



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Resolución cinemática de una estructura a partir de la relación entre funciones de desplazamiento y leyes de esfuerzos

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

En este artículo aprenderás a resolver cinemáticamente una estructura, es decir, a obtener los movimientos en los nudos y las funciones de desplazamiento, a partir de las relaciones con las leyes de esfuerzos. Posteriormente podrás dibujar la deformada, a partir de los resultados obtenidos.

2 Introducción

Cuando se calcula cinemáticamente una estructura se persigue la determinación de su configuración cinemática final o deformada, es decir, obtener el valor de los movimientos de los nudos, de los extremos de las barras y, mediante las funciones de desplazamiento, el movimiento de cualquier punto de las mismas.

Cuando la estructura está resuelta estáticamente, sea isostática o no, se puede resolver cinemáticamente planteando las condiciones de compatibilidad externas e internas y expresando las funciones de desplazamiento en función de las leyes de esfuerzos. Al sustituir las condiciones de compatibilidad en ellas (los movimientos de los extremos de barra en ejes globales se relacionan con los movimientos de los nudos) se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los movimientos independientes de la estructura que determinan la configuración cinemática buscada.

3 Objetivos

Tras la lectura de este documento, serás capaz de:

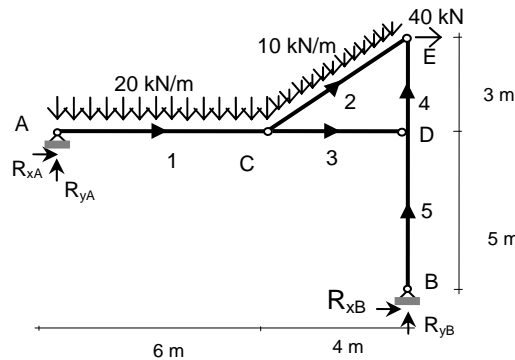
- Obtener las condiciones de compatibilidad externa e interna
- Obtener movimientos de los nudos
- Determinar la expresión final de las funciones de desplazamiento de las barras
- Dibujar la configuración cinemática admisible

4 Resolución cinemática a partir de las leyes de esfuerzos

4.1 Datos y esquema del proceso de cálculo de la estructura

La resolución cinemática de una estructura a partir de sus leyes de esfuerzos requiere que, previamente, se haya resuelto estáticamente. Si la estructura es isostática se resolverá mediante las ecuaciones de equilibrio planteadas en el conjunto y en cada una de sus partes (nudos y barras) y si la estructura es hiperestática mediante alguno de los métodos adecuados para ello (principio de las fuerzas virtuales o método de flexibilidades).

La estructura propuesta (figura 1) está cargada con una combinación de Estado Límite de Servicio.



Datos de las barras:
barras 1 y 3: IPE 360
barra 2: IPE 300,
barras 4 y 5: HEB 450

Figura 1. Esquema de la estructura

El proceso de cálculo que seguiremos es el siguiente:

- Resolución estática de la estructura
- Planteamiento de las condiciones de compatibilidad y transformación de ejes de los movimientos de extremo de barra.
- Expresión de las funciones de desplazamiento a partir de las leyes de esfuerzos definidas en ejes locales y de los movimientos del extremo i de cada barra.
- Obtención de los movimientos de los nudos y de los movimientos de extremo de barra. Formulación de las funciones de desplazamiento.
- Dibujo de la configuración cinemática admisible (deformada de la estructura).

4.2 Resolución estática

Se trata de una estructura isostática por lo que la puedes resolver directamente a partir de las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_x=0 \quad R_{xA} + R_{xB} + 40 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y=0 \quad R_{yA} + R_{yB} = 120 + 50 \quad (2)$$

$$\sum M=0 \quad 120 \cdot 3 + 50 \cdot 8 + 40 \cdot 3 = R_{yB} \cdot 10 + R_{xB} \cdot 5 \quad (3)$$

$$\text{Aislando la barra 1: } \sum M_j=0 \quad M_{i1} - F'_{yi1} \cdot 6 + 120 \cdot 3 + M_{j1} = 0 \quad \Rightarrow F'_{yi1} = R_{yA} = 60 \text{ kN}$$

$$\text{Sustituyendo en (2) (3) y (1): } \boxed{R_{yB} = 110 \text{ kN}} \quad \boxed{R_{xB} = -44 \text{ kN}} \quad \boxed{R_{xA} = 4 \text{ kN}}$$

Obtenidas las reacciones calculamos los esfuerzos en los extremos de cada barra y las leyes de esfuerzos. En la figura 2 tienes el esquema completo del equilibrio en ejes globales.

