



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Resolución de estructuras con el Método de Flexibilidades

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

El Método de Flexibilidades permite resolver estáticamente una estructura hiperestática. En este artículo docente explicaremos el procedimiento a seguir mediante un ejemplo práctico.

2 Introducción

Las estructuras de edificación son habitualmente hiperestáticas y puede adoptarse para ellas la hipótesis de comportamiento elástico y lineal. Para determinar el valor de las reacciones en los apoyos y de los esfuerzos en los extremos de las barras, es decir, para resolverlas estáticamente, debe utilizarse un método adecuado. Uno de estos métodos es el Método de Flexibilidades.

El grado de hiperestaticidad de la estructura determinará el número de fuerzas redundantes así como la descomposición de la estructura real hiperestática aplicando el principio de superposición. La estructura hiperestática se descompondrá en la suma de una estructura isostática básica (obtenida a partir de la original en la que se ha suprimido la o las fuerzas redundantes) cargada como la anterior y tantos estados unidad de carga multiplicados por la redundante asociada como sea el grado de hiperestaticidad.

Para devolver las condiciones cinemáticas a la estructura original se plantean condiciones de compatibilidad en cada uno de los puntos de aplicación de las fuerzas redundantes y en su dirección. Las incógnitas del sistema de ecuaciones de compatibilidad son las fuerzas redundantes (incógnitas estáticas principales). A partir de ellas se obtiene, directamente por equilibrio o bien mediante el principio de superposición, el resto de incógnitas estáticas, quedando resuelta la estructura.

3 Objetivos

Con la lectura de este documento, serás capaz de:

- Descomponer adecuadamente la estructura hiperestática aplicando el principio de superposición, una vez seleccionadas las fuerzas redundantes.
- Plantear las ecuaciones de compatibilidad
- Obtener el valor de los movimientos de la estructura isostática básica y de los estados unidad.
- Obtener el valor de las fuerzas redundantes y resolver estáticamente, a partir de ellas, la estructura completa.

4 Resolución de estructuras con el Método de Flexibilidades

4.1 Datos y esquema del proceso de cálculo

La estructura de la figura 1, con comportamiento elástico y lineal, está formada por una viga (barra 1) y un soporte (barra 2). Los apoyos de la estructura son un



empotramiento (nudo A) y una articulación fija (nudo B). La estructura es hiperestática y se considera despreciable la energía de deformación por cortante.

Datos de las barras: barras 1: IPE 200: $A = 28.5 \text{ cm}^2$ $I = 1948 \text{ cm}^4$
barra 2: HEB 120: $A = 34.0 \text{ cm}^2$ $I = 864 \text{ cm}^4$
 $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

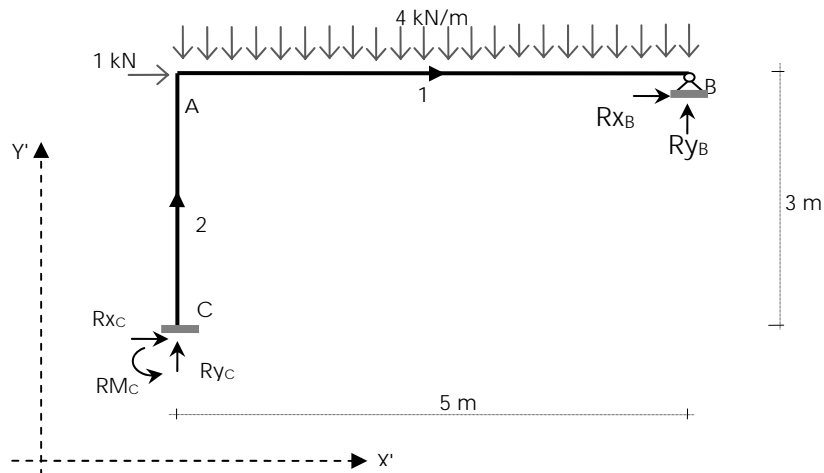


Figura1. Esquema de la estructura

El proceso de cálculo que seguiremos es el siguiente:

- Obtención del grado de indeterminación estática y selección de la(s) redundante(s).
- Descomposición de la estructura hiperestática aplicando el principio de superposición
- Equilibrio en la estructura isostática básica, obteniendo reacciones y leyes de esfuerzos.
- Equilibrio en los estados unidad, obteniendo reacciones y leyes de esfuerzos.
- Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad en los puntos de la estructura hiperestática correspondientes a las redundantes seleccionadas.
- Obtención de los movimientos de la estructura isostática básica
- Obtención de los movimientos de cada estado unidad
- Obtención de las fuerzas redundantes
- Determinación estática de la estructura.

