

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



**TESIS DOCTORAL**

---

Desarrollo de herramientas experimentales para  
la caracterización acústica de silenciadores en  
presencia de flujo medio

---

Presentada por:  
Dirigida por:

Dña. Ana María Pedrosa Sánchez  
Dr. D. Francisco David Denia Guzmán  
Dr. D. Francisco Javier Fuenmayor Fernández

Valencia, junio de 2015



## TESIS DOCTORAL

---

# **Desarrollo de herramientas experimentales para la caracterización acústica de silenciadores en presencia de flujo medio**

---

*Presentada por:* Dña. Ana María Pedrosa Sánchez  
*Dirigida por:* Dr. D. Francisco David Denia Guzmán  
Dr. D. Francisco Javier Fuenmayor Fernández

### TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente: Dr. D. \_\_\_\_\_  
Vocal: Dr. D. \_\_\_\_\_  
Secretario: Dr. D. \_\_\_\_\_

En Valencia, a \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2015.



TESIS DOCTORAL

**Desarrollo de herramientas experimentales  
para la caracterización acústica de  
silenciadores en presencia de flujo medio**

que para la obtención del grado de  
Doctor Ingeniero Industrial

presenta

**Dña. Ana María Pedrosa Sánchez**

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales  
de la Universitat Politècnica de València

Dirigida por

**Dr. D. Francisco David Denia Guzmán**  
**Dr. D. Francisco Javier Fuenmayor Fernández**

Valencia, junio de 2015



# Resumen

El objetivo principal de esta Tesis es el desarrollo, diseño e implementación de un sistema experimental que permita obtener la caracterización acústica de silenciadores y otros elementos de la línea escape de motores de combustión en presencia de flujo medio.

Para ello, en primer lugar, se ha hecho un estudio teórico de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno acústico en conductos en presencia de flujo medio. También se ha llevado a cabo una revisión de los modelos que habitualmente se encuentran en la literatura para la caracterización de superficies perforadas y materiales absorbentes. A continuación, se han estudiado los diferentes índices que representan la respuesta acústica de silenciadores de escape, y se ha seleccionado como más conveniente el índice de pérdidas de transmisión.

A través del modelo de onda plana se ha introducido la representación matricial que proporciona la caracterización acústica de los dispositivos presentes en la línea de escape. Dicha representación permite obtener la caracterización acústica de la línea de escape completa por multiplicación de las matrices que representan cada elemento.

Debido a la limitación en frecuencia de la teoría unidimensional, se presenta el método de elementos finitos para la resolución numérica de la ecuación de ondas convectiva clásica que gobierna el fenómeno acústico. Se ha particularizado para geometrías con simetría de revolución como son los prototipos ensayados. También se ha abordado la aplicación de distintas condiciones de contorno para forzar una condición de velocidad acústica determinada, la modelización de una superficie perforada o de un extremo final anecoico. La solución numérica obtenida mediante el método de elementos finitos se ha empleado para comparar las medidas experimentales.

Además, se ha llevado a cabo un estudio pormenorizado de las técnicas experimentales habitualmente empleadas en la medida de parámetros acústicos y se ha hecho una valoración de cada una de ellas indicando su idoneidad para la aplicación en presencia de flujo medio, analizando ventajas e inconvenientes. Del análisis llevado a cabo se ha determinado que la técnica más interesante es el método de los dos micrófonos. Dicha técnica lleva asociados aspectos que suponen una dificultad para su implementación en presencia de flujo medio, en concreto, la necesidad de disponer de un final anecoico para la obtención directa del índice de pérdidas de transmisión y el exceso de tiempo necesario para obtener el mismo parámetro mediante dos ensayos independientes.

La técnica experimental desarrollada, basada en el método de los dos micrófonos, permite llevar a cabo los dos ensayos independientes necesarios de forma simultánea eliminando la necesidad de disponer de un final anecoico y

reduciendo considerablemente el tiempo de ensayo. Esta ventaja está especialmente indicada en presencia de flujo medio debido a que las variables ambientales pueden cambiar con rapidez.

Finalmente, se ha implementado el dispositivo experimental diseñado y se ha dotado la línea de la instrumentación necesaria para la medida de parámetros ambientales y el registro de señales acústicas. La validación de la técnica desarrollada se ha llevado a cabo en base a la obtención de los polos de la matriz de transferencia de un conducto de sección uniforme, disponibles en la bibliografía, con distintos valores de flujo medio. Con este montaje, se ha obtenido el índice de pérdidas de transmisión para distintas tipologías de silenciadores de escape, logrando en todos los casos resultados satisfactorios.

**Palabras clave:** medida experimental, índice de pérdidas de transmisión, silenciador de escape, flujo medio, excitación simultánea, elementos finitos

# Resum

L'objectiu principal d'esta Tesi és el desenvolupament, disseny i implementació d'un sistema experimental que permeta obtindre la caracterització acústica de silenciadors i altres elements de la línia d'escapament de motors de combustió en presència de flux mig.

Per això, en primer lloc, s'ha fet un estudi teòric de les equacions que governen el fenomen acústic en conductes amb presència de flux mig. També s'ha dut a terme una revisió dels models que habitualment es troben en la literatura per a la caracterització de superfícies perforades i materials absorbents. A continuació, s'han estudiat els diferents índexs que representen la resposta acústica de silenciadors d'escapament i s'ha seleccionat com més convenient l'índex de pèrdues de transmissió.

A través del model d'ona plana s'ha introduït la representació matricial que proporciona la caracterització acústica dels dispositius presents en la línia d'escapament. Tal representació permet obtindre la caracterització acústica de la línia d'escapament completa per multiplicació de les matrius que representen cada element.

A causa de la limitació en freqüència de la teoria unidimensional, es presenta el mètode d'elements finits per a la resolució numèrica de l'equació d'ones convectiva clàssica que governa el fenomen acústic. S'ha particularitzat per a geometries amb simetria de revolució com són els prototips assajats. També s'ha abordat l'aplicació de distintes condicions de contorn per a forçar una condició de velocitat acústica determinada, la modelització d'una superfície perforada o d'un extrem final anecoic. La solució numèrica obtinguda per mitjà del mètode d'elements finits s'ha empleat per a comparar les mesures experimentals.

A més, s'ha dut a terme un estudi detallat de les tècniques experimentals habitualment empleades en la mesura de paràmetres acústics i s'ha fet una valoració de cada una d'elles indicant la seua idoneïtat per a l'aplicació en presència de flux mig, analitzant avantatges i inconvenients. De l'anàlisi dut a terme s'ha determinat que la tècnica més interessant és el mètode dels dos micròfons. Tal tècnica porta associats aspectes que suposen una dificultat per a la seua implementació en presència de flux mig, en concret, la necessitat de disposar d'un final anecoic per a l'obtenció directa de l'índex de pèrdues de transmissió i l'excés de temps necessari per a obtindre el mateix paràmetre per mitjà de dos assajos independents.

La tècnica experimental desenvolupada, basada en el mètode dels dos micròfons, permet dur a terme els dos assajos independents necessaris de forma simultània eliminant la necessitat de disposar d'un final anecoic i reduint considerablement el temps d'assaig. Este avantatge està especialment indicat amb presència de flux mig pel fet que les variables ambientals poden canviar amb rapidesa.

Finalment, s'ha implementat el dispositiu experimental dissenyat i s'ha dotat la línia de la instrumentació necessària per a la mesura de paràmetres ambientals i el registre de senyals acústics. La validació de la tècnica desenvolupada s'ha dut a terme basant-se en l'obtenció dels pols de la matriu de transferència d'un conducte de secció uniforme, disponibles en la bibliografia, amb distints valors de flux mig. S'ha obtingut l'índex de pèrdues de transmissió per a distintes tipologies de silenciadors d'escapament, aconseguint en tots els casos resultats satisfactoris.

**Paraules clau:** mesura experimental, l'índex de pèrdues de transmissió, silenciador d'escapament, flux mig, excitació simultània, elements finits

# Abstract

The main objective of this Thesis is the development, design and implementation of an experimental test rig to obtain the acoustic characterization of mufflers and other elements of the exhaust line of internal combustion engines in the presence of mean flow.

It has also been carried out a review of the models typically found in the literature for characterizing absorbent materials and perforated surfaces. Next, it has been studied the different indices representing the acoustic response of mufflers, and has been selected as most suitable index the transmission loss.

First, a theoretical study of the governing equations of the acoustic phenomenon in ducts in the presence of mean flow has been carried out. Also, a review of the typical models found in the literature for characterizing absorbent materials and perforated surfaces has been achieved. Next, several indexes that represent the acoustic behavior of exhausts mufflers has been studied and the transmission loss has been selected as the most suitable.

The matrix representation has been introduced through the plane wave model. It provides the acoustic characterization of the devices on the exhaust line. This representation allows obtaining the acoustic characterization of the complete exhaust line by multiplying the matrices that represent each element.

Due to the limitation on frequency range of the one-dimensional theory, the numerical solution of the classical convective wave equation, that governs the acoustic phenomenon, has been obtained by means of the finite element method. The method has been particularized for axisymmetric geometries as the prototypes used. It has also been studied how to apply different boundary conditions to force acoustic velocity, the modeling of a perforated surface or an anechoic termination. The numerical solution obtained by the finite element method has been used to compare with experimental measurements.

Furthermore, a detailed study of experimental techniques frequently used in the measurement of acoustic parameters has been carried out and an assessment of each indicating its suitability has been done for its use in the presence of mean flow analyzing advantages and disadvantages. As conclusion of the analysis it has been determined that the most interesting technique is the two microphones method. The original procedure contains some aspects associated which imply difficulties in the implementation in the presence of mean flow, such as the installation of an anechoic termination for the direct determination of the transmission loss and the excess time requirement for obtaining the same parameter using the alternative procedure which involves performing two separate tests.

The experimental technique developed, based on the two microphones method, allows to carry out the two independent tests required simultaneously

removing the need of an anechoic termination and reducing test time significantly. This aspect is especially critical in the presence mean flow because the environmental variables can change quickly.

Finally, it has been implemented the experimental set-up designed and equipped it of the required instrumentation to measure environmental parameters and the acoustical signals. The validation of the developed technique has been carried out by obtaining the poles of the transfer matrix of a straight duct with uniform cross section that are available in the bibliography, with different values of mean flow. It has obtained the transmission loss for different types of exhaust mufflers, achieving in all cases satisfactory results.

**Keywords:** experimental measurement, transmission loss, exhaust muffler, mean flow, simultaneous excitation, finite element

A Diego.

A mis hijos.

A mis padres.



# Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis directores Javier y Paco la elaboración de esta Tesis. Sin ninguna duda, este trabajo ha sido fruto del esfuerzo de los tres. Vuestro valor humano y vuestra profesionalidad ha sido un gran ejemplo. Es un privilegio trabajar en el mismo equipo.

Mi más sincero agradecimiento también a todos mis compañeros. Compartir fatigas y sobre todo alegrías con todos y cada uno de vosotros es una de las mayores motivaciones para venir a trabajar todos los días, de todos aprendo cada día. Gracias a Toni por tu paciencia y por tu gran ayuda en los primerísimos y fundamentales pasos de este trabajo. A Pepe Albelda, la precisión de tus explicaciones fue muy útil en los primeros años de la Tesis. Juanjo te agradezco el constante ánimo y confianza que me transmites y, cómo no, la posibilidad de empezar a trabajar en la Universidad. Gracias a Eugenio por tu positivismo contagioso, nuestras conversaciones siempre me han llenado de optimismo y me han impulsado a seguir adelante con este trabajo. A Juan Ignacio que con tu experiencia he aprendido lo importante de la vida. A mis compañeros y amigos Javi, Jose, Manolo, Àlex y Ana, ahora ya no tengo excusas para no volver a las cenas de departamento, las echo de menos. A Eva Vázquez mi incondicional compañera, todavía no me explico cómo has conseguido que me apunte y vaya al gimnasio. A Fede por tu diligencia para resolver todos los problemas informáticos que han surgido, también por tu compañía las largas tardes-noches de julio que nos hemos quedado trabajando cada uno con lo nuestro para adelantar. A Andrés, siempre dispuesto a ayudarme, sé que cuento contigo para todo. A Javier Sanfeliu, te agradezco que siempre me hayas mostrado tu calidad humana y profesional. Y al resto de compañeros de departamento Luis, Juanvi, José Luis, Vicente Mata, Paco Valero, Josep Lluís, Francisco, José Enrique, Justo... seguro que no nombro a todos, pero estáis en mi corazón. A Marga, Amparo y Angels os agradezco que a vuestra ayuda en las gestiones siempre acompañe una sonrisa.

A los becarios con los que he pasado y pienso seguir pasando ratos divertidos. Merece especial mención Eva, compañera en la acústica, gracias por tu actitud siempre positiva y por no cansarte nunca de la cantidad de cálculos que te he pedido, la siguiente eres tú ¡te deseo lo mejor!

A mi comunidad, en la que encuentro el sentido a la vida. A mis padres, vuestro amor y vuestra generosidad la llevo siempre en mi corazón, os lo debo todo. A todas las personas que me habéis ayudado con los niños mientras he estado fuera de casa, Blanca Inés y mis padres sobre todo.

A mis hijos, gracias por no reprocharme el tiempo libre que os he robado para dedicarlo a este trabajo. He intentado que sea el menor posible pero, sin esfuerzo y dedicación, un trabajo de esta envergadura no puede llevarse

X

adelante. Sé que mis hijos, aunque pequeños, me han comprendido y apoyado. Sólo espero que haya valido la pena, ahora ¡a disfrutar más y mejor del tiempo juntos! No puedo terminar sin dar las gracias a Diego mi amigo, mi compañero, mi confidente, nada vale la pena sin ti a mi lado.

Esta Tesis Doctoral ha sido desarrollada en el marco de los proyectos DPI2010-15412 (Ministerio de Economía y Competitividad) y DPI2007-62635 (Ministerio de Ciencia e Innovación y FEDER).





# Nomenclatura

En este apartado se presenta una descripción de las convenciones utilizadas en el desarrollo de esta Tesis. A lo largo de la misma se explica el significado de las variables que intervienen en las expresiones matemáticas. Este glosario recoge las de mayor índole.

Los símbolos matemáticos se expresan en letra itálica para diferenciarlos claramente del resto del texto. Como excepción se tienen las funciones matemáticas, algunos símbolos especiales y los números. Las matrices se denotan con corchetes y los vectores por medio de llaves.

## Subíndices

$0$	Característica de fluido ideal
$fm$	Característica de flujo medio
$i$	Componente incidente
$r$	Componente reflejada

## Superíndices

$T$	Traspuesta
$-1$	Inversa
$\rightarrow$	Vector
$+$	Componente progresiva
$-$	Componente regresiva
$\sim$	Propiedad en fluido equivalente
$U$	Aguas arriba
$D_w$	Aguas abajo
$*$	Complejo conjugado

## Operadores

$\partial$	Derivada parcial
$D$	Derivada total
$\Sigma$	Sumatorio
$\nabla$	Gradiente
$\Delta$	Determinante

## Notación

$[\ ]$	Matriz
$\{ \}$	Vector columna

## Alfabeto occidental

$c$	Velocidad del sonido
$d_h$	Diámetro de agujero de conducto perforado
$f$	Frecuencia
$i, j, k$	Vectores unitarios del sistema de referencia cartesiano
$j$	Unidad imaginaria $\sqrt{-1}$
$k$	Número de onda
$p$	Presión, dominio temporal
$t$	Variable temporal
$t_p$	Espesor de pared de conducto perforado
$u$	Velocidad de partícula, dominio temporal
$v$	Flujo másico, dominio temporal
$x, y, z$	Coordenadas en sistema de referencia cartesiano

## Caracteres occidentales mayúsculos

$A, B, C, D$	Polos de la matriz de transferencia
$D$	Diámetro (también $d$ )
$F$	Factor de fricción de Froude
$H$	Función de transferencia
$I$	Intensidad acústica
$IL$	Índice de pérdida de inserción
$LD$	Índice de diferencia de nivel
$M$	Número de Mach
$P$	Presión, dominio frecuencia
$Pr$	Número de Prandtl
$R$	Radio
$R_f$	Resistividad de material absorbente
$Re$	Número de Reynolds
$S$	Área de sección transversal
$SM$	Términos de matriz de dispersión
$T$	Temperatura
$TL$	Índice de pérdidas de transmisión
$U$	Velocidad de partícula, dominio frecuencia
$V$	Flujo másico, dominio frecuencia
$W$	Potencia acústica
$Y$	Impedancia del conducto
$Z$	Impedancia del medio

## Caracteres griegos minúsculos

$\alpha$	Coefficiente de atenuación viscotérmica
$\beta$	Número de onda para fluido real
$\phi$	Función potencial
$\gamma$	Exponente adiabático
$\lambda$	Longitud de onda
$\mu$	Viscosidad dinámica
$\rho$	Densidad
$\sigma$	Porosidad superficial
$\omega$	Frecuencia angular
$\xi$	Coefficiente de fricción turbulenta de un fluido
$\zeta$	Segundo coeficiente de viscosidad
$\Omega$	Porosidad volumétrica
$\psi$	Función de ponderación



# Índice General

<b>Capítulo 1. Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1. Motivación y antecedentes .....	2
1.2. Objetivos .....	3
1.3. Organización y desarrollo de la Tesis .....	4
<b>Capítulo 2. Fundamentos acústicos</b> .....	<b>7</b>
2.1. Introducción .....	8
2.2. Ecuación de ondas .....	8
2.2.1. <i>Medio móvil</i> .....	12
2.2.2. <i>Medio en reposo</i> .....	15
2.3. Materiales absorbentes .....	16
2.3.1. <i>Introducción</i> .....	17
2.3.2. <i>Caracterización del material</i> .....	17
2.4. Placas y tubos perforados .....	19
2.4.1. <i>Impedancia acústica</i> .....	20
2.5. Acústica unidimensional. Definición de parámetros .....	26
2.5.1. <i>Medio móvil</i> .....	26
2.5.2. <i>Medio en reposo</i> .....	31
2.6. Representación matricial .....	33
2.6.1. <i>Formulación de la matriz de comportamiento</i> .....	34
2.6.2. <i>Conductos</i> .....	38
2.6.3. <i>Expansiones y contracciones</i> .....	43
2.6.4. <i>Conductos extendidos</i> .....	44
2.7. Silenciadores.....	47
2.7.1. <i>Configuraciones sin disipación</i> .....	47
2.7.2. <i>Configuraciones con disipación</i> .....	48
2.8. Atenuación sonora en silenciadores .....	49
2.8.1. <i>Consideraciones energéticas</i> .....	49
2.8.2. <i>Índices de atenuación sonora en silenciadores</i> .....	50
2.9. Aplicaciones .....	52
2.9.1. <i>Configuraciones sin disipación</i> .....	54

2.9.2. <i>Configuración con disipación</i> .....	61
2.10. Limitaciones.....	77
2.11. Conclusiones .....	80
<b>Capítulo 3. Revisión de técnicas experimentales .....</b>	<b>83</b>
3.1. Introducción.....	84
3.2. Método del micrófono móvil.....	85
3.2.1. <i>Características de las ondas estacionarias</i> .....	86
3.2.2. <i>Procedimiento experimental</i> .....	89
3.2.3. <i>Valoración del método</i> .....	90
3.3. Método del impulso .....	91
3.3.1. <i>Consideraciones experimentales</i> .....	93
3.3.2. <i>Valoración del método</i> .....	95
3.4. Método de descomposición de ondas .....	96
3.4.1. <i>Método de los dos micrófonos</i> .....	98
3.4.2. <i>Método de la función de transferencia</i> .....	100
3.5. Conclusiones .....	104
<b>Capítulo 4. Dispositivo y metodología experimental desarrollada ...</b>	<b>107</b>
4.1. Introducción.....	108
4.2. Antecedentes.....	108
4.3. Sistema experimental sin flujo medio.....	111
4.4. Consideraciones experimentales en presencia de flujo medio.....	113
4.4.1. <i>Medida de variables ambientales</i> .....	114
4.4.2. <i>Caracterización del fenómeno acústico</i> .....	116
4.4.3. <i>Método de las dos fuentes</i> .....	118
4.4.4. <i>Estimación de espectros</i> .....	129
4.5. Sistema experimental .....	129
4.6. Resultados obtenidos con el método de las dos fuentes .....	137
4.6.1. <i>Barrido senoidal</i> .....	137
4.6.2. <i>Ruido blanco</i> .....	138
4.6.3. <i>Conclusiones</i> .....	139
4.7. Método de excitación simultánea .....	139
4.7.1. <i>Implementación de la metodología</i> .....	141

4.8. Valoración de las metodologías.....	145
4.9. Validación del método de excitación simultánea con flujo medio.....	146
4.10. Resultados.....	151
4.10.1. Cámaras reactivas .....	151
4.10.2. Silenciadores disipativos.....	159
4.11. Consideraciones adicionales .....	170
4.11.1. Matriz de transferencia de cámara de expansión simple .....	170
4.11.2. Matriz de transferencia de cámara disipativa.....	173
4.12. Conclusiones .....	175
<b>Capítulo 5. Conclusiones y desarrollos futuros.....</b>	<b>177</b>
5.1. Conclusiones .....	178
5.2. Desarrollos futuros.....	181
<b>Apéndice A. Aplicación del MEF a la ecuación de ondas.....</b>	<b>183</b>
A.1 Introducción.....	184
A.2 Formulación en presión.....	184
A.2.1 El problema acústico.....	185
A.2.2 Vector de carga y condiciones de contorno.....	188
A.2.3 Campo de velocidades.....	190
A.2.4 Obtención de la atenuación .....	191
A.3 Tubos perforados. Subdominios acoplados .....	192
A.4 Consideración de material absorbente y tubo perforado .....	195
A.5 Aplicaciones .....	199
A.5.1 Configuraciones sin disipación.....	199
A.5.2 Configuraciones con disipación.....	207
A.6 Conclusiones .....	211
<b>Bibliografía .....</b>	<b>213</b>



# Capítulo 1. Introducción

## ***Resumen del capítulo***

*En este capítulo se enmarca el trabajo llevado a cabo en esta Tesis. El aumento del parque automovilístico y de sus prestaciones responde a una creciente demanda de confort por parte de los ciudadanos, pero a su vez repercute negativamente en el mismo, llegando a provocar la necesidad de la puesta en vigor de una normativa medioambiental en núcleos urbanos cada vez más exigente. La búsqueda de una solución eficaz a este desequilibrio ha motivado la elaboración de esta Tesis. Se justifica la necesidad de desarrollar técnicas experimentales que permitan llevar a cabo la caracterización acústica de silenciadores de escape en presencia de flujo medio y que además puedan ser empleados en la validación de modelos matemáticos. Se describe también la estructura de los capítulos en los que se desarrolla la Tesis.*

## 1.1. Motivación y antecedentes

“El ruido, considerado como un sonido indeseado por el receptor o como una sensación auditiva desagradable y molesta, es causa de preocupación en la actualidad, por sus efectos sobre la salud, sobre el comportamiento humano individual y grupal; debido a las consecuencias físicas, psíquicas y sociales que conlleva.

La evolución experimentada por los países desarrollados en las últimas décadas, con la proliferación de industrias, aumento espectacular del parque automovilístico y de los medios de transporte público, a la vez que ha contribuido a elevar la calidad de vida de los ciudadanos, ha ocasionado un incremento de la contaminación ambiental y, en particular, de la producida por ruidos y vibraciones...”

Se trata del preámbulo de la ley 7/2002 de 3 de diciembre, de protección contra la contaminación acústica de la Comunidad Valenciana [9]. Estos párrafos reflejan una problemática cotidiana. Todos estos elementos emiten ruido que invade el ambiente en el entorno urbano, produciendo paradójicamente un deterioro de la calidad medioambiental y de la propia calidad de vida en general, constituyéndose hoy día como uno de los contaminantes atmosféricos más agresivos. La contaminación acústica es, por lo tanto, un fenómeno generalizado en todas las zonas urbanas y constituye un problema medioambiental cada vez más importante. El ruido de las zonas urbanas tiene origen en infinidad de fuentes. El tráfico rodado de automóviles, vehículos pesados y motocicletas es la fuente de ruido predominante, y en este sentido hay estudios que le atribuyen tres cuartas partes del mismo. En la Comunidad Valenciana, los estudios realizados indican la existencia de unos niveles de ruido por encima de los límites máximos declarados admisibles por organismos internacionales y por la Unión Europea [1].

A su vez, el ruido provocado por un vehículo no tiene una única fuente, ni la misma importancia y ni siquiera provoca la misma sensación sonora. Uno de los más importantes tiene su origen en el motor, pero no puede olvidarse el ruido de rodadura o el asociado al funcionamiento de mecanismos auxiliares que posee el automóvil, como son el ventilador o el motor de arranque entre otros.

Hay una gran cantidad de trabajos publicados sobre identificación y clasificación de fuentes, de los que puede concluirse que las fuentes generadoras de ruido interno de un motor, a grandes rasgos, son:

- Renovación de carga
- Combustión
- Ruido mecánico

Si clasificamos este ruido en función del mecanismo físico que lo genera, tendríamos,

- Ruido aerodinámico, asociado a la circulación de aire entre los colectores de admisión y de escape.
- Radiación debido a la vibración de superficies, fenómeno al que contribuyen las tres fuentes primarias de generación de ruido citadas anteriormente.

La fuente de ruido aerodinámico debido al proceso de renovación de carga está asociada a la admisión y escape. Este mecanismo a su vez, contiene dos procesos claramente diferenciados, el llenado y vaciado de los cilindros y el ruido debido a la generación de turbulencia, es decir de la corriente de aire pasando por conductos que presentan irregularidades, tales como válvulas o cambios bruscos de sección. Es posible que el ruido aerodinámico generado por un vehículo, no sea el más importante, pero sí es una de las fuentes primarias, lo que justifica la importancia, cada vez mayor, que ha ido adquiriendo el estudio de la respuesta acústica de elementos silenciadores. La función principal de los silenciadores de escape es reducir el nivel sonoro hasta niveles regulados por la legislación Europea [3,12], nacional [4,6], regional [5,9] y local [2].

## 1.2. Objetivos

La creciente exigencia de las normativas y las cotas de confort y prestaciones reclamadas por los usuarios de vehículos, ha provocado un interés creciente en el desarrollo de métodos más eficientes para el diseño de silenciadores que permiten la construcción de sistemas de atenuación del ruido cada vez mejores.

Para conseguir este objetivo es necesario desarrollar modelos teóricos. Actualmente existen herramientas matemáticas que permiten obtener la caracterización acústica de los elementos de la línea de escape. Dichas herramientas se basan fundamentalmente en dos clases de soluciones de la ecuación de ondas claramente diferenciadas: de tipo analítico y de tipo numérico. En el caso de los modelos analíticos, la propuesta más simplista da lugar al modelo de onda plana, muy sencillo de aplicar, pero válido para un rango de frecuencia limitado [79, 106]. Por otro lado, los modelos analíticos tridimensionales presentan un rango de validez en frecuencia mayor, si bien las posibles geometrías a considerar son simples, ya que puede convertirse en una herramienta extremadamente compleja en geometrías no regulares. Los modelos numéricos como el método de elementos finitos [16, 24, 115], son también ampliamente utilizados. Al tratarse de una herramienta de cálculo numérico de tipo general [158], su rango de validez en frecuencia es amplio y no hay limitaciones de tipo geométrico, si bien el coste computacional puede ser elevado para discretizaciones con un número elevado de grados de libertad. A

las limitaciones concernientes a cada técnica de cálculo, se suma el hecho de que actualmente existe discusión acerca de la validez de los modelos matemáticos que representan el comportamiento de los elementos que pueden encontrarse en un silenciador. En este sentido, cabe destacar elementos como superficies perforadas, materiales absorbentes, monolitos de catalizador y filtros de partículas diésel. Además, los modelos de dichos elementos presentan una fuerte dependencia de otras variables relevantes tales como la temperatura y la velocidad de flujo medio, añadiendo complejidades adicionales al problema acústico. Las técnicas experimentales de medida, permiten validar esos modelos matemáticos y por tanto cualquier estudio o mejora en el ámbito de la experimentación acústica está justificado.

### **1.3. Organización y desarrollo de la Tesis**

El trabajo principal de la Tesis ha consistido en el desarrollo de técnicas de caracterización acústica experimental y su posterior implementación en un banco de ensayos para la medida de propiedades acústicas de elementos de la línea de escape en presencia de flujo medio. La validación de dichas técnicas y el banco experimental desarrollado se ha obtenido por comparación de los resultados teóricos con medidas experimentales, por lo que en el desarrollo de la Tesis se han incorporado algunos capítulos que abordan los fundamentos acústicos y la resolución del problema acústico mediante elementos finitos.

La organización de la Tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 se presenta la motivación y los objetivos de la Tesis. En el Capítulo 2 se introducen las bases teóricas que dominan el comportamiento de las ondas acústicas en fluidos tanto en reposo como en movimiento, bajo el supuesto de una propagación unidimensional. Los resultados bajo esta hipótesis son precisos solo en casos muy concretos como el de un tubo recto o el rango de baja frecuencia para geometrías sencillas. No obstante su interés reside en que proporcionan una idea del efecto de distintos elementos sobre el comportamiento acústico de silenciadores, como son cambios de sección y conductos extendidos. Se muestra la representación matricial de los distintos elementos que componen un silenciador y la forma de combinarlos para obtener la matriz correspondiente a un silenciador completo. Se presentan distintos modelos de impedancia para conductos perforados, con o sin flujo medio. Se definen distintos índices de atenuación sonora que representan el comportamiento acústico. Se muestra la limitación del modelo de onda plana, y cómo una mayor complejidad del dispositivo acústico bajo estudio implica un rango de validez en frecuencia menor. Esta última consideración justifica la necesidad de emplear otros métodos de cálculo tales como el método de elementos finitos. Las particularidades del mismo se han resumido en el Apéndice A. En él, se formula el problema acústico partiendo de la ecuación de ondas convectiva clásica, que define el campo de presiones en presencia de flujo medio, y se

emplea la técnica de residuos ponderados. Se estudian las distintas condiciones de contorno cuando el silenciador incluye superficies perforadas y materiales absorbentes, incluyendo la presencia de flujo medio.

El Capítulo 3 recoge un resumen de la revisión bibliográfica llevada a cabo, comenzando por los métodos experimentales clásicos y proporcionando la información relevante relativa a las técnicas desarrolladas a partir de ellos y que se emplean habitualmente en la caracterización acústica de materiales y dispositivos de control de ruido. Todas ellas suponen el fundamento y el punto de partida de las técnicas desarrolladas e implementadas en este trabajo.

El Capítulo 4 de esta Tesis constituye el núcleo central de la misma. En primer lugar se presentan los resultados obtenidos con el empleo de algunas técnicas experimentales descritas en el Capítulo 3, en ausencia de flujo medio, dando una valoración de todos ellos. A continuación se presenta la metodología desarrollada en esta Tesis orientada fundamentalmente a la caracterización acústica en presencia de flujo medio. La validación de la metodología y el sistema de ensayos implementado se lleva a cabo mediante la obtención experimental de los polos de la matriz de transferencia de un tubo recto con flujo medio. Finalmente, se presentan los resultados experimentales medidos para algunas configuraciones relevantes de silenciador, considerando distintos valores de flujo medio, y se comparan con las simulaciones numéricas obtenidas mediante elementos finitos.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones más relevantes de esta Tesis y las vías de desarrollo que quedan abiertas para futuros trabajos.



## Capítulo 2. Fundamentos acústicos

### **Resumen del capítulo**

*En este capítulo se presentan las ecuaciones que gobiernan el fenómeno acústico y se justifican las hipótesis simplificadoras que permiten obtener la ecuación de ondas convectiva clásica. Se resuelve dicha ecuación bajo el supuesto de onda plana, empleando la representación matricial del comportamiento acústico de distintos elementos presentes en silenciadores de escape. Además se incluye una revisión de los modelos empleados para superficies perforadas y materiales absorbentes.*

*En el apartado 2.8 se presentan los índices de atenuación más usuales que se emplean para la caracterización de silenciadores de escape. En el apartado 2.9, se obtiene el índice de pérdidas por transmisión (TL) para distintos tipos de silenciadores, según el modelo de onda plana.*

*Al final del capítulo se muestran las limitaciones de la teoría de onda plana en el rango de altas y medias frecuencias. A pesar de ello, dicha teoría resulta interesante ya que permite deducir una serie de fenómenos asociados a los distintos elementos que se pueden encontrar en un silenciador.*

## 2.1. Introducción

El comportamiento de las magnitudes físicas asociadas a la propagación de ondas sonoras, está gobernado por la ecuación de ondas de Helmholtz [44, 106]. En este capítulo se presentan las ecuaciones que caracterizan este fenómeno.

Las variables en las que se expresarán las distintas ecuaciones serán, entre otras presión (magnitud físicamente medible), velocidad (necesaria para aplicar condiciones de contorno en los problemas analizados en esta Tesis) y también potencial de velocidad. El tratamiento de estas ecuaciones se hará fundamentalmente en el dominio de la frecuencia.

La obtención de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno acústico surge de la combinación de una serie de ecuaciones de estado, de equilibrio dinámico y energéticas, relativamente básicas.

El tratamiento de estas ecuaciones conlleva una serie de hipótesis simplificativas cuya función principal es la obtención de modelos matemáticos relativamente sencillos de resolver, pero que además, deben respetar la aplicabilidad del modelo. Estas simplificaciones se especificarán y justificaran debidamente a lo largo de este capítulo.

En el Apéndice A de esta Tesis se presentarán herramientas numéricas para la resolución de las ecuaciones matemáticas asociadas a los modelos.

## 2.2. Ecuación de ondas

La deducción de esta ecuación parte de la consideración simultánea de tres ecuaciones: la ecuación de continuidad, la de equilibrio dinámico y la ecuación de la energía. Además es necesaria la inclusión de una ecuación de estado, una ecuación de energía interna y una ecuación de viscosidad [106].

La ecuación de continuidad se obtiene relacionando la velocidad del fluido y la densidad instantánea con la compresión y dilatación que sufre un volumen de control de fluido de tamaño diferencial. Para un sistema de referencia cartesiano, esta ecuación queda [153]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.1)$$

y expresada en forma vectorial resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^T(\rho \bar{u}) = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\vec{u} = (u, v, w)$  es la velocidad de las partículas (sistema de referencia cartesiano),  $\rho$  es la densidad,  $t$  es la variable temporal y  $\nabla$  es el operador gradiente igual a  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ , el superíndice  $T$  denota traspuesto.

La ecuación de equilibrio dinámico, o de Navier-Stokes, se obtiene aplicando la ley de Newton a un volumen de control de tamaño diferencial que mantiene su masa fija, sobre el que están actuando fuerzas inerciales, volumétricas, de presión y viscosas. Para cada dirección asociada a los ejes cartesianos, esta ecuación resulta [153]

$$\begin{aligned} \rho a_x = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \rho a_y = \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \rho a_z = \rho B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla^T \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $a_x = Du/Dt$ ,  $a_y = Dv/Dt$  y  $a_z = Dw/Dt$  son las aceleraciones del volumen de control en cada una de las direcciones de los ejes considerados, el operador  $D/Dt$ , se refiere a la derivada total o material, definida como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.6)$$

$B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$  son fuerzas volumétricas,  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $\zeta$  el segundo coeficiente de viscosidad [153,154].

Por último la ecuación de la energía presenta el balance de energía entrante, saliente y acumulada, su expresión queda como sigue,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \Phi_d - \nabla^T \vec{q}_r \\
& = \frac{\partial}{\partial x} (pu) + \frac{\partial}{\partial y} (pv) + \frac{\partial}{\partial z} (pw) + \frac{\rho}{2} \frac{D}{Dt} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\rho}{2} \frac{DE}{Dt}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde  $k$  es la conductividad térmica,  $T$  es la temperatura,  $Q$  es el calor generado en el fluido por unidad e volumen,  $\vec{q}_r$  es el vector de flujo de radiación de calor,  $E$  es la energía interna y  $\Phi_d$  es la función de disipación, dada por

$$\begin{aligned}
\Phi_d = & \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2\mu \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \\
& + \mu \left( \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde  $\lambda = \zeta - 2/3\mu$ .  $\Phi_d$  es nulo para fluidos no viscosos.

Las ecuaciones de estado, energía interna y de viscosidad, expresan la densidad, energía interna y viscosidad dinámica en función de otras variables de estado como son la presión y la temperatura. Expresado de otra forma, las ecuaciones básicas a resolver serían la de continuidad (2.1), equilibrio dinámico (2.3)-(2.5) y la de energía (2.7), que tienen como incógnitas el campo de velocidades, la presión y la temperatura.

El sistema de ecuaciones que de aquí se deriva puede llegar a resolverse empleando un conjunto de condiciones de contorno y condiciones iniciales adecuado.

En general, el problema acústico en silenciadores puede abordarse haciendo uso de hipótesis simplificadoras que facilitan la resolución del sistema de ecuaciones. Para empezar, se podría considerar:

- Medio de propagación (aire) como un gas perfecto (fluido ideal), cumpliéndose por tanto la ecuación fundamental de los gases
- El proceso se considera adiabático y evoluciona además de forma reversible. Esta consideración se justifica con el siguiente razonamiento. A frecuencias audibles, la longitud de onda sonora es larga comparada con el espacio entre moléculas. Por ejemplo, a una frecuencia de 1000 Hz y 15°C, la longitud de onda es de 0.34 m ( $\lambda = c_0/f$ ), mucho mayor que la separación entre moléculas, que es del orden de  $10^{-9}$  m [101]. Cuando una porción de gas se comprime, aumenta su temperatura y cuando se expande, disminuye. La onda de presión sonora tiene unos valores máximos y mínimos, comprimiendo y expandiendo las moléculas de gas a su paso, de forma que la variación

de la presión de un punto ocurre a la misma frecuencia que la onda sonora, estando en fase con la presión sonora. En puntos separados media longitud de onda, la onda de presión tendrá un desfase de  $180^\circ$ , ya que habrá alguna partícula sometida a la presión máxima y otra sometida a la presión mínima, y por lo tanto una a temperatura máxima y otra a temperatura mínima. Dicho de otra forma entre estos dos puntos el gradiente de temperatura debería ser máximo. La cuestión es si en el ciclo hay tiempo suficiente para que se intercambie calor entre estos dos puntos o, por el contrario, antes de hacerlo los puntos han pasado de estar de mayor y menor presión respectivamente a valores de presión más próximos con la consecuente tendencia a igualar sus temperaturas por simple evolución de la onda. Este fenómeno se puede medir en términos de velocidad de difusión térmica, siendo su valor en condiciones normales de presión y temperatura, para una onda de 1000 Hz, del orden de 0.5 m/s (para una onda de 10000 Hz de 1.5 m/s). Para un semiperiodo, la onda térmica viaja 0.00025 m, longitud muy pequeña comparada con los 0.17 m de semilongitud de onda que separa los dos puntos de estudio. En estas circunstancias, se puede establecer, por lo tanto, que el proceso es adiabático. Esta consideración junto con la hipótesis anterior conducen al hecho de que el proceso es isoentrópico, pudiéndose introducir la ecuación de evolución de los gases a entropía constante

$$p_T = Cte \rho_T^\gamma \quad (2.9)$$

donde  $\gamma$  es el exponente adiabático.

- Se suponen pequeñas variaciones de presión, densidad y velocidad de la partícula provocada por la presencia de la onda acústica, con respecto a su valor medio, de modo que cada una de estas magnitudes asociadas a la partícula puede expresarse como sigue

$$p_T = p_0 + p \quad (2.10)$$

$$\rho_T = \rho_0 + \rho \quad (2.11)$$

$$\vec{u}_T = \vec{u}_0 + \vec{u} \quad (2.12)$$

En general supondremos flujo medio no nulo y se particularizarán las expresiones desarrolladas al caso de flujo medio nulo anulando los términos correspondientes a velocidad media.

### 2.2.1. Medio móvil

La consideración de la primera hipótesis simplificativa (aire, medio de propagación fluido ideal), impone la anulación de la viscosidad dinámica ( $\mu = \zeta = 0$ ), de modo que las ecuaciones de Navier-Stokes (2.3)-(2.5), quedan reducidas como sigue

$$\rho_T \frac{Du_T}{Dt} = \rho_T B_x - \frac{\partial p_T}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\rho_T \frac{Dv_T}{Dt} = \rho_T B_y - \frac{\partial p_T}{\partial y} \quad (2.14)$$

$$\rho_T \frac{Dw_T}{Dt} = \rho_T B_z - \frac{\partial p_T}{\partial z} \quad (2.15)$$

que se conocen como las ecuaciones de Euler. Expresadas de forma vectorial resulta

$$\rho_T \frac{D\vec{u}_T}{Dt} = \rho_T \vec{B} - \nabla p_T \quad (2.16)$$

Esta simplificación proporciona una buena aproximación aún en presencia de flujo medio, ya que el efecto de la atenuación acústica debida a la viscosidad del medio se acentúa en las zonas cercanas a contornos y su efecto sería importante para distancias mucho más largas que las empleadas en sistemas de escape, y también en el banco de ensayos desarrollado.

Por otro lado, las fuerzas volumétricas  $\vec{B}$  son las asociadas al campo gravitatorio y pueden despreciarse. Si además se descomponen los términos asociados a las variables totales como la suma de su valor medio más el término acústico, queda

$$(\rho_0 + \rho) \frac{D(\vec{u}_0 + \vec{u})}{Dt} = -\nabla(p_0 + p) \quad (2.17)$$

En esta expresión, los términos de orden cero se cancelan dado que las variables ambientales del medio corresponden por sí mismas a un estado válido de éste, es decir, estas ecuaciones deben cumplirse en ausencia de perturbación acústica. Así, la ecuación (2.16) para las variables ambientales queda

$$\rho_0 \frac{D\vec{u}_0}{Dt} = -\nabla p_0 \quad (2.18)$$

Aplicando la consideración del aire como un gas perfecto, que cumple por lo tanto la ecuación fundamental de los gases, y que la propagación acústica es isoentrópica [44, 118], puede deducirse que

$$\frac{Dp_T}{Dt} = c_0^2 \frac{D\rho_T}{Dt} \quad (2.19)$$

donde la velocidad del sonido viene dada por

$$c_0 = \sqrt{\left. \frac{\partial p_T}{\partial \rho_T} \right|_S} \quad (2.20)$$

siendo  $S$  la entropía y la derivada se realiza a entropía constante.

Para un gas perfecto, que cumple la ecuación (2.9), queda

$$c_0^2 = \left. \frac{\partial p_T}{\partial \rho_T} \right|_S = \left. \frac{\partial (Cte \rho_T^\gamma)}{\partial \rho_T} \right|_S = \gamma \left( \frac{p_T}{\rho_T} \right) \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (2.21)$$

Para aire, en esta Tesis, se utiliza la siguiente expresión equivalente [44]

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma T R_0}{P_M}} = \sqrt{\frac{1.4 T 8.3145}{0.02895}} \quad (2.22)$$

donde  $\gamma$  es el exponente adiabático del aire,  $T$  corresponde a la temperatura absoluta,  $R_0$  es la constante universal de los gases perfectos y  $P_M$  la masa molar del aire. Aplicando en la ecuación de continuidad (2.2) para el caso de flujo medio, la definición de derivada total dada en (2.6), se obtiene

$$\frac{D\rho_T}{Dt} + \rho_T \nabla^T \vec{u}_T = 0 \quad (2.23)$$

Combinando las ecuaciones (2.19) y (2.23), queda

$$\frac{Dp_T}{Dt} + \rho_T c_0^2 \nabla^T \vec{u}_T = 0 \quad (2.24)$$

Derivando ahora esta expresión respecto al tiempo, resulta

$$\frac{D^2 p_T}{Dt^2} + \frac{D}{Dt} (\rho_T c_0^2 \nabla^T \vec{u}_T) = 0 \quad (2.25)$$

Las expresiones (2.16) y (2.25) determinan un sistema de ecuaciones no lineal, que puede llegar a linealizarse considerando únicamente los términos de primer orden en las expansiones de las mismas [44, 106]. Si además se combinan dichas ecuaciones, se obtiene una única ecuación, cuya complejidad dependerá de las consideraciones que se tengan en cuenta sobre el estado del medio.

En el desarrollo de esta Tesis, en general, se considera  $\rho_0$  y  $c_0$  constantes, y el campo de flujo medio estacionario y conocido (aunque función de las coordenadas espaciales). Tomando gradientes de la expresión (2.17), y combinando esta ecuación con la (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} + 2\rho_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\ \left. + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde las incógnitas son el campo de presión y de velocidad acústicas ya que el campo de flujo medio es conocido. En forma más compacta puede expresarse como

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} + 2\rho_0 \sum_{i,j} \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2.27)$$

para  $i,j = 1,2,3$ , donde lógicamente  $u_{01} = u_0$ ,  $u_{02} = v_0$ ,  $u_{03} = w_0$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$  y  $u_3 = w$ . Para el caso de flujo medio uniforme sin variación espacial, como ocurre en ocasiones en conductos de sección uniforme, la ecuación (2.27) se convierte en la ecuación convectiva clásica

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (2.28)$$

donde queda como única incógnita el campo de presión acústica, ya que, recordamos, el campo de velocidades medio es conocido. En las anteriores expresiones, y en adelante, la definición de derivada total, ver ecuación (2.6), se transforma en

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.29)$$

En aquellos casos en que no resulta posible aplicar la ecuación convectiva clásica (2.28) debido a las hipótesis de partida, por ejemplo porque los conductos poseen una geometría compleja, resulta interesante la formulación de la ecuación que gobierna el fenómeno acústico en términos de potencial de velocidad. Para este desarrollo se asume que el flujo es irrotacional. Esta hipótesis [153] está garantizada al suponer que la viscosidad del fluido es nula y que su evolución es isoentrópica, ya que, si inicialmente las partículas de fluido no tienen rotación, tampoco la tendrán en cualquier otro instante debido a la ausencia de esfuerzos cortantes que hubieran sido producidos por la viscosidad.

Por las propiedades del campo de velocidades, descritas al final del apartado 2.2, se deduce directamente que el campo de velocidades, es un campo conservativo, por lo que proviene de una función potencial. Así, la velocidad de flujo medio podría expresarse como

$$\vec{u}_0 = \nabla \phi_0 \quad (2.30)$$

que asumiendo la hipótesis de incompresibilidad deberá satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \quad (2.31)$$

Por otro lado, la velocidad acústica puede expresarse referida también a un potencial

$$\vec{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} = \nabla \phi \quad (2.32)$$

El número de incógnitas queda obviamente reducido a una única función potencial en lugar de tres componentes de velocidad. Por contra, esta nueva incógnita carece de sentido físico o al menos no es tan intuitivo como la velocidad.

La ecuación (2.27) queda [40,118]

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \phi}{Dt^2} = 0 \quad (2.33)$$

También puede obtenerse el campo de presión acústica a partir del potencial de velocidades como sigue [106,118]

$$p = -\rho_0 \frac{D\phi}{Dt} \quad (2.34)$$

### 2.2.2. Medio en reposo

La ecuación linealizada que gobierna el fenómeno acústico en ausencia de flujo medio se obtiene siguiendo los mismos criterios que en el apartado anterior, es decir, se considera que  $\vec{u}_r = \vec{u}$ . Además, de la expresión (2.18), se concluye que  $\nabla p_0 = 0$ . Por lo tanto al linealizar la ecuación (2.24) resulta

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \nabla^T \vec{u} = 0 \quad (2.35)$$

La ecuación de Euler (2.16), tras despreciar los términos gravitatorios, queda

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.36)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la expresión (2.35), el gradiente de la ecuación (2.36), combinándolas y eliminando la variable  $\vec{u}$ , queda la ecuación de ondas sin flujo

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.37)$$

donde la única variable es la perturbación acústica de presión. Puede observarse que se llega a esta misma expresión cuando en la ecuación (2.27), se tiene en cuenta que  $\vec{u}_0 = 0$ .

En el caso frecuente en que la perturbación acústica tiene un comportamiento armónico de la forma  $p = P e^{j\omega t}$ , la ecuación (2.37) puede expresarse para el dominio frecuencia como

$$\nabla^2 P + k_0^2 P = 0 \quad (2.38)$$

donde  $P$  es la amplitud (compleja) de la presión acústica (función de las coordenadas),  $j$  la unidad imaginaria,  $\omega$  la frecuencia angular dada por  $\omega = 2\pi f$  y  $k_0 = \omega/c_0$  el número de onda. La ecuación (2.38) se conoce como la ecuación de ondas de Helmholtz.

## 2.3. Materiales absorbentes

Son materiales utilizados en sistemas de escape por su capacidad de frenar el movimiento de las partículas de aire absorbiendo, de esta forma, la energía sonora asociada. Se emplean distintos tipos de materiales absorbentes. Los más comunes son las lanas minerales de fibra larga (de roca y de vidrio) [94], Figura 2.1 a), aunque también pueden encontrarse espumas poliméricas [30, 31, 86] como el recubrimiento interno del silenciador de la Figura 2.1 b).



Figura 2.1. Silenciadores con diferentes materiales absorbentes.

La atenuación acústica se debe a la combinación de las reflexiones acústicas en la fase sólida del material absorbente junto con las pérdidas viscosas por fricción en las paredes de los poros. La capacidad de absorción de la energía acústica depende de algunos parámetros como la tortuosidad, la porosidad, la resistividad, la densidad o la geometría de fibras y poros entre otros [22, 27, 34].

### 2.3.1. Introducción

Antes de abordar la caracterización acústica de los materiales absorbentes, conviene definir algunas de las propiedades que los describen y que además intervienen en la formulación. La resistividad  $R_f$  es una de las propiedades más representativa de estos materiales, y se define como la diferencia de presión  $\Delta P$  a ambos lados de una muestra de material absorbente entre el producto del espesor de la muestra  $\Delta t$  y la velocidad a través de la misma  $u$ , esto es

$$R_f = \frac{\Delta P}{u \Delta t} \quad (2.39)$$

La unidad en el sistema internacional para la resistividad es rayl/m.

Se define como porosidad  $\Omega$ , la relación entre el volumen de los espacios libres  $V_a$  y el total  $V_m$ , es decir

$$\Omega = \frac{V_a}{V_m} \quad (2.40)$$

### 2.3.2. Caracterización del material

En función de la respuesta de la fase sólida de los materiales absorbentes a la onda de presión acústica, se distinguen materiales poroelásticos de materiales porosos rígidos. En los primeros, dentro de los cuales se encuentran, por ejemplo algunas espumas poliméricas, la fase sólida puede llegar a deformarse. Sin embargo en los segundos, entre los que se encuentran algunas lanas minerales, puede asumirse que la fase sólida del material es infinitamente rígida, no sufriendo por lo tanto deformación alguna. Esta diferencia de comportamiento requiere una modelización distinta [94]. En los materiales poroelásticos se suele utilizar el modelo poroelástico de Biot [30, 31], adaptado más tarde al problema acústico por Allard *et al.* [21].

En los materiales absorbentes de tipo rígido, al ignorarse cualquier movimiento de la fase sólida, puede llevarse a cabo una caracterización como un fluido equivalente [23, 53, 55]. De alguna forma se está asumiendo que sólo se propaga una onda de compresión y por lo tanto, el material puede modelarse a través de dos magnitudes básicas, que serían la densidad  $\tilde{\rho}$  y la velocidad del

sonido  $\tilde{c}$  del fluido equivalente. La caracterización del material se proporciona en ocasiones con otras propiedades acústicas equivalentes, tales como la impedancia característica del medio  $\tilde{Z}$  y el número de onda  $\tilde{k}$ . En cualquier caso las relaciones entre todas estas magnitudes son bien sencillas

$$\tilde{Z} = \tilde{\rho} \tilde{c} \quad (2.41)$$

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{\tilde{c}} \quad (2.42)$$

Las metodologías seguidas para la caracterización del material en la bibliografía consultada han sido empíricas, teóricas y combinación de las dos o semiempíricas.

El trabajo de Delany y Bazley [53], es un clásico y una referencia casi obligatoria en cualquier estudio de caracterización de materiales absorbentes. Su metodología es puramente empírica, diseñada para la caracterización de materiales fibrosos, pero implementada más tarde también para el estudio de espumas plásticas [46, 155]. En el trabajo original llevan a cabo la medida de la impedancia característica y del coeficiente de propagación usando la técnica de tubo de impedancia [8, 125]. Su trabajo permitió caracterizar el material con propiedades acústicas equivalentes como las mostradas

$$\tilde{k} = k_0 \left( \left( 1 + a_3 \left( \frac{f \rho_0}{R_f} \right)^{a_4} \right) + j \left( a_1 \left( \frac{f \rho_0}{R_f} \right)^{a_2} \right) \right) \quad (2.43)$$

$$\tilde{Z} = Z_0 \left( \left( 1 + a_5 \left( \frac{f \rho_0}{R_f} \right)^{a_6} \right) + j \left( a_7 \left( \frac{f \rho_0}{R_f} \right)^{a_8} \right) \right) \quad (2.44)$$

En esta Tesis se han ensayado cámaras rellenas con fibra de vidrio denominada *Advantex de Owens Corning*. Los valores de los coeficientes y exponentes para este material están recogidos en la Tabla 2.1 [60]:

Parámetro	Fibra Owens Corning
$a_1$	- 0.08504
$a_2$	- 0.732
$a_3$	0.09534
$a_4$	- 0.754
$a_5$	0.16
$a_6$	- 0.577
$a_7$	- 0.18897
$a_8$	- 0.595

Tabla 2.1. Constantes de fibra de vidrio Advantex de Owens Corning.

## 2.4. Placas y tubos perforados

En el diseño de silenciadores para motores de combustión interna, es frecuente encontrar este tipo de elementos en forma tanto de placa como de tubo. En el primer caso la superficie perforada se dispone perpendicular al flujo y en el segundo de forma concéntrica dejando una cavidad en el exterior. En estas últimas configuraciones pueden conseguirse niveles elevados de atenuación a frecuencias altas mediante un diseño adecuado con material absorbente. La Figura 2.2 representa posibles disposiciones de la superficie perforada en el interior de la cámara de expansión.

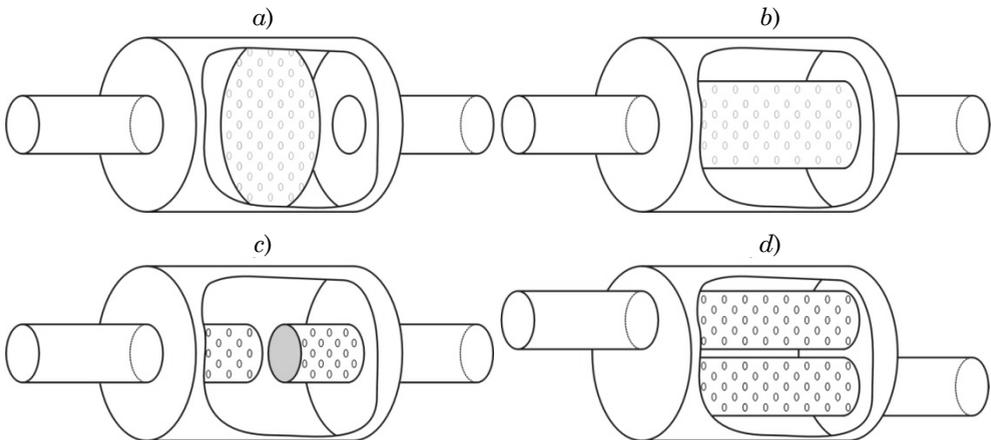


Figura 2.2. Configuraciones de silenciador con superficies perforadas: a) Placa; b), c) y d) Tubo perforado.

Los parámetros que caracterizan estos elementos acústicos son el espesor de la pared de la superficie perforada  $t_p$ , el diámetro de los agujeros  $d_h$  y la porosidad  $\sigma$  que se define como el área de los agujeros entre el área total [54, 98, 142]. La atenuación acústica asociada a estos elementos responde a la combinación de

reflexiones, fenómenos de resonancia y cierta disipación energética provocada por el cambio de sección brusco que suponen las perforaciones así como la fricción viscosa en la superficie de los orificios.

El campo acústico en el entorno de los agujeros es tremendamente complejo, y todavía más distorsionado en presencia de flujo medio. Por esta razón, desde los primeros estudios acústicos [140] se representa este tipo de elementos en base a su impedancia [29, 81, 98, 106, 142]. La formulación de este parámetro que se encuentra en la bibliografía no es única debido a su comportamiento no lineal y a su dependencia de la frecuencia, velocidad del flujo, distribución y uniformidad de los agujeros y de la orientación de la superficie perforada, entre otros [45, 81, 91, 95, 97, 106].

### 2.4.1. Impedancia acústica

Se define la impedancia acústica como la caída de presión acústica entre ambos lados del orificio dividida entre la velocidad con que es atravesado

$$Z_p = \frac{P_2 - P_1}{U} \quad (2.45)$$

donde se adopta como velocidad, aquella con la que la onda atraviesa el orificio  $U_i$ , promediada para toda la superficie, es decir

$$U = \sigma U_i \quad (2.46)$$

La impedancia acústica es una magnitud compleja. Es habitual encontrar trabajos en los que se asimila el fenómeno acústico a un circuito eléctrico [18, 44, 140], donde la presión y la velocidad acústica corresponden a la tensión y la intensidad eléctrica. Por ello a la parte real de la impedancia se le conoce como parte resistiva y la parte imaginaria parte reactiva.

Hay abundante literatura, referenciada a lo largo de este apartado, que refleja el trabajo de muchos investigadores a lo largo de más de cuarenta años, tratando de encontrar expresiones adecuadas de la impedancia, a partir del estudio teórico del fenómeno [140, 142] y también de resultados empíricos [69, 120]. Fruto de este trabajo ha sido la identificación de parámetros que influyen en su definición, el rango de aplicación y el ajuste de las expresiones matemáticas a las medidas de laboratorio. A continuación se presentan las expresiones más importantes, bien porque han marcado una línea de estudio o porque han proporcionado buenos resultados, al menos bajo ciertas condiciones de flujo, de nivel de presión, etc.

La referencia [103] recoge los resultados del estudio teórico realizado por Melling. Más tarde Sullivan y Crocker [144], los corrige empíricamente dando la siguiente expresión en ausencia de flujo medio

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{0.006 + j k_0 (t_p + 0.75 d_h)}{\sigma} \quad (2.47)$$

donde  $t_p$  es espesor del tubo perforado,  $d_h$  el diámetro de los agujeros y  $\sigma$  la porosidad definida anteriormente. En el trabajo original de Melling [103], el factor que multiplica a  $d_h$  es 0.85. Esta expresión supone una buena aproximación y por ello aparece en adelante en una serie de trabajos [29, 60, 106, 135, 142, 143, 152], pero presenta ciertas limitaciones importantes. En concreto, proporciona resultados razonables en ausencia de flujo medio, si la distribución de los agujeros es homogénea y si los niveles de presión son lo suficientemente bajos como para garantizar comportamiento acústico lineal.

El límite de presión se localiza en el nivel para el que la respuesta del conducto perforado deja de ser lineal. Esta última limitación la excluye en la aplicación que concierne a esta Tesis ya que en sistemas de escape reales los niveles de presión pueden ser más elevados. Sullivan [142, 143] analiza la zona de cambio de comportamiento localizando en términos de velocidad acústica la frontera. En su trabajo además propone correcciones para extender el rango de aplicación de esta expresión en cuanto a nivel de presión.

Otra limitación importante de esta expresión es que tampoco se considera la interacción entre los agujeros, cuestión que ya había sido analizada desde el punto de vista teórico. Las expresiones que suelen encontrarse para considerar este fenómeno son la corrección propuesta por Fock [67]

$$F_F(\sigma) = 1 - 1.41\sqrt{\sigma} + 0.34(\sqrt{\sigma})^3 + 0.07(\sqrt{\sigma})^5 \quad (2.48)$$

y la que propone Ingard [80]

$$F_I(\sigma) = 1 - 0.7\sqrt{\sigma} \quad (2.49)$$

Pueden encontrarse estas correcciones en trabajos tan relevantes como [29, 103, 106, 144] y es Bento [29], quien decide emplear su valor medio, idea que se repite más adelante [24, 55, 60]

$$F(\sigma) = \frac{F_F(\sigma) + F_I(\sigma)}{2} \quad (2.50)$$

Este factor se aplica a la expresión teórica de la impedancia de la siguiente forma

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{0.006 + j k_0 (t_p + 0.85 d_h F(\sigma))}{\sigma} \quad (2.51)$$

Las expresiones presentadas hasta ahora proporcionan buenos resultados en ausencia de flujo e incluso para valores de flujo pequeños. La expresión (2.51) será la empleada en los cálculos teóricos de esta Tesis.

En cuanto a la consideración de flujo medio, en uno de los primeros trabajos sobre el tema, Garrison *et al.* [69] proponen un modelo empírico de la impedancia y cuantifica el efecto del flujo medio sobre la parte resistiva y la parte reactiva. En concreto, detecta un aumento de la primera y la disminución de la segunda [81, 140, 143] con el incremento de velocidad de flujo. La expresión tiene la forma

$$Z_p = (1 + 1.9M)R_0 + j(1 - 1.65M)X_0 \quad (2.52)$$

donde  $R_0$  y  $X_0$  son la resistencia y la reactancia de la superficie perforada sin flujo medio.

Más tarde Rao y Munjal [120] desarrollan una fórmula empírica de la impedancia de un conducto perforado para usarla en el análisis de resonadores concéntricos tubulares con flujo tangente. Toman como parámetros el número de Mach asociado al flujo medio  $M$ , la porosidad  $\sigma$  y el espesor de la superficie perforada  $t_p$  y el diámetro de los orificios  $d_h$ . Realizan una batería de ensayos para estudiar el efecto aislado de cada uno de los parámetros sobre el valor de la impedancia. Para ello, varían únicamente el parámetro bajo estudio, dejando constante el resto. La siguiente expresión recoge sus resultados

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{7.337 \cdot 10^{-3} (1 + 72.23M) + j 2.2245 \cdot 10^{-3} (1 + 51t_p)(1 + 204d_h) f}{\sigma} \quad (2.53)$$

donde  $f$  es la frecuencia en Hz. La limitación más importante de esta expresión es que no tiene en cuenta la interacción entre los orificios, debido a que en su estudio experimental trabajan con porosidades por debajo del 10%, y para tales valores no es necesaria su consideración. Otra limitación es que realmente, fuera del rango de los parámetros, no está garantizada la idoneidad de la anterior expresión. El rango validado en los ensayos [106, 120], se resume en  $0.05 \leq M \leq 0.2$ ,  $3 \leq \sigma \leq 10\%$ ,  $1 \leq t_p \leq 3$  mm,  $1.75 \leq d_h \leq 7$  mm.

Lo más interesante del trabajo de Kooi y Sarin [96] es que redefine los parámetros de la impedancia, relacionando la impedancia acústica de un agujero con la resistencia al flujo  $R_f$ , y el factor de corrección de longitud  $\delta/\delta_0$ . El primero denota el cambio de resistencia inducido por el flujo, es decir, la diferencia entre la resistencia medida y la provocada por la pérdida viscosa del orificio, y el segundo mide la relación entre la corrección de longitud con flujo tangente y la misma sin flujo. Otro aspecto importante de su trabajo, es que, como ya hicieron Goldman *et al.* [75, 76], en lugar de usar la velocidad media en sus expresiones, intuyen que es más correcto expresar resistencia a flujo  $R_f$  y  $\delta/\delta_0$  en función de la velocidad de fricción  $u_*$ , que es un parámetro con unidades

de velocidad que mide las propiedades de la región interior del perfil de velocidad con flujo turbulento completamente desarrollado [153], y equivale a

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.54)$$

donde  $\tau_w$  es la tensión tangencial en la pared y  $\rho$  la densidad del fluido. En [98] puede encontrarse una expresión de  $u_*$  para flujo turbulento en conducto.

Cummings [45], compara sus resultados con los de Kooi y Sarin, concluye que la capa límite turbulenta influye bastante en la impedancia y que por tanto es necesario estudiarla bajo las mismas condiciones en las que va a ser usado el tubo perforado. Cummings justifica en base a los resultados experimentales que la idea intuitiva de Kooi es correcta, corrige ligeramente su modelo y, aunque en este trabajo no incluye la interacción entre los agujeros, lo hará más tarde junto a Kirby [95], utilizando sus resultados en [93].

Antes de seguir con el trabajo de Cummings, vale la pena destacar que las expresiones referidas hasta ahora, con sus limitaciones, son válidas en el supuesto de que el flujo no entrara en la cámara, pero esto no deja de ser una hipótesis teórica lejos de la realidad [141] si bien depende de muchos factores ( $\sigma$ ,  $d_h$ , etc.) y de la presencia de material absorbente.

En [95], Kirby y Cummings, partiendo de [45], incluyen por un lado el efecto del flujo normal que atraviesa los orificios de la superficie perforada, la interacción entre los agujeros y el efecto de la capa límite. Como resultado de la evolución del trabajo de Kooi y Sarin [96], se aportan las expresiones de [92] que básicamente constituyen una reordenación de las fórmulas mostradas en la referencia [95] y que se emplean cuando el conducto perforado está rodeado de material absorbente.

Por un lado, la impedancia total, para conducto perforado tubular con orificios circulares puede escribirse como

$$Z_p = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} (\theta + j\chi) \quad (2.55)$$

donde  $\theta + j\chi$  corresponde a la impedancia normalizada de un agujero.

La parte resistiva de la anterior expresión,  $\theta$ , es la suma de la resistencia de flujo, más la viscosa, es decir,  $\theta = \theta_f + \theta_v$ , donde la resistencia de flujo es

$$\theta_f = \left( 26.16 \left( \frac{t_p}{d_h} \right)^{-0.169} - 20 \right) \frac{u_*}{c_0} - 0.6537 k_0 d_h \quad (2.56)$$

y la viscosa,

$$\theta_v = \frac{t_p}{d_h} \sqrt{\frac{8\mu\rho_0 k_0}{c_0}} \quad (2.57)$$

siendo  $\mu$  la viscosidad dinámica.

