1,2403	1,2778	1,2016	1,2719	1,2365	1,1470	1,1659	1,1388	1,1161	1,1392	1,1235	0,3438
<b>Intervalo Compromiso</b>														
Esperanza mensual/annual	L	0,050	0,045	0,050	0,045	0,060	0,055	0,055	0,060	0,060	0,065	0,050	0,050	0,645
	Infinito	0,075	0,080	0,085	0,080	0,095	0,095	0,095	0,095	0,095	0,100	0,095	0,095	1,090
Variación mensual/annual	L	0,0031	0,0025	0,0032	0,0023	0,0046	0,0035	0,0030	0,0036	0,0035	0,0038	0,0022	0,0022	0,0375
	Infinito	0,0102	0,0125	0,0152	0,0118	0,0212	0,0191	0,0169	0,0171	0,0188	0,0172	0,0168	0,0161	0,1929
<b>Composición</b>														
Título Bursátil	Símbolo	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Número de meses que entra a formar parte de la cartera
SDAD GENERAL AZUCARERA DE ESPAÑA, S.A.	AZU												0,015	1
KOIFE, S.A.	KOI													0,019
TABACALERA, S.A.	TAB												0,028	0,033
EUROPISTAS CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.	EUR	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANCO BILBAO VIZCAYA	BBV	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANCO CENTRAL HISPANO AMERICANO	BCH									0,010				2
BANKINTER, S.A.	BKT						0,008	0,001	0,042		0,024	0,014		5
BANCO DE CASTILLA, S.A.	CAS	0,050	0,050	0,050	0,050					0,007				5
BANCO DE CREDITO BALEAR S.A.	CBL				0,007	0,000						0,014		3
BANCO DE GALICIA, S.A.	GAL	0,016											0,014	3
BANCO HERRERO, S.A.	HRR	0,030	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050				0,032	0,011
BANCO POPULAR ESPAÑOL, S.A.	POP	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANCO SANTANDER, S.A.	SAN	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
BANCO DE VASCONIA, S.A.	VAS	0,014	0,050	0,037	0,050			0,027	0,024					6
UNILAND CEMENTERA S.A.	UND									0,050	0,020			0,009
AGROMAN, S.A., EMPRESA CONSTRUCTORA	AGR	0,007	0,008	0,009	0,007	0,010	0,009	0,008	0,011	0,011	0,011	0,009	0,009	12
HUARTE, S.A.	HUU							0,006	0,004	0,007	0,007	0,009	0,006	0,006
GRAL. OBRAS Y CONSTR. OBRASCON S.A.	OBR			0,000						0,007			0,025	0,030
ENDESA, S.A.	ELE	0,050	0,026	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	10
ELECTRICAS REUNIDAS DE ZARAGOZA, S.A.	ERZ	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050			10
GAS Y ELECTRICIDAD, S.A.	GES	0,050	0,050											2
IBERDROLA, S.A.	IBE	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050		0,05	0,050		10
SALTOS DEL NANSÁ, S.A.	NAN					0,000								0,025
UNION ELECTRICA-FENOSA S.A.	UNF	0,019	0,020	0,048	0,011	0,050	0,037					0,050	0,050	0,050
ELECTRA DE VIESGO, S.A.	VGO										0,047	0,021	0,050	0,050
CORPORACION FINANCIERA ALBA, S.A.	ALB										0,032	0,050		2
CORPORACION FINANCIERA REUNIDA, S.A. (COFIR)	CFR	0,026	0,000	0,000	0,050	0,050	0,050	0,050						7
PRIMA INMOBILIARIA S.A.	PIN											0,024	0,050	2
INBESOS, S.A.	BES	0,023	0,050	0,013										3
AMPER, S.A.	AMP	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
AZKOYEN S.A.	AZK	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
NICOLAS CORREA S.A.	NEA				0,008	0,035	0,031	0,031	0,050	0,050	0,050	0,041	0,050	9
ZARDOYA OTIS, S.A.	ZOT	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
ACERINOX, S.A.	ACX	0,016	0,018	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,033				9
ESPAÑOLA DEL ZINC, S.A.	ZNC								0,036	0,050	0,006			3
TAVEX ALGODONERA SAN ANTONIO, S.A.	ASA									0,018	0,050	0,047	0,050	4
SEDA DE BARCELONA, S.A. (LA)	SED	0,035	0,038	0,039	0,032	0,037	0,035	0,032	0,035	0,031	0,024	0,023	0,027	12
VIDRALA S.A.	VID	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
MARCO IBERICA DE DISTRIBUCIONES S.A. (MIDESA)	MID	0,043	0,044	0,050	0,042	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,049	0,050	12
PROSEGUR S.A., CIA. DE SEGURIDAD.	PSG	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	12
CIA. GENERAL DE INVERSIONES S.A.S.I.M.	CGI	0,020	0,015	0,018	0,014	0,019	0,017	0,015	0,017	0,016	0,018	0,014	0,012	12
GLOBAL STEEL WIRE, S.A.	GSW	0,033	0,031	0,037	0,030	0,041	0,038	0,033	0,037	0,036	0,041	0,034	0,034	12
TUBACEX, S.A.	TUB								0,008	0,012				2
<b>TOTAL</b>		<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	

El mejor ajuste para este inversor se consiguen en el mes de enero, el cual ofrece un intervalo óptimo con tan solo tres puntos intermedios. Por su parte, los meses de noviembre y diciembre resultan en los peores ajustes, sus intervalos óptimos contienen ocho puntos intermedios.