Las leyes de esfuerzos (axiles y momentos) son las siguientes:

<u>Barra 1:</u>	$N_1 = -4$	$M_1(x) = 60x - 10x^2$
<u>Barra 2:</u>	$N_2(x) = 126,64 + 6x$	$M_2(x) = 20x - 4x^2$
<u>Barra 3:</u>	$N_3 = -117,3$	$M_3 = 0$
<u>Barra 4:</u>	$N_4 = -110$	$M_4(x) = 220 - 73,3x$
<u>Barra 5:</u>	$N_5 = -110$	$M_5(x) = 44x$

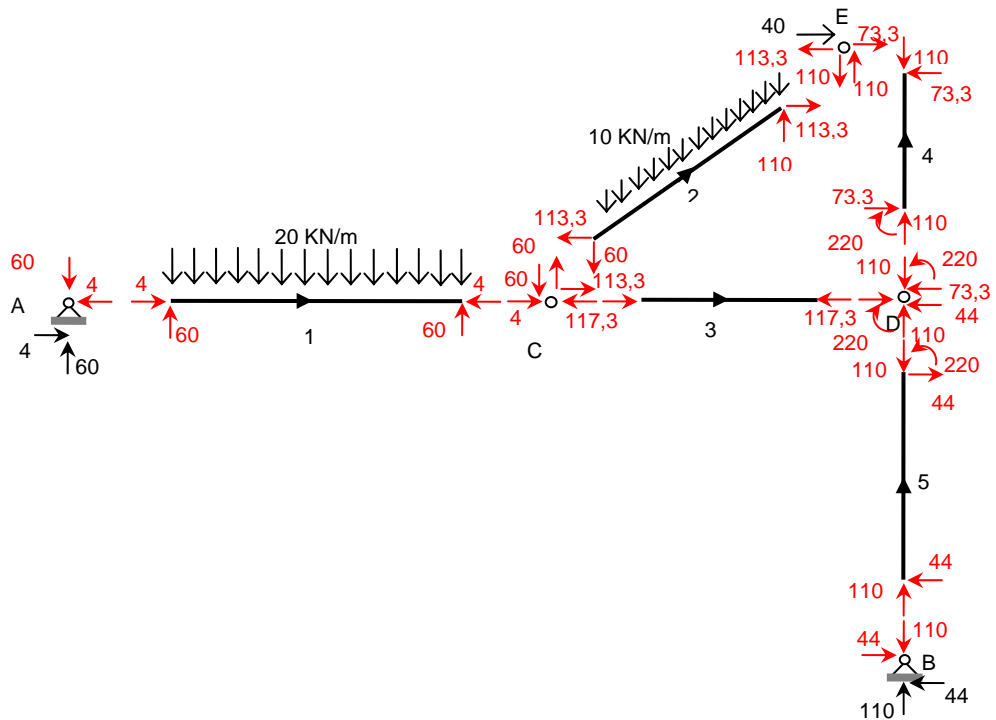


Figura 2. Esquema del equilibrio de la estructura completa

4.3 Planteamiento de las condiciones de compatibilidad y transformación de ejes

Si la estructura es isostática, el número de condiciones de compatibilidad efectivas es 3 por el número de barras de la estructura, es decir 15.

INTERNAS:

$$\begin{aligned} d'xj1 &= d'xi2 = d'xi3 = dxC \\ d'xj2 &= d'xj4 = dxE \\ d'yj2 &= d'yj4 = dyE \\ d'xj3 &= d'xi4 = d'xj5 = dxD \\ d'yj3 &= d'yi4 = d'yj5 = dyD \\ \theta'i4 &= \theta'j5 = \theta D \\ d'xi1 &= dxA = 0 \end{aligned}$$

EXTERNAS:

$$\begin{aligned} d'yi1 &= dyA = 0 \\ d'xi5 &= dxB = 0 \\ d'yi5 &= dyB = 0 \end{aligned}$$

Para poder aplicar estas condiciones de compatibilidad transformamos de ejes locales a ejes globales los movimientos de los extremos de las barras:

BARRA 1:

$$\begin{aligned} d'xi1 &= dxi1 & d'xj1 &= dxj1 & (\text{coinciden ambos ejes}) \\ d'yi1 &= dyi1 & d'yj1 &= dyj1 \\ \theta'i1 &= \theta i1 & \theta'j1 &= \theta j1 \end{aligned}$$

BARRA 2: ($\alpha = 36.86^\circ$, $\text{sen } \alpha = 0.6$, $\text{cos } \alpha = 0.8$) $q_i = T^T q'_i$ $q_j = T^T q'_j$

$$\begin{bmatrix} dxi_2 \\ dyi_2 \\ \theta i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cos } \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \text{cos } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'xi_2 \\ d'yi_2 \\ \theta' i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} dxi2 &= 0.8 d'xi2 + 0.6 d'yi2 \\ dyi2 &= -0.6 d'xi2 + 0.8 d'yi2 \\ \theta i2 &= \theta' i2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} dxj_2 \\ dyj_2 \\ \theta j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cos } \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \text{cos } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'xj_2 \\ d'yj_2 \\ \theta' j_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} dxj2 &= 0.8 d'xj2 + 0.6 d'yj2 \\ dyj2 &= -0.6 d'xj2 + 0.8 d'yj2 \\ \theta j2 &= \theta' j2 \end{aligned}$$

BARRA 3:

$$\begin{aligned} d'xi3 &= dxi3 & d'xj3 &= dxj3 & (\text{coinciden ambos ejes}) \\ d'yi3 &= dyi3 & d'yj3 &= dyj3 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{llll}
 & \theta'_{i3} = \theta_{i3} & \theta'_{j3} = \theta_{j3} & \\
 \text{BARRA 4:} & d'x_{i4} = -dy_{i4} & d'x_{j4} = -dy_{j4} & (\alpha = 90^\circ) \\
 & d'y_{i4} = dx_{i4} & d'y_{j4} = dx_{j4} & \\
 & \theta'_{i4} = \theta_{i4} & \theta'_{j4} = \theta_{j4} & \\
 \text{BARRA 5:} & d'x_{i5} = -dy_{i5} & d'x_{j5} = -dy_{j5} & (\alpha = 90^\circ) \\
 & d'y_{i5} = dx_{i5} & d'y_{j5} = dx_{j5} & \\
 & \theta'_{i5} = \theta_{i5} & \theta'_{j5} = \theta_{j5} &
 \end{array}$$

4.4 Expresión de las funciones de desplazamiento a partir de las leyes de esfuerzos

Expresamos las funciones de desplazamiento en función de los esfuerzos y de los movimientos en el extremo i , y sustituimos x por la longitud de la barra, obteniendo el movimiento en el extremo final en función del inicial.

BARRA 1: ($EA_1 = 1526700$ KN, $EI_1 = 34167$ KN m², $L_1 = 6$ m)

Función de desplazamientos del axil: $u_1(x) = \int_0^x \frac{N_1}{EA_1} dx + dx_{i1}$

$$u_1(x) = \int_0^x \frac{-4}{EA_1} dx + dx_{i1} = \frac{-4x}{1526700} + dx_{i1} \Rightarrow u_1(x) = -2.6210^{-6}x + dx_{i1}$$

$$\text{para } x = 6 \Rightarrow u_1(6) = dx_{j1} \Rightarrow dx_{j1} = -1.57210^{-5} + dx_{i1} \quad (1)$$

Función de desplazamientos y giros del flector:

flechas: $v_1(x) = \int_0^x \int \frac{M_1(x)}{EI_1} dx + \theta_{i1}x + dy_{i1}$

$$v_1(x) = \int_0^x \int \frac{60x - 10x^2}{EI_1} dx + \theta_{i1}x + dy_{i1} = 2.92710^{-4}x^3 - 2.43910^{-5}x^4 + \theta_{i1}x + dy_{i1}$$

$$\text{para } x = 6 \Rightarrow v_1(6) = dy_{j1} \Rightarrow dy_{j1} = 3.1610^{-2} + 6\theta_{i1} + dy_{i1} \quad (2)$$

giros: $v'_1(x) = \theta_1(x) = \int_0^x \frac{M_1(x)}{EI_1} dx + \theta_{i1}$

$$v'_1(x) = \int_0^x \frac{60x - 10x^2}{EI_1} dx + \theta_{i1} = 8.7810^{-4}x^2 - 9.75610^{-5}x^3 + \theta_{i1}$$

$$\text{para } x = 6 \Rightarrow v'_1(6) = \theta_{j1} \Rightarrow \theta_{j1} = 1.0510^{-2} + \theta_{i1} \quad (3)$$