La reactancia de un agujero  $\chi$ , se define como

$$\chi = j k_0 (\delta + t_p) \quad (2.58)$$

donde  $\delta$  se obtiene del factor de corrección de longitud  $\delta/\delta_0$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \begin{cases} 1 & ; \frac{u_*}{f t_p} \leq 0.18 \frac{d_h}{t_p} \\ \left(1 + 0.6 \frac{t_p}{d_h}\right) e^{\left[\frac{u_*/f t_p - 0.18 d_h/t_p}{1.8 + t_p/d_h}\right]} - 0.6 \frac{t_p}{d_h} & ; \frac{u_*}{f t_p} > 0.18 \frac{d_h}{t_p} \end{cases} \quad (2.59)$$

El factor de corrección de longitud sin flujo medio  $\delta_0$  es  $0.849d_h$ .

Lee e Ih [98] obtiene un nuevo modelo de impedancia empírico que tiene en cuenta las conclusiones obtenidas en los trabajos previos. Aumenta el rango de los parámetros implicados en la formulación, abarcando los valores de las superficies perforadas presentes en sistemas de escape típicos de motores de combustión interna, esto es  $60 \leq f \leq 4000$  Hz,  $0 \leq M \leq 0.2$ ,  $2 \leq d_h \leq 9$  mm,  $1 \leq t_p \leq 5$  mm,  $2.79 \leq \sigma \leq 22.3\%$ .

En su trabajo, a partir de los resultados experimentales, ajusta mediante un análisis de regresión no lineal los coeficientes de tres expresiones, que son la frecuencia crítica ( $f_0$ ) y la parte real e imaginaria de la impedancia, esto es  $R$  y  $X$  en

$$Z_p = R + j X \quad (2.60)$$

La frecuencia crítica  $f_0$  marca el cambio de tendencia de la parte resistiva de la impedancia, fenómeno que ya se había observado en anteriores trabajos [81, 144]. Mientras la frecuencia esté por debajo de este límite, la resistencia disminuye con un aumento de la frecuencia, aumentando con la misma por encima de este valor.

A continuación se presentan las expresiones ajustadas, dando el valor de los coeficientes obtenidos en el trabajo de Lee e Ih así como el grado de correlación  $\Gamma^2$

$$f_0 = \phi_1 \frac{1 + \phi_2 M}{1 + \phi_3 d_h} \quad (2.61)$$

Se obtuvo  $\phi_1 = 412$ ,  $\phi_2 = 104$  y  $\phi_3 = 274$ , para  $\Gamma^2 = 0.9809$ . Como puede verse,  $f_0$  depende sólo de la velocidad del flujo y del diámetro de los orificios.

La parte resistiva de la impedancia queda,

$$R = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left[ a_0 (1 + a_1 |f - f_0|) (1 + a_2 M) (1 + a_3 d_h) (1 + a_4 t_p) \right] \quad (2.62)$$

Obteniendo  $a_0 = 3.94 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_1 = 7.84 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_2 = 14.9$ ,  $a_3 = 296$  y  $a_4 = -127$  con  $\Gamma^2 = 0.8458$ .

Y la parte reactiva de la impedancia,

$$X = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left[ b_0 (1 + b_1 d_h) (1 + b_2 t_p) (1 + b_3 M) (1 + b_4 f) \right] \quad (2.63)$$

donde  $b_0 = -6 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_1 = 194$ ,  $b_2 = 432$ ,  $b_3 = -1.72$  y  $b_4 = -6.62 \cdot 10^{-3}$ , con  $\Gamma^2 = 0.9711$ . Estas expresiones llevan implícita la interacción entre agujeros ya que están ajustadas para porosidades de hasta 22.3%.

Los modelos revisados hasta ahora suponen que la mayoría del flujo es tangente a la superficie perforada, pero esto sólo ocurre en resonadores donde el tubo perforado está alineado con los conductos de entrada y salida. El modelo de Lee e Ih, representado por las ecuaciones (2.60)-(2.63), es el que se tomará para el cálculo de la impedancia en presencia de flujo medio en esta Tesis.

Existen otros parámetros de los que depende la impedancia acústica tales como la homogeneidad o heterogeneidad en la distribución de los orificios. Los trabajos [91, 97] recogen algunos resultados, aunque aquí no se abordan por quedar fuera del alcance de la Tesis.

En conductos perforados y cerrados, como el de la Figura 2.2 c), el flujo debe forzosamente salir a través de los orificios de la superficie perforada. Para esta configuración, Sullivan [142, 143] busca, más que una expresión cuantitativa, la tendencia de la respuesta acústica del silenciador con superficies perforadas, en presencia de flujo medio. En primer lugar le atribuye al flujo un doble efecto: primero el efecto convectivo del flujo medio en la energía acústica y por otro lado el efecto sobre la impedancia del conducto perforado. Partiendo de las expresiones de Garrison *et al.* [69] y las de Sullivan y Crocker [144], y contrastándolas con los datos obtenidos experimentalmente, llega a dos conclusiones: por un lado, que en la caracterización del silenciador (*TL*) con

conducto perforado, no tiene demasiada importancia el efecto convectivo del flujo (lo cual es discutible a la vista de los resultados de otros autores, sobre todo en presencia de material absorbente) y por otro que a medida que aumenta el flujo, la reactancia de la superficie perforada es cada vez menos importante, estableciendo que para  $M > 0.05$ , se puede considerar que el valor de la misma es nulo.

Más tarde Jayarama y Yam [84] detectan discrepancias del modelo de Sullivan en experimentos con  $M > 0.15$  y lo corrigen, dando

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{0.514 \frac{d_1 M}{L_1 \sigma} + j 0.95 k_0 (t_p + 0.75 d_n F(\sigma))}{\sigma} \quad (2.64)$$

donde  $d_1$  y  $L_1$  son, respectivamente, el diámetro y la longitud del conducto perforado cerrado, y por lo tanto  $M/L_1$  expresa el gradiente axial del número de Mach.  $F(\sigma)$  es el factor de corrección que tiene en cuenta la interacción entre los agujeros.

## 2.5. Acústica unidimensional. Definición de parámetros

Para la obtención de expresiones que reflejen el comportamiento acústico de ondas confinadas en conductos, se considera en primer lugar que la propagación es unidimensional, suposición que da lugar a la teoría de onda plana, presente en trabajos relevantes como [29] o [49]. En este apartado se obtienen las expresiones para el caso de medio móvil y a partir de estas la particularización para medio en reposo es inmediata.

### 2.5.1. Medio móvil

Se considera la onda acústica confinada en un conducto y en presencia de flujo medio. El caso unidimensional impone un conducto de pared rígida recto, así como un flujo medio uniforme y alineado con el mismo. Se considera en adelante que el conducto es paralelo al eje  $x$  y que la velocidad del flujo medio es  $U_{fm}$ . La propagación de la onda acústica es a la velocidad del sonido correspondiente al medio  $c_0$ , pero la presencia del flujo hace que la velocidad de propagación de la perturbación en sentido progresivo sea la suma de la velocidad del flujo más la velocidad del sonido  $U_{fm} + c_0$  y en sentido regresivo la diferencia  $U_{fm} - c_0$ , como está representado en la Figura 2.3. Dicho de otro modo las ondas son arrastradas aguas abajo, lo que se conoce como efecto convectivo.



Figura 2.3. Componente progresiva y regresiva de presión en conducto con flujo medio.

Bajo las anteriores consideraciones, la ecuación convectiva clásica (2.28) queda

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (2.65)$$

La derivada total en este caso es

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_{fm} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.66)$$

Suponiendo además un comportamiento de tipo armónico, es decir, la presión en el dominio temporal se expresa como  $p = P e^{j\omega t}$ , y combinando las anteriores expresiones, se obtiene de forma sencilla [44, 106]

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2j k_0 M \frac{\partial P}{\partial x} + k_0^2 P = 0 \quad (2.67)$$

donde  $M$  es el número de Mach definido como  $M = U_{fm}/c_0$  y  $k_0$  es el número de onda  $k_0 = \omega/c_0$ .

La solución de la ecuación (2.67) es [17, 49, 121]

$$P(x) = P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} x} + P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} x} \quad (2.68)$$

La interpretación física de este resultado es que la onda de presión acústica es igual a la suma de una componente que se propaga aguas abajo (sentido positivo de  $x$ ), cuya amplitud compleja es  $P^+$ , más otra que viaja en sentido contrario, y de amplitud  $P^-$ , cuyos valores dependen de la frecuencia.

Tomando ahora la ecuación de Euler (2.16) de forma análoga al procedimiento descrito en el apartado 2.2.1, es decir, despreciando las fuerzas volumétricas, teniendo en cuenta las variables ambientales cumplen la ecuación de continuidad y considerando únicamente los términos de primer orden, esta se transforma en la siguiente expresión

$$\rho_0 \left( j \omega U + U_{fm} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.69)$$

siendo la solución

$$U(x) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} x} - P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} x} \right) = \frac{1}{Z_0} \left( P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} x} - P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} x} \right) \quad (2.70)$$

donde  $Z_0$  representa la impedancia característica del medio. En ocasiones, puede ser útil expresar la velocidad en términos de flujo másico  $V$ . Para un conducto de sección transversal  $S$ , la transformación es sencilla, ya que

$$V = \rho_0 S U \quad (2.71)$$

y por tanto

$$V(x) = \frac{S}{c_0} \left( P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} x} - P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} x} \right) = \frac{1}{Y_0} \left( P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} x} - P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} x} \right) \quad (2.72)$$

donde  $Y_0 = c_0/S$  es la impedancia característica del conducto.

Las condiciones de contorno así como la geometría, permitirán construir un sistema de ecuaciones que proporcione los valores de  $P^+$  y  $P^-$ . Las soluciones hasta aquí obtenidas corresponden al caso de fluido ideal. Para fluidos reales, el número de onda se convierte en [49, 106]

$$\beta^\pm = \frac{\alpha_0 + \xi M + j(k_0 + \alpha)}{1 \pm M} = \frac{\alpha + jk}{1 \pm M} \quad (2.73)$$

Los superíndices  $+$  y  $-$  de esta nueva definición del número de onda corresponden a las componentes progresiva y regresiva de la onda de presión, al igual que los de las amplitudes complejas. Así, las expresiones de presión y velocidad quedan

$$P(x) = P^+ e^{-\beta^+ x} + P^- e^{\beta^- x} \quad (2.74)$$

$$U(x) = \frac{1}{Z_0} \left( P^+ e^{-\beta^+ x} - P^- e^{\beta^- x} \right) \quad (2.75)$$

$$V(x) = \frac{1}{Y_0} \left( P^+ e^{-\beta^+ x} - P^- e^{\beta^- x} \right) \quad (2.76)$$

La expresión dada en (2.73) se ha obtenido a partir de la ecuación de la energía (2.7) en su definición más general, habiendo despreciado términos de orden de magnitud inferior y reorganizando términos. Las pérdidas por fricción consideradas incluyen los efectos convectivos del flujo medio  $\alpha_0$  así como las debidas a la fricción turbulenta del fluido  $\xi M$ . Estas están consideradas en los términos de la expresión anterior y se desglosan a continuación:

- $\alpha_0$  es el coeficiente de atenuación viscotérmico, y proporciona las pérdidas de presión producidas por la absorción de calor por el medio o la disipación de calor a través de las paredes del conducto. Su definición matemática depende de si se considera o no la conducción de calor en la pared del conducto. En el primer caso, para un conducto circular de diámetro  $D$ , Kirchhoff la define como [49, 106]

$$\alpha_0 = \frac{2}{D c_0} \sqrt{\frac{\mu \omega}{2 \rho_0}} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma Pr}} \right) \quad (2.77)$$

$\gamma$  es el exponente adiabático y  $Pr = \mu C_p/k$  es el número de Prandtl, donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica del medio,  $C_p$  el calor específico a presión constante y  $k$  la conductividad térmica.

En el segundo caso, para el mismo conducto queda

$$\alpha_0 = \frac{2}{D c_0} \sqrt{\frac{\mu \omega}{2 \rho_0}} \quad (2.78)$$

- $\xi$  se define como la relación entre la caída de presión en una longitud axial igual a un diámetro y la energía cinética (fricción turbulenta del fluido), es igual a  $\xi = F/2D$  siendo  $D$  el diámetro del conducto y  $F$  es el factor de fricción de Froude.  $F$  puede obtenerse en función del número de Reynolds  $Re$ , y su expresión depende de la velocidad del flujo, para el rango de velocidades típicas en sistemas de escape. Se emplea normalmente la fórmula de Lee [106]

$$F = 0.0072 + \frac{0.612}{Re^{0.35}} \quad \text{para } Re < 4 \cdot 10^5 \quad (2.79)$$

El número de Reynolds es igual a  $Re = U_{fm} D \rho_0/\mu$ , siendo  $\mu$  la viscosidad dinámica, que puede obtenerse de la expresión deducida de la teoría cinética de Southerland [154]

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (2.80)$$

donde  $\mu_0$  es la viscosidad correspondiente a la temperatura  $T_0$  y  $S$  es una temperatura efectiva llamada constante de Southerland y depende del gas. Para el aire estos valores obtenidos empíricamente son [154]  $\mu_0 = 1.716 \cdot 10^{-5}$  N s/m<sup>2</sup>,  $T_0 = 273$  K y  $S = 111$  K

Reorganizando de otra manera los exponentes de la expresión (2.74)

$$P(x) = P^+ e^{\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1+M}x} + P^- e^{\frac{\alpha_0 + \xi M + jk}{1-M}x} \quad (2.81)$$

Munjal [106] busca un sentido físico a cada uno de ellos. Lo que hace es agrupar los exponentes de las componentes progresiva y regresiva, asignando una constante de atenuación para cada componente como sigue

$$\alpha^\pm = \frac{\alpha_0 + \xi M}{1 \pm M} = \frac{\alpha}{1 \pm M} \quad (2.82)$$

Así  $\alpha$  queda igual para ambas componentes, de modo que puede ser considerado como el coeficiente real de la atenuación acústica para un medio en movimiento.

Con respecto al número de onda

$$k^\pm = \frac{k}{1 \pm M} \quad (2.83)$$

El término  $1 \pm M$  presente en el denominador de ambas expresiones, representa el efecto Doppler asociado a la convección del flujo medio.

La presión quedará [108]

$$P(x) = P^+ e^{-(jk^+ + \alpha^+)x} + P^- e^{(jk^- + \alpha^-)x} \quad (2.84)$$

Si se opera convenientemente los exponentes de la ecuación (2.81), resulta

$$\frac{\alpha + jk}{1+M} = \frac{\alpha + jk}{1-M^2}(1-M) = k_c(1-M) \quad (2.85)$$

$$\frac{\alpha + jk}{1-M} = \frac{\alpha + jk}{1-M^2}(1+M) = k_c(1+M) \quad (2.86)$$

De modo que

$$k_c = \frac{(\alpha + jk)}{(1-M^2)}, \quad k = k_0 + \alpha, \quad \alpha = \alpha_0 + \xi M, \quad \xi = \frac{F}{2D} \quad (2.87)$$

La presión queda expresada de la siguiente forma

$$P(x) = e^{k_c M x} \left( P^+ e^{-k_c x} + P^- e^{k_c x} \right) \quad (2.88)$$

Ahora, procediendo como se hizo con la ecuación (2.72), el flujo másico queda

$$V(x) = \frac{1}{Y} \left( P^+ e^{-\alpha^+ x - jk^+ x} - P^- e^{\alpha^- x + jk^- x} \right) \quad (2.89)$$

o también

$$V(x) = \frac{e^{k_c M x}}{Y} \left( P^+ e^{-k_c x} - P^- e^{k_c x} \right) \quad (2.90)$$

y la impedancia característica del conducto y del medio son

$$Y = Y_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{k_0} + j \frac{\alpha}{k_0} \right) \quad (2.91)$$

$$Z = Z_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{k_0} + j \frac{\alpha}{k_0} \right) \quad (2.92)$$

## 2.5.2. Medio en reposo

Este apartado supone el caso particular del anterior haciendo  $M = 0$ . Se aplica esta particularidad en las ecuaciones diferenciales, se resuelven para el caso de fluido ideal y se observa la analogía con las soluciones a las ecuaciones en el caso de flujo medio. Para obtener las expresiones en el caso de medio en reposo y fluido no ideal, se emplea la solución a las ecuaciones diferenciales del apartado anterior directamente.

### 2.5.2.1. Fluido ideal

Empezando por la derivada total ahora esta queda simplemente como la derivada con respecto al tiempo. Así, la ecuación convectiva clásica (2.28) se transforma en

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.93)$$

Asumiendo comportamiento de tipo armónico

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + k_0^2 P = 0 \quad (2.94)$$

La solución de la ecuación diferencial (2.94) es [17, 49, 121]

$$P(x) = P^+ e^{-jk_0 x} + P^- e^{jk_0 x} \quad (2.95)$$

que se hubiese obtenido de igual forma anulando el número de Mach en la ecuación (2.68).

La ecuación de Euler, procediendo de forma análoga, queda

$$U = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.96)$$

Sustituyendo la ecuación (2.95) en la expresión (2.96), y operando, se obtiene la velocidad acústica como sigue

$$U(x) = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0x} - P^- e^{jk_0x}) \quad (2.97)$$

y el flujo másico es

$$V(x) = \frac{1}{Y_0} (P^+ e^{-jk_0x} - P^- e^{jk_0x}) \quad (2.98)$$

### 2.5.2.2. *Fluido real*

En este caso, el número de onda se convierte en [49, 106]

$$\beta = \alpha_0 + jk \quad (2.99)$$

El coeficiente de atenuación viscotérmico  $\alpha_0$  y el número de onda están definidos por la ecuación (2.73).

La presión acústica, el flujo másico y la impedancia característica del conducto, quedan como sigue

$$P(x) = P^+ e^{-\beta x} + P^- e^{\beta x} \quad (2.100)$$

$$V(x) = \frac{1}{Y} (P^+ e^{-\beta x} - P^- e^{\beta x}) \quad (2.101)$$

$$Y = Y_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0}{k_0} + j \frac{\alpha_0}{k_0} \right) \quad (2.102)$$

Al ser la relación  $\alpha_0/k_0$  normalmente baja, y especialmente a frecuencias altas, su contribución no tiene demasiada importancia en ausencia de flujo, sobre todo en sistemas donde los conductos no poseen demasiada longitud, como ocurre en sistemas de escape reales y también en el banco de ensayos desarrollado.

## 2.6. Representación matricial

En el análisis del comportamiento acústico en sistemas completos de escape, es tan usual como conveniente representar cada elemento del sistema como un modelo discreto en lo que se refiere a su comportamiento acústico.

Una vez obtenida la solución de la ecuación de ondas, se procede, en virtud de la teoría unidimensional, al desarrollo de métodos matriciales que permitan obtener el comportamiento acústico de los elementos que forman parte de la línea de escape. Las variables de estado presentes en las ecuaciones descritas en el apartado 2.2, admiten una relación lineal a lo largo de los elementos que constituyen un sistema acústico, esto es, conductos, expansiones y contracciones, placas y tubos perforados, materiales absorbentes, etc.

La representación matemática de las citadas relaciones lineales se realiza en base a la conocida matriz de cuatro polos [49, 106], representada gráficamente en la Figura 2.4.

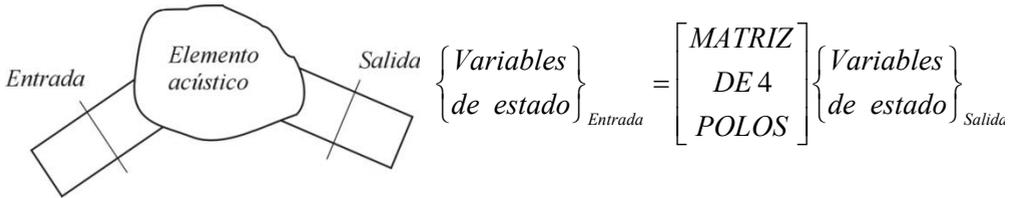


Figura 2.4. Definición general de la matriz de cuatro polos.

La obtención de esta matriz, para cada uno de los elementos aislados es relativamente sencilla, y se basa en aplicar a cada elemento o discontinuidad las condiciones de contorno pertinentes.

Para obtener la matriz de cuatro polos que representa la respuesta acústica de una sucesión de elementos agrupados en cascada, como sucede en una línea completa de escape, se procede de la siguiente forma.

Dado el esquema representado en la Figura 2.5, para cada uno de los elementos acústicos puede definirse su propia matriz de 4 polos, que relaciona las variables de estado a la entrada y a la salida, así

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \text{Variables} \\ \text{de estado} \end{matrix} \right\}_{n-1} &= \left[ \begin{matrix} \text{MATRIZ DE} \\ \text{4 POLOS A} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \text{Variables} \\ \text{de estado} \end{matrix} \right\}_n \\ \left\{ \begin{matrix} \text{Variables} \\ \text{de estado} \end{matrix} \right\}_n &= \left[ \begin{matrix} \text{MATRIZ DE} \\ \text{4 POLOS B} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \text{Variables} \\ \text{de estado} \end{matrix} \right\}_{n+1} \end{aligned} \tag{2.103}$$

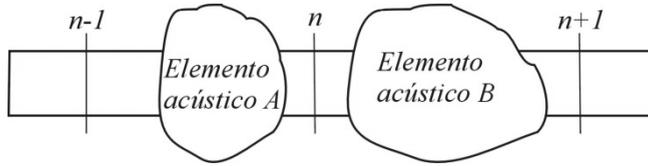


Figura 2.5. Representación esquemática de una línea de escape.

Si se toma ahora el conjunto formado por elemento acústico  $A$  seguido del elemento acústico  $B$ , las variables de estado deberán referirse a las secciones  $n-1$  y  $n+1$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variables} \\ \text{de estado} \end{array} \right\}_{n-1} = \begin{bmatrix} \text{MATRIZ DE} \\ 4 \text{ POLOS} \\ \text{CONJUNTO} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Variables} \\ \text{de estado} \end{array} \right\}_{n+1} \quad (2.104)$$

La matriz del conjunto será, sencillamente, la resultante de multiplicar las matrices individuales.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variables} \\ \text{de estado} \end{array} \right\}_{n-1} = \begin{bmatrix} \text{MATRIZ DE} \\ 4 \text{ POLOS } A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{MATRIZ DE} \\ 4 \text{ POLOS } B \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Variables} \\ \text{de estado} \end{array} \right\}_{n+1} \quad (2.105)$$

El vector que contiene las variables de estado en cada sección se conoce como vector de estado. Es por lo tanto una metodología sencilla y tanto más precisa cuantos más aspectos se consideren en la definición de las matrices de transferencia individual, aspectos tales como propagación acústica tridimensional en el interior del elemento analizado, fuentes de ruido, pérdidas por fricción, etc.

La limitación más importante que presenta esta metodología es que excluye el efecto de los modos de alto orden en las secciones de acoplamiento, de forma que aun dando buenas predicciones para frecuencias bajas, esta aproximación simplista se desvía de la respuesta acústica real del sistema a altas frecuencias. Sin embargo sus resultados son válidos a la hora de hacer estudios preliminares.

### 2.6.1. Formulación de la matriz de comportamiento

En base a las variables de estado que se elijan y qué se considere *entrada* o *salida*, se obtendrán distintas formulaciones de la representación matricial. Una expresión sencilla de la misma la constituye la matriz de dispersión, que representa la relación entre las componentes incidente y reflejada a la entrada y a la salida del elemento acústico, representadas en la Figura 2.6.

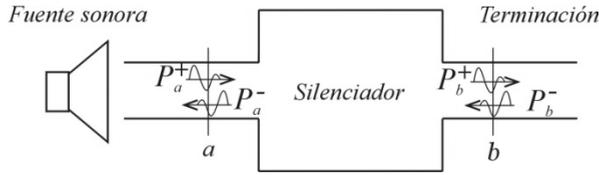


Figura 2.6. Representación esquemática general de silenciador.

A partir de la nomenclatura de la Figura 2.6, Broatch y Denia en las referencias [33, 54] definen la matriz de dispersión como

$$\begin{Bmatrix} P_a^+ \\ P_a^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b^+ \\ P_b^- \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

Åbom [13] emplea una definición algo distinta

$$\begin{Bmatrix} P_a^- \\ P_b^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ SM_{21} & SM_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_a^+ \\ P_b^- \end{Bmatrix} \quad (2.107)$$

La obtención de los elementos de la matriz de dispersión en cualquiera de sus formulaciones resulta relativamente sencilla, teniendo en cuenta que el silenciador o cualquier otro elemento acústico, podría caracterizarse por un coeficiente de transmisión  $T$  y otro de reflexión  $R$ , que expresan cómo se modifican las ondas de presión que llegan a él.

Por otro lado, las modificaciones que sufren las componentes acústicas, no tienen por qué ser iguales si la componente viaja en un sentido o en otro, de modo que habría que definir tales coeficientes para cada sentido. Así, denotamos con subíndice  $d$  estos coeficientes en el sentido directo (de la fuente acústica a la terminación) y subíndice  $i$  en sentido contrario. La Figura 2.7 muestra de forma gráfica el sentido físico de estos coeficientes.

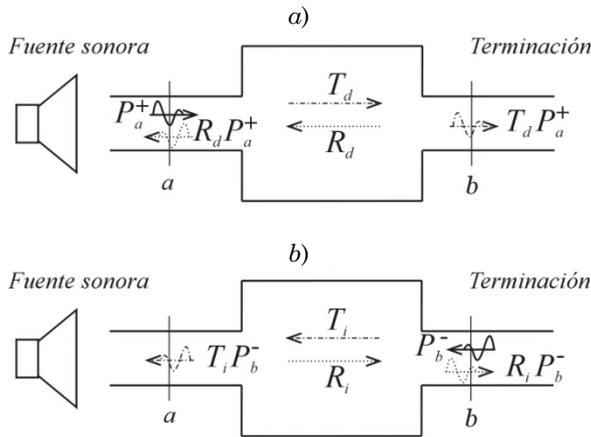


Figura 2.7. Coeficientes de transmisión y de reflexión: a) directos; b) inversos.

Tomando la onda que llega al silenciador, en cada extremo ( $P_a^+$  en  $a$  y  $P_b^-$  en  $b$ ) y aplicando la definición de los coeficientes de transmisión y reflexión para cada sentido, la onda acústica transmitida al medio sería

$$P_b^+ = T_d P_a^+ + R_i P_b^- \quad (2.108)$$

y la onda reflejada hacia la fuente sonora

$$P_a^- = T_i P_b^- + R_d P_a^+ \quad (2.109)$$

que escrito de forma matricial, según la definición dada en la ecuación (2.107), resulta

$$\begin{Bmatrix} P_a^- \\ P_b^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d & T_i \\ T_d & R_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_a^+ \\ P_b^- \end{Bmatrix} \quad (2.110)$$

Para obtener los términos de la matriz de dispersión expresada como en (2.106), bastaría con reorganizar las ecuaciones (2.108) y (2.109), en este caso queda

$$\begin{Bmatrix} P_a^+ \\ P_a^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/T_d & -R_i/T_d \\ R_d/T_d & T_i - R_i R_d/T_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b^+ \\ P_b^- \end{Bmatrix} \quad (2.111)$$

Esta formulación presenta el inconveniente de que no es posible, de forma inmediata, obtener la matriz de dispersión de un conjunto de elementos dispuestos en cascada ya que se ha perdido el concepto de vector de estado asociado a una sección determinada del sistema, sustituyéndose por el de vector de componentes entrantes y salientes al elemento acústico. Sin embargo desde el punto de vista experimental presenta grandes ventajas [13] y ha

resultado de gran utilidad para el desarrollo experimental de esta Tesis. Además, si se tiene en cuenta la relación entre cada una de las expresiones de la matriz de cuatro polos, la obtención de una matriz a partir de otra es directa, recuperando así la versatilidad propia de la expresión matricial para la representación de sistemas complejos.

Otra formulación muy empleada es la correspondiente a la matriz de transferencia. En esta definición se toman como variables de estado la presión y la velocidad acústica a la entrada y a la salida del elemento acústico

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ U_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b \\ U_b \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_b \\ U_b \end{Bmatrix} \quad (2.112)$$

Dicho de otro modo, la matriz de transferencia de un elemento definida de esta forma, permite obtener las variables de estado en un punto aguas arriba del elemento, conocidas tales perturbaciones en un punto aguas abajo del mismo.

Si  $Z$  es la impedancia característica en las secciones  $a$  y  $b$  se cumple

$$P_{a/b} = P_{a/b}^+ + P_{a/b}^- \quad (2.113)$$

$$U_{a/b} = \frac{1}{Z} (P_{a/b}^+ - P_{a/b}^-) \quad (2.114)$$

Los términos de la matriz de transferencia resultan

$$A = \frac{1}{2} \left\{ T_i + \frac{1 + R_d - R_i - R_i R_d}{T_d} \right\} \quad (2.115)$$

$$B = \frac{Z}{2} \left\{ \frac{1 + R_d + R_i + R_i R_d}{T_d} - T_i \right\} \quad (2.116)$$

$$C = \frac{1}{2Z} \left\{ \frac{1 - R_d - R_i + R_i R_d}{T_d} - T_i \right\} \quad (2.117)$$

$$D = \frac{1}{2} \left\{ T_i + \frac{1 - R_d + R_i - R_i R_d}{T_d} \right\} \quad (2.118)$$

En general, se admite que, para un sistema cualquiera, siempre que aguas arriba y aguas abajo pueda encontrarse un frente de onda plano, puede encontrarse la matriz de transferencia del sistema definida como en la ecuación (2.112). En este caso, la condición de onda plana no es demasiado restrictiva ya que, en presencia de modos exclusivamente evanescentes, siempre puede llegar a conseguirse con suficiente longitud de conducto recto. En caso contrario, esto es si la frecuencia de excitación supera la frecuencia de corte del conducto,

aparecen modos propagantes, que se propagan sin atenuación, en ausencia de pérdidas viscosas.

Otra forma de obtener la matriz de transferencia, es atendiendo al sentido físico de cada uno de sus componentes. Aplicando las condiciones de contorno adecuadas, se tiene que

$$[T] = \begin{bmatrix} \left. \frac{P_a}{P_b} \right|_{U_b=0} & \left. \frac{P_a}{U_b} \right|_{P_b=0} \\ \left. \frac{U_a}{P_b} \right|_{U_b=0} & \left. \frac{U_a}{U_b} \right|_{P_b=0} \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

La condición  $P_b = 0$  equivale a considerar que en la sección  $b$  se dispone de un extremo abierto ideal y la condición  $U_b = 0$  un extremo cerrado ideal. Lo interesante se encuentra en que estas relaciones permiten, por un lado medir directamente cada uno de los parámetros de un elemento acústico en el laboratorio, si se consiguen reproducir las condiciones de contorno asociadas, y por otro su cálculo matemático mediante métodos numéricos (Apéndice A), cuestiones que se abordarán a lo largo de esta Tesis.

## 2.6.2. Conductos

En este apartado, aplicando el desarrollo anterior, se van a obtener los términos de la matriz de transferencia para un conducto recto de sección transversal uniforme genérica como el representado en la Figura 2.8, en presencia de flujo medio con velocidad dada por el número de Mach  $M$ .

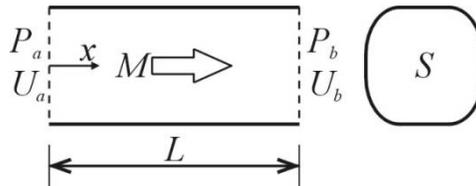


Figura 2.8. Conducto recto de área transversal uniforme.

La presión acústica en el conducto mostrado en la Figura 2.8, según la expresión (2.88) es

$$P(x) = e^{k_c M x} (P^+ e^{-k_c x} + P^- e^{k_c x}) \quad (2.120)$$

y la velocidad acústica

$$U(x) = \frac{e^{k_c M x}}{Z} (P^+ e^{-k_c x} - P^- e^{k_c x}) \quad (2.121)$$

Al ser los conductos de entrada y salida de igual sección transversal, la impedancia puede considerarse igual a la entrada y a la salida. Teniendo en cuenta esta consideración, la particularización de estas expresiones en la sección  $a$  donde  $x = 0$ , resultan

$$P_a = P^+ + P^- \quad (2.122)$$

$$U_a = \frac{1}{Z} (P^+ - P^-) \quad (2.123)$$

y en  $b$  ( $x = L$ )

$$P_b = e^{k_c M L} (P^+ e^{-k_c L} + P^- e^{k_c L}) \quad (2.124)$$

$$U_b = \frac{e^{k_c M L}}{Z} (P^+ e^{-k_c L} - P^- e^{k_c L}) \quad (2.125)$$

Se supone ahora una excitación conocida en la sección de entrada al conducto, que, por simplicidad, toma valor unitario. Para obtener los términos de la matriz de transferencia, se deben aplicar las condiciones de contorno dadas en la ecuación (2.119). Así en el caso de extremo cerrado,  $U_b = 0$ , se tiene

$$P_a = P^+ + P^- = 1 \quad (2.126)$$

$$U_b = \frac{e^{k_c M L}}{Z} (P^+ e^{-k_c L} - P^- e^{k_c L}) = 0 \quad (2.127)$$

Combinando ambas ecuaciones, se puede despejar las componentes de la onda de presión, resultando en el caso de fluido real

$$P^+ = \frac{e^{2k_c L}}{1 + e^{2k_c L}} \quad (2.128)$$

$$P^- = \frac{1}{1 + e^{2k_c L}} \quad (2.129)$$

Ahora, teniendo en cuenta la expresión (2.119), y de acuerdo con (2.122)-(2.124), podrán obtenerse los términos de la primera columna, es decir  $P_a/P_b|_{U_b=0}$  y  $U_a/P_b|_{U_b=0}$ . Operando de forma adecuada queda

$$P_b|_{U_b=0} = e^{k_c M L} \frac{2 e^{k_c L}}{1 + e^{2k_c L}} \quad (2.130)$$

$$U_a|_{U_b=0} = \frac{1}{Z} \left( \frac{e^{2k_c L} - 1}{1 + e^{2k_c L}} \right) \quad (2.131)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que a la entrada la presión es conocida  $P_a = 1$  resulta

$$A = \frac{P_a}{P_b} \Big|_{U_b=0} = \frac{1 + e^{2\beta_c L}}{2e^{k_c ML} e^{k_c L}} = e^{-k_c ML} \frac{e^{-k_c L} + e^{k_c L}}{2} = e^{-k_c ML} \cosh(k_c L) \quad (2.132)$$

$$C = \frac{U_a}{P_b} \Big|_{U_b=0} = \frac{1}{Z} e^{-k_c ML} \frac{e^{k_c L} - e^{-k_c L}}{2} = \frac{1}{Z} e^{-k_c ML} \sinh(k_c L) \quad (2.133)$$

Para la obtención de los otros dos términos de la matriz, se debe aplicar la segunda de las condiciones de contorno, es decir  $P_b = 0$  que resulta

$$P_b = e^{k_c ML} (P^+ e^{-k_c L} + P^- e^{k_c L}) = 0 \quad (2.134)$$

Manteniendo una excitación a la entrada plana, de amplitud igual a la unidad, como en el paso anterior, se consigue la segunda ecuación que permite obtener cada una de las componentes de la onda de presión

$$P_a = P^+ + P^- = 1 \quad (2.135)$$

de donde se resuelve

$$P^+ = \frac{-e^{2k_c L}}{1 - e^{2k_c L}} \quad (2.136)$$

$$P^- = \frac{1}{1 - e^{2k_c L}} \quad (2.137)$$

A partir de las componentes de la onda de presión, las magnitudes de interés para el resto de términos de la matriz de transferencia, se obtienen operando de forma sencilla. De la ecuación (2.123)

$$U_a \Big|_{P_b=0} = \frac{(-1)1 + e^{2k_c L}}{Z} \frac{1 + e^{2k_c L}}{1 - e^{2k_c L}} \quad (2.138)$$

y de (2.125) se tiene

$$U_b \Big|_{P_b=0} = \frac{-e^{k_c ML}}{Z} \frac{2e^{k_c L}}{1 - e^{2k_c L}} \quad (2.139)$$

Ahora, los términos restantes de la matriz de transferencia, teniendo en cuenta que a la entrada  $P_a = 1$ , resultan

$$B = \left. \frac{P_a}{U_b} \right|_{P_b=0} = Z e^{-k_c M L} \frac{-e^{-k_c L} + e^{k_c L}}{2} = Z e^{-k_c M L} \sinh(k_c L) \quad (2.140)$$

$$D = \left. \frac{U_a}{U_b} \right|_{P_b=0} = e^{-k_c M L} \frac{e^{-k_c L} + e^{k_c L}}{2} = e^{-k_c M L} \cosh(k_c L) \quad (2.141)$$

Por lo tanto, la matriz de transferencia para un conducto recto, de sección transversal uniforme con flujo medio, queda

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ U_a \end{Bmatrix} = e^{-k_c M L} \begin{bmatrix} \cosh(k_c L) & Z \sinh(k_c L) \\ \frac{1}{Z} \sinh(k_c L) & \cosh(k_c L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b \\ U_b \end{Bmatrix} \quad (2.142)$$

La definición del número de onda  $k_c$  y de la impedancia del medio  $Z$  vienen dadas en (2.87) y (2.92) respectivamente.

Si las ondas viajan en un fluido ideal, en la expresión anterior

$$k_c = \frac{j k_0}{1 - M^2} \quad (2.143)$$

$$Z = Z_0 \quad (2.144)$$

Si además el fluido se encuentra en reposo quedará

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ U_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(j k_0 L) & Z_0 \sinh(j k_0 L) \\ \frac{1}{Z_0} \sinh(j k_0 L) & \cosh(j k_0 L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b \\ U_b \end{Bmatrix} \quad (2.145)$$

Aunque normalmente la encontraremos formulada en términos de funciones trigonométricas

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ U_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L) & j Z_0 \sen(k_0 L) \\ \frac{j}{Z_0} \sen(k_0 L) & \cos(k_0 L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b \\ U_b \end{Bmatrix} \quad (2.146)$$

En algunos trabajos, esta matriz puede encontrarse referida a flujo másico en lugar de velocidad acústica. En este último caso, la matriz equivalente es

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ V_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L) & jY_0 \operatorname{sen}(k_0 L) \\ \frac{j}{Y_0} \operatorname{sen}(k_0 L) & \cos(k_0 L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b \\ V_b \end{Bmatrix} \quad (2.147)$$

Las gráficas de las Figuras 2.9 y 2.10 representan los cuatro polos de la matriz de transferencia para un conducto recto, de sección transversal circular uniforme con distintos valores de flujo, obtenidos a partir de la expresión (2.142). La longitud considerada es  $L = 0.5$  m, el diámetro del conducto es 0.05 m y la temperatura 15°C.

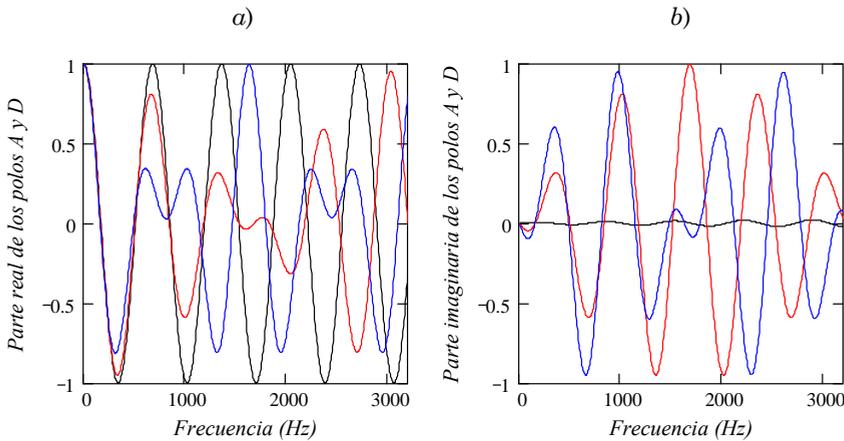


Figura 2.9. Polos A y D de conducto recto de área transversal uniforme: a) parte real; b) parte imaginaria: —, sin flujo; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ .

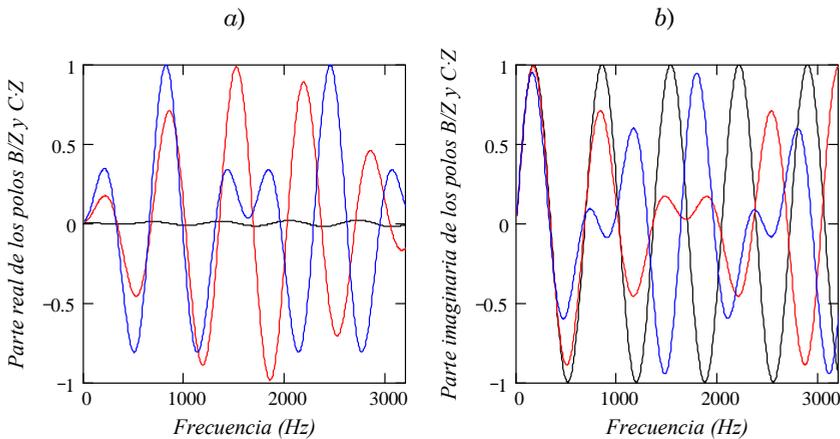


Figura 2.10. Polos B y C adimensionalizados de conducto recto de área transversal uniforme: a) parte real; b) parte imaginaria: —, Sin flujo; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ .

### 2.6.3. Expansiones y contracciones

La matriz de transferencia para este tipo de discontinuidad resulta sencilla de obtener. Partiendo del esquema representado en la Figura 2.11, es evidente que en la sección donde se produce la discontinuidad geométrica habrá igualdad de presión y de flujo másico. Por lo tanto

$$P'_a = P'_b \tag{2.148}$$

$$V'_a = \rho_0 S_a U'_a = \rho_0 S_b U'_b = V'_b \tag{2.149}$$

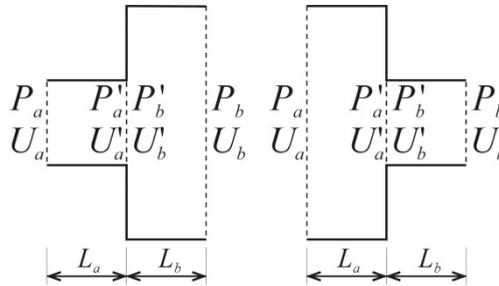


Figura 2.11. Expansión y contracción brusca.

La expresión matricial de las anteriores relaciones proporciona la matriz de transferencia buscada. En términos de velocidad acústica

$$\begin{Bmatrix} P'_a \\ U'_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_b/S_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_b \\ U'_b \end{Bmatrix} \tag{2.150}$$

y de flujo másico

$$\begin{Bmatrix} P'_a \\ V'_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_b \\ V'_b \end{Bmatrix} \tag{2.151}$$

En esta aproximación no se ha considerado que en las discontinuidades geométricas bruscas se exciten modos de alto orden que garantizan la continuidad del campo de velocidades, convirtiendo el problema acústico en un fenómeno multidimensional. Esta discrepancia con el modelo de onda plana, se acentúa al aumentar la frecuencia, de modo que estas relaciones son válidas sólo para frecuencias bajas. Selamet *et al.* [133, 134, 135] hablan de modos evanescentes, se generan en la discontinuidad, son de alto orden y se atenúan exponencialmente al alejarse de la discontinuidad.

En [106] se analiza este fenómeno, teniendo en cuenta que, en presencia de flujo medio, en un cambio de sección existen pérdidas de energía en forma de

calor, lo que se manifiesta como un aumento de entropía. Munjal deduce expresiones que consideran este efecto aunque, al igual que Lung y Doige [100], concluye que este fenómeno no tiene tanta influencia sobre las variables acústicas como los efectos tridimensionales citados anteriormente, al menos para valores de flujo medio presentes en líneas de escape.

El efecto de los modos de alto orden excitados en el cambio brusco de sección puede ser introducido en el modelo de onda plana de manera que la matriz de transferencia queda

$$\begin{Bmatrix} P'_a \\ V'_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_b \\ V'_b \end{Bmatrix} \quad (2.152)$$

donde  $L$  es el factor de corrección de Karal asociado a la discontinuidad [18, 88, 106, 113, 123] y su valor depende de la frecuencia y de las geometrías implicadas en el cambio de sección.

#### 2.6.4. Conductos extendidos

La Figura 2.12 representa de forma esquemática este tipo de geometría. Esta configuración merece una atención especial, y la abundante bibliografía sobre ella lo demuestra [14, 100, 106, 129]. La cavidad entre el extendido y la cámara de expansión actúa como un resonador de un cuarto de onda, es decir a aquellas frecuencias cuya longitud de onda dividida entre cuatro es igual a la longitud de la zona extendida,  $L_c$ , se produce una resonancia, de modo que la onda reflejada está en oposición de fase a la onda incidente anulándose la presión en la sección abierta de la cavidad.

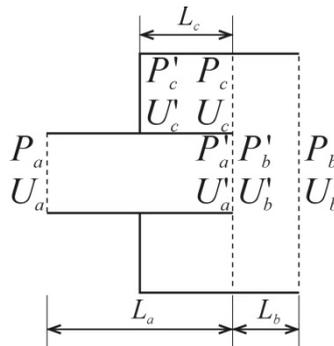


Figura 2.12. Conducto extendido.

Dado que asumimos el modelo de onda plana, se cumple que

$$P'_a = P'_b = P_c \quad (2.153)$$

En cuanto al flujo másico es evidente que

$$V'_a = V'_b + V_c \quad (2.154)$$

o en términos de velocidad acústica

$$\rho_0 S_a U'_a = \rho_0 S_b U'_b + \rho_0 S_c U_c \quad (2.155)$$

La matriz de transferencia de la cavidad “c” es la correspondiente a un conducto recto de sección constante como la obtenida en el apartado 2.6.2. En presencia de flujo medio y adaptando la nomenclatura a la de la Figura 2.12 resulta

$$\begin{Bmatrix} P_c \\ V_c \end{Bmatrix} = e^{-k_c M L_c} \begin{bmatrix} \cosh(k_c L_c) & Y_c \sinh(k_c L_c) \\ \frac{1}{Y_c} \sinh(k_c L_c) & \cosh(k_c L_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_c \\ V'_c \end{Bmatrix} \quad (2.156)$$

donde la impedancia característica del conducto se transforma en

$$Y_c = Y_{0c} \left( 1 - \frac{\alpha}{k_0} + j \frac{\alpha}{k_0} \right) \quad (2.157)$$

teniendo en cuenta que

$$Y_{0c} = \frac{c_0}{S_c} = \frac{c_0}{S_b - S_a} \quad (2.158)$$

También puede representarse el comportamiento acústico de esta zona por medio de su impedancia correspondiente

$$Z_c = \frac{P_c}{V_c} \quad (2.159)$$

que es muy sencilla de obtener a partir de (2.156) teniendo en cuenta que en el extremo cerrado la velocidad de las partículas  $V'_c$ , si la pared es infinitamente rígida, es cero y así

$$Z_c = \frac{P_c}{V_c} = \frac{e^{-k_c M L_c} \cosh(k_c L_c) P'_c}{e^{-k_c M L_c} \frac{1}{Y_c} \sinh(k_c L_c) P'_c} = Y_c \coth(k_c L_c) \quad (2.160)$$

La matriz de transferencia del sistema completo se obtiene acoplando la definición de impedancia dada en (2.160) a las matrices correspondientes a los conductos “a” y “b”. Resulta

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_a \\ V_a \end{Bmatrix} &= e^{-k_{c_a} M L_a} \begin{bmatrix} \cosh(k_{c_a} L_a) & Y_{c_a} \sinh(k_{c_a} L_a) \\ \frac{\sinh(k_{c_a} L_a)}{Y_{c_a}} & \cosh(k_{c_a} L_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_c} & 1 \end{bmatrix} \\ e^{-k_{c_b} M L_b} \begin{bmatrix} \cosh(k_{c_b} L_b) & Y_{c_b} \sinh(k_{c_b} L_b) \\ \frac{\sinh(k_{c_b} L_b)}{Y_{c_b}} & \cosh(k_{c_b} L_b) \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} P_b \\ V_b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.161)$$

Esta expresión tienen implícita la condición de resonancia, que se da en aquellas frecuencias en las que la impedancia  $Z_c$  se anule, es decir cuando

$$\coth(k_c L_c) = 0 \quad (2.162)$$

o también, empleando la relación entre razones trigonométricas y funciones hiperbólicas cuando

$$\coth(k_c L_c) = j \cot(j k_c L_c) = 0 \quad (2.163)$$

por lo tanto

$$k_c L_c = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (2.164)$$

o, lo que es equivalente y de acuerdo con el primer párrafo de este apartado

$$L_c = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad (2.165)$$

Es decir cuando la longitud del extendido es igual a un cuarto (o tres cuartos, cinco cuartos,...) de la longitud de onda de la frecuencia excitada.

Como en el caso de expansiones y contracciones analizadas en el apartado 2.6.3, la predicción mediante la teoría de onda plana es válida únicamente en las frecuencias más bajas al no considerar la presencia de los modos de alto orden generados en la discontinuidad geométrica.

En el caso de conductos extendidos, el rango de validez de la teoría de onda plana puede ampliarse mediante una corrección de longitud que se añade al conducto extendido manteniendo la longitud total del silenciador. Existen diversos modelos que pueden encontrarse en las referencias [87, 106, 129, 147] que predicen con bastante precisión las frecuencias de resonancia asociadas al conducto extendido. Peat [114] propone una corrección algo distinta en base a una impedancia equivalente.

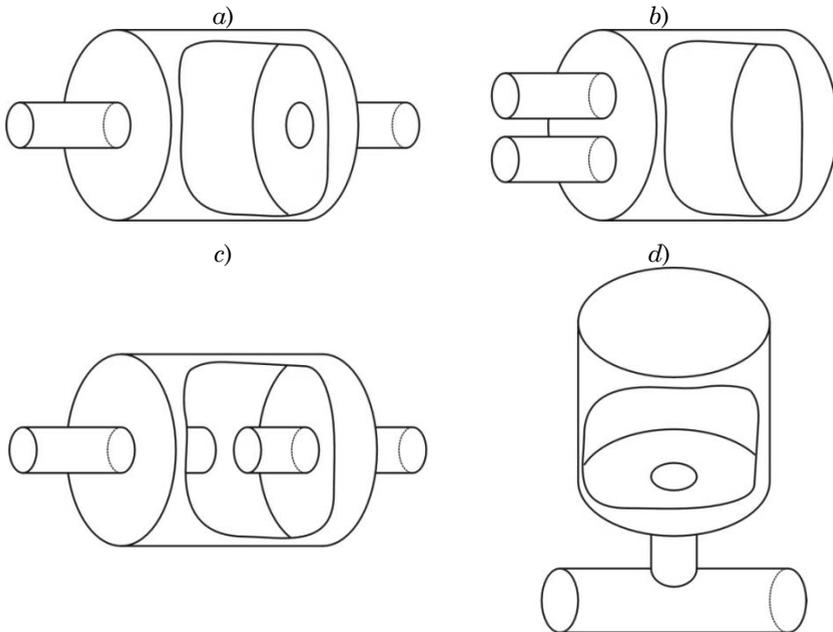
## 2.7. Silenciadores

La función principal de los silenciadores de escape es reducir el nivel de emisión sonora generado en un motor de combustión interna hasta niveles aceptables y normalmente regulados por legislación [1-6, 9, 12].

Atendiendo al mecanismo de reducción de ruido, los silenciadores pueden clasificarse en dos grandes grupos: reactivos, cuando la atenuación se logra al interferir la onda acústica incidente con su propia reflexión y disipativos, si la energía acústica se transforma en calor [18, 54, 106].

### 2.7.1. Configuraciones sin disipación

En los silenciadores reactivos, los fenómenos de reflexión se logran en las discontinuidades geométricas tales como ensanchamientos o estrechamientos bruscos de sección como ocurre en las cámaras de expansión simple del tipo representado en la Figura 2.13 *a*) y también en los resonadores de un cuarto de onda como son las cavidades que aparecen en cámaras reversas similares a la Figura 2.13 *b*), conductos extendidos como en la Figura 2.13 *c*) y resonadores de Helmholtz con una configuración similar a la mostrada en la Figura 2.13 *d*).



*Figura 2.13. Silenciadores reactivos: a) cámara de expansión simple; b) cámara reversa; c) silenciador con tubos extendidos; d) resonador de Helmholtz.*

El funcionamiento de los silenciadores reactivos, se basa los fenómenos de reflexión hacia la fuente que aparecen en las discontinuidades geométricas, interferencia entre ondas incidentes y reflejadas así como resonancias en las cavidades y cámaras existentes. Estos silenciadores presentan frecuencias propias para las que la atenuación es elevada, aunque para otras frecuencias de excitación, llamadas bandas de paso, este mecanismo no entra en funcionamiento y la atenuación puede llegar a anularse. Suelen utilizarse fundamentalmente para lograr atenuación a frecuencias bajas. Las discontinuidades geométricas pueden combinarse, llegando a geometrías tan complejas como se quiera, como es el caso de los laberintos del interior del silenciador mostrado en la Figura 2.14.



*Figura 2.14. Silenciador reactivo.*

### **2.7.2. Configuraciones con disipación**

La atenuación en los silenciadores disipativos se logra sobre todo con el uso de materiales absorbentes, que se disponen normalmente en el interior de una cámara de expansión. La disposición concreta depende de las características acústicas del ruido que proviene del motor y del espectro de atenuación deseado. En general, dicha disposición debe evitar la generación de pérdida de carga y el deterioro del material.

Los conductos y las placas perforadas como el representado en la Figura 2.15 a), también provocan fenómenos de disipación acústica, aunque en menor medida [18, 54, 106].

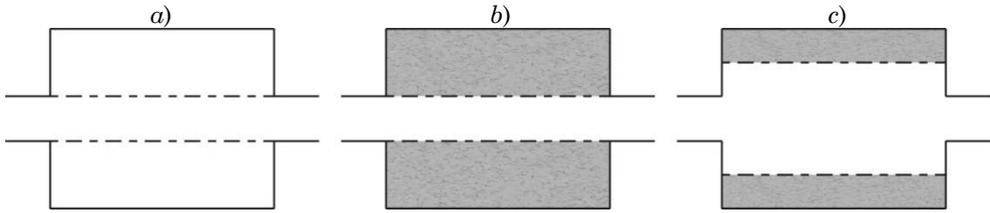


Figura 2.15. Configuraciones con disipación: a) en el conducto perforado b) y c) silenciadores híbridos.

En general los silenciadores disipativos mejoran la atenuación acústica con la frecuencia, por lo que se utilizan para atenuar a altas frecuencias. Sin embargo, en la práctica, ningún silenciador se comporta de forma reactiva o disipativa, sino que la atenuación se logra por la combinación de ambos fenómenos.

Las Figuras 2.15 b) y 2.15 c) muestran el esquema de silenciadores híbridos diseñados con la intención de lograr atenuación acústica combinando de forma estratégica ambos fenómenos. La expansión y contracción proporciona atenuación a bajas frecuencias y el material absorbente a altas frecuencias.

## 2.8. Atenuación sonora en silenciadores

Es necesario adoptar una forma universal de caracterizar la reducción de ruido que consigue un silenciador. Antes de hablar de los índices de atenuación acústica más extendidos, conviene describir algunas variables asociadas a la energía sonora y expresarlas en términos de presión acústica [106]. En el análisis que sigue, se tendrá en cuenta la presencia de flujo medio.

### 2.8.1. Consideraciones energéticas

Se considera la onda acústica confinada en un conducto en presencia de flujo, de velocidad media  $U_{fm}$ . Además se asume un comportamiento armónico. Así, los valores de interés se obtendrán a partir del promediado temporal de los campos acústicos instantáneos a lo largo de un periodo  $2\pi/\omega$ , expresado en este apartado como  $\overline{\quad}$ . La intensidad acústica  $I$ , definida como la energía que atraviesa una sección transversal de un conducto por unidad de tiempo y superficie se expresa [106]

$$I = \overline{pu} + \frac{U_{fm}}{\rho_0} \overline{p\rho} + U_{fm} \rho_0 \overline{u^2} + U_{fm}^2 \overline{u\rho} \tag{2.166}$$

Teniendo en cuenta la definición de velocidad del sonido para un proceso isoentrópico, dada en (2.20), la expresión anterior puede describirse eliminando la perturbación de densidad y en función del número de Mach

$$I = \overline{pu} + \frac{M}{\rho_0 c_0} \overline{p^2} + M \rho_0 c_0 \overline{u^2} + M^2 \overline{pu} \quad (2.167)$$

La potencia acústica se obtiene integrando la intensidad acústica en la sección transversal del conducto  $S$

$$W = \int_S I dS = \int_S \left( \overline{pu} + \frac{M}{\rho_0 c_0} \overline{p^2} + M \rho_0 c_0 \overline{u^2} + M^2 \overline{pu} \right) dS \quad (2.168)$$

Dado el comportamiento armónico supuesto, la presión y la velocidad instantánea para una sección determinada, según las expresiones dadas en 2.5.1, resulta

$$p = P e^{j\omega t} = (P^+ + P^-) e^{j\omega t} = \left( |P^+| e^{j\alpha_p} + |P^-| e^{j\alpha_r} \right) e^{j\omega t} \quad (2.169)$$

$$u = U e^{j\omega t} = \frac{1}{Z_0} (P^+ - P^-) e^{j\omega t} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( |P^+| e^{j\alpha_p} - |P^-| e^{j\alpha_r} \right) e^{j\omega t} \quad (2.170)$$

La expresión (2.168) queda

$$W = \frac{S}{2\rho_0 c_0} \left( |P^+|^2 (1+M)^2 - |P^-|^2 (1-M)^2 \right) \quad (2.171)$$

El primer sumando corresponde a la energía aportada por la onda progresiva y el segundo a la de la onda regresiva.

## 2.8.2. Índices de atenuación sonora en silenciadores

Estos parámetros sirven para evaluar el comportamiento del silenciador, dando una idea del nivel de atenuación acústica que pueden proporcionar. Los índices de atenuación sonora suelen representarse en función de la frecuencia y, a grandes rasgos, expresan un balance energético entre la entrada y la salida del silenciador.

A continuación se presentan algunos parámetros, que se encuentran habitualmente en la literatura [106].

- Pérdida de Inserción,  $IL$  (*Insertion Loss*)

Proporciona información sobre el comportamiento acústico de un silenciador cuando éste se encuentra acoplado a una fuente acústica a una cierta distancia de la terminación. Su valor vendrá determinado

por las características del silenciador así como por las de la fuente y las de la terminación. Se define como la diferencia en  $dB$ , entre los niveles de potencia sonora medidos en un mismo punto espacial, antes y después que el silenciador sea insertado entre el punto de medida y la fuente de ruido.

Este índice tiene significado físico, claro y válido, si al modificar la vía de transmisión acústica entre la fuente y el receptor su impedancia no sufre variación. Esta condición no siempre se da en la práctica. Sin embargo, podrían ofrecer resultados útiles aún en el caso de que no se dé esta condición. Matemáticamente se expresa como sigue

$$IL = 10 \log \left( \frac{W_1}{W_2} \right) \quad (2.172)$$

donde  $W_1$  es la potencia sonora antes de la colocación del silenciador y  $W_2$  tras la colocación del mismo.

Dado que el valor de la pérdida de inserción depende tanto de las características del silenciador como de las características de la fuente y del extremo, no resulta un indicador adecuado para caracterizar el silenciador como elemento aislado. Por lo tanto no se utilizará en el desarrollo de esta Tesis.

- Diferencia de nivel,  $LD$  (*Level Difference*)

Es la diferencia de presión sonora aguas arriba  $P_1$  y aguas abajo  $P_2$  del sistema en estudio, dando directamente la reducción de presión sonora que produce el silenciador en función de la frecuencia. De la misma forma que el índice de pérdida de inserción, su valor depende de la fuente y de la terminación empleadas y por lo tanto resulta inapropiado para el presente trabajo.

$$LD = 10 \log \left( \left| \frac{P_1}{P_2} \right| \right) \quad (2.173)$$

- Pérdida de Transmisión,  $TL$  (*Transmisión Loss*)

El índice de pérdidas de transmisión es otro parámetro que representa el comportamiento acústico de un silenciador. Éste es función de la frecuencia y representa la relación, en  $dB$ , entre la potencia acústica de la onda que incide en el silenciador  $W_i$  y la transmitida  $W_t$ .

El índice de pérdidas de transmisión es independiente de la fuente y requiere una terminación anecoica a la salida del silenciador (no hay reflexión de las ondas acústicas a la salida del sistema). De esta forma, el  $TL$  es independiente de la terminación, ya que todas las reflexiones

están eliminadas. Al ser el  $TL$  independiente de la fuente, está determinado completamente por las características acústicas del silenciador. Este hecho hace particularmente conveniente el uso de este parámetro para el estudio y comparación de silenciadores y por tanto va a ser el parámetro que emplearemos en esta Tesis. Matemáticamente puede expresarse como

$$TL = 10 \log \left( \left| \frac{W_i}{W_t} \right| \right) \quad (2.174)$$

Teniendo en cuenta la definición de la potencia acústica dada en la ecuación (2.171), considerando que  $S_1$  y  $S_2$  son las secciones de entrada y salida respectivamente y  $P_1^+, P_2^+$  la amplitud de la presión acústica del frente de ondas incidente (a la entrada) y transmitido (a la salida) del sistema respectivamente. La expresión anterior, en función del campo acústico, queda,

$$TL = 20 \left( \log \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{P_1^+}{P_2^+} \right| \right) \right) = 10 \log \left( \frac{S_1}{S_2} \right) + 20 \log \left( \left| \frac{P_1^+}{P_2^+} \right| \right) \quad (2.175)$$

## 2.9. Aplicaciones

Teniendo en cuenta que  $\rho_0, c_0$  son constantes, si se considera la definición de las secciones dada en la Figura 2.16 se pueden encontrar las siguientes relaciones

$$P_1 = P_1^+ + P_1^- \quad (2.176)$$

$$U_1 = U_1^+ + U_1^- = \frac{1}{Z_1} (P_1^+ - P_1^-) \quad (2.177)$$

donde  $Z_1$  es la impedancia del medio en la sección 1.

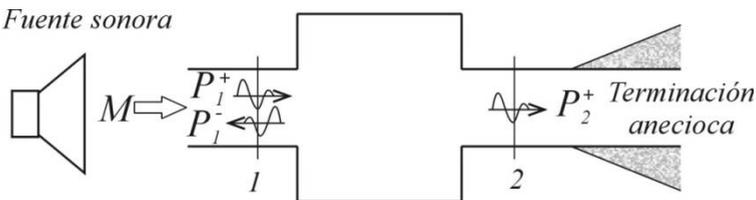


Figura 2.16. Componentes de presión en un sistema con final anecoico.

Combinado las ecuaciones (2.176) y (2.177), puede calcularse la amplitud de la presión acústica de la onda incidente a la entrada de la cámara

$$P_1^+ = \frac{P_1 + Z_1 U_1}{2} \quad (2.178)$$

Debido a la ausencia de reflexiones a la salida, la amplitud de la presión acústica de la onda incidente a la salida puede ser calculada fácilmente

$$P_2 = P_2^+ + P_2^- = P_2^+ \quad (2.179)$$

y por tanto, también

$$P_2 = Z_2 U_2 \quad (2.180)$$

Ahora  $Z_2$  es la impedancia del medio en la sección 2.

Reescribiendo ahora la expresión (2.175) en términos de magnitudes acústicas totales, queda

$$TL = 10 \log \left( \frac{S_1}{S_2} \right) + 20 \log \left( \left| \frac{P_1 + Z_1 U_1}{2 Z_2 U_2} \right| \right) \quad (2.181)$$

Como los conductos de entrada y salida de la cámara de expansión son estrechos, la onda incidente puede considerarse plana. Así, la descripción del comportamiento acústico del silenciador puede realizarse en base al método de las matrices de transferencia

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.182)$$

Aplicando ahora la relación dada por la matriz de transferencia del sistema, se escribe (2.181) en función de los polos de la misma

$$TL = 10 \log \left( \frac{S_1}{S_2} \right) + 20 \log \left| \frac{1}{2} \left( A + \frac{B}{Z_2} + Z_1 C + \frac{Z_1}{Z_2} D \right) \right| \quad (2.183)$$

Si la matriz de cuatro polos conocida está definida para presión y flujo másico, entonces, la expresión del  $TL$  queda

$$TL = 10 \log \left( \frac{S_1}{S_2} \right) + 20 \log \left| \frac{1}{2} \left( A + \frac{B}{Y_2} + Y_1 C + \frac{Y_1}{Y_2} D \right) \right| \quad (2.184)$$

En los siguientes apartados se muestra el  $TL$  obtenido para distintas configuraciones de silenciador, distinguiendo los exclusivamente reactivos de las disipativos. Como se verá más adelante, la teoría de onda plana tiene validez para un rango de frecuencias relativamente reducido. No obstante, la representación gráfica del  $TL$  resulta de gran utilidad ya que permite deducir una serie de fenómenos asociados a la geometría y composición del silenciador.

Así, para lograr una respuesta determinada del silenciador, habrá que combinar de forma adecuada determinadas geometrías y elementos, optimizando de esta forma el diseño de silenciadores.

### 2.9.1. Configuraciones sin disipación

Todas las gráficas contenidas en este apartado se han calculado considerando una temperatura de 15°C, lo que implica una velocidad del sonido igual a  $c_0 = 340.32$  m/s.

#### 2.9.1.1. Cámara de expansión simple

La Figura 2.17 muestra una cámara de expansión simple con longitudes y secciones transversales  $L_1, L_2, L_3, S_1, S_2$  y  $S_3$  respectivamente.