4.2 Obtención del grado de indeterminación estática y selección de redundante(s)

El grado de indeterminación estática de esta estructura puede deducirse muy fácilmente a partir del número de reacciones externas y del número de ecuaciones de equilibrio global de la estructura, por ser una estructura abierta con un nudo libre rígido.



La estructura propuesta es, por tanto, hiperestática de grado 2, es decir, hay dos fuerzas redundantes.

Las fuerzas redundantes son fuerzas incógnitas externas o internas, independientes entre sí. En este caso concreto se elige como fuerzas redundantes las reacciones en el apoyo B, R_{xB} y R_{yB} .

4.3 Descomposición de la estructura hiperestática

La estructura hiperestática (aplicando el principio de superposición) se descompone en (figura 2):

a) una estructura isostática llamada estructura isostática básica obtenida a partir de la hiperestática eliminando las redundantes seleccionadas y cargada con la misma carga que ésta.

b) Un estado de carga unidad por cada una de las redundantes, es decir, en este caso particular, dos estados de carga unidad (multiplicados, cada uno de ellos, por su redundante asociada).

Estos estados serán isostáticos (los mismos que la estructura isostática básica) y estarán cargados con una única carga unidad en el punto de aplicación y dirección de la redundante correspondiente.

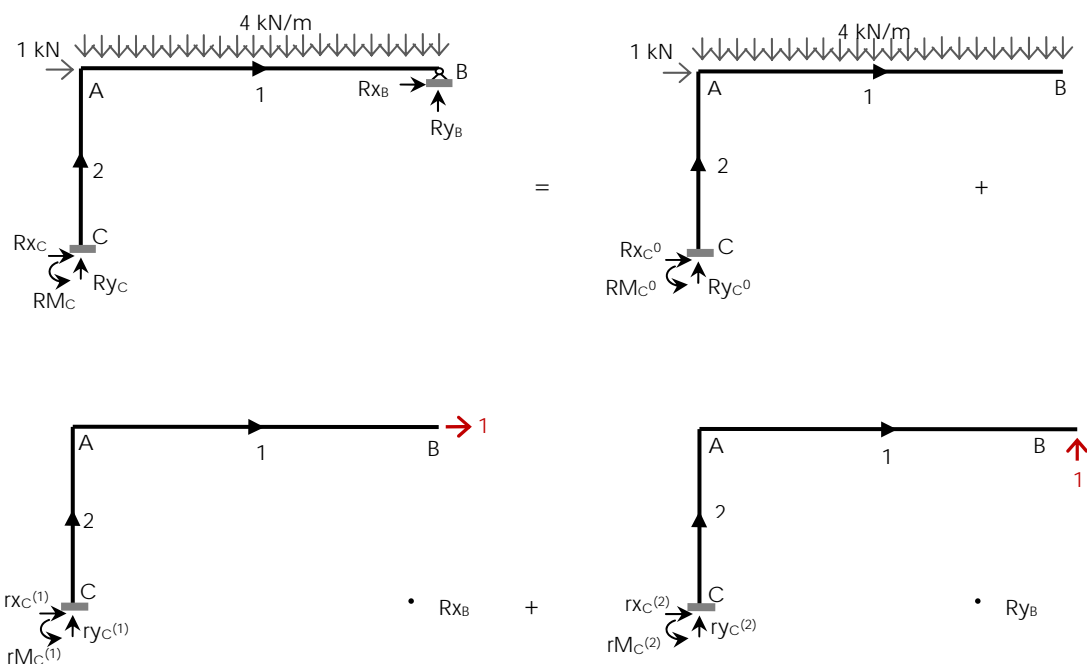


Figura 2. Descomposición según el Método de Flexibilidades

4.4 Equilibrio en la estructura isostática básica

Se plantea el equilibrio en la estructura isostática (equilibrio externo y equilibrio interno), determinando las reacciones, los esfuerzos de extremo de barra y las leyes de esfuerzos, necesarias para el cálculo posterior de los movimientos (Δ^0) que intervienen en las ecuaciones de compatibilidad (figura 3).