XXXVIII. Los protafolios anteriores están diversificados al 5 por ciento, con lo cual desaparece prácticamente el riesgo asistemático

XXXIX. Los resultados anteriores parecen sumamente coherentes, si examinamos los objetivos pretendidos y las interrelaciones para los diversos portafolios. Asimismo, estos resultados parecen atractivos en orden a seleccionar carteras que funcionen eficientemente y se adapten adecuadamente a las preferencias del



inversor. En primer lugar, se observará que los portafolios para inversores agresivos alcanzan altas rentabilidades en comparación con los portafolios diseñados para inversores conservadores. Esta estructura de rentabilidades se produce paralelamente en la estrategia *buy & hold* y en la estrategia móvil. Respecto a las volatilidades, se observará también que ascienden a la vez que las rentabilidades, sin que aparezca ninguna excepción. Desde luego, los inversores de perfil standard se corresponden con portafolios intermedios en ambas variables, rentabilidad y volatilidad, aunque dichas variables sesgan hacia los perfiles agresivos. Es importante comparar la estrategia *buy & hold* con la móvil en cuanto a resultados conseguidos. Al pasar de la primera a la segunda, aumentan tanto las rentabilidades como las volatilidades pero en muy distinta proporción. En perfiles agresivos, se logra expansionar la rentabilidad en un 20.3 por ciento, pero incurriendo en un elevado costo de riesgo, ya que la volatilidad aumenta hasta un 54.4 por ciento. Por el contrario, en perfiles conservadores, la rentabilidad crece un 13.5 por ciento al adoptar la estrategia móvil, sin que el costo-riesgo incremente en proporciones tan altas como en el caso anterior. De hecho, este costo-riesgo experimenta un crecimiento del 18.7 por ciento solamente. Los ratios Riesgo/Rentabilidad reflejan claramente las oportunidades que brindan la estrategia *buy & hold* y la estrategia móvil a los diversos perfiles inversores. Mientras el ratio Riesgo/Rentabilidad aumenta desde 0.4082 hasta 0.4217 cuando la estrategia *buy & hold* se sustituye por la móvil, este mismo ratio disminuye desde 0.3581 hasta 0.3438 cuando la estrategia cambia como acabamos de indicar.

XL. Indicaremos, por último, que el cómputo de portafolios óptimos se puede llevar a cabo en tiempo real, si tenemos en cuenta los requerimientos en horas/frontera que se recogen en el anterior párrafo XXX. En efecto, la estimación de óptimos entre las



cotas  $L-L_\infty$  o bien  $L_1-L_\infty$ , solo ha exigido en nuestra tesis unos cuatro minutos por portafolio, sobre una base de 8 horas 8 minutos, la cual es común para todos los portafolios. Ahora bien, este tiempo se puede reducir significativamente, si se usan programas diseñados *ad hoc* para la selección compromiso con grandes computadoras.



## INDICE DE TABLAS

Tabla 1	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 2	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 3	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 4	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 5	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 6	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 7	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 8	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 9	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 10	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 11	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 12	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 13	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 14	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 15	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 16	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 17	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 18	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 19	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 20	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 21	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 22	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 23	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 24	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 25	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 26	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 27	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 28	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 29	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 30	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 31	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 32	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 33	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 34	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 35	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 36	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 37	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 38	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>



Tabla 39	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 40	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 41	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 42	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 43	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 44	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 45	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 46	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 47	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 48	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 49	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 50	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 51	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 52	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 53	22
Tabla 54	22
Tabla 55	22
Tabla 56	23
Tabla 57	26
Tabla 58	28
Tabla 59	114
Tabla 60	124
Tabla 61	126
Tabla 62	127
Tabla 63	128
Tabla 63Continuación	266
Tabla 64	133
Tabla 65	136
Tabla 66	137
Tabla 67	145
Tabla 68	149
Tabla 69	150
Tabla 70	152
Tabla 71	153
Tabla 72	154



## INDICE DE FIGURAS

Figura 1	¡Error! Marcador no definido.
Figura 2	¡Error! Marcador no definido.
Figura 3	¡Error! Marcador no definido.
Figura 4	¡Error! Marcador no definido.
Figura 5	¡Error! Marcador no definido.
Figura 6	¡Error! Marcador no definido.
Figura 7	¡Error! Marcador no definido.
Figura 8	¡Error! Marcador no definido.
Figura 9	¡Error! Marcador no definido.
Figura 10	¡Error! Marcador no definido.
Figura 11	¡Error! Marcador no definido.
Figura 12	¡Error! Marcador no definido.
Figura 13	¡Error! Marcador no definido.
Figura 14	¡Error! Marcador no definido.
Figura 15	¡Error! Marcador no definido.
Figura 16	¡Error! Marcador no definido.
Figura 17	¡Error! Marcador no definido.
Figura 18	¡Error! Marcador no definido.
Figura 19	¡Error! Marcador no definido.
Figura 20	¡Error! Marcador no definido.
Figura 21	¡Error! Marcador no definido.
Figura 22	¡Error! Marcador no definido.
Figura 23	¡Error! Marcador no definido.
Figura 24	¡Error! Marcador no definido.
Figura 25	¡Error! Marcador no definido.
Figura 26	¡Error! Marcador no definido.
Figura 27	¡Error! Marcador no definido.
Figura 28	¡Error! Marcador no definido.
Figura 29	¡Error! Marcador no definido.
Figura 30	24
Figura 31	25
Figura 32	27
Figura 33	34
Figura 34	34
Figura 35	38
Figura 36a	40
Figura 36b	40
Figura 37	43



<i>Figura 38</i>	<i>43</i>
<i>Figura 39</i>	<i>45</i>
<i>Figura 40</i>	<i>58</i>
<i>Figura 41</i>	<i>79</i>
<i>Figura 42</i>	<i>81</i>
<i>Figura 43</i>	<i>86</i>
<i>Figura 44</i>	<i>87</i>
<i>Figura 45</i>	<i>90</i>
<i>Figura 46</i>	<i>93</i>
<i>Figura 47</i>	<i>94</i>
<i>Figura 48</i>	<i>105</i>
<i>Figura 49</i>	<i>108</i>
<i>Figura 50</i>	<i>120</i>
<i>Figura 51</i>	<i>140</i>
<i>Figura 52</i>	<i>146</i>
<i>Figura 53</i>	<i>147</i>
<i>Figura 54</i>	<i>149</i>