BARRA 3 ($EA_3 = 1526700$ KN, $EI_3 = 34167$ KN m², $L_1 = 4$ m)

Función de desplazamientos del axil: $u_3(x) = \int_0^x \frac{N_3}{EA_3} dx + dx_{i3}$

$$u_3(x) = \int_0^x \frac{-117.3}{EA_3} dx + dx_{i3} = \frac{-117.3x}{1526700} + dx_{i3} \Rightarrow u_3(x) = -7.6810^{-5}x + dx_{i3}$$

$$\text{para } x = 4 \Rightarrow u_3(4) = dx_{j3} \Rightarrow dx_{j3} = -3.07210^{-4} + dx_{i3} \quad (4)$$

Función de desplazamientos y giros del flector:

flechas: $v_3(x) = \int_0^x \int \frac{M_3(x)}{EI_3} dx + \theta_{i3}x + dy_{i3} \Rightarrow v_3(x) = \theta_{i3}x + dy_{i3}$

$$\text{para } x = 4 \Rightarrow v_3(4) = dy_{j3} \Rightarrow dy_{j3} = 4\theta_{i3} + dy_{i3} \quad (5)$$



giros: $v_3'(x) = \theta_3(x) = \int_0^x \frac{M_3(x)}{EI_3} dx + \theta_{j_3} \Rightarrow v_3'(x) = \theta_{j_3}$
 para $x = 4 \Rightarrow v_3'(4) = \theta_{j_3} \Rightarrow \theta_{j_3} = \theta_{i_3}$ (6)

BARRA 5 ($EA_5 = 4578000$ KN, $EI_5 = 167762,7$ KN m², $L_5 = 5$ m)

Función de desplazamientos del axil: $u_5(x) = \int_0^x \frac{N_5}{EA_5} dx + dx_{i_5}$

$u_5(x) = \int_0^x \frac{-110}{EA_5} dx + dx_{i_5} = \frac{-110x}{4578000} + dx_{i_5} \Rightarrow u_5(x) = -2.4 \cdot 10^{-5} x + dx_{i_5}$

para $x = 5 \Rightarrow u_5(5) = dx_{j_5} \Rightarrow dx_{j_5} = -1.2 \cdot 10^{-4} + dx_{i_5}$ (7)

Función de desplazamientos y giros del flector:

flechas: $v_5(x) = \int_0^x \int \frac{M_5(x)}{EI_5} dx + \theta_{i_5} x + dy_{i_5}$

$v_5(x) = \int_0^x \int \frac{44x}{EI_5} dx + \theta_{i_5} x + dy_{i_5} = 4.37 \cdot 10^{-5} x^3 + \theta_{i_5} x + dy_{i_5}$

para $x = 5 \Rightarrow v_5(5) = dy_{j_5} \Rightarrow dy_{j_5} = 5.46 \cdot 10^{-3} + 5\theta_{i_5} + dy_{i_5}$ (8)

giros: $v_5'(x) = \theta_5(x) = \int_0^x \frac{M_5(x)}{EI_5} dx + \theta_{i_5} \quad v_5'(x) = \int_0^x \frac{44x}{EI_5} dx + \theta_{i_5} = 1.3110^{-4} x^2 + \theta_{i_5}$

para $x = 5 \Rightarrow v_5'(5) = \theta_{j_5} \Rightarrow \theta_{j_5} = 3.2810^{-3} + \theta_{i_5}$ (9)

BARRA 4 ($EA_4 = 4578000$ KN, $EI_4 = 167762,7$ KN m², $L_4 = 3$ m)

Función de desplazamientos del axil: $u_4(x) = \int_0^x \frac{N_4}{EA_4} dx + dx_{i_4}$

$u_4(x) = \int_0^x \frac{-110}{EA_4} dx + dx_{i_4} = \frac{-110x}{4578000} + dx_{i_4} \Rightarrow u_4(x) = -2.4 \cdot 10^{-5} x + dx_{i_4}$

para $x = 3 \Rightarrow u_4(3) = dx_{j_4} \Rightarrow dx_{j_4} = -7.2 \cdot 10^{-5} + dx_{i_4}$ (10)