$$\Sigma F_x=0 \quad R_{xc}^0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{xc}^0 = -1 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \quad R_{yc}^0 = 4 \cdot 5 = 20 \quad \Rightarrow \quad R_{yc}^0 = 20 \text{ kN} \quad (2)$$

$$\Sigma M_c=0 \quad R_{mc}^0 = 4 \cdot 5 \cdot 2.5 + 1 \cdot 3 = 53 \quad \Rightarrow \quad R_{mc}^0 = 53 \text{ kNm} \quad (3)$$

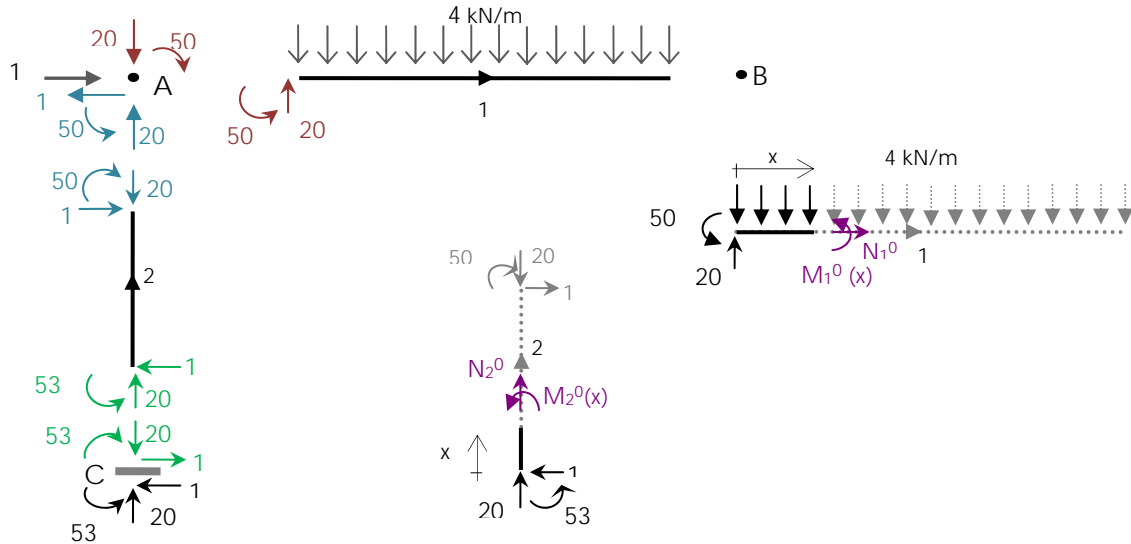


Figura 3. Esquema del equilibrio y leyes en la estructura isostática básica

Leyes de esfuerzos (sólo axiles y flectores)

Barra 1

$$N_1^0 = 0$$

$$M_1^0(x) = -50 + 20x - 2x^2$$

Barra 2

$$N_2^0 = -20$$

$$M_2^0(x) = -53 + x$$

4.4 Equilibrio en los estados unidad

Se plantea el equilibrio en cada estado unidad (equilibrio externo y equilibrio interno), determinando las reacciones, los esfuerzos de extremo de barra y las leyes de esfuerzos, necesarias para el cálculo posterior de los movimientos (c_{ij} , influjos de flexibilidad) que intervienen en las ecuaciones de compatibilidad.

ESTADO UNIDAD 1 (figura 4)

$$\Sigma F_x=0 \quad r_{xc}^{(1)} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{xc}^{(1)} = -1 \text{ kN} \quad (4)$$

$$\Sigma F_y=0 \quad r_{yc}^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{yc}^{(1)} = 0 \text{ kN} \quad (5)$$

$$\Sigma M_c=0 \quad r_{mc}^{(1)} = 1 \cdot 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad r_{mc}^{(1)} = 3 \text{ kNm} \quad (6)$$

Leyes de esfuerzos (sólo axiles y flectores)