## INDICE BIBLIOGRÁFICO

---

### *Bibliografía Citada*

- Aber J. (1976) "Industry Effects and Multivariate Stock Price Behaviour", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, XI, 4, 617-624.
- Anson S. and Mendez C. (1997) *Stock ownership and market valuation : an empirical study for the Spanish market*, Institute of European Finance University of Wales, Bangor.
- Arrow, K. (1965) *Aspects of the Theory of Risk Bearing*, Academic Book Store, Helsinki.
- Baker, K., Hargrove, M. and Haslem J. (1977) "An Empirical Analysis of the Risk Return Preferences of Individual Investors", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, 3, 377-389.
- Ballestero E., Plà-Santamaría D., Garcia A., Picó A. y Gadea J.E. (1999) *Auditoría Evaluadora de Sociedades*. Dossat. Madrid.
- Ballestero, E. (1998) "Approximating the optimum portfolio for an investor with particular preferences", *Journal of the Operational Research Society*, 49, 998-1000.
- Ballestero, E. and Romero, C (1993) "Weighting in Compromise Programming: A Theorem on Shadow Prices", *Operation Research Letters*, 13, 325-329.
- Ballestero, E. and Romero, C. (1991) "A Theorem Connecting Utility Function Optimization and Compromise Programming", *Operation Research Letters*, 10, 421-427.
- Ballestero, E. and Romero, C. (1994) "Utility Optimization When the Utility Function is Virtually Unknown", *Theory and Decision*, 37, 233-243.
- Ballestero, E. and Romero, C. (1996) "Portfolio Selection: A Compromise Programming Solution", *Journal of the Operational Research Society*, 47, 1377-1386.
- Bank of, England (1996) *Practical issues arising from the introduction of the Euro*, Bank of England, London.
- Baron D. (1977) "On the Utility Theoretic Foundations of Mean Variance Analysis", *Journal of Finance*, 12, 5, 1683-1697.
- Basu S. (1975) "The Information Content of Price Earning Ratios", *Financial Management*, 4, 2, 53-64.
- Basu S. (1977) "Investment performance of Common Stocks in Relation to Their Price-Earning Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis", *Journal of Finance*, 32, 3, 663-682.



- Bawa V. (1975) "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects", *Journal of Financial Economics*, 2, 95-121.
- Bawa V. (1978) "Safety-First, Stochastic Dominance, and Optimal Portfolio Choice", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, 5, 255-271.
- Bawa V. Elton E.J. and Gruber M.J. (1979) "Simple Rules for Optimal Portfolio Selection in a Stable Paretian Market", *Journal of Finance*, 34, 2.
- Blume, M (1970) "Portfolio Theory: A Step Toward Its Practical Application", *Journal of Business*, 43, 2, 152-173.
- Blume, M (1971) "On the Assessment of Risk", *Journal of Finance*, VI, 1, 1-10.
- Blume, M (1975) "Betas and Their Regression Tendencies", *Journal of Finance*, X, 3, 785-795.
- Borsperspektiver (1995) *Share ownership structure in Europe*, 1, Oslo, Norway.
- Burk, J. (1988) *Values in the marketplace : the American stock market under federal securities law*, W. de Gruyter, Berlin, New York.
- Charlton C. (1999) *Euro : impact & reality : business risks and practical responses to the challenge of the Euro*, Pitman London.
- Cheng L. (1977) "Functional Form, Skewness Effect and the Risk-Return Relationship", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, 1, 55-72.
- Cohen K. and Pogue J. (1967) "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio Selection Models" *Journal of Business*, 46, 166-193.
- Cohon, J. (1978) *Multiobjective Programming and Planning*. Academic Press, New York.
- Coleman, J. (1990) (Untitled). In: Swedberg R (Ed). *Economics and Sociology*, Princeton University Press, New Jersey, pp. 47-60.
- Copeland T. E. and Weston J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Reading, Massachusetts.
- Cornell, B. and Dietrich K. (1978) "Mean-Absolute-Deviation versus Least-Squares Regression Estimation of Beta Coefficients", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, XIII, 1, 123-131.
- Cutler, D.M., Poterba J.M. and Summers L.H. (1989) "What Moves Stock Prices", in Bernstein P.L. and Fabozzi F.J., (Eds.), *Streetwise, The Best Of The Journal of Portfolio Selection* (1997), Princeton University Press, Princeton 56-65.
- Dickinson, J.P. (1974) "The Reliability of Estimation Procedures in Portfolio Analysis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, IX, 3, 447-462.
- Elton E. and Gruber M.J. (1971) "Improving Forecasting Through the Design of Homogeneous Groups", *Journal of Business*, 44, 4.



Elton E., Gruber M.J. and Padberg, M.W. (1979) "Simple Rules for Optimal Portfolio Selection: The Multi-Index Case" in Elton and Gruber (Eds.), *Portfolio Theory: 25 Years Later*.

Elton E.J. and Gruber M.J. (1974) "An Algorithm for Maximizing the Geometric Mean", *Management Science*, 483-488.

Elton, E. and Gruber, M. (1984) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley and Sons, New York.

Endemaño J.M. (1993) *Las operaciones bursátiles a crédito en las bolsas españolas : (en el marco del sistema de liquidación por compensación de los contratos bursátiles y de depósito de títulos)*, Marcial Pons, Madrid.

Fama E. and Miller M. (1972) *Theory of Finance*, Holt Rinehart and Winston, New York.

Fama E.F. (1970) "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work" *Journal of Finance*, 25, 2, 383 – 417.

Fama E.F., Fisher, L. Jensen, M. and Roll, R. (1969) "The Adjustment of Stock Prices to New Information" *International Economic Review*, 10, 1, 1-21.

Finnerty J.E. (1976) "Insiders Activity and Inside Information: A Multivariate Analysis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 11, 2, 205-215.

Finnerty J.E. (1976) "Insiders and Market Efficiency", *Journal of Finance*, 31, 4, 1141-1148

Frankel J. and Meese R. (1987) "Are Exchange Rates Excessively Variable?", in Fischer S., (Eds.), *NBER Macroeconomics Annual 1987*. MIT Press, Cambridge.

Frankfurter, G. and Philips, H. (1977) "Alpha-Beta Theory: A Word of Caution", *Journal of Financial Management*, 3, 4, 35-40.

Freixas, X. (1992) *Mercados financieros Españoles*, Instituto de Estudios Fiscales Ministerio de Economía y Hacienda, Madrid.

French K. and Roll R. (1986) "Stock Returns Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders", *Journal of Financial Economics*, 19, 3-30.