Función de desplazamientos y giros del flector:

flechas: $v_4(x) = \int_0^x \int \frac{M_4(x)}{EI_4} dx + \theta_{i_4} x + dy_{i_4}$

$v_4(x) = \int_0^x \int \frac{220 - 73.3x}{EI_4} dx + \theta_{i_4} x + dy_{i_4} = 6.55 \cdot 10^{-4} x^2 - 7.2810^{-5} x^3 + \theta_{i_4} x + dy_{i_4}$

para $x = 3 \Rightarrow v_4(3) = dy_{j_4} \Rightarrow dy_{j_4} = 3.93 \cdot 10^{-3} + 3\theta_{i_4} + dy_{i_4}$ (11)

giros: $v_4'(x) = \theta_4(x) = \int_0^x \frac{M_4(x)}{EI_4} dx + \theta_{i_4}$

$v_4'(x) = \int_0^x \frac{220 - 73.3x}{EI_4} dx + \theta_{i_4} = 1.3110^{-3} x - 2.18 \cdot 10^{-4} x^2 + \theta_{i_4}$

para $x = 3 \Rightarrow v_4'(3) = \theta_{j_4} \Rightarrow \theta_{j_4} = 1.97 \cdot 10^{-3} + \theta_{i_4}$ (12)

BARRA 2 ($EA_2 = 1129800$ KN, $EI_2 = 17556$ KN m², $L_2 = 5$ m)

Función de desplazamientos del axil: $u_2(x) = \int_0^x \frac{N_2(x)}{EA_2} dx + dx_{i_2}$

$u_2(x) = \int_0^x \frac{126.64 + 6x}{EA_2} dx + dx_{i_2} = 1.12 \cdot 10^{-4} x + 2.65 \cdot 10^{-6} x^2 + dx_{i_2}$

para $x = 5 \Rightarrow u_2(5) = dx_{j_2} \Rightarrow dx_{j_2} = 6.27 \cdot 10^{-4} + dx_{i_2}$ (13)

(C) $dy_D = 4\theta'_3 + dy_C \Rightarrow \theta'_3 = 3.92 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$
 (D) $\theta'_{j_3} = \theta'_3 \Rightarrow \theta'_{j_3} = 3.92 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

Funciones de desplazamiento

BARRA 1: $u_1(x) = -2.62 \cdot 10^{-6} x$
 $v_1(x) = 2.927 \cdot 10^{-4} x^3 - 2.439 \cdot 10^{-5} x^4 - 7.9 \cdot 10^{-3} x$
 $v'_1(x) = 8.78 \cdot 10^{-4} x^2 - 9.756 \cdot 10^{-5} x^3 - 7.9 \cdot 10^{-3}$

BARRA 2: $u_2(x) = 1.12 \cdot 10^{-4} x + 2.65 \cdot 10^{-6} x^2 - 9.49 \cdot 10^{-3}$
 $v_2(x) = 1.89 \cdot 10^{-4} x^3 - 1.89 \cdot 10^{-5} x^4 + 1.44 \cdot 10^{-3} x - 1.26 \cdot 10^{-2}$
 $v'_2(x) = 5.69 \cdot 10^{-4} x^2 - 7.59 \cdot 10^{-5} x^3 + 1.44 \cdot 10^{-3}$

BARRA 3: $u_3(x) = -7.68 \cdot 10^{-5} x - 1.572 \cdot 10^{-5}$
 $v_3(x) = 3.92 \cdot 10^{-3} x - 1.58 \cdot 10^{-2}$
 $v'_3(x) = 3.92 \cdot 10^{-3}$

BARRA 4: $u_4(x) = -2.4 \cdot 10^{-5} x - 1.2 \cdot 10^{-4}$
 $v_4(x) = 6.55 \cdot 10^{-4} x^2 - 7.28 \cdot 10^{-5} x^3 + 2.25 \cdot 10^{-3} x + 3.23 \cdot 10^{-4}$
 $v'_4(x) = 1.31 \cdot 10^{-3} x - 2.18 \cdot 10^{-4} x^2 + 2.25 \cdot 10^{-3}$

BARRA 5: $u_5(x) = -2.4 \cdot 10^{-5} x$
 $v_5(x) = 4.37 \cdot 10^{-5} x^3 - 1.03 \cdot 10^{-3} x$
 $v'_5(x) = 1.31 \cdot 10^{-4} x^2 - 1.03 \cdot 10^{-3}$

4.6 Dibujo de la configuración cinemática admisible

En la figura 3 se representa la configuración cinemática admisible de la estructura, a partir de los resultados obtenidos. La flecha relativa, f/L , deberá cumplir las limitaciones establecidas en el CTE.