Barra 1

$$n_1^{(1)} = 1$$

$$m_1^{(1)}(x) = 0$$

Barra 2

$$n_2^{(1)} = 0$$

$$m_2^{(1)}(x) = x - 3$$

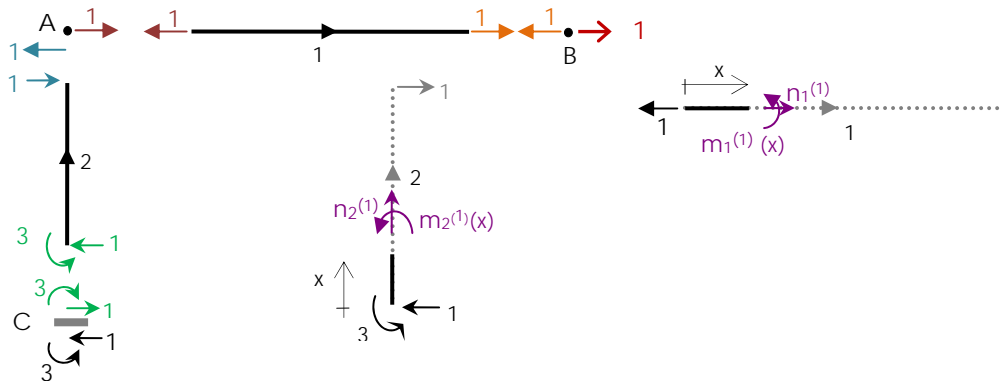


Figura 4. Esquema del equilibrio y leyes en el estado unidad 1

ESTADO UNIDAD 2 (figura 5)

$$\sum F_x = 0 \quad r_{x_C}^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{x_C}^{(2)} = 0 \text{ kN} \quad (7)$$

$$\sum F_y = 0 \quad r_{y_C}^{(2)} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{y_C}^{(2)} = -1 \text{ kN} \quad (8)$$

$$\sum M_C = 0 \quad r_{M_C}^{(2)} + 1 \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{M_C}^{(2)} = -5 \text{ kNm} \quad (9)$$

Leyes de esfuerzos (sólo axiles y flectores)

Barra 1

$$n_1^{(2)} = 0$$

$$m_1^{(2)}(x) = 5 - x$$

Barra 2

$$n_2^{(2)} = 1$$

$$m_2^{(2)}(x) = 5$$

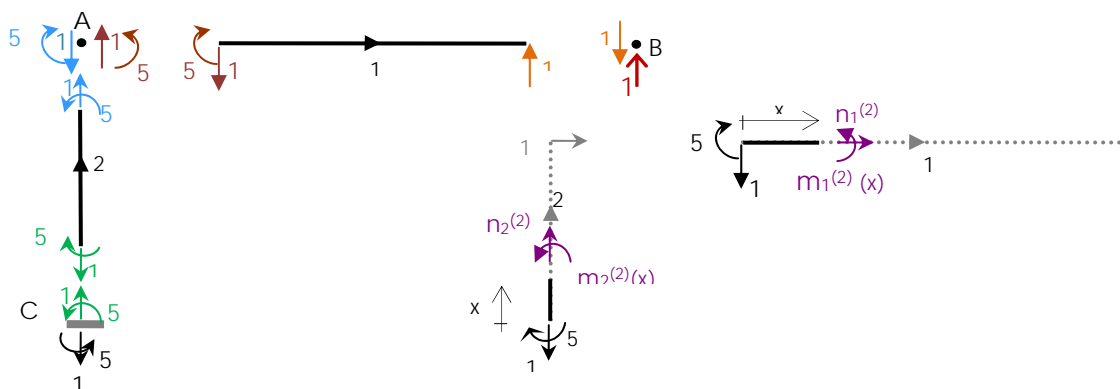


Figura 5. Esquema del equilibrio y leyes en el estado unidad 2

4.5 Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad

El número de ecuaciones coincidirá con el número de redundantes

$$dx_B = dx_B^0 + c_{11} R_{x_B} + c_{21} R_{y_B} \quad (10)$$

$$dy_B = dy_B^0 + c_{21} R_{x_B} + c_{22} R_{y_B} \quad (11)$$



4.6 Obtención de los movimientos de la estructura isostática básica

Teniendo claro el procedimiento para obtener movimientos en una estructura isostática con el Principio de las Fuerzas Virtuales (Teorema de la Carga Unidad) podemos ahora calcular los movimientos de la estructura isostática básica en los puntos de aplicación y dirección de las redundantes (Δ^0). Para ello planteamos un estado virtual con una fuerza unidad en la dirección y punto de aplicación de cada movimiento que queremos calcular. Estos estados virtuales unidad coinciden con los estados reales de la descomposición anterior, por tanto, ya los tenemos resueltos estáticamente.