Freund, R. (1956) "The Introduction of Risk into a Programming Model", *Econometrica*, 24, 253-263.

Friedman, M. and Savage, L. (1948) "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy*, 279-304.

Gigerenzer G. and Todd P.M. (1999) *Simple heuristics that make us smart*, Oxford University Press, New York.

Gitman L.J. and Joehnk M.K. (1996) *Fundamentals of Investing*, Harper Collins, New York.

González P.A. (1997) *La deuda pública*, Dykinson, Madrid.



Haugen R. (1997) *Modern Investment Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River.

Haugen, R. and Baker, N. (1991) "The Efficient Market Inefficiency of Capitalization-Weighted Stock Portfolios", *Journal of Portfolio Management*.

Jacobs, B.I. and Levy K.N. (1989) "The Complexity of the Stock Market" in Bernstein P.L. and Fabozzi F.J., (Eds.), *Streetwise, The Best of The Journal of Portfolio Management* (1997), Princeton University Press, Princeton, 65-74.

Jacobs, B.I. and Levy K.N. (1990) "Stock Market Complexity and Investment Opportunity" In Frank Fabozzi, (Ed.), *Managing Institutional Assets*, New York, Ballinger.

Jacobs, Bruce and Levy (1986) "Anomaly Capture Strategies" Presented at the Berkley Program in Finance Seminar on The Behaviour of Security Prices: Market Efficiency, Anomalies and Trading Strategies.

Jacobs, Bruce and Levy (1987) "Investment Management: Opportunities in Anomalies?" *Pension World*, 46-47.

Jacobs, Bruce and Levy (1988) "Calendar Anomalies: Abnormal Returns at Calendar Turning Points" *Financial Analysts Journal*, 28-39.

Jacobs, Bruce and Levy (1988) "Disentangling Equity Return Regularities" In *Equity Markets and Valuation Methods*. Charlottesville: The Institute of Chartered Financial Analysts Continuing Education Series, 36-46.

Jacobs, Bruce and Levy (1988) "Web of 'Regularities' Leads to Opportunity", *Pensions and Investment Age*, 14-15.

Jacobs, Bruce and Levy (1989) "Forecasting the Size Effect" *Financial Analysts Journal*.

Jacobs, Bruce and Levy (1989) "How Dividend Discount Models Can Be Used To Add Value" In *Improving Portfolio Performance With Quantitative Models*. Charlottesville: The Institute of Chartered Financial Analysts Continuing Education Series.

Jacobs, Bruce and Levy (1989) "Trading Tactics in an Inefficient Market" In Wayne Wagner, (Ed.) *A Complete Guide to Security Transactions: Controlling Costs and Enhancing Performance*, John Wiley, New York.

Jacobs, Bruce and Levy (1990) *A Revolution in Common Stock Management: Exploiting Market Inefficiencies and Forecasting Security Returns*, Dow-Jones Irwin, Homewood. IL.

Jaffe J. (1974) "Special Information and Insider Trading", *Journal of Business* 47, 3, 410-428,

Kroll, Y., Levy, H. and Markowitz, H. (1984) "Mean Variance versus Direct Utility Maximization", *Journal of Finance*, 39, 47-61.



Kroll, Y., Levy, H. and Markowitz, H. (1984) "Mean Variance versus Direct Utility Maximization", *Journal of Finance*, 39, 47-61.

Kuhn, Thomas (1970) *The Structure of Scientific Revolutions*, 2<sup>nd</sup> edition, University of Chicago Press, Chicago.

Latane, H., Tuttle, J. and Young, A. (1971) "How to Choose a Market Index" *Financial Analysts Journal*, 27, 4, 75-85.

Lease, R. Lewellen, W. and Schoarbaum, G. (1974) "The Individual Investor: Attributes and Attitudes", *Journal of Finance*, 9, 2, 413-433.

Lee, Ruben (1998) *What is an exchange? : the automation, management, and regulation of financial markets*. Oxford University Press, Oxford ; New York.

Letane H. (1959) "Criteria for Choice Among Risky Ventures", *Journal of Political Economy*, 144-155.

Levy, H. and Markowitz, H. (1979) "Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance", *American Economic Review*, 69, 308-317.

Lintner, J. (1965) "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification" *Journal of Finance*, 20, 4, 587- 615.

Lorie J.H. and Niederhoffer (1968) "Predictive and Statistical Properties of Insider Trading", *Journal of Law and Economics*, 11, 35-53,

Markowitz H (1952) "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 7.

Markowitz H (1959) *Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investments* New Haven, Yale University Press, Connecticut.

Markowitz H. (1959) *Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons Inc, New York.

Markowitz, H. (1970) *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley and Sons, New York.

Markowitz, H. (1987) *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Basil Blackwell, New York.

Markowitz, H. (1987) *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Basil Blackwell, New York.

Mossin, J. (1966) "Equilibrium in a Capital Asset Market" *Econometrica*, 34, 4, 768 – 783.

Nawrocki D. (1997) "Capital Market Theory: Is It Relevant to Practitioners?" *Journal of Financial Planning*, 97-102.

Nawrocki D. (1999) "A Brief History of Downside Risk Measures." *Journal of Investing*, 1-17.

Nawrocki D. (2000) "Portfolio Optimization, Heuristics, and the 'Butterfly Effect'", *Journal of Financial Planning*, In Press.



Nawrocki D. and Carter W. (1998) "Earnings Announcements and Portfolio Selection: Do They Add Value?", *International Review of Financial Analysis*, Vol. 7, No.1, 1998, 37-50.

New York Stock Exchange (1995) *Share ownership 1995*.

Olson, D. (1992) "Review of Empirical Studies in Multiobjective Mathematical Programming: Subject Reflection of Non-linear Utility and Learning", *Decision Science*, 23, 1-20.

Pagels, Heinz (1988) *The Dreams of Reason: The Computer and the Raise of the Sciences of Complexity*, Simon and Schuster, New York.

Park K.H. and Van Agtmael, A.W.(1993) *The world's emerging stock markets: structure, developments, regulations & opportunities*, Cambridge : Probus, Chicago.

Porter B. (1973) "An Empirical Comparison of Stochastic Dominance and Mean-Variance Portfolio Choice Criteria", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8, 4, 587-608.