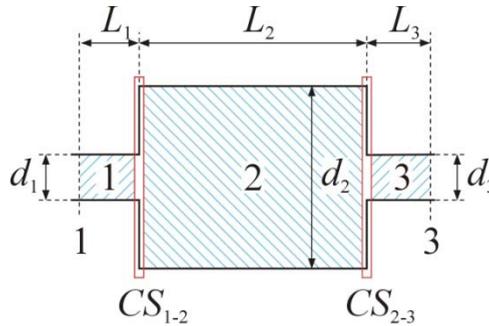


Figura 2.17. Parámetros geométricos de una cámara de expansión simple.

La matriz de transferencia global será la que relacione las variables de estado de las secciones 1 y 3

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.185)$$

que se obtiene multiplicando las matrices de transferencia de los distintos conductos y cambios de sección, es decir

$$[T] = [T]_1 [T]_{CS_{1-2}} [T]_2 [T]_{CS_{2-3}} [T]_3 \quad (2.186)$$

donde  $[T]_1$ ,  $[T]_2$  y  $[T]_3$ , representan las matrices de transferencia de los conductos 1, 2 y 3 y  $[T]_{CS_{1-2}}$  y  $[T]_{CS_{2-3}}$ , las de los cambios de sección 1-2 y 2-3, que equivalen a las expresiones dadas en (2.142) y (2.150), respectivamente.

En el caso de fluido ideal, bajo la hipótesis de onda plana, operando y aplicando la definición del  $TL$  dada en (2.183), queda

$$TL = 10 \log \left( \frac{m_2}{4m_1} \left[ \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{m_2^2} \right) (m_1^2 - 1) \operatorname{sen}^2 \left( \frac{k_0 L_2}{1 - M_c^2} \right) \right] \right) \quad (2.187)$$

donde  $m_1 = S_2/S_1$ ,  $m_2 = S_2/S_3$  y  $M_c$  es el número de Mach en la cámara central,  $k_0$  es el número de onda para fluido ideal. Si además no hay flujo medio, queda la expresión dada en [54, 106]

$$TL = 10 \log \left( \frac{m_2}{4m_1} \left[ \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{m_2^2} \right) (m_1^2 - 1) \operatorname{sen}^2(k_0 L_2) \right] \right) \quad (2.188)$$

El  $TL$  propio de una cámara de expansión simple está formado por una sucesión de cúpulas de ancho constante y bandas de paso. Los sucesivos picos de máxima atenuación, se encuentran localizados a frecuencias  $f = (2n+1) c_0/(4 L_2)$ ;  $n = 0,1,2,3\dots$ , que corresponden a la presencia de  $2n+1$  cuartos de onda en la cámara, y las bandas de paso se localizan en las frecuencias  $f = nc_0/(2 L_2)$ ;  $n = 0,1,2,3\dots$ , en las que puede encontrarse  $n$  semilongitudes de onda en el interior de la cámara. La Figura 2.18 muestra el  $TL$  de 3 cámaras de expansión simple de sección transversal circular. Los parámetros geométricos de las distintas cámaras, teniendo en cuenta la Figura 2.17, se detallan en la Tabla 2.2. Los conductos de entrada y salida se consideran de la misma longitud e igual a 0.3 m. No se ha incorporado flujo medio.

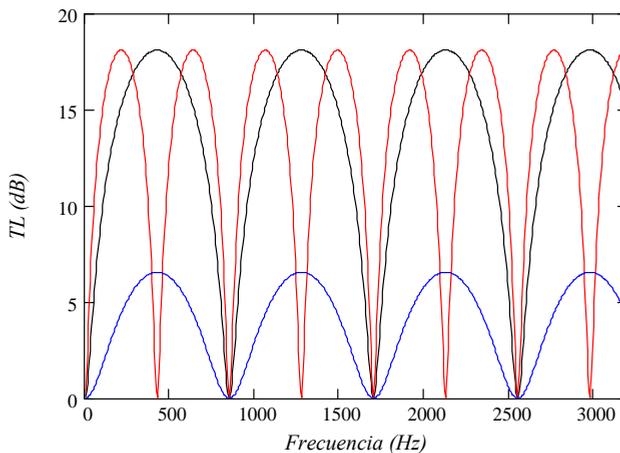


Figura 2.18.  $TL$  sin flujo medio: —, geometría 1; —, geometría 2; —, geometría 3.

Geometría	$d_1$ (m)	$d_2$ (m)	$d_3$ (m)	$L_2$ (m)
1	0.05	0.2	0.05	0.2
2	0.05	0.2	0.05	0.4
3	0.05	0.1	0.05	0.2

Tabla 2.2. Dimensiones cámara de expansión simple.

Puede concluirse además que la amplitud del  $TL$  es proporcional a la relación de áreas cámara-conducto y que el número de cúpulas aumenta con la longitud de la cámara. Esto último resulta evidente ya que en cámaras más largas cabrán más cuartos de onda.

En la Figura 2.19 se ha representado el  $TL$  de una cámara de expansión simple para fluido real obtenido del producto de matrices (2.186), junto con el resultado para fluido ideal (2.187) y también para fluido ideal y flujo medio nulo (2.188). Dado que las diferencias no son significativas, en adelante, en este apartado se desarrollaran únicamente las expresiones para fluido ideal y flujo medio nulo. Si se añade además la limitación en frecuencia propia de la teoría de onda plana, esta determinación queda plenamente justificada.

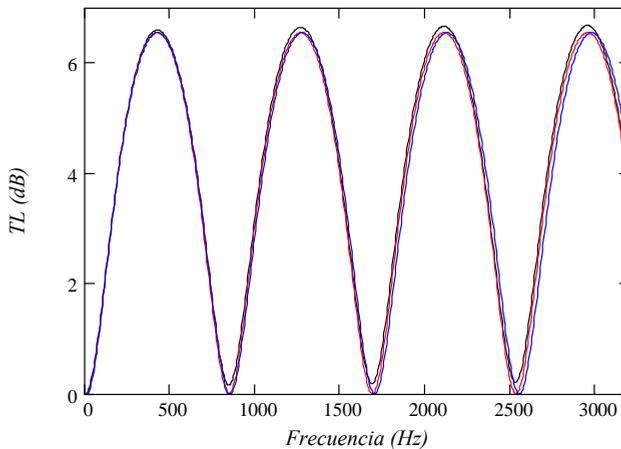


Figura 2.19.  $TL$  de la geometría 3: —, fluido real  $M = 0.35$ ; —, fluido ideal  $M = 0.35$ ; —, fluido ideal sin flujo.

### 2.9.1.2. Cámara reversa

La Figura 2.20 representa las dimensiones y geometría de una cámara reversa,  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  son el diámetro del conducto de entrada, de la cámara y del conducto de salida respectivamente  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  las correspondientes longitudes y  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  su área transversal. La respuesta acústica de este tipo de cámaras puede caracterizarse por la impedancia de un conducto con extremo cerrado, obtenida imponiendo la condición de velocidad nula en la pared frontal. En este caso se

utiliza la expresión dada en (2.160), que particularizada para el caso de fluido ideal y flujo medio nulo resulta,

$$Z = -jY_0 \cot(k_0 L) \tag{2.189}$$

La matriz de transferencia para la cámara representada en la Figura 2.20, con entrada en el conducto 1 y salida en el conducto 3, es

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = [T]_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{-jY_2 \cot(k_0 L_2)} & 1 \end{bmatrix} [T]_3 \begin{Bmatrix} P_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \tag{2.190}$$

donde  $[T]_1$  y  $[T]_3$  son las matrices de transferencia de los conductos de entrada 1 y salida 3,  $L_2$  la longitud de la cámara reversa e  $Y_2$  representa la impedancia característica de la cámara y es igual a  $Y_2 = c_0/S_2$ .

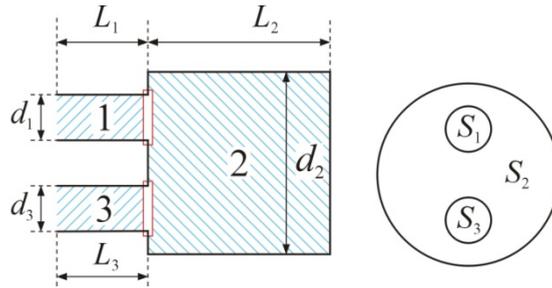


Figura 2.20. Dimensiones principales de la cámara reversa.

La expresión del  $TL$  obtenido a partir de la definición según la ecuación (2.184) y de la matriz de transferencia del conducto dada en la expresión (2.147), suponiendo que los conductos de entrada y salida tienen igual sección transversal,  $S_1 = S_3$ , es igual a

$$TL = 10 \log \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \tan^2(k_0 L_2) \right) \tag{2.191}$$

En la Figura 2.21 se ha representado el  $TL$  de distintas cámaras reversas, tomando como dimensiones características las dadas en la Tabla 2.2.

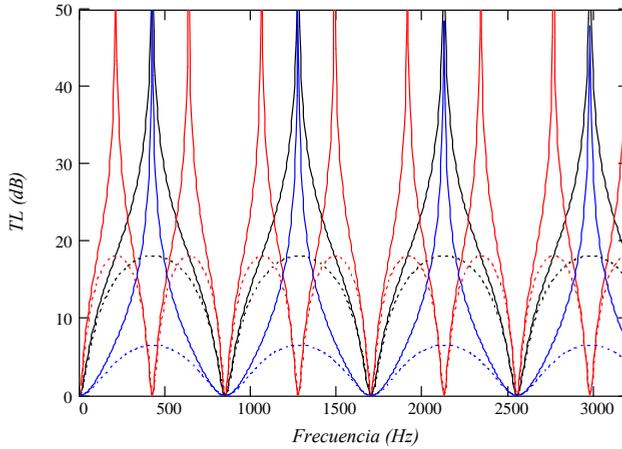


Figura 2.21. TL: —, geometría 1 cámara reversa; —, geometría 2 cámara reversa; —, geometría 3 cámara reversa; - - - -, geometría 1 cámara de expansión simple; - - - -, geometría 2 cámara de exp. simple; - - - -, geometría 3 cámara de exp. simple.

Puede observarse, como en el caso anterior, una respuesta regular, con picos de resonancia con el mismo ancho de banda que las cúpulas de la cámara de expansión simple de igual longitud y picos de atenuación infinita en la misma posición que los máximos de la cámara de expansión simple de iguales dimensiones. Para poder observar esta analogía, se ha representado con trazo discontinuo el TL para las cámaras de expansión simple homólogas.

### 2.9.1.3. Cámara de expansión con extendidos

La Figura 2.22 muestra la geometría de una cámara con tubos extendidos.  $S_1$ ,  $S_3$  y  $S_5$  representan el área transversal de los conductos de entrada, salida y bloque central de la cámara respectivamente. En la zona 2 con conducto extendido, el área será  $S_2 = S_3 - S_1$  y de igual forma, en la zona 4 el área transversal será  $S_4 = S_3 - S_5$ .

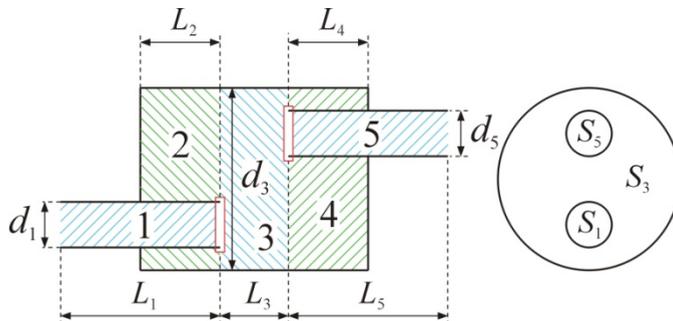


Figura 2.22. Dimensiones de cámara con tubos extendidos.

La matriz de transferencia global será

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = [T]_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} [T]_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_4} & 1 \end{bmatrix} [T]_5 \begin{Bmatrix} P_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} \quad (2.192)$$

donde  $[T]_1$ ,  $[T]_3$  y  $[T]_5$  son las matrices de transferencia de los conductos 1, 3 y 5 respectivamente definidas como en (2.147) y  $Z_2$  y  $Z_4$  representan la impedancia de la zona de extendidos cuya expresión viene dada en (2.160). En el caso de fluido ideal, sin flujo medio, bajo la hipótesis de onda plana, la expresión del  $TL$  resulta [129]

$$TL = 20 \log \left( \left[ \left[ m + 1 + j(m-1) \tan(k_0 L_2) \right] \left[ m + 1 + j(m-1) \tan(k_0 L_4) e^{jk_0 L_3} \right] - (m-1)^2 (1 - j \tan(k_0 L_2))(1 - j \tan(k_0 L_4)) e^{jk_0 L_3} \right] / (4m) \right) \quad (2.193)$$

siendo  $m = S_3/S_1$  y  $L_1 - L_5$  las longitudes representadas en la Figura 2.22.

En la Figura 2.23 está representado el  $TL$  de algunas cámaras con extendidos, todas ellas de sección transversal circular, con diámetro de los conductos de entrada y salida de 0.05 m y diámetro de la cámara central de 0.2 m. El resto de parámetros geométricos están recogidos en la Tabla 2.3

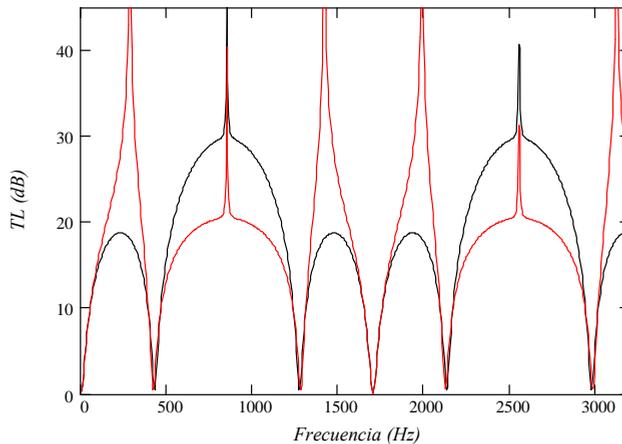


Figura 2.23.  $TL$ : —, geometría 4; —, geometría 5.

Como era de esperar, la respuesta acústica de este tipo de silenciadores, combina los fenómenos observados en las cámaras anteriores, esto es, bandas de paso de la cámara de expansión simple de longitud igual a la total de la cámara, con picos de atenuación de la cámara reversa de longitud igual a la de los conductos extendidos.

Geometría	$L_2$ (m)	$L_3$ (m)	$L_4$ (m)
4	0.1	0.3	0
5	0.3	0.1	0
6	0.16	0.11	0.07
7	0.2	0.1	0.1

Tabla 2.3. Dimensiones de cámaras con tubos extendidos.

La Figura 2.24 refleja este fenómeno. Se ha representado el  $TL$  de una cámara con una longitud total de 0.34 m, y con conductos extendidos de longitudes 0.16 y 0.07 m (geometría 6 de la Tabla 2.3). Los conductos de entrada y salida tienen igual sección, ambos circulares de diámetro 0.05 m y la cámara central, también circular, tiene diámetro 0.2 m.

Con trazo discontinuo se ha representado el  $TL$  de las cámaras reversas de longitudes igual a las de los extendidos y de la cámara de expansión simple de longitud igual a la longitud total de la cámara estudiada. Puede observarse que los picos de atenuación se sitúan en las mismas frecuencias que los de las cámaras reversas y que las bandas de paso coinciden con las de la cámara de expansión simple.

Con esta idea, parece lógico concluir que, seleccionando una longitud de extendido tal que su pico de atenuación coincida con una banda de paso de la cámara de expansión simple, esta quedará eliminada.

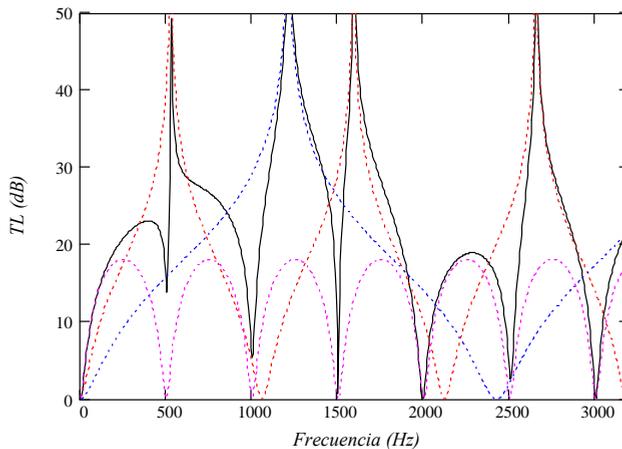


Figura 2.24.  $TL$ : —, geometría 6; ····, cámara reversa  $L = 0.16$  m; ····, cámara reversa  $L = 0.07$  m; ····, cámara de expansión simple  $L = 0.34$  m.

Así la cámara de geometría 7 se ha definido a partir de una cámara de expansión simple de longitud total 0.4 m (corresponde a la geometría 2

representada en Figura 2.18). De esta manera, el conducto extendido de su parte izquierda de longitud 0.2 m, eliminará las bandas de paso impares, y el extendido derecho, eliminará las bandas segunda y sexta, tal y como puede apreciarse en la Figura 2.25.

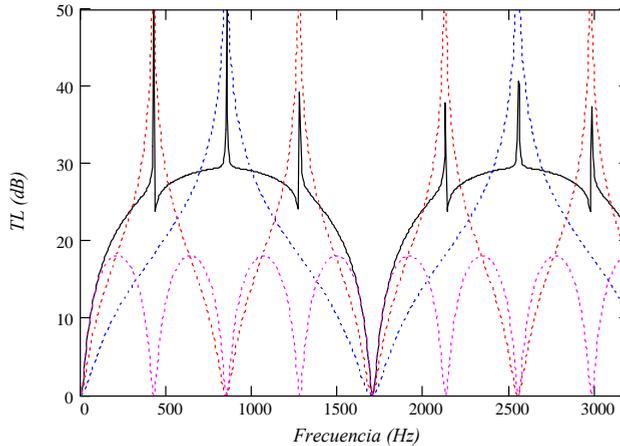


Figura 2.25. TL: —, geometría 7; -.-, cámara reversa  $L = 0.2$  m; -.-.-, cámara reversa  $L = 0.1$  m; -.-.-, cámara de expansión simple  $L = 0.4$  m.

Como resumen, puede asumirse que, en cámaras con extendidos, cuanto mayor es la longitud de estos, el número de picos de resonancia aumenta, disminuyendo a la vez los anchos de banda.

### 2.9.2. Configuración con disipación

El uso de elementos disipativos, tales como superficies perforadas y materiales absorbentes, proporciona un gran nivel de atenuación que se debe, fundamentalmente, a las pérdidas energéticas generadas con el paso de las ondas acústicas a través de los mismos. Parece por lo tanto evidente que la hipótesis de fluido ideal no es adecuada en este caso. A pesar de que la teoría de onda plana, en este caso facilita información muy limitada en cuanto al rango de frecuencias, al menos permite dar una ligera idea del comportamiento acústico de estos silenciadores e incluso proporciona suficiente información como para ser útil en un análisis paramétrico.

Este tipo de silenciadores son llamados también resonadores de alta frecuencia porque consiguen mayores niveles de atenuación a alta frecuencia que los obtenidos con las mismas geometrías sin material absorbente.

### 2.9.2.1. Cámara con tubo perforado

El silenciador representado en la Figura 2.26 tiene en su interior un conducto perforado coaxial y de igual diámetro que los conductos de entrada y salida.

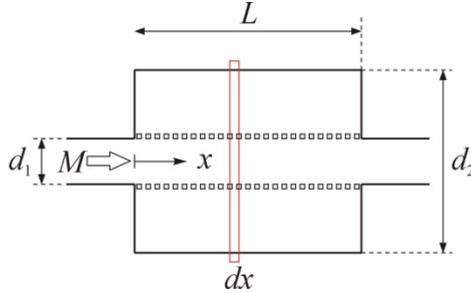


Figura 2.26. Resonador con tubo perforado.

Las hipótesis de partida en el modelo matemático desarrollado por Munjal [106] y empleado posteriormente por diversos autores [127, 144] son:

- Variación espacial del flujo medio dentro del conducto perforado y de la densidad relativa en cualquier dirección transversal despreciable.
- Las únicas pérdidas consideradas son las provocadas por la resistencia en la interfase entre el tubo perforado y la cámara.
- Misma temperatura en todo el volumen.

Si por un lado se plantea la ecuación de continuidad en forma diferencial (2.2) en el elemento  $dx$  y se integra en todo el volumen de control el resultado, asumiendo un comportamiento armónico en el interior del conducto, es

$$U_{fm1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{4\rho_0}{d_1} U = -j\omega \rho_1 \quad (2.194)$$

y en la cámara externa

$$U_{fm2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{4d_1\rho_0}{d_2^2 - d_1^2} U = -j\omega \rho_2 \quad (2.195)$$

La ausencia de flujo en la cámara se aplicará más tarde. Por otro lado la ecuación de equilibrio dinámico (2.16) en el conducto resulta

$$\rho_0 \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_{fm1} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0 \quad (2.196)$$

y en la cámara

$$\rho_0 \left( \frac{\partial U_2}{\partial t} + U_{fm2} \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial P_2}{\partial x} = 0 \quad (2.197)$$

donde  $\rho_0$ ,  $U_{fm1}$ ,  $U_{fm2}$  son los valores promedio de la densidad y de la velocidad de flujo medio en la zona 1 (conducto) y la zona 2 (cámara).  $U_1$ ,  $\rho_1$ ,  $P_1$ ,  $U_2$ ,  $\rho_2$  y  $P_2$  se refieren a las perturbaciones acústicas y  $U$  es la velocidad acústica radial en la superficie perforada para la cual se asume continuidad en el desarrollo matemático [54, 106]. Haciendo uso de la definición de impedancia acústica de superficie perforada dada en la ecuación (2.45), se tiene

$$Z_p = \frac{P_2 - P_1}{U} \quad (2.198)$$

Por último si se asume comportamiento de gas perfecto se cumple la expresión (2.19)

$$\frac{Dp_T}{Dt} = c_0^2 \frac{D\rho_T}{Dt} \quad (2.199)$$

donde  $p_T$  y  $\rho_T$  son la presión y la densidad total e igual a la suma de las variables del medio y las acústicas.

Teniendo en cuenta la expresión (2.199) puede escribirse la variable densidad en función de la presión en las ecuaciones (2.194) y (2.195). Operando con (2.194)-(2.198) [106, 127, 144], se obtiene la siguiente expresión para el conducto

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \left[ \frac{-4\rho_0 U_{fm1}}{d_1 Z_p (1-M_1^2)} - \frac{j2\omega U_{fm1}}{c_0^2 (1-M_1^2)} \right] \frac{\partial P_1}{\partial x} \\ & + \left[ \left( \frac{-j4\omega\rho_0}{d_1 Z_p (1-M_1^2)} + \frac{\omega^2}{c_0^2 (1-M_1^2)} \right) \right] P_1 \\ & + \frac{4\rho_0 U_{fm1}}{d_1 Z_p (1-M_1^2)} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{j4\omega\rho_0}{d_1 Z_p (1-M_1^2)} P_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.200)$$

y para la cámara

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \left[ \frac{-4d_1 \rho_0 U_{fm2}}{(d_2^2 - d_1^2) Z_p (1 - M_2^2)} - \frac{j2\omega U_{fm2}}{c_0^2 (1 - M_2^2)} \right] \frac{\partial P_2}{\partial x} \\
 & + \left[ \left( \frac{-j4d_1 \omega \rho_0}{(d_2^2 - d_1^2) Z_p (1 - M_2^2)} + \frac{\omega^2}{c_0^2 (1 - M_2^2)} \right) \right] P_2 \\
 & + \frac{4d_1 \rho_0 U_{fm2}}{(d_2^2 - d_1^2) Z_p (1 - M_2^2)} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{j4d_1 \omega \rho_0}{(d_2^2 - d_1^2) Z_p (1 - M_2^2)} P_1 = 0
 \end{aligned} \tag{2.201}$$

Si se introduce la siguiente notación

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{-jM_1}{1 - M_1^2} \left( \frac{k_a^2 + k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_2 &= \frac{k_a^2}{1 - M_1^2} \\
 \alpha_3 &= \frac{jM_1}{1 - M_1^2} \left( \frac{k_a^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_4 &= - \left( \frac{k_a^2 - k_0^2}{1 - M_1^2} \right) \\
 \alpha_5 &= \frac{jM_2}{1 - M_2^2} \left( \frac{k_b^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_6 &= - \left( \frac{k_b^2 - k_0^2}{1 - M_2^2} \right) \\
 \alpha_7 &= \frac{-jM_2}{1 - M_2^2} \left( \frac{k_b^2 + k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_8 &= \frac{k_b^2}{1 - M_2^2} \\
 k_a^2 &= k_0^2 - \frac{j4k_0 \rho_0 c_0}{d_1 Z_p} & k_b^2 &= k_0^2 - \frac{j4k_0 d_1 \rho_0 c_0}{(d_2^2 - d_1^2) Z_p}
 \end{aligned} \tag{2.202}$$

las ecuaciones (2.200) y (2.201) pueden escribirse de forma más compacta. En forma matricial resulta

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 \\ \alpha_5 D + \alpha_6 & D^2 + \alpha_7 D + \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.203}$$

donde  $D = \partial/\partial x$ .

La resolución de (2.203) debe llevarse a cabo desacoplando el sistema de ecuaciones asociado. En primer lugar puede separarse la matriz de coeficientes en dos, una que multiplique las derivadas de segundo y primer orden y otra las de primer orden y orden cero, esto es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_6 & \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.204)$$

El sistema de ecuaciones obtenido es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes para cada frecuencia, por lo tanto con solución exponencial [159]. Matricialmente puede expresarse como  $[A]\{P'\}+[B]\{P\}=0$ , o también  $\{P'\}+[A]^{-1}[B]\{P\}=0$ . La solución general puede escribirse como

$$\{P\} = \sum_{i=1}^4 \{\psi\}_i C_i e^{\beta_i x} \quad (2.205)$$

donde  $\beta_i$  son los autovalores y  $\{\psi\}$  los vectores propios de la matriz  $-[A]^{-1}[B]$ .

Escrito en forma matricial, si  $\Gamma_i = C_i e^{\beta_i x}$  y  $[\psi]$  es la matriz que contiene los vectores propios  $\{\psi\}$ , la solución al sistema de ecuaciones es

$$\{P\} = [\psi] \{\Gamma\} \quad (2.206)$$

Si el conjunto de vectores propios se normaliza haciendo que su primera componente tome valor la unidad, entonces la solución a (2.203) queda

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \psi_{1,i} C_i e^{\beta_i x} = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\beta_i x} \quad (2.207)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \psi_{2,i} C_i e^{\beta_i x} \quad (2.208)$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^4 \psi_{3,i} C_i e^{\beta_i x} \quad (2.209)$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^4 \psi_{4,i} C_i e^{\beta_i x} \quad (2.210)$$

Conocido el campo de presiones, mediante la ecuación de Euler (2.196) y (2.197) la obtención del campo de velocidades es directa. En el conducto queda

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 K_i e^{\beta_i x} \quad (2.211)$$

Los coeficientes  $K_i$  se obtienen al sustituir (2.207) y (2.211) en (2.196) que resulta

$$K_i = -\frac{C_i}{\rho_0(j\omega + U_{fm1} \beta_i)} \quad (2.212)$$

Con un desarrollo análogo para la cámara, el campo de velocidades acústicas es

$$U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\psi_{2,i} C_i}{\rho_0 (j\omega + U_{fm2} \beta_i)} e^{\beta_i x} \quad (2.213)$$

Si se multiplica (2.211) y (2.213) por la impedancia característica del medio se obtiene como resultado

$$\rho_0 c_0 U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{jk_0 + M_1 \beta_i} e^{\beta_i x} \quad (2.214)$$

$$\rho_0 c_0 U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\psi_{2,i} C_i}{jk_0 + M_2 \beta_i} e^{\beta_i x} \quad (2.215)$$

Las condiciones de contorno del sistema permiten la obtención de los coeficientes  $C_i$  de las anteriores expresiones, que es equivalente a determinar el valor de las magnitudes acústicas a lo largo del sistema.

No obstante, en este apartado, el objetivo es la obtención de la matriz de transferencia asociada al conducto perforado cuyos términos en realidad son la relación entre las magnitudes a un extremo y otro del conducto.

Las ecuaciones (2.209), (2.210), (2.214) y (2.215) pueden expresarse matricialmente

$$\begin{Bmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \rho_0 c_0 U_1(x) \\ \rho_0 c_0 U_2(x) \end{Bmatrix} = [A(x)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.216)$$

Las operaciones previamente desarrolladas permiten obtener los componentes de la matriz  $[A(x)]$ . Estos se evalúan en la sección inicial y en la sección final sin más que sustituir  $x = 0$  y  $x = L$  respectivamente de modo que,

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [A(L)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.217)$$

Igualando el vector de coeficientes en las dos expresiones anteriores se llega a

$$[A(0)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.218)$$

y finalmente

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)][A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [MT] \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.219)$$

Para obtener a partir de la expresión anterior la matriz de transferencia entre la entrada y la salida del conducto perforado se impone el conjunto de condiciones acústicas asociadas a la cámara (Figura 2.26), esto es, velocidad axial nula en las paredes laterales de la cámara que corresponde a  $U_2(0) = 0$  y  $U_2(L) = 0$ .

Sustituidas las condiciones de contorno en (2.219) y teniendo en cuenta la definición de matriz de transferencia dada en (2.112) la relación buscada para el tubo perforado es

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.220)$$

y los polos resultan

$$\begin{aligned} A &= MT_{11} - \frac{MT_{41}}{MT_{42}} MT_{12} & B &= \rho_0 c_0 \left( MT_{13} - \frac{MT_{43}}{MT_{42}} MT_{12} \right) \\ C &= \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( MT_{31} - \frac{MT_{41}}{MT_{42}} MT_{32} \right) & D &= MT_{33} - \frac{MT_{43}}{MT_{42}} MT_{32} \end{aligned} \quad (2.221)$$

donde los términos  $MT_{ij}$  son los términos de la matriz definida en (2.219). Una vez determinados los polos de la matriz de transferencia, el  $TL$  correspondiente al conducto perforado se obtiene sustituyéndolos en la expresión (2.183).

A continuación se presenta el efecto de la presencia de flujo medio en un silenciador con las características geométricas recogidas en la Tabla 2.4. En los cálculos se ha supuesto que el flujo medio queda confinado en el conducto central y no entra a la cámara. El modelo de impedancia empleado para la obtención de las gráficas de este apartado corresponde al desarrollado por Rao y Munjal, que se ha detallado anteriormente en la ecuación (2.53). El  $TL$  obtenido para distintos valores de  $M$  está representado en la Figura 2.27.

$d_1$ (m)	$d_2$ (m)	$L$ (m)	$t_p$ (m)	$d_h$ (m)	$\sigma$ (%)
0.05	0.2	0.2	0.0015	0.005	5

Tabla 2.4. Características geométricas de silenciador con tubo perforado.

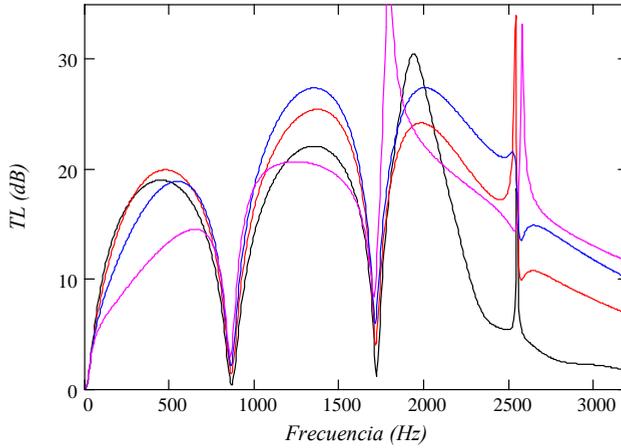


Figura 2.27. Influencia del flujo en una cámara con conducto perforado: —, sin flujo medio; —,  $M = 0.05$ ; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ .

Se observa que la velocidad del flujo medio disminuye la atenuación en baja frecuencia. Esta tendencia se invierte a medida que se consideran frecuencias mayores debido, entre otras cosas, a la aparición de fenómenos disipativos. De cualquier manera, los resultados a media y alta frecuencia deben ser interpretados con precaución debido a la pérdida de validez del modelo de onda plana. En el apartado 2.10 se proporcionan más detalles al respecto. También se observa que el valor mínimo del  $TL$  en las bandas de paso aumenta debido a la disipación asociada al conducto perforado.

### 2.9.2.2. Resonador con tubo perforado y conductos extendidos

La diferencia con el resonador estudiado en el apartado anterior estriba en las extensiones a ambos lados de la cámara de expansión de los conductos de entrada y salida de longitudes  $L_a$  y  $L_b$  respectivamente, tal y como está representado en la Figura 2.28

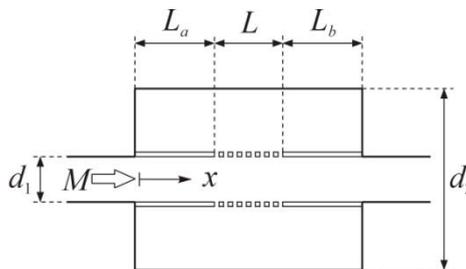


Figura 2.28. Resonador con tubo perforado y conductos extendidos.

El desarrollo matemático es similar al expuesto en el apartado anterior hasta la imposición de las condiciones de contorno en (2.217) para determinar los polos de la matriz.

En este caso, las condiciones asociadas a los resonadores laterales se aplicarían mediante la expresión de la impedancia del resonador propio del extendido, esto es, haciendo uso de la expresión (2.160) aplicada a velocidad acústica y teniendo en cuenta el sentido de la velocidad en las secciones de estudio

$$Z_2(0) = \frac{P_2(0)}{-U_2(0)} = \rho_0 c_0 \coth(k_0 L_a) \quad (2.222)$$

$$Z_2(L) = \frac{P_2(L)}{U_2(L)} = -\rho_0 c_0 \coth(k_0 L_b) \quad (2.223)$$

Los polos de la matriz de transferencia según la definición dada en (2.220) resultan

$$\begin{aligned} A &= MT_{11} + A_1 A_2 & B &= \rho_0 c_0 (MT_{13} + B_1 A_2) \\ C &= \frac{1}{\rho_0 c_0} (MT_{31} + A_1 B_2) & D &= MT_{33} + B_1 B_2 \\ A_1 &= \frac{X_1 MT_{21} - MT_{41}}{F_1} & B_1 &= \frac{X_1 MT_{23} - MT_{43}}{F_1} \\ A_2 &= MT_{12} + X_2 MT_{14} & B_2 &= MT_{32} + X_2 MT_{34} \\ F_1 &= MT_{42} + X_2 MT_{44} - X_1 (MT_{22} + X_2 MT_{24}) \\ X_1 &= -\tanh(j k_0 L_a) & X_2 &= \tanh(j k_0 L_b) \end{aligned} \quad (2.224)$$

donde los términos  $MT_{ij}$  son los términos de la matriz definida en (2.219). El  $TL$  correspondiente al silenciador en estudio se obtiene sustituyendo los términos de la matriz en la expresión (2.183).

La Figura 2.29 muestra el efecto del flujo medio en el  $TL$ . Las dimensiones principales de cámara están recogidas en la Tabla 2.5, según la Figura 2.28. Como en el caso anterior, en los cálculos se ha supuesto que el flujo medio se encuentra confinado en el conducto central.

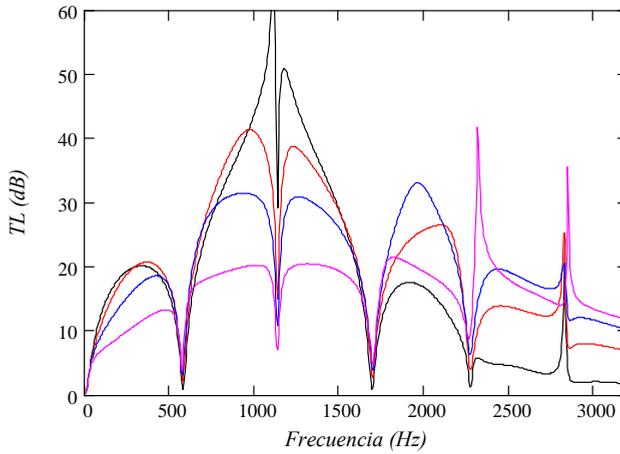


Figura 2.29. TL de silenciador con tubo perforado y conductos extendidos: —, sin flujo medio; —,  $M = 0.05$ ; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ .

$d_1$ (m)	$d_2$ (m)	$L$ (m)	$L_a = L_b$ (m)	$t_p$ (m)	$d_h$ (m)	$\sigma$ (%)
0.05	0.2	0.2	0.05	0.0015	0.005	5

Tabla 2.5. Dimensiones silenciador con extendidos y tubo perforado.

Se observan los mismos efectos que en la cámara sin extendidos. En el rango de frecuencias bajas y medias, a medida que aumenta el flujo disminuye la amplitud del TL, mientras que en las frecuencias más altas se observa el efecto contrario. Además el valor del TL en las bandas de paso aumenta al aumentar el flujo. La justificación a este efecto, igual que en el caso anterior, se encuentra en la disipación asociada al conducto perforado.

### 2.9.2.3. Silenciador con material absorbente

La geometría objeto de este apartado, está representada en la Figura 2.30.

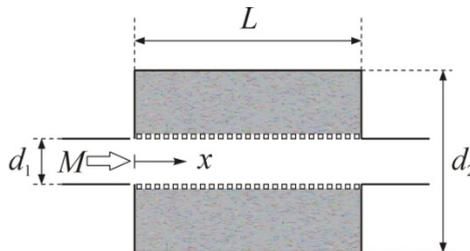


Figura 2.30. Resonador con tubo perforado y material absorbente.

La principal diferencia entre este silenciador y el desarrollado en 2.9.2.1 es que en esta configuración la cámara está rellena de material absorbente y por lo tanto la ecuación de ondas en este dominio se verá afectada. Otro aspecto a tener en cuenta y que altera ligeramente el desarrollo del problema [151] es la ausencia de flujo en la cámara como hipótesis de partida, planteamiento que habitualmente se asume en muchos trabajos [106, 115, 141].

Las ecuaciones de partida para el conducto son (2.194) y (2.196)

$$U_{fm1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{4\rho_0}{d_1} U = -j\omega\rho_1 \quad (2.225)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_{fm1} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0 \quad (2.226)$$

Para la cámara disipativa pueden utilizarse las ecuaciones (2.195) y (2.197). Si se incluye la presencia del material absorbente (sin flujo medio), queda

$$\tilde{\rho} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{4d_1}{d_2^2 - d_1^2} U \right) = -j\omega\tilde{\rho}_2 \quad (2.227)$$

$$\tilde{\rho} \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial P_2}{\partial x} = 0 \quad (2.228)$$

donde  $\rho_0$ ,  $U_{fm1}$ , son los valores promedio de la densidad y de la velocidad de flujo medio en la zona 1 (conducto) y  $\tilde{\rho}$  es la densidad media del fluido equivalente al material absorbente, descrito en el apartado 2.3.2.  $U_1$ ,  $\rho_1$ ,  $P_1$ ,  $U_2$ ,  $\tilde{\rho}_2$  y  $P_2$  se refieren a las perturbaciones acústicas en el dominio 1 y 2 respectivamente y  $U$  es la velocidad acústica radial a través de los orificios de la superficie perforada.

En el desarrollo matemático nuevamente se asume la condición de continuidad en velocidad y se emplea como definición de impedancia acústica de superficie perforada la ecuación (2.45)

$$Z_p = \frac{P_2 - P_1}{U} \quad (2.229)$$

El sistema de ecuaciones, siguiendo un tratamiento análogo al expuesto en el apartado anterior queda,

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 \\ \alpha_5 & D^2 + \alpha_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.230)$$

donde  $D = \partial/\partial x$ . Los coeficientes, teniendo en cuenta que la velocidad media de flujo en la cámara se considera nula, resultan

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{-M_1}{1-M_1^2} \left( j 2k_0 + \frac{4\rho_0 c_0}{d_1 \tilde{Z}_p} \right) & \alpha_2 &= \frac{1}{1-M_1^2} \left( k_0^2 - \frac{4jk_0 \rho_0 c_0}{d_1 \tilde{Z}_p} \right) \\
\alpha_3 &= \frac{M_1}{1-M_1^2} \left( \frac{4\rho_0 c_0}{d_1 \tilde{Z}_p} \right) & \alpha_4 &= \frac{1}{1-M_1^2} \left( \frac{4jk_0 \rho_0 c_0}{d_1 \tilde{Z}_p} \right) \\
\alpha_5 &= \frac{4d_1}{d_2^2 - d_1^2} \left( \frac{jk_0 \tilde{\rho} c_0}{\tilde{Z}_p} \right) & \alpha_6 &= \tilde{k}^2 - \frac{4d_1}{d_2^2 - d_1^2} \left( \frac{jk_0 \tilde{\rho} c_0}{\tilde{Z}_p} \right)
\end{aligned} \tag{2.231}$$

donde  $k_0 = \omega/c_0$  y  $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$  representan los números de onda del aire y del material absorbente respectivamente. El sistema de ecuaciones resultante en este caso, expresado en forma matricial resulta

$$\begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.232}$$

similar al del caso anterior, es decir, del tipo  $\{P'\} + [A]\{P\} = 0$ . La solución general puede escribirse

$$\{P\} = \sum_{i=1}^4 \{\psi\}_i C_i e^{\beta_i x} \tag{2.233}$$

donde  $\beta_i$  son los autovalores y  $\{\psi\}$  los vectores propios de la matriz  $-[A]$ .

De manera análoga a cómo se hizo en el apartado 2.9.2.1, esto es normalizando los vectores de modo que su primera componente tome valor la unidad, la solución a (2.230) queda

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \psi_{1,i} C_i e^{\beta_i x} = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\beta_i x} \tag{2.234}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \psi_{2,i} C_i e^{\beta_i x} \tag{2.235}$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^4 \psi_{3,i} C_i e^{\beta_i x} \tag{2.236}$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^4 \psi_{4,i} C_i e^{\beta_i x} \tag{2.237}$$

El campo de velocidades en el conducto resulta

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 K_i e^{\beta_i x} \tag{2.238}$$

donde los coeficientes  $K_i$  se obtienen al sustituir (2.234) y (2.238) en (2.226), que resulta

$$K_i = -\frac{C_i}{\rho_0(j\omega + U_{fm1}\beta_i)} \quad (2.239)$$

En la cámara la velocidad puede expresarse

$$U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\psi_{2,i} C_i}{\tilde{\rho} j \omega} e^{\beta_i x} \quad (2.240)$$

Multiplicando (2.238) y (2.240) por la impedancia característica del aire, queda

$$\rho_0 c_0 U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{j k_0 + M_1 \beta_i} e^{\beta_i x} \quad (2.241)$$

$$\rho_0 c_0 U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\psi_{2,i} C_i \rho_0}{j k_0 \tilde{\rho}} e^{\beta_i x} \quad (2.242)$$

Expresando (2.236), (2.237), (2.241) y (2.242) matricialmente

$$\begin{Bmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \rho_0 c_0 U_1(x) \\ \rho_0 c_0 U_2(x) \end{Bmatrix} = [A(x)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.243)$$

Al igual que en el desarrollo anterior, teniendo en cuenta que en ambos extremos de la cámara la velocidad axial es nula, es decir  $U_2(0) = 0$  y  $U_2(L) = 0$ , pueden obtenerse los componentes de la matriz  $[MT]$  mediante la siguiente expresión

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \rho_0 c_0 U_1(0) \\ \rho_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)] [A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [MT] \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \rho_0 c_0 U_1(L) \\ \rho_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.244)$$

Sustituidas las condiciones de contorno en (2.244) y teniendo en cuenta la definición de matriz de transferencia dada en (2.112)

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.245)$$

los polos resultan

$$\begin{aligned} A &= MT_{11} - \frac{MT_{41}}{MT_{42}} MT_{12} & B &= \rho_0 c_0 \left( MT_{13} - \frac{MT_{43}}{MT_{42}} MT_{12} \right) \\ C &= \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( MT_{31} - \frac{MT_{41}}{MT_{42}} MT_{32} \right) & D &= MT_{33} - \frac{MT_{43}}{MT_{42}} MT_{32} \end{aligned} \quad (2.246)$$

donde los términos  $MT_{ij}$  son los términos de la matriz definida en (2.244). Una vez determinados los polos de la matriz de transferencia, el  $TL$  correspondiente al conducto perforado se obtiene sustituyéndolos en la expresión (2.183).

En las figuras que siguen, las gráficas se han obtenido empleando como impedancia de la superficie perforada el modelo desarrollado por Lee e Ih dado por la ecuación (2.60) y corregido para tener en cuenta la presencia del material absorbente y la interacción entre los agujeros. La expresión empleada puede encontrarse en las referencias [55, 57]

$$\tilde{Z}_p = R + jX + \frac{\rho_0 c_0}{\sigma} \left( j0.425 k_0 d_h \left( \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} - 1 \right) F(\sigma) \right) \quad (2.247)$$

donde el factor para la interacción de los agujeros  $F(\sigma)$  viene dado por (2.50). Con respecto al material absorbente, se han utilizado las expresiones (2.43) y (2.44) para caracterizar el fluido equivalente. Particularizadas para fibra de vidrio *Advantex* de *Owens Corning* [60] resultan

$$\tilde{k} = k_0 \left( \left( 1 + 0.16 \left( \frac{f \rho_0}{R} \right)^{-0.577} \right) + j \left( -0.18897 \left( \frac{f \rho_0}{R} \right)^{-0.595} \right) \right) \quad (2.248)$$

$$\tilde{Z} = Z_0 \left( \left( 1 + 0.09534 \left( \frac{f \rho_0}{R} \right)^{-0.754} \right) + j \left( -0.08504 \left( \frac{f \rho_0}{R} \right)^{-0.732} \right) \right) \quad (2.249)$$

En todos los casos se considera que el aire se encuentra a una temperatura de 15°C.

La Figura 2.31 representa el efecto sobre una cámara de expansión simple al añadirle un conducto central perforado y, además, material absorbente. En todos los casos sin flujo medio. La Tabla 2.6 recoge las propiedades principales de las distintas cámaras.

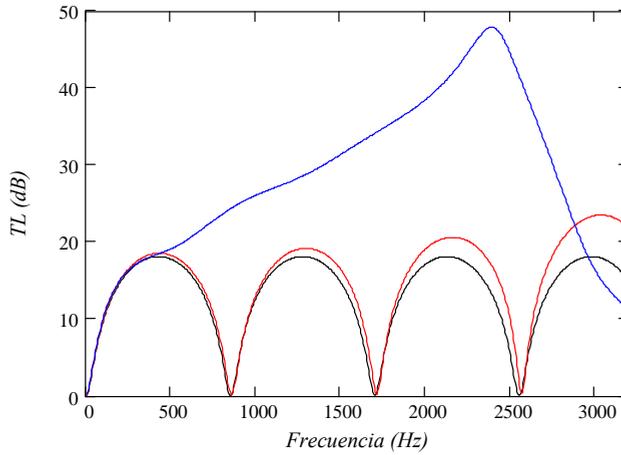


Figura 2.31. TL: —, cámara de expansión simple; —, cámara con tubo perforado; —, cámara con tubo perforado y material absorbente.

Geometría	$d_1$ (m)	$d_2$ (m)	$L$ (m)	Resistividad (rayl/m)	$\sigma$ (%)
1	0.05	0.2	0.2	0	100
2	0.05	0.2	0.2	0	15
3	0.05	0.2	0.2	5000	15

Tabla 2.6. Dimensiones y características de cámara con conducto perforado y material absorbente.

El perforado se considera de espesor  $t_p = 0.001$  m y con agujeros de diámetro  $d_h = 0.0025$  m. Al incorporar el conducto perforado se observa un incremento del TL que es todavía mayor con la presencia de material absorbente. Este último además da lugar a la eliminación de las bandas de paso.

El siguiente estudio representa el efecto del flujo medio actuando sobre la cámara 3 de la Tabla 2.6.

Como puede observarse en la Figura 2.32, el efecto del flujo sobre el TL en frecuencias bajas y medias se traduce en un ligero descenso de la atenuación. La amplitud máxima del TL se desplaza a frecuencias mayores a medida que aumenta el número de Mach, provocando un incremento de atenuación en el rango de alta frecuencia.

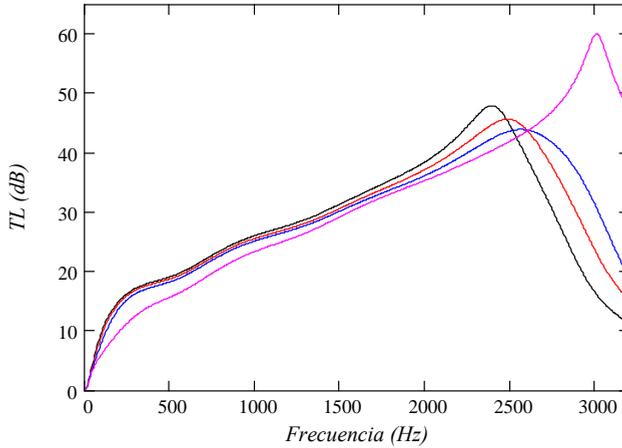


Figura 2.32. TL de silenciador con tubo perforado y material absorbente: —, sin flujo medio; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.15$ ; —,  $M = 0.2$ .

Se ha estudiado, también, el efecto de las dimensiones del silenciador. Las cámaras definidas en la Tabla 2.7 tienen el mismo volumen de fibra. Las características del conducto perforado son: espesor  $t_p = 0.001$  m, diámetro de orificio  $d_h = 0.0025$  m y porosidad  $\sigma = 15\%$ . El material absorbente considerado tiene una resistividad  $R_f = 5000$  rayl/m. Los cálculos se han realizado considerando una temperatura de  $15^\circ\text{C}$ . Los resultados se muestran en la Figura 2.33. Las líneas de trazo continuo corresponden a flujo medio nulo y las discontinuas a un flujo medio caracterizado por  $M = 0.1$

Geometría	$d_1$ (m)	$d_2$ (m)	$L$ (m)
1	0.05	0.2	0.2
1b	0.05	0.166	0.3
1c	0.05	0.146	0.4

Tabla 2.7. Dimensiones y características de cámara con conducto perforado y material absorbente con mismo volumen de fibra.

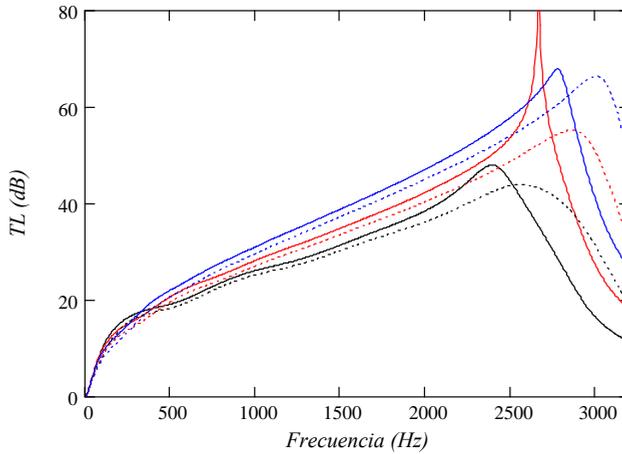


Figura 2.33. Efecto de la distribución del material absorbente  $L = 0.2$  m: —, sin flujo medio; ----,  $M = 0.1$ ;  $L = 0.3$  m: —, sin flujo medio; ----,  $M = 0.1$ ;  $L = 0.4$  m: —, sin flujo medio; ----,  $M = 0.1$ .

Las gráficas muestran que para un mismo volumen de fibra se consigue mayor atenuación en prácticamente todo el rango de frecuencia con mayor longitud de cámara. Únicamente a muy baja frecuencia se observa que una mayor relación de secciones cámara/tubo proporciona un ligero aumento de atenuación. Esta tendencia se observa tanto sin flujo medio como en presencia de flujo.

## 2.10. Limitaciones

El modelo de onda plana desarrollado en este apartado se basa en el supuesto de que los frentes de onda son planos de manera que todos los puntos pertenecientes a una sección perpendicular a la dirección de propagación de la onda acústica tienen la misma presión y velocidad acústica.

En conductos esta suposición es suficientemente válida si la dimensión longitudinal (en el sentido de la propagación) es grande en comparación con las dimensiones transversales y la frecuencia es inferior a un determinado valor. La frecuencia a partir de la cual el comportamiento de la onda se aleja del previsto por la teoría de onda plana es la denominada frecuencia de corte [106, 130, 131, 133] y corresponde al primer modo de presión del conducto. A partir de ésta se inicia la propagación de modos de presión de alto orden, con carácter multidimensional, y el modelo de onda plana deja de ser válido.

La limitación más importante de la teoría de onda plana aparece fundamentalmente en discontinuidades como son cambios de sección, conductos de grandes dimensiones y también en geometrías no simétricas sobre todo en el rango de frecuencias altas.

Incluso por debajo de la frecuencia de corte es posible la generación de modos multidimensionales. Esto ocurre, por ejemplo, en cambios de sección, debido a las condiciones de continuidad de los campos acústicos de presión y velocidad. Aunque estos modos no se propagan realmente, sí que aparecen, se atenúan exponencialmente y su presencia modifica el comportamiento del silenciador. Son los llamados modos evanescentes [130]. Para aumentar el rango de validez del modelo de onda plana su efecto puede ser introducido mediante una corrección de longitud asociada a la discontinuidad [106, 123]. Así, por ejemplo la matriz del cambio brusco de sección en términos de flujo másico, definida en (2.151) queda,

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ V_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b \\ V_b \end{Bmatrix} \quad (2.250)$$

En la bibliografía se encuentran diversas formas de obtener la corrección de longitud  $L_c$  [18, 106, 123]. Conviene añadir que esta expresión es válida tanto para ensanchamiento como estrechamiento brusco de sección ya que se da de forma análoga la aparición de los modos evanescentes. Esta estrategia permite ampliar el rango de validez de la teoría de onda plana. Aun así, se trata de un modelo muy limitado.

En la Figura 2.34 se muestra el  $TL$  de una cámara de expansión simple obtenido: con el modelo de onda plana original, empleando el polinomio propuesto por Albelda [18] como la corrección de longitud  $L_c$  que aparece en la expresión (2.250) y resuelta mediante el método de elementos finitos, igual a

$$\begin{aligned} L_c = & 0.921 + 0.094 \frac{k_0 D}{2} - 0.069 \left( \frac{k_0 D}{2} \right)^2 + 0.02 \left( \frac{k_0 D}{2} \right)^3 \\ & + \left( -1.445 + 0.244 \frac{k_0 D}{2} - 0.189 \left( \frac{k_0 D}{2} \right)^2 + 0.058 \left( \frac{k_0 D}{2} \right)^3 \right) \alpha \\ & + \left( 0.483 - 0.503 \frac{k_0 D}{2} + 0.385 \left( \frac{k_0 D}{2} \right)^2 - 0.116 \left( \frac{k_0 D}{2} \right)^3 \right) \alpha^2 \end{aligned} \quad (2.251)$$

donde  $k_0$  es el número de onda considerando el aire como fluido ideal,  $D$  es el diámetro de la cámara y  $\alpha = D/d$ , siendo  $d$  el diámetro del conducto. Los detalles sobre el modelado y el procedimiento de cálculo mediante el método de elementos finitos están resumidos en el Apéndice A. Las dimensiones de la cámara corresponden a la geometría 2 de la Tabla 2.2. Se ha supuesto una temperatura de 15°C sin flujo medio y fluido ideal.

En bajas frecuencias, los resultados son similares. En el rango de frecuencias medias, la corrección de longitud parece eficaz, pero a altas frecuencias, las discrepancias entre los modelos de onda plana y el resultado previsto por elementos finitos, son notables.

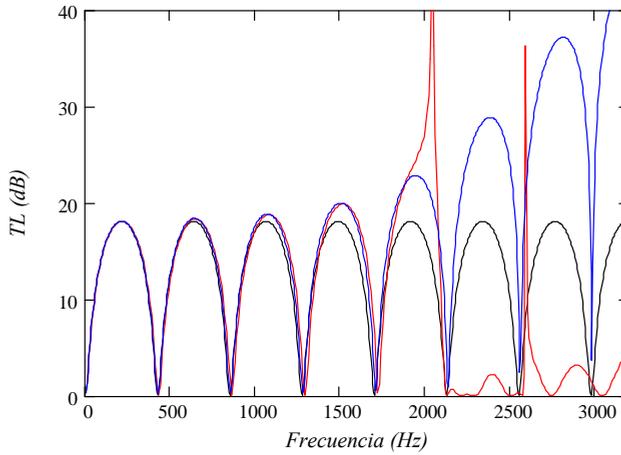


Figura 2.34. TL cámara de expansión simple: —, onda plana; —, onda plana con corrección de longitud; —, MEF.

La frecuencia de corte asociada a la cámara corresponde a la frecuencia de propagación del primer modo de presión [106, 107, 109]. En un conducto de sección circular, la frecuencia correspondiente al primer modo asimétrico es igual a

$$f_{c,1,0} = \frac{1.84 c_0}{\pi D} \tag{2.252}$$

y la del axisimétrico

$$f_{c,0,1} = \frac{3.83 c_0}{\pi D} \tag{2.253}$$

donde  $D$  corresponde al diámetro de la cámara  $d_2$ . Dado que la simulación de EF es axisimétrica, el primer modo de alto orden que se propaga es el axisimétrico. La frecuencia de corte es 2072 Hz, tal como efectivamente puede verse en Figura 2.34. Las discrepancias entre la predicción de la teoría de onda plana y el modelo numérico comienzan en una frecuencia algo menor. Esta discrepancia se debe a los modos evanescentes creados en el cambio de sección que aparecen en frecuencias más bajas y que sí se tienen en cuenta con la corrección de longitud expresada en la ecuación (2.250).

En cámaras con geometrías más complejas las diferencias aparecen antes. En la Figura 2.35 se ha representado el  $TL$  obtenido para la geometría 7 de la Tabla 2.3 correspondiente a una cámara de expansión con tubos extendidos. Se ha supuesto una temperatura de 15°C sin flujo medio y fluido ideal.

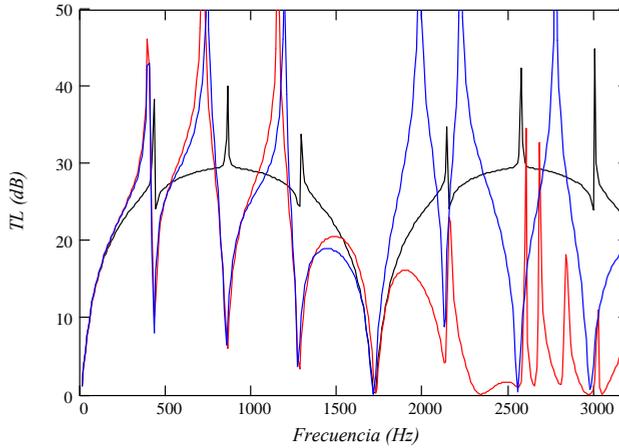


Figura 2.35. TL de cámara con conductos extendidos: —, onda plana; —, onda plana con corrección de longitud; —, MEF.

La teoría de onda plana ha previsto la eliminación de las bandas de paso por la presencia de los conductos extendidos. También, como puede apreciarse en la gráfica, ha previsto correctamente la existencia de la única banda de paso correspondiente a la de la longitud total de la cámara (a la temperatura de estudio situada en 1702 Hz). Sin embargo, no reproduce con precisión el TL en la mayor parte del rango de frecuencias, pronosticando una atenuación por encima de la obtenida numéricamente. El modelo con corrección de longitud además de situar la banda de paso, localiza los picos de resonancia correspondientes a los conductos extendidos y predice con mayor precisión la respuesta del silenciador por debajo de la frecuencia del primer modo de presión axisimétrico (2074 Hz). Los modos de alto orden excitados a partir de dicha frecuencia, provocan que las diferencias entre el modelo de onda plana y la simulación numérica se acentúen. Se ha empleado la expresión (2.254) obtenida por Torregrosa *et al.* en la referencia [147] para la corrección de longitud  $L_c$

$$\frac{L_c}{d} = 0.26148 - e^{-1.31906 \frac{D}{d}} \quad (2.254)$$

donde  $D$  es el diámetro de la cámara y  $d$  el diámetro del conducto.

## 2.11. Conclusiones

En el presente capítulo se han introducido las bases teóricas que dominan el comportamiento de las ondas acústicas en fluidos, tanto en reposo como en movimiento. Se ha particularizado la ecuación de ondas obtenida para un conducto, bajo el supuesto de propagación unidimensional, y se han definido y

obtenido distintos coeficientes para fluido real con y sin flujo medio. Se ha introducido también la nomenclatura que se empleará a lo largo del desarrollo de esta Tesis.

Además, se ha presentado el resultado de una revisión bibliográfica acerca de la caracterización de materiales absorbentes y de modelos de impedancia para conductos perforados, con o sin flujo medio.

Se han presentado distintas expresiones de la representación matricial, bajo el supuesto de propagación de onda plana, del comportamiento acústico de algunos elementos presentes en silenciadores, y se ha obtenido la matriz de transferencia de conductos, cambios de sección, superficies perforadas y materiales absorbentes. Se ha mostrado también cómo se combinan las matrices de los distintos elementos para obtener la matriz de transferencia de un silenciador. Los resultados de este desarrollo matemático simple, dan una primera idea del efecto de distintos elementos sobre el comportamiento acústico de silenciadores.

Se han presentado distintos parámetros que permiten dar una idea del nivel de atenuación acústica que puede proporcionar un silenciador y que sirven para evaluar el comportamiento del mismo. Los índices de atenuación sonora presentados expresan un balance energético entre la entrada y la salida del silenciador. A lo largo de esta Tesis se empleará el índice de pérdidas por transmisión (*Transmission Loss-TL*).

Por último, se ha mostrado la limitación del modelo de onda plana que excluye los modos de presión de alto orden y que, por esta razón, facilitan resultados razonables sólo a baja frecuencia. El empleo de correcciones de longitud en modelos unidimensionales de cámaras reactivas como son la cámara de expansión simple y la cámara con conductos extendidos, logra aumentar el rango de validez en frecuencia, pero sigue limitado por la frecuencia del primer modo de presión propagante de la cámara. Estas consideraciones justifican la necesidad de buscar métodos más precisos, y por esta razón, la validación de las medidas experimentales se llevará a cabo mediante la resolución de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno acústico con el método de elementos finitos ya que no presenta ninguna limitación en el rango de frecuencias de interés ni para las geometrías tratadas en este trabajo. El desarrollo matemático está contenido en el Apéndice A.



# Capítulo 3. Revisión de técnicas experimentales

## ***Resumen del capítulo***

*En este capítulo se presenta el resultado de la revisión bibliográfica llevada a cabo acerca de metodologías experimentales, comenzando por las clásicas puesto que suponen el punto de partida del resto. La primera metodología descrita es el método del micrófono móvil basado en la localización de los valores máximos y mínimos de presión de una onda estacionaria dentro de un tubo de impedancia. El segundo método analizado es el método del impulso, el cual se basa en la descomposición de la onda de presión generada por un pulso en sus componentes progresiva y regresiva. Para ello se emplea un tubo de gran longitud donde se sitúan los micrófonos a una distancia tal que el registro de cada componente se haga antes de que lleguen las reflexiones generadas en el elemento en estudio o en el final de la línea. Por último se detalla el fundamento de los métodos de descomposición de ondas que emplean una pareja de micrófonos separados una distancia conocida. Ésta técnica es la más extendida, existen muchas variantes de la misma y en este capítulo se detallan dos de ellas. A la descripción de cada metodología, acompaña una valoración que justifica la solución adoptada en esta Tesis, desarrollada en el siguiente capítulo.*

### 3.1. Introducción

El objetivo principal de esta Tesis es la implementación de un banco de ensayos que permita obtener experimentalmente la caracterización acústica de silenciadores empleados en la línea de escape de vehículos impulsados por motor de combustión interna. Los aspectos más importantes en el diseño del conjunto experimental son: la selección de un montaje físico que represente el sistema real dotado de un generador de ruido y una fuente de flujo, decidir qué magnitudes físicas medir, dónde y cómo hacerlo y a qué tratamiento matemático someterlas.

En este capítulo se resume la información más relevante de la revisión bibliográfica llevada a cabo que ha servido de base para el diseño del banco de ensayos desarrollado. Además se aporta una valoración de las metodologías empleadas hasta el momento en base a la cual se justifica la solución adoptada.

Se han englobado las metodologías analizadas en tres grandes grupos que dan lugar a tres métodos bien diferenciados. De cada método existen variantes que surgen bien por diferencias en la formulación del fenómeno acústico, en la consideración o no de flujo medio, en el diseño de la experimentación o simplemente en el parámetro buscado.

La primera técnica analizada es el método del micrófono móvil. Su origen se remonta a mediados de los años 40 [125] y es a principio de los años 70 cuando es empleada de forma más habitual. A partir de dicha técnica se desarrollan en la bibliografía [19, 89, 104, 143, 156] diversas variantes. Las medidas se llevan a cabo en un tubo de impedancia dentro del cual se sitúa una sonda con un micrófono que puede desplazarse en la dirección axial. La excitación al sistema es una señal de contenido en frecuencia discreto. A partir de la localización y magnitud de sucesivos máximos y mínimos de la onda de presión estacionaria en el tubo pueden obtenerse los coeficientes de absorción y de reflexión que definen la impedancia del final pasivo.

A mediados de los 70 Singh y Katra [139] desarrollan el método del impulso. El montaje requiere el empleo de dos micrófonos colocados en posiciones fijas, uno en el conducto que va desde el excitador acústico al elemento a caracterizar y el otro aguas abajo. El montaje termina con extremo abierto. La excitación acústica es un pulso de corta duración. El micrófono aguas arriba registra la onda de excitación y la onda reflejada por el elemento a caracterizar. El micrófono aguas abajo, la onda transmitida al medio.