La fuerza virtual unidad genera un trabajo virtual complementario de las fuerzas exteriores (δW^*) que se equilibra con la energía de deformación virtual complementaria (δU^*), permitiendo la obtención del movimiento.

MOVIMIENTO dx_B^0

Estructura real: estructura isostática básica.

$$\begin{aligned} \text{Leyes: } N_1^0 &= 0 & M_1^0(x) &= -50 + 20x - 2x^2 \\ N_2^0 &= -20 & M_2^0(x) &= -53 + x \end{aligned}$$

Estado virtual: coincide con el estado unidad 1

$$\begin{aligned} \text{Leyes: } \delta N_1^{(1)} &= 1 & \delta M_1^{(1)}(x) &= 0 \\ \delta N_2^{(1)} &= 0 & \delta M_2^{(1)}(x) &= x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Ec Balance: } \delta W^* = \delta U^* \quad dx_B^0 = \int_0^3 \frac{(-53+x)(x-3)}{1814.4} dx \quad \Rightarrow \quad dx_B^0 = 0.1289 \text{ m}$$

MOVIMIENTO dy_B^0

Estructura real: estructura isostática básica.

$$\begin{aligned} \text{Leyes: } N_1^0 &= 0 & M_1^0(x) &= -50 + 20x - 2x^2 \\ N_2^0 &= -20 & M_2^0(x) &= -53 + x \end{aligned}$$

Estado virtual: coincide con el estado unidad 2

$$\begin{aligned} \text{Leyes: } \delta N_1^{(2)} &= 0 & \delta M_1^{(2)}(x) &= 5 - x \\ \delta N_2^{(2)} &= 1 & \delta M_2^{(2)}(x) &= 5 \end{aligned}$$

Ec Balance: $\delta W^* = \delta U^*$

$$dy_B^0 = \int_0^5 \frac{(-50+20x-2x^2)(5-x)}{4090.8} dx + \frac{(-20)1 \cdot 3}{714000} + \int_0^{3.5} \frac{(-53+x)5}{1814.4} dx \quad \Rightarrow \quad dy_B^0 = -0.5022 \text{ m}$$

4.7 Obtención de los movimientos de cada estado unidad

Obtenemos los movimientos de cada estado unidad en los puntos de aplicación y dirección de las redundantes (c_{ij} , influjos de flexibilidad) con el Principio de las Fuerzas Virtuales (Teorema de la Carga Unidad). El procedimiento es el mismo sólo que en este caso tanto el estado real como el virtual son estados unidad.

MOVIMIENTOS DEL ESTADO 1

Movimiento c_{11}

Estructura real: estructura del estado unidad 1.

$$\text{Leyes: } n_1^{(1)} = 1 \quad m_1^{(1)}(x) = 0 \quad n_2^{(1)} = 0 \quad m_2^{(1)}(x) = x - 3$$



Estado virtual: coincide con el estado unidad 1

$$\text{Leyes: } \delta N_1^{(1)} = 1 \quad \delta M_1^{(1)}(x) = 0 \quad \delta N_2^{(1)} = 0 \quad \delta M_2^{(1)}(x) = x - 3$$

Ec Balance: $\delta W^* = \delta U^*$

$$c_{11} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5}{598500} + \int_0^3 \frac{(x-3)(x-3)}{1814.4} dx \quad \Rightarrow \quad c_{11} = 4.9687 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Movimiento c_{12}

Estructura real: estructura del estado unidad 1.

$$\text{Leyes: } n_1^{(1)} = 1 \quad m_1^{(1)}(x) = 0 \quad n_2^{(1)} = 0 \quad m_2^{(1)}(x) = x - 3$$

Estado virtual: coincide con el estado unidad 2

$$\text{Leyes: } \delta N_1^{(2)} = 0 \quad \delta M_1^{(2)}(x) = 5 - x \quad \delta N_2^{(2)} = 1 \quad \delta M_2^{(2)}(x) = 5$$

Ec Balance: $\delta W^* = \delta U^*$

$$c_{12} = \int_0^3 \frac{(x-3)5}{1814.4} dx \quad \Rightarrow \quad c_{12} = -1.2401 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

MOVIMIENTOS DEL ESTADO 2

Movimiento c_{21}

Estructura real: estructura del estado unidad 2.