Pratt S.P. and DeVere C.W. (1972) "Relationship between Insider Trading and Rates of Return for NYSE Common Stocks, 1960-1966", included in Lorie J. and Brealey R., (Eds.) *Modern Developments in Investment Management*, Praeger Publishers, New York, 268-279,

Pratt, J. (1964) "Risk Aversion in the Small and in the Large". *Econometrica*, 32, 112-136.

Pratt, J. (1964) "Risk Aversion in the Small and in the Large". *Econometrica*, 32, 112-136.

Proshare (1997) *Individual Share Ownership. Facts and figures* (2nd edition).

Reichling, P. (1996) "Safety First-Ansätze in der Portfolio-Selektion" *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 48, S. 31 - 55.

Reilly, F. (1985) *Investment Analysis and Portfolio Management*, The Dryden Press, New York.

Reinganum, M.R. (1981) "Abnormal Returns in Small Firm Portfolios" *Financial Analysts Journal*, 37, 2, 52-57.

Reinganum, M.R. (1982) "A Direct Test of Roll's Conjecture on the Firm Size Effect" *Journal of Finance*, 37, 1, 27-35.

Rentz W. and Westin R. (1975) "A Note on First-Degree Stochastic Dominance and Portfolio Composition", *Management Science*, 22, 4, 501-504.

Roll R. (1984) "Orange Juice and Weather", *American Economic Review*, 861-880.

Roll R. (1988) "R<sup>2</sup>", *Journal of Finance*, 43, 541-566.



- Romero, C. (1991) *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press, Oxford.
- Romero, C., Rehman, T. and Domingo, J. (1988) "Compromise Risk Programming for Agricultural Resource Allocation: An Illustration", *Journal of Agricultural Economy*, 39, 271-276.
- Roy A.D. (1952) "Safety-First and the Holding of Assets", *Econometrics*, 20, 431-449.
- Schiller R. (1981) "Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Dividends?", *American Economic Review*, 71, 421-436.
- Sentana, E. (1995) *Risk and return in the Spanish stock market*, London School of Economics Financial Markets Group, London.
- Sharpe W. F. (1985) *Investments*, Prentice-Hall, New Jersey, 126-130.
- Sharpe W.F. (1964) "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19, 3, 425-442.
- Sharpe, W.F. (1972) "Simple Strategies for Portfolio Diversification: Comment" *Journal of Finance*, VII, 1, 127-129.
- Sharpe, W.F. (1972) "Simple Strategies for Portfolio Diversification: Comment. A Correction" *Journal of Finance*, VII, 3, 733.
- Simon, Herbert (1987) "Rationality in Psychology and Economics" In Hogart and Reder, (Eds.), *Rational Choice: The Contrast Between Economics and Psychology*, University of Chicago Press, Chicago.
- Sole G. (1978) *El mercado español de valores : análisis economico*, Fundacion Universidad Empresa, Madrid.
- Standard and Poor's Corporation (1997) *Standard & Poor's stock market encyclopædia of the S & P "500"*, Annual Reports. Standard & Poor's Corporation, New York.
- Tyerman, R. (1999) *European capital markets and the Euro*, Datamonitor, London.
- Underhill Geoffrey, R. D. (1993) *Keeping governments out of politics: IOSCO, the Internationalisation of Securities Markets, and the question of regulation*, Department of Politics and International Studies University of Warwick, Coventry.
- United States General Accounting Office, Commerce Clearing House (1987) *Stock market crash of October 1987*, Commerce Clearing House, Chicago.
- United States, Securities and Exchange Commission. Division of Market (1988) *The October 1987 market break: a report*, The Commission, Washington , D.C.



United States. Commodity Futures Trading Commission. Division of Trading and Markets (1988) *Analysis of trading in the Chicago Board of Trade's Major Market Index futures contract on October 20, 1987*, The Commission, Washington.

United States. Securities and Exchange Commission. Division of Trading and Exchanges., (1997) Staff report on organization, management, and *regulation of conduct of members of the American Stock Exchange; special study of securities markets*, Annual Report, U.S. Govt. Print. Off., Washington.

Vasicek, O. (1973) "A Note on Using Cross-Sectional Information in Bayesian Estimation of Security Betas" *Journal of Finance*, VIII, 5, 1233-1239.

Yu, P. (1973) "A Class of Solutions for Group Decision Problems", *Management Science*, 19, 936-946.

Zeleny, M. (1982) *Multiple Criteria Decision-Making*. McGraw-Hill, New York.

Zinbarg E. (1973) "Modern Approach to Investment Risk", *Financial Executive*, 41, 2, 44-48.

Zufferey, J.B. and Tschanz-Norton, M. (1997) *Regulation of trading systems on financial markets*, Kluwer Law International and Geneva Financial Center Foundation, London.

### *Bibliografía Complementaria*

Amador F. and Romero C. (1989) "Redundancy in lexicographic goal programming: An empirical approach." *European Journal of Operational Research*, 41, 347-354.

Ang, James S. and Jess H. Chua (1979). "Composite Measures for the Evaluation of Investment performance. " *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14, 2, 361-384.

Ballesteros, E and Romero, C. (1993) "Economic Optimization by Compromise Programming: The Joint Production Model" *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 2, 65-72.

Ballesteros, E. (1994) "Joint Production Model: A Note on a Connection between Market Prices and CP Anchor Values", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 3, 119-121.

Ballesteros, E. (1997) "Efficient Frontiers Derived from Opinions and the Utility Optimization Problem", *Advances in Multiple Objective and Goal Programming*, Berlin, Springer Verlag, 356-364.

Ballesteros, E. (1997) "Selecting the CP Metric: A Risk Aversion Approach" *European Journal of Operational Research*, 97, 593-596.

Ballesteros, E. (1999) "Measuring efficiency by a single price system", *European Journal of Operational Research*, 115, 616-623.





Ballestero, E. (1999) "Project Finance: a multicriteria approach to arbitration". *Journal of Operational Research Society* (2000) (Forthcoming, Acceptation date 2 September (1999)).

Ballestero, E. and Romero, C. (1995) "Dynamic Choices in Economics: A Compromise Approach" *Multi-Objective and Goal Programming: Theory and Application*, Berlin, Springer Verlag, 11-24.