Estos métodos clásicos de medida experimental de propiedades acústicas resultan interesantes en cuanto que suponen la base de los métodos que actualmente se emplean pero presentan, como se verá más adelante, algunas dificultades operativas.

El método de los dos micrófonos, desarrollado a finales de los años 70, parece ser el método más rápido y conveniente [37-39, 136, 137, 145]. Una de las principales ventajas es la posibilidad de emplear como excitación acústica una señal aleatoria que permita cubrir un rango de frecuencias amplio. El método básicamente consiste en registrar la presión en dos puntos determinados de un conducto donde esté garantizada una propagación unidimensional. El método permite descomponer la onda de presión en sus componentes incidente y reflejada y a partir de ellas se obtienen distintos parámetros empleados en la caracterización del elemento acústico.

### 3.2. Método del micrófono móvil

Esta metodología está descrita en referencias como [104, 106]. Ha sido empleada como herramienta de validación de modelos [19, 89, 90] y se encuentra registrada en normas como UNE-EN ISO 10534-1 [7] o ASTM C 384-95 [10]. El método requiere un conducto de sección constante o tubo de impedancia y un generador de señal acústica situado en uno de sus extremos. La fuente de ruido genera una señal de frecuencia discreta que se propaga por el tubo de impedancia hasta alcanzar al elemento en estudio situado al final del conducto. Se dispone además de un micrófono con una sonda que puede desplazarse axialmente a lo largo del tubo de impedancia y que se emplea para localizar los máximos y mínimos de la onda estacionaria presente en el interior del conducto. En la Figura 3.1 puede verse un esquema del montaje.

El método se basa en que en un tubo de sección constante el frente de onda es plano. Esta premisa puede asegurarse siempre que la frecuencia de la onda excitada sea inferior a la frecuencia del primer modo acústico de presión no plano. En el caso de conductos circulares, sin flujo medio, corresponde al valor obtenido con la expresión (2.251). Por otro lado, la longitud del conducto está relacionada con la frecuencia más baja a la que se puede realizar la medida ya que debe contener al menos uno, y preferiblemente dos, mínimos de presión. Para ello debe asegurarse que la longitud sea tal que [10]

$$f > \frac{0.75 c_0}{l-d} \quad (3.1)$$

Así, para un tubo de longitud  $l = 1$  m y diámetro  $d = 0.1$  m, suponiendo una velocidad del sonido  $c_0 = 345$  m/s, se tiene que las frecuencias mínima y máxima son aproximadamente 287 Hz y 2020 Hz respectivamente. La frecuencia mínima está limitada por la necesidad de contener dos mínimos de presión en el tubo de impedancia y la máxima está asociada a la restricción de la metodología a que el frente de onda acústico debe ser plano.

En tubos de impedancia largos la viscosidad del medio provoca disipación de la energía acústica. Este fenómeno afecta sobre todo a los valores mínimos aunque también de forma menos importante a los máximos, por lo que, es

necesario tenerlo en consideración en la formulación. Si se requiere gran precisión en las medidas puede determinarse la constante de atenuación del medio de forma experimental situando al final del tubo de impedancia una pared rígida. La localización de la onda estacionaria depende de la velocidad del sonido en el medio y ésta de la temperatura por lo que debe ser un parámetro a controlar.

### 3.2.1. Características de las ondas estacionarias

En cuanto al tratamiento de las medidas existen diferentes metodologías derivadas de distintos enfoques. En [89] Kathuriya y Munjal detallan una metodología válida para obtener experimentalmente la impedancia acústica en ausencia de flujo medio. Su método considera en la formulación la atenuación del medio y mide la posición y el valor de dos mínimos de presión y el valor de presión máximo. Como ventaja frente a las metodologías empleadas hasta ese momento, este planteamiento no depende ni de valores extrapolados del máximo de presión ni de su posición, que no es fácil de obtener experimentalmente.

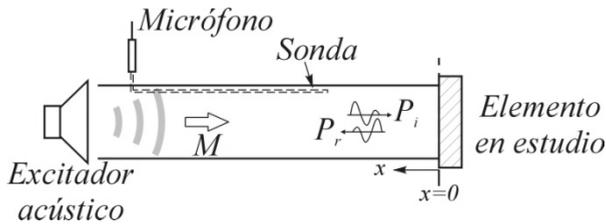


Figura 3.1. Instrumentación del método del micrófono móvil.

Teniendo en cuenta la ecuación (2.74) y empleando el sistema de referencia de la Figura 3.1 para ser consistentes con el criterio de orientación de la bibliografía [89], la presión total puede escribirse como la suma de las componentes incidente y reflejada,

$$P(x,t) = P_i + P_r = e^{j\omega t} \left( P^+ e^{(\alpha_0 + jk)x} + P^- e^{-(\alpha_0 + jk)x} \right) \quad (3.2)$$

siendo  $\alpha_0$  el coeficiente de atenuación dado en la expresión (2.78), el subíndice 0 denota ausencia de flujo y  $k$  el número de onda definido en las expresiones (2.87).

El coeficiente de reflexión complejo relaciona las componentes incidentes y reflejadas. En  $x = 0$  coincide con la relación de amplitudes de tales ondas de la siguiente forma

$$R(x=0) = \frac{P_r(x=0)}{P_i(x=0)} = \frac{P^-}{P^+} = R_0 e^{j\theta} \quad (3.3)$$

siendo  $R_0$  el módulo y  $\theta$  el desfase entre la componente incidente y la reflejada.

Combinando las expresiones (3.2) y (3.3), el módulo de la presión, resulta

$$|P(x)| = |P^+| \sqrt{e^{2\alpha_0 x} + R_0^2 e^{-2\alpha_0 x} + 2R_0 \cos(\theta - 2kx)} \quad (3.4)$$

Basta con derivar con respecto a la coordenada  $x$  la ecuación (3.4) para obtener la expresión que permite localizar la posición de los máximos y mínimos de la presión. Se obtiene

$$\sin(\theta - 2kx) = \frac{\alpha_0}{2kR_0} (R_0^2 e^{-2\alpha_0 x} - e^{2\alpha_0 x}) \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta que  $\alpha_0/k \ll 1$  y que  $(R_0^2 e^{-2\alpha_0 x} - e^{2\alpha_0 x})/R_0$  es del orden de la unidad, el seno puede aproximarse al argumento, y los puntos sucesivos máximos y mínimos quedan localizados respectivamente en

$$\theta - 2kx + 2n\pi = \frac{\alpha_0}{2k} \left( \frac{R_0^2 e^{-2\alpha_0 x} - e^{2\alpha_0 x}}{R_0} \right) \quad (3.6)$$

$$\theta - 2kx + (2n+1)\pi = \frac{\alpha_0}{2k} \left( \frac{R_0^2 e^{-2\alpha_0 x} - e^{2\alpha_0 x}}{R_0} \right) \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.4), los puntos de máxima y mínima presión deberán cumplir

$$P_{\max} = |P^+| \left( e^{\alpha_0 x_{\max}} + R_0 e^{-\alpha_0 x_{\max}} \right) \quad (3.8)$$

$$P_{\min} = |P^+| \left( e^{\alpha_0 x_{\min}} - R_0 e^{-\alpha_0 x_{\min}} \right) \quad (3.9)$$

Se suelen denominar curvas envolventes a las que contienen los sucesivos máximos y mínimos de presión. En la Figura 3.2 se representa el nivel de presión sonora, definido como  $SPL = 20 \log|P|$ , en función de la coordenada  $x$ , para una frecuencia de 2000 Hz,  $T = 15^\circ\text{C}$ ,  $R_0 = 0.8$  y  $\theta = 0.5$  rad.

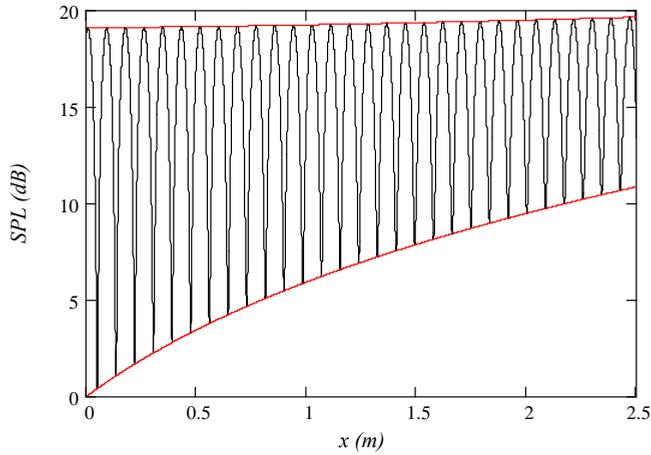


Figura 3.2. Onda estacionaria de frecuencia 2000 Hz en un tubo de impedancia:  
 —, SPL; —, curvas envolventes.

Las curvas en rojo corresponden a las envolventes de la presión máxima y mínima. Puede observarse que el máximo puede considerarse constante sin que ello aporte un error importante, mientras que los sucesivos mínimos sufren un aumento con la coordenada por efecto de la viscosidad del medio.

Para la obtención de la atenuación y del coeficiente de reflexión se define  $\beta$  como la relación entre la presión máxima y la mínima y el parámetro  $\delta$  como la diferencia de SPL de las mismas. Ver Figura 3.3

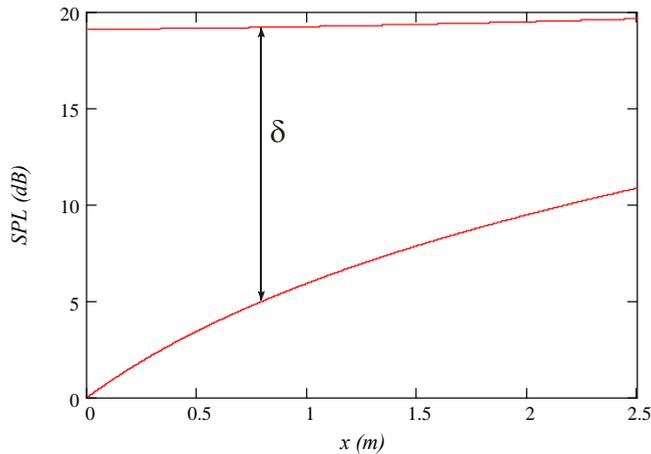


Figura 3.3. Definición gráfica de  $\delta$ .

Las correspondientes expresiones son

$$\beta = \frac{P_{\max}}{P_{\min}} \quad (3.10)$$

$$\delta = SPL_{\max} - SPL_{\min} = 20 \log(\beta) \quad (3.11)$$

Haciendo uso de las curvas envolventes, ecuaciones (3.8) y (3.9), se reescribe la expresión (3.10) como

$$\beta = \frac{e^{\alpha_0 x} + R_0 e^{-\alpha_0 x}}{e^{\alpha_0 x} - R_0 e^{-\alpha_0 x}} \quad (3.12)$$

Reordenando términos, teniendo en cuenta la ecuación (3.11) e introduciendo un nuevo parámetro  $y$ , resulta

$$e^{\alpha_0 x} = R_0 \left( \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right) = R_0 y \quad (3.13)$$

Aplicando logaritmos se obtiene

$$\alpha_0 x = \ln(R_0) + \ln(y) \quad (3.14)$$

### 3.2.2. Procedimiento experimental

Experimentalmente se obtiene el valor máximo de la presión  $P_{\max}$  y la posición  $(x^{(1)}, x^{(2)})$  y el valor  $(P_{\min}^{(1)}, P_{\min}^{(2)})$  de dos mínimos consecutivos en el tubo de impedancia. A partir de ellos se calculan los valores de los diferentes parámetros, esto es  $\beta^{(1)} = P_{\max}/P_{\min}^{(1)}$ ,  $\beta^{(2)} = P_{\max}/P_{\min}^{(2)}$ ,  $\delta^{(1)} = 20 \log(\beta^{(1)})$ ,  $\delta^{(2)} = 20 \log(\beta^{(2)})$ ,  $y^{(1)} = (\beta^{(1)} + 1)/(\beta^{(1)} - 1)$  e  $y^{(2)} = (\beta^{(2)} + 1)/(\beta^{(2)} - 1)$ . El coeficiente de atenuación  $\alpha_0$  y el módulo del coeficiente de reflexión  $R_0$  se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta sustituyéndolos en la ecuación (3.14), siendo

$$\alpha_0 = \frac{\ln(y^{(1)}) - \ln(y^{(2)})}{2(x^{(1)} - x^{(2)})} \quad (3.15)$$

$$R_0 = \exp \left( x^{(2)} \frac{\ln(y^{(2)}) - \ln(y^{(1)})}{x^{(2)} - x^{(1)}} - \ln(y^{(1)}) \right) \quad (3.16)$$

Conocida la atenuación y la amplitud del coeficiente de reflexión a partir de las medidas, se puede obtener el desfase  $\theta$  y también el número de onda  $k$ . Para ello se parte de la ecuación (3.7)

$$\theta = 2kx - (2n+1)\pi + \frac{\alpha_0}{2k} \left( \frac{R_0^2 e^{-2\alpha_0 x} - e^{2\alpha_0 x}}{R_0} \right) \quad (3.17)$$

Para el primer mínimo  $n=0$  y  $x=x^{(1)}$  y para el segundo mínimo  $n=1$  y  $x=x^{(2)}$ . Una vez se sustituyen los valores en la ecuación (3.17), se consiguen las dos ecuaciones necesarias para resolver el sistema y obtener los parámetros buscados, esto es  $\theta$  y  $k$ .

Para el cálculo del  $TL$  se sitúa aguas abajo del tubo de impedancia el silenciador y a continuación de éste un final anecoico que evita la reflexión de las ondas acústicas [90, 143, 156].

### 3.2.3. Valoración del método

Los principales inconvenientes de esta metodología son:

- Resulta una técnica lenta. El método impone trabajar con una única frecuencia de excitación y las medidas deben realizarse cuando la onda estacionaria ya se ha establecido.
- Como desventaja asociada al excesivo tiempo, es difícil mantener condiciones del ensayo tales como temperatura o nivel de presión continuo constantes.
- Al ser necesario el desplazamiento de la sonda durante el experimento, es posible que la misma se desplace hacia el interior del conducto, en la dirección radial, pudiendo provocar interferencias en el campo acústico que afectan directamente a las medidas y alterando la fiabilidad del método.
- En el rango de bajas frecuencias presenta grandes limitaciones, como son la necesidad de tubos de impedancia excesivamente largos o la dificultad de localizar con precisión la posición de los mínimos de presión. Esta desventaja es especialmente importante en aplicaciones como silenciadores de escape de motores de combustión en los que los niveles mayores de energía asociados a las perturbaciones de presión en el escape están localizados en los primeros armónicos (200-300 Hz).
- En presencia de flujo medio, si bien hay resultados experimentales publicados [90], no resulta una técnica adecuada debido a las dificultades e imprecisiones que presenta originadas por la extensión en tiempo del ensayo o la distorsión del perfil de flujo debido a la presencia de la sonda en el interior del conducto.

### 3.3. Método del impulso

Este método fue desarrollado por Singh y Katra aplicado a sistemas de aire acondicionado [139] y ha sido adoptado también en el estudio de silenciadores de escape [33, 119, 146]. El método consiste en registrar mediante micrófonos las ondas incidente y reflejada de un tren de ondas generado por una fuente acústica. Ingard y Singhal [82, 83] empleaban como señal de excitación un tren de ondas armónicas, y más tarde Loudon [99] empleó la misma técnica con un pulso simple.

Conceptualmente un impulso o función delta es una señal de amplitud infinita y duración nula cuyo espectro en frecuencia es completamente plano. Físicamente no es posible reproducir un impulso ideal. En su lugar se emplean funciones pulso rectangular con un contenido en frecuencia más limitado pero aceptable si en su espectro contiene las frecuencias de interés. En la Figura 3.4 a) se muestran distintas funciones rectangulares unitarias en la escala temporal y en la Figura 3.4 b) sus correspondientes autoespectros (sólo frecuencias positivas).

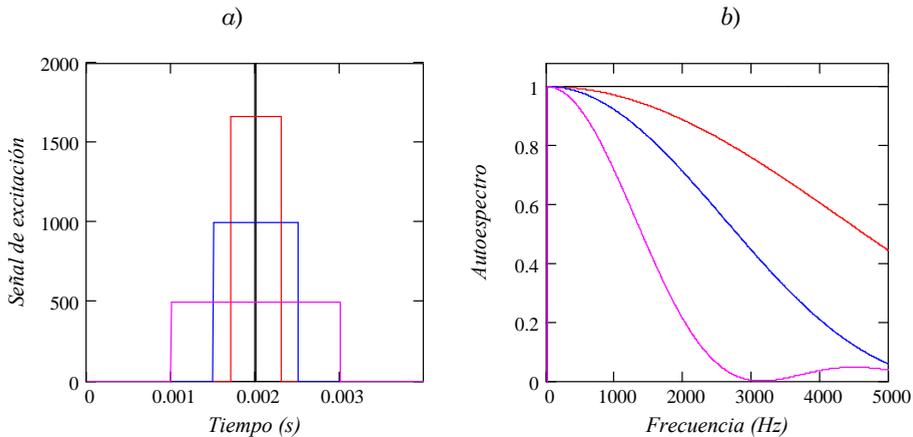


Figura 3.4. Funciones rectangulares unitarias: a) escala tiempo; b) autoespectro en frecuencia.

La línea negra representa la función impulso ideal y a esta le corresponde un espectro plano. Las otras líneas corresponden a funciones pulso rectangular de diferente amplitud y duración con área unidad. El espectro en frecuencia de tales funciones depende de la duración temporal, disminuyendo su contenido en frecuencia con la misma. Es importante, seleccionar de forma cuidadosa la duración del impulso de modo que sea físicamente realizable y que la amplitud del espectro para el rango de frecuencias de interés garantice una relación señal-ruido adecuada.

Algunas particularidades relacionadas con la implementación del método se derivan del fundamento físico del mismo. El montaje consta de un excitador acústico situado en la cabeza de la línea. A continuación un conducto en el que se sitúa un transductor de presión #1, seguido del elemento a caracterizar. Finalmente se dispone otro tramo de conducto donde se coloca el segundo transductor #2. La Figura 3.5 muestra un esquema del mismo.

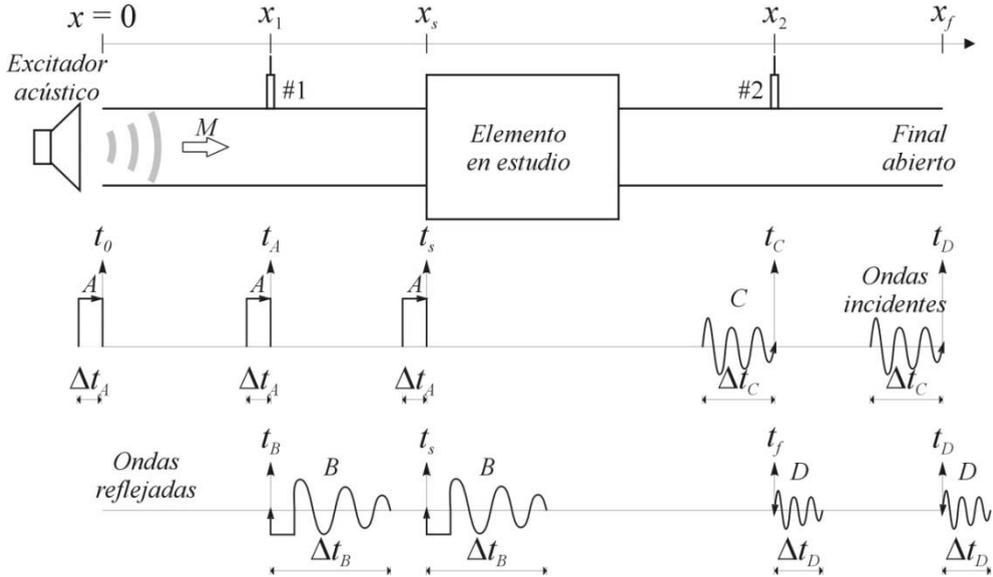


Figura 3.5. Descripción gráfica del método del impulso.

La onda  $A$  es generada por el excitador, situado en el origen de coordenadas, en el instante  $t_0$ . En el instante  $t_A$  el flanco ascendente del pulso alcanza la posición del primer micrófono. En  $t_s$  la onda llega al elemento en estudio donde se genera una reflexión de la misma  $B$  de duración  $\Delta t_B$  que viaja aguas arriba del sistema y alcanza el micrófono 1 en el instante  $t_B$ . La onda transmitida  $C$ , de duración  $\Delta t_C$ , avanza aguas abajo y alcanza el micrófono 2 en  $t_C$  y éste llega al final en  $t_D$ . En ese momento la reflexión  $D$  de duración  $\Delta t_D$  comienza el recorrido aguas arriba, llegando al micrófono 2 en el instante  $t_f$ .

A estas ondas se sumarán reflexiones posteriores y ruido. Para asegurar que cada micrófono esté registrando una única componente, la selección de las dimensiones, longitud de conducto y posición de micrófonos, debe ser extremadamente cuidadosa. El micrófono aguas arriba debe registrar la onda incidente  $A$  antes que llegue la onda reflejada del silenciador  $B$  y el micrófono aguas abajo debe registrar la onda transmitida completa  $C$  antes que aparezca la reflexión de éste en el final abierto  $D$ . Lo mismo ocurre con el tiempo del ensayo: deberá ser suficientemente largo para registrar la onda de presión completa pero no demasiado para evitar el registro de reflexiones sucesivas

indeseables. Bajo estas consideraciones, los criterios a seguir con respecto a la longitud del conducto son:

- En cada micrófono la onda incidente debe haber pasado completamente antes de la llegada de la onda reflejada.
  - En el micrófono 1, esta condición expresada en tiempo supone  $t_B > t_A + \Delta t_A$  y en longitud  $x_s - x_l > c_0 (1 - M^2) \Delta t_A / 2$ .
  - En el micrófono 2 las condiciones análogas serán  $t_f > t_C + \Delta t_C$  y  $x_f - x_2 > c_0 (1 - M^2) \Delta t_C / 2$ .
- Por otro lado, en cuanto al tiempo total de medida  $t_T$ , deberá ser suficientemente largo como para que queden registradas completamente las ondas incidente y transmitida.
  - En el micrófono 1  $t_T > t_B + \Delta t_B$  o también  $t_T \geq \frac{2x_s - x_l (1 + M)}{c_0 (1 - M^2)} + \Delta t_B$ .
  - En el micrófono 2  $t_T > t_C + \Delta t_C$  y  $t_T \geq \frac{x_2}{c_0 (1 + M)} + \Delta t_C$ .
- Los criterios expresados se refieren al tiempo mínimo de medida. Hay que tener en cuenta también que el ensayo no debe ser excesivamente largo para evitar el registro de las reflexiones que van generándose,  $D$  y sucesivas no representadas en la Figura 3.5.

El índice de pérdidas por transmisión puede obtenerse haciendo uso de la ecuación (2.175). A partir de la onda acústica incidente  $A$  (impulso generado) y la transmitida  $C$ , representadas en la Figura 3.5, en sistemas donde los conductos de entrada y salida tienen la misma área transversal la expresión resultante es

$$TL = 20 \log \left| \frac{A}{C} \right| \quad (3.18)$$

Es usual obtener el  $TL$  a partir de la siguiente expresión

$$TL = 10 \log \left| \frac{S_{AA}}{S_{CC}} \right| \quad (3.19)$$

donde  $S_{AA}$  y  $S_{CC}$  corresponden al autoespectro de las componentes incidente y transmitida respectivamente.

### 3.3.1. Consideraciones experimentales

En todo ensayo experimental el ruido, tanto eléctrico como acústico, contamina las señales. Este hecho se acentúa más en presencia de flujo medio. En el caso concreto del método del impulso, al tratarse de ruido aleatorio superpuesto a una señal determinista, normalmente basta con hacer un número suficiente de

promedios para que su efecto se minimice. Una posibilidad es realizar el promediado en el dominio temporal, aunque esta alternativa es válida si se garantiza una sincronización muy precisa entre la generación del pulso y la adquisición de datos. Lo más habitual es llevar a cabo el tratamiento de las señales registradas en el dominio frecuencia.

Con respecto al perfil de la onda incidente, conviene que presente un espectro en frecuencia plano, al menos en el rango de interés de modo que la energía asociada esté distribuida uniformemente en frecuencia. Por la misma razón, es imprescindible que la duración del pulso generado  $\Delta t$  esté relacionada con su amplitud. La Figura 3.6 ilustra este fenómeno. El gráfico *a)* representa pulsos de una duración usual en este tipo de ensayos:  $\Delta t = 30$  ms los de trazo rojo y  $\Delta t = 80$  ms los de trazo negro. La amplitud de las funciones pulso se ha seleccionado de modo que las representadas con trama continua correspondan a la función unitaria, es decir encierran un área igual a la unidad. Las de trama discontinua tienen la mitad de amplitud que las de trama continua de la misma duración. En el gráfico *b)* se ha representado el autoespectro en dB para facilitar la interpretación.

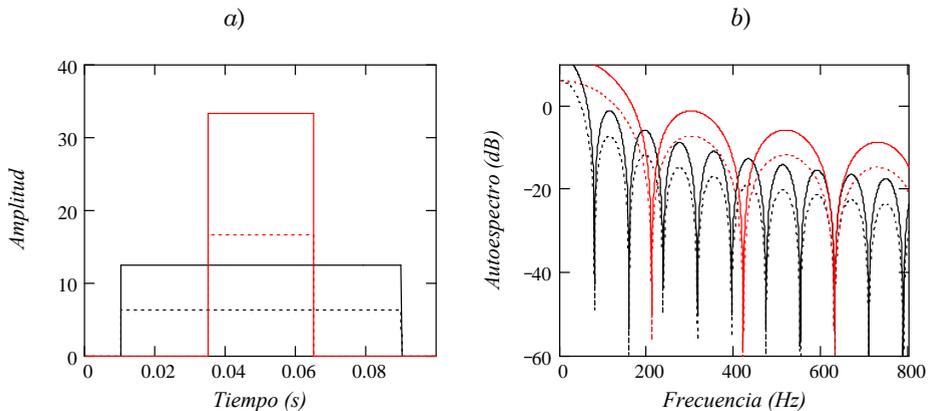


Figura 3.6. Pulsos rectangulares: *a)* escala tiempo; *b)* autoespectro en dB.

Las funciones de igual trazo tienen el mismo contenido energético pero con distinta duración. Las funciones de igual color tienen la misma duración y diferente amplitud. Las características más importantes que se derivan de la interpretación del espectro son:

- Los pulsos de menor duración presentan un contenido en frecuencia más amplio. A frecuencias mayores a las representadas en el gráfico esta diferencia se acentúa.
- Los ceros de la transformada de Fourier corresponden a frecuencias de contenido energético nulo. Su posición depende de la duración del pulso,

situándose en los múltiplos enteros de la inversa del tiempo de duración del pulso, esto es en las frecuencias  $\omega = 2 \pi n/\Delta t$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$

Por tanto, en cuanto a la generación del pulso, interesa que sea de la duración que asegure una amplitud adecuada a la frecuencia máxima de interés. El límite inferior se encuentra, más bien, en las posibilidades de la instalación. Por ejemplo, si se genera el pulso mediante una descarga de aire de un depósito a presión la duración de la descarga se controla con la apertura y cierre de válvulas que tienen una mecánica y una inercia asociadas.

### 3.3.2. Valoración del método

Las ventajas más relevantes de este método, pueden resumirse como sigue:

- El rico contenido en frecuencia de la señal de excitación convierte esta técnica en un método rápido y preciso
- Al registrar de forma aislada las ondas incidente y reflejada, no hace falta emplear una técnica de descomposición de señales posterior al registro de datos.
- Por la misma razón, no es necesario implementar un final anecoico en el extremo de la línea.
- Los pulsos generados tienen características similares a las ondas de presión presentes en el colector de escape de un motor de combustión interna. Esta es una de las ventajas más interesantes frente a los métodos que emplean como señal de excitación la generada por un altavoz.
- Las componentes de ruido, eléctrico y de flujo entre otros, pueden eliminarse con un número suficiente de promedios, partiendo del supuesto de que el ruido es aleatorio y la señal acústica determinista.

Los siguientes aspectos del método se consideran inconvenientes:

- En el proceso de tratamiento de la señal, será imprescindible la sincronización de la adquisición de datos, para preservar la fase de las ondas incidente y reflejada.
- El ancho de banda y el contenido en frecuencia es difícil de controlar, y por la misma razón se complica la repetitividad. Esta característica provoca que la generación de la señal en este método requiera más atención que cuando se emplea un ruido aleatorio o una señal de frecuencia discreta.
- Es difícil producir pulsos de muy corta duración que proporcionen una relación señal-ruido adecuada con suficiente amplitud a altas frecuencias.
- Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno acústico, presentadas en el apartado 2.2, están desarrolladas bajo el supuesto de que las

perturbaciones provocadas por la presencia de la onda acústica son de pequeña amplitud. Este método puede requerir la generación de pulsos de gran amplitud, que a su vez puede provocar que la propagación de la onda de presión se aleje del rango de comportamiento lineal considerado en la formulación.

- Otra de las hipótesis en las que también se basa la formulación del fenómeno es que el comportamiento del fluido es ideal y unidimensional, no contemplando la presencia de pérdidas por fricción. La necesidad de emplear una longitud de tubo elevada obligaría a considerarlas. Otra desventaja asociada a la longitud del conducto es la necesidad de espacio. Broatch [33] utiliza un banco de ensayos con una longitud de conducto aguas arriba de 35 metros y 15 metros aguas abajo. Para solucionar este problema emplea tubería de polietileno de baja densidad suficientemente flexible para poder ser enrollada y con rigidez suficiente para evitar deformaciones en la propagación de ondas.

Entre todos los criterios, se debe llegar a una solución de compromiso para garantizar que la propagación tenga lugar en régimen de comportamiento lineal, en el que se basa la formulación del fenómeno acústico.

### 3.4. Método de descomposición de ondas

Dentro de esta metodología se encuentran una gran cantidad de variantes que tienen en común la descomposición de las ondas de presión registradas en los puntos de medida en su componente progresiva y regresiva. En todas ellas es necesario el empleo de micrófonos por parejas separados una distancia conocida. Las distintas variantes encontradas en la literatura difieren fundamentalmente en el tratamiento matemático de las señales registradas, aunque también en el tipo de señal de excitación o en el montaje.

Todas ellas se basan en utilizar una fuente acústica que genere señal en el rango de frecuencias de interés. Es necesario emplear dos micrófonos situados a una distancia conocida del elemento en estudio, como queda reflejado en el esquema del montaje mostrado en la Figura 3.7. El flujo medio está caracterizado por su velocidad axial,  $U_{fm}$ .

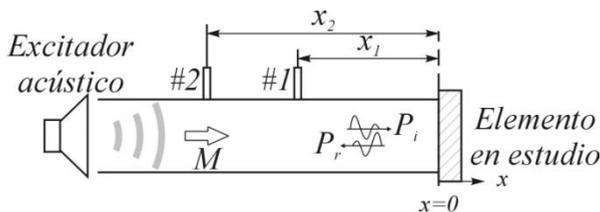


Figura 3.7. Esquema de montaje del método de los dos micrófonos.

El método original [137], no considera la atenuación del medio. La presión total, suma de las componentes incidente  $p_i$  y reflejada  $p_r$ , teniendo en cuenta el sistema de referencia representado en la Figura 3.7, resulta

$$p(x,t) = p_i + p_r = e^{j\omega t} \left( p^+ e^{-jk^+ x} + p^- e^{jk^- x} \right) \quad (3.20)$$

donde  $k^+$ ,  $k^-$  al tratarse de fluido ideal corresponden a  $k^+ = k_0 / (1 + M)$  y  $k^- = k_0 / (1 - M)$ , el número de onda es  $k_0 = \omega / c_0$  y el número de Mach  $M = U_{fm} / c_0$ , siendo  $c_0$  la velocidad del sonido en el medio en reposo. Más tarde, algunos investigadores [15, 108] analizan el error introducido en esta simplificación y la evalúan como una fuente de error considerable.

La velocidad de la partícula obtenida teniendo en cuenta la ecuación (2.75) es

$$u(x,t) = \frac{1}{Z_0} (p_i - p_r) = \frac{e^{j\omega t}}{Z_0} \left( p^+ e^{-jk^+ x} - p^- e^{jk^- x} \right) \quad (3.21)$$

donde la impedancia de fluido, al considerarlo ideal, es igual a  $Z_0 = \rho_0 c_0$ .

Al aplicar la transformada de Fourier en la expresión temporal de la presión, ecuación (3.20), se obtiene

$$P(x,\omega) = P^+(\omega) e^{-jk^+ x} + P^-(\omega) e^{jk^- x} \quad (3.22)$$

En adelante se omite  $\omega$  en algunas de las expresiones para simplificar la notación. Con respecto a la velocidad, su transformada de Fourier resulta

$$U(x,\omega) = \frac{1}{Z_0} \left( P^+ e^{-jk^+ x} - P^- e^{jk^- x} \right) \quad (3.23)$$

A la vista de la ecuación (3.22) se deduce que  $P^+$  y  $P^-$  coinciden con las amplitudes de las ondas incidente y reflejada en el origen de coordenadas. En  $x = 0$  la presión es igual a

$$P(x=0,\omega) = P^+ + P^- \quad (3.24)$$

A continuación se describen dos metodologías basadas en el método de descomposición de ondas. Una cronológicamente situada muy cercana al método original [137] y que ha supuesto la base de muchos trabajos posteriores [13, 20, 47, 48, 62, 108, 122, 145]. La otra es la empleada en trabajos anteriores desarrollados en el área como es la Tesis Doctoral de Denia [54] y que además está descrita en las normas UNE-EN ISO 10534-2 [8] y ASTM C 1050-90 [11].

### 3.4.1. Método de los dos micrófonos

Teniendo en cuenta el montaje representado en la Figura 3.7 y partiendo de las expresiones (3.22) y (3.23), la impedancia en  $x = 0$  puede obtenerse a partir de las densidades espectrales de la siguiente forma

$$Z = \frac{S_{PU}}{S_{UU}} \quad (3.25)$$

Las distintas densidades espectrales, obtenidas según la referencia [110], resultan

$$S_{PU} = \frac{1}{Z_0} \left( S_{P^+P^+} - S_{P^-P^-} - 2j \operatorname{Im} \left( S_{P^+P^-} \right) \right) \quad (3.26)$$

$$S_{UU} = \frac{1}{Z_0^2} \left( S_{P^+P^+} + S_{P^-P^-} - 2 \operatorname{Re} \left( S_{P^+P^-} \right) \right) \quad (3.27)$$

$$S_{PP} = \left( S_{P^+P^+} + S_{P^-P^-} + 2 \operatorname{Re} \left( S_{P^+P^-} \right) \right) \quad (3.28)$$

Al combinarse con la ecuación (3.25), se obtiene

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{\left( S_{P^+P^+} - S_{P^-P^-} - 2j \operatorname{Im} \left( S_{P^+P^-} \right) \right)}{\left( S_{P^+P^+} + S_{P^-P^-} - 2 \operatorname{Re} \left( S_{P^+P^-} \right) \right)} \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta la definición del coeficiente de reflexión, dada en (3.3), su módulo y fase puede obtenerse como sigue

$$|R|^2 = \frac{S_{P^-P^-}}{S_{P^+P^+}} \quad (3.30)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\operatorname{Im} \left( S_{P^+P^-} \right)}{\operatorname{Re} \left( S_{P^+P^-} \right)} \right) \quad (3.31)$$

El último paso es obtener las anteriores expresiones en función de magnitudes físicas medibles, esto es, en función de la presión registrada por los micrófonos situados en posiciones conocidas ( $x_1, x_2$ ).

$$P(x_1, \omega) = P_1 = P^+ e^{-jk^+ x_1} + P^- e^{jk^- x_1} \quad (3.32)$$

$$P(x_2, \omega) = P_2 = P^+ e^{-jk^+ x_2} + P^- e^{jk^- x_2} \quad (3.33)$$

A partir de las densidades espectrales de la presión en los puntos de medida y haciendo uso de las ecuaciones (3.32) y (3.33)

$$S_{11} = S_{p^+p^+} + S_{p^-p^-} + 2 \left[ \operatorname{Re}(S_{p^+p^-}) \cos \left[ (k^+ + k^-) x_1 \right] + \operatorname{Im}(S_{p^+p^-}) \operatorname{sen} \left[ (k^+ + k^-) x_1 \right] \right] \quad (3.34)$$

$$S_{22} = S_{p^+p^+} + S_{p^-p^-} + 2 \left[ \operatorname{Re}(S_{p^+p^-}) \cos \left[ (k^+ + k^-) x_2 \right] + \operatorname{Im}(S_{p^+p^-}) \operatorname{sen} \left[ (k^+ + k^-) x_2 \right] \right] \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(S_{12}) &= S_{p^+p^+} \cos \left[ k^+ (x_2 - x_1) \right] + S_{p^-p^-} \operatorname{sen} \left[ k^- (x_2 - x_1) \right] \\ &\quad + \operatorname{Re}(S_{p^+p^-}) \left[ \cos(k^+ x_1 + k^- x_2) + \cos(k^- x_1 + k^+ x_2) \right] \\ &\quad + \operatorname{Im}(S_{p^+p^-}) \left[ \operatorname{sen}(k^+ x_1 + k^- x_2) + \operatorname{sen}(k^- x_1 + k^+ x_2) \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(S_{12}) &= S_{p^+p^+} \operatorname{sen} \left[ k^+ (x_2 - x_1) \right] - S_{p^-p^-} \operatorname{sen} \left[ k^- (x_2 - x_1) \right] \\ &\quad + \operatorname{Re}(S_{p^+p^-}) \left[ -\operatorname{sen}(k^+ x_1 + k^- x_2) + \operatorname{sen}(k^- x_1 + k^+ x_2) \right] \\ &\quad + \operatorname{Im}(S_{p^+p^-}) \left[ \cos(k^+ x_1 + k^- x_2) + \cos(k^- x_1 + k^+ x_2) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Se obtiene un sistema de ecuaciones que tiene como incógnitas  $S_{p^+p^+}$ ,  $S_{p^-p^-}$ ,  $\operatorname{Re}(S_{p^+p^-})$  e  $\operatorname{Im}(S_{p^+p^-})$ . Una vez resuelto, puede calcularse la impedancia y el coeficiente de reflexión del elemento en estudio con las ecuaciones (3.29)-(3.31).

Si se está analizando un silenciador y se sitúa una salida anecoica en su extremo aguas abajo, el índice de pérdida de transmisión puede obtenerse empleando un tercer micrófono aguas abajo simplemente combinando el autoespectro del mismo ( $S_{33}$ ) con el de la onda incidente como sigue,

$$TL = 10 \log \left( \frac{S_{p^+p^+}}{S_{33}} \right) \quad (3.38)$$

### 3.4.1.1. Valoración del método

Las ventajas de la metodología descrita pueden resumirse como sigue:

- El método experimental resulta mucho menos tedioso que el método del micrófono móvil, al poder trabajar con un mismo montaje para todas las frecuencias. Adicionalmente, el tiempo de ensayo se reduce considerablemente, puesto que no se hace necesario trabajar con frecuencias discretas, pudiendo hacerlo con señales acústicas con amplio contenido en frecuencia.

- Se propone la eliminación del efecto del ruido ocasionado por el flujo con un número suficiente de promedios, basándose en que el mismo no está correlacionado con la señal acústica.

Las desventajas principales pueden resumirse en:

- En cuanto al desarrollo matemático, su formulación, algo compleja, es válida en ausencia de efectos viscosos, si bien esta consideración se aleja de la realidad en presencia de flujo medio. Con objeto de controlar el error introducido bajo este supuesto, en estudios posteriores [15] se desarrolla una expresión para determinar la distancia máxima entre el elemento en estudio y el micrófono más alejado.
- Al trabajar con densidades espectrales de las señales, es fundamental que el sistema de medida capture de forma sincronizada la señal de todos los micrófonos.
- La construcción del final anecoico en ausencia de flujo medio no supone una gran dificultad. Sin embargo en presencia de flujo medio, su construcción no es inmediata.

Como conclusión, este método presenta analogías con el método del micrófono móvil en cuanto al equipamiento requerido, pero presenta ventajas que lo señalan como mucho más interesante. Basado en él se desarrollan otras metodologías, que a continuación se describen y que resultan más eficaces.

### 3.4.2. Método de la función de transferencia

Esta metodología es la implementada por Denia en su Tesis Doctoral [54] y empleada en otros trabajos disponibles en la bibliografía [56, 58, 59, 61, 126]. El montaje requerido es el mismo que el del método de los dos micrófonos puesto que conceptualmente no hay diferencias. En este caso se obtiene la función de transferencia entre dos micrófonos en lugar de las densidades espectrales. La metodología está basada en la posibilidad de descomponer un frente de ondas en su parte progresiva y regresiva y, a partir de ellas, permite obtener el coeficiente de reflexión o la impedancia del elemento en estudio así como el índice de pérdidas de transmisión si se trata de un silenciador.

En este caso la descomposición de la onda acústica se lleva a cabo con una computación más eficaz y de fácil implementación. El método fue desarrollado originalmente por Chung y Blaser [37, 38], autores que emplean integrales de convolución con la respuesta impulsiva correspondiente a las ondas progresiva y regresiva y su superposición en los puntos de medida. Munjal [106] simplifica la metodología trabajando con fluido ideal.

Los espectros de la presión obtenidos a partir de la expresión (3.22) para los puntos de medida localizados en  $x_1$  y  $x_2$  según la Figura 3.7, resultan

$$P(x = x_1, \omega) = P_1 = P^+ e^{-jk^+ x_1} + P^- e^{jk^- x_1} \quad (3.39)$$

$$P(x = x_2, \omega) = P_2 = P^+ e^{-jk^+ x_2} + P^- e^{jk^- x_2} \quad (3.40)$$

La función de transferencia entre las dos señales se define como

$$H_{21} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P^+ e^{-jk^+ x_2} + P^- e^{jk^- x_2}}{P^+ e^{-jk^+ x_1} + P^- e^{jk^- x_1}} \quad (3.41)$$

Teniendo en cuenta la definición del coeficiente de reflexión evaluado en la superficie del elemento en estudio, ecuación (3.3), es

$$R(x = 0) = R^{(0)} = \frac{P^-}{P^+} \quad (3.42)$$

La ecuación (3.41) puede reescribirse

$$H_{21} = \frac{e^{-jk^+ x_2} + R^{(0)} e^{jk^- x_2}}{e^{-jk^+ x_1} + R^{(0)} e^{jk^- x_1}} \quad (3.43)$$

y despejando

$$R^{(0)} = \frac{H_{21} - H_i}{H_r - H_{21}} e^{-j(k^+ + k^-)x_1} \quad (3.44)$$

donde  $H_i = e^{jk^+ s}$  y  $H_r = e^{-jk^- s}$ , siendo  $s$  la separación entre micrófonos, esto es,  $s = x_1 - x_2$ .

El coeficiente de reflexión en la posición del micrófono 1 [39, 106] es igual a

$$R(x = x_1) = R^{(1)} = \frac{P^- e^{jk^- x_1}}{P^+ e^{-jk^+ x_1}} = R^{(0)} e^{j(k^+ + k^-)x_1} \quad (3.45)$$

Combinando (3.44) y (3.45)

$$R^{(1)} = \frac{H_{21} - H_i}{H_r - H_{21}} \quad (3.46)$$

Por otro lado el coeficiente de reflexión en la posición del micrófono 2 resulta

$$R(x = x_2) = R^{(2)} = \frac{P^- e^{jk^- x_2}}{P^+ e^{-jk^+ x_2}} = R^{(0)} e^{j(k^- + k^+)x_2} \quad (3.47)$$

Combinando las ecuaciones (3.46) y (3.47) se llega a

$$\frac{R^{(1)}}{R^{(2)}} = \frac{e^{j(k^-+k^+)x_1}}{e^{j(k^-+k^+)x_2}} = \frac{H_i}{H_r} \quad (3.48)$$

De la expresión anterior por un lado se deduce que la amplitud del coeficiente de reflexión no depende del punto donde se evalúa y por otro que si se obtiene experimentalmente el coeficiente de reflexión en algún punto de medida, éste puede evaluarse en cualquier posición mediante una ecuación análoga a la ecuación (3.48).

Conocido el coeficiente de reflexión, la impedancia evaluada en cualquier punto del conducto se obtiene de forma inmediata [106]

$$Z = \frac{P}{U} = \frac{P_i + P_r}{\frac{1}{Z_0}(P_i - P_r)} \rightarrow Z = Z_0 \frac{1 + R}{1 - R} \quad (3.49)$$

Es importante mencionar que la expresión dada en (3.46) queda indeterminada [37] cuando se da la igualdad  $H_i = H_r$ , es decir

$$e^{jk^+s} = e^{-jk^-s} \quad (3.50)$$

Las frecuencias que satisfacen la anterior ecuación cumplen

$$(k^- + k^+)s = 2n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.51)$$

Por tanto la separación máxima entre micrófonos debe cumplir

$$s < \frac{c_0}{2f_{\max}}(1 - M^2) \quad (3.52)$$

En ausencia de flujo, si la frecuencia de interés máxima es 3200 Hz, considerando  $c_0 = 345$  m/s, la separación entre micrófonos debe ser como máximo 0.054 m. Otros autores reducen el rango de aplicación, aplicando un coeficiente a la anterior expresión, los detalles están expuestos en el Capítulo 4.

Si se sitúa otra pareja de micrófonos, 3 y 4, aguas abajo del elemento en estudio puede evaluarse la potencia incidente y transmitida mediante la siguiente expresión [37]

$$W_i = \frac{S_{UU}(1 + M_U)^2 A_U}{Z_0 |1 + R^{(U)}|^2} \quad (3.53)$$

$$W_t = \frac{S_{DwDw}(1 + M_{Dw})^2 A_{Dw}}{Z_0 |1 + R^{(Dw)}|^2} \quad (3.54)$$

donde  $S_{UU}$  y  $S_{DwDw}$  son las densidades espectrales de presión aguas arriba y aguas abajo del elemento en estudio respectivamente,  $A_U$  y  $A_{Dw}$ , las áreas transversales del conducto referidas a las mismas secciones y  $M_U$  y  $M_{Dw}$  los correspondientes números de Mach. Por último  $R^{(U)}$  y  $R^{(Dw)}$  se refieren a los coeficientes de reflexión a la entrada y a la salida del componente acústico.

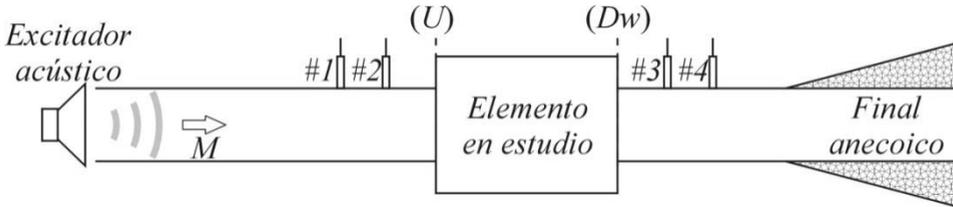


Figura 3.8. Montaje para la obtención del TL de un silenciador.

Si además en el banco de medidas se instala una salida anecoica, Figura 3.8, partiendo de las definiciones anteriores, el índice de pérdidas por transmisión resulta

$$TL = 20\log\left(\left|\frac{1+R^{(Dw)}}{1+R^{(U)}}\right|\right) + 10\log\left(\frac{S_{UU}}{S_{DwDw}}\right) + 20\log\left(\frac{1+M_U}{1+M_{Dw}}\right) + 10\log\left(\frac{A_U}{A_{Dw}}\right) \quad (3.55)$$

Para sistemas en los que el área transversal del conducto aguas arriba y aguas abajo es la misma, la anterior expresión se simplifica

$$TL = 20\log\left(\left|\frac{1+R^{(Dw)}}{1+R^{(U)}}\right|\right) + 10\log\left(\frac{S_{UU}}{S_{DwDw}}\right) \quad (3.56)$$

Si se montan los micrófonos aguas arriba y aguas abajo con la misma separación entre ellos la ecuación (3.56) en ausencia de flujo queda de la siguiente forma

$$TL = 20\log\left(\left|\frac{H_r - H_{21}}{H_r - H_{43}}\right|\right) + 10\log\left(\frac{S_{UU}}{S_{DwDw}}\right) + 10\log\left(\frac{A_U}{A_{Dw}}\right) \quad (3.57)$$

Teniendo en cuenta la posición de los micrófonos mostrada en la Figura 3.8  $H_r = e^{j\beta s}$ , donde  $s$  es la separación entre micrófonos y  $\beta$  el número de onda para fluido real sin flujo medio dado en (2.99).

### 3.4.2.1. Valoración del método

Al estar basado en el mismo principio que el método de los dos micrófonos, comparte con él muchas de las valoraciones realizadas en el apartado 3.4.1.1 como es la reducción del tiempo de ensayo comparado en el método del micrófono móvil, la necesidad de garantizar la sincronización de las señales

registradas o la problemática en la obtención de un final anecoico en la línea en presencia de flujo medio.

A la vista de la ecuación (3.57) se observa que la caracterización acústica mediante esta metodología se lleva a cabo directamente a partir de las medidas de los micrófonos de presión o de los espectros en frecuencia de las mismas, lo cual supone la principal ventaja con respecto al tradicional método de los dos micrófonos.

La hipótesis de fluido ideal no parece introducir un error importante, menos aún en ausencia de flujo medio, debido a que la separación entre los micrófonos de los que se obtiene la función de transferencia es suficientemente pequeña como para ser válida dicha consideración.

El inconveniente más importante es la necesidad de emplear un final anecoico para la obtención del  $TL$ , que se extrema en presencia de flujo medio.

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la información más relevante de la revisión bibliográfica llevada a cabo. Las técnicas experimentales empleadas habitualmente en la caracterización acústica de elementos de escape pueden agruparse en tres metodologías, cada una de las cuales presenta multitud de variantes: el método del micrófono móvil, el método del impulso y el método de descomposición de ondas.

El método del micrófono móvil presenta importantes inconvenientes. Por un lado, y en cuanto al montaje, implica la necesidad de utilizar tubos de impedancia excesivamente largos para frecuencias bajas. Por otro, en cuanto a la implementación, la imposición de emplear señal de frecuencia discreta junto con la necesidad de que se establezca régimen permanente supone un tiempo de operación excesivamente largo. Otro inconveniente importante que presenta es la presencia de la sonda en el interior del tubo de impedancia que puede llegar a perturbar la onda acústica.

Las otras dos tecnologías descritas presentan una ventaja común frente al método del micrófono móvil que es la reducción del tiempo de ensayo de una forma relevante. La realidad es que el método del micrófono móvil es actualmente una técnica prácticamente en desuso. Su interés radica en que ha sido empleada como herramienta de validación de otros métodos de caracterización [36, 137, 139] o modelos de cálculo teórico [111] y además está presente en la normativa vigente [7].

Con respecto al método del impulso una ventaja que presenta es que evita la necesidad de instalar un final anecoico. Éste se sustituye por un conducto de gran longitud que consigue retardar lo suficiente las reflexiones generadas al final de la línea y evitar que queden registradas. El uso de un único micrófono a

cada lado del elemento en estudio evita el inconveniente del desacoplamiento de fase que aparece al usar los micrófonos por parejas. Los mayores inconvenientes son: la necesidad de una gran longitud de conducto, la dificultad de generar un impulso de corta duración y de gran amplitud, para asegurar un contenido en frecuencia suficiente en el intervalo de interés, y la consideración en la formulación del fenómeno de una propagación lineal en el conducto, que deja de ser cierta para señales de gran amplitud. Teniendo en cuenta este último aspecto esta metodología cuenta como ventaja que las ondas producidas por la salida de los gases de escape de un motor de combustión interna poseen características análogas, es decir, llegan a ser de gran amplitud perdiendo su comportamiento lineal.

Finalmente el método de descomposición de ondas es el seleccionado en esta Tesis. Como todos los métodos basados en el mismo principio, está supeditado al uso de dos micrófonos que registran presión en dos puntos distintos de un mismo conducto. La señal registrada es el resultado de la superposición de la onda que viaja aguas abajo del sistema (incidente y transmitida) y sus posteriores reflexiones. El actual desarrollo de la electrónica ha jugado un papel importante en la implementación de todas las variantes derivadas de esta metodología. El empleo de parejas de micrófonos conlleva algunas dificultades como es la limitación en frecuencias, máxima y mínima, asociada a la distancia entre ambos. La solución implementada para resolver este inconveniente es el empleo de un tercer micrófono situado a una distancia mayor y que es usado en combinación con uno de la pareja original de forma que se amplía el rango de frecuencias válido. Otro problema inherente está asociado a la diferencia de fase entre los dos micrófonos que tiene como solución emplear una cuidadosa calibración del sistema.

Por último Broatch [33] plantea como inconveniente de esta metodología la necesidad de emplear un flujómetro realmente difícil de construir sobre todo en presencia de flujo medio. Para evitar este problema, se han desarrollado metodologías experimentales como alternativas perfectamente válidas [13, 100, 107] pero que conllevan un incremento inevitable de la duración de los ensayos.

En el siguiente capítulo se hace una descripción exhaustiva y una justificación del banco de ensayos desarrollado en esta Tesis, que supera los inconvenientes de otras metodologías empleadas hasta el momento.



# Capítulo 4. Dispositivo y metodología experimental desarrollada

## **Resumen del capítulo**

*Dadas las dificultades inherentes asociadas a la medida y caracterización acústica de dispositivos de control de ruido en presencia de flujo medio, en el presente capítulo se aborda el desarrollo e implementación de una técnica experimental precisa y eficiente. Se describe la metodología desarrollada y la base teórica empleada para la caracterización del silenciador en presencia de flujo medio a partir de los datos registrados en el montaje experimental. También se facilita información pormenorizada del sistema experimental proporcionando los detalles pertinentes de los distintos componentes que lo integran. La validación del sistema experimental en presencia de flujo medio se realiza en base a la obtención de los cuatro polos de un tubo recto, que son conocidos. Finalmente, la metodología implementada y el banco de ensayos desarrollado se aplican al estudio exhaustivo de múltiples configuraciones de silenciador. Se presenta su caracterización acústica por medio del índice de pérdidas de transmisión que se compara de forma satisfactoria con los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos.*

## 4.1. Introducción

La fase experimental de esta Tesis abarca diferentes aspectos que van a ser analizados en este capítulo. En la revisión bibliográfica llevada a cabo se han analizado tres metodologías de ensayo apropiadas al estudio de comportamiento acústico de silenciadores de escape.

El método del micrófono móvil tiene, entre otros, el gran inconveniente de precisar tiempos de ensayo excesivamente largos por lo que queda descartado. El método del impulso permite obtener el índice de pérdidas por transmisión sin necesidad de emplear un final anecoico, ésta característica presenta una ventaja interesante ya que la construcción del mismo en presencia de flujo medio supone una complejidad considerable. Otra ventaja la constituye el empleo de una señal de excitación con niveles de presión semejante a los presentes en sistemas de escape reales. El principal inconveniente es la necesidad de disponer de suficiente espacio donde albergar el conducto de gran longitud requerido, además, las pérdidas viscosas asociadas a las dimensiones de la instalación deben integrarse en la formulación.

Analizadas las opciones y valorando las ventajas e inconvenientes de todas ellas se ha considerado el método los dos micrófonos [37-39, 112, 136, 137, 145] como el más conveniente y, sobre el mismo, se ha basado el banco de ensayos desarrollado.

Una de las principales ventajas frente a las otras alternativas valoradas es la posibilidad de emplear como excitación una señal acústica generada por un altavoz lo que permite cubrir un rango de frecuencias bastante amplio, tanto con el empleo de señales tipo senoidal como ruido aleatorio. El mayor inconveniente es la obtención de una salida anecoica en presencia de flujo medio. Como alternativa a su implementación muchos investigadores llevan a cabo dos ensayos independientes obteniendo buenos resultados [13, 100, 107]. Esta opción conlleva el aumento de la duración del tiempo de ensayo al doble lo cual supone un inconveniente especialmente importante en ensayos con flujo medio ya que la temperatura del aire sufre cambios importantes con el tiempo.

## 4.2. Antecedentes

En el capítulo anterior se han introducido algunos conceptos del método de los dos micrófonos. Éste consiste en registrar la presión en dos puntos determinados de un conducto donde la onda acústica presenta un frente plano. Posteriormente se procesa la señal comenzando por transformarla al dominio de la frecuencia y posteriormente operar para obtener distintos parámetros necesarios para la caracterización del elemento acústico.

En esta segunda etapa del proceso, cada investigador desarrolla un tratamiento matemático distinto en función de los parámetros acústicos buscados. Seybert y

Ross [137] consiguen descomponer la onda acústica en sus componentes incidente y reflejada. Chung y Blaser trabajan con la función de transferencia entre la pareja de micrófonos y a partir de ella obtienen el coeficiente de reflexión [37, 38] y también la intensidad acústica [39]. To y Doige [145] obtienen la impedancia acústica y también el coeficiente de reflexión.

A partir de este punto los investigadores trabajan para mejorar la calidad de las medidas. Munjal y Doige [108] incluyen en la formulación tanto la absorción acústica considerada en [35, 145] como el efecto del flujo medio que se hace en los trabajos [39, 136, 137]. Más tarde Åbom y Bodén hacen un análisis exhaustivo del efecto del flujo medio sobre la medida de propiedades acústicas [32] proponiendo además métodos para reducir la influencia del mismo [15]. Una de las propuestas más eficaces de estos autores es la obtención de la función de transferencia entre dos micrófonos a partir de los espectros cruzados empleando como referencia aquella señal que tiene una relación ruido-síñal menor. Los resultados de su trabajo demuestran que la mejor señal de referencia es la del propio excitador acústico tal y como ya habían empleado en sus trabajos Wagstaff y Henrio [150].

Holland y Davies [52, 77, 78] obtienen también mejoras combinando diferentes aspectos. Exponen la necesidad de una buena calibración sobre todo para aquellas frecuencias en las que la relación señal-ruido decae. La técnica de calibración que emplean consiste en medir la función de transferencia entre dos micrófonos. A continuación, intercambian la posición de tales micrófonos y vuelven a obtenerla. La función de transferencia calibrada entre esta pareja de micrófonos se obtiene como la media geométrica de las dos medidas llevadas a cabo. Este procedimiento de calibración también ha sido empleado por Chung y Blaser en sistemas sin flujo medio [37, 38] y en presencia de flujo medio [39].

Estos últimos estudian además la influencia de la posición, tanto radial como axial, de los micrófonos. Llegan a la conclusión de que la posición radial óptima es aquella en la que los micrófonos están enrasados con el conducto, sin invadir su interior para que la onda acústica no interactúe con el obstáculo ni dejar un hueco entre la superficie interna del conducto y la cara externa del micrófono donde el flujo pueda generar vórtices que distorsionen la medida. Con respecto a la posición axial, su análisis concluye que no es adecuado colocar los micrófonos excesivamente alejados del elemento en estudio debido al aumento de las pérdidas viscosas con la longitud, ni tampoco cerca del elemento acústico a caracterizar porque los modos evanescentes generados en las discontinuidades alejan el comportamiento de onda plana, efecto que se acentúa con flujo medio. La conclusión que exponen en su trabajo es que la distancia mínima entre el sistema a caracterizar y el micrófono más cercano debe ser de al menos 3 veces el diámetro del conducto. Por otro lado, al considerar que las señales registradas por dos micrófonos separados una distancia  $l$  serán idénticas cuando  $kl = n\pi$ , donde  $n$  es un número entero, llegan a la conclusión de que cualquier método proporciona malos resultados para

aquellas frecuencias que se acerquen a la anterior relación, por lo que recomiendan que la distancia axial entre micrófonos sea menor que la mitad de la longitud de onda de la máxima frecuencia de interés. En su estudio concluyen que para un conducto de sección circular uniforme, de diámetro  $d$ , con flujo estacionario, este efecto limita la máxima frecuencia de aplicación a la correspondiente al número de Helmholtz dada por  $(kd)/2 = 1.84(1-M^2)^{0.5}$ , de acuerdo con los estudios de Davies [50].

Una de las aportaciones más importantes del trabajo de Holland y Davies [77] al desarrollo de esta Tesis es utilizar como señal de excitación una señal senoidal y hacer un barrido a lo largo de todas las frecuencias de interés junto con un promedio selectivo, es decir, considerando solo la frecuencia excitada y eliminando el resto del espectro contaminado por el ruido presente en la medida. Bajo el supuesto de que el ruido de flujo no está correlacionado con la señal acústica el efecto del mismo se cancelará realizando un número suficiente de promedios.

El trabajo de Allam y Bodén [20] ha supuesto también una de las fuentes destacadas de esta Tesis. Presentan una comparativa de métodos experimentales de medida de señal acústica en presencia de flujo medio. Su objetivo es mejorar la relación señal-ruido mediante la utilización de la técnica de los dos micrófonos y para ello trabajan con la conexión de los altavoces al conducto principal, concluyendo que lo mejor es emplear, entre la rama lateral del altavoz y el conducto principal, tubería perforada con valores de porosidad de aproximadamente 50%. De esta forma se reduce considerablemente la formación de vórtices que introducen ruido en la línea. Con respecto al tratamiento de señal, hacen una comparativa entre tres métodos distintos: promedio en el dominio temporal excitando con una señal periódica (diente de sierra) y promedio en el dominio en frecuencia habiendo excitado con ruido aleatorio y con señal senoidal. En los resultados presentados cualquier método se muestra como adecuado si se emplea un número de promedios suficiente. Si el promedio se hace en el dominio de la frecuencia no se encuentra diferencia en la mejora de la relación señal-ruido con los niveles de señal empleados, tanto si la señal de excitación es aleatoria como si es una señal periódica, siempre y cuando se disponga de una señal libre de ruido como por ejemplo la señal eléctrica enviada al altavoz. El uso de señal senoidal mejora de entrada la relación señal-ruido ya que se concentra toda la energía acústica excitando a una única frecuencia. El número de promedios necesarios tanto en el promedio en dominio temporal como el caso de ruido aleatorio con promedio en dominio frecuencia es aproximadamente de unos 10000 para llegar a obtener buenos resultados para velocidades por debajo de  $M=0.2$ , si bien para velocidades superiores no se obtienen resultados aceptables. En determinadas frecuencias donde la relación señal-ruido decae, mejoran los resultados utilizando como referencia en el espectro cruzado aquel micrófono que tiene una relación señal-ruido mayor en lugar de emplear una referencia fija.

### 4.3. Sistema experimental sin flujo medio

El banco de ensayos desarrollado en esta Tesis, tiene sus antecedentes en el implementado en el área por Denia. La validación del mismo está presentada en su Tesis Doctoral [54] y en diversas publicaciones [56, 58, 59, 61, 126]. La Figura 4.1 muestra el esquema completo del banco de ensayos.

*Altavoz*

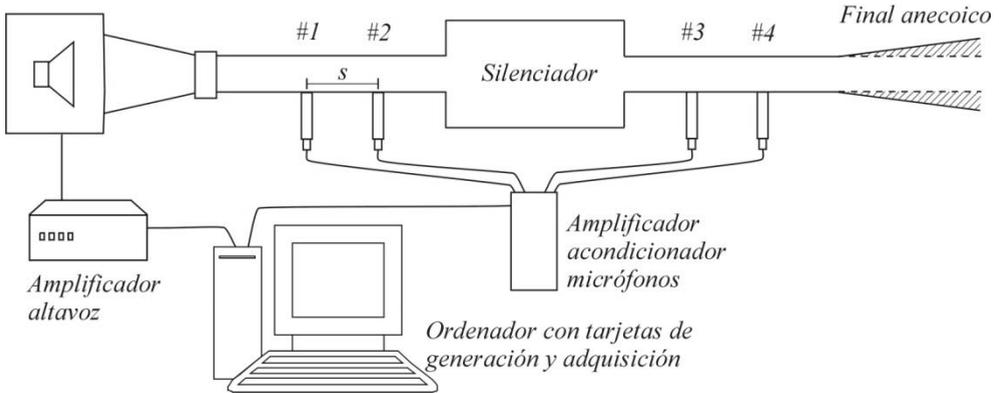


Figura 4.1. Sistema experimental sin flujo medio.

El método de medida está basado en la obtención de la función de transferencia [37, 38]. En este método se descompone matemáticamente una onda acústica que se propaga en un tubo en sus componentes progresiva y regresiva a partir de la función de transferencia simple entre los registros de presión realizados en dos puntos fijos del tubo.

Esta descomposición de ondas permite la evaluación del coeficiente de reflexión complejo a partir del cual se puede estimar el valor de la impedancia acústica compleja del sistema. Disponiendo un final de línea anecoico y añadiendo otra pareja de micrófonos aguas abajo del silenciador puede evaluarse el índice de pérdidas de transmisión mediante la realización de un ensayo en el que la señal de entrada de la fuente de excitación sea una señal aleatoria. Cuando la pareja de micrófonos aguas arriba mantiene una separación igual a la de la pareja aguas abajo el índice de pérdidas de transmisión se obtiene con la expresión (3.57)

$$TL = 20 \log \left( \left| \frac{H_r - H_{21}}{H_r - H_{43}} \right| \right) + 10 \log \left( \frac{S_{UU}}{S_{DwDw}} \right) + 10 \log \left( \frac{A_U}{A_{Dw}} \right) \quad (4.1)$$

donde  $S_{UU}$  y  $S_{DwDw}$  son los autoespectros de la presión acústica aguas arriba y aguas abajo respectivamente,  $A_U$  y  $A_{Dw}$  las áreas transversales de sus correspondientes conductos, y  $H_r$  la función de transferencia de la componente

reflejada de la onda de presión entre los micrófonos 1 y 2, que puede obtenerse como sigue

$$H_r = \frac{P_2}{P_1} = e^{jk_0s} \quad (4.2)$$

donde  $s$  representa la separación entre los micrófonos expresada en la Figura 4.1 y  $k_0$  es el número de onda. Obsérvese que esta expresión es válida sin flujo medio y fluido ideal.