$$\text{Leyes: } n_1^{(2)} = 0 \quad m_1^{(2)}(x) = 5 - x \quad n_2^{(2)} = 1 \quad m_2^{(2)}(x) = 5$$

Estado virtual: coincide con el estado unidad 1

$$\text{Leyes: } \delta N_1^{(1)} = 1 \quad \delta M_1^{(1)}(x) = 0 \quad \delta N_2^{(1)} = 0 \quad \delta M_2^{(1)}(x) = x - 3$$

Ec Balance: $\delta W^* = \delta U^*$

$$c_{21} = \int_0^3 \frac{5(x-3)}{1814.4} dx = c_{12} \quad \Rightarrow \quad c_{21} = c_{12} = -1.2401 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Movimiento c_{22}

Estructura real: estructura del estado unidad 2.

$$\text{Leyes: } n_1^{(2)} = 0 \quad m_1^{(2)}(x) = 5 - x \quad n_2^{(2)} = 1 \quad m_2^{(2)}(x) = 5$$

Estado virtual: coincide con el estado unidad 2

$$\text{Leyes: } \delta N_1^{(2)} = 0 \quad \delta M_1^{(2)}(x) = 5 - x \quad \delta N_2^{(2)} = 1 \quad \delta M_2^{(2)}(x) = 5$$

Ec Balance: $\delta W^* = \delta U^*$

$$c_{22} = \int_0^5 \frac{(5-x)(5-x)}{4090.8} dx + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{714000} + \frac{5 \cdot 5 \cdot 3}{1814.4} \quad \Rightarrow \quad c_{22} = 5.1525 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

4.8 Obtención de las fuerzas redundantes

Las fuerzas redundantes se calculan a partir de las ecuaciones de compatibilidad (apartado 4.5), una vez sustituidos el valor de los movimientos calculados en los dos apartados anteriores.

$$(10): dx_B = dx_B^0 + c_{11} R_{XB} + c_{21} R_{yB}$$

$$(11): dy_B = dy_B^0 + c_{21} R_{XB} + c_{22} R_{yB}$$

$$(10): 0 = 0.1289 + 4.9687 \cdot 10^{-3} R_{XB} - 1.2401 \cdot 10^{-2} R_{yB}$$

$$(11): 0 = -0.5022 - 1.2401 \cdot 10^{-2} R_{XB} + 5.1525 \cdot 10^{-2} R_{yB}$$

$$R_{XB} = -4.07 \text{ kN} \quad R_{yB} = +8.77 \text{ kN}$$



4.9 Determinación estática de la estructura

Una vez calculadas las fuerzas redundantes, las reacciones, esfuerzos de extremo de barra y leyes de esfuerzos se determinarán mediante el principio de superposición.

$$R_{x_C} = R_{x_C}^0 + r_{x_C}^{(1)} \cdot R_{x_B} + r_{x_C}^{(2)} \cdot R_{y_B} = (-1) + (-1) \cdot (-4.07) + 0 \cdot 8.77$$

$$R_{x_C} = 3.07 \text{ kN}$$

$$R_{y_C} = 11.23 \text{ kN}$$

$$R_{M_C} = -3.06 \text{ kNm}$$

Leyes de esfuerzos:

Barra 1:	$N_1 = -4.07$	$V_1(x) = 11.23 - 4x$	$M_1(x) = -6.15 + 11.23x - 2x^2$
Barra 2:	$N_2 = -11.23$	$V_2 = -3.07$	$M_2(x) = 3.06 - 3.07x$

En la figura 6 se representa el equilibrio completo de la estructura hiperestática, así como los diagramas de esfuerzos de ambas barras.