Ballestero, E. and Romero, C. (1998) *Multiple Criteria Decision Making and its Applications to Economic Problems*, Boston, Kluwer Academic Publishers (1998)

Ballestero, E. and Romero, C. (1998) "Work-leisure trade-off in a workers' enterprise: a Decision Analysis Approach", *Applied Decision Analysis*, Boston, Kluwer, 173-180

Ballestero, E., Blanco, V.H. (1984) "A Socio-cultural Model of Consumption", en Lindquist (Ed.), *Developments in Marketing Science*, Michigan, 134-139.

Berbel, J. (1988) "Target Returns within risk Programming Models: A Multi-Objective Approach". *Journal of Agricultural Economics*, Vol. 39, 263-270.

Berbel, J. (1989) "Analysis of Protected Cropping an Application of Multiobjective Programming Techniques to Spanish Horticulture". *European Review of Agricultural Economics*, Vol. 16, 203-216.

Burgess, Richard C. and Roger P. Bey (1988). "Optimal Portfolios: Markowitz Full Covariance Versus Simple Selection Rules," *Journal of Financial Research*, 11, 2, 153-164.

Can E.K. and Houck M.H., (1984) "Real time reservoir operations by goal programming", *Journal of Water Resources Planning and Management*, 110, 197-309.

Cañas, J. A. and Juarez, F. (1987) "Farm Management in Spain. Farm Management International. Reading", Vol. 1, n.º 2, 37-42.

Charnes A. and Cooper W.W. (1961) *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Wiley, New York.

Charnes A. and Cooper W.W. (1977) "Goal programming and multiple objective optimization. Part 1", *European Journal of Operational Research*, 1, 39-54.

Charnes A., Cooper W.W. and Ferguson R. (1955) "Optimal estimation of executive compensation by linear programming", *Management Science*, 1, 138-151.

Charnes A., Cooper W.W., Harrald J., Karwan K. and Wallace W. (1976) "A goal interval programming model for resource allocation in a marine environmental protection problem", *Journal of Environmental Economics and Management*, 3, 347-362.

Charnes, A. and Cooper, W.W. (1977) "Goal programming and constrained regression - A comment". *Omega*, 3, 403-409.



- Charnes, A. and Cooper, W.W. (1977) "Goal programming and multiple objective optimization, Part. 1". *European Journal of Operational Research*, 1, 39-54.
- Choo, E.U., and Atkins, D.R.O. (1980) "An interactive algorithm for multicriteria programming". *Computers and Operations Research*, 7, 81-87.
- Cochrane, J.L., Zeleny, M. Editors. (1973) *Multiple criteria decision making*. University of South Carolina Press, Columbia.
- Cohen, Kalman J. and Jerry A. Pogue (1967). "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models," *Journal of Business*, 40, 2, 166-193.
- Cohon, J.L. (1978) *Multiobjective programming and planning*. Academic Press, New York.
- Colson, G. and Zeleny, M. (1980) "Multicriterion concept of risk under incomplete information", *Computers and Operations Research*, 7, 125-143.
- Cook, W. D. (1976) "Zero-sum games with multiple goals" *Naval Research Logistics Quarterly*, 23, 615-622.
- Crabtree, J.R. (1982) "Interactive formulation system for cattle diets". *Agricultural Systems*, 8, 291-308.
- De Kluyver C.A. (1979) "An exploration of various goal programming formulations - with application to advertising media scheduling", *Journal of the Operational Research Society*, 30, 167-171.
- Debreu G. (1959) "Theory of Value - An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium", *Cowles Foundation Monograph*, Yale Univ. Press, New Haven, Connecticut.
- Dillon, J.L. (1962) "Applications of game theory in agricultural economics: review and requiem". *Australian Journal of Agricultural Economics*, 6, 20-35.
- Dyer J.S. (1977) "On the Relationship Between Goal Programming and Multi-attribute Decision Theory", Discussion paper 69, *Management Science Study Center*, University of California, Los Angeles.
- Elton, Edwin J., Martin J. Gruber and Manfred W. Padberg (1976). "Simple Criteria For Optimal Portfolio Selection," *Journal of Finance*, 31, 5, 1341-1357.
- Elton, Edwin J., Martin J. Gruber and Thomas J. Urich (1978). "Are Betas Best?" *Journal of Finance*, 33, 5, 1375-1384.
- Fama, Eugene F. & French, Kenneth R. (1992). "The Cross-Section of Expected Stock Returns." *Journal of Finance*, 47, 427-466.
- Fishburn, Peter C. (1977). "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns," *American Economic Review*, 67, 2, 116-126.
- Flavell R.B. (1976) "A new goal programming formulation", *Omega*, 4, 731-732.



Francis, Jack C. and Stephen H. Archer (1979). *Portfolio Analysis*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.

Gardiner L.R. and Steuer R. (1994) "Unified interactive multipleobjective programming" *European Journal of Operational Research*, 74, 391-406.

Gass S.I. (1986) "A process for determining priorities and weights for large-scale linear goal programmes", *Journal of the Operational Research Society*, 37, 779-785.

Gass S.I. (1987) "The settings of weights in linear goal programming", *Computers and Operations Research*, 14, 227-229.

Gershon M. and Duckstein L. (1983) "Multi-objective approaches to river basin planning", *Journal of Water Resources Planning and Management*, 109, 13-28.

Gershon M. and Duckstem L. (1984) "A procedure for the selection of a multi-objective technique with application to water and mineral resources", *Applied Mathematics and Computation*, 14, 245-271.

Hammer, Jerry A. and Herbert E. Phillips (1992). "The Single-Index Model: Cross-Sectional Residual Covariances and Superfluous Diversification," *International Review of Financial Analysis*, 1, 1, 39-50.

Harman E.L. (1980) "Non dominance in goal programming", *INFOR, Canadian Journal of Operational Research and Information Processing*, 18, 300-309.

Hazell, P.B.R. (1970) "Game theory - An extension of its application to farm planning under uncertainty". *Journal of Agricultural Economics*, 21, 239-252.