Los detalles de los componentes que forman el banco de ensayos se resumen a continuación. El altavoz se encuentra en el interior de una caja de madera conglomerada de dimensiones 0.6x0.5x0.45 m acolchada interiormente por dos capas de fibra de vidrio de 0.05 m de espesor cada una. A la salida de la caja se ha empleado un cono de plástico suficientemente rígido de 0.6 m de longitud para adaptar los diámetros de altavoz y conducto. Para la conexión entre el cono y el conducto se emplea una junta elástica que permite absorber posibles vibraciones mecánicas provenientes especialmente de las ondas de baja frecuencia generadas por el altavoz. Los conductos aguas arriba y abajo del silenciador son de PVC de diámetro interior 0.0536 m. El final anecoico situado aguas abajo de la segunda pareja de micrófonos se ha construido con un tramo de 5.2 m del mismo conducto de PVC relleno de fibra de vidrio con densidad de compactación creciente hacia la salida. Los 4 micrófonos de presión están enrasados en la superficie interna del conducto. La separación entre los micrófonos 1 y 2 es la misma que entre los micrófonos 3 y 4 e igual a 0.0465 m.

Se dispone de diversos medios digitales para garantizar la calidad de la señal registrada, entre otros, la tarjeta de adquisición de datos está dotada de un filtro *antialiasing*. La frecuencia de muestreo empleada es de 12000 Hz, el contenido en frecuencia de la excitación no supera los 4000 Hz si se trata de ruido blanco y si la señal es senoidal la frecuencia máxima del barrido es de 3200 Hz. Por otro lado, a la señal adquirida por cada micrófono se le aplica una ventana *Hanning* para evitar problemas de *leakage* [110].

El software desarrollado en *LabVIEW*<sup>1</sup> permite obtener a partir de las señales temporales registradas por los micrófonos sus transformadas de Fourier y con ellas las funciones de transferencia necesarias para la obtención del *TL* del silenciador.

---

<sup>1</sup> © National Instruments Corporation

## 4.4. Consideraciones experimentales en presencia de flujo medio

La presencia de flujo medio a través de los conductos de medida requiere la construcción de un nuevo montaje experimental distinto al descrito en el apartado anterior. En primer lugar es imprescindible un sellado adecuado de todas las conexiones a lo largo de todo el sistema de medida. También se hace necesario disponer un final de línea abierto para permitir la salida de aire lo que impide emplear el mismo final anecoico que en el montaje sin flujo medio. En este sentido se ha optado por buscar un método de ensayo distinto.

En cuanto al post proceso de las señales registradas es necesario incluir el flujo medio en la formulación del problema acústico y tener en cuenta el hecho de que la corriente de aire que pasa a través de conductos de sección variable, con perforaciones y otro tipo de irregularidades, provoca la vibración del aire e introduce en el sistema lo que se conoce como ruido de flujo. Este fenómeno obliga a buscar métodos eficaces para la eliminación del efecto del ruido de flujo por un lado actuando sobre sus fuentes principales para mitigar en la medida de lo posible las causas que lo producen y por otro buscando nuevos métodos para la caracterización acústica en los que el efecto del ruido se minimice. En cuanto al primer aspecto, es importante tener especial cuidado en el enrasado de los micrófonos ya que si el micrófono queda en el interior de la pared del conducto, el silbido propio del vórtice generado en la cavidad contamina directamente la señal acústica. Con respecto a minimizar el efecto del ruido asociado a la presencia de flujo en el tratamiento de las señales muchos investigadores han trabajado en la búsqueda de métodos eficaces, en ocasiones analizando y valorando las fuentes de error asociadas a los métodos válidos en ausencia de flujo [15, 32, 82, 102, 149] y en otros casos proponiendo mejoras y nuevos métodos que minimicen el efecto del flujo medio en la caracterización del silenciador [36, 48-50, 62, 70, 77, 78].

La presencia de flujo en el sistema obliga a medir parámetros ambientales como son la temperatura y la velocidad del flujo. Los dispositivos empleados para ello se encuentran descritos en el apartado 4.4.1. El banco de ensayos desarrollado, igual que su antecedente sin flujo medio, tiene como base elemental el método de los dos micrófonos. En este caso a partir la presión registrada por las dos parejas de micrófonos situadas a ambos lados del elemento acústico bajo estudio se ha obtenido la matriz de comportamiento del sistema. En el apartado 4.4.2 se encuentran las definiciones empleadas en esta Tesis, así como la expresión del índice de pérdidas de transmisión obtenida a partir de sus términos. El apartado 4.4.3 contiene la descripción del método experimental que ha servido de base a la metodología desarrollada. El apartado 4.4.4 resume algunos aspectos del tratamiento de la señal que se ha llevado a cabo.

La descripción de los componentes del banco de ensayos desarrollado se encuentra en el apartado 4.5, a continuación se analizan los resultados experimentales obtenidos empleando ésta instalación con el método de las dos fuentes empleando como señal de excitación barrido senoidal y ruido aleatorio.

El apartado 4.7 contiene la descripción de la metodología de ensayo desarrollada, le sigue un análisis de los resultados obtenidos tras su implementación, su validación por comparación de los polos de la matriz de transferencia de un conducto recto con flujo medio y los resultados obtenidos con distintas tipologías de silenciadores.

#### 4.4.1. Medida de variables ambientales

##### 4.4.1.1. *Temperatura*

Es imprescindible en cada ensayo hacer la medida de la temperatura ya que en la formulación aparecen variables que dependen de ella como son la velocidad del sonido, la densidad y la viscosidad dinámica del aire. En presencia de flujo es preciso realizar la medida en el interior del conducto ya que la compresión del aire en la soplante provoca el aumento de su temperatura con respecto a la temperatura ambiental. Se ha empleado una sonda de humedad/temperatura para conductos TESTO 0636 9715 conectada a una unidad de medición multifunción TESTO 400. La velocidad del sonido en aire se ha obtenido empleando la ecuación (2.22) y la viscosidad con la ecuación (2.80). La densidad del aire se ha calculado a partir de la ecuación general de los gases para aire seco [153], que resulta

$$\rho_0 = \frac{P_0 P_M}{R_0 T} \quad (4.3)$$

donde  $P_0$  corresponde a la presión estática,  $P_M$  es la masa molar del aire,  $R_0$  es la constante universal de los gases perfectos y  $T$  corresponde a la temperatura absoluta. Los valores empleados son: el valor estándar de la presión a nivel del mar  $P_0 = 101325$  Pa, la masa molar del aire seco  $P_M = 0.02895$  kg/mol y la constante universal de los gases  $R = 8.3145$  Pa·m<sup>3</sup>/(mol·K).

##### 4.4.1.2. *Velocidad media de flujo*

La velocidad media de flujo se ha medido con un manómetro de presión diferencial TESTO 521 con tubo de Pitot estático o tubo de Prandtl. La medida de la velocidad se basa en la ecuación de Bernoulli [68, 148, 153] que particularizada para flujo estacionario ideal e incompresible (densidad constante) resulta

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = cte \quad (4.4)$$

donde  $U$  corresponde a la velocidad del fluido,  $p$  es la presión en el fluido,  $\rho$  la densidad del fluido,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $z$  la altura.

La Figura 4.2 muestra un esquema del tubo de Pitot empleado para la obtención experimental del flujo medio. La sonda está formada por un tubo hueco de sección circular de pequeño diámetro doblado en L. En los laterales tiene unas pequeñas perforaciones que comunican el tubo con una cavidad anular llamada tubo piezométrico.

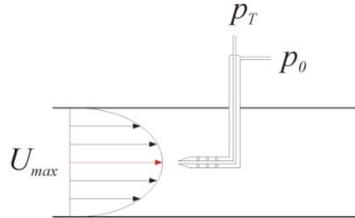


Figura 4.2. Tubo de Pitot.

El extremo abierto del tubo se sitúa apuntando directamente a la corriente del fluido. De esta forma queda sometido a una presión igual a la presión de remanso  $p_T$  que es la presión que alcanzaría la partícula si fuera frenada hasta el reposo sin pérdida alguna de energía. De su definición, teniendo en cuenta la Figura 4.2, se deduce que es igual a

$$p_T = p_0 + \frac{\rho U^2}{2} \quad (4.5)$$

El tubo piezométrico queda cargado con la presión estática  $p_0$ . Tubo y cavidad están conectados a un manómetro diferencial que proporciona la diferencia entre las dos presiones o presión dinámica, a partir de la cual empleando la ecuación anterior se obtiene la velocidad de la línea de corriente donde está situada la sonda.

En el banco de ensayos la sonda se sitúa en el centro de la tubería de modo que la velocidad medida es la velocidad máxima  $U_{max}$ , que en el flujo completamente desarrollado no coincide con la velocidad media  $U_{fm}$ . Existen expresiones que permiten obtener el valor de la velocidad media a partir de la máxima [68, 153]. Dependen en primer lugar de si se trata de flujo laminar o turbulento. La frontera entre uno y otro la establece el número de Reynolds  $Re = U_{fm} D \rho_0 / \mu$ . Se considera flujo turbulento aquel con número de Reynolds por encima de 2000 [105]. La tubería empleada en el banco de ensayos tiene diámetro  $D = 0.0536$  m, de manera que considerando una viscosidad dinámica  $\mu = 1.72 \cdot 10^{-5}$  kg/(m·s) y

una densidad del aire de  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ , la velocidad media a partir de la cual se da flujo turbulento es igual a será

$$U_{fm} = \frac{Re \mu}{\rho D} = 0.5 \text{ m/s} \quad (4.6)$$

En los ensayos con flujo medio se ha trabajado siempre con velocidades por encima de este valor. Para flujo turbulento la relación entre la velocidad máxima y la velocidad media deducida de la teoría de la capa límite de Prandtl, viene dada por [153]

$$\frac{U_{max}}{U_{fm}} = 1 + 1.33 \sqrt{f_D} \quad (4.7)$$

donde  $f_D$  es el factor de fricción de Darcy que depende del número de Reynolds y de la rugosidad de la pared. La tubería empleada es de PVC y puede considerarse lisa. En este caso se cumple la ecuación deducida por Prandtl

$$\frac{1}{\sqrt{f_D}} = 2 \log(Re \sqrt{f_D}) - 0.8 \quad (4.8)$$

Para obtener la velocidad media es necesario resolver el sistema de ecuaciones formado por las expresiones (4.7) y (4.8).

#### 4.4.2. Caracterización del fenómeno acústico

La representación del comportamiento acústico de silenciadores de escape puede llevarse a cabo mediante el coeficiente de reflexión, la impedancia acústica o los índices de atenuación sonora, entre otros. En esta Tesis se ha optado por la obtención experimental de la matriz de cuatro polos del sistema ya que lo define completamente y a partir de sus términos es posible obtener cualquier parámetro acústico.

En esta Tesis se ha trabajado con dos representaciones matriciales distintas: la matriz de transferencia y la matriz de dispersión, descritas en el apartado 2.6.1. La diferencia entre ambas reside en las variables de estado empleadas. La expresión de la matriz de transferencia que se va a obtener experimentalmente es

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ V_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_b \\ V_b \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

donde  $P$  y  $V$  corresponden a la presión y flujo másico respectivamente y  $a$  y  $b$  a las secciones de entrada y salida. A partir de las componentes de dicha matriz, el  $TL$  para un sistema en el que los conductos de entrada y salida son iguales viene dado por

$$TL = 20 \log \left| \frac{1}{2} \left( A + \frac{B}{Y} + YC + D \right) \right| \quad (4.10)$$

donde  $Y$  es la impedancia característica del conducto; en caso de medio viscoso y móvil se calcula a partir de la expresión dada en (2.91).

La otra representación matricial con la que se ha trabajado es la matriz de dispersión. En este caso las variables de estado corresponden a las componentes progresiva y regresiva de la presión, representadas en la Figura 4.3.

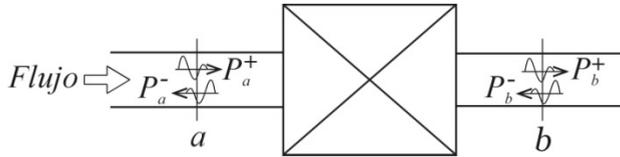


Figura 4.3. Componentes progresiva y regresiva de presión.

Su definición y el  $TL$  a partir de sus componentes son [13]

$$\begin{Bmatrix} P_a^- \\ P_b^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ SM_{21} & SM_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_a^+ \\ P_b^- \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

$$TL = -20 \log |SM_{21}| \quad (4.12)$$

Existe una relación unívoca entre ambas representaciones, ya que tanto la presión como el flujo másico pueden obtenerse a partir de componentes progresiva y regresiva de la presión como se expresa en las ecuaciones (2.88) y (2.90).

La obtención experimental de cada representación matricial requiere un procesado de señal distinto, tal y como se describe detalladamente en el apartado 4.4.3. En cualquier caso la medida de cada pareja de micrófonos permite obtener las variables de estado en una sección ( $a$  y  $b$ ). Al sustituir los valores experimentales en (4.9) o en (4.11) se consigue un sistema de dos ecuaciones y cuatro incógnitas que corresponden a los polos de la matriz. Si se repite el procedimiento con otro ensayo distinto se completa el número de ecuaciones necesario para que el sistema sea resoluble. De esta forma se evita la necesidad de colocar una terminación anecoica en el extremo final del conducto. En esta Tesis se ha desarrollado una metodología para conseguir en un mismo banco experimental los resultados de dos ensayos distintos. Los detalles se encuentran descritos a continuación.

### 4.4.3. Método de las dos fuentes

La técnica desarrollada toma como punto de partida el método de las dos fuentes desarrollada por Munjal y Doige [107]. El banco de ensayos requiere un sistema de generación de flujo, dos fuentes acústicas y dos parejas de micrófonos, una situada aguas arriba del silenciador (lado de la soplante) y la otra aguas abajo. El esquema del montaje está representado en la Figura 4.4.

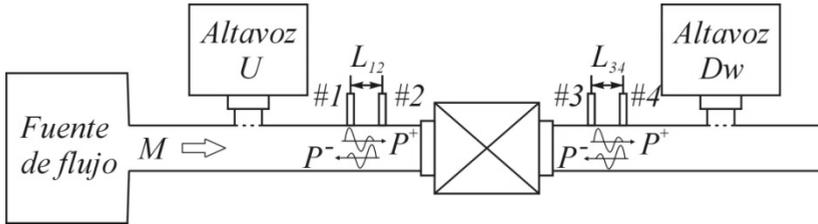


Figura 4.4. Banco de ensayos del método de las dos fuentes.

En el método de Munjal y Doige [107] los dos ensayos independientes se consiguen haciendo funcionar cada una de las fuentes de forma aislada. Así, en un primer ensayo se emplea únicamente la fuente acústica colocada aguas arriba del silenciador (ensayo *U*) y en el otro ensayo exclusivamente la fuente aguas abajo (ensayo *Dw*), como expresa la Figura 4.5.

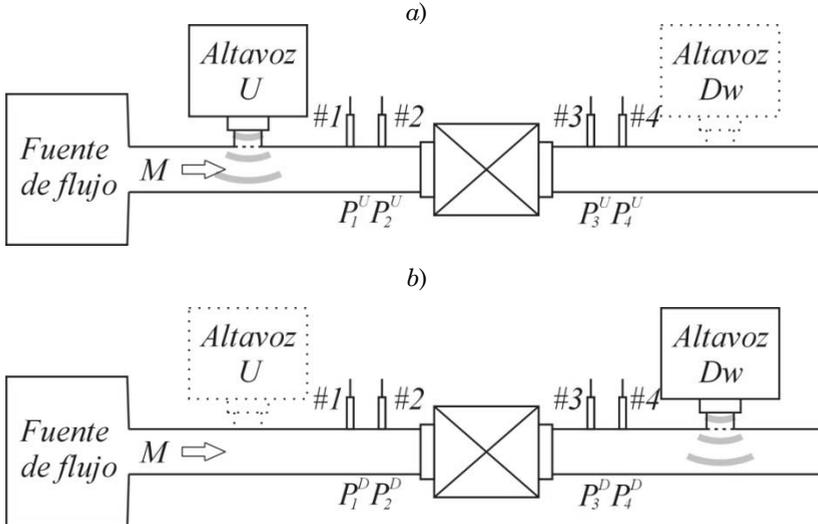


Figura 4.5. Configuraciones del banco de ensayos para el método de las dos fuentes:  
a) Ensayo aguas arriba; b) Ensayo aguas abajo.

La técnica consiste en medir las presiones acústicas con las dos parejas de micrófonos en el ensayo aguas arriba y en el ensayo aguas abajo y a partir de

ellas obtener las variables de estado implicadas en la representación matricial del comportamiento acústico del silenciador. En esta Tesis se ha trabajado con dos metodologías: la primera, desarrollada por Munjal y Doige [107], proporciona los términos de la matriz de transferencia dada en (4.9) y la segunda, propuesta por Ábom [13], permite obtener la matriz de dispersión correspondiente a la expresión (4.11). Los detalles específicos para la obtención de estos términos se analizan a continuación. Las presiones correspondientes a los dos ensayos se identifican en adelante como  $P_i^U$  y  $P_i^{Dw}$ .

#### 4.4.3.1. Obtención de la matriz de transferencia

En este apartado se describe el tratamiento matemático implementado que permite obtener los términos de la matriz de transferencia según el método desarrollado por Munjal [107].

La relación de las variables de estado entre las secciones 1 y 4 de la Figura 4.5 en el ensayo  $U$ , haciendo uso de su matriz de transferencia (4.9) resulta

$$\begin{Bmatrix} P_1^U \\ V_1^U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{14} & B_{14} \\ C_{14} & D_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4^U \\ V_4^U \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

El sistema completo, entre las secciones 1 y 4, puede dividirse en tres subsistemas 1-2, 2-3 y 3-4 que están representados en la Figura 4.6 con un cuadro rojo de trazo discontinuo. La matriz de transferencia global puede obtenerse a partir de las matrices de transferencia correspondientes a dichos subsistemas.

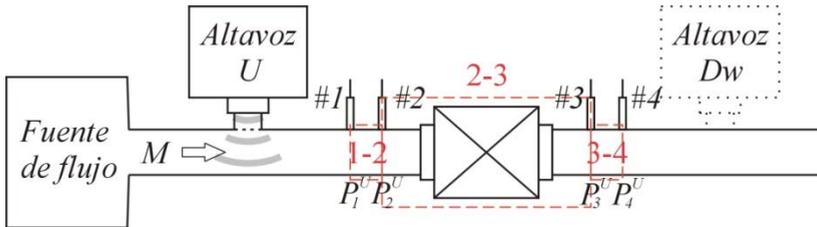


Figura 4.6. Método de las dos fuentes, ensayo aguas arriba. Subsistemas entre las secciones 1 y 4.

En el tramo 1-2 puede escribirse

$$\begin{Bmatrix} P_1^U \\ V_1^U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ C_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2^U \\ V_2^U \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

En el tramo central 2-3 correspondiente al sistema en estudio, la matriz de transferencia es igual a

$$\begin{Bmatrix} P_2^U \\ V_2^U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3^U \\ V_3^U \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

En el tramo final 3-4 la relación de variables de estado se expresa

$$\begin{Bmatrix} P_3^U \\ V_3^U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{34} & B_{34} \\ C_{34} & D_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4^U \\ V_4^U \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

De modo que la expresión dada en (4.13) puede obtenerse haciendo uso de las relaciones (4.14)-(4.16) como sigue

$$\begin{Bmatrix} P_1^U \\ V_1^U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ C_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{34} & B_{34} \\ C_{34} & D_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4^U \\ V_4^U \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Las matrices de subíndices 12 y 34 corresponden a los tramos entre los micrófonos 1-2 y 3-4 respectivamente. Se trata de conductos de sección constante de longitud  $L_{12}$  y  $L_{34}$  respectivamente (Figura 4.4) en los que la onda acústica presenta un frente plano. Su expresión se encuentra desarrollada en el apartado 2.6.2. Para un conducto de sección circular con fluido viscoso en presencia de flujo medio resulta [106]

$$\begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} = e^{-k_c M L_{ij}} \begin{bmatrix} \cosh(k_c L_{ij}) & Y \sinh(k_c L_{ij}) \\ \frac{1}{Y} \sinh(k_c L_{ij}) & \cosh(k_c L_{ij}) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

donde el número de onda  $k_c$  y la impedancia del conducto  $Y$  están definidas en (2.87) y (2.91) respectivamente. De (4.16) se obtiene

$$P_3^U = A_{34} P_4^U + B_{34} V_4^U \quad (4.19)$$

Se define la impedancia de la carga del ensayo  $U$ ,  $Z_U$ , que permite expresar la velocidad en función de la presión como sigue

$$V_4^U = \frac{P_4^U}{Z_U} \quad (4.20)$$

y combinándola con (4.19) da lugar a

$$P_3^U / P_4^U = A_{34} + B_{34} / Z_U \quad (4.21)$$

o, de forma alternativa

$$Z_U = \frac{B_{34}}{P_3^U / P_4^U - A_{34}} \quad (4.22)$$

Del mismo modo la relación entre la presión del micrófono 2 y 4 en función de las componentes de la matriz de transferencia queda

$$\begin{aligned} \frac{P_2^U}{P_4^U} &= A A_{34} + B C_{34} + \frac{A B_{34} + B D_{34}}{Z_U} \\ &= A \left( A_{34} + \frac{B_{34}}{Z_U} \right) + B \left( C_{34} + \frac{D_{34}}{Z_U} \right) = A \left( \frac{P_3^U}{P_4^U} \right) + B \left( C_{34} + \frac{D_{34}}{Z_U} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ahora entre el micrófono 1 y 4

$$\begin{aligned} \frac{P_1^U}{P_4^U} &= A_{12} (A A_{34} + B C_{34}) + B_{12} (C A_{34} + D C_{34}) \\ &\quad + \frac{A_{12} (A B_{34} + B D_{34}) + B_{12} (C B_{34} + D D_{34})}{Z_U} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Combinando (4.24) con las expresiones (4.21) y (4.23), se obtiene

$$\frac{P_1^U}{P_4^U} = A_{12} \left( \frac{P_2^U}{P_4^U} \right) + B_{12} \left( C \frac{P_3^U}{P_4^U} + D \left( C_{34} + \frac{D_{34}}{Z_U} \right) \right) \quad (4.25)$$

Antes de buscar las mismas relaciones en el ensayo  $D_w$ , hay que tener en cuenta que el sentido en que viaja la onda acústica es opuesto al flujo y por tanto, las relaciones (4.14)-(4.16) se transforman en,

$$\begin{Bmatrix} P_{i+1}^{D_w} \\ -V_{i+1}^{D_w} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i^{D_w} \\ -V_i^{D_w} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

donde  $\Delta = AB - CD$  es el determinante de la matriz de transferencia. Teniendo en cuenta este cambio en las matrices correspondientes al ensayo aguas abajo, y procediendo desde la fuente hasta la carga, con una impedancia asociada  $Z_{D_w}$ , de forma análoga para el ensayo  $D_w$  se tiene

$$\begin{Bmatrix} P_4^{D_w} \\ V_4^{D_w} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta_{34}} \begin{bmatrix} D_{34} & B_{34} \\ C_{34} & A_{34} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta_{12}} \begin{bmatrix} D_{12} & B_{12} \\ C_{12} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{D_w} \\ P_1^{D_w}/Z_{D_w} \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

donde  $Z_{D_w}$  es igual a

$$Z_{D_w} = \frac{B_{12}}{\Delta_{12} (P_2^{D_w}/P_1^{D_w}) - D_{12}} \quad (4.28)$$

Siguiendo un procedimiento similar al del ensayo  $U$  se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{P_2^{Dw}}{P_1^{Dw}} = \frac{1}{\Delta_{12}} \left( D_{12} + \frac{B_{12}}{Z_{Dw}} \right) \quad (4.29)$$

$$\frac{P_3^{Dw}}{P_1^{Dw}} = \frac{1}{\Delta \Delta_{12}} \left( D D_{12} + B C_{12} + \frac{D B_{12} + B A_{12}}{Z_D} \right) = \frac{1}{\Delta} \left( D \frac{P_2^{Dw}}{P_1^{Dw}} + \frac{B}{\Delta_{12}} \left( C_{12} \frac{A_{12}}{Z_{Dw}} \right) \right) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_4^{Dw}}{P_1^{Dw}} = \frac{1}{\Delta \Delta_{12} \Delta_{34}} & \left( D_{34} (D D_{12} + B C_{12}) + B_{34} (C D_{12} + A C_{12}) \right. \\ & \left. + \frac{D_{34} (D B_{12} + B A_{12}) + B_{34} (C B_{12} + A A_{12})}{Z_{Dw}} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (4.29)-(4.31) queda

$$\frac{P_4^{Dw}}{P_1^{Dw}} = \frac{1}{\Delta_{34}} \left( D_{34} \frac{P_3^{Dw}}{P_1^{Dw}} + \frac{B_{34}}{\Delta} \left( C \frac{P_2^{Dw}}{P_1^{Dw}} + \frac{A}{\Delta_{12}} \left( C_{12} + \frac{A_{12}}{Z_D} \right) \right) \right) \quad (4.32)$$

Las ecuaciones (4.23), (4.25), (4.30) y (4.32) forman un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ). Las matrices de transferencia entre los micrófonos 1-2 (con subíndices 12) y 3-4 (con subíndices 34) corresponden a un conducto de sección circular constante de dimensiones conocidas, vienen dados por la expresión (4.18).

El determinante de la matriz de transferencia del silenciador puede escribirse de forma explícita como  $\Delta = AB - CD$ . Si además se emplean las expresiones (4.22) y (4.28) para la impedancia de carga de ambos ensayos y se define la función de transferencia entre dos micrófonos cualesquiera como

$$H_{ij}^U = P_i^U / P_j^U ; H_{ij}^{Dw} = P_i^{Dw} / P_j^{Dw} \quad (4.33)$$

las ecuaciones que forman el sistema pueden reescribirse como sigue

$$H_{34}^U A + B \left( C_{34} + \frac{D_{34} (H_{34}^U - A_{34})}{B_{34}} \right) = H_{24}^U \quad (4.34)$$

$$\frac{(H_{14}^U - H_{24}^U A_{12})}{B_{12}} = H_{34}^U C + D \left( C_{34} + \frac{D_{34} (H_{34}^U - A_{34})}{B_{34}} \right) \quad (4.35)$$

$$\Delta \Delta_{12} H_{31}^{Dw} = B \left( C_{12} + \frac{A_{12} (\Delta_{12} H_{21}^{Dw} - D_{12})}{B_{12}} \right) + \Delta_{12} H_{21}^{Dw} D \quad (4.36)$$

$$\frac{\Delta\Delta_{12}}{B_{34}}(\Delta_{34}H_{41}^{Dw} - H_{31}^{Dw}D_{34}) = A \left( C_{12} + \frac{A_{12}(\Delta_{12}H_{21}^{Dw} - D_{12})}{B_{12}} \right) + \Delta_{12}H_{21}^{Dw}C \quad (4.37)$$

El resultado del anterior sistema de ecuaciones es [107]

$$A = \frac{\Delta_{34}(H_{23}^U H_{43}^{Dw} - H_{43}^U H_{23}^{Dw}) + D_{34}(H_{23}^{Dw} - H_{23}^U)}{\Delta_{34}(H_{43}^{Dw} - H_{43}^U)} \quad (4.38)$$

$$B = \frac{B_{34}(H_{23}^U - H_{23}^{Dw})}{\Delta_{34}(H_{43}^{Dw} - H_{43}^U)} \quad (4.39)$$

$$C = \frac{(H_{13}^U - H_{23}^U A_{12})(\Delta_{34}H_{43}^{Dw} - D_{34}) - (H_{13}^{Dw} - H_{23}^{Dw} A_{12})(\Delta_{34}H_{43}^U - D_{34})}{\Delta_{34}B_{12}(H_{43}^{Dw} - H_{43}^U)} \quad (4.40)$$

$$D = \frac{B_{34}((H_{13}^U - H_{13}^{Dw}) + A_{12}(H_{23}^{Dw} - H_{23}^U))}{\Delta_{34}B_{12}(H_{43}^{Dw} - H_{43}^U)} \quad (4.41)$$

donde el determinante  $\Delta$  viene dado por la expresión

$$\Delta = \frac{B_{34}(H_{13}^U H_{23}^{Dw} - H_{23}^U H_{13}^{Dw})}{\Delta_{34}B_{12}(H_{43}^{Dw} - H_{43}^U)} \quad (4.42)$$

El  $TL$  se obtiene haciendo uso de la expresión dada en (4.10).

#### 4.4.3.2. Obtención de la matriz de dispersión

Este apartado contiene el desarrollo matemático que proporciona las expresiones implementadas que permiten obtener los términos de la matriz de dispersión, según el método publicado por Åbom en la referencia [13].

Teniendo en cuenta las componentes progresiva y regresiva representadas en la Figura 4.3, la matriz de dispersión para el elemento analizado puede escribirse como

$$\begin{Bmatrix} P_a^- \\ P_b^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ SM_{21} & SM_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_a^+ \\ P_b^- \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Los dos ensayos distintos  $U$  y  $Dw$  que, como se dijo en 4.4.2, son necesarios llevar a cabo permiten plantear el siguiente sistema de ecuaciones expresado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} P_a^{-U} & P_a^{-Dw} \\ P_b^{+U} & P_b^{+Dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ SM_{21} & SM_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_a^{+U} & P_a^{+Dw} \\ P_b^{-U} & P_b^{-Dw} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

La relación dada en la ecuación (4.44) puede expresarse a través de funciones de transferencia. La transformación consiste en dividir las componentes de presión acústica de cada ensayo entre una señal de referencia  $r$ . De esta forma dicha ecuación queda

$$\begin{bmatrix} H_{a^-r}^U & H_{a^-r}^{Dw} \\ H_{b^+r}^U & H_{b^+r}^{Dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ SM_{21} & SM_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{a^+r}^U & H_{a^+r}^{Dw} \\ H_{b^-r}^U & H_{b^-r}^{Dw} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

o bien escrito de otro modo

$$[H_x] = \begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ SM_{21} & SM_{11} \end{bmatrix} [H_y] \quad (4.46)$$

Las funciones de transferencia que aparecen en las matrices anteriores se definen como en (4.33). Si la matriz  $[H_x]$  tiene inversa, la matriz de dispersión será igual a

$$\begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ SM_{21} & SM_{11} \end{bmatrix} = [H_y][H_x]^{-1} \quad (4.47)$$

Expresando la relación anterior en función de las funciones de transferencia queda

$$SM_{11} = (H_{a^-r}^U H_{b^-r}^{Dw} - H_{a^-r}^{Dw} H_{b^-r}^U) / \det[H_x] \quad (4.48)$$

$$SM_{12} = (H_{a^-r}^{Dw} H_{a^+r}^U - H_{a^-r}^U H_{a^+r}^{Dw}) / \det[H_x] \quad (4.49)$$

$$SM_{21} = (H_{b^+r}^U H_{b^-r}^{Dw} - H_{b^+r}^{Dw} H_{b^-r}^U) / \det[H_x] \quad (4.50)$$

$$SM_{22} = (H_{b^+r}^{Dw} H_{a^+r}^U - H_{b^+r}^U H_{a^+r}^{Dw}) / \det[H_x] \quad (4.51)$$

La relación entre la presión de los micrófonos  $i$  y  $j$  y las componentes progresiva y regresiva de las ondas de presión en un conducto de sección circular y pared rígida, partiendo de la expresión (2.74), es [13, 106]

$$P^+ = \frac{P_i e^{\beta^- s} - P_j}{e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}} \quad (4.52)$$

$$P^- = \frac{-P_i e^{-\beta^+ s} + P_j}{e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}} \quad (4.53)$$

donde  $P_i$  y  $P_j$  corresponden a la amplitud de la presión acústica, dominio frecuencia, en la posición de los micrófonos  $i$  y  $j$  respectivamente,  $s$  a la separación entre los micrófonos y  $\beta^\pm$  al número de onda de las componentes progresiva y regresiva. Para un fluido real en presencia de flujo medio, que tiene en cuenta el rozamiento viscotérmico  $\alpha_0$  y turbulento  $\xi M$ , su definición está dada en (2.73)

$$\beta^\pm = \frac{\alpha + jk}{1 \pm M} \quad (4.54)$$

Si los conductos de entrada y salida son de distinto diámetro, los números de onda aguas arriba y abajo no serán iguales. En presencia de flujo medio, la presión registrada en los micrófonos, será la suma de la parte acústica, más la asociada al ruido de flujo. Si se escoge adecuadamente una señal de referencia, puede reducirse el efecto del flujo. En esta técnica, los autores proponen como señal de referencia la correspondiente a la onda que incide al elemento acústico, por el lado de la fuente. De este modo, en el ensayo  $U$  la onda de referencia será  $a^+$  y en el ensayo  $Dw$  será  $b^-$ .

Partiendo de que  $H_{a^+a^+}^U = H_{b^-b^-}^{Dw} = 1$ , las matrices  $[H_x]$ ,  $[H_y]$  quedarán

$$[H_x] = \begin{bmatrix} 1 & H_{a^+b^-}^{Dw} \\ H_{b^-a^+}^U & 1 \end{bmatrix}; [H_y] = \begin{bmatrix} H_{a^-a^+}^U & H_{a^-b^-}^{Dw} \\ H_{b^+a^+}^U & H_{b^+b^-}^{Dw} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Y las expresiones dadas en (4.48) - (4.51) quedarían como sigue

$$SM_{11} = \left( H_{a^-a^+}^U - H_{a^-b^-}^{Dw} H_{b^-a^+}^U \right) / \det[H_x] \quad (4.56)$$

$$SM_{12} = \left( H_{a^-b^-}^{Dw} - H_{a^-a^+}^U H_{a^+b^-}^{Dw} \right) / \det[H_x] \quad (4.57)$$

$$SM_{21} = \left( H_{b^+a^+}^U - H_{b^+b^-}^{Dw} H_{b^-a^+}^U \right) / \det[H_x] \quad (4.58)$$

$$SM_{22} = \left( H_{b^+b^-}^{Dw} - H_{b^+a^+}^U H_{a^+b^-}^{Dw} \right) / \det[H_x] \quad (4.59)$$

Todas las funciones de transferencia que encontramos en estas últimas expresiones se determinan a partir de las magnitudes medidas en el ensayo teniendo en cuenta el siguiente desarrollo. En primer lugar, la función de transferencia entre dos señales puede determinarse a partir del autoespectro y del espectro cruzado de la siguiente forma [110]

$$H_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_{yy}} \quad (4.60)$$

Por otro lado, al particularizar las definiciones dadas en (4.52) y (4.53) para el conducto de entrada (micrófonos 1 y 2) y el de salida (micrófonos 3 y 4) queda

$$P_a^+ = \frac{P_1 e^{\beta_a^- s_{12}} - P_2}{e^{\beta_a^- s_{12}} - e^{-\beta_a^+ s_{12}}} \quad (4.61)$$

$$P_a^- = \frac{-P_1 e^{-\beta_a^+ s_{12}} + P_2}{e^{\beta_a^- s_{12}} - e^{-\beta_a^+ s_{12}}} \quad (4.62)$$

$$P_b^+ = \frac{P_3 e^{\beta_b^- s_{34}} - P_4}{e^{\beta_b^- s_{34}} - e^{-\beta_b^+ s_{34}}} \quad (4.63)$$

$$P_b^- = \frac{-P_3 e^{-\beta_b^+ s_{34}} + P_4}{e^{\beta_b^- s_{34}} - e^{-\beta_b^+ s_{34}}} \quad (4.64)$$

Las funciones de transferencia implicadas en las expresiones (4.56) - (4.59) según la expresión dada en (4.60) quedan de la siguiente forma

$$H_{a^- a^+}^U = S_{a^- a^+}^U / S_{a^+ a^+}^U \quad (4.65)$$

$$H_{b^+ a^+}^U = S_{b^+ a^+}^U / S_{a^+ a^+}^U \quad (4.66)$$

$$H_{b^- a^+}^U = S_{b^- a^+}^U / S_{a^+ a^+}^U \quad (4.67)$$

$$H_{a^+ b^-}^{Dw} = S_{a^+ b^-}^{Dw} / S_{b^- b^-}^{Dw} \quad (4.68)$$

$$H_{a^- b^-}^{Dw} = S_{a^- b^-}^{Dw} / S_{b^- b^-}^{Dw} \quad (4.69)$$

$$H_{b^+ b^-}^{Dw} = S_{b^+ b^-}^{Dw} / S_{b^- b^-}^{Dw} \quad (4.70)$$

Los espectros presentes en las ecuaciones (4.65) - (4.70) pueden obtenerse a partir de los espectros de las magnitudes registradas por los micrófonos. Teniendo en cuenta (4.61) - (4.64) quedarán

$$S_{a^- a^+}^U = \frac{-S_{11}^U e^{(-\beta_a^+ + \beta_a^{+*}) s_{12}} + S_{12}^U e^{-\beta_a^+ s_{12}} + S_{21}^U e^{\beta_a^- s_{12}} - S_{22}^U}{|e^{\beta_a^- s_{12}} - e^{-\beta_a^+ s_{12}}|^2} \quad (4.71)$$

$$S_{a^+a^+}^U = \frac{S_{11}^U e^{(\beta_a^- + \beta_a^+) s_{12}} - S_{12}^U e^{\beta_a^- s_{12}} - S_{21}^U e^{-\beta_a^+ s_{12}} + S_{22}^U}{\left| e^{\beta_a^- s_{12}} - e^{-\beta_a^+ s_{12}} \right|^2} \quad (4.72)$$

$$S_{b^+a^+}^U = \frac{S_{31}^U e^{\beta_b^- s_{34} + \beta_a^+ s_{12}} - S_{32}^U e^{\beta_b^- s_{34}} - S_{41}^U e^{\beta_a^+ s_{12}} + S_{42}^U}{\left( e^{\beta_b^- s_{34}} - e^{-\beta_b^+ s_{34}} \right) \left( e^{\beta_a^- s_{12}} - e^{-\beta_a^+ s_{12}} \right)^*} \quad (4.73)$$

$$S_{b^-a^+}^U = \frac{-S_{31}^U e^{-\beta_b^+ s_{34} + \beta_a^+ s_{12}} + S_{32}^U e^{-\beta_b^+ s_{34}} + S_{41}^U e^{\beta_a^+ s_{12}} - S_{42}^U}{\left( e^{\beta_b^- s_{34}} - e^{-\beta_b^+ s_{34}} \right) \left( e^{\beta_a^- s_{12}} - e^{-\beta_a^+ s_{12}} \right)^*} \quad (4.74)$$

$$S_{a^+b^-}^{Dw} = \frac{-S_{13}^{Dw} e^{\beta_a^- s_{12} - \beta_b^+ s_{34}} + S_{14}^{Dw} e^{\beta_a^- s_{12}} + S_{23}^{Dw} e^{-\beta_b^+ s_{34}} - S_{24}^{Dw}}{\left( e^{\beta_a^- s_{12}} - e^{-\beta_a^+ s_{12}} \right) \left( e^{\beta_b^- s_{34}} - e^{-\beta_b^+ s_{34}} \right)^*} \quad (4.75)$$

$$S_{b^-b^-}^{Dw} = \frac{S_{33}^{Dw} e^{-(\beta_b^- + \beta_b^+) s_{34}} - S_{34}^{Dw} e^{-\beta_b^+ s_{34}} - S_{43}^{Dw} e^{-\beta_b^+ s_{34}} + S_{44}^{Dw}}{\left| e^{\beta_b^- s_{34}} - e^{-\beta_b^+ s_{34}} \right|^2} \quad (4.76)$$

$$S_{a^-b^-}^{Dw} = \frac{S_{13}^{Dw} e^{-\beta_a^+ s_{12} - \beta_b^+ s_{34}} - S_{14}^{Dw} e^{-\beta_a^+ s_{12}} - S_{23}^{Dw} e^{-\beta_b^+ s_{34}} + S_{24}^{Dw}}{\left( e^{\beta_a^- s_{12}} - e^{-\beta_a^+ s_{12}} \right) \left( e^{\beta_b^- s_{34}} - e^{-\beta_b^+ s_{34}} \right)^*} \quad (4.77)$$

$$S_{b^+b^-}^{Dw} = \frac{-S_{33}^{Dw} e^{(\beta_b^- - \beta_b^+) s_{34}} + S_{34}^{Dw} e^{\beta_b^- s_{34}} + S_{43}^{Dw} e^{-\beta_b^+ s_{34}} - S_{44}^{Dw}}{\left| e^{\beta_b^- s_{34}} - e^{-\beta_b^+ s_{34}} \right|^2} \quad (4.78)$$

donde el superíndice \* expresa el complejo conjugado.

Se pueden hacer algunas simplificaciones de las anteriores expresiones teniendo en cuenta que en el montaje experimental desarrollado para esta Tesis, los conductos de entrada y salida tienen la misma sección y también que la separación de los micrófonos aguas arriba y abajo resulta la misma. Estas coincidencias se traducen en las siguientes igualdades,

$$\left. \begin{aligned} \beta_a^+ &= \beta_b^+ = \beta^+ \\ \beta_a^- &= \beta_b^- = \beta^- \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

$$s_{12} = s_{34} = s \quad (4.80)$$

Reescribiendo el conjunto de ecuaciones (4.71) - (4.78)

$$S_{a^-a^+}^U = \frac{-S_{11}^U e^{(-\beta^+ + \beta^-)s} + S_{12}^U e^{-\beta^+ s} + S_{21}^U e^{\beta^- s} - S_{22}^U}{|e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}|^2} \quad (4.81)$$

$$S_{a^+a^+}^U = \frac{S_{11}^U e^{(\beta^- + \beta^+)s} - S_{12}^U e^{\beta^- s} - S_{21}^U e^{-\beta^+ s} + S_{22}^U}{|e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}|^2} \quad (4.82)$$

$$S_{b^+a^+}^U = \frac{S_{31}^U e^{(\beta^- + \beta^+)s} - S_{32}^U e^{\beta^- s} - S_{41}^U e^{\beta^+ s} + S_{42}^U}{|e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}|^2} \quad (4.83)$$

$$S_{b^-a^+}^U = \frac{-S_{31}^U e^{(-\beta^+ + \beta^-)s} + S_{32}^U e^{-\beta^+ s} + S_{41}^U e^{\beta^- s} - S_{42}^U}{|e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}|^2} \quad (4.84)$$

$$S_{a^+b^-}^{Dw} = \frac{-S_{13}^{Dw} e^{(\beta^- - \beta^+)s} + S_{14}^{Dw} e^{\beta^- s} + S_{23}^{Dw} e^{-\beta^+ s} - S_{24}^{Dw}}{|e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}|^2} \quad (4.85)$$

$$S_{b^-b^-}^{Dw} = \frac{S_{33}^{Dw} e^{-(\beta^+ + \beta^+)s} - S_{34}^{Dw} e^{-\beta^+ s} - S_{43}^{Dw} e^{-\beta^+ s} + S_{44}^{Dw}}{|e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}|^2} \quad (4.86)$$

$$S_{a^-b^-}^{Dw} = \frac{S_{13}^{Dw} e^{-(\beta^+ + \beta^+)s} - S_{14}^{Dw} e^{-\beta^+ s} - S_{23}^{Dw} e^{-\beta^+ s} + S_{24}^{Dw}}{|e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}|^2} \quad (4.87)$$

$$S_{b^+b^-}^{Dw} = \frac{-S_{33}^{Dw} e^{(\beta^- - \beta^+)s} + S_{34}^{Dw} e^{\beta^- s} + S_{43}^{Dw} e^{-\beta^+ s} - S_{44}^{Dw}}{|e^{\beta^- s} - e^{-\beta^+ s}|^2} \quad (4.88)$$

El  $TL$  se obtendrá haciendo uso de la expresión dada en (4.12). El elemento  $SM_{21}$  de la matriz de dispersión se calcula haciendo uso de la expresión (4.57). Las funciones de transferencia presentes en su definición están expresadas en las ecuaciones (4.65), (4.68) y (4.69) y la definición de sus términos a partir de magnitudes medidas en los ensayos viene dada en las expresiones (4.81) - (4.88).

#### 4.4.4. Estimación de espectros

Otro aspecto que se ha abordado en esta Tesis en el diseño del proceso de medida es el tratamiento de las señales registradas en el banco de ensayos, que incluye la selección de la frecuencia de muestreo, el tamaño de bloque, el tipo de ventana, la estimación de espectros y la obtención de las funciones de transferencia presentes en la formulación.

La frecuencia de muestreo empleada es de 10240 Hz. El número de puntos del bloque empleado para el cálculo de la transformada de Fourier  $N$ , ha sido en todos los casos potencia de 2, normalmente 1024 y 2048.

El paso del dominio temporal al dominio en frecuencia se ha llevado a cabo mediante la transformada rápida de Fourier  $FFT$ . Este algoritmo, habitualmente empleado, permite obtener la transformada discreta de Fourier  $DFT$  de forma computacionalmente más eficaz ya que en lugar de calcularla con la serie temporal discreta del bloque de datos entero lo hace con secuencias más cortas que después combina para obtener la  $DFT$  de la serie completa [110]. Para evitar problemas de *leakage* asociados a la obtención de la transformada de Fourier de señales no periódicas, se ha aplicado una ventana Hanning a la señal temporal.

Las funciones de transferencia definidas según la ecuación (4.33), que aparecen en la formulación del  $TL$  dada en los apartados 4.4.3.1 y 4.4.3.2, se han obtenido a partir de las densidades espectrales de potencia según la expresión dada en (4.60). Respecto a la obtención de estas últimas, se ha hecho uso de una estimación habitualmente empleada en el tratamiento de señal [13, 78, 110]

$$S_{xy} = \overline{XY^*} \quad (4.89)$$

donde  $X$  e  $Y$  representan la transformada de Fourier de sus correspondientes señales temporales, el superíndice  $*$  denota el complejo conjugado y  $\overline{\quad}$  el promediado realizado sobre los datos registrados. Por supuesto las señales temporales deben estar sincronizadas.

### 4.5. Sistema experimental

El esquema del banco de ensayos desarrollado se muestra en la Figura 4.7,

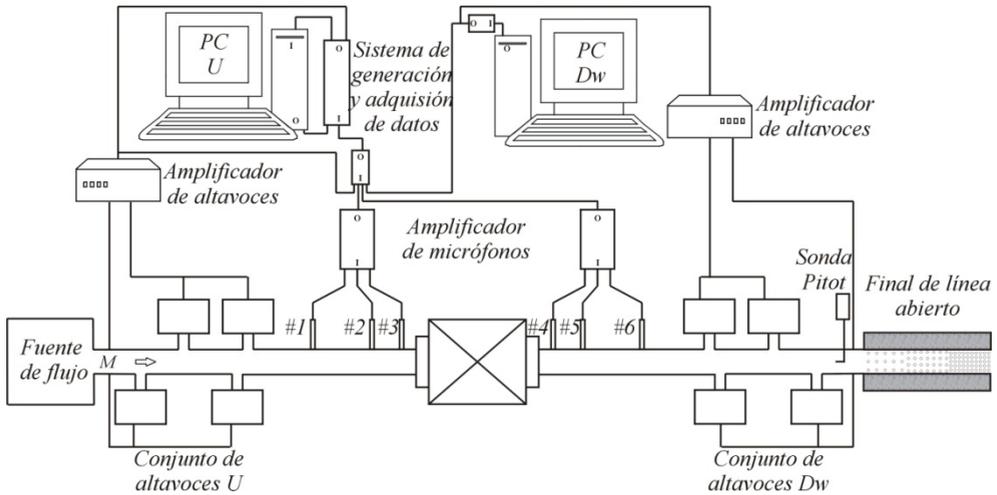


Figura 4.7. Esquema del banco de ensayos para excitación simultánea y flujo medio.

En la cabeza de la línea se encuentra el grupo soplante PG-30 capaz de suministrar un caudal máximo de aire de  $10.376 \text{ m}^3/\text{min}$ , con una diferencia de presión  $\Delta p$  de 300 mbar. A continuación se ha insertado en la línea un silenciador que tiene como objetivo eliminar el ruido provocado en la generación del flujo. El silenciador consiste en un cajón de madera conglomerada de 0.01 m de espesor de medidas  $0.56 \times 0.57 \times 0.665 \text{ m}$ . El cajón está recubierto internamente con una capa de fibra de vidrio de 0.02 m de espesor. El conducto de entrada y salida están conectados en el centro de sendas caras opuestas y está relleno lana de roca como puede apreciarse en la Figura 4.8.



Figura 4.8. Detalles del montaje: a) Grupo soplante; b) Silenciador.

En el interior del cajón, el conducto se ha conformado con malla metálica con una porosidad muy elevada. A efectos de cálculo de su impedancia podría considerarse el 100%.

A continuación, a fin de reducir el ruido de flujo tras su paso por dos codos en ángulo recto, se ha instalado un silenciador disipativo de 1.5 m de longitud con sección transversal cuadrada de dimensiones  $0.2 \times 0.2 \text{ m}$ , forrado con espuma de

poliuretano y relleno con lana de roca. En el interior, el conducto tiene una porosidad creciente en el sentido  $U-Dw$  de 5% a 20% tal y como puede apreciarse en la Figura 4.9.



*Figura 4.9. Silenciador disipativo.*

Todos los conductos del sistema experimental son tubería de PVC de diámetro interior 0.0536 m (PVC-U DN63 PN16). La representación del sistema mediante su matriz de cuatro polos está basada en la propagación de un frente de onda plano en los conductos donde se hace la medida. Esto puede garantizarse siempre que la señal de excitación posea una frecuencia por debajo del primer modo de presión. Al tratarse de un sistema real se asume que la onda acústica generada por el altavoz puede no ser completamente plana o que existan discontinuidades geométricas en las conexiones de los tramos de conducto de modo que el primer modo excitado sea asimétrico. En presencia de flujo medio, asumiendo fluido ideal, la ecuación (2.252) se transforma en [77, 79, 106]

$$f_{c,1,0} = \frac{1.84 c_0}{\pi D} \sqrt{1 - M^2} \quad (4.90)$$

La frecuencia más alta a la que puede garantizarse onda plana con el conducto empleado suponiendo un flujo de  $M=0.2$ , y  $c_0 = 345$  m/s, es algo mayor que 3690 Hz, es decir por encima del límite de frecuencia que se va a analizar.

Las uniones entre los distintos tramos de tubería son roscadas y están dotadas de un anillo interno de silicona para evitar fugas de aire y amortiguar las posibles vibraciones mecánicas de la fuente de ruido (Figura 4.10)



*Figura 4.10. Anillo de silicona entre conductos.*

Tanto la generación de la señal en el lado  $U$  como la adquisición de las señales acústicas están programadas en *LabVIEW*<sup>2</sup>. La señal de excitación es digitalizada por un equipo Hewlett Packard E 1421 B VXI con capacidad para generar y adquirir de forma sincronizada. Este equipo alimenta una pareja de amplificadores ECLER APA 600 conectados a 4 altavoces que generan la señal acústica  $U$  en el sistema. La señal correspondiente al lado  $Dw$  es generada por otro ordenador dotado de una tarjeta de generación National Instruments 4451. Los amplificadores empleados en esta rama tienen las mismas características que los anteriores.

Con el fin de obtener una relación señal-ruido alta, se han instalado 8 altavoces, todos ellos Beyma 10MW/Nd de 250 mm de diámetro nominal y una potencia de 350 W AES. Para alojar los altavoces se han construido unas cajas con placas de aluminio de 0.02 m de espesor y dimensiones internas 0.306x0.306x0.15 m. En la cara anterior del altavoz se ha dispuesto una cámara de aire que permite la vibración de su membrana. En el tubo de salida del altavoz, se ha colocado una junta flexible de silicona, que absorbe las vibraciones mecánicas procedentes de éste (Figura 4.11 a). La conexión a la línea principal se ha ejecutado con una unión en T a 90° empleando una superficie perforada con un 50% de porosidad (Figura 4.11 b) siguiendo las conclusiones del trabajo [20].



Figura 4.11. Detalles del dispositivo experimental implementado: a) Caja de altavoz y junta flexible; b) Conexión a línea principal.

La adquisición de la señal se hace a través de dos parejas de micrófonos de presión Brüel & Kjør 4938 dotados de amplificador (Brüel & Kjør 2669) situados aguas arriba y abajo del silenciador. La colocación de los micrófonos se ha llevado a cabo siguiendo las recomendaciones encontradas en la bibliografía revisada. Radialmente se han montado enrasados a la cara interna del conducto principal de la línea [15, 39, 77], para evitar que su presencia en el

<sup>2</sup> © National Instruments Corporation

interior del conducto provoque la perturbación de la onda acústica y debido a la existencia de flujo medio aparezca ruido inducido por la corriente de aire que contamine directamente la señal registrada. Si por el contrario, la cara externa del micrófono queda en el interior de la pared del conducto, el hueco generado actuaría como un resonador de Helmholtz perturbando también las medidas. En presencia de flujo medio, los vórtices generados en la discontinuidad aumentarían aún más la contaminación de la señal acústica.

Los micrófonos más próximos al elemento a analizar se han situado suficientemente cerca como para poder despreciar, con un error aceptable, la disipación de energía por los efectos viscosos del medio o la interacción del campo de flujo con la onda acústica y a la vez alejados para garantizar la atenuación de los modos evanescentes generados en las discontinuidades geométricas del silenciador. Holland y Davies en la referencia [77] proponen como distancia óptima 3 veces el diámetro del conducto. En el montaje implementado la distancia  $l$  en la Figura 4.12 es aproximadamente 0.3 m, algo por encima de esta recomendación, pero en cualquier caso válida ya que garantiza que en los puntos de medida el frente de onda sea plano.

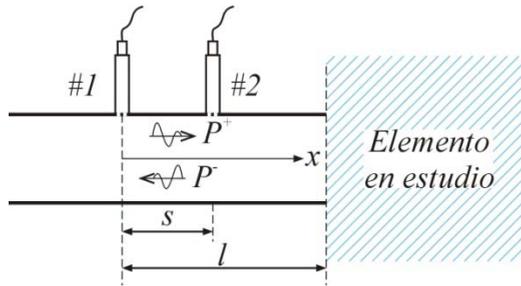


Figura 4.12. Distancia axial de los micrófonos.

Todas las variantes del método de descomposición de ondas más conocido como método de los dos micrófonos, están basadas en que la onda acústica confinada en un conducto presenta un frente de onda plano. Si se sitúa un sistema de referencia con origen en la posición del micrófono 1 en la Figura 4.12, la presión en los puntos de medida, considerando fluido ideal y ausencia de flujo medio, puede escribirse como

$$P_1 = P^+ + P^- \quad (4.91)$$

$$P_2 = P^+ e^{-jks} + P^- e^{jks} \quad (4.92)$$

Estas dos ecuaciones son linealmente dependientes si se da la igualdad  $ks = n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  es decir si la separación entre los micrófonos coincide con media longitud de onda. Por otro lado, teniendo en cuenta que el método se basa en la diferencia de medida entre dos micrófonos si la separación entre ambos es muy pequeña la diferencia de medida a frecuencias bajas es muy pequeña y puede

haber pérdida de precisión. En general en ausencia de flujo medio, se emplea una separación entre micrófonos inferior a media longitud de onda [32, 107] que cumpla los límites dados por la desigualdad  $0.1\pi < ks < 0.8\pi$ .

En presencia de flujo, estas distancias se corrigen. Åbom y Bodén hacen un análisis de los errores del método de los dos micrófonos en presencia de flujo [15], de tal manera que su recomendación es emplear una separación entre micrófonos que cumpla

$$0.1\pi(1 - M^2) < ks < 0.8\pi(1 - M^2) \quad (4.93)$$

La separación entre micrófonos empleada es de 0.045 m. En ausencia de flujo, suponiendo una velocidad del sonido de  $c_0 = 345$  m/s el rango de frecuencia de aplicación del método de los dos micrófonos es de 380 a 3060 Hz. El límite superior queda por debajo de la máxima frecuencia de interés. El factor 0.8 que aparece en la ecuación (4.93) introduce un margen de seguridad que disminuye el valor de las frecuencias más altas analizadas experimentalmente. La frecuencia que corresponde exactamente a media longitud de onda es 3820 Hz, muy por encima de los 3200 Hz que es la máxima frecuencia analizada. Con el objetivo de disminuir el límite inferior, se ha incorporado un tercer micrófono situado a una distancia mayor que se emplea en combinación con uno de los anteriores. Teniendo en cuenta las distancias mostradas en la Figura 4.13, el límite inferior de frecuencia empleando la pareja de micrófonos 1 y 2 desciende hasta 34 Hz y si se emplea 1 en combinación con 3, se reduce hasta 31 Hz. En las medidas llevadas a cabo se ha adaptado la combinación de micrófonos a las condiciones ambientales, esto es, temperatura y valor del número de Mach del ensayo.

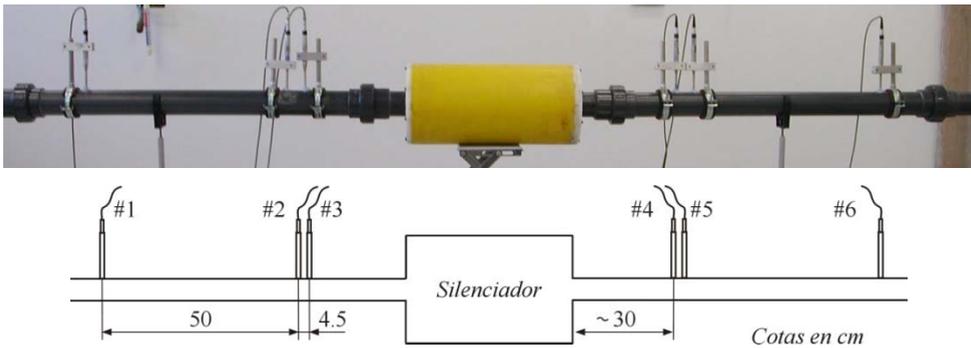


Figura 4.13. Posición axial de los micrófonos de presión en el montaje experimental.

La señal de los micrófonos antes de ser digitalizada se procesa en un acondicionador/amplificador NEXUS de Brüel & Kjær que está conectado al equipo Hewlett Packard E 1421 B VXI de generación/adquisición. El registro temporal de los micrófonos se transforma mediante *FFT* al espectro en

frecuencia y a partir de éstos se obtienen las densidades espectrales necesarias para el análisis.

Se ha implementado un dispositivo que permite llevar a cabo la calibración de los micrófonos según la metodología propuesta por Seybert y Ross [137]. El procedimiento consiste en obtener la función de transferencia entre cada micrófono y uno, elegido de forma arbitraria, que se toma de referencia. Los micrófonos se sitúan enrasados en un plano perpendicular al eje del conducto como puede verse en la Figura 4.14. El bloque con los micrófonos se sitúa al final de un tubo con longitud suficiente para que la onda de presión posea un frente plano, de este modo ante una excitación acústica todos los micrófonos deberían registrar la misma señal. A nivel práctico se encuentran pequeñas diferencias entre las señales de los micrófonos tanto en amplitud como en fase que pueden introducir errores en las medidas.



Figura 4.14. Montaje para la calibración de micrófonos.

El método de calibración consiste en obtener la función de transferencia entre cada micrófono y el de referencia a partir de las densidades espectrales promediadas de la siguiente forma

$$H_{xr} = \frac{S_{xr}}{S_{rr}} \quad (4.94)$$

donde los espectros  $S_{xr}$  y  $S_{rr}$  se estiman según la descripción dada en el apartado 4.4.4. La función de transferencia obtenida se puede emplear para corregir las densidades espectrales obtenidas a partir de los datos registrados en el ensayo de la siguiente forma

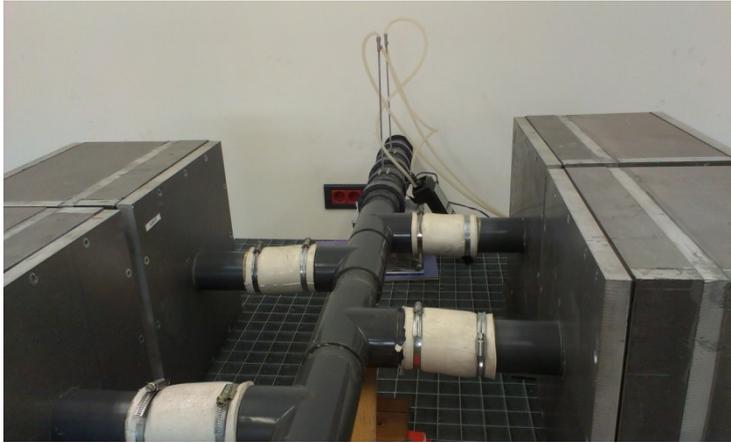
$$S_{xy} = \frac{S_{xy}^{nc}}{H_{xr} H_{yr}^*} \quad (4.95)$$

o si se trata del espectro cruzado del micrófono de referencia con cualquier otro

$$S_{xr} = \frac{S_{xr}^{nc}}{H_{xr}} \quad (4.96)$$

donde el superíndice  $nc$  se refiere a las magnitudes obtenidas de las medidas sin calibrar.

Aguas abajo del conjunto de altavoces  $Dw$ , se ha colocado la sonda Pitot empleada para obtener la medida de la velocidad de flujo. Con el fin de reducir el nivel de ruido en el laboratorio, el extremo final de la línea de medida se ha sacado al exterior del recinto. Ambos detalles pueden observarse en la Figura 4.15.



*Figura 4.15. Final de línea del banco de ensayos.*

El tramo final del conducto se ha perforado con porosidad creciente hacia el final y se ha rodeado de espuma de poliuretano para minimizar la influencia de posibles reflexiones acústicas. La Figura 4.16 muestra una imagen de la línea completa preparada para llevar a cabo ensayos empleando el método de las dos fuentes.



*Figura 4.16. Línea completa para aplicación del método de las dos fuentes.*

## 4.6. Resultados obtenidos con el método de las dos fuentes

En el apartado 4.4.3 se han descrito dos metodologías para la obtención de la caracterización del comportamiento acústico del silenciador a partir de las señales registradas por los micrófonos. Una de ellas emplea la matriz de transferencia y la otra la matriz de dispersión. La señal generada por el altavoz en principio puede ser de cualquier tipo, en esta Tesis se ha trabajado con barrido senoidal y con ruido blanco. A continuación se presentan los resultados obtenidos sin flujo medio para los dos tipos de señal. En el apartado 4.6.3 se hace una valoración de ambos.

### 4.6.1. Barrido senoidal

Una aportación interesante para el desarrollo de esta Tesis ha sido trabajar con una señal de excitación de frecuencia discreta y llevar a cabo un barrido en las frecuencias de interés, siguiendo las recomendaciones expuestas en el trabajo de Holland y Davies [77]. Este procedimiento mejora la relación señal ruido debido a que toda la energía acústica se concentra en la frecuencia excitada. Además, en cada instante, se puede aislar en el espectro registrado por los micrófonos la frecuencia de la señal de excitación y eliminar del promediado el resto de señal que ha sido generada exclusivamente por el ruido de flujo. Esta técnica es llamada, de aquí en adelante, promediado selectivo. Otra ventaja de trabajar con frecuencias discretas se encuentra en la posibilidad de aumentar el número de promedios o ajustar las ganancias tanto de los altavoces como de los micrófonos exclusivamente en aquellas frecuencias en las que los resultados no son aceptables.

La Figura 4.17 muestra el  $TL$  de una cámara de expansión simple de sección transversal circular de longitud 0.2 m y radio 0.0886 m. Los conductos de entrada y salida tienen radio 0.0268 m. Los resultados mostrados corresponden al caso sin flujo medio y una temperatura de 17°C. El ensayo se ha llevado a cabo mediante el método de las dos fuentes. En los dos ensayos necesarios en el método, se ha hecho un barrido en frecuencias de 10 a 3200 Hz con incrementos de 10 Hz. En cada frecuencia se han realizado 20 promedios. El  $TL$  mostrado se ha obtenido a partir de los cuatro polos de la matriz de transferencia según el procedimiento descrito en 4.4.3.1 y también a partir de los términos de la matriz de dispersión según se describe en 4.4.3.2. Los resultados experimentales muestran una gran concordancia entre sí y con los obtenidos mediante elementos finitos.

Al emplear una frecuencia de muestreo de 10240 Hz combinado con un tamaño de bloque de 1024 puntos, se consigue una resolución en frecuencia de 10 Hz y una duración de los bloques de 0.1 segundos. Al hacer 20 promedios en cada

frecuencia y analizar 320 frecuencias por ensayo, la duración total de la toma de datos en laboratorio ha sido de unos 20 minutos. Si se añade la parada entre frecuencias, estimada de 1 segundo, el tiempo total invertido en el ensayo sin flujo medio es de algo más de 30 minutos.

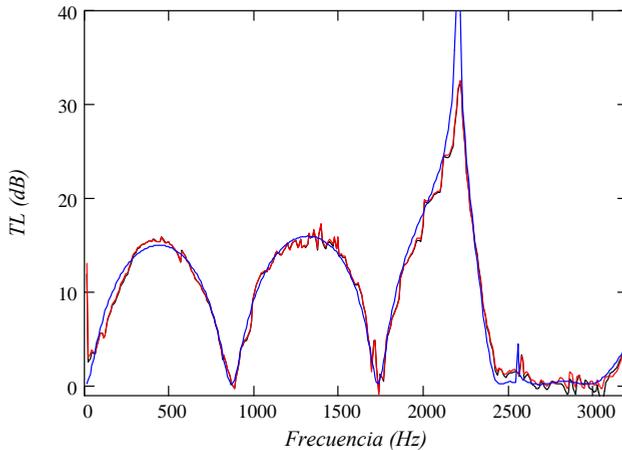


Figura 4.17. TL de cámara de expansión simple obtenido mediante método de las dos fuentes con barrido senoidal: —, matriz de transferencia; —, matriz de dispersión; —, MEF.