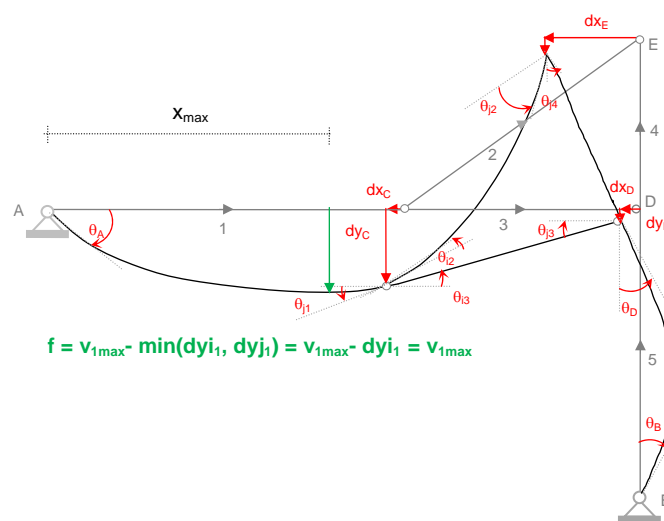


Figura 3. Configuración cinemática admisible



5 Cierre

A lo largo de este tema has aprendido a resolver cinemáticamente una estructura a partir de las leyes de esfuerzos, obteniendo los movimientos de los nudos y las funciones de desplazamiento y dibujando su deformada. Este esquema de cálculo es aplicable a cualquier estructura resuelta estáticamente independientemente del número de barras así como de sus condiciones de vínculo y enlace.

Como ejercicio de aplicación calcula los desplazamientos dx_A , dx_C de la estructura de la figura 4. (Resultado: $dx_A = -3.832 \cdot 10^{-3}$ m, $dx_C = 4.564 \cdot 10^{-5}$ m)

Datos: $E = 210000$ N/mm².

Barras 1 y 2: $A = 62.6$ cm² $I = 11770$ cm⁴

Barras 3 y 4: $A = 91$ cm² $I = 8090$ cm⁴

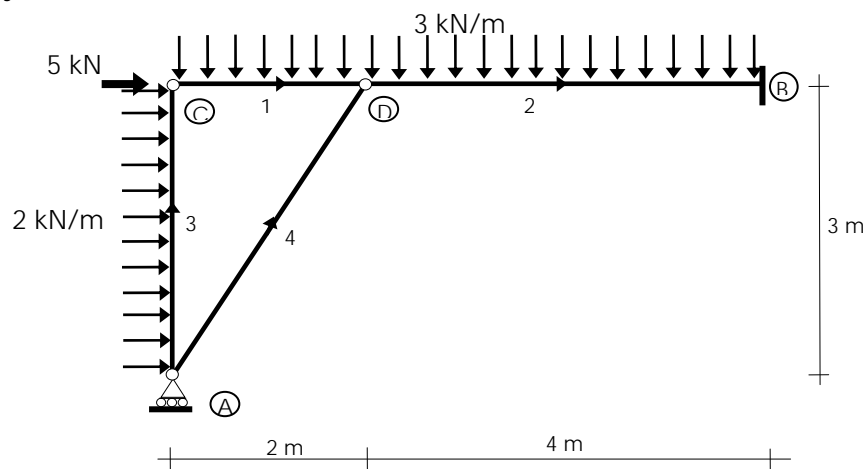


Figura 4. Ejercicio propuesto

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Abdilla E. "Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1". Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

[2] Basset, L.; Leyes de esfuerzos y funciones de desplazamiento a lo largo de una barra. Colección: Artículos docentes ETSA, 2011
<http://hdl.handle.net/10251/12714>

6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Esquema de la estructura.

Figura 2. Esquema del equilibrio de la estructura completa.

Figura 3. Configuración cinemática admisible.

Figura 4. Ejercicio propuesto