Hazell, P.B.R. (1971) "A linear alternative to quadratic and semivariance programming for farm planning under uncertainty". *American Journal of Agricultural Economics*, 53, 53-62.

Herruzo, C. (1984) "Economic and social aspects of horticulturas rescarch". *Acta Horticulturae*, 155.

Herruzo, C. (1985) "Considerations on the economic and agricultural effects of Spain's accession to the EEC". *Shogaku-Ronshu (Journal of Commerce, Economics and Economic History)*.

Herruzo, C., Velasco, A. (1985) "Returns to agricultural research: the case of rice breeding". *European Review of Agricultural Economics*, 12 (3).

Hunt, Lacy H. (1976). *Dynamics of Forecasting Financial Cycles: Theory, Technique and Implementation*, JAI Press, Greenwich, CT.

Hunt, Lacy H. (1987) *A Time to be Rich*, Rawson Associates, Macmillan, New York, NY.

Ignizio J.P. (1976) *Goal Programming and Extensions*, Heath, Lexington Books, Lexington, MA.

Ignizio LP. and Cavalier T.M. (1994) *Linear Programming*, Prentice-Hall.



- Ignizio, J.P. (1982) *Linear programming in single and multiple-objective systems*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Ignizio, J.P. (1983) "Generalized goal programming. An overview". *Computer and Operations Research*, 10, 277-289.
- Ignizio, J.P. (1985) *Introduction to linear goal programming*. Sage Publications, Beverley Hills, California.
- Ijiri Y. (1965) *Management Goals and Accounting for Control*, North Holland, Amsterdam.
- Jones D.F., (1995) *The Design and Development of an Intelligent Goal Programming System*, Ph.D. Thesis. University of Portsmouth, UK.
- Juarez, F. and Romero, C. (1986) "An Optimum Location and Size Model for a Food Processing Plant in Continuous Space". *Agricultural Systems*, 22, 71-79.
- Keeney, R.L. and Raiffa, H. (1976) *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs*. Ed. John Wiley and Sons.
- Khorramshagol R. and Moustakis V.S. (1988) "Delphic hierarchy process (DHP): A methodology for priority setting derived from the delphi method and analytical hierarchy process", *European Journal of Operational Research*, 37, 347-354.
- Khorramshahgol R. and Gousty Y. (1986) "Delphic goal programming(DGP): A multi-objective cost/benefit approach to R&D portfolio analysis" *IEEE Transactions on Engineering Management EM*, 33, 172-175.
- King, Benjamin F. (1966). "Market and Industry Factors in Stock Price Behavior." *Journal of Business*, 39, 1, Part II, 139-190.
- Kvanli A.H. (1980) "Financial planning using goal programming", *Omega*, 8, 207-218.
- Lara P. and Romero C. (1992) "An interactive multigoal programming model for determining livestock rations: An application to dairy cows in Andalusia, Spain", *Journal of the Operational Research Society* 43, 945-953.
- Lee S.M. (1972) *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach, Philadelphia.
- Lee S.M. and Kim E.B. (1992) "An analysis of pedagogical effects of alternative teaching approaches of goal programming", *Decision Sciences*, 23, 991-1002.
- Lee S.M. and Kim E.B. (1996) "An Effective Tutoring System for Goal Programming", *Omega*, 23, 295-302.
- Liu B.D. (1996) "Dependent chance goal programming and its genetic algorithm based approach", *Mathematical and Computer Modelling*, 24, 43-52.



Love C.E., Lam K.F. (1994) "Classifying and controlling errors in forecasting using multiple criteria goal programming", *Computers and Operations Research*, 21, 979-989.

MacKinlay, A. Craig (1987). "On Multivariate Tests Of The CAPM," *Journal of Financial Economics*, 18, 2, 341-372.

Maino, M., Alonso, R. and Iruretagoyena, M.T. "Cattle Production Systems by Multiobjective programming for the tenth region of Chile". *Agricultural Systems*, Vol 28, 141-157.

Martel J.M. and Aouni B. (1990) "Incorporating the decision-maker's preferences in the goal programming model", *Journal of the Operational Research Society*, 41, 1121-1132.

Masud A.S. and Hwang C.L. (1981) "Interactive sequential goal programming", *Journal of the Operational Research Society* 32, 391-400.

Minguez, L., Romero, C. and Domingo, J. (1988) "Determining Optimum Fertilizer Combinations through Goal Programming with Penalty Functions. An Application to Sugar Beet in Spain". *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 39, 61-70

Nakayama H. and Sawaragi Y. (1984) "Satisfying trade-off method for multi-objective programming", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 229, 114-122.

Nakayama H. (1992) "Trade-off analysis using parametric optimization techniques", *European Journal of Operational Research*, 60, 87-98.

Nawrocki, David N. & Carter, William L. (1996). "Phase of the Business Cycle and Portfolio Management." Working paper, Villanova University.

Ogryzak W. (1994) "A goal programming model of the RPM", *Annals of Operational Research*, 51, 33-44.

Ozernoy W., (1992) "Choosing the 'best' multiple criteria decision-making method", *INFOR: Canadian Journal of Operational Research*, 30, 159-171."

Peters, Edgar E. (1991). *Chaos and Order in the Capital Markets*. John Wiley and Sons, New York, NY.

Peters, Edgar E. (1994). *Fractal Market Analysis*, John Wiley and Sons, New York, NY.

Rawls J. (1972) *A Theory of Justice*, Oxford University Press, Oxford.

Reeves C. and Hedin S.R. (1993) "A generalized interactive goal programming procedure", *Computers and Operations Research*, 20, 747-753.

Rehman, T. and Romero, C. (1984) "Multiple Criteria Decision Making Techniques and their Role in Livestock Ration Formulation". *Agricultural Systems*, Vol. 15.



Rehman, T. and Romero, C. (1987) "Goal Programming with Penalty Functions and Livestock Ration Formulation". *Agricultural Systems*, Vol. 23, 117-132.

Rehman, T. and Romero, C. (1987) "Multiobjective and Goal Programming Techniques for Solving Agricultural Planning Problems", en: *Agriculture and Economics Instability* (Bellamy, M., and Greenshields, B., Eds.), Gower Publishing Company, 355-359.