#### 4.6.2. Ruido blanco

En este caso en cada bloque de señal se trata todo el espectro de frecuencia que se promedia con las medidas de otros bloques. Se ha ensayado la misma cámara de expansión simple que en el apartado anterior, de longitud 0.2 m y radio 0.0886 m. Los resultados mostrados corresponden al caso sin flujo medio y una temperatura de 25°C.

La señal de excitación empleada ha sido ruido blanco con contenido en frecuencia de 0 a 4000 Hz y se han llevado a cabo 300 promedios. Como puede verse en la Figura 4.18, no se aprecia diferencia entre los resultados experimentales obtenidos a partir de los polos de la matriz de transferencia y los de la matriz de dispersión. Ambos muestran, además, una gran analogía con los obtenidos mediante elementos finitos. El tamaño de bloque empleado es de 2048 puntos y la frecuencia de muestreo de 10240 Hz que dan lugar a bloques de 0.2 segundos. Teniendo en cuenta que es necesario hacer dos ensayos, la toma de medidas ha tenido una duración de aproximadamente 2 minutos.

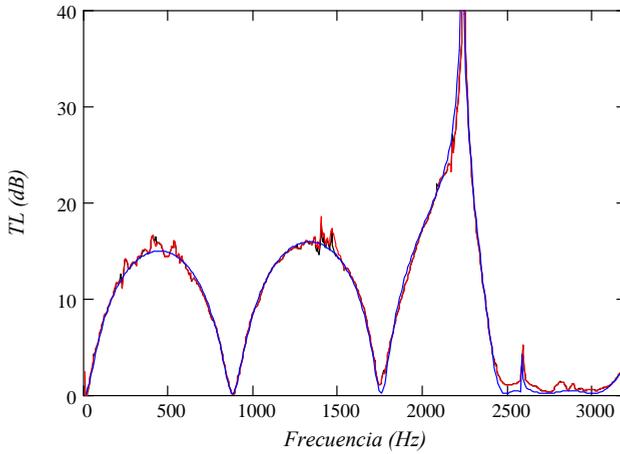


Figura 4.18. TL de cámara de expansión simple obtenido mediante método de las dos fuentes con ruido blanco: —, matriz de transferencia; —, matriz de dispersión; —, MEF.

### 4.6.3. Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos se puede concluir que sin flujo medio no parece haber ventajas significativas de una representación matricial con respecto a la otra. En cuanto a la calidad de los mismos tampoco hay diferencias considerables entre las dos señales de excitación, pero en base al tiempo de ensayo requerido, emplear como señal de excitación ruido aleatorio, es más ventajoso.

## 4.7. Método de excitación simultánea

La técnica experimental desarrollada en esta Tesis y publicada en algunos trabajos [116, 117], está basada en el método de las dos fuentes, pero en lugar de llevar a cabo dos ensayos distintos, se hace un único ensayo en el que la señal acústica se produce con las dos fuentes simultáneamente. Cada micrófono registra la presión en su posición  $P_i$ , que estará compuesta por la suma de la presión provocada por la excitación del altavoz aguas arriba  $P_i^U$  más la del altavoz aguas abajo  $P_i^{Dw}$  más el ruido presente en el sistema  $N$ .

$$P_i = P_i^U + P_i^{Dw} + N \quad (4.97)$$

Bajo determinadas condiciones, es posible obtener los términos  $P_i^U$  y  $P_i^{Dw}$  de la expresión anterior que equivalen a la transformada rápida de Fourier (*FFT*) de la señal temporal de la presión registrada en los ensayos aguas arriba  $U$  y aguas abajo  $Dw$  referidos en el método de las dos fuentes.

La primera condición es que el sistema en estudio sea lineal, como ocurre en el montaje experimental desarrollado, de tal modo que, en cada micrófono, la porción de presión provocada por cada entrada  $P_i^U, P_i^{Dw}$  puede relacionarse con la señal de excitación enviada a cada altavoz  $X^U, X^{Dw}$ , de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P_i^U &= H_i^U X^U \\ P_i^{Dw} &= H_i^{Dw} X^{Dw} \end{aligned} \quad (4.98)$$

En análisis de señal este tipo de sistemas se denomina 2 entradas - 1 salida [28], representado esquemáticamente en la Figura 4.19.

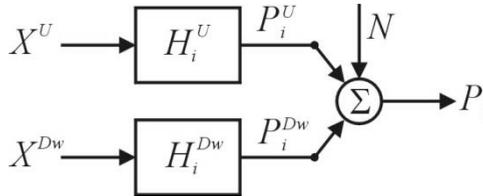


Figura 4.19. Esquema de un sistema de comportamiento lineal de 2 entradas - 1 salida.

Combinando las expresiones (4.97) y (4.98) resulta

$$P_i = H_i^U X^U + H_i^{Dw} X^{Dw} + N \quad (4.99)$$

El espectro cruzado entre la presión en el micrófono  $i$ , y cada una de las entradas, resulta [28]

$$\begin{aligned} S_{P_i^U} &= H_i^U S_{UU} + H_i^{Dw} S_{DwU} + S_{NU} \\ S_{P_i^{Dw}} &= H_i^U S_{UDw} + H_i^{Dw} S_{DwDw} + S_{NDw} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Si el ruido es independiente de las entradas, con un número suficiente de promedios los últimos términos de las expresiones anteriores  $S_{NU}, S_{NDw}$  se anulan. Por otro lado, si tanto las entradas como las salidas al sistema son medibles, el resto de espectros presentes en la ecuación (4.100) pueden obtenerse experimentalmente de modo que se dispone del siguiente sistema de ecuaciones lineales que tiene como incógnitas las funciones de transferencia

$$\begin{aligned} S_{P_i^U} &= H_i^U S_{UU} + H_i^{Dw} S_{DwU} \\ S_{P_i^{Dw}} &= H_i^U S_{UDw} + H_i^{Dw} S_{DwDw} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Al combinar adecuadamente estas expresiones, se obtiene como solución

$$H_i^U = \frac{S_{P_i^U} \left( 1 - \frac{S_{D_w^U} S_{P_i^{D_w}}}{S_{D_w^{D_w}} S_{P_i^U}} \right)}{S_{UU} (1 - \gamma_{UD_w}^2)}$$

$$H_i^{D_w} = \frac{S_{P_i^{D_w}} \left( 1 - \frac{S_{UD_w} S_{P_i^U}}{S_{UU} S_{P_i^{D_w}}} \right)}{S_{D_w^{D_w}} (1 - \gamma_{UD_w}^2)}$$
(4.102)

donde el término  $\gamma_{UD_w}^2$  equivale a la función de coherencia ordinaria entre las dos entradas y es igual a

$$\gamma_{UD_w}^2 = \frac{|S_{UD_w}|^2}{S_{UU} S_{D_w^{D_w}}}$$
(4.103)

Evidentemente el sistema de ecuaciones dado en (4.101) no es resoluble si  $\gamma_{UD_w}^2$  es igual a la unidad. Esta situación implica necesariamente que existe una relación lineal entre las dos entradas y por esta razón la metodología desarrollada es válida únicamente si las dos señales de entrada son independientes.

Una vez conocidas las funciones de transferencia individuales puede descomponerse la salida  $P_i$  en la parte producida por cada una de las entradas, esto es

$$P_i^U = H_i^U X^U$$

$$P_i^{D_w} = H_i^{D_w} X^{D_w}$$
(4.104)

que equivale a las medidas de los dos ensayos independientes necesarias en el método de las dos fuentes.

### 4.7.1. Implementación de la metodología

En este apartado se va a comprobar que el montaje experimental desarrollado cumple las distintas condiciones ligadas a este método. Pueden resumirse como sigue:

- Tanto las entradas  $X^U$  y  $X^{D_w}$  como la salida  $P_i$  deben ser magnitudes medibles.
- El sistema debe tener comportamiento lineal.
- El ruido  $N$  no debe estar correlacionado con las entradas.
- Las dos entradas  $X^U$  y  $X^{D_w}$  deben estar incorrelacionadas entre sí.

La primera condición es directa ya que las entradas al sistema  $X^U$  y  $X^{Dw}$  que corresponden a las señales de excitación de los altavoces, son generadas por el sistema generación de señal del banco de ensayos y registradas a la vez por el sistema de adquisición. Las salidas corresponden a la presión en los puntos de medida, registradas a través de los distintos micrófonos.

Con respecto a la segunda condición, las amplitudes empleadas en el sistema bajo estudio corresponden al rango de comportamiento lineal. Para demostrar que efectivamente se cumple esta condición se ha llevado a cabo el siguiente experimento: se ha hecho funcionar una de las fuentes con una señal de frecuencia y amplitud determinadas. A partir de la presión en los micrófonos se ha obtenido la función de transferencia entre la presión y la señal de excitación. A continuación se ha repetido el mismo ensayo pero en este caso con una señal de excitación de amplitud tres veces mayor que la anterior. La linealidad queda demostrada al comprobar que las funciones de transferencia de los dos ensayos son iguales en todo el rango de frecuencias. La Figura 4.20 representa la función de transferencia entre la presión del micrófono 3 y la señal de excitación del lado  $U$ . Las pequeñas diferencias que se observan pueden ser debidas al ruido eléctrico inherente a la instrumentación empleada.

La tercera condición también se cumple ya que el ruido presente en el sistema de medida se debe en un pequeña parte a la instrumentación y en mayor proporción al flujo medio. Tanto en un caso como en otro las señales de excitación generadas por el sistema son independientes de las dos componentes de ruido.

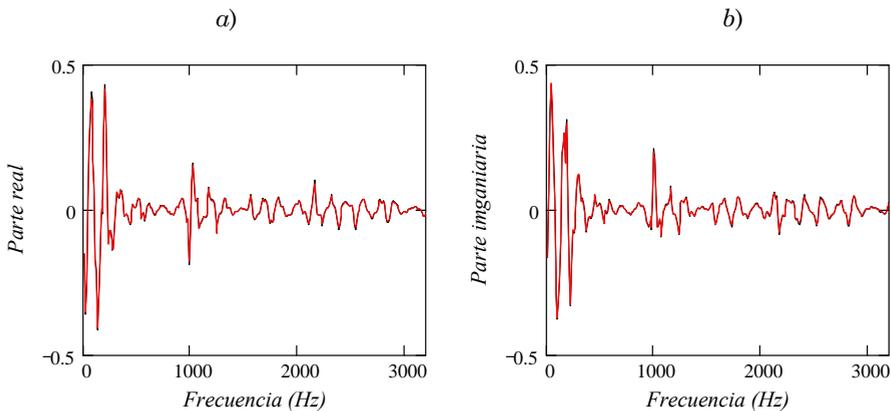


Figura 4.20. Comportamiento lineal del sistema: a) Parte real; b) Parte imaginaria: —,  $H_3^U$  con  $X^U$ ; —,  $H_3^U$  con  $3X^U$ .

Las gráficas de la Figura 4.21 muestran la parte real e imaginaria del espectro cruzado entre la presión registrada por el micrófono situado justo aguas abajo del silenciador y la señal enviada al altavoz aguas arriba, para un ensayo con

excitación acústica y flujo medio y un ensayo con flujo medio sólo, es decir con la componente de ruido únicamente. Las medidas para las distintas configuraciones ensayadas, distintos valores de flujo, otros micrófonos y espectro cruzado con el otro altavoz, muestran una tendencia similar.

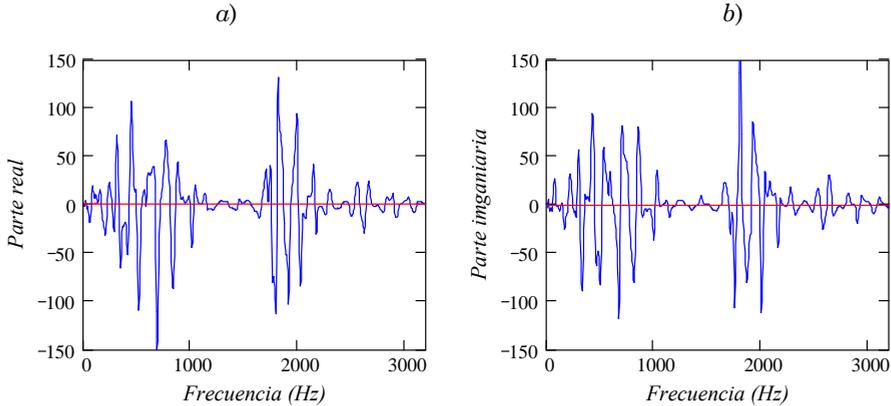


Figura 4.21. Comparación de espectros cruzados,  $M = 0.075$ : a) Parte real; b) Parte imaginaria: —, ensayo con señal acústica ( $S_{pU}$ ); —, ensayo sin señal acústica ( $S_{NU}$ ).

Por tanto la cancelación del último término de las expresiones dadas en (4.97) está plenamente justificada.

Para conseguir que el sistema cumpla la última de las condiciones se ha empleado distinta instrumentación para generar las señales enviadas a cada lado. La siguiente gráfica muestra la función de coherencia definida por la ecuación (4.103). Su valor es distinto a 1 para cualquier frecuencia tal y como es requerido para que el sistema de ecuaciones dado en (4.101), sea resoluble.

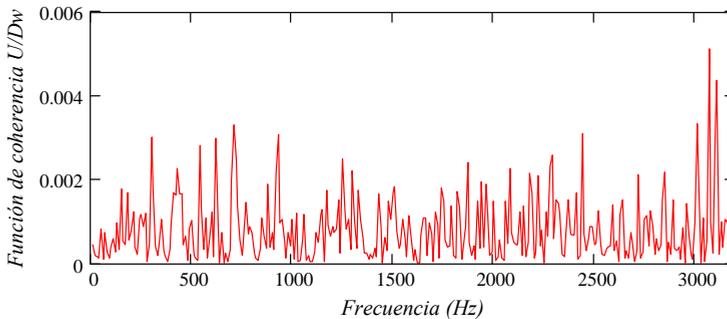


Figura 4.22. Función de coherencia entre las señales enviadas a los dos altavoces ( $\gamma_{UDw}^2$ ).

Una de las ventajas más importantes del nuevo método desarrollado es la reducción a la mitad del tiempo de ensayo, reduciendo por tanto el impacto de las posibles variaciones de las condiciones ambientales tales como la temperatura y la presión. Esta ventaja es todavía mayor cuando se trabaja con flujo medio ya que, tanto el caudal como la temperatura del chorro de aire impulsado por la soplante, pueden verse alterados en poco tiempo.

La Figura 4.23 muestra el  $TL$  de la cámara de expansión simple analizada en la sección 4.6. Los resultados mostrados corresponden también al caso sin flujo medio y una temperatura de  $22^{\circ}\text{C}$ .

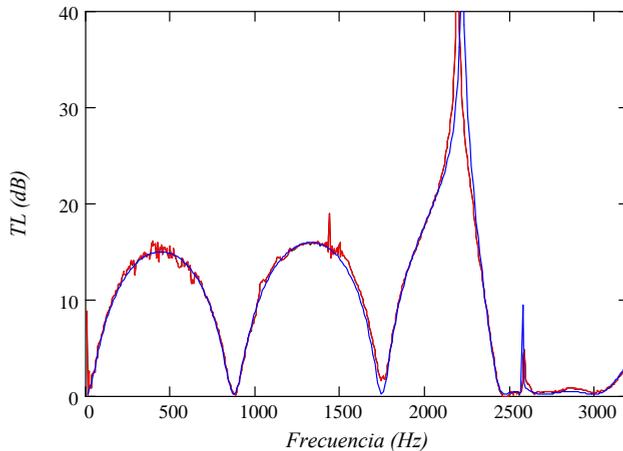


Figura 4.23.  $TL$  de cámara de expansión simple obtenido mediante método de excitación simultánea con ruido blanco: —, matriz de transferencia; —, matriz de dispersión; —,  $MEF$ .

En este caso las señales de excitación han sido ruido blanco con contenido en frecuencia de 0 a 4000 Hz. Los resultados mostrados corresponden a 300 promedios. El  $TL$  se ha obtenido a partir de los cuatro polos de la matriz de transferencia y de la matriz de dispersión. También en este caso los resultados experimentales muestran una gran concordancia entre sí y con los obtenidos mediante elementos finitos. Se ha utilizado un tamaño de bloque de 2048 puntos y una frecuencia de muestreo de 10240 Hz que proporciona una resolución en frecuencia de 5 Hz. Dado que cada bloque tiene una duración de 0.2 segundos, la toma de medidas ha tenido un coste en tiempo de aproximadamente 1 minuto, la mitad que en el método de las dos fuentes original. En cuanto a la precisión de las medidas dos metodologías proporcionan resultados aceptables.

## 4.8. Valoración de las metodologías

En base a los resultados obtenidos en ausencia de flujo medio cualquiera de las metodologías empleadas hasta el momento, todas ellas basadas en el método de las dos fuentes, puede considerarse adecuada. Pero considerando el tiempo de ensayo resulta mucho más eficaz emplear excitación simultánea que ha proporcionado resultados incluso mejores con ensayos de 1 minuto de duración frente a los 2 minutos necesarios en el método original con ruido blanco y los 30 minutos del barrido senoidal. En todos los casos los resultados mejoran al aumentar el número de promedios como puede verse en la gráfica y en el detalle ampliado de la Figura 4.24. En ella se han superpuesto los resultados del método de excitación simultánea aumentando hasta 3000 el número de promedios. El ensayo ha tenido una duración de 10 minutos.

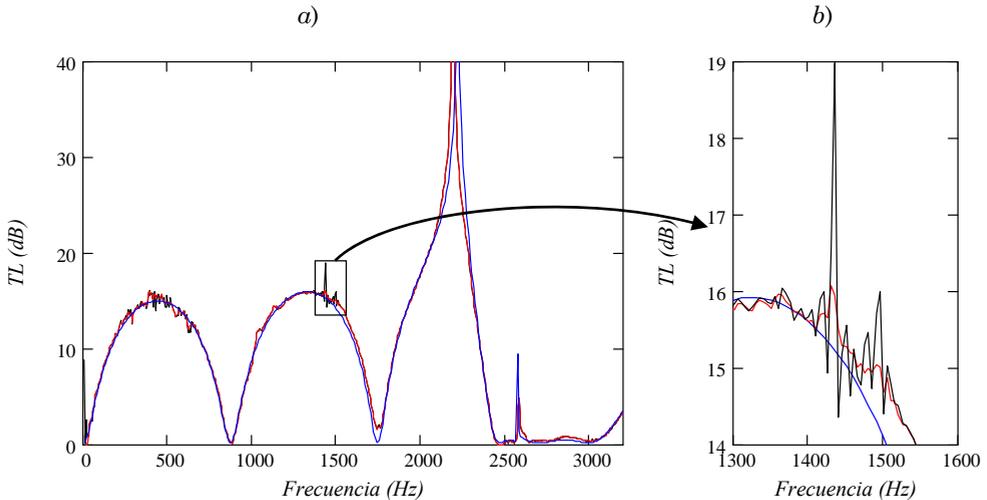
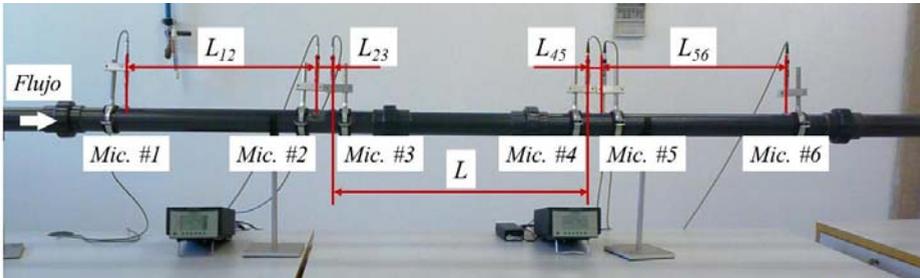


Figura 4.24. a) TL de cámara de expansión simple; b) detalle ampliado. Método de excitación simultánea con ruido blanco: —, 300 promedios; —, 3000 promedios; —, MEF.

Cuando se añade el flujo medio, se incorpora una fuente de ruido que contamina directamente la señal registrada en los micrófonos. Para eliminar su efecto va a ser necesario aumentar el número de promedios de modo que la diferencia en los tiempos de ensayo va a verse incrementada, haciendo todavía más interesante el método de excitación simultánea. Un problema adicional a tiempos de ensayos excesivamente largos es que la variación de la temperatura y/o de la velocidad de flujo introducen fuentes de error adicionales.

## 4.9. Validación del método de excitación simultánea con flujo medio

Para validar el sistema de medida se han obtenido experimentalmente los polos adimensionalizados de la matriz de transferencia, definida como en la ecuación (4.9), de un conducto recto de sección circular uniforme. El esquema y las dimensiones del montaje empleado se detallan a continuación. Las distancias mostradas en la Figura 4.25 son  $L_{12} = L_{56} = 0.5$  m;  $L_{23} = L_{45} = 0.045$  m y  $L = 0.688$  m. La sección transversal del conducto es circular de diámetro interior 0.0536 m. Para baja frecuencia (10–300 Hz) se han empleado las medidas registradas por los micrófonos 1, 3, 4 y 6 y para alta frecuencia (300–3200 Hz) los micrófonos 2, 3, 4 y 5.



*Figura 4.25. Montaje para validación del montaje experimental mediante un ensayo con conducto recto.*

Las gráficas de las Figuras 4.26 y 4.27 muestran los polos adimensionalizados de la matriz de transferencia en ausencia de flujo medio. La temperatura registrada en el interior del conducto durante el ensayo es de 20°C. Los polos teóricos se han obtenido empleando la ecuación (4.18) correspondiente a la teoría de onda plana, válida ya que la frecuencia de corte del primer modo de presión para las características del ensayo, calculada con la ecuación (4.90), es de 3747 Hz.

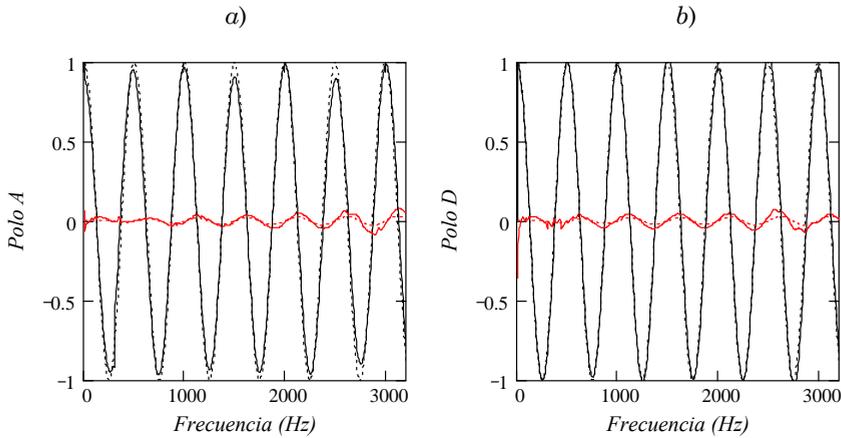


Figura 4.26. a) Polo A y b) polo D de la matriz de transferencia para conducto recto sin flujo medio: —, parte real experimental; ---, parte real teórica; —, parte imaginaria experimental; ---, parte imaginaria teórica.

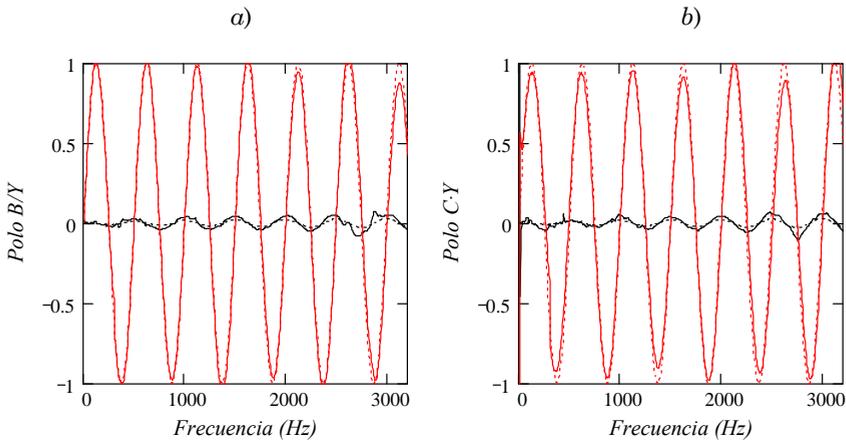


Figura 4.27. a) Polo B y b) polo C adimensionalizados de la matriz de transferencia para conducto recto sin flujo medio: —, parte real experimental; ---, parte real teórica; —, parte imaginaria experimental; ---, parte imaginaria teórica.

Se han llevado a cabo también ensayos con tubo recto y distintos valores de flujo medio. Las gráficas de las Figuras 4.28 y 4.29 muestran los polos adimensionalizados de la matriz de transferencia para flujo medio con  $M = 0.07$  y temperatura de  $22^{\circ}\text{C}$ . Los valores teóricos empleados en la comparativa corresponden a los obtenidos mediante la teoría de onda plana, válida para las frecuencias de interés ya que la frecuencia de corte en las condiciones de ensayo es de 3749 Hz.

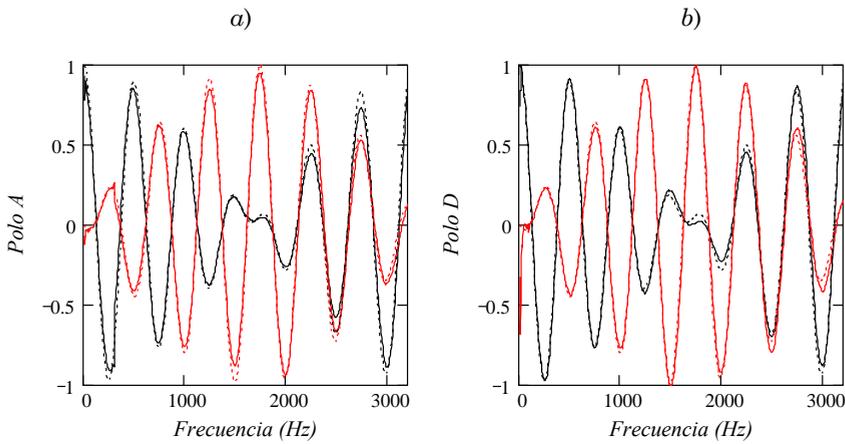


Figura 4.28. a) Polo A y b) polo D de la matriz de transferencia para conducto recto con flujo medio  $M = 0.07$ : —, parte real experimental; ----, parte real teórica; —, parte imaginaria experimental; ----, parte imaginaria teórica.

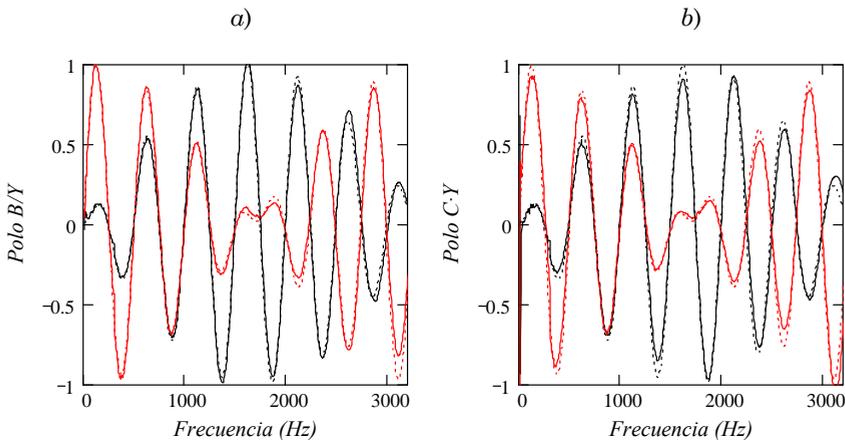


Figura 4.29. a) Polo B y b) polo C adimensionalizados de la matriz de transferencia para conducto recto con flujo medio  $M = 0.07$ : —, parte real experimental; ----, parte real teórica; —, parte imaginaria experimental; ----, parte imaginaria teórica.

Las Figuras 4.30 y 4.31 contienen las gráficas de los polos adimensionalizados de la matriz de transferencia de tubo recto para flujo medio con  $M = 0.11$ . La temperatura registrada en el ensayo es de  $25^{\circ}\text{C}$ , a la que le corresponde una frecuencia de corte 3756 Hz. Es por tanto válida la comparativa de los valores obtenidos experimentalmente con los calculados mediante la teoría de onda plana.

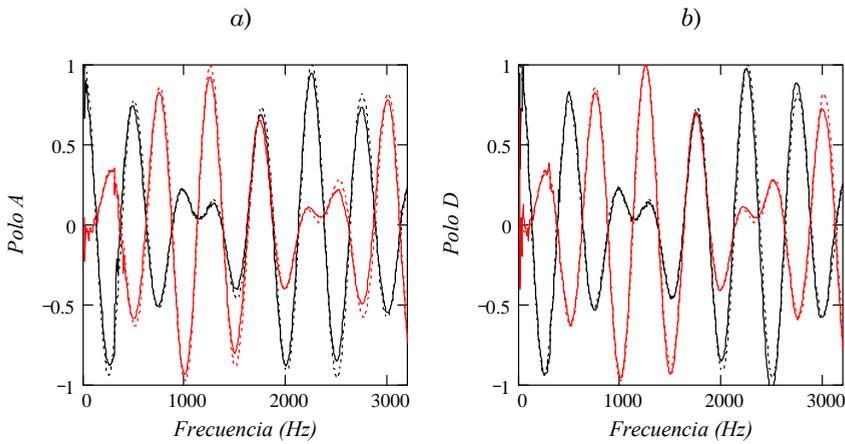


Figura 4.30. a) Polo A y b) polo D de la matriz de transferencia para conducto recto con flujo medio  $M = 0.11$ : —, parte real experimental; ----, parte real teórica; —, parte imaginaria experimental; ----, parte imaginaria teórica.

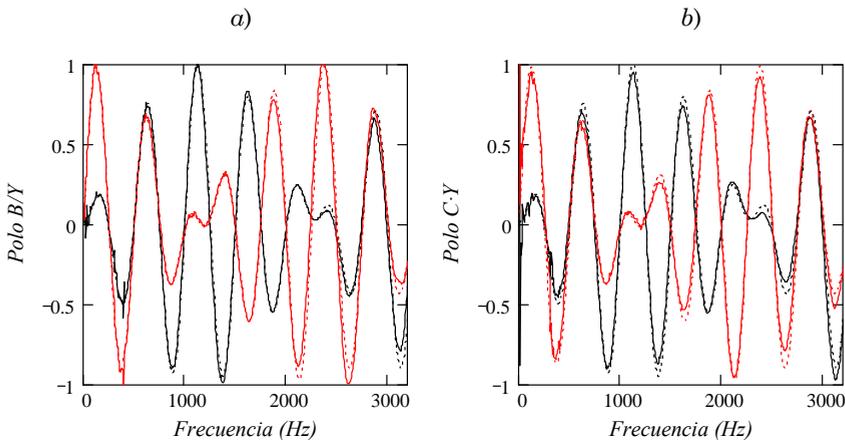


Figura 4.31. a) Polo B y b) polo C adimensionalizados de la matriz de transferencia para conducto recto con flujo medio  $M = 0.11$ : —, parte real experimental; ----, parte real teórica; —, parte imaginaria experimental; ----, parte imaginaria teórica.

En último lugar se ha llevado a cabo un ensayo con flujo medio de  $M = 0.14$ , en el que se ha registrado una temperatura de  $35^{\circ}\text{C}$ . Las gráficas de las Figuras 4.32 y 4.33 muestran los resultados obtenidos experimentalmente y las predicciones de la teoría de onda plana, válida en el rango de frecuencias de interés ya que la frecuencia de corte correspondiente a las condiciones de ensayo es de 3802 Hz.

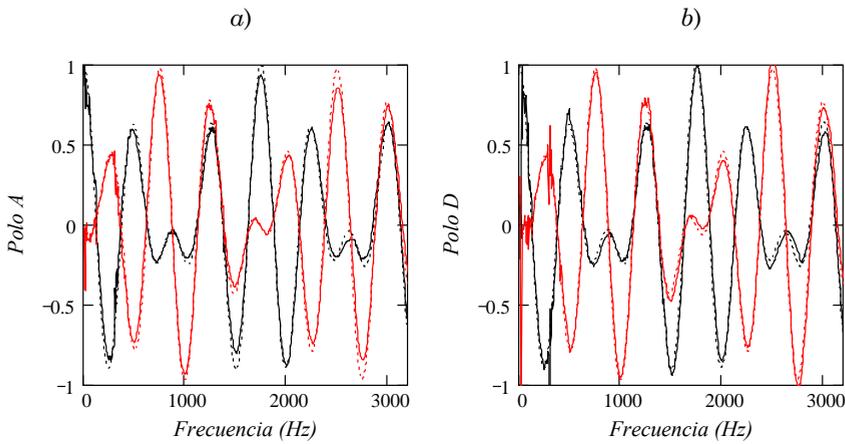


Figura 4.32. a) Polo A y b) polo D de la matriz de transferencia para conducto recto con flujo medio  $M = 0.14$ : —, parte real experimental; ----, parte real teórica; —, parte imaginaria experimental; ----, parte imaginaria teórica.

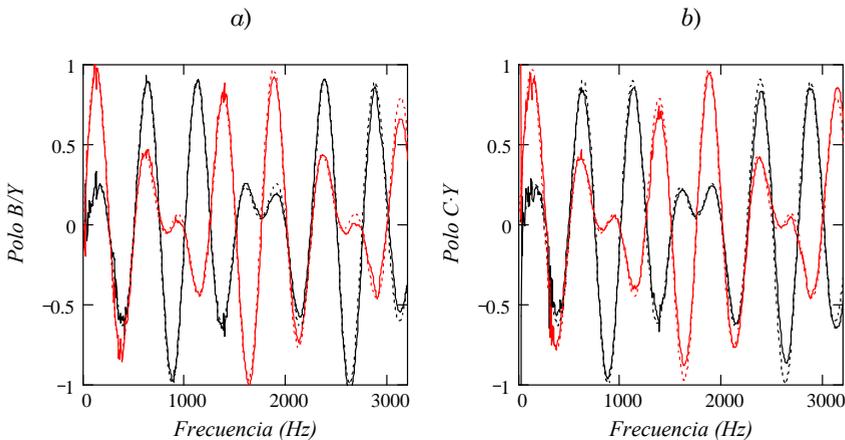


Figura 4.33. a) Polo B y b) polo C adimensionalizados de la matriz de transferencia para conducto recto con flujo medio  $M = 0.14$ : —, parte real experimental; ----, parte real teórica; —, parte imaginaria experimental; ----, parte imaginaria teórica.

Los resultados obtenidos muestran una gran concordancia entre las medidas experimentales y la previsión teórica. Puede establecerse, por tanto, que el montaje experimental es adecuado para la medida de parámetros acústicos en presencia de flujo medio.

## 4.10. Resultados

En este apartado se muestra el índice de pérdida de transmisión  $TL$  de algunos silenciadores obtenido en el banco de ensayos desarrollado. Se ha trabajado con prototipos de distinta tipología, con y sin flujo medio. Se presenta además un análisis de los resultados alcanzados experimentalmente y la comparativa con la previsión teórica obtenida mediante el método de elementos finitos. En la Figura 4.34 pueden verse los distintos prototipos de silenciadores ensayados.



*Figura 4.34. Prototipos de silenciadores ensayados.*

Para la construcción de los silenciadores se ha empleado tubería de PVC de alta presión y de polietileno, de varios diámetros. Las distintas geometrías básicas se han combinado con tubería interna metálica, tubo perforado y malla tubular para la obtención de conductos extendidos y otras tipologías de silenciadores de tipo disipativo. En todos los casos el radio de los conductos de entrada y salida es de 0.0286 m.

### 4.10.1. Cámaras reactivas

En este apartado se muestran los resultados de las medidas en cámaras de tipo reactivo, es decir, aquellas en las que la atenuación es provocada por fenómenos de reflexión e interferencia de ondas progresivas y regresivas. En esta categoría se han incluido cámaras de expansión simple y cámaras con conductos extendidos.

#### 4.10.1.1. Cámara de expansión simple

La Tabla 4.1 recoge las principales dimensiones de las cámaras de expansión simple ensayadas, donde  $R$  es el radio de la cámara y  $L$  la longitud según la Figura 4.35.

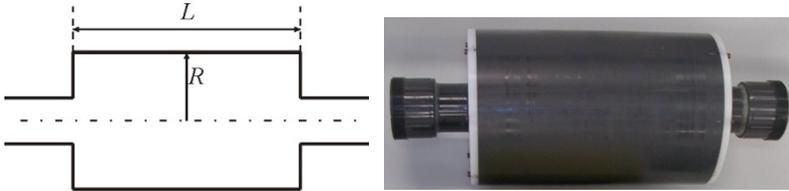


Figura 4.35. Parámetros geométricos de las cámaras de expansión simple.

Cámara	$R$ (m)	$L$ (m)
1	0.0532	0.0165
2	0.0532	0.1998
3	0.0532	0.400
4	0.0886	0.200
5	0.0886	0.395
6	0.0923	0.300

Tabla 4.1. Dimensiones principales de las cámaras ensayadas.

Las Figuras 4.36 y 4.37 muestran el  $TL$  de las cámaras de expansión simple sin flujo medio.

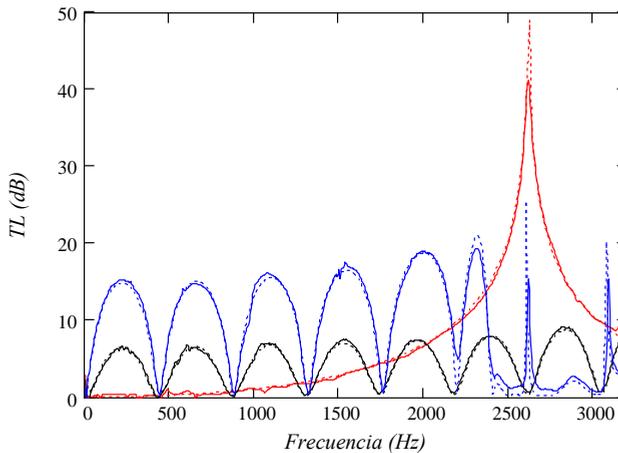


Figura 4.36.  $TL$  de cámaras de expansión simple sin flujo medio.

Cámara 1: —, experimental; - - -, MEF; cámara 3: —, experimental; - - -, MEF; cámara 5: —, experimental; - - -, MEF.

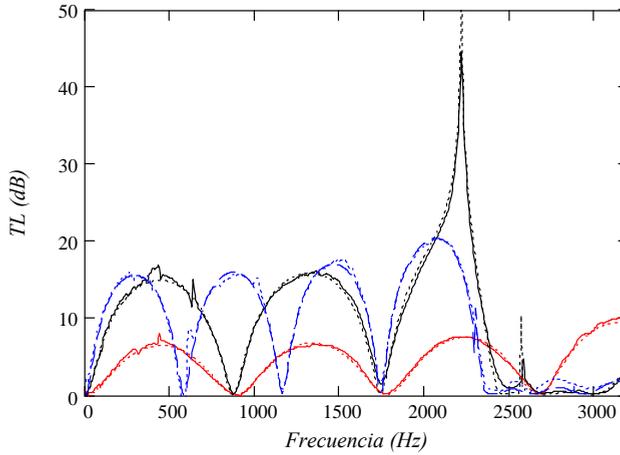


Figura 4.37. TL de cámaras de expansión simple sin flujo medio. Cámara 2: —, experimental; ····, MEF; cámara 4: —, experimental; ····, MEF; cámara 6: —, experimental; ····, MEF.

En todas las cámaras ensayadas los resultados obtenidos sin flujo medio son excelentes incluso con un número de promedios bajo como se muestra en la Figura 4.38.

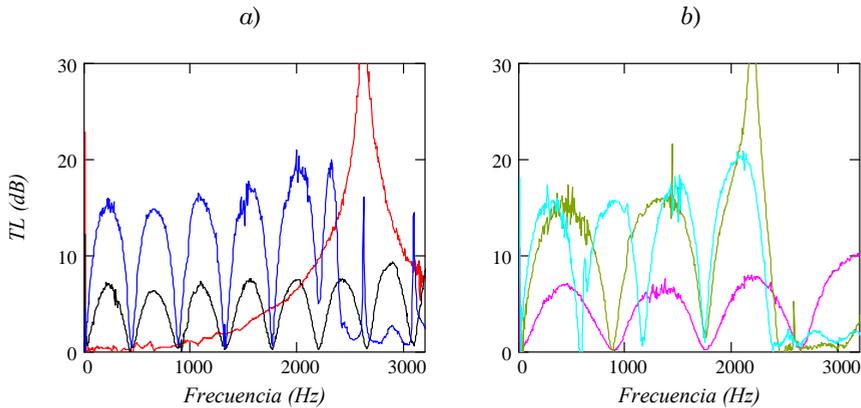


Figura 4.38. TL de cámaras de expansión simple con 100 promedios: a) —, cámara 1; —, cámara 3; —, cámara 5; b) —, cámara 2; —, cámara 4; —, cámara 6.

Los resultados mostrados en las gráficas de la Figura 4.38 corresponden a 100 promedios. Considerando un solape del 50%, en tiempo supone 10 segundos dado que se ha empleado una frecuencia de muestreo de 10240 Hz y un tamaño de bloque de 2048 puntos.

Algunas de las cámaras anteriores se han ensayado con flujo medio, la Figura 4.39 muestra los resultados con  $M = 0.07$ .

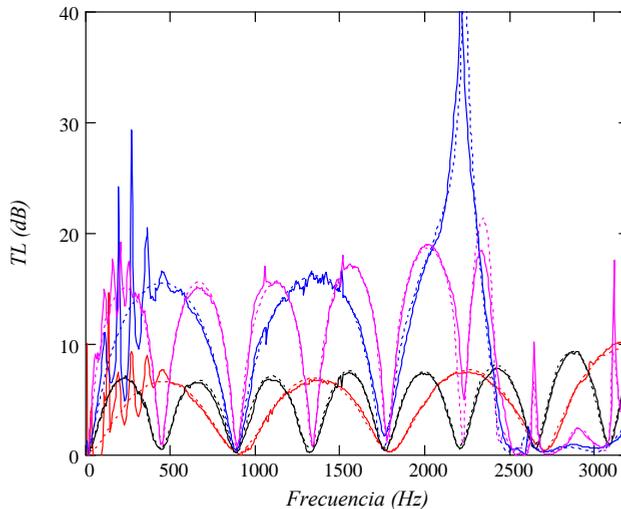


Figura 4.39. TL de cámaras de expansión simple con flujo  $M = 0.07$ .  
 Cámara 2: —, experimental; ···, MEF; cámara 3: —, experimental; ···, MEF;  
 cámara 4: —, experimental; ···, MEF; cámara 5: —, experimental; ···, MEF.

En la mayor parte del rango de frecuencias, los resultados obtenidos mediante la técnica experimental desarrollada son excelentes. En este caso, el número de promedios necesario aumenta bastante dependiendo de la velocidad del flujo y de las dimensiones de la cámara. Los resultados con flujo medio mostrados en la Figura 4.39 tienen más de 25000 promedios incluyendo un solape del 50%.

Con respecto a la calidad de los resultados, a baja frecuencia se observan fluctuaciones importantes del TL para la mayor parte de las geometrías bajo estudio. Su origen se encuentra en el fenómeno aeroacústico provocado en la expansión y la contracción violenta de la corriente de aire en la entrada y la salida de la cámara de expansión simple. Davies y Holland [51] describen como paradójico este comportamiento propio de este tipo de cámaras ya que en presencia de flujo a ciertas frecuencias poseen la capacidad de generar ruido en lugar de atenuarlo. El fenómeno aeroacústico es conocido y su obtención experimental es extremadamente compleja y se suele incluir en la formulación como un vector *fente* de las variables de estado [74, 112]. La generación de los tonos aeroacústicos se atribuye a la interacción del campo de flujo y el campo acústico. English y Holland [65] justifican su aparición en la generación de vórtices en la expansión de la cámara. Estos vórtices viajan aguas abajo hacia la contracción y cuando inciden en el borde de salida se genera un pulso de sonido que se propaga hacia la entrada y excita la capa de cizalladura

reforzando la generación de vórtices. A ciertas frecuencias el campo acústico también interacciona fortaleciendo el fenómeno. Du y Ouyang [64] distinguen tres tipos distintos de tonos, unos generados por las resonancias del conducto de salida, otros por las de la cámara y los últimos coinciden con los descritos por English y Holland. En general este fenómeno es difícil de cuantificar por su comportamiento no lineal e inestable. No está considerado en la formulación acústica abordada en esta Tesis Doctoral y por esta razón la predicción teórica se aleja de las medidas para aquellos rangos de frecuencia donde el fenómeno aeroacústico tiene un efecto mayor.

Se ha llevado a cabo un estudio paramétrico comparando los resultados experimentales de distintas cámaras y se encontrado cierta relación entre las frecuencias en las que se localizan fluctuaciones en las medidas del  $TL$  y las dimensiones de la cámara. Las principales medidas de las cámaras se detallan gráficamente en la Figura 4.40.

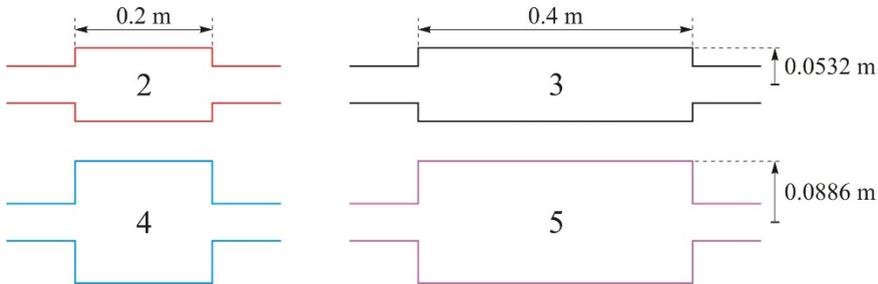


Figura 4.40. Dimensiones principales de las cámaras de expansión simple 2, 3, 4 y 5.

En las gráficas de la Figura 4.41 se muestra la primera banda de paso del  $TL$  de las cámaras anteriores obtenido experimentalmente con flujo medio aproximadamente igual a  $M = 0.07$ .

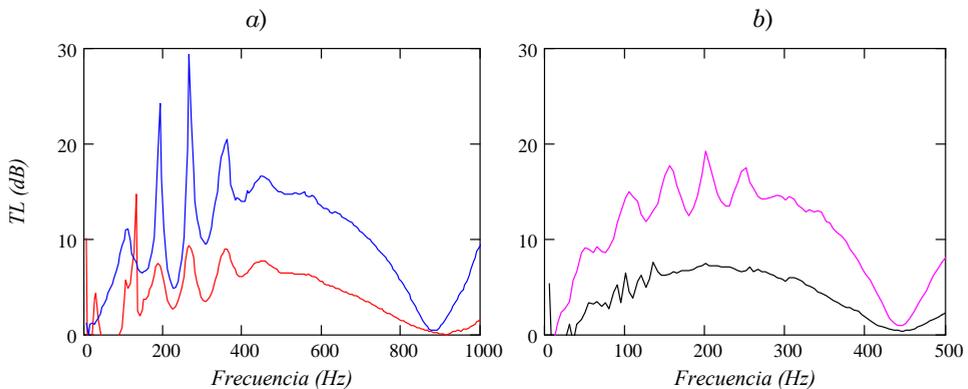


Figura 4.41. Primera banda de paso del  $TL$  de cámaras de expansión simple con flujo  $M = 0.07$ : a) —, cámara 2; —, cámara 4; b) —, cámara 3; —, cámara 5.

Las gráficas muestran que en cámaras con igual longitud los picos se dan en frecuencias parecidas, este fenómeno puede observarse sobre todo en los resultados de las geometrías 2 y 4. Existe también una fuerte dependencia de la amplitud de los picos con la longitud y la relación de expansión de las cámaras en el siguiente sentido: al comparar las cámaras de igual diámetro y distinta longitud, como son 2 con 3 y 4 con 5, puede observarse que la amplitud de los picos es mayor en las cámaras cortas. Si, además, se comparan las cámaras de igual longitud y distinta relación de expansión, es decir 2 con 4 y 3 con 5, las cámaras que presentan picos de mayor amplitud son las de mayor diámetro. Una de las posibles justificaciones a que en las cámaras más cortas (2 y 4) las irregularidades en el  $TL$  a baja frecuencia sean de mayor amplitud consistiría en que a menor longitud de cámara, hay menor desarrollo del flujo y por tanto las inestabilidades producidas por la expansión brusca alcanzan la contracción menos atenuadas. También es razonable que en las cámaras con mayor diámetro (2 y 4) los picos presentan mayor amplitud ya que la aparición de estos picos en baja frecuencia está relacionada con la expansión del flujo y con las turbulencias que el propio flujo genera dentro de la cámara, que son mayores cuando la relación de expansión aumenta.

También se ha comparado el autoespectro de un micrófono en un ensayo con señal acústica y flujo con el obtenido en presencia únicamente de flujo. Las gráficas que se muestran en la Figura 4.42 corresponden a la cámara 2. El autoespectro mostrado es el del primer micrófono situado aguas abajo del silenciador, el número 4 de la Figura 4.13. Para otros micrófonos y otras cámaras se ha observado una respuesta similar.

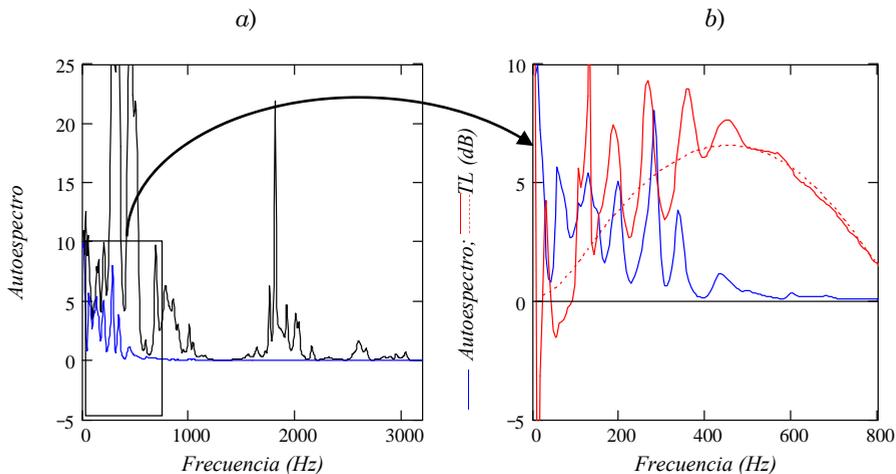


Figura 4.42. Efecto aeroacústico,  $M = 0.07$ : a) autoespectros; b) autoespectro de ruido de flujo y  $TL$ : —, autoespectro de ensayo con señal acústica; —, autoespectro de ensayo solo con flujo; —,  $TL$  experimental; ···,  $TL$  MEF.

Se aprecia que el ruido generado por el flujo puede llegar a ser importante a determinadas frecuencias que están relacionadas con las dimensiones de la cámara. Se puede llegar a la conclusión de que en aquellas frecuencias en las que el flujo genera un ruido con orden de magnitud similar al de la señal acústica el  $TL$  obtenido experimentales se aleja del previsto por la teoría. En la cámara 2, en el rango de frecuencias de 40 a 90 Hz el ruido generado por el flujo es una parte no despreciable de la señal registrada por los micrófonos, hasta el punto que el  $TL$  llega a tomar valores negativos, es decir el silenciador a esas frecuencias produce ruido por efecto del flujo.

#### ***4.10.1.2. Cámara con conductos extendidos***

Partiendo de la geometría 6 de la Tabla 4.1 se ha construido la cámara con resonadores de cuarto de onda a ambos lados que puede verse en la Figura 4.43. Las longitudes de los conductos extendidos son 0.0375 m y 0.075 m y su espesor es de 0.0007 m. En la Figura 4.44 se muestran los resultados experimentales obtenidos y se compara con los cálculos mediante elementos finitos y la predicción según la teoría de onda plana con corrección de longitud.



*Figura 4.43. Cámara 6 con conductos extendidos.*

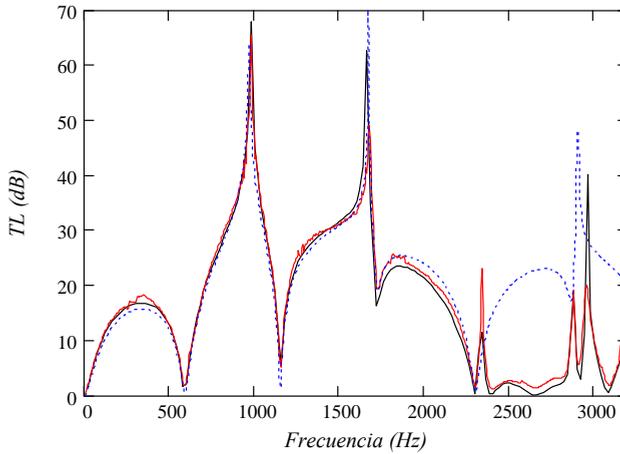


Figura 4.44. TL de la cámara 6 con conductos extendidos: —, experimental; —, MEF; ----, OP con corrección de longitud.

Los resultados experimentales para esta cámara reactiva también son excelentes en ausencia de flujo medio, como puede verse en la Figura 4.44. La simulación mediante elementos finitos se ha llevado a cabo considerando el espesor del conducto extendido. La corrección de longitud empleada en el modelo unidimensional corresponde a la propuesta por Torregrosa *et al.* en la referencia [147] y dada en la expresión (2.254). Tanto la curva de atenuación obtenida experimentalmente como la calculada numéricamente representan el comportamiento esperado, esto es bandas de paso correspondientes a la longitud de la cámara y picos de resonancia asociados a los resonadores de cuarto de onda de los tubos extendidos. Además, ambas curvas muestran la caída significativa de atenuación asociada a la propagación multidimensional a partir de la frecuencia del primer modo de presión situado en 2278 Hz. Las bandas de paso se localizan en las siguientes frecuencias

$$f_{bp} = \frac{(2n+1)c_0}{2L}; \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.105)$$

donde  $L$  es la longitud de la cámara. A la temperatura del ensayo, 23°C, las tres primeras bandas de paso se sitúan en 575 Hz, 1725 Hz y 2875 Hz.

Los picos de atenuación se localizan en las frecuencias en las que caben múltiplos enteros de un cuarto de onda a lo largo del conducto extendido  $L_e$ , esto es

$$f_{pa} = \frac{(2n+1)c_0}{4L_e}; \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.106)$$

Considerando la corrección de longitud, los valores asociados a la geometría analizada son 1670 Hz para el conducto extendido de entrada y 967 Hz y 2903 Hz para el de la salida.

A la vista de los resultados obtenidos, el sistema experimental desarrollado es adecuado para la caracterización acústica de cámaras en las que la atenuación se obtiene mediante reflexión e interferencia de ondas progresivas y regresivas. En este tipo de cámaras el modelo matemático de que se dispone en ausencia de flujo medio es adecuado. Sin embargo, en presencia de flujo medio, al no tener incluida la formulación del fenómeno aeroacústico, aparecen discrepancias a baja frecuencia.

#### 4.10.2. Silenciadores disipativos

Se consideran silenciadores disipativos aquellas configuraciones en las que hay una pérdida de energía acústica considerable como consecuencia de los fenómenos viscotérmicos presentes. En esta categoría se encuentran las geometrías que incorporan material absorbente y, en menor medida, aquellas que incluyen superficies perforadas en su interior. A continuación se presentan los resultados experimentales para ambos casos.

##### 4.10.2.1. Silenciador con conductos extendidos y tubo perforado

Se ha ensayado un silenciador con conductos extendidos a la entrada y a la salida y tubo perforado en la parte central. La construcción del prototipo se ha llevado a cabo a partir de la cámara de expansión simple 4 cuyas dimensiones se encuentran detalladas en la Tabla 4.1. La pieza ensamblada puede verse en la Figura 4.45.



*Figura 4.45. Tubos extendidos y tramo central perforado acoplado a la cámara de expansión simple 4.*

Tanto los tubos extendidos como el tramo central perforado, son del mismo diámetro que el conducto. Las longitudes de los extendidos son: entrada 0.0025 m y salida 0.083 m. Las características del tramo perforado son: espesor 0.0003 m, diámetro de orificios 0.0035 m y porosidad 11%. El modelo empleado en el cálculo de elementos finitos para la impedancia del tubo perforado

corresponde al desarrollado por Sullivan [142, 143] con la corrección que tiene en cuenta la interacción entre los agujeros de la superficie perforada (2.51)

$$Z_p = \rho_0 c_0 \frac{0.006 + j k_0 (t_p + 0.85 d_h F(\sigma))}{\sigma} \quad (4.107)$$

donde  $t_p$  es espesor del tubo perforado,  $d_h$  el diámetro de los agujeros y  $\sigma$  la porosidad. El término  $F(\sigma)$  permite considerar la interacción entre los agujeros y se ha obtenido como valor medio de la expresión de Fock dada en (2.48) [67] y la de Ingard dada en (2.49) [80], siguiendo las recomendaciones encontradas en las referencias [24, 29, 55, 60]

Las medidas experimentales presentan gran concordancia con los cálculos realizados mediante elementos finitos como puede verse en la gráfica de la Figura 4.46.

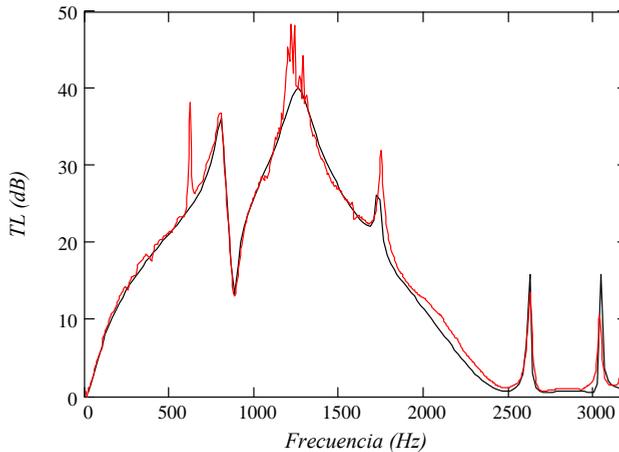


Figura 4.46. TL de la cámara 4 con extendidos y tubo perforado sin flujo medio: —, experimental; —, MEF.

La aproximación entre las medidas y los cálculos manifiesta que el modelo de perforado escogido en la simulación numérica es adecuado. En la gráfica de la Figura 4.46 pueden localizarse por un lado los picos de atenuación de los resonadores de cuarto de onda correspondiente a los conductos extendidos. Los asociados al extendido de la entrada quedan fuera del rango de frecuencias analizados y los del conducto de salida se localizan cercanos a las frecuencias 890 Hz y 2672 Hz. Es necesario aclarar que para la obtención de dichas frecuencias se ha empleado la corrección de longitud de Torregrosa *et al.* [147] que en esta configuración es aproximada, ya que las características geométricas del tubo perforado alteran de forma notable esta corrección. En el gráfico queda también de manifiesto la presencia de la primera banda de paso asociada a la

longitud de la cámara situada en 864 Hz. Por último, puede observarse como la frecuencia de corte limita la región de propagación unidimensional, a la temperatura del ensayo 24°C su valor es 2378 Hz, a partir de dicha frecuencia la curva de atenuación cae dramáticamente.

Como conclusión, puede afirmarse que tanto el sistema experimental desarrollado como el modelo empleado para la predicción numérica resultan válidos y eficaces.

#### 4.10.2.2. Silenciador con material absorbente

Los resultados presentados en este apartado corresponden a dos silenciadores disipativos de distinta geometría. En ambos casos se ha rellenado completamente una cámara de expansión simple con fibra de vidrio *Advantex* de *Owens Corning* [60]. Para soportar la fibra en el interior de la cámara se ha colocado una rejilla metálica de diámetro igual al de los conductos de entrada/salida como puede apreciarse en la Figura 4.47. Las geometrías ensayadas corresponden a la 3 y 4 de la Tabla 4.1. El resto de características se encuentran recogidas en la Tabla 4.2

Cámara	$R$ (m)	$L$ (m)	Material absorbente:	
			Masa(g)	Resistividad a 25°C (rayl/m)
3 disipativa	0.0532	0.400	130.4	1336
4 disipativa	0.0886	0.200	303	2395

Tabla 4.2. Características principales de las cámaras disipativas ensayadas.



Figura 4.47. Prototipo de silenciador disipativo.

La impedancia y número de onda del material absorbente empleado pueden calcularse mediante las siguientes expresiones [25, 60]

$$\tilde{Z} = Z_0 \left( \left( 1 + 0.09534 \left( \frac{f \rho_0}{R_f} \right)^{-0.754} \right) + j \left( -0.08504 \left( \frac{f \rho_0}{R_f} \right)^{-0.732} \right) \right) \quad (4.108)$$

$$\tilde{k} = k_0 \left( \left( 1 + 0.16 \left( \frac{f \rho_0}{R_f} \right)^{-0.577} \right) + j \left( -0.18897 \left( \frac{f \rho_0}{R_f} \right)^{-0.595} \right) \right) \quad (4.109)$$

siendo  $R_f$  la resistividad de la fibra, que a una temperatura de 25°C toma los valores  $R_f = 4896$  rayl/m y  $R_f = 17378$  rayl/m para densidades de llenado de fibra de  $\rho_f = 100$  kg/m<sup>3</sup> y  $\rho_f = 200$  kg/m<sup>3</sup> respectivamente. La ley de variación de la resistividad con la densidad de fibra resulta

$$R_f = 1.0830992 \rho_f^{1.8275866} \quad (4.110)$$

La variación del valor de la resistividad con la temperatura se debe a su dependencia de la viscosidad del aire de la siguiente forma [57]

$$R_f(T) = R_f(T_0) \frac{\mu(T)}{\mu(T_0)} \quad (4.111)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica del aire, puede obtenerse en N s/m<sup>2</sup>, con la expresión (2.80)

$$\mu = 1.716 \cdot 10^{-5} \left( \frac{T}{273} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{384}{T+111} \quad (4.112)$$

siendo  $T$  la temperatura medida en escala absoluta. Los resultados de los ensayos con la cámara 3 disipativa, con valores distintos de flujo medio, se muestran en las Figuras 4.48 y 4.49.

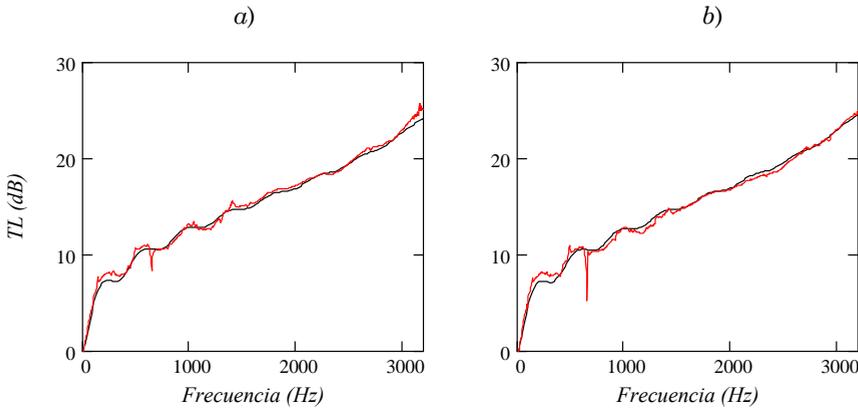


Figura 4.48. TL de la cámara 3 disipativa: —, experimental; —, MEF: a) sin flujo medio; b)  $M = 0.05$ .

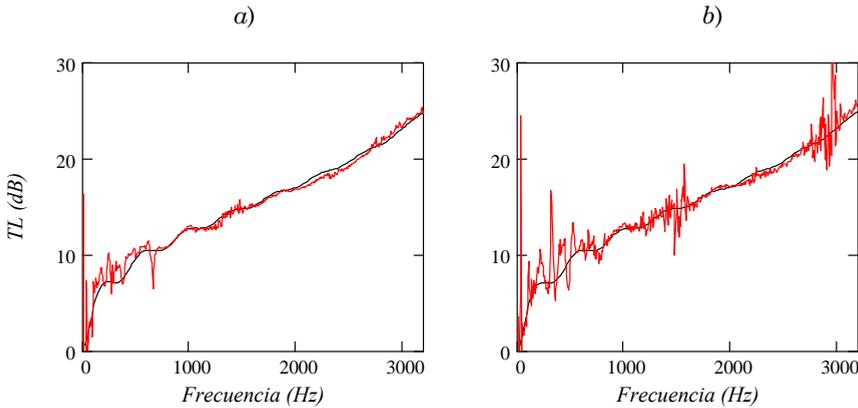


Figura 4.49. TL de la cámara 3 disipativa: —, experimental; —, MEF: a)  $M = 0.1$ ; b)  $M = 0.12$ .

Puede observarse que la coherencia entre las medidas experimentales y las previstas en los cálculos teóricos muestran una gran concordancia si bien la presencia del flujo genera un rizado en los resultados que aumenta con el mismo. Este rizado aparece por el ruido provocado por la expansión y contracción del flujo y disminuye aumentando el número de promedios ya que no está correlacionado con las señales de excitación y el método de medida propuesto tiende a eliminarlo. El número de promedios empleado en el ensayo de  $M = 0.1$  ha sido de 90000 y en el caso de  $M = 0.12$  de 130000. La Figura 4.50 muestra como mejora la calidad de los resultados aumentando la cantidad de promedios y justifica la cifra tan elevada utilizada. Las gráficas corresponden al ensayo con flujo de  $M = 0.1$ .