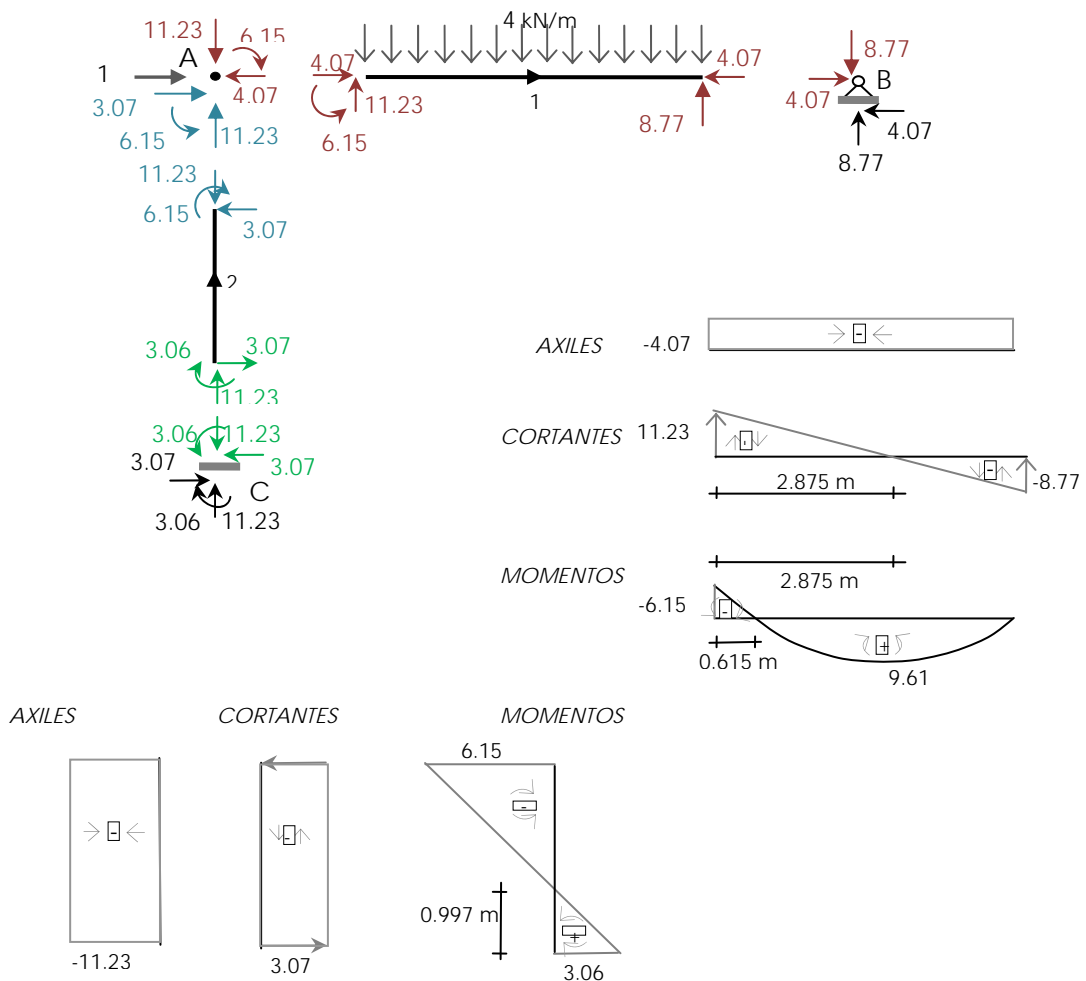


Figura 6. Equilibrio final de la estructura hiperestática



5 Cierre

A lo largo de este tema hemos resuelto estáticamente una estructura hiperestática de grado 2 mediante el Método de Flexibilidades, seleccionando como redundantes las reacciones en el apoyo B.

Como ejercicio de aplicación puedes resolver la misma estructura pero tomando como redundantes:

- El momento interno en el extremo j de la barra 2 y la reacción horizontal en C ($M_{j2}=-M_{i1}$ y R_{xC}).
- El momento interno en el extremo j de la barra 2 y la reacción momento en C ($M_{j2}=-M_{i1}$ y RM_C).

(Resultado: El equilibrio final de la estructura debe coincidir exactamente con los resultados del problema. En ambos casos al haber seleccionado una redundante interna, en el estado unidad correspondiente deberán plantearse dos momentos internos unidad de sentido contrario, uno en el extremo j de la barra 2 y otro en el extremo i de la barra 1.

El valor de las redundantes será: a) $M_{j2}=-6.15$ kNm y $R_{xC}=-3.07$ kN, b) $M_{j2}=-6.15$ kNm y $RM_C=-3.06$ kNm)

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Abdilla E. "Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1". Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Esquema de la estructura.

Figura 2. Descomposición según el Método de Flexibilidades

Figura 3. Esquema del equilibrio y leyes en la estructura isostática básica

Figura 4. Esquema del equilibrio y leyes en el estado unidad 1

Figura 5. Esquema del equilibrio y leyes en el estado unidad 2

Figura 6. Equilibrio final de la estructura hiperestática