Rehman, T. and Romero, C. (1987) "Multiple Criteria Decision Techniques and Multi Purpose Agriculture", en: *Multipurpose Agriculture and Forestry* (Merlo, M., Stellin, G., Haron, P., and Whitby, M., Eds.), Wissenschaftsverlag Vauk Kiel, 7-18.

Ringuest LL. (1992) *Multiobjective Optimization: Behavioral and Computational Considerations*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Romero C. (1986) "A survey of generalised goal programming (1970-1982)", *European Journal of Operational Research*, 25, 183-191.

Romero C. (1991) *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*, Pergamon Press, Oxford.

Romero, C. (1974) "Optimum Premium in Crop Delivery". *Journal of Agricultural Economics*, Vol. 25, 277-287.120

Romero, C. (1985) "Multiobjective and Goal Programming Approaches as a Distance Function Model". *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 36, 249-251.

Romero, C. (1985) "Naive Weighting in Non-preemptive Goal Programming-Letter to the Editor". *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 36, 647-648.

Romero, C. A. (1984) "Note: The Effects of Five Sided Penalty Functions in Goal Programming". *Omega, The International Journal of Management Science*, 12, 333.

Romero, C. and Amador, F., Barco, A. (1987) "Multiple Objectives in Agricultural Planning: A Compromise Programming Application". *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 69, 78-86.

Romero, C. and Rehman, T. (1983) "Goal Programming via Multidimensional Scaling Applied to Senegalese Subsistence Farming: Comment". *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 65, 829-831.

Romero, C. and Rehman, T. (1984) "Goal Programming and Multiple Criteria Decision Making in Farm Planning: An Expository Analysis". *Journal of Agricultural Economics*, Vol. 35, 177-190.

Romero, C. and Rehman, T. (1985) "Goal Programming and Multiple Criteria Decision Making in Farm Planning: Some Extensions". *Journal of Agricultural Economics*, Vol. 36, 171-185.



Romero, C. and Rehman, T. (1987) "Natural Resources Management and the Use of Multiple Criteria Decision Making Techniques: A Review". *European Review of Agricultural Economics*, Vol. 14, 61-89.

Romero, C. and Rehman, T. (1989) *Multiple Criteria Analysis for Agricultural Decisions*. Elsevier, Amsterdam.

Romero, C. and Rehman, T. A (1984) "Note on Diet Planning in the Third World by Linear and Goal Programming". *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 35, 555-558.

Romero, C., Rehman, T. and Domingo, J. (1988) "Compromise-Risk Programming for Agricultural Resource Allocation Problems: An Illustration". *Journal of Agricultural Economics*, Vol. 39. 271-276.

Saaty T.L. (1981) *The Analytical Hierarchy Process*, McGraw Hill International, New York.

Schniederjans M.J. (1995) "The life cycle of goal programming research as recorded in journal articles", *Operations Research*, 43, 551-557.

Schniederjans M.J. (1995) *Goal Programming Methodology and Applications*. Kluwer Publishers, Boston.

Sharpe, William F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of market Equilibrium Under Conditions of Risk." *Journal of Finance*, 19,425-442.

Shim LP. and Chin S.G. (1991) "Goal programming: The RPMS network approach", *Journal of the Operational Research Society*, 42, 83-93.

Simon H.A. (1955) *Models of Man*, Wiley, New York.

Soros, George (1987). *The Alchemy of Finance: Reading the Mind of the Market*. Simon and Schuster, New York, NY.

Spronk J., (1981) *Interactive Multiple Goal Programming: Applications to Financial Planning*, Nijhoff (Martinus), Boston, MA.

Steuer R.E. (1994) "Random problem generation and the computation of efficient extreme points in multi-objective linear programming", *Computational Optimization and Applications*, 3, 333-347.

Tabucanon, M.T. (1988) *Multiple criteria decision making in industry*. Ed. Elsevier.

Tamiz M. and Jones D.F. (1995) "Improving the flexibility of goal programming via preference modelling techniques", *Omega*, 23, 41-48.

Tamiz M. and Jones D.F. (1996) "Goal programming and Pareto efficiency", *Journal of Information and Optimization Sciences*, 17, 291-307.

Tamiz M. and Jones D.F. (1997) "Interactive frameworks for investigation of goal programming models : Theory and practice", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6, 52-60.



Tamiz M. and Mardle S.J. and Jones D.F. (1996) "Detecting IIS in infeasible linear programmes using techniques from goal programming", *Computers and Operations Research*, 231, 113-119.

Tamiz M., Jones D.F., El-Darzi E. (1993) "A review of goal programming and its applications", *Annals of Operations Research*, 58, 39-53.

Tamiz M. and Jones D.F. (1995) "Algorithmic extensions to the method of Martel and Aouni", *The Journal of the Operational Research Society*, 46, 254-257.

Teclé A. and Duckstein L. (1992) "A procedure for selecting MCDM techniques for forest resource management", in: Goicoechea A., Duckstein L. and Zionts L. (Eds.), *Multiple Criteria Decision Making, Proceedings of the Ninth International Conference: Theory and Applications in Business, Industry, and Government*, Springer, New York, 19-32.

Vaga, Tonis (1990). "The Coherent Market Hypothesis." *Financial Analysts Journal*, 46(6), 36-49.

Vaga, Tonis (1994). *Profiting From Chaos*. McGraw Hill, New York, NY.

Wierzbicki AY. (1982) "A mathematical basis for satisfying decision making", *Mathematical Modelling*, 3, 391-405.

Wildhelm W.B. (1981) "Extensions of goal programming models", *Omega*, 9, 212-214.

Yu, P.L. (1982) *Multiple criteria decision making: concepts, techniques and extensions*. Ed. Plenum.

Zeleny M. (1981) "The pros and cons of goal programming", *Computers and Operations Research*, 8, 357-359.

Zeleny, M. (1982) *Multiple criteria decision making*. Ed. McGraw-Hill.

Zimmerman H.J. (1938) "Using fuzzy sets in operational research", *European Journal of Operational Research*, 13, 201-206.

Zionts S. and Wallenius J. (1976) "An interactive programming model for solving the multiple criteria problem", *Management Science*, 22, 652-663.