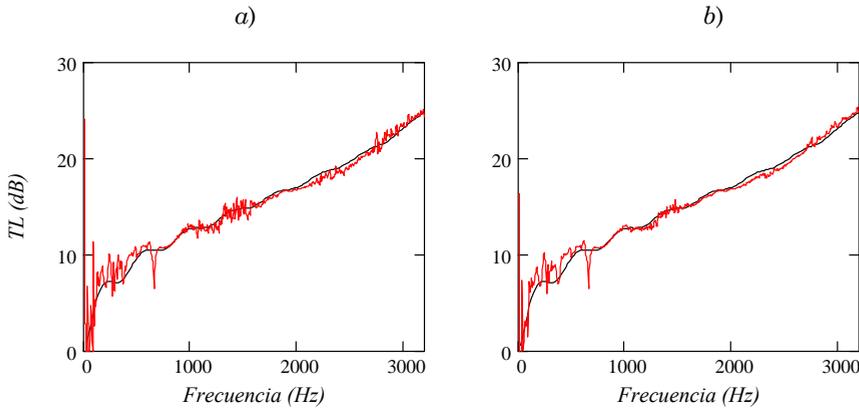


Figura 4.50. TL de la cámara 3 disipativa,  $M = 0.1$ : —, experimental; —, MEF: a) 20000 promedios; b) 90000 promedios.

El número de promedios referido incluye el 50% de solape. Los resultados de los ensayos llevados a cabo con la cámara 4 disipativa pueden verse en las gráficas de las Figuras 4.51 y 4.52. Esta cámara se ha rellenado con 303 g de fibra, densidad a la que le corresponde una resistividad de  $R_f = 2394.84$  rayl/m a  $25^\circ\text{C}$ .

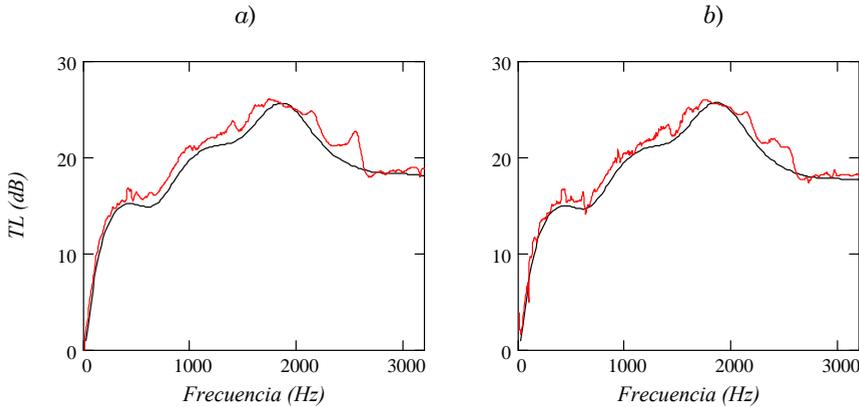


Figura 4.51. TL de la cámara 4 disipativa: —, experimental; —, MEF: a) sin flujo medio; b)  $M = 0.05$ .

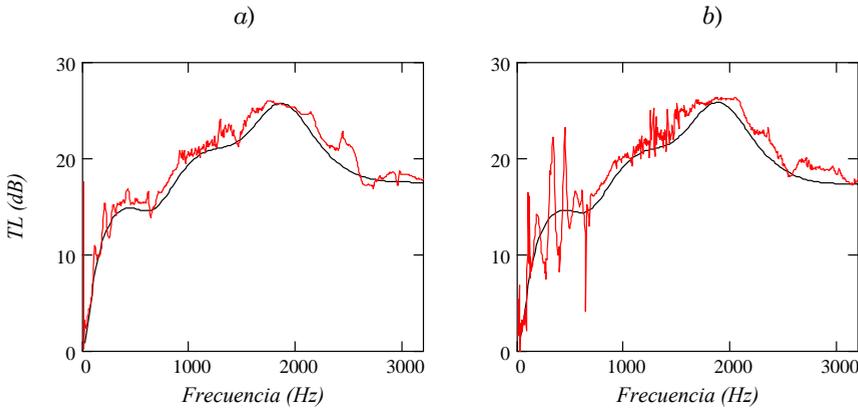


Figura 4.52. TL de la cámara 4 disipativa: —, experimental; —, MEF: a)  $M = 0.07$ ; b)  $M = 0.11$ .

En general los resultados obtenidos experimentalmente, presentan una buena aproximación con las previsiones teóricas obtenidas mediante elementos finitos. Las perturbaciones a baja frecuencia que se daban en las mismas geometrías sin fibra en este caso desaparecen o tienen una presencia menos notable ya que la expansión del flujo no se produce o tiene lugar de forma menos brusca.

El nivel de atenuación de este tipo de silenciadores es elevado, esto puede explicar el rizado que aparece en el rango de media frecuencia debido a que el propio silenciador atenúa la señal acústica. Esta situación puede mejorarse asignando a cada frecuencia el valor medio del TL de las frecuencias más cercanas. Los resultados para un promediado en frecuencia con tres puntos anteriores y posteriores se muestran en las Figuras 4.53 y 4.54.

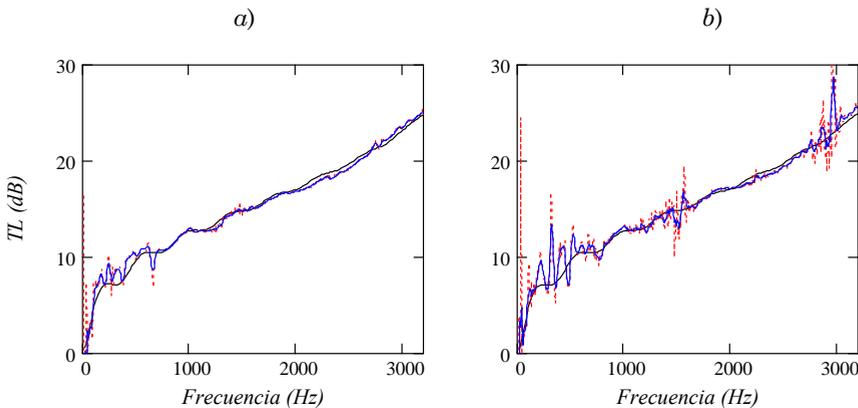


Figura 4.53. TL de la cámara 3 disipativa: a)  $M = 0.1$ ; b)  $M = 0.12$ : - - -, experimental; —, experimental con promediado en frecuencia; —, MEF.

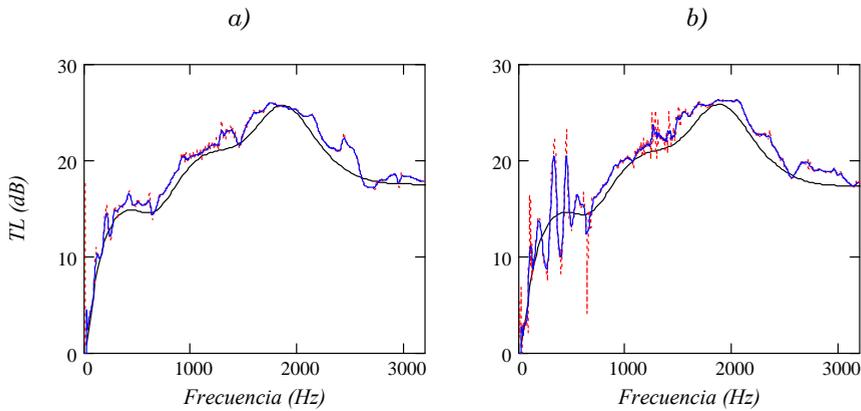


Figura 4.54. TL de la cámara 4 disipativa: a)  $M = 0.07$ ; b)  $M = 0.11$ :  $\cdots$ , experimental;  $\text{—}$ , experimental con promediado en frecuencia;  $\text{—}$ , MEF.

El modelo teórico empleado se ajusta razonablemente a las medidas experimentales, pudiendo afirmarse que los resultados obtenidos concuerdan con los previstos según la teoría al reproducir la tendencia el TL en todo el rango de frecuencias. Desde el punto de vista acústico la presencia de flujo produce la convección de energía acústica aguas abajo provocando la disminución del TL, tal y como puede observarse en la Figura 4.55.

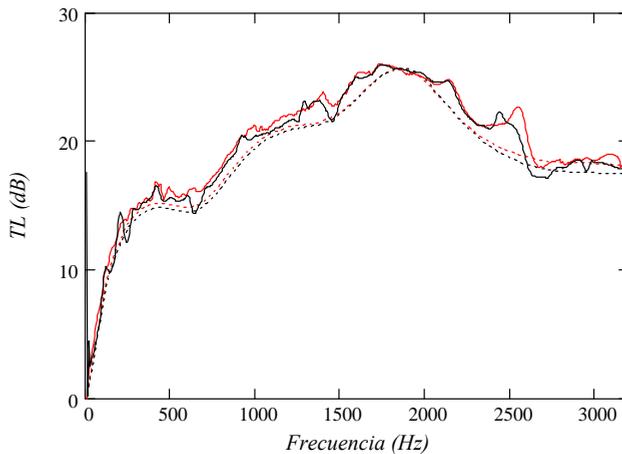


Figura 4.55. TL de la cámara 4 disipativa. Sin flujo medio:  $\text{—}$ , experimental;  $\cdots$ , MEF.  $M = 0.07$ :  $\text{—}$ , experimental;  $\cdots$ , MEF.

Las discrepancias observadas pueden atribuirse a diversos factores como es un llenado no homogéneo de la fibra y la presencia de la malla metálica que la

soporta (puede tener influencia sobre todo a altas frecuencias). Con respecto al primer aspecto se ha observado que, para determinadas geometrías, el índice de pérdidas de transmisión es muy sensible a la distribución de densidad de la fibra y por tanto también al proceso de llenado. La gráfica de la Figura 4.56 muestra esta sensibilidad mediante la consideración del  $TL$  de la cámara 4 medido tras distintos llenados del silenciador. En todos los casos se utiliza la misma cantidad de fibra, definida por una masa de 469 g, a la cual corresponde una resistividad de 5321 rayl/m a 25°C. La línea negra corresponde al  $TL$  teórico con densidad de llenado homogénea, mientras que el resto de curvas se han obtenido experimentalmente tras los distintos llenados con la misma cantidad de fibra.

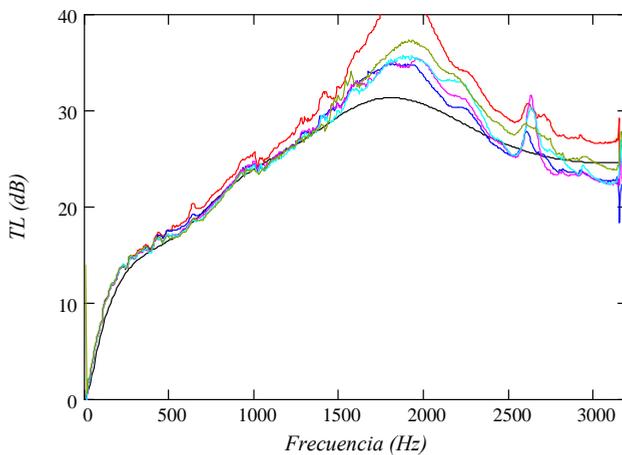


Figura 4.56.  $TL$  de la cámara 4 disipativa: —,  $MEF$ ; —, —, —, —, —, —, Medidas experimentales con distinta distribución de densidad de fibra.

Puede apreciarse que a baja frecuencia la mayoría de las medidas muestran un comportamiento prácticamente idéntico, sin embargo en alta frecuencia las diferencias son considerables, no solo cuantitativamente sino también por la presencia de un pico en algunas curvas por encima de los 2500 Hz.

Recientes estudios [24, 124] demuestran que la presencia de heterogeneidades en la distribución de la fibra, que proporciona variación en la resistividad y en la velocidad del sonido equivalente, provoca alteraciones en la curva del  $TL$  similares a las encontradas en las medidas experimentales. Al construir de forma manual el prototipo de silenciador, no es posible conocer la distribución de densidad del material absorbente en su interior, al menos de forma sencilla. Para analizar la influencia de un llenado no homogéneo, se ha calculado mediante elementos finitos la atenuación correspondiente a un silenciador de las dimensiones de la cámara 4 con 500 g de fibra y diferentes distribuciones de densidad. Las gráficas de la Figura 4.57 muestran los resultados obtenidos.

La línea negra corresponde al  $TL$  con una distribución homogénea de fibra. Las líneas roja y azul se han obtenido introduciendo en el modelo una variación de densidad en la dirección radial. En el caso 1 la fibra se encuentra más compactada en el radio interno ( $157 \text{ kg/m}^3$ ) que en el externo ( $118 \text{ kg/m}^3$ ) y en el caso 2 se ha introducido la tendencia contraria, con una densidad en el interior de  $56 \text{ kg/m}^3$  y en el exterior de  $150 \text{ kg/m}^3$ . La línea magenta pertenece al supuesto en que la densidad varía con la coordenada longitudinal, con más densidad a la entrada del silenciador que a la salida (de  $123 \text{ kg/m}^3$  a  $112 \text{ kg/m}^3$ ). En este último estudio intercambiar el sentido creciente de la densidad no modifica el  $TL$ . En todas las hipótesis se ha supuesto una variación lineal de la densidad con la coordenada.

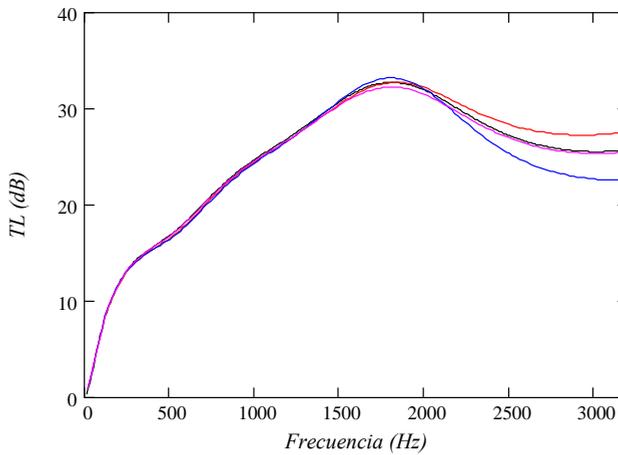


Figura 4.57.  $TL$  de cámara 4 disipativa. Influencia de distribución de densidad de fibra; —, distribución homogénea; —, variación radial 1; —, variación radial 2; —, variación axial.

La principal conclusión es que una distribución no homogénea de fibra provoca alteraciones en la curva del  $TL$ , sobre todo cuando la densidad varía con el radio. Es relevante también que las diferencias entre los modelos aparecen a frecuencias altas, por encima de  $1500 \text{ Hz}$  tanto en el estudio numérico como en las curvas obtenidas experimentalmente.



*Figura 4.58. Construcción de la cámara 3 disipativa.*

Con objeto de asegurar una distribución homogénea de fibra, se ha llevado a cabo la construcción de las cámaras con diferentes procedimientos y distinta cantidad de fibra. La cámara 3 mostrada en la Figura 4.58, se ha rellenado enrollando la fibra alrededor de la malla metálica tubular dispuesta para soportarla, como puede verse en la Figura 4.59 a). La cámara 4 de mayor radio se ha rellenado introduciendo la fibra desde un extremo de la misma teniendo encajado previamente en el conducto de entrada la malla tubular, ver Figura 4.59 b).



*Figura 4.59. Metodologías constructivas de silenciadores disipativos.*

Se ha trabajado con las diferentes metodologías de construcción en ambas cámaras hasta conseguir una curva experimental cercana a la prevista por la teoría y correspondiente a un llenado uniforme. El procedimiento de llenado b) facilita un llenado más uniforme que el a) y ha sido el empleado en la cámara con mayor radio. La cámara 3 se ha construido según el procedimiento a) por cuestiones de tipo práctico.

## 4.11. Consideraciones adicionales

En las cámaras ensayadas, tanto reactivas como disipativas, la influencia del flujo sobre la atenuación expresada mediante el  $TL$  no es grande, al menos para números de Mach usuales ( $M < 0.2$ ). Sin embargo, los polos de la matriz de transferencia sí muestran una gran dependencia del flujo medio, incluso para valores de Mach pequeños. En este apartado se muestran los polos de la matriz de transferencia de un silenciador reactivo y otro disipativo obtenidos experimentalmente.

La definición de la matriz de transferencia se formula a partir de dos variables de estado y de qué se considere la entrada y la salida del sistema. La empleada en este apartado toma la presión y la velocidad acústica como variables de estado y considera entrada y salida las secciones localizadas por los micrófonos 3 y 4 respectivamente, tal como muestra la Figura 4.60. Su expresión viene dada por la ecuación (2.112) referida a flujo másico.

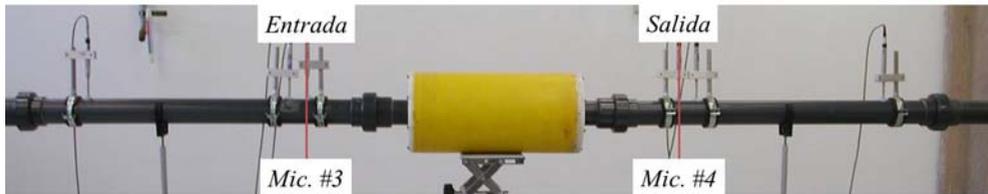


Figura 4.60. Definición de secciones de entrada y salida.

A continuación se muestran los polos de la cámara de expansión simple 3 analizada en el apartado 4.10.1.1 de radio 0.0532 m y longitud 0.4 m y la misma cámara rellena de material absorbente correspondiente a la cámara 3 disipativa del apartado 4.10.2.2.

### 4.11.1. Matriz de transferencia de cámara de expansión simple

Las gráficas de la Figura 4.61 a la Figura 4.64 muestran los polos de la matriz de transferencia referida a flujo másico obtenidos experimentalmente y mediante el cálculo por elementos finitos de la cámara de expansión simple 3 sin flujo medio y con flujo medio dado por  $M = 0.07$ .

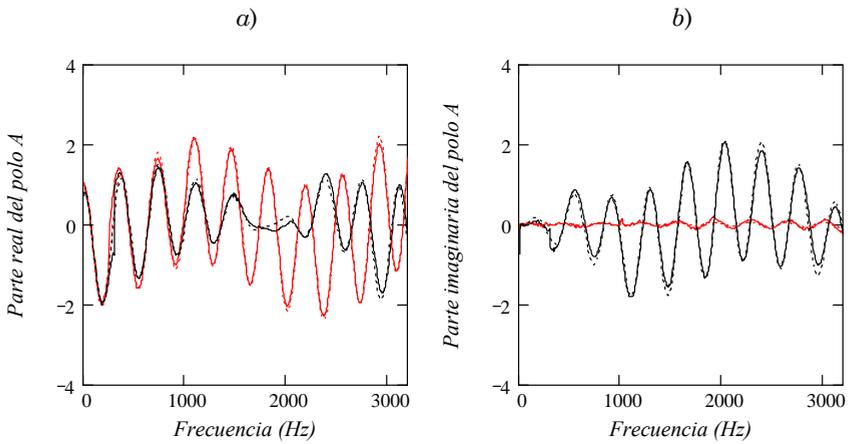


Figura 4.61. Polo A de la cámara de expansión simple 3: a) parte real; b) parte imaginaria. Sin flujo medio: —, experimental; - - -, MEF.  
 $M = 0.07$ : —, experimental; - - -, MEF.

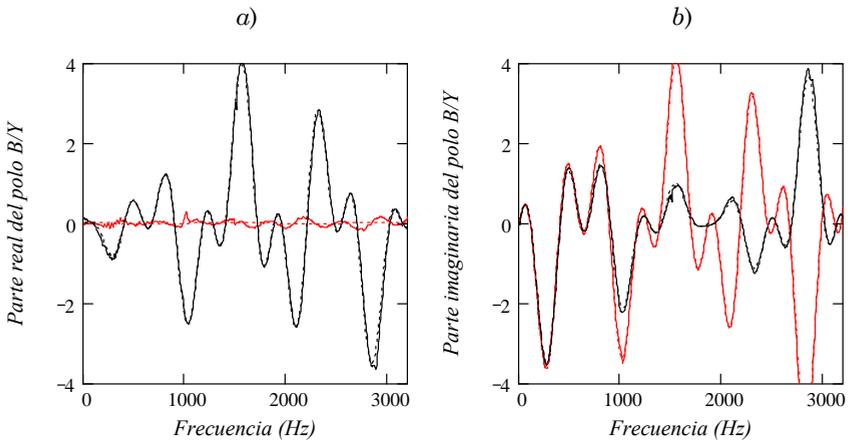


Figura 4.62. Polo B adimensionalizado de la cámara de expansión simple 3: a) parte real; b) parte imaginaria. Sin flujo medio: —, experimental; - - -, MEF.  
 $M = 0.07$ : —, experimental; - - -, MEF.

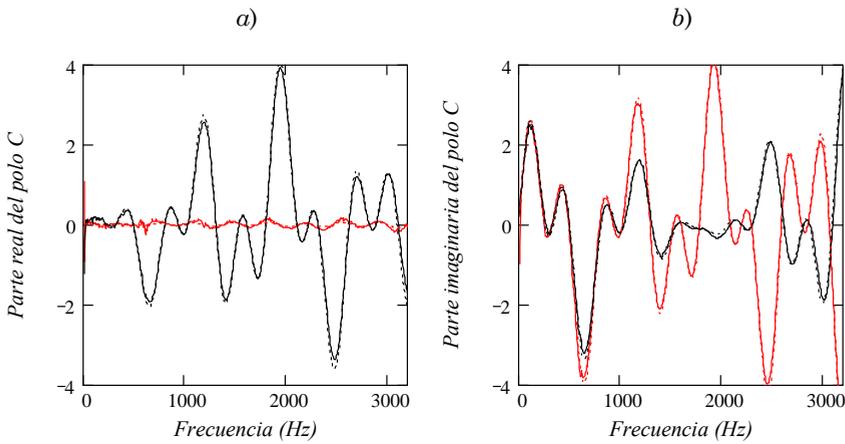


Figura 4.63. Polo C de la cámara de expansión simple 3: a) parte real; b) parte imaginaria. Sin flujo medio: —, experimental; - - -, MEF.  
 $M = 0.07$ : —, experimental; - - -, MEF.

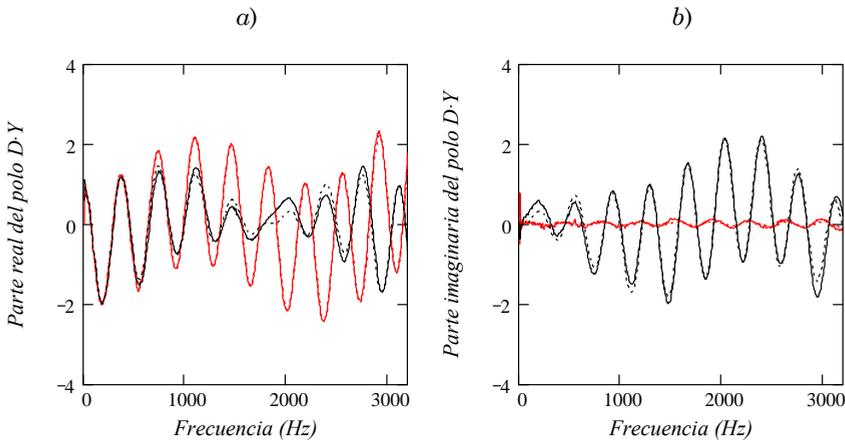


Figura 4.64. Polo D adimensionalizado de la cámara de expansión simple 3: a) parte real; b) parte imaginaria. Sin flujo medio: —, experimental; - - -, MEF.  
 $M = 0.07$ : —, experimental; - - -, MEF.

En todos los casos puede observarse como los términos de la matriz de transferencia dependen notablemente de la presencia de flujo, incluso con valores pequeños de  $M$  como es el caso mostrado. Las medidas experimentales reproducen con precisión los resultados obtenidos mediante elementos finitos. Es interesante también constatar cómo en el caso de flujo medio nulo, las medidas experimentales reproducen el comportamiento de fluido real que

puede deducirse de la pequeña oscilación alrededor de cero de aquellos polos casi nulos como son la parte real de B adimensionalizado y C, así como la parte imaginaria de A y de D adimensionalizado.

#### 4.11.2. Matriz de transferencia de cámara disipativa

Las gráficas de la Figura 4.65 a la Figura 4.68 muestran los polos de la matriz de transferencia referida a flujo másico de la cámara disipativa 3 sin flujo medio y con distintos valores de flujo medio, tanto medidos como calculados.

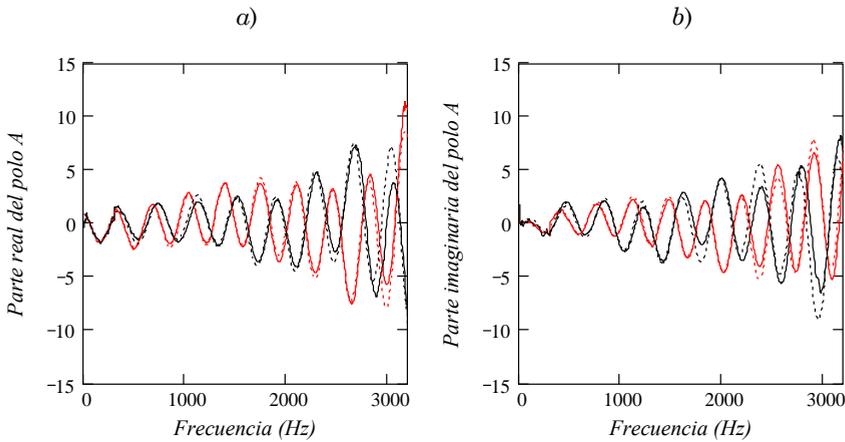


Figura 4.65. Polo A de la cámara disipativa 3: a) parte real; b) parte imaginaria. Sin flujo medio: —, experimental; ----, MEF.  $M = 0.1$ : —, experimental; ----, MEF.

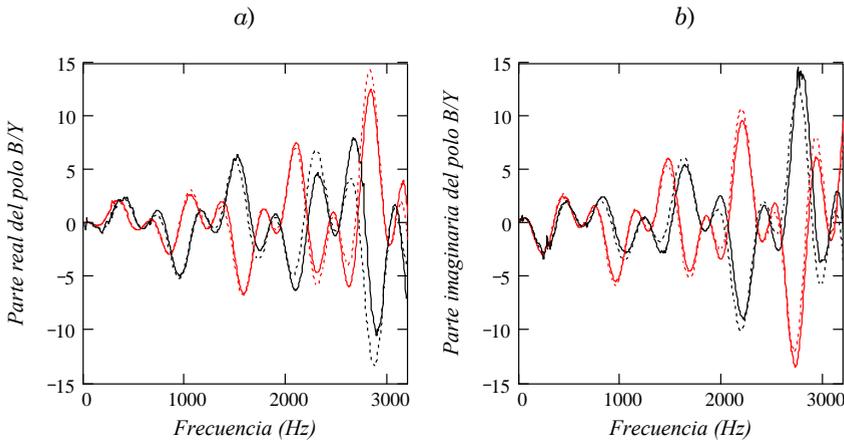


Figura 4.66. Polo B adimensionalizado de la cámara disipativa 3: a) parte real; b) parte imaginaria. Sin flujo medio: —, experimental; ----, MEF.  $M = 0.1$ : —, experimental; ----, MEF.

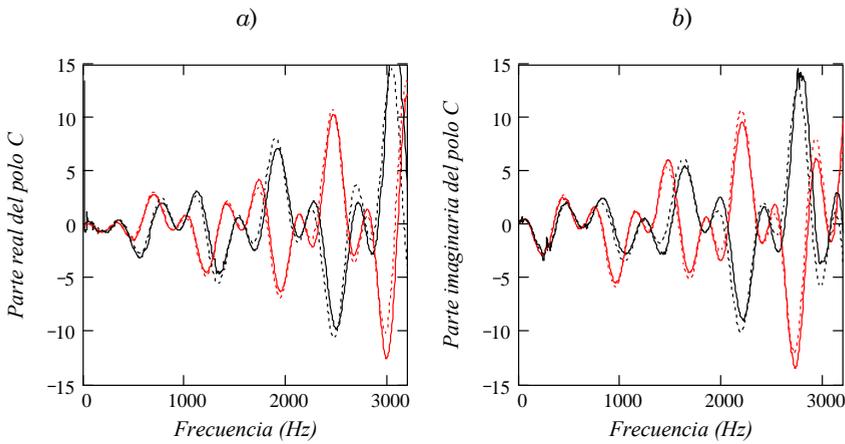


Figura 4.67. Polo C de la cámara disipativa 3: a) parte real; b) parte imaginaria. Sin flujo medio: —, experimental; - - -, MEF.  $M = 0.1$ : —, experimental; - - -, MEF.

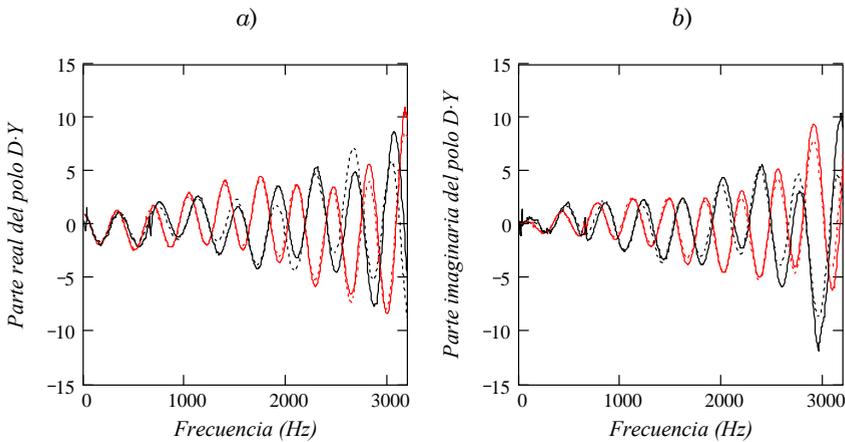


Figura 4.68. Polo D adimensionalizado de la cámara disipativa 3: a) parte real; b) parte imaginaria. Sin flujo medio: —, experimental; - - -, MEF.  $M = 0.1$ : —, experimental; - - -, MEF.

En este caso también las medidas experimentales reflejan la dependencia de los polos de la matriz de transferencia con el flujo medio. Como ocurría con el índice de pérdidas por transmisión, al no disponer de un modelo muy preciso de la caracterización de la fibra con respecto a las posibles heterogeneidades en su distribución o a la interacción de la rejilla que la soporta con el campo acústico, se observa cierta discrepancia entre las magnitudes medidas y las calculadas.

Teniendo en cuenta que la matriz de transferencia define completamente el comportamiento acústico de un silenciador y que además en modelos generales de diseño se usan los cuatro polos para integrar el silenciador en la línea de escape completa, el sistema de medida implementado resulta útil y adecuado.

## 4.12. Conclusiones

En este capítulo se ha descrito el sistema experimental desarrollado que supone el objetivo principal de esta Tesis, el cual ha permitido complementar las instalaciones del Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica de la UPV. Dichas instalaciones presentaban ciertas carencias dado que no era posible la inclusión de flujo medio de forma fiable y eficiente. Tanto el dispositivo como la metodología seleccionada son fruto de la revisión bibliográfica llevada a cabo, así como del estudio comparativo de distintas metodologías. El método finalmente implementado tiene en cuenta la calidad de los resultados y sobre todo la duración de los ensayos.

Se ha llevado a cabo una descripción de la instrumentación empleada tanto para la medida de variables ambientales como para el registro y procesado de las señales acústicas en los ensayos.

La validación del sistema de medida se ha efectuado por comparación de los cuatro polos de la matriz de un tubo recto con resultados analíticos disponibles en la bibliografía. Se ha aplicado la metodología desarrollada para obtener la caracterización del comportamiento acústico de diversos prototipos de silenciadores de escape mediante el índice de pérdidas por transmisión. Éste parámetro muestra la precisión de la técnica desarrollada. Al no tener el flujo medio una gran influencia sobre el  $TL$  de los silenciadores ensayados, adicionalmente, se han mostrado los polos de la matriz de transferencia de algunos de los silenciadores estudiados donde la influencia del flujo medio es más evidente.

Los resultados experimentales se han comparado con las predicciones teóricas obtenidas mediante el método de elementos finitos. En todos los casos existe una excelente concordancia.



# Capítulo 5. Conclusiones y desarrollos futuros

## ***Resumen del capítulo***

*En este capítulo se presentan de forma esquemática las conclusiones derivadas del desarrollo de esta Tesis, principalmente las asociadas al objetivo fundamental de la misma que es el desarrollo de herramientas experimentales para la caracterización acústica de silenciadores en presencia de flujo medio. Se exponen también las vías de desarrollo abiertas a partir de este trabajo.*

## 5.1. Conclusiones

Las principales aportaciones de esta Tesis son:

- Se ha presentado la ecuación que gobierna el fenómeno acústico en presencia de flujo medio y se han analizado sus principales características, teniendo en cuenta las pérdidas por fricción provocadas tanto por el efecto convectivo del flujo como las debidas a la fricción turbulenta, estas últimas de gran importancia en presencia de flujo medio.
- Se ha empleado el modelo de onda plana para introducir la representación matricial de sistemas acústicos, se han descrito sus ventajas y se ha analizado en detalle la formulación que habitualmente se encuentra en la literatura. Se ha mostrado que el rango de validez en frecuencia de la teoría unidimensional es bastante limitado por lo que constituye una herramienta interesante sólo en ciertas aplicaciones como son conductos rectos de sección uniforme. En otras configuraciones permite dar una idea del efecto de algunos factores como son, en la cámara de expansión simple, las dimensiones o la presencia de resonadores laterales.
- Se han presentado dispositivos empleados habitualmente en la construcción de silenciadores de escape diferenciándolos, según el efecto conseguido, en reactivos y disipativos. A partir de los mismos se han mostrado posibles tipologías de silenciosos. Se ha presentado distintos modelos de impedancia acústica de superficies perforadas y caracterización de materiales absorbentes válidos en presencia de flujo medio. También se han definido distintos índices de atenuación empleados en la caracterización de silenciadores así como la obtención del índice de pérdidas de transmisión a partir de los términos de la matriz de transferencia del sistema.
- Dadas las dificultades inherentes asociadas a la medida y caracterización acústica de dispositivos de control de ruido en presencia de flujo medio, se ha llevado a cabo una profunda revisión bibliográfica de metodologías experimentales. Un análisis pormenorizado de ventajas e inconvenientes ha permitido especificar las características del sistema a desarrollar.
- Se ha llevado a cabo el objetivo principal de la Tesis que es el diseño, desarrollo, construcción y puesta a punto de un banco de ensayos para

medida experimental y la caracterización acústica de silenciadores de escape en presencia de flujo medio.

- Se ha implementado el método de los dos micrófonos considerando que resulta el más adecuado y sencillo de implementar además de estar validado por anteriores investigadores.
- Se ha dotado la línea de ensayo de la instrumentalización necesaria para reproducir las condiciones de funcionamiento de silenciadores de escape, esto es, una soplante en la cabeza de la línea para generar el flujo de aire, un sistema de canalización construido con tubería de PVC dotada de los acoplamientos y juntas de estanqueidad necesarios. Se han dispuesto dos silenciadores disipativos para reducir el ruido de flujo asociado a la soplante, irregularidades geométricas y codos. Para generar la señal acústica se ha dispuesto un conjunto de altavoces seleccionados con el criterio de asegurar un comportamiento lineal dentro del rango de frecuencias de interés. Se han construido unas cajas metálicas para su alojamiento diseñadas a partir de las especificaciones del fabricante.
- Se ha instrumentalizado el banco de ensayos para generar distintos tipos de señal acústica con el objeto de implementar y comparar diversas metodologías de ensayo. Como conclusión de este estudio se ha resuelto el método de las dos fuentes como el más idóneo ya que permite llevar a cabo, en un único montaje, los dos ensayos independientes necesarios para la obtención de la matriz de transferencia del sistema en estudio.
- En cuanto al sistema de adquisición se han empleado micrófonos de presión enrasados en la pared interna de la tubería siguiendo las recomendaciones de la literatura consultada. El método requiere la medida de dos micrófonos; no obstante, para cubrir mayor rango de frecuencia se han colocado tres separados una distancia desigual entre sí que se emplean por parejas.
- El sistema de control está diseñado para generar simultáneamente dos señales de excitación no correlacionadas y adquirir de forma sincronizada.
- Una de las aportaciones más importantes de esta Tesis es la implementación del método de las dos fuentes con excitación simultánea que ha resultado de gran eficacia tanto por la calidad de los resultados como por la reducción de la duración de los ensayos. Este último aspecto es de gran importancia sobre todo en presencia de flujo

medio ya que los parámetros ambientales, como la temperatura o la velocidad de flujo, pueden variar rápidamente con el tiempo.

- El banco de ensayos se ha validado en base a la obtención de los polos de la matriz de transferencia de un conducto de sección recta en presencia de flujo medio, cuya expresión analítica es conocida.
- Se ha obtenido el índice de pérdidas de transmisión de silenciadores de tipo reactivo y disipativo con una concordancia excelente respecto a la previsión teórica. Se ha analizado la influencia del flujo medio en las medidas experimentales de cámaras de expansión simple encontrando una correlación entre las dimensiones y el efecto del mismo.
- En las cámaras con material absorbente ensayadas, se ha constatado el efecto sobre la curva de atenuación de una distribución heterogénea de la fibra mediante la obtención numérica del  $TL$  con distintas hipótesis de distribución de densidades. Existen estudios numéricos precisos que incluyen en la formulación la variación espacial de la densidad del material absorbente sobre propiedades como la resistividad, la densidad y velocidad del sonido del fluido equivalente con que se modela la fibra y que predicen esta fuerte dependencia. La fabricación de los prototipos ensayados en esta Tesis se ha llevado a cabo de forma manual y probablemente con un llenado desigual del que no es posible conocer la función de distribución de densidad. Por esta razón, en las predicciones numéricas con las que se han comparado las medidas experimentales, se ha supuesto un llenado homogéneo y se ha llevado a cabo un cuidadoso proceso de llenado de fibra con el objetivo de conseguir una densidad uniforme en el volumen relleno.
- En el Apéndice se presenta el método de elementos finitos como una herramienta de validación del sistema de medida experimental desarrollado. Se ha empleado una formulación en presión, válida para flujo medio uniforme. Tanto en la obtención de las matrices de comportamiento del sistema como en el acoplamiento entre subdominios por medio de superficies perforadas, se ha incluido el efecto del flujo medio. Para dicho estudio, se ha hecho uso de los códigos de elementos finitos implementados por el grupo investigador del CIIM a los largo de diversos proyectos de investigación. Dichos códigos permiten la consideración de condiciones generales de diseño, incluyendo flujo medio, materiales absorbentes no homogéneos, superficies perforadas por medio de su impedancia (con diferentes condiciones de continuidad) y múltiples condiciones de contorno. La aportación en este aspecto se basa en la selección de variables para la

formulación del problema, la inclusión de pérdidas viscosas del aire y la selección de los modelos del fluido equivalente del material absorbente y de la impedancia de las superficies perforadas.

## 5.2. Desarrollos futuros

A lo largo del desarrollo de esta Tesis han quedado abiertas vías de estudio en el ámbito del modelado y técnicas experimentales para la caracterización acústica de silenciadores de escape. Las posibilidades de trabajos futuros, podrían ser, entre otras:

- Desarrollo de modelos e implementación de técnicas experimentales que incluyan aspectos como la existencia de altas temperaturas y su gradiente asociado, así como la influencia de la distribución heterogénea del material absorbente en silenciadores disipativos.
- Estudio de fenómenos aeroacústicos, que incluyan la interacción del flujo con la estructura y con el campo acústico.
- Mejora de modelos de impedancia en presencia de flujo medio.
- Extensión de las actividades de caracterización acústica experimental a otros dispositivos de la línea de escape, tales como catalizadores y trampas de partículas diésel. En los trabajos más recientes disponibles en la bibliografía, dichos dispositivos han mostrado tener un impacto acústico no despreciable.



# Apéndice A. Aplicación del MEF a la ecuación de ondas

## ***Resumen del Apéndice***

*En esta Tesis, el método de elementos finitos se ha utilizado como herramienta de validación de las medidas experimentales. Por esta razón en el presente Apéndice se presenta la descripción de la metodología particularizada a las geometrías caracterizadas experimentalmente, bajo las condiciones en las que se han llevado a cabo los ensayos.*

## A.1 Introducción

En el Capítulo 2 se ha deducido la ecuación de ondas que gobierna el fenómeno acústico. La deducción de esta ecuación parte de la consideración simultánea de la ecuación de continuidad, la de equilibrio dinámico y la ecuación de la energía. En función de la variable elegida en su expresión se obtienen distintas formulaciones. En este capítulo se empleará como incógnita del problema la presión acústica.

Como opciones alternativas al método de elementos finitos (MEF) para la resolución de la ecuación de ondas existen el modelo de onda plana y técnicas analíticas multidimensionales. El primero es válido para un rango de frecuencias muy limitado. En cuanto a las técnicas analíticas multidimensionales proporcionan una solución más aproximada pero únicamente son aplicables en la práctica si la geometría, el medio y las condiciones de contorno no resultan complejos. El método de elementos finitos constituye una herramienta de cálculo general y se ha elegido como la más adecuada para la resolución del problema acústico en esta Tesis.

El MEF fue desarrollado en su origen como una herramienta para la resolución de problemas estructurales [158]. Hoy en día se ha convertido en una herramienta de cálculo útil para una amplia variedad de problemas de ingeniería. Su gran versatilidad se debe a la posibilidad de adaptarse a cualquier geometría y condiciones de contorno complejas así como a medios con propiedades anisótropas.

Fue originalmente empleado para la resolución del problema acústico por Gladwell *et al.* [71-73] y Craggs [42, 43]. Los primeros trabajos que abordaron el problema acústico en silenciadores fueron llevados a cabo por Young y Crocker [156, 157] aunque su estudio se limitaba a un rango de frecuencias pequeño, geometrías sencillas, medio estacionario y sin la consideración de fenómenos disipativos. En posteriores trabajos, Craggs [41] emplea un planteamiento variacional lo que permite la inclusión de disipación en los modelos y son Sigman *et al.* [138] y Abrahamson [16] quienes por primera vez tienen en consideración el flujo medio.

## A.2 Formulación en presión

En este apartado se presenta la formulación del problema acústico y se aplica la técnica de residuos ponderados junto con la formulación de Galerkin para la resolución mediante el MEF. La variable acústica que se considera en el modelo matemático es la presión. En presencia de flujo medio conocido, estacionario y uniforme, el campo de presiones viene dominado por la ecuación convectiva clásica dada por la expresión (2.28)

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \tag{A.1}$$

Todas las cámaras ensayadas en el desarrollo de esta Tesis presentan simetría de revolución, por lo que en el desarrollo que sigue se tendrá en cuenta en la formulación. El flujo medio en los cálculos llevados a cabo se ha supuesto paralelo al eje de simetría, ésta hipótesis puede considerarse válida ya que, en el montaje experimental, la longitud del conducto de entrada es suficientemente larga como para que el flujo turbulento se desarrolle completamente [154]. Empleando el sistema de referencia dado en la Figura A.1  $\{x, r\}$ , viene dado por

$$\vec{U}_{fm} = \{U_{fm} \quad 0\} \tag{A.2}$$

y se considera un comportamiento armónico del campo de presiones  $p = Pe^{j\omega t}$ , la ecuación (A.1), queda

$$\left(1 - \frac{U_{fm}^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} - 2j\omega \frac{U_{fm}}{c_0^2} \frac{\partial P}{\partial x} + k_0^2 P = 0 \tag{A.3}$$

### A.2.1 El problema acústico

Como ya se ha indicado, se lleva a cabo la resolución aplicando la formulación de elementos finitos mediante el método de residuos ponderados. Para ello se multiplica la ecuación anterior por una función de ponderación  $\Psi$  [158] y se integra en el dominio de definición del problema. La Figura A.1 representa la superficie de revolución de un silenciador genérico en el que  $\Omega$  representa su área y  $\Gamma$  el contorno asociado.

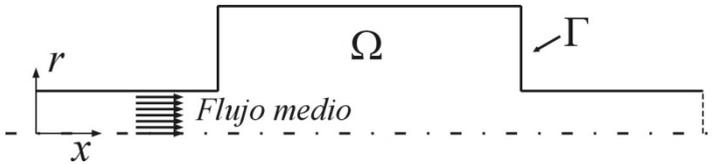


Figura A.1. Silenciador con flujo medio.

Al aplicar el teorema de Green al residuo ponderado se tiene [54]

$$\int_{\Omega} \nabla^T \Psi [D] \nabla P d\Omega + \frac{2j\omega}{c_0^2} \int_{\Omega} \Psi \vec{U}_{fm}^T \nabla P d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} \Psi P d\Omega - \int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial P}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma = 0 \tag{A.4}$$

donde el superíndice  $T$  denota traspuesta. La coordenada angular se ha omitido en virtud de la simetría de revolución, su inclusión multiplicaría todas las integrales presentes en la ecuación (A.4) por el factor  $2\pi$ . Por otro lado, los elementos diferenciales correspondientes, según la Figura A.1, son  $d\Omega = r dr dx$  y  $d\Gamma$  dependería de la orientación de la línea de contorno referida, siendo  $r dr$  para el contorno perpendicular al eje  $x$  y  $R dx$  en un contorno paralelo de coordenada  $r = R$ . La matriz  $[D]$  viene dada por

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 - U_{fm}^2 / c_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

y  $\vec{n}$  es el vector unitario normal al contorno dirección saliente. Si se discretiza el dominio en  $N_e$  elementos de área  $\Omega^e$ , la ecuación (A.4) queda

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \nabla^T \Psi^{(e)} [D] \nabla P^{(e)} d\Omega + \frac{2j\omega}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \Psi^{(e)} \vec{U}_{fm}^T \nabla P^{(e)} d\Omega \\ - k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \Psi^{(e)} P^{(e)} d\Omega - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} \Psi^{(e)} \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \vec{n}^T [D] \vec{n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde  $\Gamma^e$  corresponde a la línea externa de  $\Omega^e$ .

La presión se interpola a partir de sus correspondientes valores nodales

$$P^{(e)} = [N] \{P^{(e)}\} \quad (\text{A.7})$$

donde  $[N]$  es la matriz que contiene las funciones de forma y  $\{P^{(e)}\}$  el vector que contiene el valor de la presión en cada nodo del elemento.

En la formulación de Galerkin la función de ponderación se aproxima en la misma base que la función incógnita [158] de modo que se cumple

$$\Psi^{(e)} = [N] \{\Psi^{(e)}\} \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo (A.7) y (A.8) en (A.6) queda

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega \left\{ P^{(e)} \right\} \\
 & + \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T \int_{\Omega^e} \frac{2j\omega}{c_0^2} [N]^T \bar{U}_{jm}^T [B] d\Omega \left\{ P^{(e)} \right\} \\
 & - \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T \int_{\Omega^e} k_0^2 [N]^T [N] d\Omega \left\{ P^{(e)} \right\} \\
 & - \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \bar{n}^T [D] \bar{n} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

donde  $[B]$  contiene las derivadas de las funciones de forma. Si se define  $\{L\}$  como el operador que contiene las derivadas parciales

$$\{L\} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial r \end{Bmatrix} \tag{A.10}$$

puede escribirse

$$[B] = \{L\} [N] = \begin{Bmatrix} \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial x & \dots & \partial N_{pe}/\partial x \\ \partial N_1/\partial r & \partial N_2/\partial r & \dots & \partial N_{pe}/\partial r \end{Bmatrix} \tag{A.11}$$

donde  $N_{pe}$  es el número de nodos por elemento. Si se introduce la siguiente nomenclatura

$$[k^{(e)}] = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega \tag{A.12}$$

$$[c^{(e)}] = \frac{2}{c_0^2} \int_{\Omega^e} [N]^T \bar{U}_{jm}^T [B] d\Omega \tag{A.13}$$

$$[m^{(e)}] = \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega^e} [N]^T [N] d\Omega \tag{A.14}$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \bar{n}^T [D] \bar{n} d\Gamma \tag{A.15}$$

La ecuación (A.9) puede escribirse de forma más compacta como sigue

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T [k^{(e)}] \left\{ P^{(e)} \right\} + j\omega \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T [c^{(e)}] \left\{ P^{(e)} \right\} \\
 & - \omega^2 \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T [m^{(e)}] \left\{ P^{(e)} \right\} - \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T \left\{ f^{(e)} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Finalmente se ensamblan las matrices de todos los elementos del dominio dando lugar al siguiente sistema de ecuaciones

$$\{\Psi\}^T ([K]\{P\} + j\omega[C]\{P\} - \omega^2[M]\{P\} - \{F\}) = 0 \quad (\text{A.17})$$

Dado que la solución al problema debe ser independiente de la función de ponderación escogida, se obtiene finalmente

$$([K] + j\omega[C] - \omega^2[M])\{P\} = \{F\} \quad (\text{A.18})$$

Esta expresión no es más que un sistema de ecuaciones lineales donde los grados de libertad contenidos en el vector  $\{P\}$  corresponden a la presión en los nodos del sistema. Nótese que la matriz de coeficientes depende de la frecuencia y por lo tanto debe resolverse en cada frecuencia de interés.

Si en alguna frontera del dominio se impone como condición de contorno un valor de presión  $\tilde{P}$  conocido, como la amplitud de onda de presión armónica forzada, la ecuación asociada a los nodos contenidos en dicha frontera se sustituye por la ecuación correspondiente a la condición de Dirichlet  $P = \tilde{P}$ .

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones se puede conocer el valor de la presión en cualquier nodo del dominio discretizado. Para obtener el valor de la presión en cualquier lugar del dominio bastará con localizar el elemento  $e$  al que pertenece y emplear la expresión (A.7)

$$P^{(e)} = [N]\{P^{(e)}\} \quad (\text{A.19})$$

## A.2.2 Vector de carga y condiciones de contorno

### A.2.2.1 Condición de velocidad

El vector de términos independientes  $\{F\}$  contiene derivadas de los grados de libertad del problema acústico, de modo que las condiciones de contorno asociadas son tipo Neumann. Físicamente corresponden a la velocidad normal al contorno. Así, la condición de contorno natural equivale a pared rígida y cualquier valor no nulo equivale a una onda de velocidad armónica forzada en tal contorno. Las secciones de entrada y salida de un silenciador cumplen la particularidad de que pueden considerarse planas y perpendiculares a un eje del sistema de referencia, en este apéndice el eje  $x$ . Los conductos asociados mantienen la sección uniforme a lo largo de la dirección axial y el flujo medio se considera completamente desarrollado. Bajo estas circunstancias la formulación correspondiente para un valor de velocidad normal  $\tilde{U}$  conocido, será

$$\begin{aligned}
 \{f^{(e)}\} &= \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} \bar{n}^T [D] \bar{n} d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial x} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - U_{fm}^2 / c_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} d\Gamma \\
 &= -\rho_0 (1 - M^2) \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \left( j \omega \{\tilde{U}^{(e)}\} + U_{fm} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{\tilde{U}^{(e)}\} \right) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

donde  $d\Gamma = r dr$  ya que corresponde al contorno sobre el que se aplica la condición de velocidad. La obtención de los términos del vector de carga derivado de este tipo de condición de contorno requiere la evaluación de la distribución nodal de  $\{\tilde{U}^{(e)}\}$ .

### A.2.2.2 Condición de impedancia. Salida anecoica

Esta condición es apta para imponer que parte del contorno está caracterizado por una impedancia acústica como puede ser una terminación anecoica. Esta última condición resulta especialmente útil ya que permite la determinación del  $TL$  en un único análisis. La impedancia acústica se define como la relación entre la presión y la velocidad

$$Z = \frac{P}{U} \tag{A.21}$$

donde  $U$  corresponde a la velocidad normal al contorno considerado. A continuación se desarrolla la formulación para una sección normal al eje  $x$ . La ecuación de Euler (2.16) proporciona la relación entre el gradiente de presión y la velocidad

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0 \left( j \omega U + U_{fm} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \tag{A.22}$$

Empleando la definición de la impedancia dada en (A.21)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0 \left( j \omega \frac{P}{Z} + \frac{U_{fm}}{Z} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \tag{A.23}$$

Despejando la derivada de la presión con respecto a la dirección normal al conducto, queda

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-\rho_0 j \omega P}{Z + \rho_0 U_{fm}} \tag{A.24}$$

y sustituido en el vector de carga

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} &= \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial x} \bar{n}^T [D] \bar{n} d\Gamma \\ &= (1-M^2) \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{-\rho_0 j \omega P^{(e)}}{Z + \rho_0 U_{fm}} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

donde  $d\Gamma = r dr$  en el contorno considerado. Ahora se puede definir la matriz

$$[c_z^{(e)}] = \rho_0 \frac{(1-M^2)}{Z + \rho_0 U_{fm}} \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T [N] d\Gamma \quad (\text{A.26})$$

De modo que el vector de carga para el elemento  $e$ , es igual a

$$\{f^{(e)}\} = -j \omega [c_z^{(e)}] \{P^{(e)}\} \quad (\text{A.27})$$

Ensamblando este vector en el sistema de ecuaciones correspondiente a todo el dominio dado en (A.18), modifica la matriz de coeficientes

$$([K] + j \omega ([C] + [C_z]) - \omega^2 [M]) \{P\} = \{F\} \quad (\text{A.28})$$

La impedancia correspondiente a una terminación anecoica en el caso de fluido ideal es  $Z_0 = \rho_0 c_0$ . Sustituida en (A.26) resulta

$$[c_z^{(e)}] = \frac{1-M}{c_0} \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T [N] d\Gamma \quad (\text{A.29})$$

### A.2.3 Campo de velocidades

La velocidad acústica correspondiente se calcula haciendo uso de la ecuación de Euler (2.16). Considerando despreciables las fuerzas volumétricas y en ausencia de flujo medio se transforma en la ecuación (2.36), que discretizada es igual a

$$\{\bar{U}^{(e)}\} = -\frac{1}{j \omega \rho_0} [B] \{P^{(e)}\} \quad (\text{A.30})$$

y en presencia de flujo medio, la componente  $x$  de la velocidad nodal del elemento  $e$   $\{U^{(e)}\}$ , es igual a

$$\frac{-1}{\rho_0} [\partial N_1 / \partial x \quad \partial N_2 / \partial x \quad \dots \quad \partial N_{pe} / \partial x] \{P^{(e)}\} = (j \omega [N] + \bar{U}_{fm}^T [B]) \{U^{(e)}\} \quad (\text{A.31})$$

La componente radial de la velocidad se obtendría empleando la segunda fila de la matriz  $[B]$  en el término de la izquierda de la igualdad. Si se evalúa la expresión (A.31) en  $N_{pe}$  puntos se genera un sistema de ecuaciones cuyo resultado conformará el vector de velocidades nodales del elemento. La selección de los  $N_{pe}$  puntos condiciona el sistema de ecuaciones siendo conveniente escoger los puntos de superconvergencia [158]. En el caso de acústica en conductos se puede utilizar un procedimiento alternativo, ya que, para la caracterización de cualquier elemento acústico, mediante la matriz de transferencia o del  $TL$ , en general se precisa conocer la velocidad en los conductos de entrada y salida en los que a suficiente distancia de las discontinuidades geométricas del montaje puede asegurarse comportamiento de onda plana. Así conocida la presión en dos secciones del conducto la expresión (2.88) facilita un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son la amplitud de las ondas incidente y reflejada que una vez sustituida en la ecuación (2.89) proporciona el valor del flujo másico en la sección deseada. Si se desea obtener la velocidad acústica, basta con sustituir la impedancia del conducto  $Y$  de la ecuación (2.89) por la impedancia del medio  $Z$ .

### A.2.4 Obtención de la atenuación

Una forma de obtener el índice de pérdidas por transmisión consiste en hacer dos análisis distintos y a partir de ellos obtener los polos de la matriz de transferencia dados en la expresión (2.119)

$$[T] = \begin{bmatrix} \left. \frac{P_a}{P_b} \right|_{U_b=0} & \left. \frac{P_a}{U_b} \right|_{P_b=0} \\ \left. \frac{U_a}{P_b} \right|_{U_b=0} & \left. \frac{U_a}{U_b} \right|_{P_b=0} \end{bmatrix} \quad (A.32)$$

El  $TL$  se calcula mediante la expresión (2.183). Considerando la misma sección transversal de los conductos de entrada y salida

$$TL = 20 \log \left| \frac{1}{2} \left( A + \frac{B}{Z} + Z C + D \right) \right| \quad (A.33)$$

Otra alternativa para obtener directamente el índice de pérdidas de transmisión  $TL$  consiste en imponer la condición de salida anecoica. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones dado en (A.18) se utiliza la expresión (2.175), que para conductos de entrada y salida del mismo tamaño resulta

$$TL = 20 \log \left( \left| \frac{P_1^+}{P_2^+} \right| \right) \quad (A.34)$$

La onda progresiva en la sección de entrada  $P_1^+$  se calcula a partir de la presión de la sección de entrada y de otra paralela separa una distancia  $L$ . Al imponer en las condiciones de contorno una excitación plana siempre que se analicen frecuencias por debajo de la primera frecuencia de corte del primer modo de alto orden el frente de onda en el conducto de entrada se mantiene plano, basta por tanto obtener la presión para cada sección en un nodo, el central. En la Figura A.2 se muestra el detalle

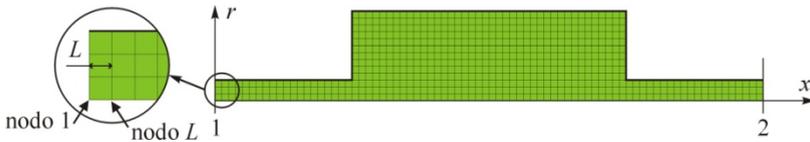


Figura A.2. Detalle de la obtención de  $P_1^+$ .

La presión incidente teniendo en cuenta la ecuación (2.74) y el sistema de referencia mostrado en la figura, es igual a

$$P_1^+ = \frac{P_1 - P_L e^{-\beta^- L}}{1 - e^{-(\beta^- + \beta^+) L}} \quad (\text{A.35})$$

donde  $\beta^+$  y  $\beta^-$  corresponde al número de onda de las ondas progresiva y regresiva, definidos en el Capítulo 2. En la sección de salida al imponer salida anecoica, la onda de presión transmitida  $P_2^+$  coincide con la total.

### A.3 Tubos perforados. Subdominios acoplados

Los conductos perforados constituyen un elemento común en el conformado de silenciadores de escape ya que por sí solos poseen un efecto interesante en la atenuación que además se ve mejorado con la presencia de materiales absorbentes. Forman parte de muchos estudios ya desarrollados [55, 63, 106, 115, 122, 142, 143]. En este apartado se expone una forma habitualmente empleada en la modelización mediante la técnica de elementos finitos de este tipo de superficies. Dado que la discretización de la geometría exacta de la superficie perforada es de una laboriosidad excesiva este tipo de superficies se modelan en base a su impedancia acústica.

En la Figura A.3 se muestran un silenciador formado por dos volúmenes conectados entre sí mediante una superficie perforada. Los volúmenes correspondientes son  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  de contornos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  y la superficie perforada que las conecta es  $\Gamma_p$ .

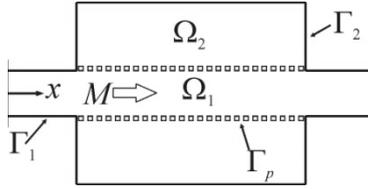


Figura A.3. Silenciador con conducto perforado.

En ambos dominios se debe cumplir la ecuación de ondas (A.1) que discretizada según el procedimiento expuesto en el apartado A.2.1 da lugar al correspondiente sistema de ecuaciones. Según la expresión (A.18) para cada dominio resulta

$$\begin{aligned} ([K_1] + j\omega[C_1] - \omega^2[M_1])\{P_1\} &= \{F_1\} \\ ([K_2] + j\omega[C_2] - \omega^2[M_2])\{P_2\} &= \{F_2\} \end{aligned} \tag{A.36}$$

Se va a abordar el planteamiento de las ecuaciones suponiendo que el flujo medio es paralelo al eje  $x$ . El número de Mach que lo caracteriza será  $M = U_{fm}/c_0$ , donde  $U_{fm}$  es la velocidad de flujo en el conducto central. En el modelado se va a suponer que el flujo medio no penetra en la cámara externa, esta consideración da lugar a que la matriz  $[C_2] = 0$ .

El vector de carga constituido por los términos independientes del sistema de ecuaciones está relacionado con posibles condiciones de contorno definidas en la frontera entre dominios, por tanto, el acoplamiento de las ecuaciones que gobiernan en cada dominio se lleva a cabo a través del mismo. Teniendo en cuenta que la superficie perforada es perpendicular a la dirección radial, a nivel de elemento en cada subdominio puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} &= \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial n} \bar{n}^T [D_1] \bar{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial r} \begin{Bmatrix} 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - U_{fm}^2/c_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial r} d\Gamma \\ \{f_2^{(e)}\} &= \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_2^{(e)}}{\partial r} d\Gamma \end{aligned} \tag{A.38}$$

donde  $d\Gamma = R dx$ , siendo  $R$  el radio del tubo perforado. Obsérvese que al ser paralelo el flujo al conducto, en la ecuación (A.37) el vector de carga no presenta dependencia explícita del mismo. Para alcanzar el acoplamiento del sistema de ecuaciones dado en (A.36) mediante los términos independientes ha

de considerarse la continuidad de alguna magnitud física. En los cálculos llevados a cabo en la elaboración de esta Tesis se ha empleado continuidad de velocidad normal a la superficie perforada. Esta condición implica que  $U_1 = -U_2$  [29, 85, 106] donde la componente de velocidad corresponde a la dirección radial, considerando de signo positivo la saliente del dominio. La impedancia de la superficie perforada se define como

$$Z_p = \frac{P_1 - P_2}{U} \quad (\text{A.39})$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son las presiones acústicas a ambos lados de la superficie y  $U$  corresponde a la velocidad acústica normal en sentido del dominio 1 al 2.

Por otro lado, la ecuación de Euler (2.16), proporciona la correspondencia de la velocidad acústica en la dirección radial, con la misma componente del gradiente de presión

$$\rho_0 \left( j \omega U_1 + U_{fm} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P_1}{\partial r} \quad (\text{A.40})$$

$$j \rho_0 \omega U_2 = - \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad (\text{A.41})$$

Combinando la definición de impedancia dada en la ecuación (A.39) con las expresiones anteriores y teniendo en cuenta la condición de continuidad en velocidad, resulta

$$\rho_0 \left( j \omega \frac{P_1 - P_2}{Z_p} + \frac{U_{fm}}{Z_p} \frac{\partial (P_1 - P_2)}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P_1}{\partial r} \quad (\text{A.42})$$

$$j \rho_0 \omega \frac{P_1 - P_2}{Z_p} = \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad (\text{A.43})$$

Discretizadas ahora para los elementos de la frontera y sustituidas en las expresiones (A.37) y (A.38) dan lugar a

$$\begin{aligned} \{f_1^{(e)}\} &= \frac{-j \rho_0 \omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N] \{P_1^{(e)}\} - [N] \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &\quad - \frac{\rho_0 U_{fm}}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial [N]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= -j \omega \left[ c_{Z_p}^{(e)11} \right] \{P_1^{(e)}\} + j \omega \left[ c_{Z_p}^{(e)12} \right] \{P_2^{(e)}\} - \left[ k_{Z_p}^{(e)11} \right] \{P_1^{(e)}\} \\ &\quad + \left[ k_{Z_p}^{(e)12} \right] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned}
 \{f_2^{(e)}\} &= \frac{j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N] \{P_1^{(e)}\} - [N] \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\
 &= j\omega \left[ c_{Z_p}^{(e)21} \right] \{P_1^{(e)}\} - j\omega \left[ c_{Z_p}^{(e)22} \right] \{P_2^{(e)}\}
 \end{aligned}
 \tag{A.45}$$

de manera que la presencia de la superficie perforada da lugar a la aparición de matrices de elementos finitos que multiplican a los grados de libertad. Para obtener estas matrices de forma sencilla las mallas empleadas en ambos dominios pueden ser conformes en la superficie  $\Gamma_p$ . Expandiendo las matrices dadas en la expresiones (A.44) y (A.45) a todo el dominio y realizando el ensamblado del sistema (A.36) resulta

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{bmatrix} [K_1] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_2] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C_1] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right. \\
 \left. - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [0] & [M_2] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{A.46}$$

### A.4 Consideración de material absorbente y tubo perforado

En este apartado se va a obtener la formulación mediante el MEF para silenciadores con una disposición similar a la del representado en la Figura A.4 en la que el material absorbente ocupa todo el dominio externo del silenciador y está separado del conducto central mediante una superficie perforada. En primer lugar se va a presentar la ecuación de ondas aplicada y discretizada en el material absorbente para luego acoplarla a la correspondiente del conducto principal.

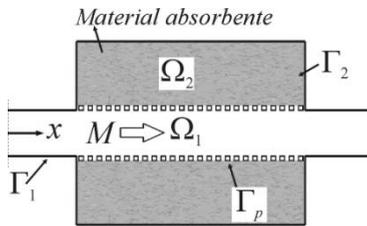


Figura A.4. Silenciador con material absorbente y flujo medio.

El estudio de la propagación de ondas acústicas en materiales absorbentes resulta relativamente sencillo cuando se trata este medio como un fluido equivalente caracterizado por una velocidad del sonido y densidad acústica  $\bar{c}, \bar{\rho}$ .

La aplicación de la ecuación de ondas al material absorbente se hará bajo el supuesto de que no hay flujo a través del mismo. Esta situación se ajusta a la realidad en configuraciones de interés práctico ya que normalmente el material absorbente se dispone paralelo a la corriente de aire. Además la superficie perforada que se suele emplear como soporte del material absorbente actúa a modo de barrera de protección. Esta situación junto con la mayor resistividad del material absorbente comparada con la del aire contribuye a la concentración del flujo por el canal principal del silenciador. Teniendo en cuenta todas las consideraciones, la ecuación de ondas (A.1) en un material absorbente queda

$$\nabla^2 p - \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (\text{A.47})$$

Asumiendo un comportamiento armónico del campo de presiones  $p = P e^{j\omega t}$  resulta

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \tilde{k}^2 P = 0 \quad (\text{A.48})$$

siendo  $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$  el número de onda equivalente del material absorbente [53, 60]. Siguiendo un desarrollo similar al del apartado A.2.1 se llega a una ecuación equivalente a (A.9) que sin flujo medio y adaptada a las características del medio a nivel de elemento resulta

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T \int_{\Omega^e} [B]^T [B] d\Omega \left\{ P^{(e)} \right\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T \int_{\Omega^e} \tilde{k}^2 [N]^T [N] d\Omega \left\{ P^{(e)} \right\} \\ & - \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \Psi^{(e)} \right\}^T \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Adoptando la nomenclatura de las matrices de apartados anteriores resulta

$$\left[ k_{abs}^{(e)} \right] = \int_{\Omega^e} [B]^T [B] d\Omega \quad (\text{A.50})$$

$$\left[ m_{abs}^{(e)} \right] = \frac{1}{\tilde{c}^2} \int_{\Omega^e} [N]^T [N] d\Omega \quad (\text{A.51})$$

$$\left\{ f_{abs}^{(e)} \right\} = \int_{\Gamma \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P^{(e)}}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{A.52})$$

Expandiendo las matrices de cada elemento a la dimensión de todo el dominio de material absorbente, ensamblándolas y teniendo en cuenta que la selección del residuo es arbitraria, resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left( [K_{abs}] - \omega^2 [M_{abs}] \right) \{P\} = \{F_{abs}\} \quad (\text{A.53})$$

En el dominio sin material absorbente se considera que el flujo medio es paralelo al eje  $x$  hipótesis que se ajusta a la realidad como se justificó anteriormente. El número de Mach que lo caracteriza es igual a  $M = U_{fm}/c_0$ , el sistema de ecuaciones que le corresponde, teniendo en cuenta la expresión (A.18) es

$$\left( [K] + j\omega[C] - \omega^2[M] \right) \{P\} = \{F\} \quad (\text{A.54})$$

En la ecuación (A.54), la matriz  $[C]$  incluye los términos de flujo además de los derivados de las condiciones de contorno de los conductos de entrada y salida. En la ecuación (A.53) correspondiente al material absorbente, no aparece tal matriz ya que en los laterales del dominio lo que se encuentra es pared rígida. Teniendo en cuenta la Figura A.4, los volúmenes  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  de contorno  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  respectivamente están conectados en el interior de la cámara a través de  $\Gamma_p$ , siguiendo un desarrollo similar al del apartado A.3 se tiene que para el conducto central el vector de carga es igual a

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_1^{(e)}}{\partial r} d\Gamma \quad (\text{A.55})$$

No afectado explícitamente por el flujo medio ya que es tangente a la interfase. Para la zona con material absorbente, no afectada por el flujo, se tiene

$$\{f_{abs}^{(e)}\} = \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \frac{\partial P_2^{(e)}}{\partial r} d\Gamma \quad (\text{A.56})$$

En las expresiones (A.55) y (A.56)  $d\Gamma = R dx$ , donde  $R$  es el radio del tubo perforado. La impedancia asociada al tubo perforado y material absorbente se define

$$\tilde{Z}_p = \frac{P_1 - P_2}{U} \quad (\text{A.57})$$

La notación  $\tilde{Z}_p$ , empleada para la impedancia en este apartado, denota dependencia con la velocidad del flujo y con el material absorbente. La relación entre el gradiente de presión y la velocidad acústica dada por la ecuación de Euler resulta,

$$\rho_0 \left( j \omega U_1 + U_{jm} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P_1}{\partial r} \quad (\text{A.58})$$

$$j \tilde{\rho} \omega U_2 = - \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad (\text{A.59})$$

El siguiente paso consiste en aplicar las condiciones de contorno que permitan el acoplamiento de los dos dominios. De forma análoga al estudio desarrollado en ausencia de material absorbente, se impone continuidad en velocidad normal, lo que da lugar a

$$\rho_0 \left( j \omega \frac{P_1 - P_2}{\tilde{Z}_p} + \frac{U_{jm}}{\tilde{Z}_p} \frac{\partial (P_1 - P_2)}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P_1}{\partial r} \quad (\text{A.60})$$

$$j \tilde{\rho} \omega \frac{P_1 - P_2}{\tilde{Z}_p} = \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad (\text{A.61})$$

De modo que los vectores de carga pueden escribirse

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} &= \frac{-j\rho_0\omega}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N] \{P_1^{(e)}\} - [N] \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &\quad - \frac{\rho_0 U_{jm}}{Z_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} \{P_1^{(e)}\} - \frac{\partial [N]}{\partial x} \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= -j\omega \left[ c_{Z_p}^{(e)11} \right] \{P_1^{(e)}\} + j\omega \left[ c_{Z_p}^{(e)12} \right] \{P_2^{(e)}\} - \left[ k_{Z_p}^{(e)11} \right] \{P_1^{(e)}\} \\ &\quad + \left[ k_{Z_p}^{(e)12} \right] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{aligned} \{f_{abs}^{(e)}\} &= \frac{j\tilde{\rho}\omega}{\tilde{Z}_p} \int_{\Gamma_p \cap \Gamma^e} [N]^T \left( [N] \{P_1^{(e)}\} - [N] \{P_2^{(e)}\} \right) d\Gamma \\ &= j\omega \left[ c_{Z_p}^{(e)21} \right] \{P_1^{(e)}\} - j\omega \left[ c_{Z_p}^{(e)22} \right] \{P_2^{(e)}\} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

El sistema de ecuaciones completo queda

$$\begin{aligned} \left( \begin{bmatrix} [K] + [K_{Z_p}^{11}] & -[K_{Z_p}^{12}] \\ [0] & [K_{abs}] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [C] + [C_{Z_p}^{11}] & -[C_{Z_p}^{12}] \\ -[C_{Z_p}^{21}] & [C_{Z_p}^{22}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{F_{abs}\} \end{Bmatrix} \\ -\omega^2 \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M_{abs}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} & \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

## A.5 Aplicaciones

En este apartado se va a aplicar el MEF a los silenciadores estudiados en el Capítulo 2 bajo la hipótesis de onda plana. Todas las gráficas que siguen se han obtenido considerando para la velocidad del sonido el valor  $c_0 = 340$  m/s y como densidad del aire  $\rho_0 = 1.225$  kg/m<sup>3</sup>, que son aproximadamente los valores correspondientes a una temperatura de 15°C.

También se ha supuesto para el aire comportamiento de fluido ideal ya que la consideración de fenómenos disipativos en ausencia de flujo medio no tiene demasiada importancia en la comparativa desarrollada. Se pretende mostrar la aportación de la teoría de onda plana en el estudio del efecto de distintos parámetros del silenciador y su limitación en el rango de frecuencias.

### A.5.1 Configuraciones sin disipación.

Corresponden a configuración sin disipación las cámaras de expansión simple y cámaras con conductos extendidos. En primer lugar se muestran los resultados obtenidos mediante la aplicación del MEF a las cámaras de expansión simple analizadas en el Capítulo 2 cuyas dimensiones principales, teniendo en cuenta la Figura A.5, están recogidas en la Tabla A.1

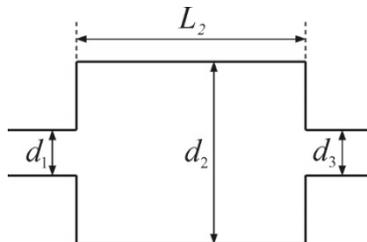


Figura A.5. Parámetros geométricos de las cámaras de expansión simple.

Geometría	$d_1$ (m)	$d_2$ (m)	$d_3$ (m)	$L_2$ (m)
1	0.05	0.2	0.05	0.2
2	0.05	0.2	0.05	0.4
3	0.05	0.1	0.05	0.2

Tabla A.1. Dimensiones de cámara de expansión simple.

Se ha modelado el dominio con elementos cuadriláteros cuadráticos de 0.005 m de lado y comportamiento axisimétrico. La malla empleada para la geometría 1 está representada en la Figura A.6. La Figura A.7 muestra los resultados.

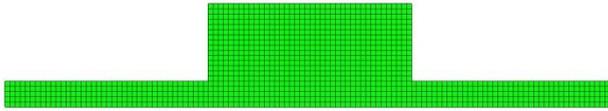


Figura A.6. Geometría 1. Malla de elementos finitos.

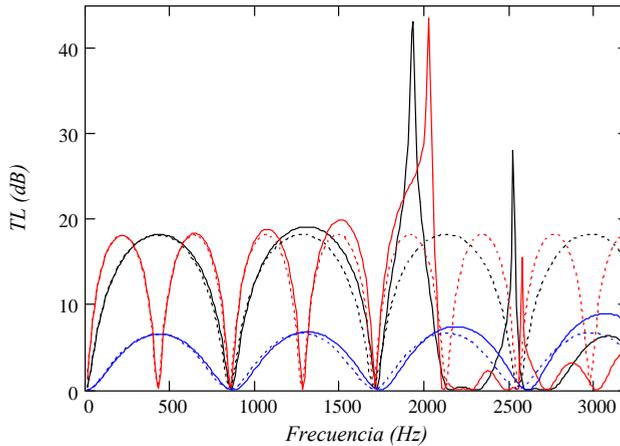


Figura A.7. TL de geometría 1: —, MEF; -.-, OP; Geometría 2: —, MEF; -.-, OP; Geometría 3: —, MEF; -.-, OP.

Tal y como preveía el modelo de onda plana, en la Figura A.7 puede observarse que la amplitud del TL aumenta con la relación de áreas cámara-conducto y que las bandas de paso de cámaras de igual longitud coinciden, al menos en el rango de frecuencias en el que el comportamiento se asemeja al previsto por la teoría de onda plana. En la simulación mediante elementos finitos dicho rango llega hasta la frecuencia de corte del primer modo axisimétrico de presión, a partir de la cual, la propagación de la onda resulta combinación de los diferentes modos que van apareciendo. En el apartado 2.10 se ha presentado un análisis exhaustivo de las frecuencias asociadas a los modos de presión responsables de las discrepancias halladas entre los dos modelos.

El primer modo de presión axisimétrico aparece a partir de la frecuencia de corte obtenida mediante la ecuación (2.253). Para las geometrías 1 y 2, de igual diámetro, su valor es 2071 Hz y a la geometría 3 le corresponde un valor de 4145 Hz. Estas frecuencias establecen un umbral a partir del cual se deben observar discrepancias importantes entre las dos teorías, sin embargo, los gráficos de la Figura A.7 muestran predicciones desiguales en frecuencias menores. La razón se encuentra en los modos de alto orden excitados en las discontinuidades geométricas que suponen el ensanchamiento y el

estrechamiento en los extremos de la cámara, dichos modos de presión son evanescentes, es decir se atenúan con la distancia.

La Figura A.8 ilustra la presencia de los modos de alto orden generados en el ensanchamiento a la entrada de la cámara, lado izquierdo. En ella está representado el campo de presiones de la geometría 1 en la que se ha impuesto una onda de presión de frente plano de amplitud unidad a la entrada del conducto izquierdo y condición de salida anecoica al final del conducto derecho. Las figuras representan la amplitud de la presión en todo el dominio para una frecuencia por debajo de la frecuencia de corte, gráfico *a*), y otra por encima, gráfico *b*).

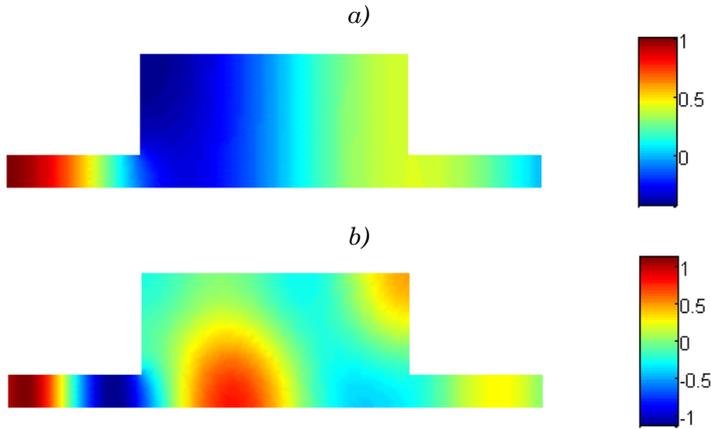


Figura A.8. Geometría 1. Campo de presiones: a) 900 Hz; b) 2500 Hz.

Puede observarse que en el primer caso el frente de ondas es prácticamente plano en todo el dominio salvo en el entorno de los cambios de sección, mientras que a 2500 Hz sólo existe onda plana en los conductos de entrada y salida. Los modelos con corrección de longitud presentados en el Capítulo 2 incluyen el efecto de los modos evanescentes que aparecen en las discontinuidades geométricas, como el presente en la Figura A.8 *a*) y amplían el rango de validez del modelo de onda plana prácticamente hasta el primer modo de presión propagante de la cámara.

A continuación se representa el *TL* obtenido para una cámara con conductos extendidos similar a la representada en la Figura A.9, la cámara tiene una longitud total 0.34 m, los conductos extendidos tienen diámetro 0.05 m y longitudes 0.16 y 0.07 m respectivamente,

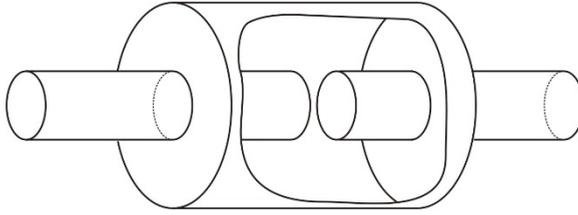


Figura A.9. Cámara con tubos extendidos.

Los conductos de entrada y salida son circulares de diámetro 0.05 m y la cámara central, también circular, tiene diámetro 0.2 m. En la Figura A.10, está representado el resultado obtenido mediante MEF, el modelo de onda plana sin y con corrección de longitud.

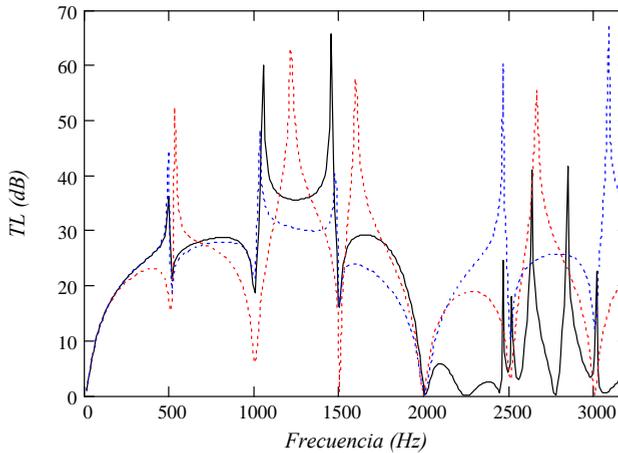


Figura A.10. TL de geometría 6: —, MEF; ····, OP; ····, OP con corrección de longitud.

En cámaras con conductos extendidos, la teoría de onda plana tiene un rango de validez en frecuencia muy limitado ya que este tipo de configuración es muy sensible a los parámetros geométricos del silenciador. La aplicación de la corrección de longitud en el modelo unidimensional aporta una mejora significativa en el sentido de que logra situar las bandas de paso y los picos de atenuación con bastante más precisión. En las condiciones de la simulación la frecuencia del primer modo de presión axisimétrico de la cámara es igual a 2072 Hz. Puede comprobarse en la gráfica de la Figura A.10, que a partir de esta frecuencia las predicciones obtenidas bajo la hipótesis de onda plana se alejan completamente de la simulación numérica, como cabía esperar.

Se procede a continuación a realizar el mismo estudio que se hizo asumiendo la teoría de onda plana para ver si efectivamente las bandas de paso de la cámara en estudio coinciden con las bandas de paso de la cámara de expansión simple

de iguales dimensiones externas y los picos de atenuación corresponden a los de las cámaras reversas de longitud igual a los extendidos.

Las cámaras reversas empleadas para el gráfico de la Figura A.12 tienen el conducto de entrada en el centro de la cámara y el centro del conducto de salida a una distancia de 0.0625 m del centro de la cámara, similar a la representada en la Figura A.11. Cabe indicar que, para abreviar el desarrollo, la metodología de elementos finitos presentada en este apéndice corresponde a configuraciones axisimétricas ya que las geometrías ensayadas presentan esta particularidad, sin embargo, el equipo investigador dispone de herramientas tridimensionales de elementos finitos que permiten abordar el cálculo acústico de la cámara reversa analizada a continuación.

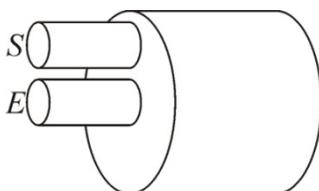


Figura A.11. Cámara reversa.

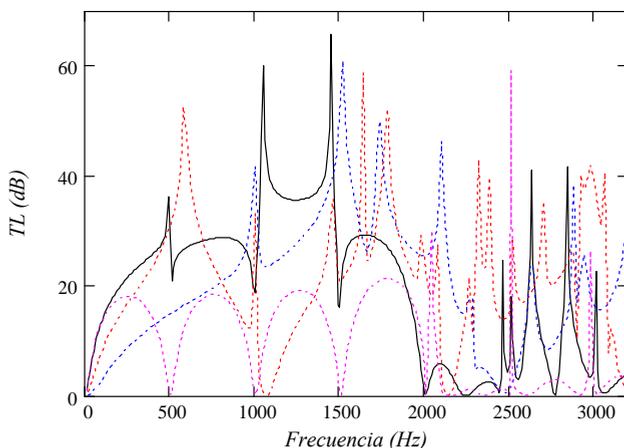


Figura A.12. Correlación del TL de una cámara con conductos extendidos con el de geometrías básicas: —, Geometría 6; -.-, Cámara reversa  $L = 0.16$  m; -.-., Cámara reversa  $L = 0.07$  m; -.-.-, Cámara de expansión simple  $L = 0.34$  m.

Puede observarse que se cumple en parte la previsión de la teoría de onda plana en cuanto a la localización de las bandas de paso y algunos de los picos de atenuación. En concreto, las 4 primeras bandas de paso de la geometría en estudio, están situadas en frecuencias muy cercanas a las mismas

correspondientes a la cámara de expansión simple con la misma longitud. Con respecto a los picos de atenuación, la teoría de onda plana prevé su localización en las mismas frecuencias que los picos de atenuación de cámaras reversas de igual longitud al extendido. Esta correspondencia no es tan evidente en los resultados obtenidos mediante elementos finitos, ya que sólo los tres primeros picos se sitúan ligeramente cercanos a los picos de atenuación de las correspondientes cámaras reversas. Una de las principales razones es que la teoría de onda plana no tiene en cuenta la posición radial de los conductos de entrada y salida y que modifica sensiblemente la respuesta acústica del silenciador como se deriva del estudio de Eriksson [66] y está reflejado en trabajos como [25, 26, 128]. De este estudio se deduce que la teoría de onda plana es en cierto modo útil únicamente en los estudios preliminares del diseño de silenciadores.

### A.5.1.1 Efecto del flujo medio

En este apartado se va a mostrar el efecto del flujo medio en las geometrías analizadas anteriormente. Se ha escogido la cámara de expansión simple correspondiente a la geometría 3 de la Tabla A.1, por ser aquella geometría con menor diámetro de cámara y por lo tanto la de mayor valor de flujo en el interior de la cámara. Los resultados obtenidos pueden verse en la Figura A.13.

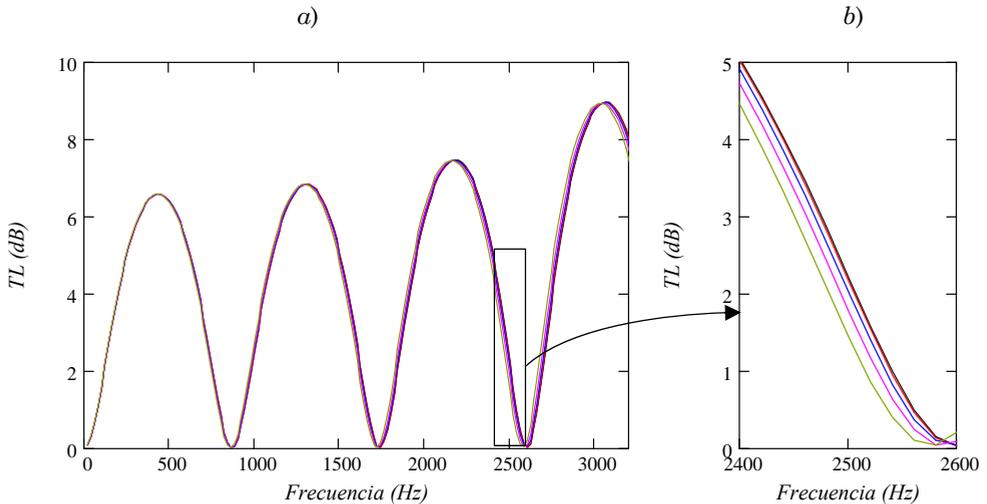


Figura A.13. a) TL de geometría 3; b) detalle ampliado: —, sin flujo medio; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ ; —,  $M = 0.3$ ; —,  $M = 0.4$ .

La influencia del flujo medio es el desplazamiento de la curva de atenuación ligeramente hacia la izquierda y la diferencia del TL es prácticamente inapreciable. Sin embargo no ocurre lo mismo para los términos de la matriz de

transferencia que representan el comportamiento del silenciador (ver Figuras A.14 - A.17).

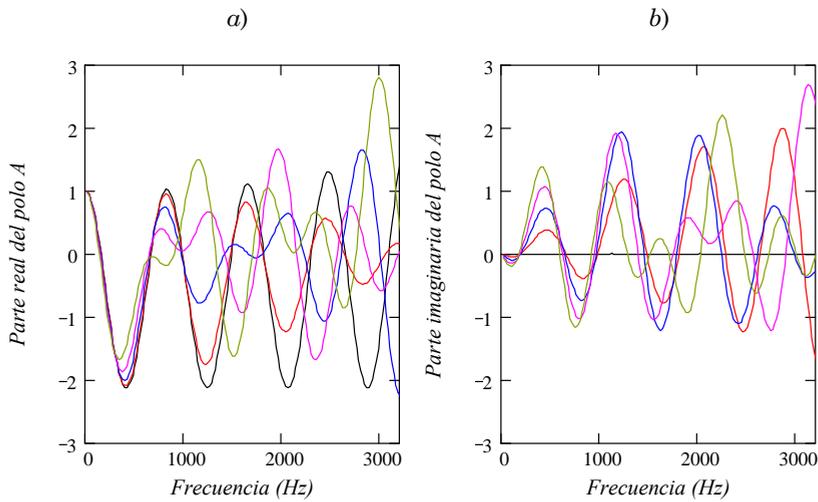


Figura A.14. Polo A de la matriz de transferencia de la geometría 3: a) parte real; b) parte imaginaria: —, sin flujo medio; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ ; —,  $M = 0.3$ ; —,  $M = 0.4$ .

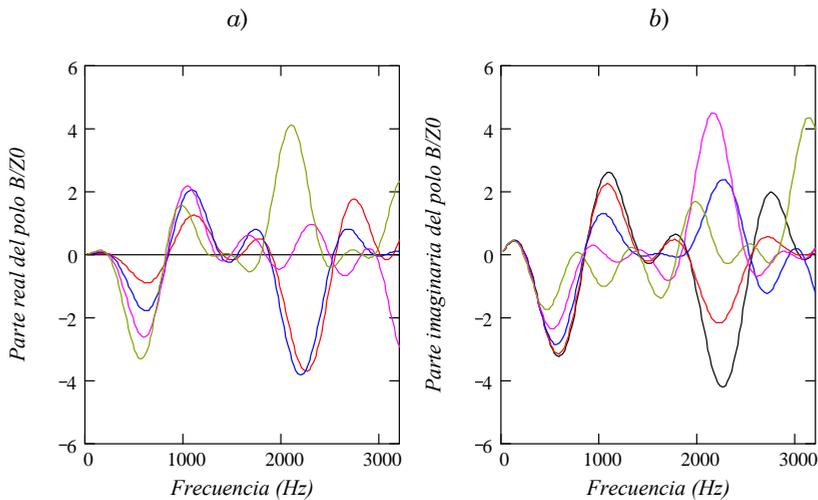


Figura A.15. Polo B adimensionalizado de la matriz de transferencia de la geometría 3: a) parte real; b) parte imaginaria: —, sin flujo medio; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ ; —,  $M = 0.3$ ; —,  $M = 0.4$ .

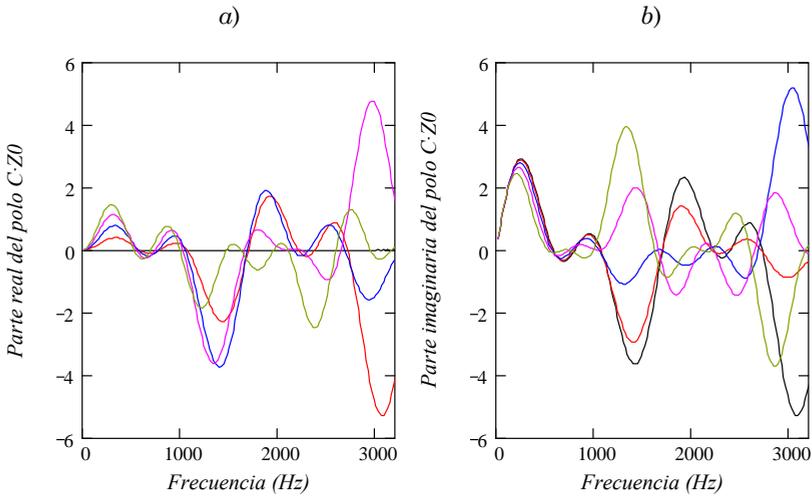


Figura A.16. Polo C adimensionalizado de la matriz de transferencia de la geometría 3: a) parte real; b) parte imaginaria: —, sin flujo medio; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ ; —,  $M = 0.3$ ; —,  $M = 0.4$ .

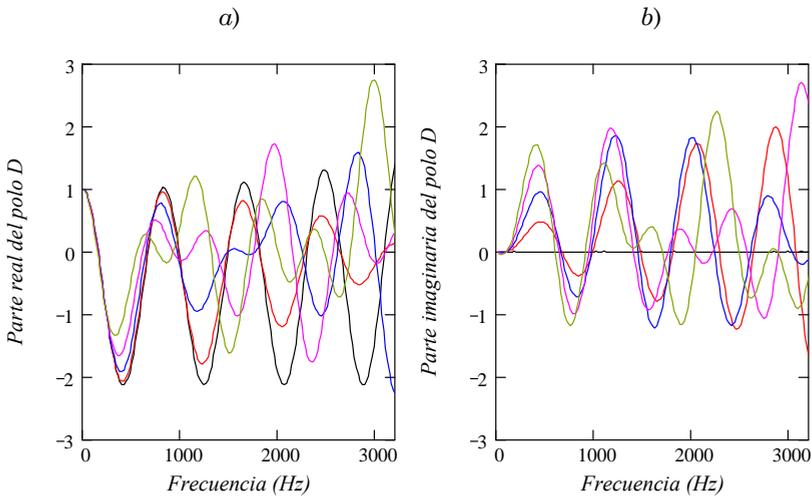


Figura A.17. Polo D de la matriz de transferencia de la geometría 3: a) parte real; b) parte imaginaria: —, sin flujo medio; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.2$ ; —,  $M = 0.3$ ; —,  $M = 0.4$ .

### A.5.2 Configuraciones con disipación

En este apartado se van a representar los resultados obtenidos para algunas configuraciones del tipo de las ensayadas experimentalmente.

#### A.5.2.1 Resonador con conductos extendidos y tubo perforado

En la Figura A.19 se muestra el  $TL$  obtenido mediante la aplicación del MEF a un silenciador como el mostrado en la Figura A.18, de dimensiones  $d_1 = 0.05$  m,  $d_2 = 0.2$  m,  $L_a = L_b = 0.05$  m,  $L = 0.1$  m, es decir con dimensiones exteriores de la cámara igual a la geometría 1 del apartado anterior. Las dimensiones que caracterizan el tubo perforado son diámetro de orificio  $d_h = 0.003$  m, porosidad  $\sigma = 10\%$  y espesor del tubo perforado  $t_p = 0.001$  m. La impedancia del tramo perforado se ha obtenido haciendo uso de la expresión (2.52).

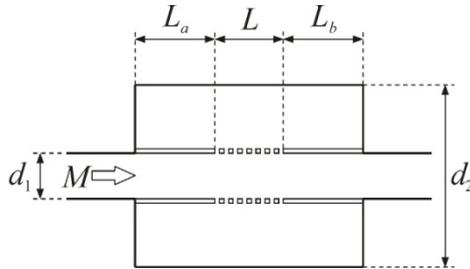


Figura A.18. Resonador con conductos extendidos y tubo perforado.

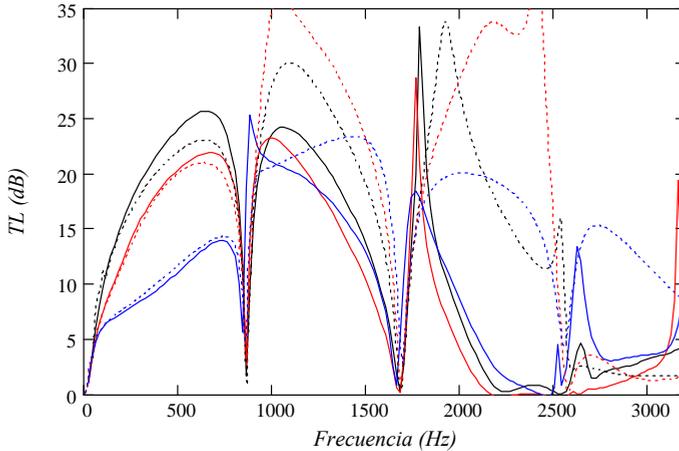


Figura A.19.  $TL$  de resonador con conductos extendidos y tubo perforado. Sin flujo medio: —, MEF; ···, OP;  $M = 0.1$ : —, MEF; ···, OP;  $M = 0.2$ : —, MEF; ···, OP.

Puede observarse que la presencia de flujo afecta de forma distinta a baja que a alta frecuencia. A baja frecuencia disminuye la amplitud del  $TL$  con el aumento de flujo, sin embargo, se observa un ligero aumento en el rango de frecuencias altas. La presencia de flujo provoca también el aumento del  $TL$  en las bandas de paso debido a la disipación en los orificios del conducto perforado. Se ha incluido el  $TL$  obtenido mediante la teoría de onda plana. Se observa que ésta también prevé una respuesta acústica distinta a baja y a alta frecuencia.

### A.5.2.2 Silenciador con material absorbente

En este apartado se presenta el  $TL$  obtenido para algunos silenciadores disipativos como el representado en la Figura A.20.

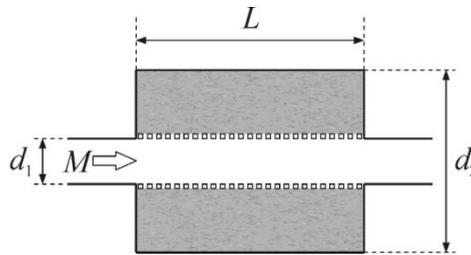


Figura A.20. Resonador con material absorbente.

Se utilizarán como base las geometrías 1 y 2 de la Tabla A.1. Se ha calculado el  $TL$  correspondiente a la geometría 1 para distintos valores de resistividad y también para la geometría 2, con una resistividad intermedia, que tiene las mismas dimensiones radiales que la 1 pero es de mayor longitud. Se ha supuesto que el material absorbente está soportado por una rejilla de elevada porosidad que es acústicamente transparente y no introduce ningún efecto adicional. En el tratamiento matemático es equivalente a imponer una impedancia de superficie perforada nula. El material absorbente está caracterizado por el número de onda dado en la ecuación (2.248) y la impedancia característica expresada en la ecuación (2.249). La Figura A.21 muestra los resultados.

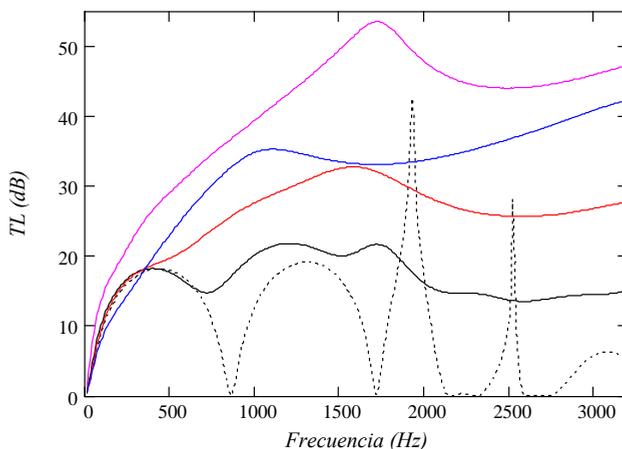


Figura A.21. TL de geometría 1: ----,  $R_f = 0$ ; —,  $R_f = 1000$  rayl/m; —,  $R_f = 4896$  rayl/m; —,  $R_f = 17378$  rayl/m; geometría 2: —,  $R_f = 4896$  rayl/m.

Se observa que la presencia del material absorbente elimina las bandas de paso de la cámara de expansión simple y el TL aumenta en casi todo el rango de frecuencia al aumentar la resistividad del mismo. A muy baja frecuencia una mayor resistividad produce un efecto de saturación de la fibra y el bloqueo de entrada de energía acústica. A efectos prácticos, este bloqueo parece implicar una reducción del cambio de sección efectivo. Otro fenómeno interesante que se constata es que para la misma resistividad se obtienen mayores niveles de atenuación aumentando la longitud del silenciador tal y como había previsto la teoría de onda plana. En efecto la longitud del silenciador contribuye de forma importante en el nivel de atenuación del mismo. A continuación se reproduce el mismo estudio que se hizo bajo el supuesto de comportamiento de onda plana expuesto en el apartado 2.9.2.3, comparando el TL obtenido para la geometría 1 con otros silenciadores que tienen el mismo volumen de material absorbente, siempre con una resistividad de 4896 rayl/m. La siguiente tabla recoge las dimensiones principales.

Geometría	$d_1$ (m)	$d_2$ (m)	$L_2$ (m)
1	0.05	0.2000	0.2
1b	0.05	0.166	0.3
1c	0.05	0.146	0.4

Tabla A.2. Dimensiones cámara de expansión simple con material absorbente.

Los resultados recogidos en la Figura A.22, muestran que el mismo volumen de fibra puede proporcionar mayores niveles de atenuación si se distribuye a lo largo de mayor longitud, coincidiendo con las conclusiones del apartado 2.9.2.3 obtenidas con modelos de la teoría de onda plana. Adicionalmente se observa la

tendencia contraria a muy baja frecuencia, lo que también predecía el modelo de onda plana.

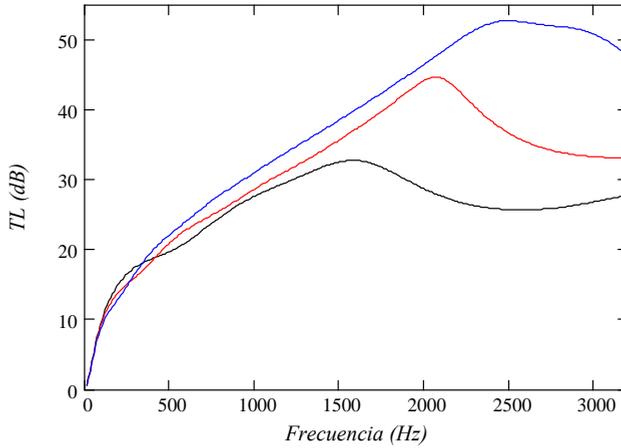


Figura A.22. Efecto de las dimensiones de la cámara en el TL: —, geometría 1; —, geometría 1b; —, geometría 1c.

Por último se ha estudiado el efecto del flujo en la atenuación de un silenciador disipativo. Se ha tomado como cámara de partida la correspondiente a la geometría 1 y material absorbente de  $R_f = 4896$  rayl/m soportado por una rejilla. Los resultados se muestran en la gráfica de la Figura A.23.

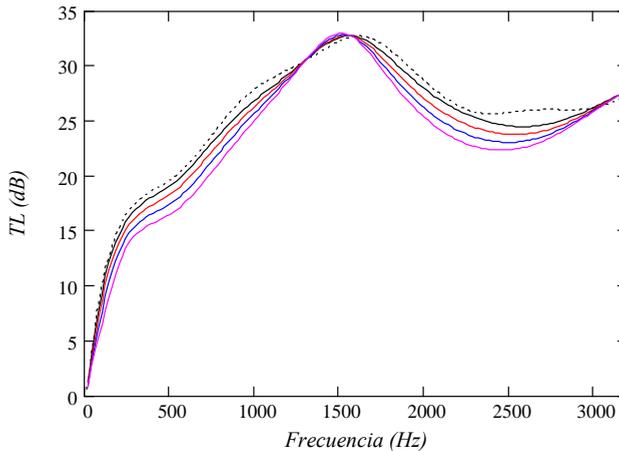


Figura A.23. Efecto del flujo medio en el TL: ----, sin flujo medio; —,  $M = 0.05$ ; —,  $M = 0.1$ ; —,  $M = 0.15$ ; —,  $M = 0.2$ .

La gráfica muestra que la presencia de flujo medio en este tipo de silenciadores produce la convección de energía acústica aguas abajo provocando una ligera disminución del  $TL$  en la mayor parte del rango de frecuencias.

## A.6 Conclusiones

En primer lugar se ha aplicado el MEF al problema acústico. El interés responde a las posibilidades que esta herramienta de cálculo tiene para adaptarse a cualquier tipo de geometría.

Partiendo de la ecuación convectiva clásica que define el campo de presiones en presencia de flujo medio se ha formulado el problema acústico empleando la técnica de residuos ponderados junto con la formulación de Galerkin.

Se ha expuesto el procedimiento habitualmente empleado para la modelización de superficies perforadas mediante el acoplamiento de subdominios en base a la impedancia acústica del conducto perforado. También se ha analizado el efecto sobre el  $TL$  de la presencia de materiales absorbentes.

En base a los resultados obtenidos se ha constatado que la teoría de onda plana desarrollada en el Capítulo 2 tiene un rango de frecuencias válido muy limitado incluso por debajo de la frecuencia de corte del primer modo de presión no plano.

Se ha estudiado también el efecto del flujo medio y de la influencia de algunos parámetros geométricos en silenciadores disipativos.



## Bibliografía

A continuación se detalla la relación de referencias bibliográficas. Las primeras citas, corresponden a normativas de diferentes ámbitos ordenadas cronológicamente. El resto de documentos se han ordenado alfabéticamente por apellido del primer autor.

- 1 43/2008. *Decreto 43/2008, de 11 de abril, del Consell, por el que se modifica el Decreto 19/2004, de 13 de febrero, del Consell, por el que se establecen normas para el control del ruido producido por los vehículos a motor, y el Decreto 104/2006, de 14 de julio, del Consell, de planificación y gestión en materia de contaminación acústica.* Boletín oficial de la Generalitat Valenciana, Valencia, 2008.
- 2 *Ordenanza municipal de protección contra la contaminación acústica.* Boletín oficial de la provincia de Valencia, Valencia, 2008.
- 3 2007/34/CEE. *Adaptación al progreso técnico de la Directiva 70/157/CEE del Consejo, sobre el nivel sonoro admisible y el dispositivo de escape de los vehículos de motor.* Diario oficial de las Comunidades Europeas, Bruselas, 2007.
- 4 RD 1367/2007. *Desarrollo de la Ley 37/2003, de 17 de noviembre, del Ruido, en lo referente a zonificación acústica, objetivos de calidad y emisiones acústicas.* Boletín oficial del Estado, Madrid, 2007.
- 5 19/2004. *Decreto 19/2004, de 13 de febrero, del Consell de la Generalitat, por el que se establecen normas para el control del ruido producido por los vehículos a motor.* Boletín oficial de la Generalitat Valenciana, Valencia, 2004.
- 6 37/2003. *Ley de Ruido.* Boletín oficial del Estado, Madrid, 2003.
- 7 UNE-EN ISO 10534-1. *Determinación del coeficiente de absorción acústica y de la impedancia acústica en tubos de impedancia. Parte 1: Método del rango de onda estacionaria.* AENOR, Madrid, 2002.
- 8 UNE-EN ISO 10534-2. *Determinación del coeficiente de absorción acústica y de la impedancia acústica en tubos de impedancia. Parte 2: Método de la función de transferencia.* AENOR, Madrid, 2002.
- 9 7/2002. *Protección contra la Contaminación Acústica.* Boletín oficial de la Generalitat Valenciana, Valencia, 2002.
- 10 ASTM C 384-95. *Standard test method for impedance and absorption of acoustical materials by the impedance tube method.* American Society for Testing and materials, Filadelfia, 1995.

- 11 ASTM E 1050-90. *Standard test method for impedance and absorption of acoustical materials using a tube, two microphones and a digital frequency analysis system*. American Society for Testing and materials, Filadelfia, 1995.
- 12 70/157/CEE. *Nivel sonoro admisible y el dispositivo de escape de los vehículos a motor*. Diario oficial de las Comunidades Europeas, Bruselas, 1970.
- 13 Åbom, M. Measurement of the scattering-matrix of acoustical two-ports. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5, 89-104, 1991.
- 14 Åbom, M. Derivation of four-pole parameters including higher order mode effects for expansion chamber mufflers with extended inlet and outlet. *Journal of Sound and Vibration*, 137, 403-418, 1990.
- 15 Åbom, M. y Bodén, H. Error analysis of two-microphone measurements in ducts with flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83, 2429-2438, 1988.
- 16 Abrahamson, A.L. A finite element formulation for sound propagation in axisymmetric ducts containing compressible mean flow. Technical Report 77-1301, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1977.
- 17 Abramowitz, M. y Stegun, I.A. *Handbook of mathematical functions*, Dover publications, Nueva York, 1972.
- 18 Albelda, J. *Metodologías de análisis acústico de silenciadores mediante técnicas modales y multidominio*. Tesis Doctoral, Dpto. Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2004.
- 19 Alfredson, R.J. y Davies, P.O.A.L. Performance of exhaust silencer components. *Journal of Sound and Vibration*, 15, 175-196, 1971.
- 20 Allam, S. y Bodén, H. Methods for accurate determination of acoustic two-port data in flow ducts. *12th International Congress on Sound and Vibration*. Lisboa, 2005.
- 21 Allard, J.F., Aknine, A. y Depollier, C. Acoustical properties of partially reticulated foams with high and medium flow resistance. *Journal of the Acoustical Society of America*, 79, 1734-1740, 1986.
- 22 Allard, J.F. y Atalla, N. *Propagation of sound in porous media*, John Wiley & Sons, Londres, 2009.
- 23 Allard, J.F. y Champoux, Y. New empirical equations for sound-propagation in rigid frame fibrous materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 91, 3346-3353, 1992.

- 24 Antebas, A.G., Denia, F.D., Pedrosa, A.M. y Fuenmayor, F.J. A finite element approach for the acoustic modeling of perforated dissipative mufflers with non-homogeneous properties. *Mathematical and Computer Modelling*, 57, 1970-1978, 2013.
- 25 Antebas, A.G.; Denia, F.D.; Pedrosa, A.M. y Fuenmayor, F.J. Modelado analítico multidimensional del comportamiento acústico en silenciadores de escapes de cámara reversa con material absorbente y placa perforada. V *Congreso Ibérico de Acústica, XXIX Congreso Español de Acústica*, Coímbra, Portugal, 2008.
- 26 Antebas, A.G.; Pedrosa, A.M.; Denia, F.D. y Fuenmayor, F.J. Acoustic behaviour of circular mufflers with single inlet and double opposite outlet. *19th International Congress on Acoustics*. Madrid, 2007.
- 27 Attenborough, K. Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular-Materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 73, 785-799, 1983.
- 28 Bendat, J.S. y Piersol, A.G. *Random data. Analysis and measurement procedures*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1986.
- 29 Bento, J.L. *Acoustic characteristics of perforate liners in expansion chambers*. Tesis Doctoral, University of Southampton, Southampton, 1983.
- 30 Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 1. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28, 168-178, 1956.
- 31 Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 2. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28, 179-191, 1956.
- 32 Bodén, H. y Åbom, M. Influence of errors on the two-microphone method for measuring acoustic properties in ducts. *Journal of the Acoustical Society of America*, 79, 541-549, 1986.
- 33 Broatch, A. *Medida de la respuesta acústica de silenciadores*. Tesis Doctoral, Dpto. de Máquinas y Motores Térmicos, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1995.
- 34 Champoux, Y. y Allard, J.F. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous-media. *Journal of Applied Physics*, 70, 1975-1979, 1991.
- 35 Chu, W.T. Extension of the two-microphone transfer-function method for impedance tube measurements. *Journal of the Acoustical Society of America*, 80, 347-348, 1986.

- 36 Chu, W.T. Transfer function technique for impedance and absorption measurements in an impedance tube using a single microphone. *Journal of the Acoustical Society of America*, 80, 555-560, 1986.
- 37 Chung, J.Y. y Blaser, D.A. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68, 907-913, 1980.
- 38 Chung, J.Y. y Blaser, D.A. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. II. Experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68, 914-920, 1980.
- 39 Chung, J.Y. y Blaser, D.A. Transfer-function method of measuring acoustic intensity in a duct system with flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68, 1570-1577, 1980.
- 40 Coyette, J.P. Flow acoustics using finite elements. Technical background and application to muffler systems. Technical report, LMS International, 1995.
- 41 Craggs, A. A finite element method for damped acoustic systems: An application to evaluate the performance of reactive mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 48, 377-392, 1976.
- 42 Craggs, A. An acoustic finite element approach for studying boundary flexibility and sound transmission between irregular enclosures. *Journal of Sound and Vibration*, 30, 343-357, 1973.
- 43 Craggs, A. The use of simple three-dimensional acoustic finite elements for determining the natural modes and frequencies of complex shaped enclosures. *Journal of Sound and Vibration*, 23, 331-339, 1972.
- 44 Crocker, M.J. *Handbook of Acoustics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1998.
- 45 Cummings, A. The effects of grazing turbulent pipe-flow on the impedance of an orifice. *Acustica*, 61, 233-242, 1986.
- 46 Cummings, A. y Beadle, S.P. Acoustic properties of reticulated plastic foams. *Journal of Sound and Vibration*, 175, 115-133, 1994.
- 47 Dalmont, J.P. Acoustic impedance measurement, part I: A review. *Journal of Sound and Vibration*, 243, 427-439, 2001.
- 48 Dalmont, J.P. Acoustic impedance measurement, part II: A new calibration method. *Journal of Sound and Vibration*, 243, 441-459, 2001.
- 49 Davies, P.O.A.L. Practical flow duct acoustics. *Journal of Sound and Vibration*, 124, 91-115, 1988.

- 50 Davies, P.O.A.L. Flow-acoustic coupling in ducts. *Journal of Sound and Vibration*, 77, 191-209, 1981.
- 51 Davies, P.O.A.L. y Holland, K.R. The observed aeroacoustic behaviour of some flow-excited expansion chambers. *Journal of Sound and Vibration*, 239, 695-708, 2001.
- 52 Davies, P.O.A.L. y Holland, K.R. Intake and exhaust system orifice noise assessment. *European Conference on Vehicle Noise and Vibration 2000*. Londres, 2000.
- 53 Delany, M.E. y Bazley, E.N. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, 3, 105-116, 1970.
- 54 Denia, F.D. *Modelado del comportamiento acústico de silenciadores de escape mediante técnicas analíticas y el método de elementos finitos*. Tesis Doctoral, Dpto. Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2003.
- 55 Denia, F.D., Antebas, A.G., Selamet, A. y Pedrosa, A.M. Acoustic characteristics of circular dissipative reversing chamber mufflers. *Noise Control Engineering Journal*, 59, 234-246, 2011.
- 56 Denia, F.D.; Baeza, L.; Albelda, J. y Fuenmayor, F.J. Acoustic behaviour of elliptical mufflers with single-inlet and double outlet. *10th International Congress on Sound and Vibration*. Estocolmo, 2003.
- 57 Denia, F.D.; Fuenmayor, F.J.; Torregrosa, A.J. y Selamet, A. Numerical modelling of thermal effects on the acoustic attenuation of dissipative mufflers. *41st International Congress and Exposition on Noise Control Engineering (Internoise)*. Nueva York, 2012.
- 58 Denia, F.D.; Fuenmayor, F.J.; Tur, M. y Albelda, J. Atenuación de ruido en silenciadores con geometría cónica. Modelado numérico y modal y medida experimental. *XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*. Cádiz, 2002.
- 59 Denia, F.D.; Ródenas, J.J.; Roda, A. y Broatch, A. Estudio numérico y experimental de la atenuación acústica en silenciadores elípticos con placa perforada. *V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. Madrid, 2002.
- 60 Denia, F.D., Selamet, A., Fuenmayor, F.J. y Kirby, R. Acoustic attenuation performance of perforated dissipative mufflers with empty inlet/outlet extensions. *Journal of Sound and Vibration*, 302, 1000-1017, 2007.
- 61 Denia, F.D., Selamet, A., Fuenmayor, F.J. y Kirby, R. Sound attenuation in partially-filled perforated dissipative mufflers with extended inlet/outlet. *12th International Congress on Sound and Vibration*. Lisboa, 2005.

- 62 Dickens, P., Smith, J. y Wolfe, J. Improved precision in measurements of acoustic impedance spectra using resonance-free calibration loads and controlled error distribution. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121, 1471-1481, 2007.
- 63 Dokumaci, E. Matrizant approach to acoustic analysis of perforated multiple pipe mufflers carrying mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 191, 505-518, 1996.
- 64 Du, J. y Ouyang H. Flow-generated tones inside and outside mufflers with expansion chambers. *Noise Control Engineering Journal*, 60, 209-219, 2012.
- 65 English, E.J. y Holland, K.R. Aeroacoustic sound generation in simple expansion chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 128, 2589-2595, 2010
- 66 Eriksson, L. J. Effect of inlet/outlet locations on higher modes in silencers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 72, 1208-1211, 1982
- 67 Fock, V.A. A theoretical investigation of the acoustical conductivity of a circular aperture in a wall put across a tube. *Comptes Rendus De L'Academie Des Sciences De L'Urss*, 31, 875-878, 1941.
- 68 Franzini, J. *Mecánica de fluidos con aplicaciones en ingeniería*, McGraw-Hill, Madrid, 1999
- 69 Garrison, G.D., Schnell, A.C., Baldwin, C.D. y Russell, P.R. Suppression of combustion oscillations with mechanical damping devices. Technical Report FR3299, Pratt and Whitney Aircraft, 1969.
- 70 Gatley, W.S. y Cohen, R. Methods for Evaluating the Performance of Small Acoustic Filters. *Journal of the Acoustical Society of America*, 46, 6-16, 1969.
- 71 Gladwell, G.M.L. A variational formulation of damped acousto-structural vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 4, 172-186, 1966.
- 72 Gladwell, G.M.L. y Mason, V. Variational finite element calculation of acoustic response of a rectangular panel. *Journal of Sound and Vibration*, 14, 115-135, 1971.
- 73 Gladwell, G.M.L. y Zimmermann, G. On energy and complementary energy formulations of acoustic and structural vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 3, 233-241, 1966.
- 74 Glav, R. y Åbom, M. A general formalism for analyzing acoustic 2-port networks. *Journal of Sound and Vibration*, 202, 739-747, 1997.

- 75 Goldman, A.L. y Chung, C.H. Impedance of an orifice under a turbulent boundary-layer with pressure-gradient. *Journal of the Acoustical Society of America*, 71, 573-579, 1982.
- 76 Goldman, A.L. y Panton, R.L. Measurement of acoustic impedance of an orifice under a turbulent boundary-layer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 60, 1397-1404, 1976.
- 77 Holland, K.R. y Davies, P.O.A.L. The measurement of sound power flux in flow ducts. *Journal of Sound and Vibration*, 230, 915-932, 2000.
- 78 Holland, K.R., Davies, P.O.A.L. y Van der Walt, D.C. Sound power flux measurements in strongly exited ducts with flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112, 2863-2871, 2002.
- 79 Ih, J.G. y Lee, B.H. Analysis of higher-order mode effects in the circular expansion chamber with mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 77, 1377-1388, 1985.
- 80 Ingard, K.U. On the design of acoustic resonators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 25, 1037-1061, 1953.
- 81 Ingard, K.U. e Ising, H. Acoustic nonlinearity of an orifice. *Journal of the Acoustical Society of America*, 42, 6-17, 1967.
- 82 Ingard, K.U. y Singhal, V.K. Effect of flow on the acoustic resonances of an open-ended duct. *Journal of the Acoustical Society of America*, 58, 788-793, 1975.
- 83 Ingard, K.U. y Singhal, V.K. Upstream and downstream sound radiation into a moving fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*, 54, 1343-1346, 1973.
- 84 Jayaraman, K. y Yam, K. Decoupling Approach to Modeling Perforated Tube Muffler Components. *Journal of the Acoustical Society of America*, 69, 390-396, 1981.
- 85 Jing, X.D., Sun, X.F., Wu, J.S. y Meng, K. Effect of grazing flow on the acoustic impedance of an orifice. *AIAA Journal*, 39, 1478-1484, 2001.
- 86 Johnson, D.L., Koplik, J. y Dashen, R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 176, 379-402, 1987.
- 87 Kang, Z. y Ji, Z. Acoustic length correction of duct extension into a cylindrical chamber. *Journal of Sound and vibration*, 310, 781-791, 2008.
- 88 Karal, F.C. The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section. *Journal of the Acoustical Society of America*, 25, 327-334, 1953.

- 89 Kathuriya, M.L. y Munjal, M.L. Accurate method for experimental evaluation of acoustical impedance of a black box. *Journal of the Acoustical Society of America*, 58, 451-454, 1975.
- 90 Kathuriya, M.L. y Munjal, M.L. Experimental evaluation of the aeroacoustic characteristics of a source of pulsating gas flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 65, 240, 1979.
- 91 Kim, Y.H. y Yoon, D.B. An experimental study of the acoustic characteristics of perforated pipe in terms of wave number and porosity. *Journal of Sound and Vibration*, 183, 115-127, 1995.
- 92 Kirby, R. Transmission loss predictions for dissipative silencers of arbitrary cross section in the presence of mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114, 200-209, 2003.
- 93 Kirby, R. Simplified techniques for predicting the transmission loss of a circular dissipative silencer. *Journal of Sound and Vibration*, 243, 403-426, 2001.
- 94 Kirby, R. y Cummings, A. Prediction of the bulk acoustic properties of fibrous materials at low frequencies. *Applied Acoustics*, 56, 101-125, 1999.
- 95 Kirby, R. y Cummings, A. The impedance of perforated plates subjected to grazing gas flow and backed by porous media. *Journal of Sound and Vibration*, 217, 619-636, 1998.
- 96 Kooi, J.W. y Sarin, S.L. An experimental study of the acoustic impedance of Helmholtz resonator arrays under a turbulent boundary layer. *7th Aeroacoustics Conference*. Palo Alto, California, 1981.
- 97 Lee, S.H. e Ih, J.G. Effect of non-uniform perforation in the long concentric resonator on transmission loss and back pressure. *Journal of Sound and Vibration*, 311, 280-296, 2008.
- 98 Lee, S.H. e Ih, J.G. Empirical model of the acoustic impedance of a circular orifice in grazing mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114, 98-113, 2003.
- 99 Loudon, M.M. The single-pulse method for measuring the transmission characteristics of acoustic system. *Acta Acustica united with Acustica*, 25, 167-172, 1971.
- 100 Lung, T.Y. y Doige, A.G. A time-averaging transient testing method for acoustic properties of piping systems and mufflers with flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 73, 867-876, 1983.
- 101 Mahan, B.H. *Química. Curso universitario*, Fondo Educativo Interamericano, Méjico, 1977.

- 102 Mathur, G.P. A stochastic-analysis for cross-spectral density method of measuring acoustic intensity. *Journal of the Acoustical Society of America*, 74, 1752-1756, 1983.
- 103 Melling, T.H. The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels. *Journal of Sound and Vibration*, 29, 1-65, 1973.
- 104 Melling, T.H. Impedance tube for precision-measurement of acoustic impedance and insertion loss at high sound pressure levels. *Journal of Sound and Vibration*, 28, 23-54, 1973.
- 105 Mott, R.L. *Mecánica de fluidos aplicada*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1996.
- 106 Munjal, M.L. *Acoustics of ducts and mufflers*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1987.
- 107 Munjal, M.L. y Doige, A.G. Theory of a two source-location method for direct experimental evaluation of the four-pole parameters of an aeroacoustic element. *Journal of Sound and Vibration*, 141, 323-333, 1990.
- 108 Munjal, M.L. y Doige, A.G. The two-microphone method incorporating the effects of mean flow and acoustic damping. *Journal of Sound and Vibration*, 137, 135-138, 1990.
- 109 Narayana, T. y Munjal, M.L. Prediction and measurement of the four-pole parameters of a muffler including higher order mode effects. *Noise Control Engineering Journal*, 53, 240, 2005.
- 110 Newland, D. E. *Vibraciones aleatorias y análisis espectral*, Editorial AC, Madrid, 1983.
- 111 Panicker, V.B. y Munjal, M.L. Impedance tube technology for flow acoustics. *Journal of Sound and Vibration*, 77, 573-577, 1981.
- 112 Parrondo, J.L.; Fernández, J.; García, I. y Ruiz, E. Noise transmission through duct divisions in air circuits, considered as three-port acoustic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 296, 183-197, 2006.
- 113 Peat, K.S. The acoustical impedance at discontinuities of ducts in the presence of a mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 127, 123-132, 1988.
- 114 Peat, K.S. The acoustical impedance at the junction of an extended inlet or outlet duct. *Journal of Sound and Vibration*, 150, 101-110, 1991.
- 115 Peat, K.S. y Rathi, K.L. A finite element analysis of the convected acoustic wave motion in dissipative silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 184, 529-545, 1995.

- 116 Pedrosa, A.M.; Denia, F.D.; Ábom, M. y Fuenmayor, F.J. Experimental measurement of acoustic properties by a two source method with simultaneous excitation. *18th International Congress on Sound and Vibration*. Rio de Janeiro, Brasil, 2011.
- 117 Pedrosa, A.M.; Denia, F.D.; Besa, A.J. y Fuenmayor, F.J. A two source method with simultaneous excitation for the acoustic characterization of exhaust systems with mean flow. *42nd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering (Internoise)*. Innsbruck, Austria, 2013.
- 118 Pierce, A.D. Wave-equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87, 2292-2299, 1990.
- 119 Prasad, M.G. y Crocker, M.J. Studies of acoustical performance of a multi-cylinder engine exhaust muffler system. *Journal of Sound and Vibration*, 90, 491-508, 1983.
- 120 Rao, K.N. y Munjal, M.L. Experimental evaluation of impedance of perforates with grazing flow. *Journal of Sound and Vibration*, 108, 283-295, 1986.
- 121 Rey, J. y De Castro, A. *Funciones de Bessel y aplicaciones. Teoría Matemática y aplicación*, Dossat, Madrid, 1958.
- 122 Ross, D.F. A finite element analysis of perforated component acoustic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 79, 133-143, 1981.
- 123 Sahasrabudhe, A.D., Munjal, M.L. y Anantha Ramu, S. Analysis of inertance due to the higher order mode effects in a sudden area discontinuity. *Journal of Sound and Vibration*, 185, 515-529, 1995.,
- 124 Sánchez-Orgaz, E.M., Denia, F.D., Martínez-Casas, J. y Baeza, L. 3D Acoustic Modelling of Dissipative Silencers with Nonhomogeneous Properties and Mean Flow, *Advances in Mechanical Engineering*, Volume 2014, Article ID 537935, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/537935>
- 125 Scott, R.A. An apparatus for accurate measurement of the acoustic impedance of sound-absorbing materials. *Proceedings of the Physical Society*, 58, 253-264, 1946.
- 126 Selamat, A., Denia, F.D. y Besa, A.J. Acoustic behavior of circular dual-chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 265, 967-985, 2003.
- 127 Selamat, A., Easwaran, V. y Falkowski, A.G. Three-pass mufflers with uniform perforations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105, 1548-1562, 1999.

- 128 Selamet, A. y Ji, Z.L. Acoustic attenuation performance of circular flow-reversing chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104, 2867-2877, 1998
- 129 Selamet, A. y Ji, Z.L. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet/outlet. *Journal of Sound and Vibration*, 223, 197-212, 1999.
- 130 Selamet, A. y Ji, Z.L. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: I. Analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 213, 601-617, 1998.
- 131 Selamet, A., Ji, Z.L. y Radavich, P.M. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: II. Comparison with experimental and computational studies. *Journal of Sound and Vibration*, 213, 619-641, 1998.
- 132 Selamet, A., Lee, I.J. y Huff, N.T. Acoustic attenuation of hybrid silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 262, 509-527, 2003.
- 133 Selamet, A. y Radavich, P.M. The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: An analytical, computational and experimental investigation. *Journal of Sound and Vibration*, 201, 407-426, 1997.
- 134 Selamet, A., Xu, M.B., Lee, I.J. y Huff, N.T. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers with inlet/outlet extensions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117, 2078-2089, 2005.
- 135 Selamet, A., Xu, M.B., Lee, I.J. y Huff, N.T. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115, 2091-2099, 2004.
- 136 Seybert, A.F. Two-sensor methods for the measurement of sound intensity and acoustic properties in ducts. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83, 2233-2239, 1988.
- 137 Seybert, A.F. y Ross, D.F. Experimental determination of acoustic properties using a two-microphone random-excitation technique. *Journal of the Acoustical Society of America*, 61, 1362-1370, 1977.
- 138 Sigman, R.K., Majjigi, R.K. y Zinn, B.T. Determination of Turbofan Inlet Acoustics using Finite-Elements. *Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 16, 1139-1145, 1978.
- 139 Singh, R. y Katra, T. Development of an impulse technique for measurement of muffler characteristics. *Journal of Sound and Vibration*, 56, 279-298, 1978.

- 140 Sivian, L.J. Acoustic impedance of small orifices. *Journal of the Acoustical Society of America*, 7, 94-101, 1935.
- 141 Sullivan, J.W. Some gas-flow and acoustic pressure measurements inside a concentric-tube resonator. *Journal of the Acoustical Society of America*, 76, 479-484, 1984.
- 142 Sullivan, J.W. A method for modeling perforated tube muffler components. 1. Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66, 772-778, 1979.
- 143 Sullivan, J.W. A method for modeling perforated tube muffler components. 2. Applications. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66, 779-788, 1979.
- 144 Sullivan, J.W. y Crocker, M.J. Analysis of concentric-tube resonators having unpartitioned cavities. *Journal of the Acoustical Society of America*, 64, 207-215, 1978.
- 145 To, C.W.S. y Doige, A.G. The application of a transient testing method to the determination of acoustic properties of unknown systems. *Journal of Sound and Vibration*, 71, 545-554, 1980.
- 146 Torregrosa, A.J., Broatch, A., Djordjevic, N. y Moreno, D. A basic study on acoustic response of non-symmetric perforated duct mufflers. *SAE Technical Papers*, 2011.
- 147 Torregrosa, A.J., Broatch, A., Payri, R. y González, F. Numerical estimation of end corrections in extended-duct and perforated-duct mufflers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121, 302-308, 1999.
- 148 Vennard, J. y Street, R.L. *Elementos de mecánica de fluidos. Versión SI*, Compañía Editorial Continental, Méjico, 1979.
- 149 Villot, M., Bartel, T.W. y Yaniv, S.L. Uncertainties in the cross-spectral method for acoustic intensity under semireverberant conditions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 79, 691-701, 1986.
- 150 Wagstaff, P.R. y Henrio, J.C. The measurement of acoustic intensity by selective two microphone techniques with a dual channel analyzer. *Journal of Sound and Vibration*, 94, 156-159, 1984.
- 151 Wang, C.N. Numerical decoupling analysis of a resonator with absorbent material. *Applied Acoustics*, 58, 109-122, 1999.
- 152 Wang, C.N., Wu, C.H. y Wu, T.D. A network approach for analysis of silencers with/without absorbent material. *Applied Acoustics*, 70, 208-214, 2009.
- 153 White, F.M. *Mecánica de fluidos*, Mc Graw-Hill, Méjico, 1979.
- 154 White, F. *Viscous fluid flow*, Mc Graw-Hill, Méjico, 1974.

- 155 Wu, Q. Empirical relations between acoustical properties and flow resistivity of porous plastic open-cell foam. *Applied Acoustics*, 25, 141-148, 1988.
- 156 Young, C.I.J. y Crocker, M.J. Acoustical analysis, testing, and design of flow-reversing muffler chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 60, 1111-1118, 1976.
- 157 Young, C.I.J. y Crocker, M.J. Prediction of transmission loss in mufflers by the finite-element method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 57, 144-148, 1975.
- 158 Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. *The Finite Element Method*, Vol. 1. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 5ª edición, 2000.
- 159 Zill, D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, International Thomson, Méjico, 1997.